

0 Organisation

Vorlesung

Astrophysik I,

SS 2003

Jürgen Stutzki

I. Physikalisches Institut der Universität zu Köln

Tel. 3494,

Sprechstunde: vor und nach der Vorlesung

Literatur:

J. Binney & M. Merrifield,

"Galactic Astronomy", 1998, Princeton University Press, Princeton, New Jersey

W. Kaufmann, "Universe", 1991, Freeman, New York

Lang, R., "Astrophysical Formulae" Vol. I & II, Springer, 2000

Mihalas, D., "Galactic Astronomy", 1968, Freeman, San Francisco

Mihalas, D., "Stellar Atmospheres", 1970, Freeman, San Francisco

Pasachoff, J.M., and Filippenko, A,

"The Cosmos: Astronomy in the new Millennium", Harcourt College Publishers, 2001

Scheffler, H., and Elsässer, H.,

"Physik der Sterne und der Sonne", 1990, BI, Mannheim, Wien, Zürich

Scheffler, H., and Elsässer, H., "Bau und Physik der Galaxis", 1982, BI, Mannheim, Wien, Zürich

F. Shu, "The Physical Universe", 1982, University Science Books, Mill Valley, California

Unsöld, A., und Baschek, B., "Der neue Kosmos", 1988, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

Weigert, A., und Wendker, H.F.,

"Astronomie und Astrophysik", 1989, VCH Verlag, Weinheim

WWW-Resourcen:

ASTRO-WEB: <http://www.vilspa.esa.es/astroweb/>

ESO-homepage: <http://www.hq.esa.org/toc/>

Kataloge etc.:

NASA/IPAC extragalactic database: <http://nedwww.ipac.caltech.edu/>

ADC catalog database: <http://adc.gsfc.nasa.gov/>

SkyView sky survey images: <http://skyview.gsfc.nasa.gov/>

STScI digitized sky survey: <http://archive.eso.org/dgi-bin/dss>

Literatur Resourcen:

ADS abstract service: http://cdsads.u-strasbg.fr/abstract_service.html

LANL e-print archive: <http://xxx.lanl.gov/archive/astro-ph>

Zeitpunkt der Vorlesung: Dienstag 15:00 – 17:00; Donnerstag 9:00 - 11:00

Ort: Seminarraum I. Physikalisches Institut

Übungen: ????????

wöchentliche Aufgabenblätter zur Bearbeitung; Durchsicht und Besprechung (mit aktiver Teilnahme); aktive Teilnahme als Bedingung für Schein;

Übungsgruppenleiter: Dr. Mookerjea (Englisch)

Copyright:

Dieses Vorlesungsskript ist aus den vom Autor ab 1990 gehaltenen Kursvorlesungen Astrophysik I und II an der Universität zu Köln entstanden. Es benutzt zum Teil Material aus den einschlägigen Lehrbüchern; insbesondere sind ein Teil der Abbildungen aus dem vorzüglich bebilderten Buch "The Cosmos" von Pasachoff and Fillipenko entliehen. Der Text verweist (bis auf diese Abb. aus "The Cosmos") an den entsprechenden Stellen auf die Quellen (hoffentlich umfassend, so dass sich keiner der Lehrbuch-Autoren übergangen fühlt).

Weiterverwendung des Materials, auch auszugsweise, ist nur nach vorheriger Abstimmung mit dem Autor gestattet.

Das Manuskript ist mit StarOffice 6.0 erstellt und in elektronischer Form auf den Webseiten des I. Physikalischen Instituts der Universität zu Köln in Form von PDF-Dateien verfügbar.

0.1 Einheiten und physikalische Konstanten

Wir benutzen durchweg (obwohl illegal!) cgs- statt MKS-Einheiten. Dies ist nach wie vor in der astrophysikalischen Literatur üblich und eine Änderung ist nicht in Sicht. Die folgende Tabelle fasst die physikalischen Konstanten zusammen, deren Zahlenwerte und Einheiten wir immer wieder benötigen (sie stammt aus dem sehr nützlichen Buch "Astrophysical Formulae" von R. Lang).

<i>Symbol</i>	<i>Bedeutung</i>	<i>Wert</i>
c	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$2.997924562(11) \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$
$h=2\pi\hbar$	Planck'sche Konstante	$6.626196(50) \times 10^{-27} \text{ erg s}$
k	Boltzmann'sche Konstante	$1.380622(59) \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$
e	Elementarladung des Elektrons	$4.803250(21) \times 10^{-10} \text{ esu}$
m	Ruhemasse des Elektrons	$9.109558(54) \times 10^{-28} \text{ g}$
G	Gravitationskonstante	$6.6732(31) \times 10^{-8} \text{ dyn cm}^2 \text{ g}^{-2}$
N_A	Avogadro'sche Zahl	$6.022169(40) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
$a.m.u.$	atomare Masseneinheit (atomic mass unit)	$1.660531(11) \times 10^{-24} \text{ g}$
α	Feinstrukturkonstante	$7.297351(11) \times 10^{-3}$
R_∞	Rydberg-Konstante	$1.09737312(11) \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$
a_0	Bohr'scher Radius	$5.2917715(81) \times 10^{-9} \text{ cm}$
$h/(mc)$	Compton Wellenlänge des Elektrons	$2.4263096(74) \times 10^{-10} \text{ cm}$
$r_0 = e^2/(mc^2)$	klassischer Elektron-Radius	$2.817939(13) \times 10^{-13} \text{ cm}$
$R=Nk$	Gaskonstante	$8.31434(35) \times 10^7 \text{ erg K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
σ	Stefan-Boltzmann-Konstante	$5.66961(96) \times 10^{-5} \text{ erg cm}^2 \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$
σ_T	Thomson-Streuquerschnitt	$6.652453(62) \times 10^{-25} \text{ cm}^2$
$a.u.$	astronomische Einheit (astron. unit)	$1.49597892(1) \times 10^{13} \text{ cm}$
pc	Parsec	$3.0856(1) \times 10^{18} \text{ cm}$
$l.y.$	Lichtjahr	$9.4605 \times 10^{10} \text{ cm}$
M_0	Sonnenmasse	$1.989(2) \times 10^{33} \text{ g}$
R_0	Sonnenradius	$6.9598(7) \times 10^{10} \text{ cm}$
L_0	Sonnenleuchtkraft	$3.826(8) \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$
1 eV	Elektronenvolt	
	assoziierte Wellenlänge	$1.23963 \times 10^{-4} \text{ cm}$
	assoziierte Wellenzahl	$8\ 067.1 \text{ cm}^{-1}$
	assoziierte Frequenz	$2.41838 \times 10^{14} \text{ Hz}$
	assoziierte Energie	$1.60184 \times 10^{-12} \text{ erg}$
	assoziierte Temperatur	$11\ 605.9 \text{ K}$

Tabelle 0.1: Physikalische Konstanten (cgs-System)

1 Übersicht. Der Kosmos

1.1 Warum Astrophysik

Der Sternenhimmel fasziniert die Menschheit schon immer. Die Rätsel der zum einen scheinbar für alle Ewigkeiten feststehenden Sterne und die Bewegung der Planeten und des Mondes vor diesem Fixstern-Hintergrund waren der Anlass zur frühesten wissenschaftlichen Beschäftigung der Menschen.

Während zunächst der Sternenhimmel als ein zusätzlicher Teil der Welt angesehen wurde, der in keinem direkten Zusammenhang mit den Phänomenen auf der Erde steht (außer über den vorgeblichen magischen Einfluss der Gestirne auf das Schicksal der Menschen) wurde mit zunehmendem Verständnis der am Sternenhimmel beobachtbaren Phänomene immer klarer, dass die Sterne (und genauer gesagt die Phänomene im gesamten Weltall) denselben physikalischen Gesetzen gehorchen, die auch die irdischen Vorgänge beschreiben. Damit rückte der Mensch immer mehr aus der Sonderstellung heraus, die er in den alten philosophischen und religiösen Weltbildern innehatte, und begriff sich zunehmend als für den gesamten Kosmos unwesentlicher kleiner Teil des Ganzen. Nach heutigem Wissensstand ist es durchaus plausibel, dass sich auf vielen anderen Planeten auf einer der 100 Milliarden Sonnen in irgendeiner der anderen 100 Milliarden Milchstraßen auf ähnliche Weise intelligentes Leben entwickelt hat wie auf der Erde. Insofern sehen wir uns heute als (vorläufiger?) Endpunkt einer kosmischen Entwicklung. Nach wie vor ist es eine der spannendsten Fragen sowohl für die physikalische Beschreibung der Welt wie auch für den Entwurf eines wie auch immer motivierten Weltbildes, ob diese Entwicklung zwingend so oder ähnlich wie auf der Erde auch in anderen Planetensystemen abläuft, oder ob die Erde eine große Ausnahme im Kosmos darstellt.

Eines der Ziele der Kursvorlesung Astrophysik ist es, die Grundlagen des heutigen, modernen physikalischen Weltbildes zu vermitteln und die Schritte, die zum physikalischen Verständnis des Kosmos geführt haben, nachzuvollziehen. Neben dieser spannenden grundsätzlichen Fragestellung der Astrophysik gibt es eine ganze Reihe anderer Gründe, die Astrophysik zum Pflichtwahlwach in der Physik-Ausbildung zu machen und sich als Physiker mit der astrophysikalischen Forschung zu beschäftigen.

Da wir in der Astrophysik ausschließlich auf die reine Beobachtung der astronomischen Signale beschränkt sind, ist es eine besondere intellektuelle Herausforderung, aus dem Puzzle der Beobachtungsdaten durch kritische Fragestellungen und gezielte weiterführende Beobachtungen ein schlüssiges Bild über die Vorgänge im Kosmos zu gewinnen. Wir können nicht wie im Laborexperimente die das zu untersuchende physikalische System bestimmenden Parameter gezielt beeinflussen, sondern können lediglich versuchen die Ordnung in den vielfältigen beobachteten Phänomenen zu erkennen und damit die physikalisch relevanten Prozesse und Gesetzmäßigkeiten zu identifizieren. Auch die zeitliche Entwicklung können wir wegen der langen Zeitskalen nicht direkt beobachten, sondern müssen die verschiedenen beobachteten Systeme als Schnapschüsse einer zeitlichen Entwicklung interpretieren lernen, um so die Entwicklung der astrophysikalischen Objekte zu verstehen.

Auch wenn sich bisher bestätigt hat, dass alle astrophysikalischen Vorgänge denselben physikalischen Gesetzen genügen, die wir aus den Experimenten auf der Erde und deren theoretischer Interpretation entwickelt haben, bewegen sich die astrophysikalischen Phänomene oft in einem extremen Parameterbereich. Die intellektuelle Herausforderung der Anwendung der bekannten physikalischen Gesetze unter diesen extremen Bedingungen und zum Teil in Vereinigung sehr verschiedener physikalischer Teilgebiete macht einen weiteren Reiz der Astrophysik aus.

Zu diesem kommt die Herausforderung, die in der aus dem Weltall eintreffenden Strahlung enthaltene Information, die ja die einzige Informationsquelle über die astrophysikalischen Vorgänge ist, möglichst bis zum letzten auszunutzen. Insofern ist die Astronomie (als der beobachtende Zweig der Astrophysik) immer ein Gebiet besonderer technologischer Herausforderung gewesen. Hier wurden und werden die größten optischen Instrumente gebaut, die empfindlichsten Detektoren (bis an die Quantengrenze) entwickelt und benutzt, die modernsten Techniken der Datenaufbereitung, -speicherung und -verarbeitung angewandt, und extreme Beobachtungsplattformen (bis hin zu Flugzeug-, Ballon- und Satelliten-getragenen Teleskopen).

Auf diesem Hintergrund sollte klar sein, dass die Astrophysik ein ideales Betätigungsfeld für fortgeschritten Studenten, Diplmanden und Doktoranden ist. Auch wenn sicher nur ein kleiner Bruchteil auf Dauer in dem sehr knappen international "Arbeitsmarkt" für Astrophysiker unterkommt, so haben doch (bestätigt auch durch unsere Erfahrung mit den eigenen Studenten), die Absolventen, die aus diesem Bereich kommen, wegen ihrer methodisch und technologisch breiten Ausbildung eine sehr gute Chance, Jobs in einem breiten Bereich des Arbeitsmarktes für Physiker zu finden.

1.2 kurze Skizze des heutigen physikalischen Weltbildes

Wir wissen heute, dass wir Menschen als Teil des Biosystems auf dem Planeten Erde, zusammen mit den anderen Planeten der Sonne existieren. Die Sonne ist ein ziemlich gewöhnlicher Stern, der vor etwa 4.5 Milliarden Jahren entstanden ist. Sie kreist als eine von 100 Milliarden anderen Sternen in der Scheibe der Milchstraße um deren Zentrum in ca. 8 kpc Entfernung. In der Milchstraße werden fortlaufend neue Sterne aus interstellarem Gas gebildet. Die kurzlebigeren, massereichen Sterne geben gegen Ende ihres Sternenlebens den überwiegenden Teil der Materie, durch das thermonukleare Brennen im Inneren der Sterne zunehmend mit schwereren Elementen angereichert, an das interstellare Medium zurück. Aus diesem Material bilden sich weitere Sternenerationen. Alle Elemente außer Wasserstoff und Helium (die im Urknall selbst gebildet wurden) sind auf diese Weise in Sternen entstanden, sie sind gewissermaßen die Asche des thermonuklearen Brennens. Wir haben heute eine ganze Reihe guter Hinweise, dass viele Sterne bei ihrer Entstehung Planetensysteme bilden, und können so annehmen, dass es viele auch zur Erde ähnliche Planeten im Weltall gibt.

Dieser kosmische Kreislauf ist bei weitem noch nicht in allen Details verstanden. Er wird zu großen Teilen auf sehr komplexe Weise kontrolliert (z.B. turbulente Magnetohydrodynamik des interstellaren Gases) und scheint in vielerlei Hinsicht ein sich selbst regulierender Prozess zu sein.

Die Milchstraße ist eine von mehreren Dutzend Galaxien verschiedenster Größe und Struktur, die gemeinsam die "lokale Gruppe" bilden. Die lokale Gruppe ist eine von Milliarden anderer Galaxiengruppen (oder -haufen), die das gesamte der Beobachtung zugängliche Weltall ausfüllen. Die Galaxienhaufen selbst ordnen sich in "Superclustern". Dazwischen ist ein großer Teil des Raumes anscheinend leer. Allerdings macht die beobachtbare Materie nur ca. 10% der gesamten Materie aus (s.u.).

Die Anordnung der Galaxien ist nicht statisch, sondern die Galaxienhaufen befinden sich in einer gleichförmigen Fluchtbewegung. Zurück extrapoliert ergibt sich eine explosionsartige "Entstehung" des Universums im Urknall vor ca. 15 Milliarden Jahren. Mit unserer heutigen Kenntnis der Elementarteilchenphysik können wir diesen Urknall bis auf wenige hundertstel Sekunden an den Ursprung zurückverfolgen und nachvollziehen, wie aus der energiereichen Ursuppe durch schnelle Expansion im Urknall nach und nach die stabilen Teilchen auskondensiert sind und sich die einfachsten Elemente Wasserstoff und Helium gebildet haben. Die Strahlungsenergie des Urknalls sehen wir in Form der kosmischen Hintergrundstrahlung als heutige 3K-Hintergrundstrahlung.

Eine der wichtigen offenen Fragen richtet sich an die Strukturbildung nach dem Urknall: aus der anfänglich sehr homogenen Ursuppe müssen sich sehr schnell Strukturen als Kondensationskerne der Galaxiengruppen und Galaxien gebildet haben. Wie dies von statthen ging ist bis heute offen. Ein ebenso wichtiges fundamentales Problem ist das der "dunklen Materie": wir wissen, dass wir nur etwa 10% der Materiedichte im Universum identifiziert haben, d.h. in Form von Sternen und interstellarer Materie direkt nachweisen. In welcher Form die restliche Materie vorliegt, auf deren Präsenz wir nur durch deren Gravitationswirkung innerhalb der Galaxien und innerhalb der Galaxienhaufen schließen können, ist offen.

Auf diesem Hintergrund sehen wir, wie weit wir von der alten Vorstellung eines Universums gekommen sind, dass uns als Himmel (Fixstern-Sphäre) über die Erde gestellt wurde, und deren Wesen und Gesetze mit dem irdischen Leben reichlich wenig zu tun zu haben scheint. Heute begreifen wir uns als Ergebnis der Entwicklung des Kosmos, der im Urknall aus der energiereichen Ursuppe der elementaren Teilchen die Nukleonen und Atome entstehen ließ, daraus erstaunlich schnell und effizient und mit raffinierten Methoden über die Bildung von Galaxien und Sternen, der Herstellung von schweren Elementen in diesen, und der Bildung von Planetensystem in der nächsten oder übernächsten Sterneneration schließlich für die komplexe organische Chemie ideale Bedingungen auf solchen Planeten wie der Erde geschaffen hat. Auf diesen bilden sich im Laufe der langen Zeit immer komplexere Moleküle und schließlich in einem erstaunlichen Prozess komplexer Selbstorganisation das Leben. In diesem Sinne dürfen wir uns dank dieser naturwissenschaftlichen Erkenntnis heute als "Kinder des Weltalls" (siehe das gleichnamige Buch von Hoimar von Dithfurth; siehe auch Timothy Ferris "Coming of Age in the Milky Way", deutsche Übersetzung ebenfalls "Kinder der Milchstraße"; beide leider derzeit vergriffen) begreifen.

2 Licht und Materie

2.1 Das elektromagnetische Spektrum



Abb. 1: Spektralzerlegung mit Prisma

Alle Information, die wir von astrophysikalischen Objekten haben, erhalten wir aus der von ihnen aufgefangenen elektromagnetischer Strahlung (und zusätzlich der kosmischen Strahlung, d.h. hochenergetischen Teilchenstrahlung und den Neutrinos).

Dabei ist die Strahlung aus den verschiedenen Wellenlängenbereichen charakteristisch für verschiedene Phänomene, Prozesse und Temperaturbereiche; wie im Laufe der Vorlesung an verschiedenen Beispielen diskutiert wird (Wärmestrahlung in den verschiedenen Temperaturbereichen; charakteristische Linienstrahlung (Atomkerne (Gamma-Strahlen), Atome (elektronische Anregung), Moleküle (elektronische, Vibrations- und Rotationsanregung), Festkörper (Staubfeature)).

Die Erdatmosphäre ist nur in kleinen Bereichen des Spektrums durchlässig. Zum einen bei sichtbarem Licht

(optisches Fenster; klassische Astronomie) und zum anderen im Radiowellenbereich (technisch erschlossen mit der Radartechnik des 2. Weltkrieges). Heute ist der gesamte Bereich des elektromagnetischen Spektrums über Messungen von Höhenballons, Flugzeugen und insbesondere Satelliten zugängig..

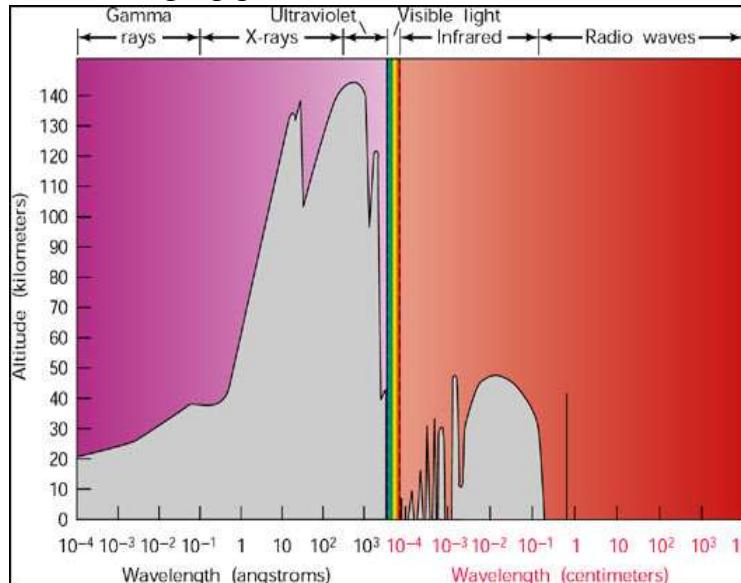


Abb. 2: Das elektromagnetische Spektrum

Die physikalische Untersuchung astrophysikalischer Objekte ist auf die Analyse der von den Objekten ausgesandten Strahlung beschränkt. Einfach ist der Fall, dass das Objekt für die Strahlung bei der betrachteten Wellenlänge undurchlässig ist, d.h. eine hohe Opazität hat. Dann ist die Emission durch die universelle Schwarzkörperstrahlung bei der jeweiligen Temperatur charakterisiert (Beispiel: Sternatmosphäre, in hinreichender Näherung; kosmische Hintergrundstrahlung zum Zeitpunkt der Entstehung). Ist das Objekt nicht optisch dicht, so kann man immer noch aus dem beobachteten Spektrum, insbesondere

aus den beobachteten Spektrallinien, auf die Verteilung der Atome oder Moleküle auf die möglichen Energiezustände, und damit auf die Temperatur schließen. Dazu ist aber dann ein genaueres Verständnis der Opazität, d.h. der Wechselwirkung der jeweiligen Materie mit dem Strahlungsfeld, erforderlich. Dies beinhaltet verschiedene Strahlungsmechanismen wie die spektral kontinuierliche Emission z.B. eines thermalisierten Plasmas (Bremsstrahlung der Elektronen bei Stößen mit den Ionen), oder die Synchrotron-Emission von hochenergetischen Elektronen in einem magnetisierten Plasma aufgrund der Kreisbewegung der Elektronen um das Magnetfeld. Andere

Beispiele sind das Emissionsvermögen von Staubpartikeln oder die quantenmechanisch zu beschreibende Linienemission atomarer und molekularer Systeme bei Übergängen zwischen gebundenen Übergängen.

Wir wollen hier zunächst die thermodynamische Beschreibung der Besetzung verschiedener atomarer Zustände zusammenfassen und dann die grundlegenden Eigenschaften thermischer Strahlung diskutieren.

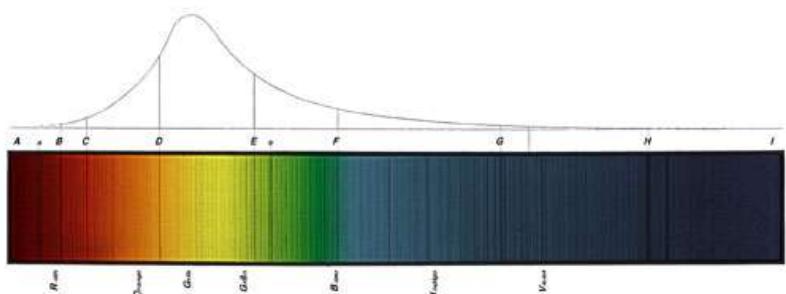


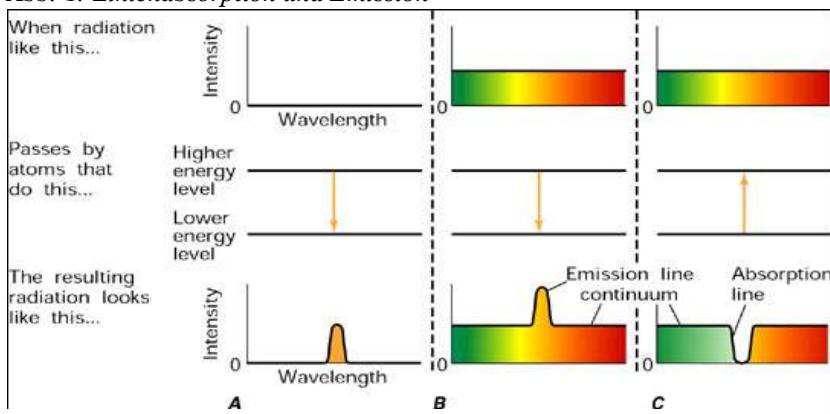
Abb. 3: Sonnenspektrum mit Fraunhofer-Linien

1.1 Liniенstrahlung

Atome und Moleküle können Photonen mit der Frequenz entsprechend dem Energieunterschied zwischen ihren verschiedenen gebundenen Zuständen (plus die entsprechenden Auswahlregeln!) emittieren und absorbieren. Im

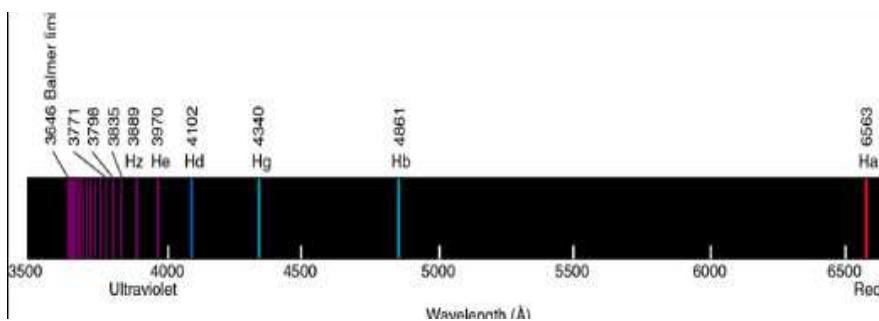
thermischen Gleichgewicht halten sich Absorption und Emission die Waage, d.h. eine atomares/molekulare Medium bei derselben Temperatur wie seine Umgebung, d.h. gesehen vor dem Hintergrund einer Schwarzkörperstrahlung gleicher Temperatur ist "unsichtbar". Vor einem "kälteren" Hintergrund, d.h. mit niedrigerer Intensität als es der (Anregungs-)temperatur des

Abb. 4: Linienabsorption und Emission



Atoms/Moleküls entspricht, erscheint eine Emissionslinie, umgekehrt eine Absorptionslinie.

Das Linienspektrum ist charakteristisch für die jeweilige atomare oder molekulare Spezies ("Fingerabdruck"), so dass über den Vergleich der Spektren verschiedener Quellen etc. Aussagen über deren atomare und molekulare Zusammensetzung gemacht werden können.



Beispiel der charakteristischen Liniensstrahlung eines Atoms ist das Spektrum des atomaren, neutralen Wasserstoffs (HI in der astronomischen Notation)

Abb. 5: Wasserstoff-Spektrum

2.3 Temperatur/Verteilungsfunktion

Die Temperatur ist der thermodynamische Parameter (Zustandsgröße), der die Verteilungsfunktion auf die verschiedenen Energiezustände entsprechend der Boltzmann-Funktion (klassisch) oder quantenmechanisch (Bose-Einstein-, Fermi-Statistik) bestimmt. Da viele astrophysikalische

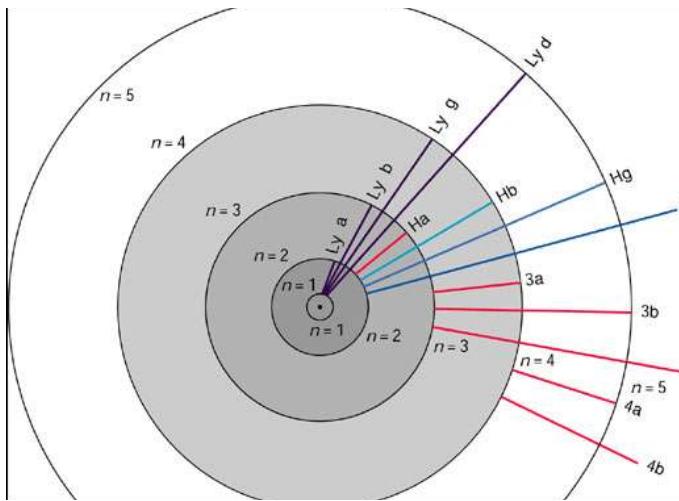


Abb. 6: Wasserstoff: Energieniveaus

Objekte nicht im thermodynamischen Gleichgewicht sind, sondern oft nur ein stationäres Gleichgewicht vorliegt, ist es nicht immer klar, ob das Konzept einer Temperatur Sinn macht. Meist ist es aber so, dass die Anregung zumindest eines relevanten Teils der Freiheitsgrade eines Systems so stark gekoppelt sind, dass sie praktisch im thermodynamischen Gleichgewicht sind. Oft hat das betrachtete System auch starke Gradienten, so dass das Gleichgewicht nur lokal vorliegt (lokales thermodynamisches Gleichgewicht, LTE). Als Beispiel denke man an einen Stern, in dem ja die im Inneren erzeugte Energie durch Strahlung nach außen transportiert

wird, also sicher das gesamte System nicht im Gleichgewicht ist. Trotzdem ist die kinetische Energie der Atome, Ionen und Elektronen durch Stöße so stark gekoppelt und die Opazität für die Strahlung so groß, dass die Strahlung im wesentlichen diffusiv entsprechend dem sich lokal einstellenden Temperaturgradienten nach außen gelangt. An jedem Punkt gibt es eine gut definierte lokale Temperatur.

Quantenmechanisch ist jedes System durch die Angabe des vollständigen Satzes der Quantenzahlen charakterisiert. Bei freien Teilchen ist das der Wert des Wellenzahlvektors \vec{k} , bzw. des Impuls $\vec{p} = \hbar \vec{k}$. Wir gehen aus von der Verteilungsfunktion im Phasenraum $d\Gamma = d^3x \, d^3p / \hbar^3$, die in allgemeiner Form für freie Teilchen der Bose-Einstein- oder der Fermi-Statistik gehorcht:

$$f(\vec{p}) = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{kT}(E(\vec{p}) - \mu)\right) \pm 1},$$



Abb. 7: Orion B, Hα-Emission (rot)

mit den die Verteilung bestimmenden Größen *Temperatur* T (bzw. oft $\beta = 1/kT$) und *chemisches Potential* μ . Die Verteilungsfunktion ist auf die

Gesamtteilchenzahl $N = \frac{g}{\hbar^3} \int f(p) d^3 \vec{p}$ normiert; die Teilchen nehmen das Volumen $V = \int d^3 \vec{x}$.

Der Faktor g ist das statistische Gewicht und berücksichtigt die energetische Entartung innerer Freiheitsgrade, z.B. der Spinausrichtung. Gesamtenergie und Druck sind entsprechend durch

$$U = \frac{g}{\hbar^3} \int E(p) f(p) d^3 \vec{p} \quad \text{und} \quad P = \frac{g}{\hbar^3} \int \frac{p^2 c^2}{3E} f(p) d^3 \vec{p}$$

gegeben.

Charakteristisch für die verschiedenen Teilchen ist deren Dispersionsrelation (Energie-Impuls-Beziehung) $E(p)$, die für freie Teilchen der Ruhemasse m die Form

$$E(p) = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2} \approx mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{hat (die letzte Näherung für nichtrelativistische Teilchen).}$$

Die obigen Integrale der Verteilungsfunktion lassen sich nur in einigen Spezialfällen analytisch auswerten. Ein Spezialfall, der auch für viele astrophysikalische Anwendungen relevant ist, sind nicht-relativistische freie Teilchen, d.h. wenn die Verteilungsfunktion als

$$f(p) = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{kT}(E(p)-\mu)\right) \pm 1} \approx \exp\left(\frac{\mu - mc^2}{kT}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) \quad \text{genähert werden kann. Geeignete}$$

Substitution und Auswertung des Integrals ergibt dann für die Teilchendichte $n = N/V$:

$$n = g \left(\frac{2\pi m k T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu - mc^2}{kT}\right).$$

Beachte: hier enthält die Ruhemasse die gesamte nicht-kinetische Energie des Teilchens, d.h. insbesondere auch deren Energie in inneren Anregungen, d.h. Bindungsenergien, (Massendefekt) etc..

2.4 Boltzmann-Verteilung

Als einfaches Beispiel betrachten wir jetzt die Verteilung einer Spezies auf ihre verschiedenen Anregungszustände, z.B. die Rotations- oder Vibrations-Energiezustände eines Moleküls etc. Im Rahmen der obigen Beschreibung sind diese Energiezustände verschiedene Teilchen (mit gleichem chemischen Potential), die sich entsprechend der Anregungsenergie in der Ruhemasse unterscheiden: $m_i^2 c^2 = m_0 c^2 + \epsilon_i$. Die leicht unterschiedliche Masse können wir im statistischen Vorfaktor vernachlässigen und erhalten die bekannte Boltzmann-Formel für das Verhältnis der Teilchen im Anregungszustand i und j im thermischen Gleichgewicht:

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{g_i}{g_j} \exp\left(-(\epsilon_i - \epsilon_j)/kT\right).$$

2.5 Ionisationsgleichgewicht/ Saha-Gleichung

Für eine Reaktion zwischen Partnern im thermodynamischen Gleichgewicht ist die Summe der chemischen Potentiale vor und nach der Reaktion =0. Betrachten wir als Beispiel die Ionisation eines Atoms aus der p -ten Ionisationsstufe in die $p+1$ -te Ionisationsstufe. Mit der Ionisationsenergie $I = (m_e + m_{p+1} - m_p)c^2$ (Massendefekt) ergibt die Kombination der obigen Gleichungen für die verschiedenen Teilchen die *Saha-Gleichung*

$$\frac{n_e n_{p+1}}{n_p} = \frac{g_e g_{p+1}}{g_p} \left(\frac{2\pi m_e kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} \exp(-I/kT).$$

Sie beschreibt die Verteilung der Atome auf ihre verschiedenen Ionisationsstufen in Abhängigkeit von der Temperatur und (Elektronen-)dichte. Aus ihr lässt sich z.B. die Tatsache erklären, warum die Spektralklassifikation, d.h. das Auftreten und Verschwinden verschiedener Spektrallinien in verschiedenen Ionisationsstufen ein Maß für die Temperatur der Sternatmosphäre ergibt.

2.6 Schwarzkörperstrahlung/Hohlraumstrahlung

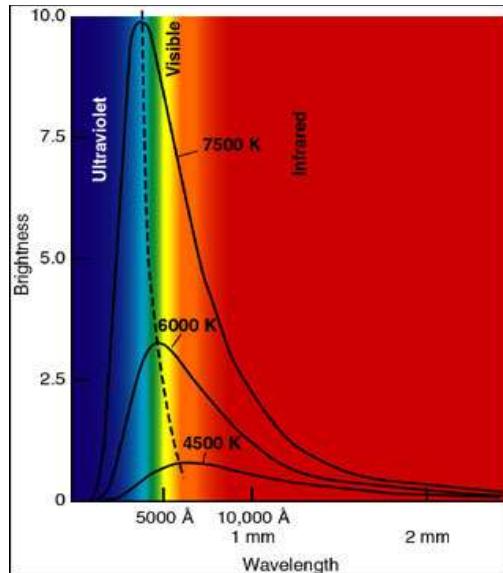


Abb. 8: Schwarzkörperstrahlung

Die spektrale Verteilung der Intensität ist für einen Körper im thermischen Gleichgewicht allein durch die Temperatur bestimmt. Es gilt für die *spezifische Intensität* (s.u.), d.h. die pro Frequenzintervall und Zeitintervall durch ein Flächenelement in ein Raumwinkelelement fließende Energie (gemessen z.B. in $\frac{\text{erg}}{\text{s Hz cm}^2 \text{ sterad}}$):

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

$$\text{bzw. pro Wellenlängenintervall } B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

Die Umrechnung ergibt sich aus $B_\lambda d\lambda = B_\nu d\nu$ und $\lambda = \frac{c}{\nu}$
bzw. $d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu$. Näherungsdarstellungen sind die

Wien'sche Näherung $B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}$, für $h\nu \gg kT$, und die Rayleigh-Jeans-Näherung

$$B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT, \text{ für } h\nu \ll kT.$$

Die Abbildung zeigt, dass sich das Maximum mit wachsender Temperatur zu immer höheren Frequenzen hin verschiebt: Wien'sches Verschiebungsgesetz (Übungsaufgabe):

$$\lambda_{max} \cdot T = \text{const.} = 0.2879 \text{ cm K}.$$

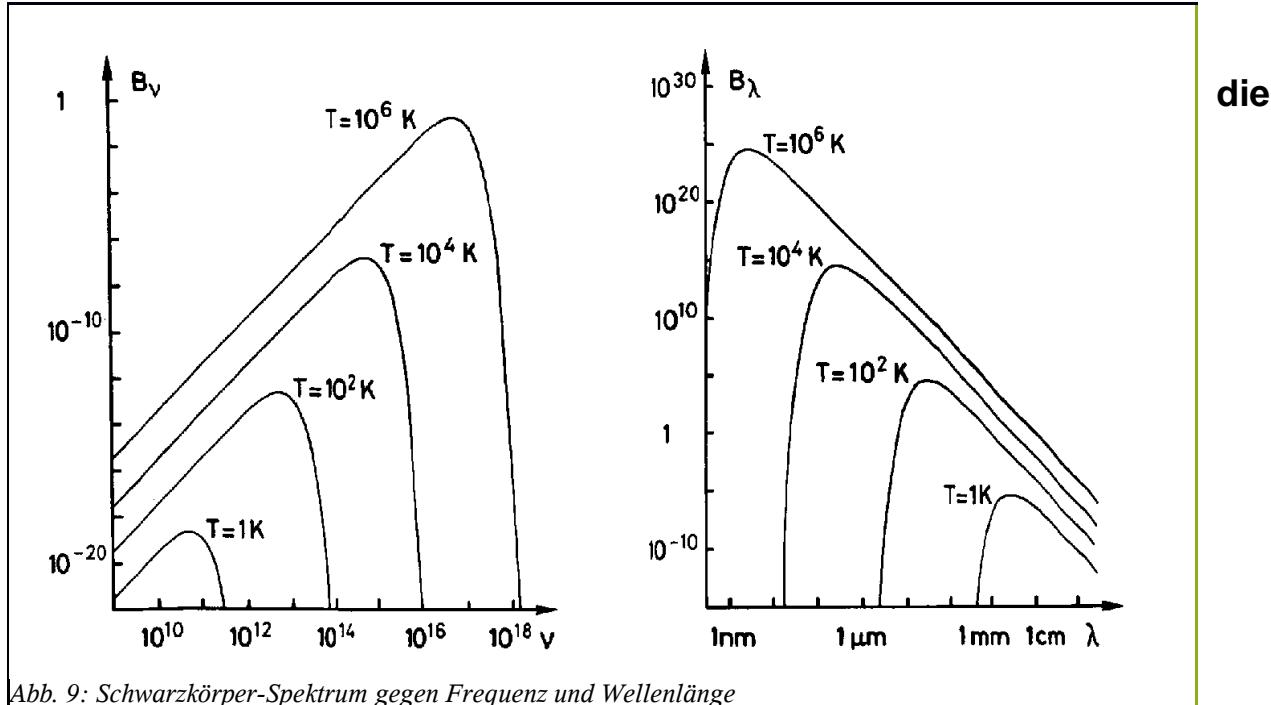
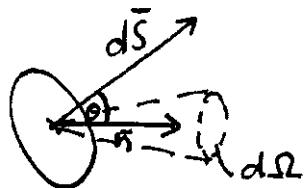


Abb. 9: Schwarzkörper-Spektrum gegen Frequenz und Wellenlänge

spezifische Intensität



Zur vollständigen Charakterisierung des Strahlungsfeldes benutzt man die *spezifische Intensität* I_v : die an einem bestimmten Ort \vec{r} in einem Zeitintervall dt durch ein bestimmtes Flächenelement $d\vec{S}$ in das Raumwinkelement $d\Omega$ um eine bestimmte Richtung \vec{n} fließende Energie in einem Spektralintervall $d\nu$ um die Frequenz ν ist gegeben durch

$$\begin{aligned} dE &= I_v(\vec{r}, \vec{n}, t) \vec{n} \cdot d\vec{S} d\Omega d\nu dt \\ &= I_v(\vec{r}, \vec{n}, t) \cos\Theta d\vec{S} d\Omega d\nu dt. \end{aligned}$$

Die spezifische Intensität wird gemessen z.B. in [erg cm⁻² sec⁻¹ Hz⁻¹ sterad⁻¹].

Gegebenenfalls muss noch die Polarisation unterschieden werden.

Bemerkung:

statt der so definierten spezifischen Intensität könnte man das Strahlungsfeld auch durch die Anzahldichte der Photonen $n(\vec{r}, \vec{k}, t)$ in einem Phasenvolumen $d^3\vec{k}$ um den Wellenzahlvektor \vec{k} charakterisieren. Der Energie eines einzelnen Photons ist $h\nu$, dessen Geschwindigkeit c . Die Energie der in der Zeit dt durch das Flächenelement $d\vec{S}$ fließenden Photonen mit Wellenzahlvektor in $d^3\vec{k}$ um \vec{k} ist:

$$\begin{aligned} dE &= h\nu c n(\vec{r}, \vec{k}, t) \hat{\vec{k}} \cdot d\vec{S} d^3\vec{k} dt \\ &= \frac{8\pi^3 h\nu^3}{c^2} n(\vec{r}, \vec{k}, t) \hat{\vec{k}} \cdot d\vec{S} d\Omega d\nu dt. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt: $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c}$, d.h. $d^3\vec{k} = k^2 d\Omega dk = \frac{(2\pi)^3}{c^3} \nu^2 d\Omega d\nu$.

Vergleich mit oben zeigt, dass $I_\nu(\vec{r}, \vec{n}, t) = \frac{8\pi^3 h \nu^3}{c^2} n(\vec{r}, \vec{k}, t)$.

Beachte: im thermischen Gleichgewicht (TE: thermal equilibrium) ist mit 2 Polarisationsmoden und einer Modendichte von $1/(2\pi)^3$ (periodische Randbedingung im Kasten der

Länge L : $\vec{k}_{n,m,l} = \frac{2\pi}{L}(n, m, l)$, $\frac{1}{L^3} \sum_{k_i} \rightarrow \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3}$) und wegen der Bose-Statistik

$n_{\text{TE}}(\vec{k}) = 2 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}$. Damit ergibt sich für die spezifische Intensität die Planck-Funktion

$I_{\nu, \text{TE}}(\vec{r}, \vec{n}) = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}$, wie oben bereits angegeben. Sie hängt weder von \vec{r} noch von \vec{n} ab, d.h. ist homogen und isotrop.

In der Radioastronomie, d.h. bei niedrigen Frequenzen, hat sich als Maß für die spezifische Intensität einer Quelle in Analogie zur Rayleigh-Jeans-Näherung die sog. *Strahlungstemperatur* T_r (engl. radiation temperature) eingebürgert. Sie ist definiert als

$$T_r = \frac{c^2}{2k\nu^2} I_\nu \quad (\text{d.h. } I_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2} T_r = \frac{2k}{\lambda^2} T_r).$$

Falls die Quelle tatsächlich Schwarzkörperstrahlung ausstrahlt, ist $I_\nu = B_\nu(T)$ und damit

$$T_r = \frac{c^2}{2k\nu^2} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1} = \frac{h\nu}{k} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1} := \mathfrak{I}_\nu(T).$$

Reihenentwicklung für $h\nu/kT \ll 1$ ergibt

$$T_r = \mathfrak{I}_\nu(T) \approx T - \frac{h\nu}{2k} + \frac{1}{12} \left(\frac{h\nu}{2k} \right)^2 \frac{1}{T} - \dots,$$

also in erster Näherung gerade die Temperatur des Schwarzkörpers, in zweiter Näherung eine temperaturunabhängige (!), aber frequenzabhängige Verschiebung der Strahlungstemperatur-Skala um $\frac{h\nu}{2k}$, und höhere Terme.

mittlere Intensität, Energiedichte

Mittelung über alle Richtungen ergibt die *mittlere Intensität* (besser: richtungs-gemittelte Intensität)

$$J_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^2 \vec{n} I_\nu(\vec{r}, \vec{n}) \quad [\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}].$$

Entsprechend oben gesagtem ist sie proportional zu *Energiedichte* der Strahlung:

$$\epsilon_\nu(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} J_\nu(\vec{r}), \text{ gemessen z.B. in } [\text{erg cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1}].$$

Im thermischen Gleichgewicht ist das Strahlungsfeld ohnehin isotrop, d.h. $J_{\nu, \text{TE}} = I_{\nu, \text{TE}} = B_\nu(T)$,

und damit $\epsilon_{\nu, \text{TE}}(T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}$.

Die frequenzintegrierte Energiedichte ist $E_{\text{TE}} = a T^4$, mit $a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3}$; hierzu haben wir benutzt $\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x)-1} dx = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}$ (Berechnung: Reihenentwicklung und gliedweise Integration ergibt eine Reihe, die als Riemann'sche ζ -Funktion identifiziert wird; Übungsaufgabe).

Strahlungsfluß

Das mit der Richtung gewichtete Integral der spezifischen Intensität gibt den *Strahlungsfluß*

$$\vec{F}_v(\vec{r}) = \int d^2 \vec{n} I_v(\vec{r}, \vec{n}) \vec{n} \quad [\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}].$$

Damit ist die durch ein Flächenelement pro Zeitintervall und Frequenzintervall in alle Richtungen fließende Energie gegeben durch $dE = \vec{F}_v(\vec{r}) \cdot d\vec{S} d\nu dt$. Bei isotropem Strahlungsfeld, d.h. z.B. im thermischen Gleichgewicht, ist der Fluss insgesamt =0:

$$\vec{F}_{v,\text{TE}}(\vec{r}) = \int d^2 \vec{n} B_v(T) \vec{n} = B_v(T) \int d^2 \vec{n} \vec{n} = 0.$$

(explizit: ist z.B. $F_{v,\text{TE},z} = \vec{F}_{v,\text{TE}} \cdot \vec{e}_z = B_v(T) \int d^2 \vec{n} \vec{n} \cdot \vec{e}_z = B_v(T) 2\pi \int_0^\pi \cos \Theta \sin \Theta d\Theta = 0$). Der

Fluss durch die Fläche in eine Richtung ist genauso groß wie in die andere Richtung; beide heben sich auf. Für den Fluss in nur den einen Halbraum ist

$$F_v^+ = \int_0^{2\pi} d\Phi \int_{\pi/2}^{\pi} d\Theta \sin \Theta \cos \Theta I_v(\vec{r}, \vec{n}),$$

bzw. in den anderen Halbraum

$$F_v^- = \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi/2} d\Theta \sin \Theta \cos \Theta I_v(\vec{r}, \vec{n}).$$

Im thermischen Gleichgewicht ist dann

$$F_{v,\text{TE}}^+ = -F_{v,\text{TE}}^- = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} d\Theta \sin \Theta \cos \Theta B_v(T) = \pi B_v(T).$$

Oft wird der Fluss in der Astrophysik in *Jansky* oder *flux units* abgegeben. Dabei gilt $1 \text{ Jy} = 1 \text{ f.u.} = 10^{-23} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$.

Frequenzintegriert ergibt sich für den Fluss in einen Halbraum, d.h. die gesamte vom Hohlraumstrahler pro Flächeneinheit abgestrahlte Leistung,

$$F_{\text{TE}}^+ = \pi B(T) = \pi \frac{c}{4\pi} E(T) = \frac{c}{4} a T^4 = \sigma T^4 \quad \text{mit der Stefan-Boltzmann-Konstanten}$$

$$\sigma = \frac{c}{4} a = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

Strahlungsdruck

Das nächsthöhere Moment bzgl der Richtungsabhängigkeit ist der Strahlungsdruck-Tensor (Spannungstensor)

$$\overline{\overline{P}}_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int I_\nu(\vec{r}, \vec{n}) \vec{n} \vec{n} d^2 \vec{n}, \text{ mit dem dyadischen Produkt } \vec{n} \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x n_x & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y n_y & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z n_z \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist dessen Spur (wegen $\text{Sp}(\vec{n} \vec{n})=1$)

$$\text{Sp} \overline{\overline{P}}_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int I_\nu(\vec{r}, \vec{n}) \text{Sp}(\vec{n}, \vec{n}) d^2 \vec{n} = \frac{4\pi}{c} J_\nu(\vec{r}) = \epsilon_\nu(\vec{r}), \text{ also die Energiedichte des Strahlungsfeldes.}$$

Im Fall eines isotropen Strahlungsfeldes, d.h. insbesondere im thermischen Gleichgewicht, ist der anisotrope Anteil im Strahlungsdruck-Tensor gleich 0, d.h. der Strahlungsdruck-Tensor ist

$$\text{diagonal (isotrop) und in alle Richtungen gleich: } \overline{\overline{P}}_\nu(T) = P_\nu \bar{1} = \frac{1}{3} \epsilon_\nu(T) \bar{1} = \frac{4\pi}{3c} B_\nu(T) \bar{1}.$$

Der frequenzintegrierte Strahlungsdruck ist entsprechend $P(T) = \frac{4}{3c} \sigma T^4 = \frac{1}{3} a T^4$.

	Nomenklatur	im thermischen Gleichgewicht	
		frequenzspezifisch	frequenz-integriert
spezifische Intensität	$I_\nu(\vec{r}, \vec{n})$	$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}$	$B(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4; \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$
mittlere Intensität	$J_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_{\vec{r}}} d^2 \vec{n} I_\nu(\vec{r}, \vec{n})$	$B_\nu(T)$	$B(T)$
Energiedichte	$\epsilon_\nu(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} J_\nu(\vec{r})$	$\frac{4\pi}{c} B_\nu(T)$	$E(T) = a T^4; a = \frac{4\sigma}{c}$
Strahlungsfluß in den pos./neg. Halbraum in Richtung \vec{e}	$\vec{F}_\nu(\vec{r}) = \int_{\Omega_{\vec{r}}} d^2 \vec{n} I_\nu(\vec{r}, \vec{n}) \vec{n}$ $F_\nu^{+,-}(\vec{r}) = \int_{\Omega_{\vec{r}}} d^2 \vec{n} I_\nu(\vec{r}, \vec{n}) \vec{n} \vec{e}$	0 $F_\nu^+ = F_\nu^- = \pi B_\nu(T)$	0 $F^+ = F^- = \sigma T^4$
Strahlungsdruck	$\overline{\overline{P}}_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^2 \vec{n} I_\nu(\vec{r}, \vec{n}) \vec{n} \vec{n}$	$\overline{\overline{P}}_\nu = P_\nu \bar{1}, P_\nu(T) = \frac{4\pi}{3c} B_\nu(T)$	$P(T) = \frac{1}{3} a T^4$

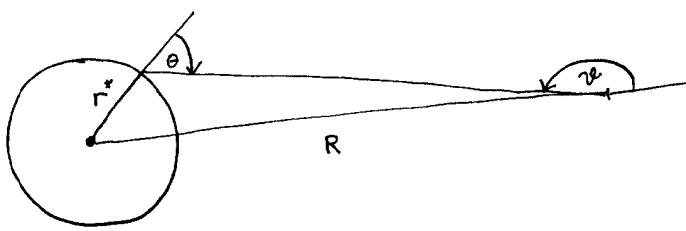
$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$$

Text 1: Strahlungsfeld (Zusammenfassung)

Beispiel: Strahlungsfeld eines (kugelsymmetrischen) Sterns

Kugelsymmetrie: in Kugelkoordinaten $(r, \theta, \phi) \Rightarrow I_\nu(\vec{r}, \vec{n}) = I_\nu(r, \theta, \phi)$ und $F_{\nu, \theta} = F_{\nu, \phi} = 0, F_{\nu, r}(\vec{r}, \vec{n}) = F_\nu(r)$.

Aus der Abbildung entnehmen wir:



$$\text{Sinussatz: } \frac{\sin(\pi - \vartheta)}{r^*} = \sin \frac{(\pi - \Theta)}{R}, \text{ d.h.}$$

$$\sin \vartheta = \frac{r^*}{R} \sin \Theta, \text{ und}$$

$$d(\sin \vartheta) = d(\sin \Theta) \frac{r^*}{R}.$$

Abb. 11: Strahlungsfeld eines Sternes (kugelsymmetrisch)

Die spezifische Intensität $I_\nu(R, \vartheta)$ ist in einem Abstand R nur von 0 verschieden, solange der Sehstrahl den Stern trifft, d.h. für $\vartheta > \vartheta_{\min} = \pi - \arcsin\left(\frac{r^*}{R}\right)$. Über diesen Bereich ist $\int_0^{\pi/2} \Theta = \vartheta |_{\pi - \arcsin(r^*/R)}$. Wegen der Konstanz der spezifischen Intensität längs eines Sehstrahles ist außerdem $I_\nu(R, \vartheta) = I_\nu(r^*, \Theta)$. Für den Strahlungsfluß bei R ergibt sich dann (Transformation der Integrationsvariablen von ϑ nach Θ):

$$\begin{aligned} F_\nu(R) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\vartheta I_\nu(R, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta = 2\pi \int_{\pi - \arcsin(r^*/R)}^\pi d\vartheta I_\nu(R, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta \\ &= 2\pi \left(\frac{r^*}{R}\right)^2 \int_0^{\pi/2} d\Theta I_\nu(r^*, \Theta) \cos \Theta \sin \Theta = \left(\frac{r^*}{R}\right)^2 F_\nu(r^*) \end{aligned}$$

Der Fluss ist also einfach der Fluss an der Sternoberfläche, reduziert um den geometrischen Faktor $\left(\frac{r^*}{R}\right)^2$ (beachte: der von außen einfallende Fluss ist überall =0). Mit dem Raumwinkel des Sternes $\Omega^* = \frac{\pi r^{*2}}{R^2}$ ist also

$$F_\nu(R) = \Omega^* \frac{1}{\pi} F_\nu(r^*).$$

Der spektrale Fluss an der Sternoberfläche (genauer: dessen einzige nicht verschwindende Komponente, die radiale) ist also die bestimmende Größe für den Strahlungsfluß des Sternes. Die spektrale Leuchtkraft des Sternes ergibt sich durch Multiplikation mit der Sternoberfläche zu

$$L_\nu = 4\pi r^{*2} F_\nu(r^*) = 4\pi R^2 F_\nu(R),$$

und lässt sich durch Messung von $F_\nu(R)$, d.h. den Fluss am Beobachtungsort, bestimmen, wenn der Abstand R bekannt ist.

(Manchmal) übliche Notation: *astrophysikalischer Fluss* $\frac{1}{\pi} F_\nu(r^*) = F'_\nu(r^*)$,

$$\text{Eddington Fluss } H_\nu = \frac{1}{4\pi} F_\nu.$$

3 Teleskope

Alle Information, die wir über die Objekte im Kosmos haben, erhalten wir durch die elektromagnetische Strahlung, die sie aussenden (zusätzlich können wir die hochenergetischen Teilchen der kosmischen Strahlung detektieren, aus denen wir auch eine gewisse Information gewinnen können, z.B. die Häufigkeit der chemischen Elemente anhand der Verteilung der verschiedenen Atomkerne in der kosmischen Strahlung; außerdem messen wir von der Sonne die Neutrinos, die bei der Kernreaktion im Inneren entstehen und auch von der Supernova 1987a haben wir einige Neutrinos nachgewiesen).

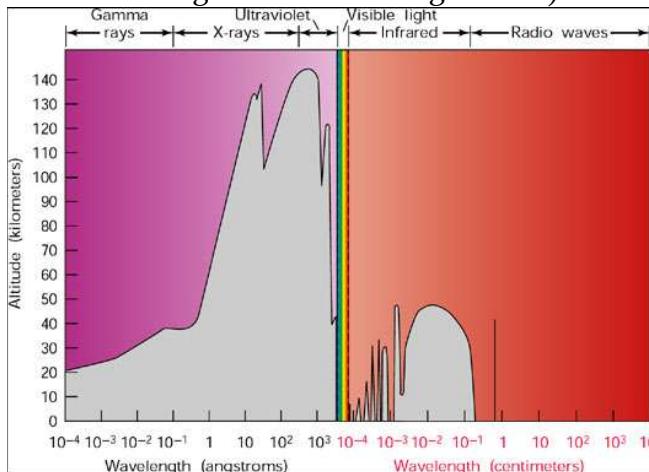


Abb. 12: Wellenlängenbereiche und atmosphärische Transmission

Um mehr zu sehen, helfen Teleskope. Zum einen sammeln sie das Licht über eine größere Fläche als die Öffnung des Auges ein und fokussieren es auf ein Abbild der Himmelskugel (Ausschnitt). Zum anderen erlauben sie eine bessere Winkelauflösung, d.h. die Trennung von nahe beieinander gelegenen Lichtpunkten (Sternen) am Himmel in einzelne Objekte (allerdings eingeschränkt durch die Atmosphäre: seeing, s.u.). Dabei gilt im Prinzip, jedenfalls für kleine Objekte: je größer, je besser. Die Größe ist letztlich limitiert durch die mechanische Stabilität der Teleskop-Struktur.

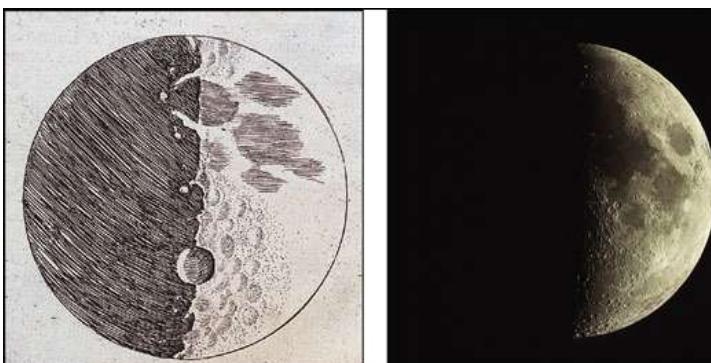


Abb. 13 Galileo's Skizze der Mondbeobachtungen mit Teleskop (links) und photographische Aufnahme

Historisch hat sich wegen der unmittelbaren Anschauung zunächst die Optik/Teleskoptechnologie im sichtbaren Spektralbereich entwickelt (Linsenfernrohre, Spiegelteleskope; Galileo Galilei). Eine Maßgebliche Empfindlichkeitsteigerung ergab sich mit der Einführung der photographischen Technik, die es erlaubt, Photonen wesentlich empfindlicher als mit dem Auge nachzuweisen und insbesondere durch zeitliche Integration (Belichtung) zu sammeln.

Vom Erdboden aus ist außer dem sichtbaren Spektralbereich nur noch der langwellige Radio/Mikrowellenbereich durchlässig durch die Atmosphäre. Die Radioastronomie entwickelte sich technologisch mit der Radartechnik des 2. Weltkrieges. Seitdem wurden sukzessive alle Wellenlängenbereiche der Beobachtung erschlossen. Solche Beobachtungen sind aber nur noch von Satelliten (oder hochfliegenden Ballons/Flugzeugen) aus möglich. Dabei hat die Astronomie wegen der extremen Anforderungen an die Empfindlichkeit immer eine Vorreiter-Rolle hinsichtlich der technologischen Möglichkeiten gespielt, sowohl hinsichtlich der Teleskope und

Antennen, wie auch hinsichtlich der verwendeten Detektoren (oft parallel zu entsprechenden militärischen Technologie-Entwicklungen).

3.1 Teleskope: Optischer Aufbau

Wegen der großen Entfernung zu den astronomischen Objekten fällt das Licht von ihnen praktisch in parallelen Strahlen ein (die Wellenfront ist in guter Näherung eben). Wie aus der Optik bekannt, werden parallele Strahlen durch eine Linse (d.h. einen Glaskörper mit zwei kugelförmig geschliffenen Oberflächen) oder durch einen sphärischen Spiegel näherungsweise (paraxiale Strahlen) auf einen Punkt gebündelt. Benachbarte Punkte am Himmel werden auf benachbarte Punkte in der Fokalebene abgebildet; diese ist im allgemeinen eine gekrümmte Fläche und nur näherungsweise eine Ebene.

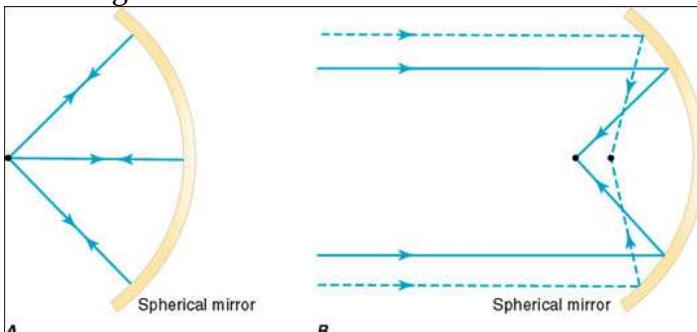


Abb. 14 Abbildungsfehler, sphärischer Spiegel

Die Lichtsammelstärke (analog zur Lichtstärke eines Kamera-Objektivs) nimmt dabei entsprechend der Größe der Eintrittsfläche (Apertur), d.h. bei kreisförmiger Optik mit dem Quadrat des Durchmessers zu: Vergleich: weit geöffnete Pupille des Auges (Nachadaptation) ca. 3 mm, größte optische Teleskope: 10m; d.h. $(10/10^{-3})^2 = 10^6$, d.h. Millionen-mal empfindlicher).

Eine Linse hat eine ausgezeichnete Achse. Achsenferne Strahlen und Strahlen in großem Winkel zur Achse gehen nicht genau durch den Fokus (Abbildungsfehler: sphärische Aberration, Koma). Gleches gilt für einen sphärischen Spiegel (die Achse ist durch die Einfallsrichtung festgelegt).

Außerdem ist der Brechungsindex wellenlängen-abhängig, so dass der Fokus für verschiedene Wellenlängen verschieden ist (chromatische Aberration). Unter anderem deshalb sind Linsenteleskope heute nicht mehr sehr weit verbreitet in der "professionellen" Anwendung.

Parabelförmige Spiegel (Paraboloid) fokussieren auch achsenferne Strahlen in denselben Brennpunkt. Allerdings ist dafür der Winkelbereich, d.h. die Größe der innerhalb einer gegebenen Toleranz scharf abbildenden Fokalebene eingeschränkter. Welche Spiegelart man optimal benutzt ist also von der Anwendung abhängig.

Der Fokus eines Spiegel sitzt vor dem Spiegel. Dort das Bild aufzufangen (Auge, Photoplatte, Detektor) ist nicht sehr praktikabel. Deshalb gibt es verschiedene optische Anordnungen, bei den entweder ein Planspiegel das Bild seitlich herumlenkt (Newton'sches Teleskop), oder ein zweiter fokussierender (Ellipsoid; Gregorianisches Teleskop) oder zerstreuender Spiegel (Hyperboloid; Cassegrain-Teleskop) die Strahlung durch ein zentrales Loch um Primärspiegel fokussieren, wo die Fokalebene durch ein Detektorsystem besser erreicht werden kann.

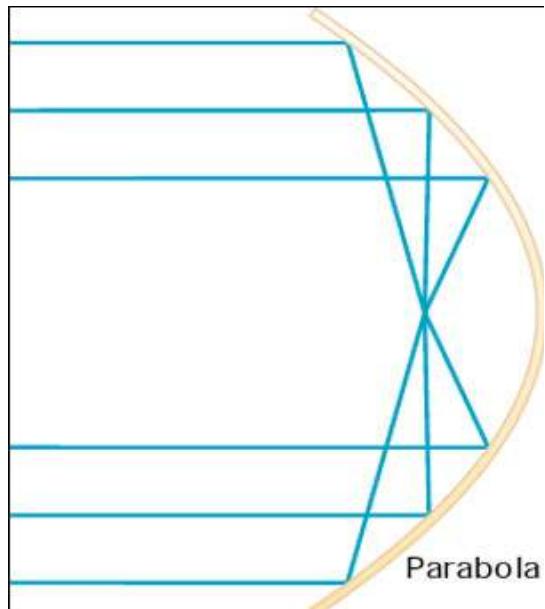
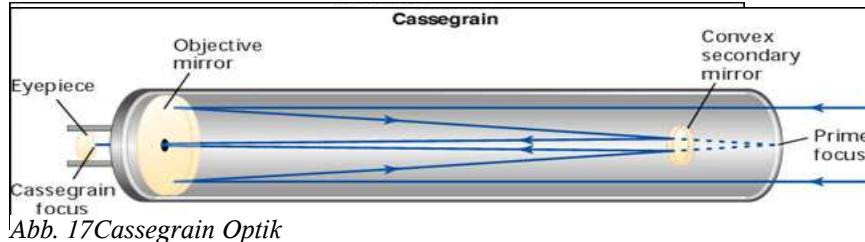
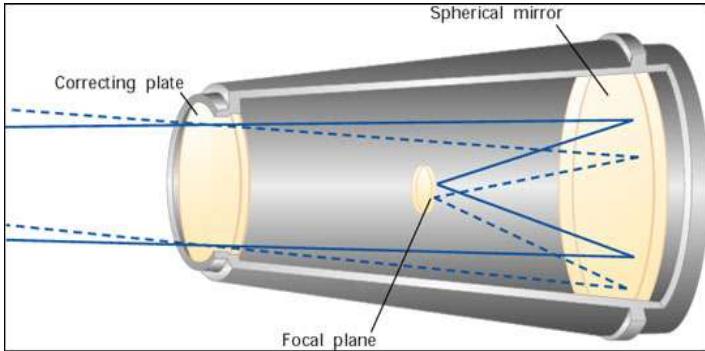


Abb. 15 Parabol-Spiegel



Spezielle Anordnungen (sphärischer Spiegel mit Korrekturplatte, d.h. einer Apertur "linse" mit komplexen Profil: Schmidt-Teleskop) erlauben die scharfe Abbildung eines sehr großen



Gesichtsfeldes auf eine plane Fokalebene: sogenannte Wide-Field-Camera.

Je stärker gekrümmt der Primärspiegel ist, umso kürzer ist die Fokallänge und damit die mechanische Abmessung des Teleskops. Allerdings werden die Abbildungsfehler entsprechend schlimmer, d.h. insbesondere das Gesichtsfeld stärker eingeschränkt.

Andererseits ist die verträgliche Größe der Teleskopstruktur wegen der Schwerkraft und der daraus resultierenden Deformation unter dem Eigengewicht bei hohen Anforderungen an die mechanische Genauigkeit der optischen Oberflächen (Bruchteile der Wellenlänge) ebenfalls begrenzt. Bei der Konstruktion eines Teleskops muß hier der richtige Kompromiß gefunden werden. Im Weltall gibt es zwar nicht die störende Schwerkraft, dafür ist die Abmessung durch die Trägerrakete und deren Nutzlast in Größe und Gewicht beschränkt.

Das große Eigengewicht der entsprechenden Linsen und ihre entsprechende Verformung (bis hin zum Bruch) ist der andere Hauptnachteil von großen Linsenteleskopen (Yerkes Refraktor: $D = 1\text{ m}$ ist der größte; Baujahr 1890; danach wurden alle großen Teleskope als Spiegelteleskope gebaut). Moderne Spiegelteleskope (VLT) werden heute mit Primärspiegel bis zu 10 m Größe gebaut; oder der Spiegel ist segmentiert, wobei die einzelnen Segmente gegeneinander



entsprechend genau gelagert sein müssen. Dabei wird die Deformation unter dem Eigengewicht heute aktiv korrigiert (Messung mit Laserinterferometrie oder durch Interferenzbild eines hellen Sternes im Gesichtsfeld (aktive Optik). Wegen der hohen Anforderung an die mechanische Präzision sind vor allem Temperaturgradienten und zeitliche Änderungen ein limitierender Faktor (Zerodur-Glas, Kohlefaser-Technik).

Zur Unterdrückung von instrumentellen Driften im Detektorsystem verwendet man oft, wie im Labor, das Lock-In -Verfahren, d.h. das schnelle Umschalten zwischen der Quelle am Himmel (Signal und Hintergrund) und dem leeren Himmel (nur Hintergrund) und die Messung dieser Differenz. Dazu ist der Sekundärspiegel als Wobbler ausgelegt (Frequenz bis 20 Hz, je nach Teleskop Hub entsprechend 20 arcmin)

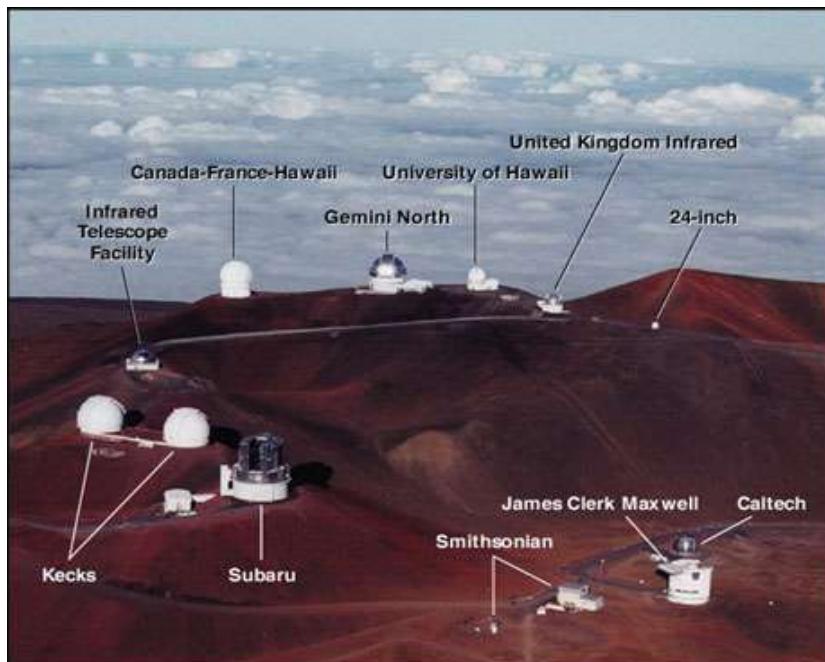


Abb. 21 Mauna Kea, Hawaii

Die optischen Oberflächen müssen auf Bruchteile der Wellenlänge genau die richtige Form haben (Ruze Formel: Effizienz, d.h. Anteil der Energie im zentralen Beugungsscheibchen $\eta = \exp(-(4\pi\sigma/\lambda)^2)$) damit die einzelnen Lichtstrahlen im Brennpunkt konstruktiv interferieren. Dies erfordert im optischen massive Stahlkonstruktionen und Glaskeramik-Spiegel (+ aktive Optik). Im Radiobereich sind heute Kohlefaser-Fachwerke mit Alu-Paneele der Stand der Technik.

Im Röntgenbereich gibt es keine Materialen mehr, die reflektieren

oder einen nennenswerten Brechungsindex besitzen. Nur noch in streifendem Einfall ergibt sich eine Reflexion an metallischen Oberflächen. Deshalb bestehen Röntgenteleskope aus einer ineinander geschachtelten Serie von lang gestreckten Hyperbolischen Spiegelsegmenten, die insgesamt erlauben, eine Röntgen-Abbildung zu erzeugen. Solche "Woltjer"-Teleskope sind auf den Satelliten ROSAT, Chandra und XMM im Einsatz. Sie erfordern eine extrem genaue Oberfläche (Streifender Einfall und kleinste Wellenlänge) und eine extrem genaue Justage.

3.2 Winkelauflösung

Neben der Lichtstärke bestimmt der Aperturdurchmesser auch die (maximal erreichbare) Winkelauflösung eines Teleskops. Diese ist begrenzt durch Beugung: zwei punktförmige Lichtquellen in engem Winkelabstand können nur unterschieden werden, wenn ihre Beugungsbilder nicht überlappen. Dies bedeutet, dass der eine jenseits des ersten Null-Ringes liegen muss. Der Winkelabstand des ersten Interferenzminimums ergibt sich gerade, wenn der Gangunterschied zwischen den extremen Punkten in der Apertur ca. $\lambda/2$ beträgt. Die Winkelauflösung ist also ungefähr gegeben durch $\Delta\Theta \approx \lambda/D$. Beispiel: menschliches Auge, $\lambda = 450 \text{ nm}$, $D = 2 \text{ mm}$, $\Delta\Theta = 450 \times 10^{-9} / 2 \times 10^{-3} = 2.3 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.4 \text{ arcmin}$. Oder: $D = 5 \text{ cm}$ erreicht eine Auflösung von $1''$. Radiobereich: Beispiele: Effelsberg, KOSMA.



Abb. 22 Segment des Chandra-X-ray Spiegels.

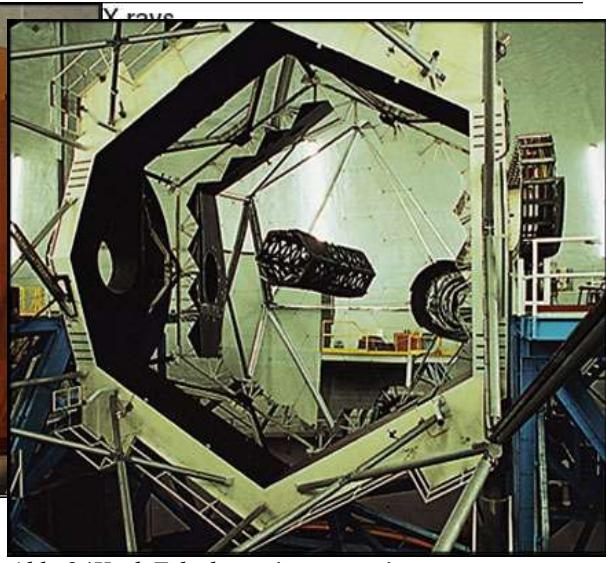


Abb. 25 Keck Teleskope, Mauna Kea

Abb. 24 Keck Teleskop mit segmentiertem Primärspiegel (10m)

Die Auflösung ist aber außerdem limitiert durch die Phasenfehler der Wellenfront, die durch die Turbulenzen in der Atmosphäre hervorgerufen werden (zeitlich veränderliche Brechungsindexschwankungen zwischen den Turbulenzzellen; Temperatur und Feuchtigkeitsunterschiede; Windgeschwindigkeit, Konvektion im Dome): sog. Seeing. Diese sind Ursache für das Flickern des Sternenlichts (twinkle, twinkle little star...). Die Planeten flackern dagegen nicht, da sie gegenüber der seeing-Scheibe ausgedehnt sind (Unterscheidung Planeten/Sterne). An den besten Standorten (Mauna Kea, Paranal) wird regelmäßig ein Seeing von ca. 0.3" erreicht. An normalen Standorten (Köln) hat man üblicherweise 3". Die großen optischen Teleskope erreichen also wegen der Atmosphäre nicht die prinzipiell mögliche Winkel-Auflösung. Hubble Space Teleskop: kein seeing. Hipparcos: Astrometrie-Satellit.

Abb. 23 Prinzip eines Röntgenteleskops

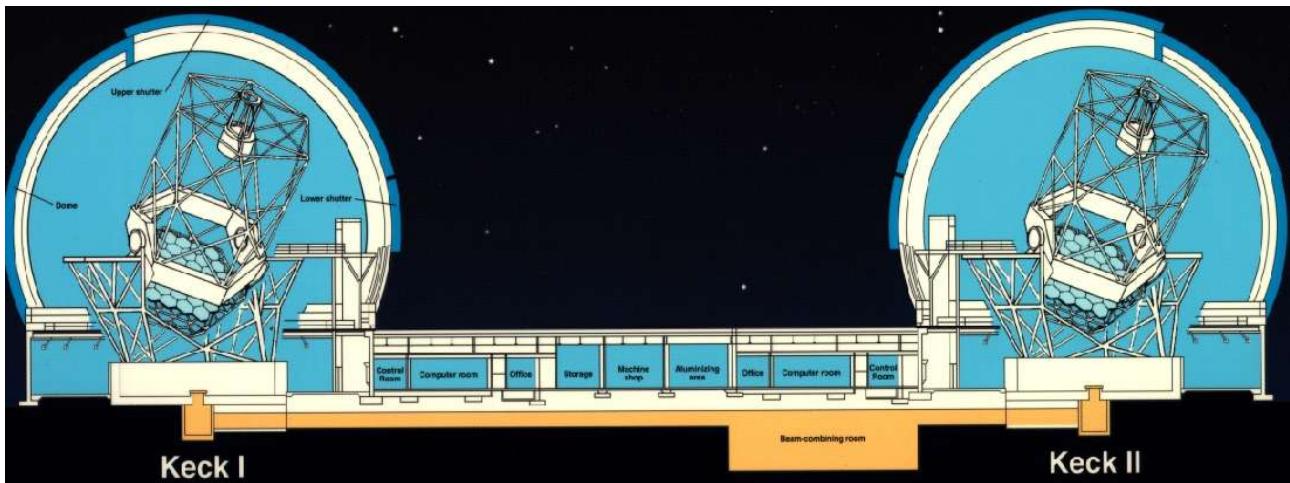


Abb. 26 Keck Teleskope, Mauna Kea

Man kann heute das Seeing überlisten, indem man eine Echtzeit-Korrektur der optischen Abbildung für die atmosphärisch bedingten Phasenfehler an einem (kleinen) planen, aber biegsamen Spiegel im Zwischenfokus einstellt (Piezo). Dies erfordert eine schnelle Vermessung der Phasenfehler an einem hellen Referenzstern im Blickfeld (oder mit einem künstlichen Laser-Guide-Star) in einem sogenannten Shack-Hartmann-Sensor, die Echtzeit-Berechnung der Phasenfehler aus diesem Interferogramm und die Einstellung der Piezo-Elemente mit einer Frequenz von ca. 100 Hz (!). Mit dieser sog. adaptiven Optik (Keck, VLT) kann dann eine



Abb. 27 Hubble Space Teleskop

nächsten Jahren auch im optischen erreicht werden.

Neben dem optischen ist der Radio-Bereich vom Erdboden aus zugänglich. Bei sehr

Winkelauflösung nahe der theoretischen Beugungsgrenze erreicht werden. Dies ist im Moment im NIR möglich (weniger Turbulenzzellen/Speckles in der Apertur, größere Wellenlänge), wird aber in den



Abb. 28 Hubble Space Teleskop, Primärspiegel



Abb. 30 Arecibo-Teleskop, 300m, feststehend



Abb. 29 IRAM 30m, Pico Veleta, Spanien

großen Wellenlängen (Dezimeter-Bereich) verwendet man keine teleskop-artigen Antennen, sondern Antennenanordnungen wie Dipole und deren phasengerechte Zusammenschaltung (Yagi-Antennen etc.) wie sie auch im Rundfunkbereich üblich sind.

Ab Wellenlängen von ca. 1cm und kürzer benutzt man aber ebenfalls Teleskope mit einem parabelförmigen Primärspiegel (Parabolantenne) und einer Cassegrain- oder Nasmyth-Anordnung. Wegen der geringeren Anforderung an die Oberflächengenaugigkeit ($\lambda/20$), d.h. bei den modernsten Antennen im submm-Wellenlängenbereich (die kürzesten durch die Atmosphäre einigermaßen durchgehenden Wellenlängen sind ca. $\lambda = 300 \mu m$, mit einer Zenithtransmission von ca. 20% an guten Standorten und für einen kleinen Teil der Zeit) genügen hier jedoch

Konstruktionen mit Aluminiumpaneele (geschnitten mit Diamantwerkzeugen auf numerischen Maschinen) und einer Kohlefaser-Fachwerkstruktur; Beispiel: KOSMA 3m, CSO, SMT etc. Damit lassen sich Teleskope für die Submm-Astronomie bis ca. 15m Größe bauen. Bei längeren Wellenlängen, im Millimeter- und Zentimeter-Bereich sind Stahlkonstruktionen üblich (Beispiel: Effelsberg, IRAM 30m)

3.3 Interferometrie

Die erreichbare Winkelauflösung ist also für ein einzelnes Teleskop bei gegebener Wellenlänge durch die Größe der Teleskop-Apertur gegeben. Man kann allerdings mehrere Teleskope zu einem Teleskop "zusammenschalten", um insgesamt die Winkelauflösung zu erreichen, die der größten Basislänge (Länge zwischen jeweils zwei Teleskopen entspricht). Damit dies funktioniert, muss die Strahlung der einzelnen Teleskope phasengerecht überlagert werden.

In der Radioastronomie ist diese Technik seit langem gut etabliert. Dies liegt zum einen an der ohne Einsatz der Interferometrie wegen der großen Wellenlängen meist relativ schlechten

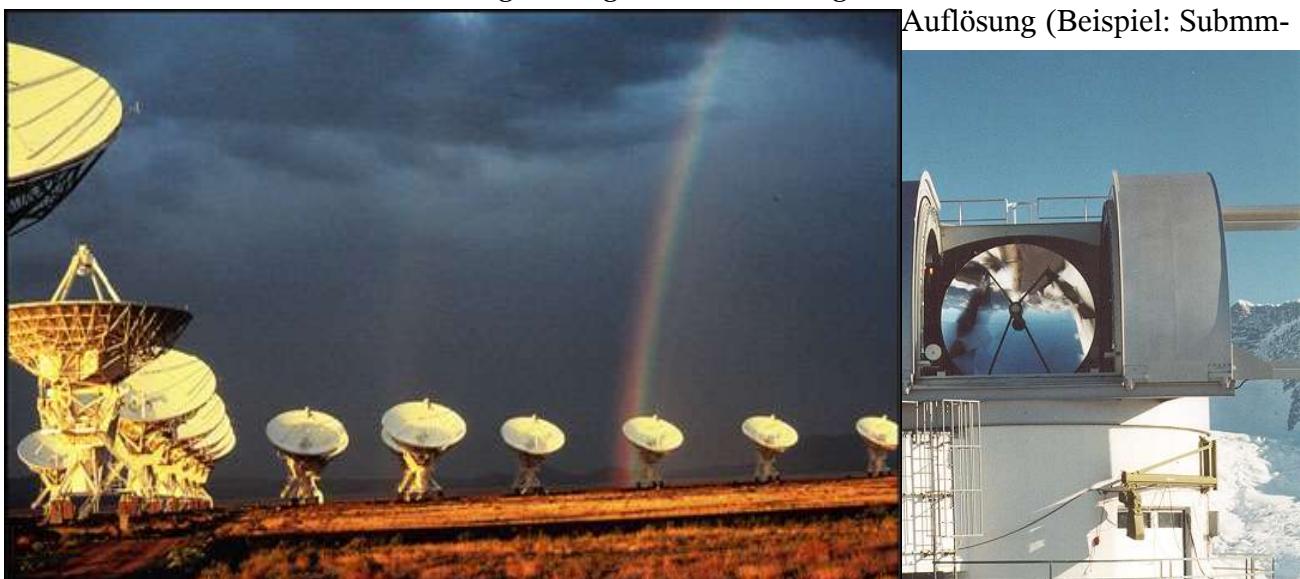


Abb. 33 Very Large Array, VLA: 27 Antennen der 25m-Klasse; 50 km maximale Basislänge

Teleskop: $D=15\text{ m}$, $\lambda=350\mu\text{m}$; cm-Teleskop: $D=100\text{m}$, $\lambda=1.5\text{cm}$). Andererseits geschieht die Detektion der Strahlung im Radiobereich immer direkt als elektrisches Signal inklusive der Phaseninformation (siehe unten), die dann durch Umsetzen in einen geeigneten Zwischenfrequenzbereich mit den üblichen Hochfrequenztechniken von den einzelnen Antennenstationen zu einer zentralen

Empfangsstation gesendet werden kann und dort interferometrisch überlagert gemessen werden kann (Korrelator). Das Very Large Array im Zentimeterwellenbereich ist das klassische Beispiel eines Radiointerferometers. Die ESO baut gemeinsam mit den Amerikanern und Japanern derzeit das Atacama Large Millimeter Array (ALMA) auf der Chajnator-Ebene in der Atacama-Wüste in Chile auf, das ca. 2010 in der endgültigen Konfiguration in Betrieb gehen wird.



Abb. 31 KOSMA 3m Teleskop, Gornergrat, Schweiz



Abb. 34 Das Large Binocular Teleskope LBT

Im Extremfall der interkontinentalen very-long-baseline-interferometry (VLBI) wird das elektrische Signal direkt (als Videosignal) zusammen mit den Zeitmarken einer hochgenauen Atomuhr aufgezeichnet und später an einem zentralen Ort im Rechner korreliert (MPIfR, Bonn ist eine solche VLBI-Zentrale). Erste Experimente mit Einbeziehung von VLBI-Antennen im Weltall laufen derzeit.

Im optischen und nah-infraroten (NIR) ist die Technik noch sehr jung und erst teilweise im Einsatz. Hier müssen die Lichtstrahlen der einzelnen Teleskope optisch über ein Spiegelsystem (in einem evakuierten Tunnel zwischen den Teleskopen) zu einer zentralen Stelle gebracht werden, wo sie aufgespalten und jeweils zwischen einem Teleskoppaar zur Interferenz gebracht werden. Die Weglängen müssen dabei auf Bruchteile der Wellenlänge kontrolliert werden. Die beiden Keck-Teleskope, das Large Binocular Telescope (LBT; Instrumentierungsbeteiligung A. Eckart's Gruppe; und die 4 Very Large Telescopes (VLT) der ESO sind

Beispiele, wo diese Technik entwickelt wird.

In beiden Fällen misst jedes Teleskoppaar (jede Basislinie) eine Fourierkomponente des Intensitätsverteilung am Himmel. Mit einer Anzahl von n Teleskopen erhält man also gleichzeitig $n/2*(n+1)$ Basislängen, d.h. Fourierkomponente. Der Vektor im Fourierraum der Bildebene am Himmel (in Winkelkoordinaten), der sogenannten (u, v) -Ebene (in Inversen Winkeleinheiten) entspricht dabei der senkrechten Projektion der Basislänge relativ zur Beobachtungsrichtung in Einheiten der Wellenlängen: $(u, v) = \vec{d} / \lambda$. Die langen Baselines ergeben also die hochfrequenten, d.h. kleinräumigen Bildkomponenten, die kurzen Baselines die groben Strukturen.

Wegen der Erdrotation ändert sich dauernd die Beobachtungsrichtung, und damit die senkrechte Projektion der Basislinie, so dass im Zeitverlauf jedes Teleskoppaar eine Spur in der (u, v) -Ebene zeichnet. Aus der Serie dieser zeitlich nacheinander gemessenen Amplituden und Phasen für jede Basislinie kann durch Fourier-Rücktrafo schließlich die Intensitätsverteilung am Himmel zurück gerechnet werden. Die Winkelauflösung des Bildes entspricht einem Teleskop von der Ausdehnung des gesamten Interferometers, d.h. es wird ein Teleskop mit der entsprechenden großen Apertur simuliert (Apertursynthese). Allerdings ist die Empfindlichkeit kleiner als die eines entsprechend großen Teleskops, da ja nur ein kleiner Teil der Apertur ausgefüllt ist. Einige große Teleskope im Interferometer tragen dabei entsprechend zu einer höheren Gesamtfeindlichkeit bei, wenn sie mit möglichst vielen kleinen Teleskopen eine gemeinsame Basislänge bilden können.



Die Länge der nutzbaren Basislinien, d.h. auch die sinnvolle Gesamtgröße des Interferometers ist durch die Kohärenzlänge der beobachteten Strahlung, d.h. insbesondere durch die Phasenverschiebungen aufgrund der atmosphärischen Turbulenzen begrenzt (oder die Empfindlichkeit entsprechend eingeschränkt) .

Illustration 1 Die 4 "Very Large Telescopes" (VLT) der ESO auf dem Paranal in Chile (Primärspiegel 8.2 m). Sie können zusammen mit den kleinen "outrigger" Teleskopen zu einem Interferometer zusammengeschaltet werden.

4 Astronomische Instrumente

Dieses Kapitel ist noch nicht ausgearbeitet!

4.1 Nachweis elektromagnetischer Strahlung

direkte (inkohärente) Detektion

kohärente Detektion

4.2 Instrumentierung

Photometrische Beobachtung

Spektrometer

5 Der Sternenhimmel

5.1 Historische Einleitung

Immer hat die Menschheit die scheinbaren Positionen der Sterne (inkl. der Sonne und des Mondes) zur Festlegung von Tag, Monat und Jahr benutzt. Mit zum Teil erstaunlicher Präzision (Ptolemäus, Mayas in Süd- und Mittelamerika, chinesischer Kalender) waren die kompliziert ineinander geschachtelten periodischen Bewegungen der Körper des Sonnensystems bekannt. Aufgrund dieser Kenntnis war einerseits die Vorhersage wichtiger Ereignisse (Finsternisse) präzise möglich, andererseits die Planung der alltäglichen Abläufe im Laufe der Jahreszeiten (Landwirtschaft) und die Navigation mit Hilfe der Sterne möglich. Zu diesen Zwecken genügt die rein deskriptive Beschreibung und die empirische Bestimmung der Periodizitäten.

Ein weiterer Schritt ist die Frage nach dem warum: welchen Gesetzmäßigkeiten folgt dieses "Räderwerk" der Gestirne? In welcher Beziehung stehen die Himmelskörper und die Erde?

ptolomäisches und kopernikanisches Weltbild

Wir können hier nur kurz auf die Entwicklung des Weltbildes eingehen. Sie ist auf jeden Fall eng mit der Entwicklung der modernen Naturwissenschaften verknüpft, weil letztlich die naturwissenschaftliche Vorgehensweise es der Menschheit erlaubt hat, ihre genaue Stellung und in Zusammenhang damit die Stellung der Erde mit den anderen Planeten, die gemeinsam die Sonne als Zentralgestirn umkreisen, und die Stellung der Sonne als einer von 100 Milliarden Sternen in der Milchstraße zu verstehen.

Die Vorstellung der alten Griechen und auch der Römer war die, dass die Erde eine Scheibe sei (entsprechen der alltäglichen Anschauung, dass man bis zum Horizont eine flache Erdoberfläche sieht!). Allerdings waren sich auch zu Zeiten der alten Griechen schon kritische Geister darüber klar, dass die Erde wohl eine Kugel sein müsse (ohne sich in dokumentierte Form Gedanken darüber gemacht zu haben, warum man dann auf den Antipoden nicht herunterfällt; das Konzept der Schwerkraft als universeller Zentripetalkraft gab es natürlich noch nicht). Eratosthenes (300 v.Chr.) hatte als erster die richtige Vorstellung von der Erde als Kugel, deren Größe er einigermaßen genau trigonometrisch bestimmte (Unterschiedliche Schattenlänge zur Mittagszeit eines Stabes geeichter Länge in Athen und Ägypten, d.h. bei bekanntem Abstand auf der Erdkugel).

In dem klassischen griechischen und römischen Weltbild wölbte sich über der Erde das Himmelszelt, an dem die Sterne festgemacht und auf dem sich die Sonne und die Planeten bewegen. Die Sonne beschreibt eine einfache tägliche Bahn, die Planeten komplizierte, durch sukzessiv kleinere, ineinander geschachtelte Kreisbewegungen (Epizyklen) schließlich mit guter Genauigkeit beschriebene Bahnen. Der Frage nach Abstand zu dieser Himmelskugel spielte keine wichtige Rolle.

Schon Aristarch von Samos (ca. 280 v. Chr.) vertrat ein heliozentrisches Weltbild (Umlauf der Erde um die Sonne im Laufe eines Jahres, tägliche Drehung der Erdkugel im die eigene Achse). Er bestimmte auch den ungefähren Abstand zum Mond (s.u.) und (allerdings sehr falsch) den Abstand zur Sonne. Allerdings waren diese Vorstellungen für die damalige Zeit (und die weiteren 18 Jahrhunderte der Weltgeschichte) so extrem sowohl hinsichtlich der alltäglichen Anschauung und auch hinsichtlich des Weltbildes, dass sie sich zunächst nicht durchsetzen konnten. Vielmehr wurden ihre wenigen Anhänger regelrecht verfolgt (Anaxagoras, Giordano Bruno, schließlich Galilei) und erst zu Zeiten der beginnenden Aufklärung wurden sie wieder aufgegriffen und konnten sich durchsetzen (Kopernikus, Galilei) . Aristarch hielt auch als erster die Sterne für

andere Sonnen; aufgrund der nicht beobachtbaren Parallaxe (s.u.) schloss er auf deren große Entfernung. Vertreter des geozentrischen Modells benutzten dasselbe Argumente, um die Sterne an der Himmelssphäre festzusetzen (Merke: absence of evidence is not evidence of absence!).

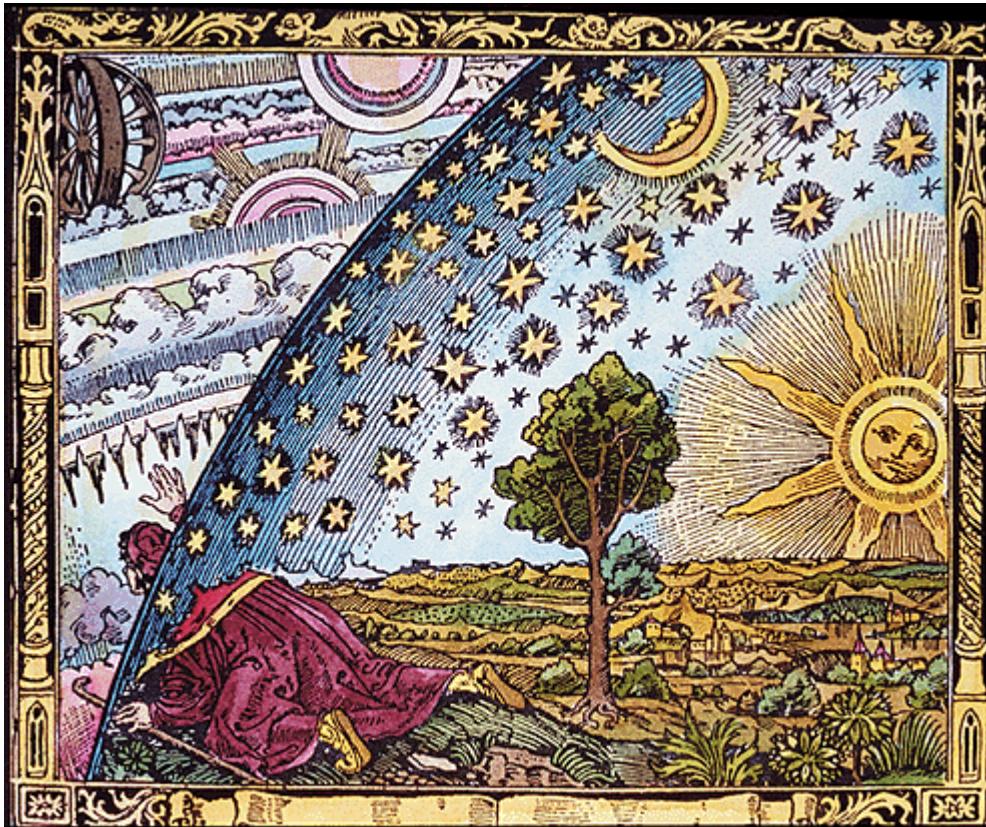


Abb. 35 Die wissenschaftliche Neugier hat die Menschheit immer veranlasst, über die Grenzen des jeweiligen Weltbildes hinaus in unerforschtes "Gelände" vorzudringen. außerdem ein gutes Modell-Beispiel für das Sonnensystem).

Kopernikus machte als erster in der Neuzeit darauf aufmerksam, dass die Bewegung der Planeten viel einfacher zu beschreiben ist, wenn man die Sonne ins Zentrum setzt, und sich die Erde als einer der Planeten um diese auf Kreisbahnen bewegt. Der Mond läuft auf einer Kreisbahn um die Erde, genauso wie Jupiter von Monden begleitet wird (letztere Entdeckung, möglich durch Galilei's Einsatz des Fernrohres zur Beobachtung, gab die direkte Evidenz, dass nicht alles um die Erde kreist, und war

Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass zumindest die kritischen Geister sich der offensichtlichen, der unmittelbaren Anschauung zugänglichen Argumente für dieses heliozentrische Weltbild voll bewusst waren: siehe den "Dialog" von Galilei (Größenänderung der Planeten, Phasen der inneren, fehlende Phasen der äußeren Planeten).

5.2 Die Himmelskugel

Wegen des großen Abstands zu den Himmelskörpern können wir zunächst nur die Richtung zu ihnen, d.h. zwei der drei Koordinaten im Raum, angeben. Die Bestimmung der dritten Koordinate, der Entfernung der astronomischen Objekte, ist ein zentrales Thema, das wir immer wieder berühren werden. Lassen wir zunächst die Bewegung der Sonne und der Planeten (und gelegentliche Kometen) außen vor, so stellen wir fest, dass die anderen Himmelskörper als Fixsterne relativ zueinander in Ruhe in festen Richtungen stehen.

Lediglich aufgrund der täglichen Rotation der Erde um die eigene Achse dreht sich die Himmelskugel von der Erde aus gesehen in umgekehrte Richtung: die Sterne gehen im Osten auf, im Westen unter. Je nach geographischen Koordinaten des Beobachters sind einige zirkumpolar, andere gar nicht zu sehen.

Die Sterne beschreiben im Laufe eines Tages Parallelkreise an der Himmelskugel; das Zentrum

dieser Kreises ist auf der Nord- und Südhalbkugel durch die Richtung der Rotationsachse der Erde gegeben. Im Norden steht der relative helle sog. **Polarstern** (α Polaris) zufällig nahe an dieser Richtung (der Abstand ist ca. 1° ; Verlängerung der Hinterseite des Großen Wagens um das 5-fache nach oben), so dass man jederzeit leicht die Richtung Norden anhand des Polarsterns bestimmen kann.

Koordinatensysteme

Es ist nötig, die Position der Sterne und Planeten (und anderer Himmelsobjekte) genau und reproduzierbar anzugeben. Die Bestimmung und genaue Vermessung der Positionen der Sterne an der Himmelskugel wird als **Astrometrie** bezeichnet und ist der älteste Zweig der Astronomie. Die Positionen an der Himmelskugel werden immer in einem den Winkelkoordinaten im Kugelkoordinaten-System entsprechenden Koordinatensystem angegeben. Um das Koordinatensystem festzulegen, muss man also die Richtung der ausgezeichneten Koordinatenachse und einen Bezugs-Großkreis angegeben; außerdem noch, ob die Winkel rechts- oder linksdrehend gezählt werden. In der Astronomie werden Winkel meist nicht in dezimaler Unterteilung, sondern in Grad ($^\circ$), (Bogen-)Minuten(') und (Bogen-)Sekunden('') oder in Stunden (h), (Zeit-)Minuten(min) und (Zeit-)Sekunden(sec) unterteilt angegeben.

Nützliche Umrechnungen:

$$i) \quad 1'' = \frac{2 \cdot \pi \text{ sr}}{360 \cdot 60 \cdot 60} = 4.86 \cdot 10^{-6} \text{ sr} \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ sr} \quad \text{d.h. Erbse in 1 km Entfernung!}$$

$$ii) \quad 1 \text{ h} = 360 \frac{\circ}{24} = 15^\circ, \quad 1 \text{ min} = \frac{1}{60} \text{ h} = \frac{15^\circ \cdot 60' / \circ}{60} = 15', \quad \text{entprechend } 1 \text{ sec} = 15''$$

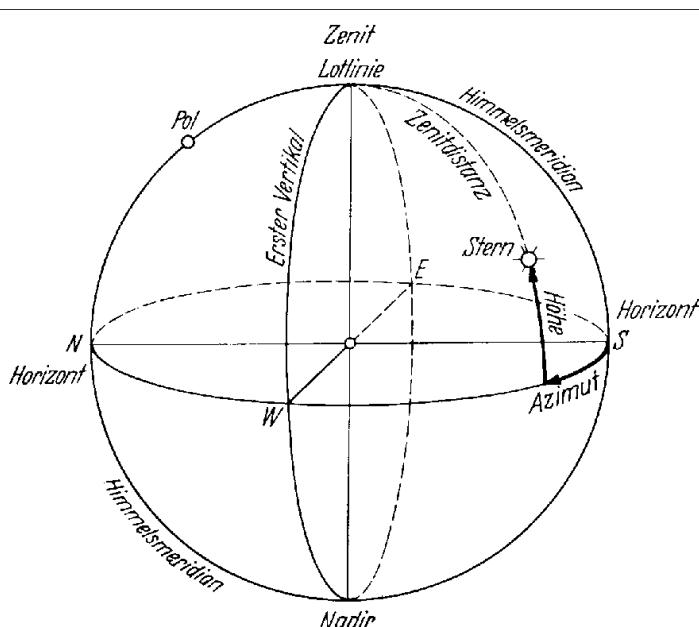


Abb. 36 Definition des Horizontalsystems

Das Horizontsystem: Azimut und Elevation

An jedem Standort auf der Erde ist die natürliche Wahl eines Koordinatensystems durch die ausgezeichnete Richtung der Schwerkraft gegeben: die Richtung senkrecht nach oben, der **Zenith**, definiert die Achse des Koordinatensystems. Die Ebene des Bezugs-Großkreis wird durch diese Richtung und die Rotationsachse der Erde festgelegt, d.h. der Bezugs-Großkreis ist durch die Richtung "Norden" definiert (**Meridian**). Damit ist an jeder Stelle auf der Erdoberfläche (außer am Nord- und Südpol) das sog. **Horizontsystem** definiert: der Äquator des Kugelkoordinatensystems ist der lokale Horizont.

Der Winkel zum Zenith heißt

Zenithabstand z , gemessen in Winkelgrad ($0^\circ < z < 180^\circ$; $z > 90^\circ$: unterhalb des Horizonts). Stattdessen wird meist die **Elevation** $EL = 90^\circ - z$ verwendet ($90^\circ > EL > -90^\circ$; $EL < 0^\circ$: unterhalb des Horizonts). Als zweiter Winkel wird der **Azimut** AZ von Norden ausgehend über Ost nach Süd und West in Winkelgrad gezählt ($0^\circ < AZ < 360^\circ$). Er entspricht den üblichen Himmelsrichtungen mit Ost: $AZ = 90^\circ$, Süd: $AZ = 180^\circ$, etc.

Offensichtlich gibt die Elevation des Himmels-Nordpols (english: north celestial pole), d.h. des Schnittpunktes der Drehachse der Erde mit der Himmelsphäre, gerade die geographische Breite an.

Viele Teleskope, gerade die größeren und schwereren, insbesondere wegen ihrer großen Abmessungen die Radioteleskope, haben eine AZ-EL-Montierung.

Aufgrund der Drehung der Erde ändern die Sterne laufend ihre Position im Horizontsystem.

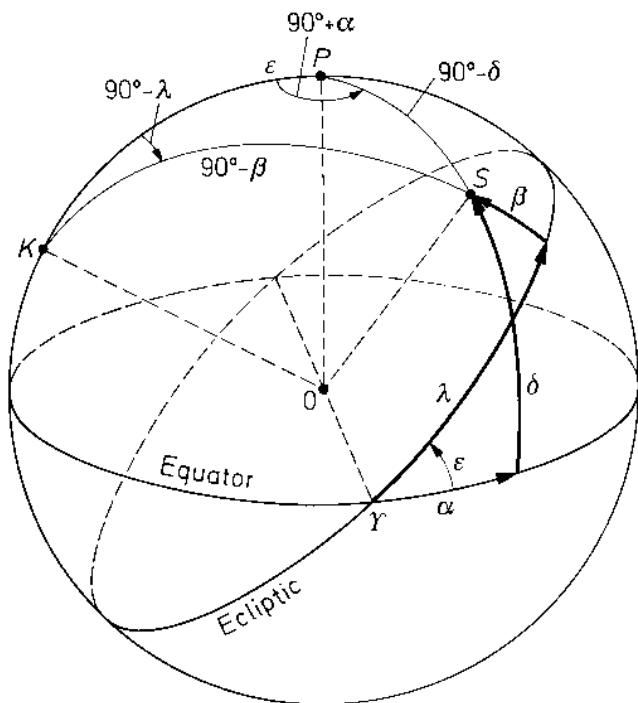


Abb. 37 Zur Definition des Äquatorialsystems (aus Lang, Astrophys. Formulae)

Erde aus gesehen im Lauf eines Jahres einen gegen den Äquatorkreis geneigten Großkreis (**Ekliptik**), der zwei Schnittpunkte mit dem Äquatorkreis hat. Die Sonne steht definitionsgemäß im Frühling (am 21. März) und im Herbst (ca. 23. September) gerade auf diesen beiden Punkten (Tag-Nachtgleiche), dem sog. Frühlings- und dem Herbstpunkt. Der Frühlingspunkt heißt auch **Widderpunkt**, da er zur Zeit der alten Griechen (Hipparch) im Sternbild Widder lag (s.u.)

Die Rektaszension α wird auf dem Äquator vom Frühlingspunkt links herum gezählt, und zwar nicht in Winkelgrad, sondern in Stunden, Minuten und Sekunden. Dies liegt nahe, weil so die Rektaszension eines Sternes genau die Zeit zwischen dem Meridiandurchgang des Sternes und dem Meridiandurchgang des Frühlingspunktes angibt. Die an Orten auf verschiedenen Längengraden entsprechend verschiedene **lokale Sternzeit (LST)** gibt die momentane Rektaszension des Meridians an. Damit ist der **Stundenwinkel** eines Sternes, definiert als Differenz zwischen Sternzeit und Rektaszension, LST-R.A., gerade die seit dem Meridiandurchgang (**Kulmination**: höchster Stand des Sternes am Himmel) des Sternes verstrichene Zeit (negativer Stundenwinkel: vor Kulmination, Stern geht auf; positiver Stundenwinkel: nach Kulmination, Stern geht unter).

Achtung:

1. da die Rektaszension linksherum zunimmt (von Westen über Osten), steigt sie auf astronomischen Karten nach links (!) hin an.

Das äquatoriale System: Rektaszension und Deklination

Um die Sternkoordinaten von der Drehung der Erde unabhängig zu machen, bietet sich ein Koordinatensystem an, das als Bezugsache die (in guter Näherung, s.u.) feststehende Drehachse der Erde hat, so dass der Himmelsäquator mit dem auf die Himmelskugel projizierten Erdäquator übereinstimmt (**Äquatorialsystem**). Die **Deklination** δ gibt den Winkel zum Äquator, positiv und negativ vom Himmelsäquator in Winkelgrad gezählt, an ($+90^\circ > \delta > -90^\circ$; : $\delta > 0^\circ$ Nordhalbkugel; $\delta < 0^\circ$: Südhalbkugel).

Als Bezugsrichtung für den zweiten Winkel braucht man jetzt ebenfalls einen unabhängig von der Erddrehung festdefinierten Punkt auf dem Äquator. Da die Bahn der Erde um die Sonne um $23^\circ 27'$ gegen die Drehachse der Erde geneigt ist, beschreibt die Sonne von der

2. lokal, d.h. in der Nähe eines Bezugspunktes (α_0, δ_0) , z.B. dem Zentrum einer zu kartierenden Molekülwolke, verwendet man ein kartesisches Koordinatensystem mit Nullpunkt auf dem Referenzpunkt. Dabei entspricht aber eine Koordinatenänderung in Rektaszension von z.B. $\Delta\alpha = 1'$ nicht einem Abstand von $1'$ auf der Himmelskugel, sondern der Abstand ist um den Faktor $\cos\delta_0$ kleiner. Das lokale Koordinatensystem ist also definiert durch $x = -(\alpha - \alpha_0)\cos\delta$; $y = (\delta - \delta_0)$. Ein äquidistantes quadratisches Raster für z.B. eine Kartierung mit der halben Beam-Größe des Radioteleskops (Full Width Half Maximum Δ_{FWHM} , "volle Breite bei halbem Maximalwert"), hat also in äquatorialen Koordinaten die Abstände $\Delta\alpha = -\frac{1}{2}\Delta_{FWHM}/\cos\delta_0$; $\Delta\delta = \frac{1}{2}\Delta_{FWHM}$.



Abb. 38: Langzeitbelichtung: Sterne über Kit Peak

An einem Ort der (nördlichen) Breite β erreicht ein Stern der Deklination δ in der **oberen Kulmination** die maximale Elevation $EL_{max} = \delta + 90^\circ - \beta$, in der **unteren Kulmination** die minimale Elevation $EL_{min} = \delta - (90^\circ - \beta)$. Ständig über dem Horizont, d.h. **zirkumpolar**, bleiben Sterne mit $\delta > 90^\circ - \beta$, nie über den Horizont kommen die Sterne mit $\delta < -(90^\circ - \beta)$..

Da die Rotationsachse der Erde (genauer die Rotationsachse des Erde-Mond-Systems) wegen der Gezeitenkräfte der Sonne auf die Erde (genauer: auf Erde und Mond) nicht feststeht (Präzession) und außerdem die Erdbahn wegen der Störungen der anderen Planeten auch langsam ihre Ausrichtung im Raum ändert (Nutation), ist das so definierte Äquatorialsystem nicht fest.

Die Präzession ist eine Drehung der Erdrotations-Achse auf einem Kegel um die Achse senkrecht zur **Ekliptik**.. Der

Öffnungswinkel dieses Kegels ist also genau der Winkel, um den Erd-Äquator und Ekliptik gegeneinander geneigt sind: $23^\circ 27'$ (s.o.). Ein vollständiger Umlauf dauert 25800 Jahre, d.h. der Frühlingspunkt verschiebt sich pro Jahr um $\frac{2\pi}{25800} = 50.1''$. Zur Zeit der alten Griechen lag der

Frühlings- oder Widderpunkt im Sternbild Widder (daher der Name), derzeit liegt er in den Fischen und nähert sich dem Wassermann (daher die Hymne "Age of Aquarius" im musical "Hair").

Die Nutation (mit 19 jähriger Periode) und die anderen Störungen sind wesentlich kleiner. Die genaue theoretische Beschreibung dieser Bewegungen zusammen mit den anderen Mehrkörperstörungen im Planetensystem ist mit sehr hoher Genauigkeit verstanden und erlaubt heute die Vorausberechnung der Positionen der Planeten, Monde und Asteroiden im Sonnensystem (Ephemeriden) mit einer Genauigkeit von ca. 1 cm (!) (diese Daten bilden eine wesentliche Grundlage für die Raumfahrt im Planetensystem: Swing by's etc.).

Um die Position der Sterne eindeutig anzugeben, muss man also noch spezifizieren, auf welchen Zeitpunkt (**Epoche**) man das äquatoriale Koordinatensystem bezieht. Üblich sind der 1. Jan. 1950 und der 1. Jan. 2000. Die entsprechende Zahl wird als unterer Index an die Deklinations- und Rektaszensionswinkel angehängt: $\alpha_{50}, \delta_{50}; \alpha_{2000}, \delta_{2000}$. Die Umrechnung von einer zur anderen Epoche, insbesondere zur aktuellen Epoche (zur blinden Positionsrichtung des (Radio-)Teleskops) nennt man **präzidieren** der Koordinaten.

Elevation [°]	0	5	10	20	40	60	90
Refraktion	34'50"	9'45"	5'16"	2'37"	1'09"	33"	0"

Tabelle 5.1: Refraktion: scheinbare Anhebung der Sternörter aufgrund der atmosphärischen Brechung

Zur genauen Positionsbestimmung der Sterne muss man noch die Brechung des Lichtes in der Erdatmosphäre berücksichtigen (Beachte: der Durchgang durch eine planparallele Schicht egal welcher Zusammensetzung führt dies nur zu einem Versatz, der wegen der großen Entfernung der Sterne unwichtig ist; es kommt also, bis auf 2. Ordnungs-Korrekturen durch die Krümmung, nur auf den Brechungsindex der lokalen Schicht am Erdboden an!). Dies führt zu einer scheinbaren Anhebung der Sternörter (sog. **Refraktion**). Bei mittleren Druck- und Temperaturverhältnissen (Standardatmosphäre) beträgt der Effekt in Horizontnähe ca. ein halbes Grad (siehe Tabelle).

andere Koordinatensysteme

Je nach astrophysikalischer Fragestellung bieten sich eventuell andere Bezugsebenen/-punkte an. Man benutzt z.B. **ekliptikale Koordinaten** für Untersuchungen von Körpern im Sonnensystem.; hier ist die ausgezeichnete Ebene die der Ekliptik, der Referenzpunkt ist wie im äquatorialen System der Widderpunkt.

Oder z.B. **galaktische Koordinaten** (l, b) = (galaktische Länge [°], galaktische Breite [°]) zur Untersuchung der Milchstraße; hier ist die ausgezeichnete Ebene die der Milchstraße (wie auch immer definiert, s.u.), der Referenzpunkt in Richtung des galaktischen Zentrums (wie auch immer definiert, s.u.)

5.3 Die Bewegung der Erde - Jahreszeiten und Tierkreis

Aufgrund der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne gemäß den Newton'schen Gravitationsgesetzen beschreibt die Erde eine Ellipsenbahn. Die Bahnelemente zeigen die Abbildung. Von der Erde aus gesehen beschreibt die Sonne eine entsprechende Bewegung vor dem

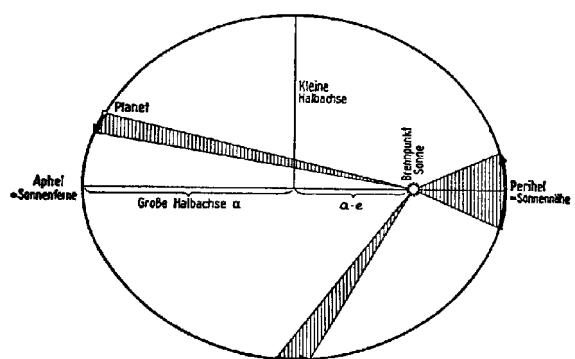


Abb. 39 Bahnelemente der Erdbahn

Hintergrund der Fixsterne; die Bahnebene definiert die Ekliptik. Wegen der Schieflage zwischen Erdäquator und Ekliptik um $23^{\circ}27'$ beleuchtet die Sonne abwechselnd Nord- und Südhalbkugel mehr; so entstehen die jährlich sich wiederholenden wärmeren und kälteren Perioden mit längerer und kürzerer Tag-/resp. Nachtlängen: die Jahreszeiten.

Tag- und Nachtgleiche liegt vor, wenn die Sonnenbahn (Ekliptik) den an die Himmelskugel projizierten Äquatorkreis schneidet, d.h. am Frühlingspunkt (21. März plus Verschiebung je nach Schaltjahr) und am Herbstpunkt. (23. September)

Schon den antiken Astronomen war der ungleichmäßige Lauf der Sonne bekannt, den Kepler als

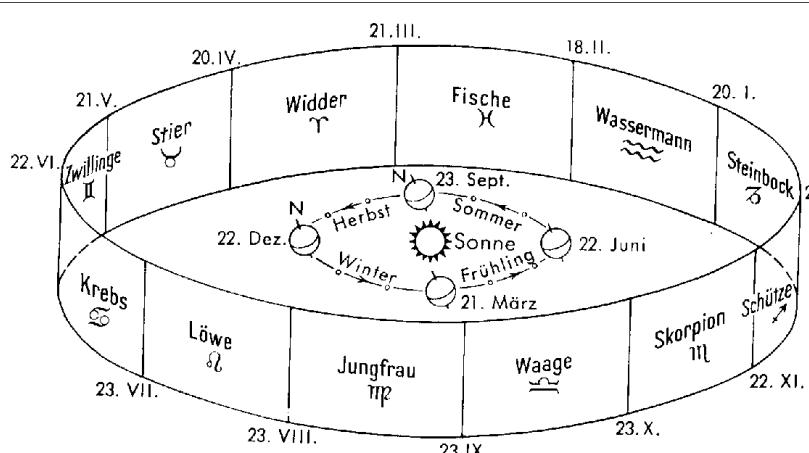


Abb. 40 Erdbahn und Tierkreiszeichen

Auswirkung der von ihm formulierten und nach ihm benannten Gesetze erkannte: in gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl gleiche Flächen, d.h. in der Nähe des Perihel läuft die Erde schneller als im Aphel. Entsprechend der numerischen Exzentrizität der Erdbahn $e=0.01674$ variiert der Abstand im Perihel und Aphel entsprechend $\left(\frac{r_{max}}{r_{min}}\right)^2 = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2$; und entsprechend der

Durchmesser der Sonnenscheibe wie $\frac{1+e}{1-e}$. Zur Zeit durchläuft die Erde ihr Perihel jeweils am 2. Januar.

5.4 Zeitmessung

Bis vor kurzem war die Zeiteinheit astronomisch definiert. Dies ist naheliegend, da unser tägliches Leben durch den Sonnenstand bestimmt ist.

Zunächst definiert man die *wahre Sonnenzeit* = *Stundenwinkel der Sonne*. Dies ist die Zeit, die eine Sonnenuhr anzeigt. Sie variiert kontinuierlich mit der geographischen Länge des Beobachters. Zur Festlegung der Zeitskala definiert man: ein Tag (Wiederholung des Meridiandurchgangs) enthält 24h, jede Stunde 60 Minuten, jede Minute 60 Sekunden. Die Uhrzeit 12h entspricht der oberen Kulmination (Meridiandurchgang) der Sonne (Mittag).

	12. Februar	14. Mai	26. Juli	4. November
Zeitgleichung	-14m20s	+3m45s	-6m23s	+16m23s

Tabelle 5.2: Extremwerte der Zeitgleichung um Jahresverlauf

Wegen der ungleichmäßigen Bewegung der Erde auf ihrer Ellipsenbahn sind die so definierten Stunden jährlich variabel. Um zu einer gleichförmigen Zeit zu gelangen, definiert man die **mittlere Sonnenzeit**, die durch eine im Jahreslauf gleichförmigen Umlauf dargestellt würde. Der

Unterschied ist die sog. *Zeitgleichung* = *Wahre Sonnenzeit - Mittlere Sonnenzeit* (siehe Tafel im Eingangsbereich des RAI, Uni Bonn).

Im alltäglichen Leben ist es offensichtlich praktikabler, die Zeit innerhalb ganzer Zeitzonen als konstant zu definieren, z.B. MEZ etc.. Für globale Zeitbestimmungen verwendet man die Zeitzone des geographischen Nullmeridians, die **Weltzeit** oder **Universal Time (UT)** als mittlere Sonnenzeit des Greenwich Meridians.

Beim astronomischen Beobachten benutzt man die **Sternzeit**, d.h. den Stundenwinkel des Frühlingspunktes (diese ist gleich der R.A. der auf dem jeweiligen Längengrad um Mitternacht kulminierenden Sterne). Die mittlere Sonne bewegt sich relativ zum Frühlingspunkt in einem Jahr = 365 Tagen um $360^\circ=24h$ von Westen nach Osten. Der mittlere Sonnentag ist deshalb um $24h/365$ oder 3m56s länger als der Sternentag; d.h. die Sternzeit-Uhr geht pro Monat um etwa 2h vor gegenüber der "gewöhnlichen" Uhr.

Aus der obigen Definition der mittleren Sonnenzeit ergibt sich ein **tropisches Jahr** als Zeitraum zwischen zwei Durchgängen der Sonne durch den Frühlingspunkt zu 365.24220 mittleren Sonnentagen. Da aus praktischen Gründen jedes Jahr eine ganze Anzahl von Tagen umfassen sollte, benutzt man im täglichen Leben das **Bürgerliche Jahr** = 365.2425 Tage. Mit

$$365.2425 = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}$$
 ergeben sich so die Schaltjahr-Regeln des 1582 von Papst Gregor XIII eingeführten **Gregorianischen Kalenders**.

Wegen der Präzession ist die tatsächliche Erdbahn um die Sonne etwas langsamer als durch das tropische Jahr gegeben. Das **siderische Jahr** (Zeitraum zwischen zwei Durchgängen der Sonne vor demselben Punkt am Himmel) beträgt 365.25636 mittlere Sonnentage.

Zur Erleichterung chronologischer Rechnungen über längere Zeiträume definiert man die sog. Julianischen Tage durch fortlaufende Nummerierung. Der Julianische Tag beginnt jeweils um 12h UT, beginnend vom Tage 0 um 12h UT am 1. Januar 4713 v. Chr. So war z.B. am 1. Januar 1970 der Julianische Tag 2 440 588.

Heute ist die absolute Zeitmessung mittels Atomuhren wesentlich genauer als die astronomische Zeitbestimmung. Entsprechend ist die Sekunde als die Dauer von 9 162 631 770 Schwingungen der Strahlung eines bestimmten ^{133}Cs Hyperfeinübergangs definiert. Auf dem gegenseitigen Vergleich der an verschiedenen Anstalten weltweit betriebenen Atomuhren basiert die **Universal Time Correlated** (UTC). Da im täglichen Leben (Navigation, Geophysik etc.) nach wie vor die Zeitrechnung sich nach der Erddrehung richten muss, wird die UTC jeweils um eine Sekunde vor oder zurück geschaltet, wenn sie von der oben definierten UT abweicht.

5.5 Sternbilder/Konstellationen und Nomenklatur

Schon immer und in allen Kulturen haben die Menschen die sichtbaren Sterne zu Assoziationen, Sternbildern zusammengefasst und gemäß entsprechenden Mythen etc. benannt. In der westlichen Welt ist die Benennung nach griechischen Sagen überliefert. Die International Astronomical Union (IAU) hat 1930 den Himmel in 88 Sternbilder aufgeteilt, so dass jede Position am Himmel, d.h. jeder Stern oder jedes punktförmige Objekt eindeutig einem Sternbild zugeordnet ist.

Die hellsten Sterne werden nach ihrem Sternbild, und in Reihenfolge der Helligkeit mit dem griechischen Alphabet nummeriert (Beispiel: α Orionis).

5.6 Scheinbare Helligkeiten, Größenklassen/Magnitudines

In der Astronomie hat sich ein besonderes System "eingebürgert", um die Helligkeit der Sterne zu messen. Dies geht auf die qualitative Bestimmung der Helligkeiten der antiken Astronomen zurück, die die Sterne in sog. Größenklassen (Magnitudines) von 1 bis 6 einteilten. Dabei waren in der Klasse 1 die hellsten, in 6 die schwächsten Sterne.

Eine quantitative Skala wurde gemäß dem physiologischen Weber-Fechner-Gesetz aus dieser Skala entwickelt, indem man für zwei Sterne mit den Strahlungsfüssen S_1 und S_2 die Größenklassenskala als logarithmische Skala und deren Nullpunkt anhand von Vergleichssternen so definierte, dass sie für die hellsten Sterne ungefähr der historischen entspricht:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$$

Umgekehrt ist

$$\frac{S_1}{S_2} = 10^{-0.4(m_1 - m_2)}$$

Beachte: schwächere Sterne haben eine größere Magnitude!

Es entspricht also ein $\Delta m=5$ einem Helligkeitsunterschied um den Faktor 100.

6 Schwerkraft und Himmelsmechanik

Mechanik und Gravitation wurden als erste physikalische Theorien (durch Newton, basierend auf den Vorarbeiten von Kopernikus und Kepler; und den experimentellen Daten von Brahe) entwickelt und als Himmelsmechanik bis zu großer Präzision ausgearbeitet. Ihr Gültigkeitsbereich wird erst bei sehr hohen Massenkonzentrationen durch die von Einstein formulierte *allgemeine Relativitätstheorie* abgelöst. Entsprechend bilden die klassische Gravitationstheorie zusammen mit der Mechanik noch heute die Grundlage zur Beschreibung vieler astrophysikalischer Phänomene. Insbesondere beruhen die meisten Massenbestimmungen auf einer Anwendung der Newtonschen und Keplerschen Gesetze.

6.1 Die Kepler'schen Gesetze

Die aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$ folgenden Bahngleichung für die

Bewegung zweier Massen um den gemeinsamen Schwerpunkt sollten aus der Grundvorlesung bekannt sein. Zur Erinnerung: der Schwerpunkt mit der Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ bewegt sich gleichförmig geradlinig (Herleitung), so dass er durch Wahl des Bezugssystems als ruhend

angenommen werden kann. Die reduzierte Masse $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ genügt der Bewegungsgleichung

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -G m M \frac{\vec{r}}{r^3}. \text{ Die Bahnform ist je nachdem ob die Gesamtenergie}$$

$$E = T + U = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{GmM}{r} \text{ negativ (gebundene Bewegung), gleich 0, oder positiv (freie}$$

Bewegung) ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel mit dem Schwerpunkt der beiden Körper im Brennpunkt.

Da die Gravitation eine Zentralkraft ist, ist der Drehimpuls $\vec{J} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$ konstant (Herleitung). Außerdem ist der Lenz-Runge Vektor $\vec{L} = \vec{v} \times \vec{J} + \frac{GMm}{r} \vec{r}$ eine Erhaltungsgröße (dies ist eine Besonderheit des $1/r$ -Potentials)

Wenn eine der beiden Massen deutlich überwiegt, ist die reduzierte Masse in guter Näherung gleich der kleineren Masse: $m = \frac{m_2}{1 + m_2/m_1} \approx m_2, m_1 \gg m_2$.

Bei gebundener Bewegung auf einer Ellipse ist die Bahnkurve geschlossen und periodisch. Sie kann geometrisch beschrieben werden durch

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \phi,$$

wobei $e = \sqrt{1 + \frac{2Ep}{GMm}}$ die Exzentrizität und $p = \frac{J^2}{Gm^2 M}$ ist. Die kleine und große Halbachse der

Ellipse (in der Kegelschnitt-Darstellung in kartesischen Koordinaten $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) sind

$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{GmM}{2|E|}, b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{J}{\sqrt{2m|E|}}$. Der minimale (Perihel) und maximale (Aphel) Abstand sind $\vec{r}_{\min} = a(1 \mp e)$

Die Quadrate der Umlaufzeiten sind umgekehrt proportional zu den Kuben der großen Bahnachse, genauer $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$.

Im Spezialfall der Kreisbewegung ist $e=0$, d.h. die Energie $E = \frac{-GmM(1-e^2)}{2p}$ bei gegebenem Drehimpuls, d.h. gegebenem p , minimal. Die Kreisbahnen sind also am stärksten gebunden, d.h. haben für gegebenen Drehimpuls die geringste Gesamtenergie.

Durch Bestimmung der Umlaufzeit und der Bahnabmessung (große Halbachse als Mittelwert von größtem und kleinsten Abstand: $\frac{1}{2}(r_{min} + r_{max}) = \frac{1}{2}a(1+e+1-e) = a$) ist also die Gesamtmasse GM des Zweikörperproblems bestimmt. Mit bekannter Gravitationskonstante G (Eötvös-Experiment) also auch die Gesamtmasse in Masseneinheiten. Bemerke: die Gravitationskonstante ist nicht sehr genau bekannt: Längen und Zeiten, d.h. auch das Produkt GM sind viel genauer gemessen. Da in der Astronomie ohnehin Massen fast immer im Verhältnis zur Sonnenmasse M_0 angegeben werden, sollte man das als im Verhältnis zu GM_0 der Sonne verstehen.

Periheldrehung des Merkur

Die Kepler'schen Gesetze gelten genau für das klassische $1/r$ -Potential. Insbesondere sind hier die gebunden (Ellipsen-)bahnen geschlossen. Bei Abweichungen von diesem Potential (z.B. Störungen durch die anderen Planeten) ändert sich die Bahnform.

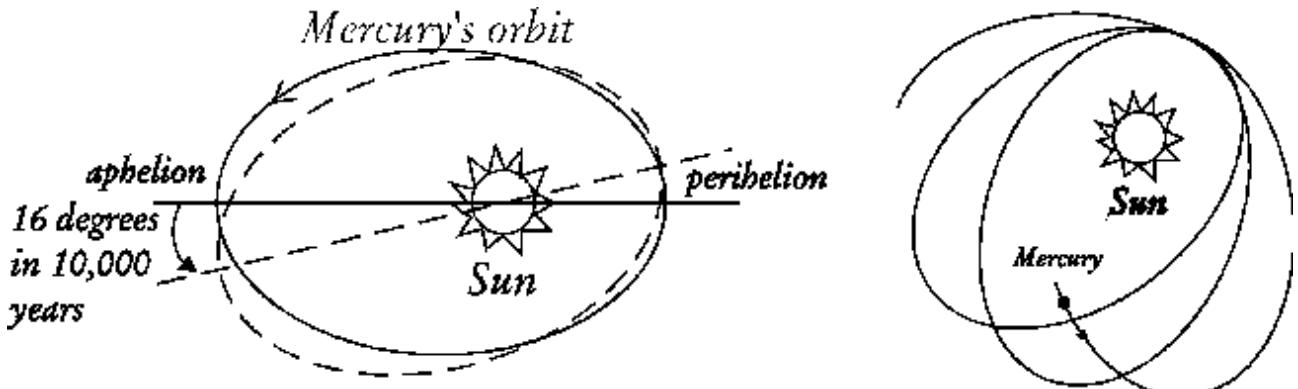


Abb. 41: Periheldrehung des Merkur (teilweise durch Störung der anderen Planeten, teilweise aufgrund der exakten Beschreibung in der allgemeinen Relativitätstheorie)

Tatsächlich ist selbst für ein reines Zweikörper-Problem das klassische $1/r$ -Potential nicht exakt. Die *allgemeine Relativitätstheorie* (A. Einstein, 1911) beschreibt die Gravitation als Krümmung des Raumes; in dem gekrümmten Raum bewegen sich alle Körper auf den (lokalen) Geodäten. Diese Darstellung kann näherungsweise als klassische Bewegungsgleichung in einem klassischen Potential ausgedrückt werden; allerdings weicht das Potential in der Nähe massiver Körper von der Newton'schen $1/r$ -Form ab (Reihenentwicklung ergibt als nächsten Term einen $1/r^3$ -Term). Die Bahnform in diesem Potential ist immer noch in guter Näherung eine Ellipse, allerdings ist sie nicht mehr geschlossen, sondern das Perihel wandert bei jeder Umdrehung um einen kleinen Betrag. Dieser Effekt hat im Sonnensystem bei Merkur als sonnennächstem Planeten den deutlich größten Einfluss. Allerdings resultiert dort ein ungefähr gleich großer Betrag an Perihel-Drehung durch die Störung der anderen Planeten (Hauptsächlich Jupiter), hergeleitet durch Störungsrechnung. Die erfolgreiche Erklärung der vollen beobachteten Merkur-Periheldrehung war einer der großen frühen Erfolge der ART.

6.2 Virialsatz

Aus der klassischen Mechanik kennen wir den *Virialsatz*: für eine System aus Massenpunkten, die sich stets in einem endlichen Volumen in ihrem gegenseitigen Schwerefeld bewegen, gilt für die Zeitmittel von kinetischer und potentieller Energie

$$\langle E_{kin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle,$$

mit $E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$ also auch $E_{tot} = -\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle$.

Herleitung:

Bewegungsgleichung für Teilchen i : $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = -\nabla_i V_i(\vec{r}_i)$ mit der potentiellen Energie des Teilchens i aufgrund seiner Lage relativ zu allen anderen Teilchen $V_i(\vec{r}_i) = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$, also $\nabla_i V_i(\vec{r}_i) = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$. Mit der Identität $\frac{d}{dt}[m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i] = m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i + m_i \dot{\vec{r}}_i^2$ gilt für die gesamte kinetische Energie aller Teilchens $2E_{kin} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{d}{dt}[\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i] - \sum_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i$. Zeitliche Mittelung über lange Zeiten ergibt mit der Annahme, dass die Bewegung auf einen endlichen Raumbereich beschränkt ist (gebundenes System) für den Mittelwert der kinetischen Energie

$$2\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_{kin} dt = \frac{1}{T} \left[\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \right]_0^T - \left\langle \sum_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = O\left(\frac{1}{T}\right) - \left\langle \sum_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle \approx - \left\langle \sum_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle.$$

Die rechte Seite lässt sich mit der Bewegungsgleichung (s.o.) umschreiben

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i &= - \sum_{i,j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{r}_i = -\frac{1}{2} \left[\sum_{i,j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{r}_i + \sum_{j,i \neq j} \frac{Gm_j m_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_j \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\sum_{i,j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = E_{pot} \end{aligned}$$

(hierbei haben wir in den letzten Schritten zunächst die Summe zweimal hingeschrieben und einmal i und j vertauscht). Insgesamt ergibt sich also der Virialsatz $2\langle E_{kin} \rangle = -\langle E_{pot} \rangle$.

Für ein System aus N mehr oder weniger gleichen Teilchen (z.B. Sternen oder Galaxien) mit (mittleren) Massen m , und der Gesamtmasse $M = Nm$ ist $\langle E_{kin} \rangle = N \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$ und

$$\langle E_{pot} \rangle = -GM^2 \left\langle \frac{1}{R} \right\rangle = -GNmM \left\langle \frac{1}{R} \right\rangle, \text{ und damit also}$$

$$\langle v^2 \rangle = GM \left\langle \frac{1}{R} \right\rangle.$$

Gemäß dieser Gleichung aus mittlerer quadratischer Geschwindigkeit und (inverser) Ausdehnung bestimmte Massen nennt man *Virialmassen*.

6.3 Massen im Planetensystem

Mit der genauen Vermessung der Erdbahn, d.h. der Bestimmung der astronomischen Einheit, bzw. auf diese Weise der gesamten Abmessungen des Planetensystems und bei den ohnehin genau bekannten Umlaufzeiten ist also die Masse der Sonne (genauer die Gesamtmasse z.B. Erde+Sonne oder Jupiter+Sonne) in Einheiten GM mit entsprechender Genauigkeit bestimmt. Mit

unabhängiger Messung der Gravitationskonstanten $G=6.67259 \times 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ (Eötvös-Experiment: Kugeldrehwaage) ist die Masse dann in MKS-Einheiten bekannt (Wiegen der Sonne). Sie beträgt $M_0 = 1.99 \times 10^{33} \text{ g}$. Entsprechend ergeben sich die Massen der Planeten mit Monden aus deren Bahndaten.

Tatsächlich ist die Behandlung als Zwei-Körper-Problem natürlich nur eine Näherung: die Körper im Planetensystem wechselwirken alle miteinander und die genaue Berechnung der Bewegung wird als Störungsrechnung (klassisch) oder numerisch (auf dem Computer) durchgeführt. Hier sind die Massen der Körper zunächst freie Parameter, die sukzessive genau angefittet werden können. Die Massen der kleinen Körper (Asteroide, Kometen) lassen sich dabei nur recht grob abschätzen, da sie kaum eine Auswirkung auf die Bahnen der anderen Körper haben.

7 Das Sonnensystem

Die Sonne dominiert die Masse des Systems und bestimmt damit in sehr guter Näherung den Schwerpunkt. Die Planeten werden wir hier (leider) nicht im Einzelnen besprechen. Hier sei nur angemerkt, dass sie alle im gleichen Drehsinn umlaufen und der Drehimpuls durch den von Jupiter dominiert wird. Die Kometen sind nur beobachtbar, wenn sie durch Bahnstörungen aus der *Oortschen Wolke*, d.h. dem von Oort vorgeschlagenen Halo des Sonnensystems, einer im mittleren Abstand von 10000 AE in ca. 1 Million Jahren die Sonne umkreisende Wolke von Körpern mit typischerweise 1 km Radius und einer Dichte von ca. 2 g/cm³. Sie bestehen aus schmutzigen Eis und sind mutmaßlich dem Ur-Material des Sonnensystems sehr ähnlich. Nach der heutigen Vorstellung wurden sie in der frühen Phase des Sonnensystems als Teil der damals sich zusammenballenden massiveren Partikel durch Bahnstörungen in diese großen Entfernung katapultiert. Heute gerät gelegentlich wiederum durch Bahnstörungen der eine oder andere Komet auf eine stark elliptische Bahn und läuft periodisch wiederholt ins Innere des Sonnensystems. Dort wird durch die Strahlung der Sonne die äußere Schicht aufgeheizt, verdampft und teilweise ionisiert. Es bildet sich eine durch den Sonnenwind längs der Magnetfeldlinien weggeblasener gasförmiger Plasmaschweif und ein vom Strahlungsdruck von der Sonne radial weg gerichteter (neutraler) Staubschweif. Gelegentlich bricht ein Komet auseinander. Nach mehreren Umläufen ist das Material erschöpft und die festen Bestandteile bleiben als kleine Partikel in Meteoritenform übrig.

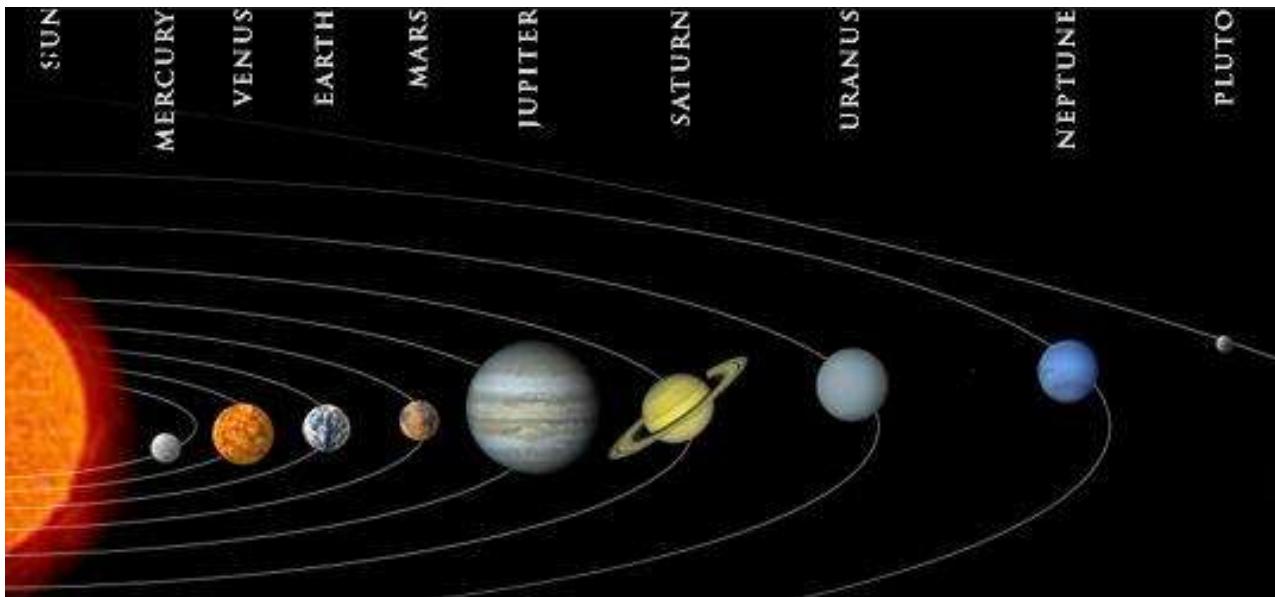


Abb. 42: Die Planeten des Sonnensystems

An Meteoriten, Gesteinsbrocken von einigen Mikrometern bis hin zu einigen Meter Größe, regnen pro Tag ca. 300 Tonnen Material auf die Erde.

Die Asteroiden sind unregelmäßige Gesteinsbrocken von einigen 100 m bis einigen km Größe, die sich im Bereich zwischen Mars und Jupiter aufhalten, wo nach dem Titius-Bode-Gesetz (s.u.) ein weiterer Planet sein sollte. Es nicht klar, ob sie ein "zerbrochener" Planet sind, oder ob sich dort wegen der starken Gezeitenkräfte von v.a. Jupiter nie ein großer fester Körper als Planetenkern bilden konnte.

7.1 Entfernungsbestimmung im Sonnensystem

Bevor wir uns mit den physikalischen Eigenschaften der Planeten und der anderen Körper des Sonnensystems beschäftigen, wollen wir kurz die Bestimmung der Ausdehnung des Sonnensystems diskutieren. Diese bildet die Grundlage aller Entfernungsmessungen auf größeren Skalen (Fixsterne, Milchstraße, externe Galaxien, Universum).

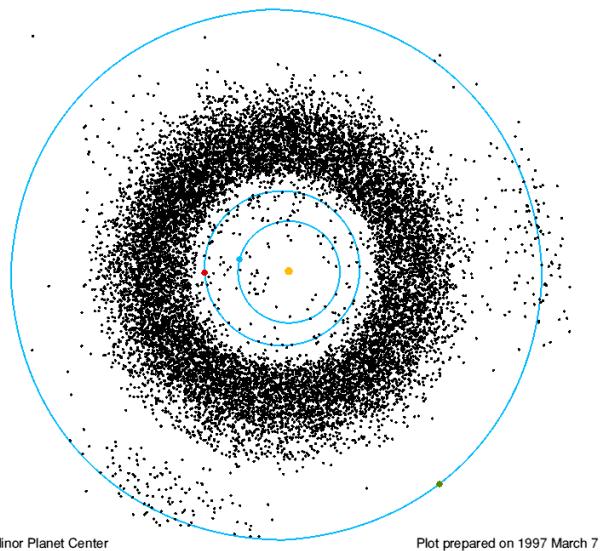


Abb. 43: Verteilung der kleineren Körper im Sonnensystem

Die Erde



Abb. 44: Komet (Staub- und Gasschweif)

Eratosthenes (300 v.Chr.) hatte als erster die richtige Vorstellung von der Erde als Kugel, deren Größe er einigermaßen genau trigonometrisch bestimmte (Unterschiedliche Schattenlänge zur Mittagszeit eines Stabes geeichter Länge in Athen und Ägypten, d.h. bei bekanntem Abstand auf der Erdkugel). Im 17. und 18. Jahrhundert wurde die Geodäsie perfektioniert (Snellius, Cassini, Descartes, Maupertius, Celsius) und durch genaue Winkelmessung der Radius der Erde (heutiger Wert: $R_{\oplus} = 6.378 \text{ km am Äquator}$) und deren genaue Form bestimmt (abgeflachtes Rotationsellipsoid, aufgrund des Gleichgewichtes zwischen Gravitation und Fliehkraft, Newton: $R_p/R_e = 229/230$; heutiger

Wert $(R_e - R_p)/R_e = 1/298.25$; e : Äquator; p : Pol). Die Längeneinheit des *Meter* wurde damals als $1/10\,000\,000$ des Abstandes Pol-Äquator definiert.

Entfernung zum Mond, Mondradius

Der Öffnungswinkel der Vollmondscheibe ist leicht zu bestimmen und beträgt ziemlich genau 0.5° ;

dieser Winkel gibt den Monddurchmesser in Einheiten des Abstandes Erde-Mond (E-M) an:

$$\frac{D_M}{D_{E-M}} = \Omega = 0.52^\circ = 0.52 \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx \frac{1}{110.2}$$

einer (partiellen) Mondfinsternis mit der Mondscheibe und die Annahme paralleler Sonnenstrahlen (große Entfernung zur Sonne) erlaubt die direkte Bestimmung des Verhältnisses von Erd- und Mondradius (Aristarch von Samos, 280 v.Chr.) $R_M/R_E = 0.27$, und damit der Entfernung des Mondes in Einheiten des Erdradius: $D_{E-M} = 60.2 R_E = 3.844 \times 10^8 \text{ m}$.

Alternativ kann man den Abstand des Mondes in Einheiten des Erddurchmessers direkt aus der Parallaxe des Mondes, d.h. aus dem Winkelunterschied der Mondposition relativ zum dahinterliegenden Fixsternhimmel von zwei verschiedenen Orten der Erde aus, messen.

Aus der Newton'schen Gravitationstheorie ergibt sich ebenfalls ein Zusammenhang zwischen Erdradius und Mondbahn-Radius: die bekannte Schwerkraftbeschleunigung auf der Erde ist gegeben durch $g = \frac{G M_E}{R_E^2}$, das Gleichgewicht zwischen Fliehkraft und Gravitation auf der Mondbahn ergibt

$$\frac{G M_E}{R_{E-M}^2} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R_{E-M}, \text{ und insgesamt also } R_{E-M} = \sqrt{\left(\frac{T R_E}{2\pi} \right)^2 g}$$

Tatsächlich war die $\frac{1}{r^2}$ -Abhängigkeit der Gravitationswirkung auf der Erdoberfläche und im Abstand der Mondbahn eine wesentliche Motivation für Newton bei der Formulierung des Gravitationsgesetzes.

Der Abstand D_{E-M} entspricht einer Hin- und Rück-Lichtlaufzeit von $T_{E-M} = 2 D_{E-M} / c = 2.56 \text{ s}$, die leicht und genau mit Radarmethoden zu messen ist (Verzögerung in der Funk-Kommunikation mit den Apollo-Astronauten).

Abmessungen des Planetensystems

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz, bzw. aus der Newton'schen Gravitationstheorie, ergibt sich, dass die Bahnradien (bzw. genauer die große Halbachsen der Bahnellipsen) der Planeten relativ

zueinander durch die Umlaufzeiten bestimmt sind: $\frac{D_{P_1-S}^3}{T_{P_1}^2} = \frac{D_{P_2-S}^3}{T_{P_2}^2} = \frac{G M_0}{4\pi^2}$ (Anm.: eigentlich

müsste hier statt der Sonnenmasse die jeweilige *reduzierte Masse* stehen, $M = \frac{M_0 M_P}{M_0 + M_S}$. Dies

kann wegen der ungleich viel größeren Sonnenmasse aber vernachlässigt werden). Mit der Entschlüsselung der scheinbaren Planetenbahnen am Himmel (Schleifenbewegungen; Kopernikus) als Konsequenz der von der sich auf einer Kreisbahn um die Sonne drehenden Erde aus gesehenen sich ebenfalls auf Kreisbahnen um die Sonne bewegenden Planeten war die Kinematik der Planeten, und damit ihre Umlaufzeiten gut bekannt.

Zur Festlegung der Größe des Sonnensystems ist also die Messung einer einzigen Entfernung direkt nötig, alle anderen ergeben sich relativ dazu aus den Umlaufzeiten.

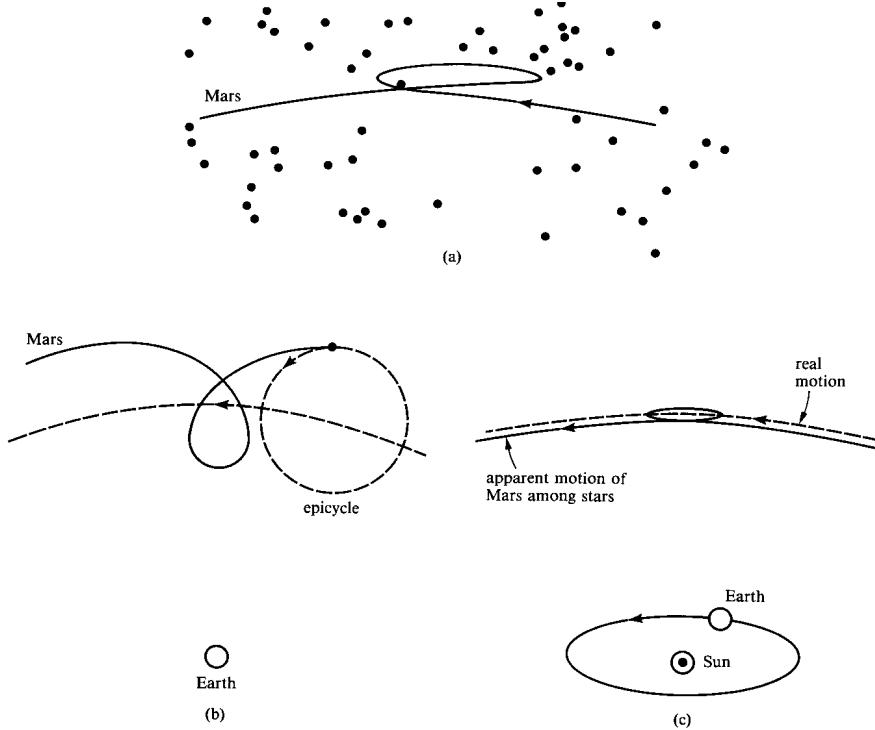


Figure 1.3. The apparent motion of the planet Mars. In an Earth-centered system, Ptolemy required a complicated theory of epicycles to explain these motions. In a Sun-centered system, Copernicus was able to explain the same motions much more simply: namely, at certain points in the motion of the Earth about the Sun, the Earth would seemingly catch up with a planet's projected orbit, and then that planet would appear to go backward.

Abb. 45: Schleifenbewegung der Planeten vor dem Fixsternhimmel

und das Streulicht am Taghimmel die Beobachtung, so dass sie selbst heute nicht möglich ist).

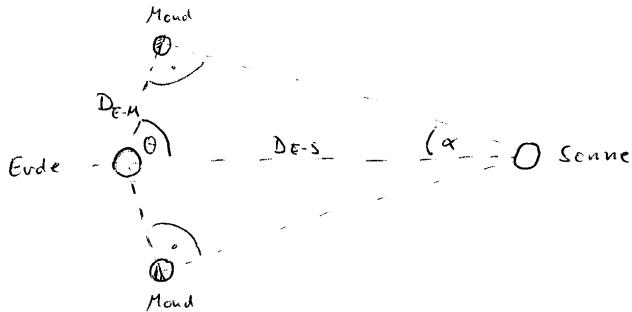


Abb. 46: Methode zur Bestimmung des Abstandes Sonne-Erde

Museum). Die beste Genauigkeit erzielt man durch Beobachtung eines der seltenen (etwa alle 100 Jahre) Venus-Vorbeigangs vor der Sonne (Vorschlag von Halley, 176, der wusste, dass zu seinen Lebzeiten kein Venus-Vorbeigänge zu beobachten war; Realisierung von Encke, 1835).

Bemerkung: auch über eine genaue Messung der Relativgeschwindigkeit lässt sich die Größe des Sonnensystems vermessen. Solche Messungen sind heute mit hochauflösender Spektroskopie über den Dopplereffekt, d.h. die geschwindigkeitsabhängige Verschiebung der Spektrallinien, möglich. Historisch benutzte Römer (1675) zusammen mit der damals ungefähr bekannten Entfernungsskala im Sonnensystem die Verlängerung bzw. Verkürzung der Umlaufperioden der Jupitermonde um so die Lichtgeschwindigkeit erstmals zu bestimmen.

Die heutige genaueste Messung der Längenskala im Sonnensystem beruht auf Radar-

Schon die Griechen um Erastosthenes erkannten, dass der Abstand Erde-Sonne im Prinzip aus der genauen Position des Mondes bei exakt zu- und abnehmendem Halbmond bestimmbar sein sollte (siehe Abb.). Tatsächlich ist der Abstand der Sonne so groß (s.u.), dass der Winkel Θ sich nur um $9'$ von 90° unterscheidet: für die Griechen damals weit jenseits der Messgenauigkeit. Direkte Triangulation der Sonne über den Erddurchmesser ergibt einen um den Faktor 60.2 (Verhältnis von Erddurchmesser zu Abstand Erde-Mond) kleineren Winkel, also ca. $8''$, also erst recht nicht leicht zu beobachten (zusätzlich stört die helle Strahlung der Sonne

Besser wird die Situation, wenn man kürzere Entfernung zu den nächsten Planeten (Venus, Mars) durch Triangulation misst. Hierzu ist die gleichzeitige Messung von verschiedenen Punkten auf der Erdoberfläche nötig, d.h. sowohl Kenntnis des Erdradius wie auch eine genaue Zeitmessung. Letztere wurde als Grundlage für die Navigation mit der Erschließung der Kolonien aus dem entsprechenden kommerziellen Interesse heraus im 17. und 18. Jahrhundert entwickelt (siehe Greenwich

Laufzeitmessungen an Venus und an erdnahen Asteroiden.

Die Astronomische Einheit

Als für die Astronomie insgesamt fundamental wichtige Größe wird die Entfernung Sonne-Erde als *Astronomische Einheit*, 1AE (oder englisch *astronomical unit*, 1a.u.) bezeichnet. Sie ist auf ca. 1 km (d.h. auf 10^{-9}) genau bekannt (Unebenheiten der Planeten) und beträgt

$$1 \text{ AE} = 149\,597\,892 \text{ km} \approx 1.5 \times 10^{11} \text{ m} .$$

Damit beträgt die Lichtlaufzeit zur Sonne $t = \frac{1 \text{ AE}}{c} = \frac{1.5 \times 10^{13} \text{ cm}}{3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}} = 500 \text{ sec} = 8 \text{ min } 20 \text{ sec} .$

Der aktuelle Abstand der Erde von der Sonne schwankt wegen der Ellipsenbahn der Erde, d.h. der Ekzentrizität der Erdbahn $e=0.017$, zwischen

Periheldistanz $R_p = a(1-e) = 1.47 \times 10^{11} \text{ m}$, Anfang Januar; und

Apheldistanz $R_p = a(1+e) = 1.52 \times 10^{11} \text{ m}$, Anfang Juli.

Die Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn ist damit $v = \frac{2\pi a}{T} \approx \frac{2\pi 1.5 \times 10^{11} \text{ m}}{\pi \times 10^7 \text{ sec}} = 30 \text{ km/s} .$

7.2 Die Planeten

Überblick

Bisher sind - zusammen mit der Erde - 9 Planeten bekannt (Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun, Pluto; Merkregel: **M**ein Vater **e**rklärte **m**ir jeden **S**amstag **u**nsere **n**eun Planeten). Die inneren Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars) haben ähnliche Dichte und keine (Merkur, Venus) oder wenige Monde (Erde: 1, Mars: 2: Phobos & Daimos). Die äußeren Planeten haben geringere Dichte, viele Monde (Jupiter: 16, Saturn: 16, Uranus: 5, Neptun: 2, Pluto: 1) und zum Teil Ringe

Im Gegensatz zu den Planeten sind deren Monde nicht mehr geologisch aktiv (Ausnahme: Io, ein aus Schwefel bestehender Galiläischer Mond des Jupiter; die drei restlichen Galiläischen Planeten stören die Bahn von Io, sodass sie nicht mehr kreisförmig um Jupiter verläuft; die Gezeitenkräfte heizen dabei durch Reibung den Mond auf etc.).

Name	Radius (Erde)	Masse (Erde)	Dichte (g cm ⁻³)	Bahn- radius (AE)	P _{rot} (d)	T _{orb} (yr)	Monde
Merkur	0.38	0.055	5.4	0.39	58	0.24	0
Venus	0.95	0.81	5.1	0.72	-243	0.61	0
Erde	1	1	5.5	1	1	1	1
Mars	0.53	0.11	3.9	1.5	1.0	1.84	2
Asteroiden				2.8			(1)
Jupiter	11	318	1.3	5.2	0.41	11.8	16
Saturn	9.4	95	0.7	9.5	0.43	29	16
Uranus	4.4	15	1.0	19	-0.51	83	5
Neptun	3.9	17	1.7	30	0.66	164	2
Pluto	0.26	0.0023	0.6	39	6.4	243	1
Kuiper Gürtel				40		> 160	
Oort Wolke				4 10 ⁴		3 10 ⁷	

Tabelle 7.1: Eigenschaften der Planeten

Merkur dreht synchron: $P_{\text{rot}}=T_{\text{orb}}$, (genauso wie der Mond beim Umlauf um die Erde: Reibung/Gezeiten). Venus und Uranus drehen "falsch" herum, *retrograd*, dabei stehen bei Uranus zusätzlich noch Spin- und Orbital-Drehimpuls nahezu senkrecht (Hinweis, dass Uranus stark gestört wurde?!). Der Kuiper Gürtel besteht aus etwas 3.5×10^4 bis 10^5 Planetoiden bzw. Asteroiden der mittleren Einzelmasse von 10^{22} g. Die Oortsche Wolke besteht aus Ca 10^9 bis 10^{11} Kometen der mittleren Einzelmasse 10^{16} g.

Drehimpulsverteilung

Die Sonne rotiert mit einer Periode von etwa 25 Tagen um ein zur Normalen der Ekliptik um 7° geneigten Achse. Das Verhältnis von Sonnendrehimpuls zu Planetendrehimpuls (fast ausschließlich Jupiter) ist 1:180, das Massenverhältnis ist 1000:1. Beide Tatsachen (Verkippung und Drehimpulsverhältnis) sind problematisch zu erklären.

Anmerkung: Bestimmung des Drehimpuls der Sonne: Sonnenflecken:
Umlaufdauer=Rotationsperiode, Drehimpuls: abgeschätzt (je nach interner Massenverteilung (Sternmodelle, s.u.)).

Titius-Bode Gesetz

Der deutsche Physiker Johann Titius stellte als erster fest, dass die Bahnradien der Planeten in guter Näherung (außer Neptun) durch folgende Formel beschrieben werden:

Test des Titius-Bode Gesetzes										
	Merkur	Venus	Erde	Mars	Aster.	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto
n	-∞	0	1	2	3	4	5	6	-	7
r(n)	0.4	0.7	1	1.6	2.8	5.2	10	19.6	-	38.8
a	0.39	0.72	1	1.52	2.9	5.2	9.6	19.2	30.1	39.5

Tabelle 7.2: Titius-Bode Gesetz

$$r_p(n) = 0.1 \times (4 + 3 \times 2^n) \text{ AE}, \text{ mit } n = -\infty, 0, 1 \dots 7$$

Zu Titius's Zeiten waren Uranus, Neptun und Pluto ebenso wie die Asteroiden noch nicht bekannt. Titius wies auf das "Fehlen" eines Planeten bei den Asteroiden hin; seine Entdeckung wurde aber als Kuriosität betrachtet. Das änderte sich mit der zufälligen Entdeckung des Uranus. Eine systematische Suche nach dem fehlenden Planeten begann (unter Leitung von Bode/Berlin). Diese mündete in der Entdeckung des ersten Asteroiden, Ceres.

Die Asteroiden sind mutmaßlich Trümmer eines vorher dort existierenden Planeten, der durch Zusammenstoß mit einem schweren Körper zerstört wurde. Neptun und Pluto sind noch immer starken Störungen durch den Kuiper Gürtel etc. unterworfen, so dass ihre Bahnen sich nicht "stabilisiert" haben.

Elementverteilung

<i>A</i>	<i>Element</i>	<i>chem. Symbol</i>	<i>Anteil (Masse)</i>
1	Wasserstoff	H	1.000
4	Helium	He	0.333
12	Kohlenstoff	C	0.004
14	Stickstoff	N	0.0015
16	Sauerstoff	O	0.0085
20	Neon	Ne	0.002
24	Magnesium	Mg	0.0007
27	Aluminium	Al	0.0007
28	Silizium	Si	0.0007
32	Schwefel	S	0.0004
56	Eisen	Fe	0.001
59	Nickel	Ni	0.00005

Tabelle 7.3: Häufigkeitsverteilung der Elemente in der Sonne

Die chemische Zusammensetzung der Sonnenmaterie kann aus der Spektralanalyse der Photosphäre gewonnen werden (s.u.). Man muss allerdings annehmen, dass gute Durchmischung mit dem Inneren vorliegt. H und He dominieren (sie werden nach heutigem Wissen in dieser Häufigkeit im Urknall erzeugt), die anderen Elemente kommen in sehr geringer Konzentration vor (und entstanden durch Nukleosynthese in vorherigen Generationen von Sternen). Der Massenanteil von

C-N-O ist 0.014, der für Mg ... Fe ist 0.0035 (Beachte: Massenanteil, oder Atomzahl-Anteil).

Der Vergleich mit der Erde zeigt, dass hier H und He weitgehend fehlen (sie können als Gas in der Atmosphäre nicht gravitativ gehalten werden, s.u.), ansonsten stimmt die Häufigkeitsverteilung gut mit der Sonne überein. Die Masse der Erde macht ca. 1/300 der gesamten Masse an schweren Elementen in der Sonne aus; dies bedeutet eine sehr gute Entmischung bei der Bildung des Planetensystems. Die anderen inneren Planeten zeigen ähnliche chemische Zusammensetzung.

Die gut untersuchten äußeren Planeten Jupiter und Saturn zeigen solare Zusammensetzung, d.h. sie konnten H und He halten. Daten für die äußersten Planeten sind noch relativ unsicher.

Die Atmosphären der Planeten

Die inneren Planeten sind fest und haben eine, teilweise sehr dünne, Atmosphäre. Merkur und Mars (ebenso wie der Mond) haben die Atmosphäre fast vollständig verloren, Venus und Erde haben eine ausgebildete Gasatmosphäre. Der Strahlungstransport in der Atmosphäre spielt eine wesentliche Rolle für den Wärmeaushalt (Treibhauseffekt, Spurengase). Das Ausgasen der Atmosphäre erklärt sich, weil die (durch die Masse und den Radius bestimmte) Entweichgeschwindigkeit im Verhältnis zur thermischen Geschwindigkeit ein Entweichen der schnelleren Moleküle erlaubt.

Die äußeren Planeten haben keine feste Oberfläche. Bei nach innen zunehmenden Druck werden die Gase bald flüssig und im innersten schließlich sogar fest (metallische Wasserstoff-Phase im Jupiter-Kern?).

Interplanetarer Raum

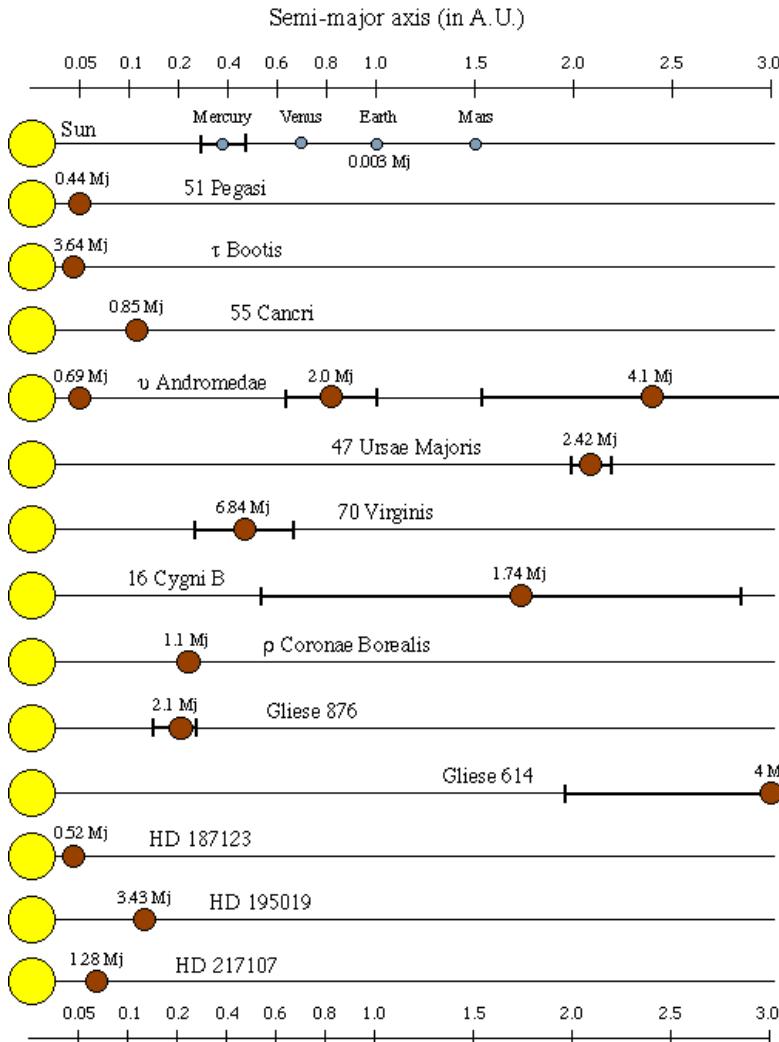
Hier finden wir zunächst die Kometen, d.h. gelegentlich durch Bahnstörung aus dem äußeren Sonnensystem hereinfallende Objekte (dirty snowballs), deren chemische Zusammensetzung dem präsolaren Nebel entsprechen sollte. Je nach Masse und Zusammensetzung überleben sie einen oder mehrere Umläufe (auf stark exzentrischen Bahnen). Dabei gasen sie stark aus (Gassschweif, ionisiert, wird im interplanetaren Magnetfeld mitgeführt) und emittieren Staubteilchen (Staubschweif; wird durch den Strahlungsdruck der Sonne beeinflusst).

Außerdem sendet die Sonne einen mehr oder weniger kontinuierlichen Partikelstrom aus (Sonnenwind), der seinen Ursprung in der durch magnetische Schockwellen stark aufgeheizten äußeren Corona hat. Das heiße, ionisierte Gas führt das Magnetfeld teilweise mit sich und sorgt bei Wechselwirkung mit dem Magnetfeld der Planeten für interessante Phänomene (Nordlicht; magnetische Stürme, Strahlungsgürtel (van-Allen-Belt)).

7.3 Entstehung des Planetensystems, Planeten außerhalb des Sonnensystems

Die Frage, ob andere Sterne entsprechend unserem Sonnensystem ein Planetensystem haben, ist von fundamentalem Interesse. Nur auf anderen Planeten sollten die Bedingungen so sein, dass sich, ähnlich zu unserer Erde, darauf Leben und eventuelle andere intelligente Lebewesen entwickelt haben könnten.

Aus der Theorie der Sternentstehung (s.u.) ergibt sich, dass die Bildung einer Scheibe um den neu entstandenen Stern wohl die Regel ist (Drehimpulserhaltung). Akkretion auf den neu entstandenen Stern passiert aus dieser Scheibe heraus, wenn die Scheibenmaterie durch Reibung ihren Drehimpuls verliert. Die Scheibe ist wohl immer mit den beobachteten bipolaren Ausfluss-Phänomenen längs der Polachsen verbunden. Es ist aber überhaupt nicht klar, wie gut solche



Comparison of our solar system with some of the other planetary systems. The horizontal lines show the range of distances the planets can be from their star in their elliptical orbits (none shown if the range is smaller than the size of the brown dot). The sizes of the objects are *not* to scale and the distance scale has been stretched on the left side. (Data courtesy of Geoff Marcy and Paul Butler, San Francisco State University.)

Abb. 47: Massen und Bahnradien der bekannten extrasolaren Planeten

Zentralsterns aufgrund der Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt ist direkt messbar. Dies erfordert extreme Genauigkeit, die durch die Beobachtung vieler Linien gleichzeitig erreicht wird: als Beispiel betrachten wir einen Planeten von Jupitermasse ($m_p = 10^{-3} M_0$) auf einer Bahn mit $r=1$ A.E. um ein Zentralgestirn von Sonnenmasse, d.h. $v_p=30$ km/s, dann ist

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{v_p}{c} \frac{m_p}{M_0} = 10^{-4} \times 10^{-3} = 10^{-7}$$

Bisher sind auf diese Weise ca. 40 Planeten "direkt"

nachgewiesen. Allerdings sind dies alle Jupiter-ähnliche Planeten in relativ nahen Orbits, also nicht typisch für das Sonnensystem. Deren Entstehung ist mit den gegenwärtigen Konzepten schwer zu verstehen. Inwieweit dies ein Auswahleffekt durch die Beobachtungsmethode ist, wird die Zukunft mit empfindlicheren Beobachtungen klären.

In jüngster Zeit haben HST-Beobachtungen diese protoplanetaren Scheiben um junge Sterne in dem Trapezium-Haufen in Orion nachgewiesen. Dies erlaubt erstmalig die direkte Beobachtung der Entwicklung solcher Scheiben. Selbst in dem dichten Trapezium-Cluster bilden sich also solche Scheiben und bleiben stabil, und werden nicht etwas durch die Gezeitenwirkung nacher anderer

Scheiben die Sternbildung überleben, und ob sie in der Regel Planeten ausbilden.

Die Ansammlung von kleinen Partikeln bis hinunter zu interplanetarem Staub kann gut über die Infrarotstrahlung dieses durch den Zentralstern geheizten Staubes als Infrarotexcess beobachtet werden. Auf diese Weise hat der erste Infrarotsatellit IRAS um den relativ sonennahen Stern β Pictoris eine Staubscheibe nachgewiesen. Die Existenz von protoplanetaren Scheiben ist u.a. durch direkte radiointerferometrische Beobachtungen solcher Scheiben in den Spektrallinien von Kohlenmonoxid im mm-Wellenbereich (Rotationsübergänge) nachgewiesen (sowohl räumliche Verteilung, wie auch Geschwindigkeitsstruktur über Dopplereffekt).

Der direkte Nachweis anderer Planeten ist sehr schwierig: der nicht selbst leuchtende Planet ist im Kontrast zu dem hellen Zentralstern nicht direkt beobachtbar. Lediglich die sehr geringe Dopplerverschiebung des

Sterne zerrissen.

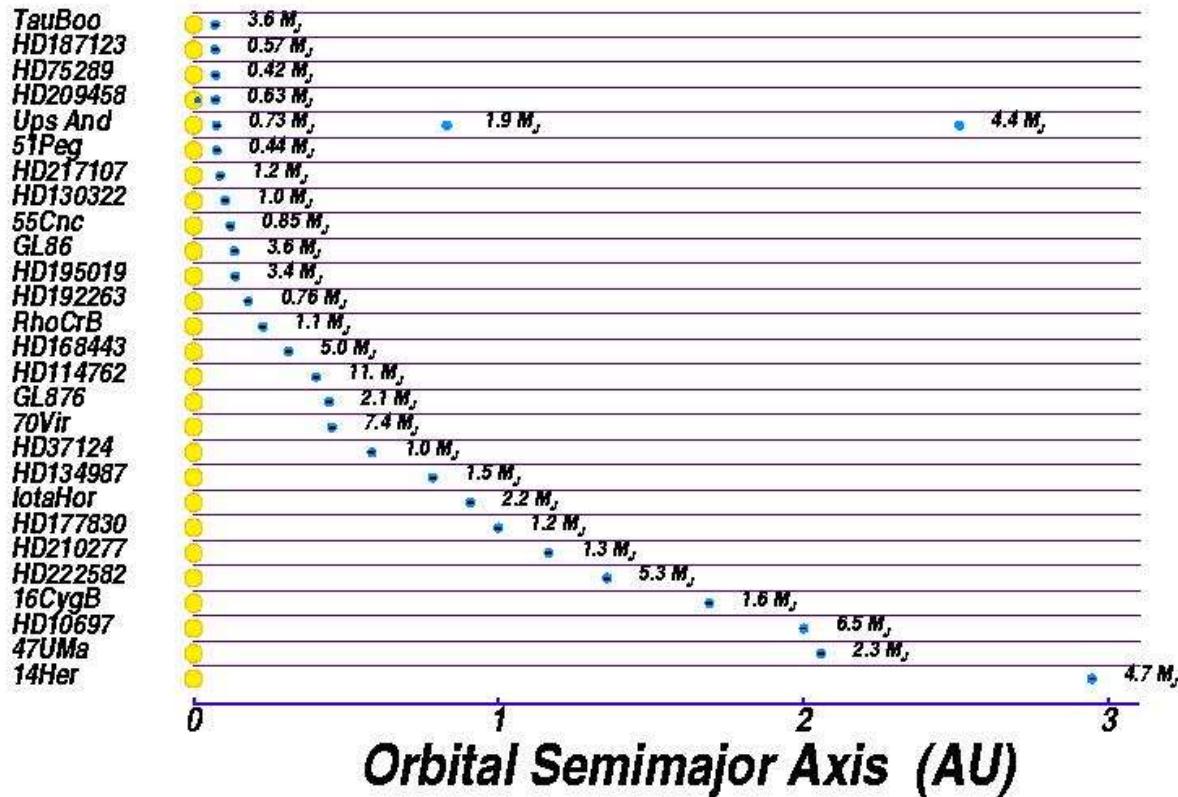


Abb. 48 Eigenschaften der bisher entdeckten extrasolaren Planeten

Einige der Planeten sind auf Umlaufbahnen um Pulsare und können durch den Dopplereffekt der Pulsfrequenzen sehr genau nachgewiesen werden.

8 Die Sonne

Die Sonne ist der uns am nächsten gelegene Stern und ist deshalb der am besten untersuchte Stern. Wie sich später herausstellt, ist sie durchaus in gewissem Grade typisch auch für andere Sterne. Wir wollen hier die wichtigsten allgemeinen Eigenschaften diskutieren. Darüber hinaus gibt es naturgemäß eine große Anzahl von spezifischen, nur an der Sonne untersuchten Details. Diese wollen wir hier übergehen.

Wir werden im folgenden sehen, dass wir heutzutage ein sehr detailliertes Verständnis der im Inneren der Sonne ablaufenden physikalischen Bedingungen und Prozesse haben. Der unmittelbaren Beobachtung ist aber nur direkt eine dünne Oberflächenschicht zugänglich, die eine Tiefe von ca. 180 km hat (optische Tiefe der Photosphäre): Der Rand der Sonne ist entsprechend scharf. Das Licht aus dieser Oberflächenschicht erlaubt uns einerseits die Bestimmung der Temperatur (Schwarzkörper-Spektrum); zum anderen sehen wir viele Spektral-Linien in Absorption vor den tieferliegenden, heißeren Schichten. Diese erlauben die Bestimmung der chemischen (astrophysikalische Sprechweise: Elementhäufigkeiten) Zusammensetzung, die genaue Vermessung der Geschwindigkeiten (Sonnen-Oszillationen; turbulente Bewegungen) und des Magnetfeldes (Zeemann-Effekt).

Erst bei einer totalen Sonnenfinsternis sieht man die Chromosphäre, die wesentlich ausgedehnter ist (11000 km) und aus dünnem, sehr heißen Gas besteht (Emissions-Linien, statt Absorptions-Linien in der Photosphäre).

Aus dem Inneren der Sonne gelangen nur die bei den die Energieerzeugung in der Sonne tragenden Kernreaktionen entstehenden Neutrinos zu uns (s.u.).

8.1 Überblick

Daten der Sonne

Bei bekannter Entfernung

$$D = 1 \text{ AE} = 1.49597892 \times 10^{13} \text{ cm}$$

und dem scheinbaren Durchmesser von $\phi = 32'$ und der auf der Erde bestimmten Solarkonstante, dem Energiefluss der Sonne (Messung/Extrapolation auf außerhalb der Erdatmosphäre) von

$$f_0 = 1.36 \times 10^6 \text{ erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-2} = 1360 \text{ W m}^{-2},$$

und den bekannten physikalischen Gesetzen können die folgenden Größen direkt berechnet werden:

1. Masse der Sonne, $M_0 = 1.989 \times 10^{33} \text{ g}$ (bestimmt aus 3. Kepler'schen Gesetz)
2. Teilchenzahl, $N_0 \approx \frac{M_0}{m_p} = 10^{57}$ (da die Sonne hauptsächlich aus Protonen besteht)
3. Oberflächentemperatur $T_{bb} = 5800 \text{ K}$ (Wien'sches Verschiebungsgesetz)
4. Radius $R_0 = 6.960 \times 10^{10} \text{ cm} \approx 7 \times 10^5 \text{ km}$ (aus Abstand und Winkeldurchmesser)
5. Leuchtkraft $L_0 = 4\pi D^2 f_0 = 3.85 \times 10^{33} \text{ erg sec}^{-1}$ (erstmals von Ångström 1893 bestimmt)

Definition der Sonnentemperatur (Oberfläche)

Die obige Temperatur ist die aus dem Wien'schen Verschiebungsgesetz und der Wellenlänge maximaler Intensität abgeleitete sogenannte *Schwarzkörper-Temperatur* T_{bb} . Das Maximum der Sonnenstrahlung bzgl. der Wellenlänge liegt bei $\lambda_{max}=5000\text{ \AA}=500\text{ nm}$ (grün), so dass wegen $\lambda_{max} T_{bb}=0.29\text{ cm K}$ die obige Temperatur folgt.

Andere Definitionen der Temperatur sind möglich (im thermischen Gleichgewicht, d.h. bei einem perfekten Schwarzkörper stimmen die verschiedenen Temperaturen notwendigerweise überein), und ergeben leicht verschiedene Werte. Eine häufig benutzte Definition ist die *effektive Temperatur* T_{eff} , die so definiert ist, dass sich die für einen Schwarzkörper nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz (Stefan-Boltzmann Konstante $\sigma=\frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}=5.67\times10^{-5}\text{ erg sec}^{-1}\text{ cm}^{-2}\text{ K}^{-4}$) gegebene Gesamt-Strahlungsleistung ergibt:

$$L=4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4, \text{ bzw. } T_{eff}=\left(\frac{L}{4\pi\sigma R^2}\right)^{1/4}.$$

Für die Sonne ergibt sich mit obigen Werten $T_{eff}=5770\text{ K}$.

8.2 mittlere physikalische Parameter im Inneren der Sonne

Die (Eigen-)Gravitationsenergie der Sonne können wir (siehe obige Ableitung des Virialsatzes) abschätzen zu

$$E_{grav}=-\frac{GM^2}{R}=-4\times10^{48}\text{ erg}.$$

Da die Sonne im Gleichgewicht ist (wir werden unten abschätzen, wie schnell sie sich verändern würde, wenn sie aus dem Gleichgewicht geriete!), muss dieser Energie nach dem Virialsatz eine mittlere kinetische Energie $E_{kin}=-\frac{1}{2}E_{grav}=2\times10^{48}\text{ erg}$ entsprechen. Wir nehmen an, dass diese Energie thermische Energie bei einer mittleren Temperatur \bar{T} ist, $E_{kin}=E_{therm}=\frac{3}{2}Nk\bar{T}$. Die mittlere Temperatur ergibt sich zu

$$\bar{T}=\frac{2E_{kin}}{3kN}\approx10^7\text{ K}.$$

Eine Reihe von daraus abgeleiteten Größen ist in der Tabelle zusammengestellt. Von besonderer Bedeutung ist dabei, dass die Materie in der Sonne nicht entartet ist.

Zur Erinnerung: Die Fermi-Energie (chemisches Potential $\mu=\epsilon_F$) eines Fermionengases (Elektronen, Protonen in der Sonne) ergibt sich als die Grenzenergie, bis zu der die Fermionen bei dichtester Packung (d.h. wegen Spin $1/2$, bei zwei Fermionen pro Wellenzahl

$$k(n_x, n_y, n_z)=\frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z), n_i \in \mathbb{Z}) \text{ den Phasenraum ausfüllen: } \epsilon_F=\frac{p_F^2}{2m}=\left(3\pi^2\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}.$$

Ist sie groß gegenüber der thermischen Energie, ist das Gas entartet; ist sie klein dagegen, kann das Gas klassisch beschrieben werden. Eine äquivalente Formulierung ist, dass die Anzahl von

$$\text{Teilchen im Volumen einer thermischen de-Broglie-Wellenlänge } \lambda_{dB,th}=\frac{h}{p}=\frac{2mh}{v_{th}}=\frac{h}{(2\pi mkT)^{1/2}}$$

	Definition	Wert	Einheit	Bezeichnung
V	$\frac{4\pi}{3} R^3$	10^{33}	cm^3	Volumen
U	$-\frac{GM^2}{R}$	4×10^{48}	erg	Gravitations-energie
E_{th}	$-\frac{1}{2} U$	2×10^{48}	erg	kinetische Energie
\bar{T}	$\frac{2E_{th}}{3Nk}$	10^7	K	mittl. Temperatur
$\bar{\rho}$	$\frac{M}{V}$	1.5	g cm^{-3}	Massendichte
\bar{n}	$\frac{\bar{\rho}}{m_p}$	10^{24}	cm^{-3}	Teilchendichte
\bar{P}	$\frac{NkT}{V}$	10^{14}	Pa	Druck
E_γ	$\frac{4\sigma}{c} T^4 V$	7×10^{46}	erg	Photonenenergie
$\bar{\beta}$	$\frac{E_\gamma}{E_{th}}$	0.003		
$\bar{\epsilon}_F$	$(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 / 2mn^{2/3}$	37	eV	Fermi-Energie (Elektronen)
kT	$\frac{G m_p M}{3R}$	1	keV	therm. Energie pro Teilchen

Tabelle 8.1: mittlere Parameter der Sonne

, d.h. $n\lambda_{db,th}^3$ groß oder klein gegen 1 ist. Die Tabelle zeigt, dass selbst die Elektronen in der Sonne noch weit von der Entartung entfernt sind.

Das Plasma im Innern der Sonne ist also im Mittel 10 MioK heiß, d.h. vollständig ionisiert und bei mittleren Teilchendichten von 10^{24} nicht entartet. Die Oberflächentemperatur ist mit 6000 K deutlich kühler, so dass die Leuchtkraft aus dem thermischen Reservoir im Innern gespeist wird.

8.3 Energietransport in der Sonne

Der Energietransport von innen nach außen kann auf verschiedene Weise geschehen: durch Wärmeleitung, durch Strahlungstransport, oder durch Konvektion.

Strahlungstransport:

Betrachten wir zunächst den Strahlungstransport (hier vereinfacht: Photonendiffusion). Beim *random walk* (betrunkener Seemann) ist bei einer mittleren Weglänge pro Schritt s die im Mittel nach N Schritten zurückgelegte Entfernung in d Dimensionen $S = s\sqrt{(N/d)}$. Mit dem Thomson-

Querschnitt $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right) = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}$ (Streuung an freien Elektronen) als obere Grenze für den Streuquerschnitt, ergibt sich eine mittlere freie Weglänge der Photonen von $s = 1/(n\sigma_T) \approx 1.8 \text{ cm}$. Aus dem Zentrum bis zum Sonnenrand sind damit $N = 3(R/s)^2$ Streuungen nötig. Mit der Lichtgeschwindigkeit als Geschwindigkeit der Photonen ist damit die Diffusionszeit $\tau_{diff} = N \frac{s}{c} = \frac{3R^2}{sc} \approx 10000 \text{ yrs}$. Eine Temperaturänderung im Inneren macht sich also erst nach 10000 Jahren an der Oberfläche bemerkbar.

Bemerkung: Tatsächlich ist die Diffusionszeit ca. 100 fach höher, da die Photonen in den äußeren Schichten, wo die Ionisation nicht vollständig ist, in gebundenen atomaren Zuständen für ca. jeweils 10^{-8} sec "zwischengespeichert" werden (Vergleich: Flugzeit über freie Weglänge $s/c = 0.3 \times 10^{-10} \text{ sec}$).

Daraus lässt sich auch die Leuchtkraft der Sonne abschätzen als Quotient der Photonen-Energiedichte und der Diffusionszeit: $L_0 \approx \frac{E_\gamma}{\tau_{diff}} = \frac{\bar{\beta} U}{\tau_{diff}}$. Die Werte aus der Tabelle eingesetzt ergeben eine ca. 70 fach zu große Leuchtkraft (wegen der falschen Diffusionszeit), aber für die einfache Näherung immerhin ganz gut.

Wir können dies noch etwas allgemeiner betrachten: aus $L_0 \approx \frac{E_\gamma}{\tau_{diff}}$ ergibt sich mit $E_\gamma = \frac{4\sigma}{c} T^4 V$

und $\tau_{diff} = \frac{3R^2 N \sigma_T}{c V}$, dann durch Ausdrücken der Temperatur nach dem Virialsatz

$$\frac{3}{2} kT nV = \frac{1}{2} GM^2/R \quad \text{und den Werten von } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} \quad \text{und} \quad \sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \quad \text{schließlich}$$

$$L = \frac{4^3 \pi^2 \sigma G^4 m_p^5}{3^7 \sigma_T k^4} M^3 = 1.35 \times 10^{35} \left(\frac{M}{M_0} \right)^3.$$

Diese Beziehung (Masse-Leuchtkraft-Beziehung) wurde zuerst von Eddington abgeleitet. Bemerkenswert ist, dass die Leuchtkraft unabhängig vom Radius ist. Diese in einfacher Näherung abgeleitete Formel wird einigermaßen von den Beobachtungen vieler Sterne bestätigt (s.u.). Der numerische Vorfaktor kommt mit der obigen Einschränkung der auf diese Weise unterschätzten freien Weglänge einigermaßen richtig heraus (tatsächlich 4×10^{33} statt 1.35×10^{35}).

Wärmeleitung

Da die Elektronen die beweglicheren Teilchen sind, spielt wenn überhaupt, der Beitrag der Elektronen zur Wärmeleitung eine Rolle. Als den relevanten Streuquerschnitt nehmen wir den für Elektron-Proton- Streuung (siehe KP), den wir zu ungefähr $\sigma_{ep} = 4\pi(d/2)^2 \approx 10^{-16} \text{ cm}^2$ abschätzen (Größe des H-Atoms/ e-p-Bindung). Damit ist die freie Weglänge $s_{ep} = 1/(n\sigma_{ep}) = 10^{-8} \text{ cm}$. Bei der Diffusion bewegen sich die Elektronen mit thermischer (d.h. Schallgeschwindigkeit) über die freie Weglänge: $c_s \approx v_{th} \approx \sqrt{\frac{kT}{m_e}} \approx 10^9 \text{ cm/s}$. Damit ist die Diffusionszeit nach außen insgesamt um $10^8 \times 10^1$, d.h. 9 Größenordnungen kleiner (und mit 10^{14} Jahren größer als das Alter des Universums). Sie spielt also keine Rolle.

Nebenbemerkung: damit ist auch klar, dass keine Entmischung aufgrund von Diffusion (schwerere Elemente zum Zentrum hin) stattfindet.

Konvektion

Konvektion setzt ein, wenn ein adiabatisch (ohne Wärmeaustausch) aufsteigendes Volumenelement des Gases aufgrund der Druckabnahme mit der Höhe leichter wird, als wenn es beim Aufsteigen im thermischen Gleichgewicht mit der (etwas kälteren) Umgebung bleibt. Um zu entscheiden, ob dies der Fall ist, müssen wir (weiter unten) ein detailliertes Modell betrachten. Die Antwort ist: Konvektion spielt in den äußeren Schichten z.B. der Sonne eine wichtige Rolle; aber eben nur in einem kleinen Bereich des Radius, wo der Energietransport dann sehr viel effizienter von statthen geht.

8.4 Energieerzeugung in der Sonne

Eine bis zum Anfang des 20. Jahrhunderts ungelöste Frage war die, woher die Sonne ihre Energie bezieht: wie kann sie eine Leuchtkraft von $L=4\times10^{33}$ erg/s aufrecht erhalten?

Die chemische Energie (Bindungsenergie-Umsatz von Atomen/Molekülen) können wir konservativ abschätzen: pro Teilchen maximal einige eV ($1\text{ eV}=1.60184\times10^{-12}\text{ erg}$), also bei 10^{57} Teilchen insgesamt einen maximalen Vorrat von ca. einige 10^{45} erg. Damit kann die Leuchtkraft bestenfalls für einige 10000 Jahre aufrechterhalten werde!

Helmholtz und Kelvin haben die Eigengravitation als mögliche Energiequelle untersucht: die gravitative Energie ist von der Größenordnung $E_{\text{grav}}=\frac{-GM^2}{R}$. Davon kann beim Schrumpfen wegen des Virialsatzes nur die Hälfte freigesetzt werden (die andere Hälfte geht in eine Aufheizung, d.h. Erhöhung der inneren Energie des Sterns). Also

$$L_{\text{grav}}=-\dot{E}_{\text{grav}}=\frac{1}{2}\frac{GM^2}{R^2}\dot{R}.$$

Die typische Halbwertszeit, in der der Radius schrumpft, heißt Helmholtz-Kelvin-Zeitskala

$$t_{HK}=\frac{E}{L}=\frac{GM^2}{2RL}=-\frac{R}{2\dot{R}};$$

mit den beobachteten Werten für die Masse und Leuchtkraft erhält man für die Sonne $t_{HK}\approx30\text{ My}$ (während die obige Näherungsformel für L eine entsprechend kürzere Zeit ergeben würde). Auch diese Zeit ist viel zu kurz und im klaren Widerspruch zu dem aus geologischen Befunden bekannten Alter der Erde von ca. 4.5 Milliarden Jahren.

Mit diesen Abschätzungen wird klar, dass die Physik am Ende des 19. Jahrhunderts ein fundamentales Problem hatte, nämlich zu erklären, woraus die Sonne ihre Leuchtkraft bezieht. Erst mit der korrekten Beschreibung der atomaren Physik im Rahmen der Quantenmechanik, insbesondere mit der Entwicklung der Kernphysik in den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts wurde klar, dass Kernfusion im Inneren der Sonne, bei der letztlich in jedem mikroskopischen Prozess 4 H-Atome zu einem He-Atom verschmelzen (und dabei 2 Protonen unter Abgabe eines Elektrons und Neutrinos zu Neutronen umgewandelt werden), die Energiequelle der Sonne ist. Da bei den Temperaturen im Inneren der Sonne (s.u.) nur Wasserstoff fusionieren kann (für die schwereren Elemente ist aufgrund der höheren Ladung die Coulomb-Barriere bei den dort herrschenden Temperaturen zu hoch) ist es wesentlich, dass die Sonne vorwiegend aus Wasserstoff besteht, d.h. einen genügend großen Vorrat an Brennstoff hat.

Dies zeigt ein kurze Abschätzung: die Bindungsenergie pro Nukleon ist für He ca. 6 MeV (beim Eisen, dem stabilsten Element, ist sie 8 MeV). Dies entspricht einer Energie von $\Delta E = 9.6 \times 10^{-6}$ erg. Über die Lebensdauer der Sonne (Erdalter) von ca. 4.5 Milliarden Jahren, d.h. $t = 1.4 \times 10^{20}$ sec, hat die Sonne damit eine Anzahl von $\Delta N = \frac{Lt}{\Delta E} = 5.8 \times 10^{55}$ fusioniert. Dies entspricht einem Anteil von $\frac{\Delta N}{N} = 0.058$ (und über die vermutliche gesamte Lebensdauer der Sonne von 9 Milliarden Jahre insgesamt 11.6 %) der Sonnenmaterie! Damit ist auch klar, dass die Sterne nicht ewig (!, d.h. lang gegenüber dem Alter des Universums) leben, sondern sich fortwährend neu bilden müssen (insbesondere, da die hellen, massereicheren Sterne wegen des oben abgeleiteten $L \propto M^3$ -Gesetzes wesentlich verschwenderischer mit ihrem Brennstoff umgehen).

9 Kernfusion: die Energiequelle der Sterne

Wie wir oben gesehen haben, ergibt allein die Kernfusion, d.h. hauptsächlich die Verschmelzung von H-Atomen zu He (mit dem größten Energiegewinn pro Nukleon von ca. 6 MeV) eine hinreichende Energieerzeugung um die Leuchtkraft der Sonne (und anderer Sterne) über deren Lebensdauer zu erklären.

$$4 p \rightarrow {}^4\text{He} + 2 e + 2 \nu_e; Q_{tot} = 4 Q_1 - Q_4 = 26.73 \text{ MeV}.$$

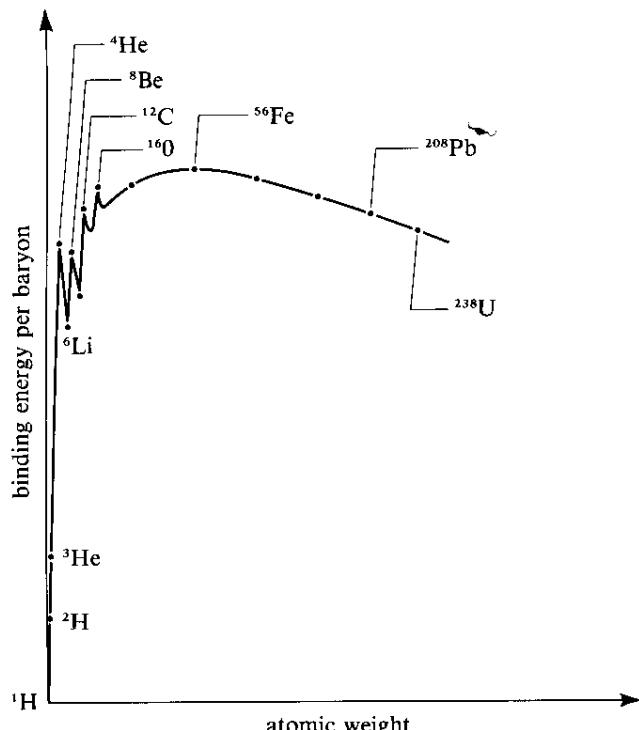


Abb. 49: Bindungsenergie pro Nukleon

Volumenelement sich zu $\epsilon \rho$ ergibt, mit der Massendichte ρ): $\epsilon_{pp} \propto \rho T^5$; $\epsilon_{CNO} \propto \rho T^{17}$. C-N-O-Brennen dominiert über pp-Brennen ab einer Temperatur von ca. 20 MioK (und damit für normale Sterne, deren Masse die Temperatur im Inneren festlegt, s.o., ab ca. $1.4 M_\odot$).

Im Inneren der Sterne reicht die thermische Energie (1 keV) nicht aus, um die Coulombbarriere (von ca. 1 MeV) gegenüber dem anderen Reaktionspartner (H oder He) klassisch zu überwinden. Dies geht erst quantenmechanisch mit Hilfe des Tunneleffektes. Gamow (1928) war der erste, der dies erkannte. Atkinson & Houtermans wendeten (1929) Gamows Erkenntnis auf das innere der Sterne an; Bethe (1938) und von Weizsäcker (1938) arbeiteten die Details der Kernreaktion im Sterninneren aus. Wasserstoffbrennen kann im wesentlichen nach zwei verschiedenen Reaktionsschemata ablaufen: die **pp-Kette** oder der **C-N-O-Zyklus**.

Je nach Temperatur (und Dichte) dominiert dabei einer der beiden Prozesse. Näherungsweise gilt für die Dichtespezifische Energieerzeugungsrate (ϵ), so dass die Energieerzeugungsrate pro

9.1 p-p Kette (Bethe-Critchfield):

<i>pp1_Kette</i>			
Fusionsreaktion	1/Rate	$Q_{tot} [\text{MeV}]$	$Q_\nu [\text{MeV}]$
$p(p, e^+ \nu)D$	10^{10} yrs	1.44	0.52
$D(p, \gamma){}^3\text{He}$	6 sec	5.45	-
${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$	10^5 yrs	12.86	-

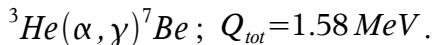
Tabelle 9.1: pp1-Kette

Die Reaktionen der pp-Kette laufen direkt zwischen Protonen ab; der vorhandene Wasserstoff wird zu Helium verbrannt.

Dabei ist Q der Massendefekt. Die ersten beiden Reaktionen müssen zweimal ablaufen; damit ist der gesamte Energieumsatz (die "Wärmetönung") $2 \times (1.44 + 5.45) + 12.86 = 26.64 \text{ MeV}$. Sie ist noch um 2 mal 0.511 MeV größer, da das Positron mit einem Elektron zerstrahlt. Q_v ist die maximale Energie der Neutronen. Der erste Prozess ist der "schwierigste", d.h. langsamste, da er die schwache WW involviert.

Beachte: dabei sind 3 Erhaltungssätze erfüllt: Baryonen-, el. Ladung- und Leptonen-Zahl. Das Positron zerstrahlt mit einem Elektron.

Alternativ kann der letzte Schritt auch wie folgt aussehen: statt ${}^3\text{He}$ wird ${}^4\text{He}$ angelagert und ${}^7\text{Be}$ gebildet:



Das so erzeugte ${}^7\text{Be}$ kann sich durch Elektroneneinfang in ${}^7\text{Li}$ umwandeln:

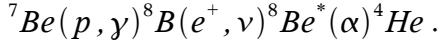


und anschließend nach Protoneneinfang zerfallen (**pp2-Kette**):



Dieser Prozess ist wichtig, da er eine niedrige Schwellenenergie besitzt. Mit ihm wird eventuell vorhandenes Li (primordial?, d.h. aus dem Urknall) sehr effizient zerstört.

Als zweite Alternative kann sich, ausgehend von ${}^7\text{Be}$, ein Proton anlagern (**pp3-Kette**):



Für die Sonne gilt, dass 86% über die pp1-Kette laufen, die restlichen 14% teilen sich zu 13.98% auf die pp2- und zu 0.02% auf die pp3-Kette auf. Der Nebenzweig pp3 ist interessant für den Nachweis der Neutrinos: ${}^8\text{B}(e^+, \nu){}^8\text{Be}^*; Q_{tot}=18.01 \text{ MeV}$, da er für die energiereichsten Neutrinos sorgt.

Beachte: ein nicht zu vernachlässigender Teil (im Bereich MeV) der Energie geht über die Neutrinos direkt aus der Sonne heraus und trägt somit nicht zur Leuchtkraft in Form von elektromagnetischer Strahlung bei. Damit sind die Details der kernphysikalischen Reaktionen maßgeblich für das genaue Verständnis des Inneren Aufbaus der Sterne.

Tunneleffekt

Mit dem Coulomb-Potential zwischen den beiden reagierenden Atomkernen, $U(r)=-\frac{q_1 q_2}{r}$, ergibt sich für die "head-on" Annäherung mit asymptotischer Geschwindigkeit v , d.h. kinetischer Energie $E_{kin}=\frac{1}{2}mv^2$ als minimaler Abstand $r=\frac{2q_1 q_2}{mv^2}$. Die thermischen Energien im

Sonneninneren erlauben eine Annäherung nur auf das ca. 100-fache des Kernradius.

Quantenmechanisch können die Teilchen noch näher kommen (tunnellen); allerdings nimmt die Wahrscheinlichkeit, zu einem bestimmten Radius zu gelangen, exponentiell mit dem Verhältnis von Radius zu de Broglie-Wellenlänge $\lambda=h/mv$ ab (Gamow leitete dies für das Coulomb-Potential ab). Die Tunnelwahrscheinlichkeit für ein Teilchen mit Geschwindigkeit v ist also

$$P_t = e^{-W_t} \text{ mit } W_t = -2\pi^2 \frac{r}{\lambda} = -4\pi^2 \frac{q_1 q_2}{hv} .$$

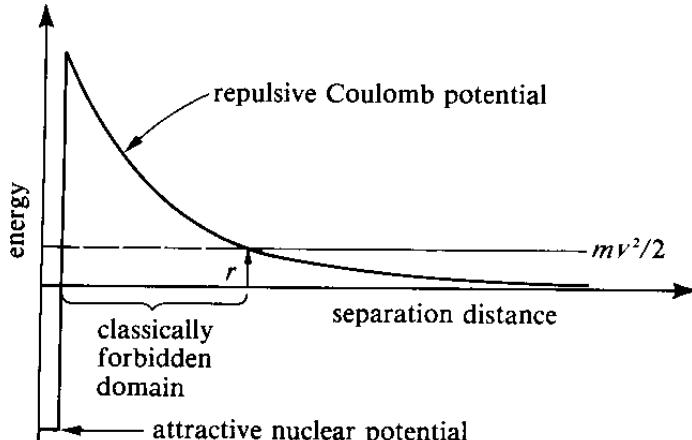


Abb. 50: abstoßendes Kernpotential/Tunnelprozess

Querschnitt σ und Teilchendichte n :

$$R \propto \int_0^\infty n v \sigma v^2 \exp \left[-4\pi^2 \frac{q_1 q_2}{hv} - \frac{mv^2}{2kT} \right] dv .$$

Das Integral kann nach der Sattelpunktsmethode ausgewertet werden: der Exponent

$$h(v) = -\frac{A}{v} - Bv^2 \text{ ist extremal bei } v = v_0 = \left(\frac{A}{2B} \right)^{1/3} \text{ und hat dort den Wert}$$

$$h(v_0) = -\frac{3}{2^{2/3}} A^{2/3} B^{1/3} = -\frac{3}{2} \left(\frac{4\pi^2 q_1 q_2}{h} \right)^{2/3} \left(\frac{m}{kT} \right)^{1/3} . \text{ Mit der Definition}$$

$$T_0 = \left(\frac{3}{2} \right)^3 \left(\frac{2\pi e^2 Z_1 Z_2}{\hbar} \right)^2 \frac{m}{k} \approx 8 \times 10^7 \text{ K} (Z_1 Z_2)^2 \frac{m}{m_p} \text{ ist dann die Reaktionsrate } R \propto \exp \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/3} . \text{ Für}$$

einen Stern wie die Sonne und die pp-Kette ($Z_1 = Z_2 = 1$) mit einer Zentraltemperatur $T_c = 1.5 \times 10^7 \text{ K}$ liefert das einen Tunnelfaktor von $e^{-17.5} = 2 \times 10^{-8}$.

Nebenbemerkung: Deuterium im thermischen Gleichgewicht

Bezeichnen wir mit $Y_i = n_i / \sum n_i$ die relative Teilchenhäufigkeit der Spezies i , so können wir für die Balance zwischen Vernichtung und Erzeugung von Deuterium in der pp-Kette schreiben:

$$\dot{Y}_D = Y_p^2 \frac{R_1}{2} - Y_D Y_{He} R_2 . \text{ Dabei sind } R_j \text{ die Raten der ersten und zweiten Reaktion in obiger}$$

Tabelle. Im Gleichgewicht, $\dot{Y}_D = 0$ ist also $\frac{Y_D}{Y_p} = \frac{Y_p}{Y_{He}} \frac{R_1}{2 R_2} \approx 10^{-17}$. Deuterium wird also im Inneren der Sterne praktisch vollständig vernichtet. Das mit Häufigkeiten von 10^{-5} im interstellaren Medium und auf der Erde beobachtete Deuterium muss also kosmologischen Ursprungs sein!

Bestimmt man auf ähnliche Weise die Häufigkeiten der anderen Reaktionspartner in der pp-Kette und fasst mit folgenden Abkürzungen zusammen, so erhält man für die Energieerzeugungssrate (hier ohne genaue Ableitung angegeben):

$$\dot{\epsilon}(\rho, T) = 2.81 \times 10^6 \rho X_H^2 y^2 e^{-38.8y} F(x) \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1} , \text{ mit}$$

Die schnelleren Teilchen haben also eine exponentiell zunehmende Wahrscheinlichkeit auf Kernradien vorzustoßen. Gemäß der Maxwell-Boltzmann-Verteilung nimmt aber die Geschwindigkeits-Verteilung exponentiell mit dem Quadrat der Geschwindigkeit ab:

$$f(v) dv \propto v^2 e^{-\frac{mv^2}{kT}} dv .$$

Die gesamte Wahrscheinlichkeit ist also das Produkt aus einem schnell mit der Geschwindigkeit zu- und einem schnell mit der Geschwindigkeit abnehmenden Faktor. Die Reaktionsrate ist (mit dem WW-

$y = (T/10^6 \text{ K})^{-1/3}$, $x = T/10^6 \text{ K}$, $F(x) = 1 + 1.23 \times 10 - 2x^{1/3} + 1.09 \times 10^{-2}x^{2/3} + 9.38 \times 10^{-4}x$, und $X_i = A_i n_i / \sum A_i n_i$, der relativen Massenhäufigkeit der Spezies i .

9.2 C-N-O-Zyklus (Bethe-von Weizsäcker)

C-N-O-Zyklus			
Fusionsreaktion	1/Rate	$Q_{tot} [\text{MeV}]$	$Q_\nu [\text{MeV}]$
$^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$	10^6 yrs	1.95	-
$^{13}\text{N}(e^+ \nu)^{13}\text{C}$		1.5	0.7
$^{13}\text{C}(p, \gamma)^{14}\text{N}$	$10^{5.5} \text{ yrs}$	7.54	-
$^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$	$10^{8.5} \text{ yrs}$	7.35	-
$^{15}\text{O}(e^+ \nu)^{15}\text{N}$		1.73	1.0
$^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$	10^4 yrs	4.96	-

Tabelle 9.2: CNO-Zyklus

Alternativ läuft in der Sonne der Bethe-Weizsäcker Zyklus (mit 10% Beitrag zur Energieerzeugung; wegen der geringen Häufigkeit von C,N,O) ab. Er entspricht einer katalytischen Reaktion an vorhanden C-,N- und O-Kernen.

Die gesamte Bilanz ergibt wieder $4p \rightarrow He + 2e^+ + 2\nu$, allerdings ist die Wärmetönung mit $Q_\gamma = 25.03 \text{ MeV}$ und $Q_\nu = 1.7 \text{ MeV}$ etwas niedriger.

Da hierbei die Coulombbarriere zwischen H und einem schwereren Kern ($Z=6,7,8$) überwunden werden muss, ist die Tunnelbarriere wesentlich hinderlicher.

Für die Energieerzeugungsrate im C-N-O-Zyklus ergibt sich analog zur obigen Formel für die pp-Kette:

$$\dot{\epsilon}(\rho, T) = 8.71 \times 10^{27} \rho X_H X_{CNO} y^2 e^{-152.28 y} F(x) \text{ erg g}^{-1} \text{s}^{-1}, \text{ wobei diesmal } F(x) = 1 + 2.7 \times 10^{-2} x^{1/3} - 7.78 \times 10^{-3} x^{2/3} - 1.49 \times 10^{-4} x + 2.61 \times 10^{-5} x^{4/3} + 1.27 \times 10^{-6} x^{5/3}.$$

Nebenbemerkung: außerdem werden im C-N-O-Zyklus verschiedene Isotopen erzeugt, z.B. $^{12}\text{C}(p, e^+ \nu)^{13}\text{C}$. Aus dem Reaktionsnetzwerk bestimmt sich deren Häufigkeit. Sie sind unter anderem als Quelle freier Neutronen in der weiteren Entwicklung des Sternes wichtig.

9.3 Sonnen-Neutrinos

Entsprechend der Leptonenzahl-Erhaltung werden bei der Fusion von Wasserstoff zu Helium zwangsweise (Elektron-)Neutrinos erzeugt: $4p \rightarrow He + 2e^+ + 2\nu_e$. Welche Energie sie erhalten, hängt von den Details der Reaktionswege ab. Die detaillierten Rechnungen zeigen, dass insgesamt ca. 2.6% der Fusionsenergie der Sonne in Form von Neutrinos abgestrahlt werden. Entsprechend der Leuchtkraft und der Energieerzeugung pro Nukleon ergibt sich ein Neutrinorate von $\dot{N}_\nu = 1.8 \times 10^{38} \text{ s}^{-1}$, und am Ort der Erde ein Fluss von $6.4 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. Die Energieverteilung hängt von dem detaillierten Reaktionsnetzwerk ab und ist heute eigentlich sehr gut verstanden.

Der Neutrinofluss der Sonne ist hoch genug, dass er heutzutage gemessen werden kann. Allerdings sprechen die gegenwärtigen Detektoren nur auf relativ hochenergetische Neutrinos an, so dass sie nur den "Schwanz" der Neutrinoverteilung messen können, der durch seltene (und teilweise etwas unsichere) Reaktionskanäle beigetragen wird. Trotzdem gilt mittlerweile als sicher, dass wir auf der Erde zu wenige Elektron-Neutrinos messen. Die Diskrepanz kann erklärt werden, wenn die verschiedenen Neutrinoarten (Elektron-, Myon-, und Tau-Neutrino) eine kleine Massendifferenz haben. Die Experimente ergeben $\Delta m \leq 10^{-3}$ eV. Über die absolute Masse der Neutrinos sagen sie allerdings nichts. Dieser Wert wird durch neuere Experimente, die einen spezifisch empfindlichen Energiebereich abtasten, mittlerweile bestätigt.

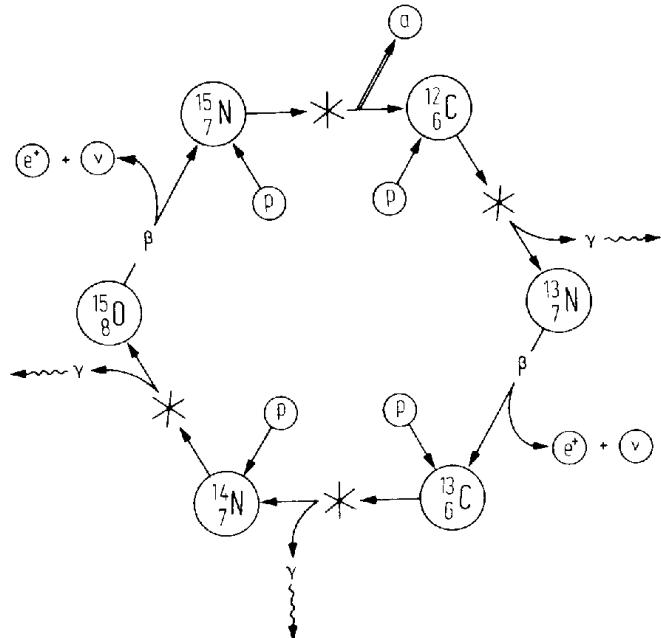


Abb. 51: CNO-Zyklus (Bethe-Weizsäcker)

10 Entfernungsmessung außerhalb des Sonnensystems

Die Bestimmung des Abstandes zu den nächsten Sternen erwies sich als große Herausforderung, da sie so weit weg sind, dass Triangulation selbst von der größten bekannten Basislänge aus, der Erdbahn, eine Winkelmessung genauer als 1 Bogensekunde erfordert. Ohne die Vergrößerung durch ein abbildendes Fernrohr ist diese Genauigkeit ohnehin nicht zu erreichen (Winkelauflösung des Auges ca. 1 Bogenminute). Mit zunehmend raffinierteren Beobachtungsmethoden (Fernrohr, stabile mechanische Montierung, Etablierung eines Koordinatensystems, Bestimmung eines Fixsternkatalog als lokales Referenzsystem) wurden zunächst immer mehr Details der Astrometrie, der optischen Abbildungen (Beugungsbegrenzung, Bildfehler) und der Lichtausbreitung entdeckt und verstanden (z.B.: Bradley, 1728, Genauigkeit 2": Entdeckung der Aberration des Lichtes; Eigenbewegung der Sterne von bis zu einigen Bogensekunden pro Jahr; Entdeckung von Doppelsternen, veränderlichen Sternen; Bessel und andere, Anfang 19. Jh.: Beugungstheorie: $\Theta_{\min} = 1.2 \lambda / D$; *seeing*, d.h. das zu einer Verschmierung des beugungsbegrenzten Stern-Abbildes durch atmosphärische Szintillation auf ca. 1" oder größer).

10.1 Trigonometrische Parallaxe und das Entfernungsmaß parsec

Schließlich gelang Bessel 1839 die erste Bestimmung des Abstands zu einem nahen Stern, 61 Cygni. Aufgrund der Bahnbewegung der Erde um die Sonne erwartet man eine jährliche Bewegung naher Sterne relativ zu weit entfernten Fixsternen; diese Bewegung ist kreisförmig für Pol-nahe Sterne, strichförmig für Äquator-nahe Sterne, und mehr oder weniger ellipsenförmig für die anderen Sterne entsprechend ihrer Deklination.

Beobachtet man den Winkel des Sterns relativ zu einem als feststehend, d.h. als unendlich weit wegstehend angenommenen Nachbarsterns (z.B. eines lichtschwachen Sternes), so ändert er sich von einem maximalen zu einem minimalen Winkel, Θ' , Θ'' , und der Parallaxenwinkel (oder die *Parallaxe*) ist $\Theta = (\Theta' + \Theta'')/2$. Daraus ergibt sich die Entfernung

$$r = \frac{1 \text{ AU}}{\Theta [\text{rad}]} = 1 \text{ pc} \frac{1}{\Theta [']}$$

Hierbei haben wir die einem Parallaxenwinkel von $\pi_0 = 1''$ entsprechende Entfernung, 1 parallaktische Sekunde = 1 parsec = 1pc, als neue Einheit eingeführt:

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AU}}{\pi_0 [\text{rad}]} = \frac{1.49597892 \times 10^{13} \text{ cm}}{\pi_0 / (180 \times 60 \times 60)} = 3.08567801 \times 10^{18} \text{ cm}.$$

Näherungsweise gilt $1 \text{ pc} \approx 200 \text{ 000 A.U.}$. Die Lichtlaufzeit über 1 parsec ist

$$t = \frac{1 \text{ pc}}{c} = \frac{3.0857 \times 10^{18} \text{ cm}}{2.9979 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}} = 1.0293 \times 10^8 \text{ sec} = 3.27 \text{ Jahre}, \text{ d.h. } 1 \text{ pc} = 3.27 \text{ ly.}$$

Die von Bessel an 61 Cygni gemessene Parallaxe betrug 0.296", ein beeindruckend kleiner Wert, der höchste Präzision der Messungen und eine genaue Fehleranalyse erforderte. Nur einige 60 Sterne haben einen genügend nahen Abstand, dass ihre Parallaxen auf diese Weise gemessen werden können. Die größte Parallaxe hat mit 0.75" (entsprechend einer Entfernung von 1.3 pc) der Stern α Centauri; der zweitnächste Stern ist Barnard's Stern mit $\Theta = 0.55''$, d.h. $d = 1.8 \text{ pc}$.

Heute sind durch die Messungen des astrometrischen Satelliten HIPPARCOS (Nov. 1989 bis März 1993) die Parallaxen von über 120 000 sonnennächsten Sternen mit einer Genauigkeit von 5 mas (Milliarcsec !) gemessen. Der HIPPARCOS-Katalog enthält alle Sterne mit einer scheinbaren Helligkeit $V < 8$ mag (s.u.), die schwächsten Sterne im Katalog haben eine Helligkeit von $V = 12$

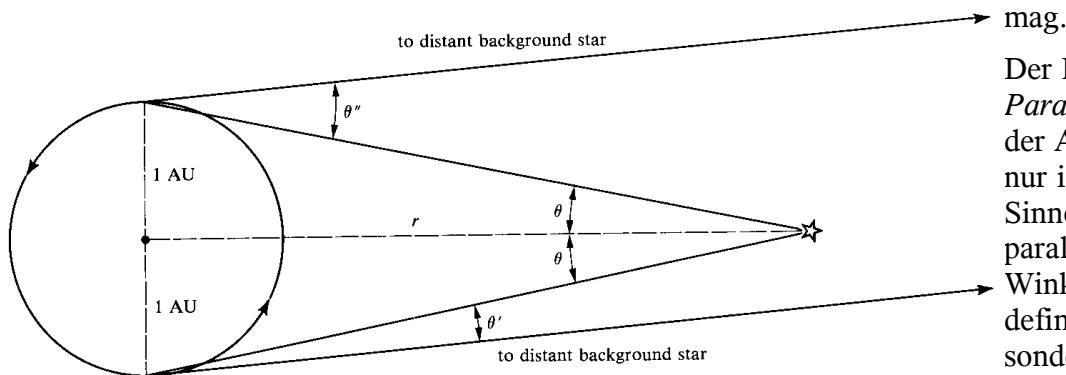


Abb. 52 Bestimmung des Sternabstandes mittels trigonometrischer Parallaxe (Abb., nach Shu, The Physical Universe)

Der Begriff *Parallaxe* wird in der Astronomie nicht nur im strengen Sinne für den parallaktischen Winkel wie oben definiert verwendet, sondern wird oft als Synonym für jegliche Art von gemessenen

Entfernungen gebraucht (z.B. photometrische Parallaxe, statistische Parallaxe, Strom-Parallaxe; s.u.).

10.2 Eigenbewegungen

Aufgrund ihrer Bewegung im Raum stehen die Sterne am Himmel nicht still. Die transversale Komponente der Sterngeschwindigkeit (relativ zur Sichtlinie) bewirkt eine Verschiebung der Sternposition an der Himmelkugel, die als *Eigenbewegung* bezeichnet und in "/Jahr angegeben wird. Mit bekannter Entfernung des Sternes kann man aus dieser Winkelbewegung die absolute Größe der transversalen Geschwindigkeit bestimmen. Zusammen mit der radialen Geschwindigkeit, die durch den Dopplereffekt an stellaren Spektrallinien gemessen werden kann, erhält man die Raumgeschwindigkeit der Sterne, und so Kenntnis über die Kinematik und Dynamik der Sterne in der Sonnenumgebung.

Die Eigenbewegung μ wird in Bezug auf das äquatoriale Koordinatensystem in die durch die Koordinatenachsen definierten Komponenten $\mu_\delta = \mu \cos \beta$ und $\mu_\alpha = \mu \sin \beta / \cos \delta$ zerlegt ($\mu^2 = \mu_\alpha^2 + \mu_\delta^2$, β : Winkel zur Rektaszensionsachse), und in den entsprechenden Sternkatalogen angegeben, so dass man sich aus der Epoche der Koordinaten und der Eigenbewegung die momentane Position berechnen kann. Die größte Eigenbewegung hat Barnard's Stern mit 10.3" pro Jahr. Typische Werte der meisten lokalen Sterne sind einige 0.01"/Jahr. Sie entsprechen typischen Raumbewegungen der Sterne relativ zur Sonne von einigen 10 km/s. Die Sterne der Sonnenumgebung werden also in einigen Millionen Jahren ganz andere als heute sein.

Die genauesten Eigenbewegungen ergeben sich aufgrund der längeren Zeitbasis aus älteren Katalogen (z.B. Astrophysics Catalog, 1892-1950; eine der ersten weltweiten wissenschaftlichen Kollaborationen) in Verbindung mit den HIPPARCOS-Daten.

Aus den bekannten Raumgeschwindigkeiten von nach bestimmten Kriterien ausgewählten sonnennahen Sternen kann man dann den sogenannten *local standard of rest* (LSR) als Geschwindigkeitsschwerpunkt dieser Sterne definieren. Die Auswahl der Bezugssterne ist so gewählt, dass der LSR das Ruhesystem für ein fiktives Teilchen ist, das sich auf einer stabilen Kreisbahn um das Zentrum der Milchstraße in der durch die gegenwärtige Position der Sonne bestimmten Ebene bewegt. Die Sonne bewegt sich dazu mit einer Geschwindigkeit von 13.4 km/s; sie bewegt sich dabei etwas schneller als es der stabilen Kreisbahn entspräche, fällt langsam auf das Zentrum der Milchstraße zu nach innen und gegen den galaktischen Nordpol.

10.3 Sternstrom-Parallaxe

Aus der Eigenbewegung (als Winkeländerung) kann man bei bekannter Entfernung auf die transversale Geschwindigkeit schließen. Umgekehrt kann man bei anderweitig bekannter Geschwindigkeit und gemessener Eigenbewegung auf die Entfernung schließen. Eine Anwendung dieser Idee ergibt sich bei sonnennahen, offenen Sternhaufen:

Die kollektiven Bewegungen der Mitglieder eines Sternhaufens führen auf den gemeinsamen Fluchtpunkt zu (siehe Abb.). Der Winkel Ψ zwischen Fluchtpunkt und momentaner Position der Haufenmitglieder erlaubt es, die dreidimensionale Orientierung der Haufengeschwindigkeit festzulegen. Die radiale Geschwindigkeit v_r der Haufenmitglieder kann über den Dopplereffekt direkt gemessen werden. Wegen der bekannten Orientierung ist damit auch die absolute Größe der Haufengeschwindigkeit ($v = v \cos \Psi$) und deren transversale Komponente, $v_t = v \tan \Psi$ bekannt. Die gemessene Eigenbewegung μ (als Winkeländerung) im Vergleich zur transversalen

Geschwindigkeit erlaubt dann die Festlegung der Entfernung: $d = \frac{v_r \tan \Psi}{\mu}$.

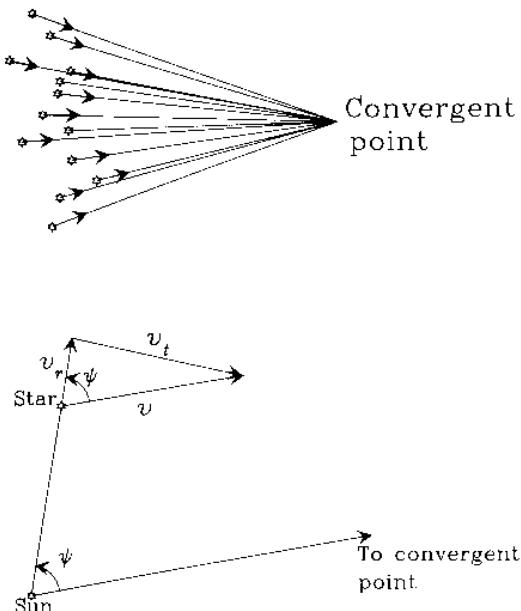


Abb. 53 Entfernungsbestimmung durch Sternstrom-Parallaxe (nach Binney & Merrifield)

Um genau zu arbeiten, muss natürlich über die Haufenmitglieder entsprechend mitteln etc. Die Methode funktioniert am besten, wenn der Haufen genügend groß ist, so dass die Eigenbewegungen genügend verschieden orientiert sind, um den Fluchtpunkt genau festzulegen. Außerdem sollte der Haufen genügend nahe sein, damit die Eigenbewegung gut messbar sind. Zusätzlich sollte die Orientierung der Haufengeschwindigkeit so sein, dass die Raumgeschwindigkeit einigermaßen auf radiale und tangentiale Komponente verteilt sind, damit beide gut messbar sind.

Bekannte offene Haufen, für die die Sternstrom-Parallaxe die genaue Bestimmung des Abstandes erlaubt, sind die Hyaden (200 Mitglieder, $d=46$ pc), die Pleiaden (600 Mitglieder, $d=115$ pc) und der Ursa Major Haufen (60 Mitglieder, $d=24$ pc). Die HIPPARCOS-Daten erlauben die Anwendung der Methode auf viele weitere Haufen.

Historisch war die Methode der Sternstrom-Parallaxen von großer Bedeutung, weil sie mit der Messung der Entfernung zu den Hyaden die Verknüpfung der an sonnennahen Sternen direkt gemessenen trigonometrischen Parallaxen mit der durch Identifizierung bestimmter Sterntypen mit bekannter Leuchtkraft gemessenen photometrischen oder spektroskopischen Parallaxen erlaubte.

10.4 Entfernungsbestimmung aus Expansionsbewegungen (H₂O-Maser, Supernovae, planetare Nebel)

Bei der Bildung massive Sterne wird ein Teil der einfallenden Materie umgelenkt und strömt als sog. "Ausfluss" von dem sich bildenden Stern ab. In dem Ausfluss treten durch Stoßwellen hohe

Dichten auf; die Stöße mit den Gasatomen erlauben typischerweise stark nichtthermische Anregung von Wassermolekülen in dieser Gaswolke, die als punktförmige, sehr hell strahlende Maseremission bei 1.3 cm Wellenlänge beobachtbar sind. Wegen ihrer Helligkeit können sie relativ leicht durch VLBI-Radiointerferometrie (VLBI: very long baseline interferometry, bei der verschiedene Radioteleskope weltweit zu einem Interferometer zusammengeschaltet werden, dass eine Winkelauflösung entsprechend einem einzigen Teleskop von Erdgröße erlaubt, nämlich im mas-Bereich). So können die Eigenbewegungen dieser Maser-Spots auch über Entferungen von 10 kpc über einige Jahre beobachtet werden. Die radiale Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Dopplereffekt. Da die Maser-Spots sich im Mittel kugelförmig vom sich bildenden Stern weg bewegen, kann man durch Vergleich der radialen und tangentiaLEN Bewegung und geeignete Mittelung über die Maserspots die Entfernung zu dem jungen Stern bestimmen.

Auf diese Weise ist die Entfernung zur Orion-A-Sternentstehungs-Region zu 450 pc direkt trigonometrisch bestimmt worden. Der Abstand zum Zentrum unserer Milchstraße (s.u.) wurde ebenfalls auf diese Weise Ende der 80er Jahre zu 8 kpc bestimmt, und damit der alte Wert von 10 kpc revidiert.

Auch andere Expansionsbewegungen, z.B. nach einem Supernova-Ausbruch, nach einer Nova (planetarer Nebel) können zur Entfernungsbestimmung dienen, indem man die radiale Geschwindigkeit (aus Dopplerverschiebung der Spektrallinien) mit der tangentiaLEN Geschwindigkeit als Winkelbewegung vergleicht. Mit der hohen Winkelauflösung von unter 0.1" des Hubble Space Telescopes sind auf diese Weise heute direkte Entfernungsbestimmungen bis in unserer Nachbargalaxien möglich.

10.5 sekuläre Parallaxen, statistische Parallaxen

Mit der Annahme, dass ein bestimmtes Ensemble von Sternen, z.B: die Sterne eines bestimmten Spektraltyps bei gleicher Helligkeit, d.h. gleichem Abstand zur Sonne, im Mittel keine ausgezeichnete Bewegungsrichtung haben, kann man die sich aufgrund der Bewegung der Sonne relativ zu ihnen über einige Jahre ergebende Basislänge als Basis der trigonometrischen Entfernungsbestimmung verwenden ($v=13 \text{ km s}^{-1}$ ergibt eine Basislänge von 2.6 A.U.pro Jahr).

Tatsächlich bestimmt man die Bewegung der Sonne aus dem "Dipol"-Anteil der Eigenbewegungsverteilung des entsprechenden Stern-Samples auf statistische Weise. Je nach Details der Methode, die wir hier nicht genauer besprechen wollen, erhält man auf diese Weise die *sekuläre Parallaxe* zu den Sternen des Ensembles (ohne Berücksichtigung der radialen Geschwindigkeiten), oder die *statistische Parallaxe* (mit Berücksichtigung der radialen Geschwindigkeit und zusätzlichen Annahmen über die statistische Verteilung).

Historisch haben diese Methoden große Bedeutung, da sie die Bestimmung der absoluten Helligkeit bestimmter Sternklassen erlaubten. Heute sind sie durch die genaueren HIPPARCOS Messungen weitgehend überholt.

10.6 Photometrische Parallaxen

Wir wollen hier kurz eine weitere Entfernungsbestimmungs-Methode diskutieren, die häufig in der Astronomie zur Anwendung kommt: aufgrund der $1/r^2$ -Abnahme der Strahlungsintensität kann man aus der beobachteten Helligkeit (**Photometrie**) eines Objektes bei bekannter intrinsischer Helligkeit auf dessen Abstand schließen: *photometrische Parallaxe*. Das Objekt bekannter intrinsischer Helligkeit nennt man in diesem Zusammenhang die *Standardkerze*.

Tatsächlich war diese Methode historisch die erste, um die Entfernung zu den nächsten Sternen

einigermaßen richtig abzuschätzen. Huygens verglich die Helligkeit der Sonne mit der von Sirius, indem er das Sonnenlicht durch kleine, in eine Metallplatte gebohrte Löcher auf ähnliche Helligkeit wie Sirius abschwächte. Unter der Annahme gleicher intrinsischer Helligkeit bestimmte er, dass Sirius ca. 28 000 mal so weit wie die Sonne sei. Das ist zwar um ca. einen Faktor 16 zu kurz geschätzt, aber immerhin.

Durch eine clevere Variante der Messmethode konnte de Chézeaux (1744) die Entfernung zu den nächsten Sternen genauer bestimmen: er verglich die scheinbare Helligkeit von Mars, die wegen der Planetenbewegung stark variiert, mit der eines hellen, nahen Fixsterns, und wartete bis beide, bei entsprechendem Abstand vom Mars zur Erde, ungefähr gleich groß waren. Mit der relativen Helligkeit von Mars (bei angenommener 100%-iger Reflektion des Sonnenlichtes),

$$f_{\text{Mars}} = (\pi r_{\text{Mars}}^2) \left(L / 4\pi R_{\text{S-Mars}}^2 \right) \left(1 / 4\pi R_{\text{Mars-Erde}}^2 \right), \text{ und der relativen Helligkeit des Fixsternes}$$

$$(\text{intrinsisch Sonnenhelligkeit}) f_* = \left(L / 4\pi d^2 \right) \text{ ergibt sich durch Gleichsetzen } d = \frac{2 R_{\text{S-Mars}} R_{\text{Mars-Erde}}}{r_{\text{Mars}}},$$

d.h. als Quotient bekannter Größen. Mit dieser Methode bestimmte er ca. 100 Jahre vor Bessel die Entfernung zu einigen Fixsternen auf einen Faktor von 2-3 genau (allerdings mit einigen zu rechtfertigenden Annahmen).

Jenseits der Längenskalen, über die man Entfernungen mittels trigonometrischer Parallaxe und der eben besprochenen verwandten Methoden messen kann, kommt man in der Entfernungsbestimmung nur weiter, indem man genau auf die eben dargestellte Weise die Entfernung über die Helligkeit von Standardkerzen bestimmt. Als Standardkerzen dienen dabei zunächst die Sterne, deren intrinsische Helligkeit man durch Klassifikation z.B. der spektralen Eigenschaften und Eichung an genügend nahe stehenden Sternen bestimmen kann (spektroskopische Parallaxe). Eine andere wichtige Klasse von Standardkerzen sind bestimmte periodisch in der Helligkeit veränderliche Sterne (Cepheiden), für die eine empirisch bestimmte (und theoretisch einigermaßen verstandene) Beziehung zwischen der Periodendauer (von einigen Tagen bis zu einigen -zig Tagen) und der intrinsischen Helligkeit besteht. Aufgrund ihrer Variabilität sind diese Sterne leicht zu identifizieren. Da sie intrinsisch sehr hell sind, können sie bis hin zu den nächsten Galaxien beobachtet werden.

11 Grundlegende Eigenschaften der Sterne

Wir wollen zunächst kurz die Methode und die Einheiten kennen lernen, mit denen in der Astronomie Helligkeiten angegeben und gemessen werden. Danach werden wir die grundlegenden Eigenschaften der Sterne kennen lernen, und diskutieren, wie man anhand des beobachteten Spektrums auf die intrinsische Helligkeit schließen kann. Mit diesen Methoden kann man die Abstände innerhalb der Milchstraße und bis hin zu den nächsten Galaxien ausmessen.

11.1 Helligkeiten und Magnitudines (teilweise Wiederholung von 5.6)

Die Leuchtkraft L eines Sterns ist die gesamte abgestrahlte Energie, gemessen in erg s^{-1} . Da die Sterne in sehr guter Näherung kugelsymmetrisch sind, verteilt sich die Strahlung gleichmäßig auf alle Raumrichtungen. Im Abstand r misst man also einen Strahlungsfluß (Einheit $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2}$) von $f = \frac{L}{4\pi r^2}$ (bei Euklidischer Geometrie). Die beobachtete Helligkeit eines Sterns (genau: sein Strahlungsfluß am Ort des Beobachters) hängt also sowohl von seiner Leuchtkraft wie auch von seiner Entfernung ab.

Wegen der begrenzten Spektralabdeckung der verschiedenen Detektoren und wegen der Undurchlässigkeit der Erdatmosphäre kann man meist nur einen Teil des elektromagnetischen Spektrums und nicht den gesamten Strahlungsfluß vermessen. Man muss also vollständig nicht nur den Strahlungsfluß sondern auch den gemessenen Spektralbereich angeben: visuelle Helligkeit, photographisch Helligkeit, IR-Helligkeit, Radio-Helligkeit etc. (mit genau definierten "Filtern" für die jeweilige Messung).

In der Astronomie hat sich ein eigenes Maß für den Strahlungsstrom erhalten, die Größenklassen oder *magnitudines*. Schon die alten Griechen teilten die Sterne in (sechs) verschiedene Helligkeitsklassen ein. Da subjektiv die helleren Sterne größer am Himmel erscheinen, hat sich die Bezeichnung *Größenklassen*, lat. *magnitudines*, erhalten: die hellsten Sterne sind "erster Größe", die schwächeren entsprechen "zweiter Größe". Die schwächsten Sterne waren "sechster Größe".

Da die physiologische Empfindlichkeit ungefähr logarithmisch ist (Fechner-Weber-Gesetz), entspricht die so festgelegte Helligkeitsskala einer logarithmischen Skala (analog zu dB bei Lautstärken). Vergleich der historischen Skala mit quantitativen Messung in physikalischen Einheiten zeigte, dass der Unterschied zwischen 1. und 6. Größenklasse, also 5 Größenklassen, ungefähr einem Faktor 100 entspricht, so dass heute die folgende Definition gilt: ein Stern hat die Magnitude m_1 im Vergleich zu einem Stern mit der Magnitude m_2 , wenn für die Flüsse der Sterne f_1 und f_2 gilt:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{f_1}{f_2} \right).$$

Umgekehrt gilt entsprechend $\frac{f_1}{f_2} = 10^{-0.4(m_1 - m_2)}$. Beachte: wegen $\ln 10 = 2.3026$ gilt:

$m_1 - m_2 = -1.086 \ln(f_1/f_2)$, d.h. die Festlegung ist zufällig so, dass sie fast eine auf dem natürlichen Logarithmus basierende Skala ist! Insbesondere gilt bei kleinem relativen Helligkeitsunterschied $\Delta f = (f_1/f_2) - 1 \ll 1$ entsprechend $\Delta m \approx 1.086 \Delta f$.

Zur Fixierung des Nullpunktes der Skala wird die Helligkeit eines Eichsternes auf eine bestimmten Wert definiert. In der Praxis ist es besser, eine Sequenz von Eichsternen bestimmter Helligkeit zu haben, so dass man nur relativ kleine Helligkeitsunterschiede relativ zu diesen messen muss. Da

die Sterne möglichst immer beobachtbar sein müssen, hat sich für Astronomen auf der Nordhalbkugel die sog. *Pulsequenz* etabliert. Sirius als hellster Stern am Himmel hat z.B. eine Magnitude von $m_V = -1.4$. Die schwächsten Sterne die heute mit CCD-Detektoren an den größten Teleskopen nachgewiesen werden können, haben $m_V \approx 27$ (!). Mit dem bloßen Auge an großen Teleskopen, z.B. an Mt. Palomar, sind ca. $m_V = 18 - 19$ -Sterne sichtbar, mit photographischen Platten $m_V = 24$.

Table 2.1 Filter characteristics of broad-band photometric systems

System	Band	λ_{eff} nm	FWHM nm	$f_X(A0V)$ Jy	L_\odot 10^{25} W	M_\odot
<i>UBVRI</i>	<i>U</i>	365	66	1780	1.86	5.61
	<i>B</i>	445	94	4000	4.67	5.48
	<i>V</i>	551	88	3600	4.64	4.83
	<i>R</i>	658	138	3060	6.94	4.42
	<i>I</i>	806	149	2420	4.71	4.08
	<i>J</i>	1220	213	1570	2.49	3.64
	<i>H</i>	1630	307	1020	1.81	3.32
	<i>K</i>	2190	390	636	0.82	3.28
	<i>L</i>	3450	472	281	0.17	3.25
	<i>M</i>	4750	460	154	—	—
Hipparcos	<i>Hp</i>	550	225	—	—	—
Tycho	<i>B_T</i>	420	75	—	—	—
	<i>V_T</i>	510	100	—	—	—
Thuan-Gunn	<i>g</i>	512	120	—	—	—
	<i>r</i>	668	100	—	—	—
	<i>i</i>	792	150	—	—	—
	<i>z</i>	912	140	—	—	—
SDSS	<i>u'</i>	352	63	—	—	—
	<i>g'</i>	480	141	—	—	—
	<i>r'</i>	625	139	—	—	—
	<i>i'</i>	769	154	—	—	—
	<i>z'</i>	911	141	—	—	—

SOURCE: From data published in Bessell (1993), Perryman *et al.* (1997), Thuan & Gunn (1976), Schneider, Gunn & Hoessel (1983) and Fukugita *et al.* (1996). The *UBVRI* bands are for the combined Johnson-Cousins-Glass system. $f_X(A0V)$ is the X -band flux density [equation (2.40)] of a $V = 0$ A0V star. The solar luminosities and solar magnitudes to the red of V were derived from Buser & Kurucz (1992) solar models by W. Vacca. Note that $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$

Der Spektralbereich, in dem die entsprechende Helligkeit gemessen wurde, wird oft als unterer Index angegeben, z.B. m_V (s.u.) oder manchmal einfach auch als der entsprechende Buchstabe: *V*. Als *bolometrische Helligkeit* m_{bol} bezeichnet man dabei die über das gesamte elektromagnetische Spektrum extrapolierte Helligkeit. Relativ schmalbandige Bereiche haben sich als Unterbereiche des sichtbaren Spektrums eingebürgert und werden als *Farben* bezeichnet; das meistgebrauchte Farbsystem ist: U (ultraviolet), B (blau), V (visuell) und die entsprechende Ausdehnung ins Infrarote, sukzessive mit I,J,K etc. nummeriert (siehe Tabelle). Zur quantitativen Bestimmung der Farben wird die zentrale Wellenlänge und die Halbwertsbreite des Filters angegeben. *V* entspricht in etwa

der spektralen Empfindlichkeitskurve des menschlichen Auges.

11.2 Absolute Helligkeiten, Entfernungsmodul

Statt die Leuchtkraft eines Sternes als Maß für seine intrinsische Helligkeit anzugeben, ist es in der Astronomie üblich, *absolute Magnitudines M* anzugeben. Diese sind definiert als die Helligkeit, die der Stern in der Entfernung von $D=10 \text{ pc}$ haben würde. Wegen $f = L/4\pi d^2$ vergleichen sich die Helligkeiten eines Sterns im Abstand d und im Abstand D zu

$$m - M = -2.5 \log_{10} \left(\frac{f}{F} \right) = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{D} \right) = 5 \log_{10}(d[\text{pc}]) - 5.$$

Der Unterschied zwischen scheinbarer und absoluter Helligkeit, $m - M$, heißt *Entfernungsmodul*.

Die Sonne hat eine absolute Helligkeit von $M_V(\text{Sonne}) = 4.83$, photometrisch $M_{\text{phot}}(\text{Sonne}) = 5.4$

, bolometrisch M_{bol} (Sonne)=4.72 . Die absoluten Helligkeiten der Sterne reichen von -9 (massive junge Sterne) bis herunter zu +20 (braune Zwerge), d.h. sie umspannen $(-9-20)/(-2.5)=11.6$ Zehnerpotenzen an absoluter Helligkeit (oder Leuchtkraft).

Bei bekannter absoluter Helligkeit des Sternes (z.B. aufgrund der Spektralklassifikation o.ä.) kann man aus der gemessenen scheinbaren Helligkeit auf die Entfernung schließen: $d[\text{pc}]=10^{0.2(m-M)+1}$

11.3 Spektrale Klassifikation

Wie oben erläutert, basiert die Entfernungsbestimmung über Skalen, die die Messung einer trigonometrischen Parallaxe nicht mehr erlauben, auf dem Vergleich der gemessenen Helligkeit mit der anderweitig bekannten, intrinsischen Helligkeit der beobachteten Objekte. Auf die intrinsische Helligkeit der beobachteten Sterne kann man schließen, wenn man die beobachtbare entfernungsunabhängige Eigenschaften der Sterne bestimmen kann. Es zeigt sich, dass die in der detaillierten spektralen Verteilung des Sternenlichts enthaltene Information ausreicht, um den Sterntyp, und damit die intrinsische Helligkeit des Sternes, zu bestimmen, und so die Entfernung zu bestimmen (spektroskopische Parallaxe).

Die Spektren von Sternen zeigen Absorptionslinien (z.B. die Fraunhofer'schen Linien im Sonnenspektrum), die entstehen, wenn das kühtere Plasma der Stern-Photosphäre vor dem Hintergrund der Schwarzkörperstrahlung der wärmeren, tieferen Sternschichten gesehen wird (mehr zum Strahlungstransport in Sternatmosphären später). Diese Linien sind schon gut in Spektren moderater Dispersion zu sehen (Prismen-Spektren), die leicht für ein ganzes Sternfeld gleichzeitig aufgenommen werden können. Vergleich mit Laborspektren erlaubte bestimmte chemische Elemente (in verschiedenen Ionisationsstufen) als Träger dieser Linien zu identifizieren. Mit der systematischen Analyse der Spektren, beginnend in der Mitte des vorigen

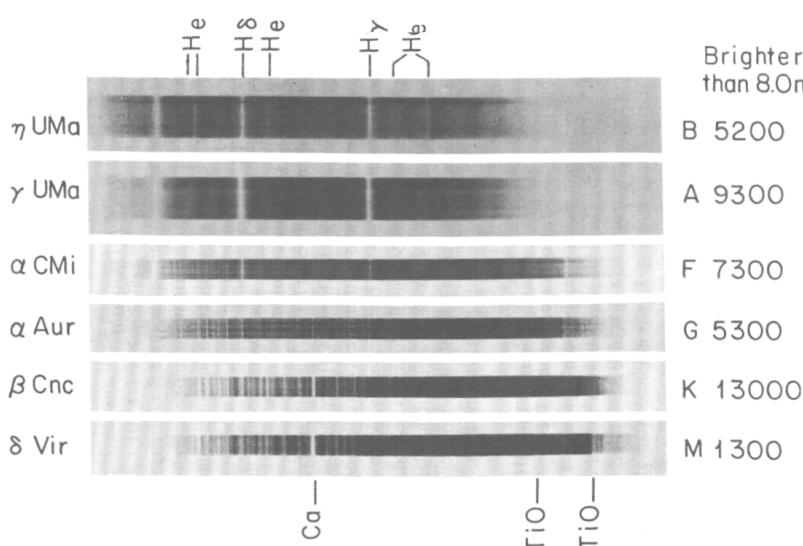


FIGURE A.4. Schematic diagram of spectra of typical stars representing different spectral types. The number of stars brighter than the eighth magnitude in each class is listed on the right, next to the star's spectral type. (With the permission of the Yerkes Observatory, University of Chicago.)

Abb. 54: Spektral-Sequenz mit Beispiel-Spektren

Nach einigen "Gehversuchen", die die Pionierarbeit leisteten (Secchi, 1860; Pickering und Fleming, 1890: 10.000 Sterne) wurde am Harvard College Observatory von Annie Cannon zusammen mit Pickering die Einordnung von 225.000 (!) Sternen als *Henry Draper Catalog*

Jahrhunderts, wurde bald klar, dass die verschiedenen Spektren in einer Sequenz angeordnet werden können, die durch das sukzessive Hervortreten und Verschwinden einiger charakteristischer Linien oder Liniengruppen entlang der Sequenz bestimmt sind. Fast 90% aller Sterne lassen sich in diese Sequenz einordnen, einige wenige zeigen ungewöhnliche Spektren. Diese Klassifikation der Sterne entsprechend der Spektralsequenz war zunächst eine rein phänomenologische Angelegenheit. Erst mit dem quantenmechanischen Verständnis der atomaren Spektren wurde sie als Temperatursequenz der Sternatmosphären interpretierbar.

publiziert (1918-1924, 1925-1936). Die verschiedenen Spektralklassen wurden mit großen Buchstaben durchnummeriert; nach verschiedenen Umordnungen der ursprünglichen Sequenz ergab sich schließlich die Folge

$$O, B A, F, K, G, K, M$$

(merke: irgendeine nicht mehr bekannte amerikanische College Klasse hat in einer langweiligen Astronomievorlesung nichts besseres zu tun gehabt, als hierfür den Merkspruch *Oh, be a fine girl, kiss me!* zu entwickeln).

Table 3.1 Principal characteristics of spectral types

Spectral type	Spectral features
O	He II lines visible; lines from highly ionized species, for example, C III, N III, O III, Si IV; H lines relatively weak; strong UV continuum
B	He I lines strong, attain maximum at B2; He II lines absent; H lines stronger; lower-excitation ions, for example, CII, O II, Si III
A	H lines attain maximum strength at A0 and decrease towards later types; Mg II, Si II strong; Ca II weak and increasing in strength
F	H weaker, Ca II stronger; lines of neutral atoms and first ionization states of metals appear prominently
G	Solar-type spectra; Ca II lines extremely strong; neutral metals prominent, ions weaker; G band (CH) strong; H lines weakening
K	Neutral metallic lines dominate; H quite weak; molecular bands (CH, CN) developing; continuum weak in blue
M	Strong molecular bands, particularly TiO; some neutral lines, for example, CA I, quite strong; red continuum
C	Carbon stars; strong bands of carbon compounds C ₂ , CN, CO; TiO absent; temperatures in range types K and M
S	Heavy-element stars; bands of ZrO, YO, LaO; neutral atoms strong as in types K and M; overlaps these types in temperature range

Abb. 55: Definition der Spektralklassen

charakteristischen Größen der Sterne korreliert. Hertzsprung (1911) und Russell (1913) trugen unabhängig von einander die Spektralklassen, bzw. Farben einer Anzahl von Sternen gegen deren absolute Helligkeit (d.h. nach sorgfältiger Bestimmung der Entfernung) auf. In diesem **Hertzsprung-Russell-Diagramm** liegen die meisten Sterne auf einer Linie, der sog. **Hauptrreihe**. Die anderen Sterne ordnen sich in anderen Gruppen (**Unter-, Überriesen und Riesen, weiße Zwerge**) an, die **Leuchtkraftklassen** heißen. Auch sie kann man anhand spektraler Eigenschaften wie Breite der Linien u.a. bestimmen. Die Namen sind verständlich, wenn man bedenkt, dass die Leuchtkraft sich aus Oberflächentemperatur und Größe des Sternes ergibt zu $L = \sigma T^4 4\pi r^2$. Bei gleicher Temperatur, d.h. Spektralklasse oder Farbe sind die leuchtkräftigeren also die größeren, die leuchtschwächeren die kleineren Sterne.

Dass die Sterne sich im Hertzsprung-Russell-Diagramm so einfach entlang der Hauptrreihe und den anderen Gruppen anordnen, ist äußerst bemerkenswert. Die Erklärung über die Theorie des Aufbaus und die Entwicklung der Sterne mit der Kernfusion von H zu He als Energiequelle (auf der Hauptrreihe) ist einer der großen Resultate der Astrophysik dieses Jahrhunderts. Hier halten wir nur fest, dass wir mit der Bestimmung der Spektralklasse und Leuchtkraftklasse auch die absolute

Eine andere Möglichkeit, die Sterne nach ihrer Temperatur zu ordnen, bieten die *Farben*, z.B. B-V als Differenz der blauen und visuellen Helligkeit, d.h. der über den jeweiligen Filterbereich integrierten Leuchtkraft. Entsprechend der spektralen Form der Schwarzkörper-Kurve variieren sie natürlich auch mit der Temperatur der Sternatmosphäre, sind allerdings leichter auch bei schwachen Sternen zu messen.

Hertzsprung-Russell Diagramm

Nachdem mit der Spektralklassifikation eine Anordnung der Sterne nach einem wichtigen physikalischen Parameter, nämlich der Oberflächentemperatur, gelungen ist, liegt es nahe, zu untersuchen, wie diese Größe mit anderen

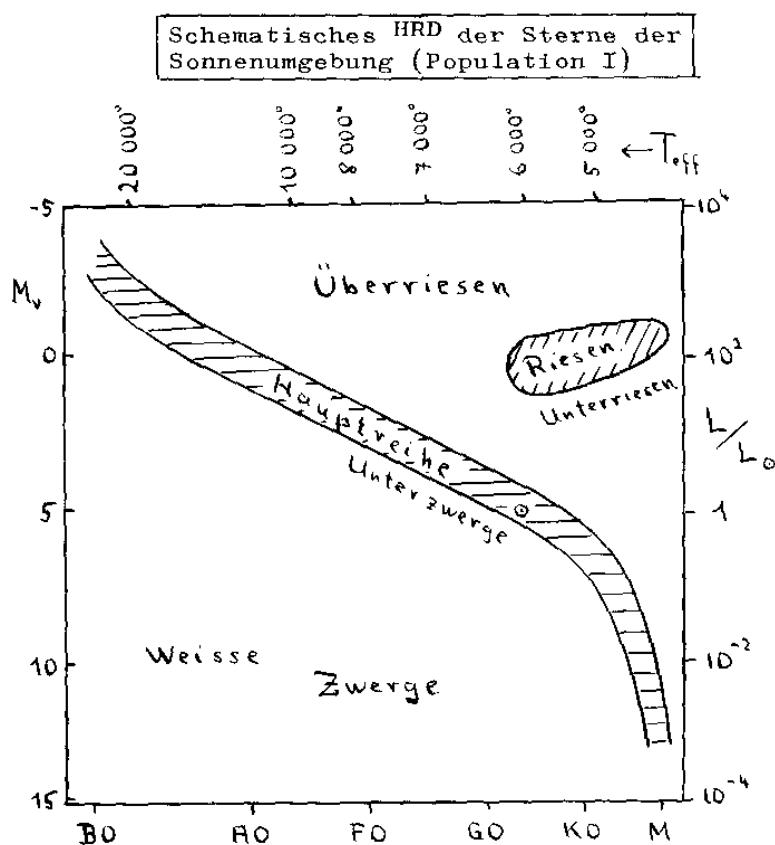


Abb. 56: nach Voigt "Abriss der Astronomie"

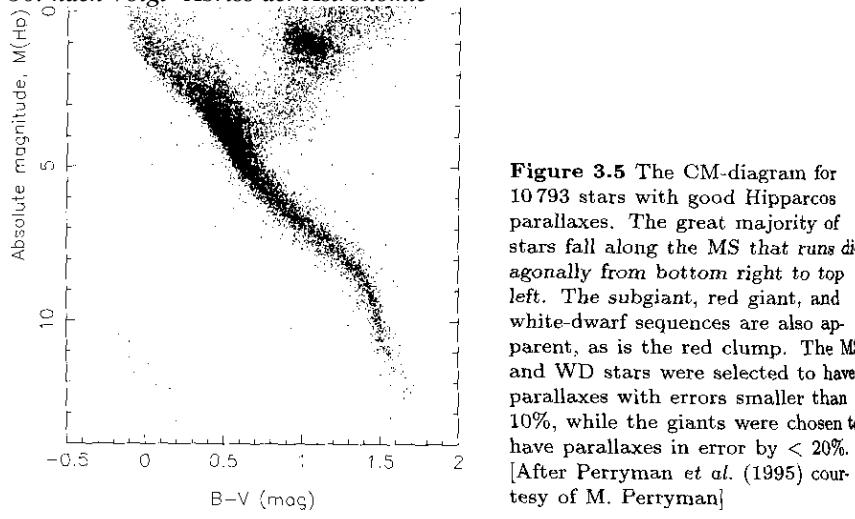


Abb. 57: nach Binney & Merrifield, Galactic Astronomy

der Helligkeit des jeweiligen Sternes bestimmt haben. Bis auf Korrekturen für die interstellare Extinktion (die in manchen Fällen sehr wichtig ist), können wir dann aus der ebenfalls gemessenen scheinbaren Helligkeit die Entfernung zu dem Stern bestimmen.

Für eine Gruppe von Sternen im gleichen Abstand (z.B: offener Sternhaufen, Kugelsternhaufen), d.h. mit gleichem Entfernungsmodul, kann man auch direkt eine H-R-Diagramm plotten und aus dem Vergleich mit der absoluten Lage der Hauptreihe die Entfernung des Sternhaufens bestimmen.

Figure 3.5 The CM-diagram for 10 793 stars with good Hipparcos parallaxes. The great majority of stars fall along the MS that runs diagonally from bottom right to top left. The subgiant, red giant, and white-dwarf sequences are also apparent, as is the red clump. The MS and WD stars were selected to have parallaxes with errors smaller than 10%, while the giants were chosen to have parallaxes in error by < 20%. [After Perryman et al. (1995) courtesy of M. Perryman]

12 Strahlungstransport

12.1 Die Gleichung des Strahlungstransports

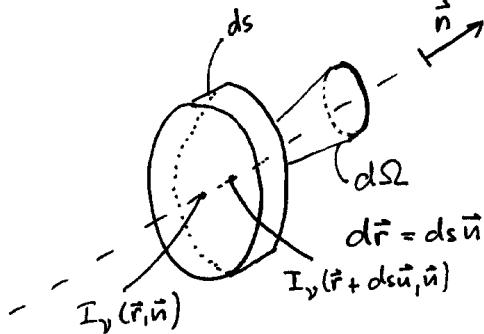


Abb. 58: zur Definition der spezifischen Intensität

Wir betrachten, wie sich die spezifische Intensität $I_v(\vec{r}, \vec{n})$ längs eines kleinen Wegstückes der Länge ds in Richtung \vec{n} ändert. Dazu betrachten wir den Unterschied der pro Zeiteinheit durch die Fläche bei \vec{r} und durch die Fläche bei $\vec{r} + \vec{n} ds$ tretenden Strahlungsenergie (jeweils in einem bestimmten Frequenzintervall, Raumwinkelintervall, etc.). Für kleine Wegstücke ds ist die Änderung proportional zu ds . Für die Änderung müssen wir berücksichtigen (hier völlig phänomenologisch), daß neue Strahlung hinzukommen kann und daß ein Teil der einfallenden Strahlung absorbiert wird. Wir schreiben also:

$$I_v(\vec{r} + \vec{n} ds, \vec{n}) - I_v(\vec{r}, \vec{n}) = [\eta_v(\vec{r}) - \chi_v(\vec{r}) I_v(\vec{r}, \vec{n})] ds dS d\Omega dv.$$

Dabei ist $\eta_v(\vec{r})$ der *Volumen-Emissionskoeffizient*. Er gibt an, welche Energie pro Zeiteinheit vom Einheitsvolumen in das Frequenzintervall dv und in den Raumwinkel $d\Omega$ durch die vorhandene Materie emittiert wird. Die vorhandene Strahlungsintensität wird durch den zweiten Beitrag verringert: $\chi_v(\vec{r})$ ist der *Volumen-Absorptionskoeffizient*. Er gibt an, welcher Anteil der einfallenden Energie pro Zeiteinheit vom Einheitsvolumen aus dem Frequenzintervall dv und aus dem Raumwinkel $d\Omega$ durch die vorhandene Materie absorbiert wird. Beachte: die absorbierte Strahlungsintensität ist proportional zur einfallenden Intensität! Tatsächlich werden wir weiter unten sehen, daß neben der Absorption immer auch ein zur einfallenden Intensität proportionaler Emissionsanteil auftritt. Formal zählt er als "negative Absorption" in $\chi_v(\vec{r})$ mit.

Wir nehmen hier an, daß die Materie selbst keine Vorzugsrichtung kennt; entsprechend sind der Absorptions- und der Emissionskoeffizient isotrop, d.h. von \vec{n} unabhängig.

Schreiben wir die linke Seite mit $I_v(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{n}) = I_v(\vec{r}, \vec{n}) + (d\vec{r} \cdot \text{grad}) I_v(\vec{r}, \vec{n})$ um und führen die Abkürzung $S_v(\vec{r}) = \frac{\eta_v(\vec{r})}{\chi_v(\vec{r})}$ (*Quellfunktion*) ein, so lautet die

$$\text{Strahlungstransportgleichung } (\vec{n} \cdot \text{grad}) I_v(\vec{r}, \vec{n}) = -\chi_v(\vec{r}) [I_v(\vec{r}, \vec{n}) - S_v(\vec{r})].$$

12.2 Quellfunktion im thermischen Gleichgewicht

Im thermischen Gleichgewicht ist das Strahlungsfeld homogen und isotrop: $I_v(\vec{r}, \vec{n}) = B_v(T)$. Insbesondere ist der Gradient der spezifischen Intensität dann =0. Damit die rechte Seite ebenfalls identisch =0 ist, muß offensichtlich im thermischen Gleichgewicht sein $S_v(\vec{r}) = B_v(T)$, d.h. die Quellfunktion ist dann durch die Planck-Funktion gegeben. Mit der Definition der Quellfunktion erhalten wir daraus das *Kirchhoff'sche Gesetz* $\eta_v|_{TE} = \chi_v|_{TE} B_v(T)$, nämlich, daß Emission und Absorption der Materie im thermischen Gleichgewicht zueinander proportional sind (frequenzspezifisch, und damit natürlich auch integral); der Proportionalitätsfaktor ist gerade die

Planck-Funktion. Insbesondere hat ein perfekt absorbierender Körper ($\eta_\nu = 1$) gleichzeitig das maximale Emissionsvermögen, nämlich die durch die Planck-Funktion gegebene Schwarzkörperstrahlung.

12.3 Emissivität, Absorptivität, Quellfunktion

Bisher haben wir $\eta_\nu(\vec{r})$ und $\chi_\nu(\vec{r})$ als phänomenologische Größen eingeführt. Sie sind keine unabhängigen Größen, sondern müssen bestimmte Beziehungen erfüllen, so daß im thermischen Gleichgewicht die Kirchhoff'sche Beziehung erfüllt ist. Welche physikalischen Prozesse beschreiben sie? Die Emission und Absorption von Strahlung geschieht durch Strahlungsübergänge zwischen den quantenmechanischen Energiezuständen der beteiligten Materie. Im Fall eines Gases sind das zum einen die Übergänge von gebundenen (diskreten) Energieniveaus in andere gebundene Zustände, die Frequenz der beteiligten Photonen entspricht gerade der Energiedifferenz der Zustände, $h\nu = E_1 - E_2$; wir erhalten *Linienstrahlung*. Ist die Strahlung genügend energetisch, daß sie die Moleküle dissoziieren oder die Atome ionisieren kann, dann sind die möglichen Energiezustände nicht mehr diskret und die Absorption und Emission kann über einen breiten Frequenzbereich auftreten: *gebunden-freie Übergänge, Kontinuumsstrahlung, Kontinuumsabsorption*. Bei einem ionisierten Gas (Plasma) sind auch *frei-frei*-Übergänge möglich (*Bremsstrahlung* der Elektronen im Coulomb-Potential der Ionen). Sind feste Stoffe beteiligt (z.B.: interstellarer Staub), so hat dieses Vielteilchensystem wegen der großen Anzahl von Freiheitsgraden (Moden) ein sehr dichtes Spektrum: die vielen Linien (Übergänge zwischen Moden) liegen so dicht, daß sie innerhalb ihrer natürlichen Linienbreite in der Frequenz überlappen; es resultiert wiederum ein in der Frequenz kontinuierliches Absorptions- und Emissionsvermögen.

12.4 Strahlungstransport in Sternatmosphären, Grundlagen

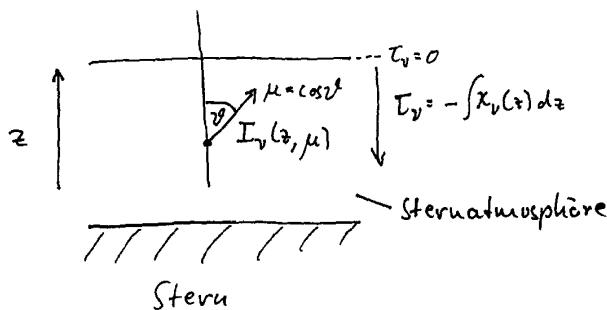


Abb. 59: Strahlungstransport in einer planparallelen Schicht

Im folgenden wollen wir mittels Strahlungstransport den Aufbau der Sternatmosphären näherungsweise verstehen. Als sehr gute Nährung nehmen wir dabei an, daß die Sternatmosphäre, d.h. die oberste Schicht des Sternes, aus der die Photonen, die wir von dem Stern sehen, entweichen, sehr klein gegenüber dem Sternradius ist. Sie kann dann als planparallel angenommen werden. Das Strahlungsfeld können wir dann aus Symmetriegründen als Funktion nur noch der

beiden Variablen z (Tiefe) und μ (Richtungscosinus, $\mu = \cos \vartheta$) beschreiben:

$$I_\nu(\vec{r}, \vec{n}) = I_\nu(z, \mu).$$

Die Strahlungstransport-Gleichung lautet in diesen Koordinaten

$$\mu \frac{dI_\nu(z, \mu)}{dz} = -\chi_\nu(z) [I_\nu(z, \mu) - S_\nu(z)].$$

Führen wir als neue Variable die *optische Tiefe* τ_ν mit $d\tau_\nu = -\chi_\nu(z) dz$ ein (beachte: das Vorzeichen ist so gewählt, daß die optische Tiefe von außen in die Sternatmosphäre hinein ansteigt), so ergibt sich:

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau_\nu, \mu)}{d\tau_\nu} = + [I_\nu(\tau_\nu, \mu) - S_\nu(\tau_\nu)].$$

In der planparallelen Geometrie einer Atmosphäre kann man die Strahlungstransportgleichung über die Winkel mitteln und erhält mit den früheren Definitionen für den Strahlungsfluß $H_\nu(z)$ und den Strahlungsdruck $K_\nu(z)$ die beiden Gleichungen:

$$\frac{dH_\nu(z)}{d\tau_\nu} = [J_\nu(z) - S_\nu(z)],$$

(d.h. der Strahlungsfluß ändert sich mit der Höhe in der Atmosphäre aufgrund des Unterschiedes zwischen der mittleren Intensität und der Quellfunktion) und

$$\frac{dK_\nu(z)}{d\tau_\nu} = H_\nu(z),$$

(d.h. der Strahlungsdruck ändert sich mit der Höhe aufgrund des Strahlungsflusses aus der Atmosphäre heraus).

12.5 formale Lösung der Strahlungstransportgleichung

Die Strahlungstransportgleichung in der obigen Form kann leicht formal gelöst werden mit der Methode des "integrierenden Faktors" (siehe Übungsaufgabe). In diesem Fall ist der "integrierende

Faktor" $\exp(-\tau_\nu/\mu)$: da $\frac{d}{d\tau_\nu} (I_\nu \exp(-\tau_\nu/\mu)) = \left(\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} - \frac{\tau_\nu}{\mu} I_\nu \right) \exp(-\tau_\nu/\mu)$, kann man die

Strahlungstransportgleichung umschreiben in

$$\frac{d}{d\tau_\nu} (I_\nu \exp(-\tau_\nu/\mu)) = \frac{-1}{\mu} S_\nu \exp(-\tau_\nu/\mu)$$

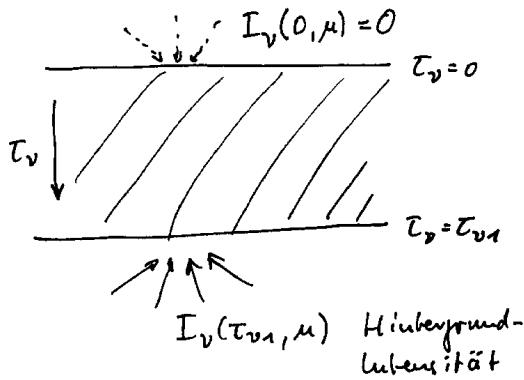
mit der Lösung

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) \exp(-\tau_\nu/\mu) = I_\nu(\tau_{\nu 0}, \mu) \exp(-\tau_{\nu 0}/\mu) + \frac{1}{\mu} \int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu 0}} S_\nu(t) \exp(-t/\mu) dt,$$

bzw.

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = I_\nu(\tau_{\nu 0}, \mu) \exp(-(τ_{\nu 0} - τ_\nu)/\mu) + \frac{1}{\mu} \int_{τ_\nu}^{τ_{\nu 0}} S_\nu(t) \exp(-(t - τ_\nu)/\mu) dt.$$

Die "Integrationskonstante" $I_\nu(\tau_{\nu 0}, \mu) \exp(-\tau_{\nu 0}/\mu)$, d.h. der Wert von $\tau_{\nu 0}$ und die Winkelabhängigkeit der Funktion $I_\nu(\tau_{\nu 0}, \mu)$ müssen an die Randbedingungen angepaßt werden. Nehmen wir eine Schicht endlicher Dicke von $τ_\nu = 0$ bis $τ_\nu = τ_{\nu 1}$ an, und legen fest, daß die einfallende Intensität bei $τ_\nu = 0$ verschwinden soll, d.h. $\mu < 0$: $I_\nu(τ_\nu = 0, \mu) = 0$, und bei $τ_\nu = τ_{\nu 1}$ durch die dort einfallende Intensität gegeben ist, d.h. $\mu > 0$: $I_\nu(τ_\nu = τ_{\nu 1}, \mu) = I_\nu(τ_{\nu 1}, \mu)$. Damit ist



- 1) $\mu < 0$: nach innen laufende Strahlung: Mit der Wahl $\tau_{v0} = 0$, $I_v(\tau_{v0}, \mu) = 0$ (von außen einfallende Intensität = 0) ist dann

$$I_v(\tau_v, \mu) = \int_0^{\tau_v} S_v(t) \exp\left(-(\tau_v - t)/(-\mu)\right) \frac{dt}{(-\mu)}.$$

- 2) $\mu > 0$: nach außen laufende Strahlung: Mit der Wahl $\tau_{v0} = \tau_{v1}$ ist dann

$$I_v(\tau_v, \mu) = \int_{\tau_v}^{\tau_{v1}} S_v(t) \exp\left(-(t - \tau_v)/\mu\right) \frac{dt}{\mu} + I_v(\tau_{v1}, \mu) \exp\left(-(\tau_{v1} - \tau_v)/\mu\right).$$

Abb. 60: zur formalen Lösung der Strahlungstransportgleichung in planparalleler Geometrie

Nehmen wir speziell im 2)-ten Fall an, daß die Atmosphäre beliebig dick ist ($\tau_{v1} \rightarrow \infty$), dann wird einfach

$$I_v(\tau_v, \mu) = \begin{cases} \int_0^{\tau_v} S_v(t) \exp\left(-(\tau_v - t)/(-\mu)\right) \frac{dt}{(-\mu)}, & \mu < 0 \\ \int_{\tau_v}^{\infty} S_v(t) \exp\left(-(t - \tau_v)/\mu\right) \frac{dt}{\mu}, & \mu > 0 \end{cases},$$

und die austretenden Intensität ist

$$I_v(0, \mu > 0) = \int_0^{\infty} S_v(t) \exp(-t/\mu) \frac{dt}{\mu}.$$

Dieses Ergebnis lässt sich ganz anschaulich interpretieren: die spezifische Intensität ist gegeben zum einen durch die eventuell vorhandene Hintergrund-Intensität, geschwächt um die optische Tiefe der gesamten Schicht ($\exp(-\tau)$) und zum anderen durch die Beiträge der Quellfunktion in der jeweiligen Tiefe, geschwächt um die optische Tiefe aus dieser Schicht.

Diese Lösung ist eine **formale Lösung**, weil sie nichts darüber sagt, welche Werte die zu integrierende Quellfunktion in der jeweiligen Tiefe hat. Tatsächlich hängt der Wert der Quellfunktion aber gerade wiederum von dem in der Quelle vorhandenen Strahlungsfeld ab: die Anregung der atomaren oder molekularen Niveaus, die im Falle von Linienstrahlung die Quellfunktion bestimmt (s.o.) wird selbst durch das umgebende Strahlungsfeld beeinflusst (genauer durch den Wert der mittleren Intensität, der aus der spezifischen Intensität an jeder Stelle als Mittelwert über die Richtungen gewonnen wird; die spezifische Intensität in jede Richtung ist wiederum ein Integral über die Quellfunktion entlang des Sehstrahles in jede dieser Richtungen).

Wollen wir das Strahlungstransportproblem geschlossen lösen, dann müssen wir die Quellfunktion auf andere Weise abschätzen (z.B. Annahme lokalen thermischen Gleichgewichtes, d.h. Quellfunktion gegeben durch die lokale Temperatur), oder wir müssen das komplett, oben skizzierte, komplexe Integralgleichungssystem lösen, was numerisch sehr aufwendig ist und meist nur in vereinfachenden Annahmen und Näherungen geht. Einige werden im folgenden behandeln.

Analog zur Integration der Strahlungstransportgleichung über die Winkel, um die entsprechenden Gleichungen für den Strahlungsfluß und den Strahlungsdruck zu erhalten, können wir aus der obigen formalen Lösung eine Gleichung für die mittlere Intensität J_ν erhalten:

$$\begin{aligned} J_\nu(\tau_\nu) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 I_\nu(\tau_\nu, \mu) d\mu + \int_0^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) d\mu \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t) \exp(-(t-\tau_\nu)/(-\mu)) dt \frac{d\mu}{-\mu} + \int_0^\infty \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t) \exp(-(t-\tau_\nu)/\mu) dt \frac{d\mu}{\mu} \right]. \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty S_\nu(t) \left[\int_1^\infty \exp(-w(|t-\tau_\nu|)) \frac{dw}{w} \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty S_\nu(t) E_1(|t-\tau_\nu|) dt \end{aligned}$$

Dabei haben wir substituiert $w = \pm \frac{1}{\mu} |t - \tau_\nu|$, $dw = -\frac{1}{\mu^2} d\mu$ und die Abkürzung für die Exponentialintegralfunktion n -ter Ordnung $E_n(x) = \int_1^\infty t^{-n} e^{-xt} dt$ verwendet.

Hier sehen wir explizit, daß die mittlere Intensität bei einer bestimmten optischen Tiefe τ_ν (die ja über die Einstein-B-Koeffizienten die Anregung der Atome und Moleküle in dieser Tiefe bestimmt), durch eine Integral über die Quellfunktion an allen anderen Stellen bestimmt ist. Diesen Integraloperator bezeichnet man oft auch als Λ -Operator und kürzt ab:

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_0^\infty S_\nu(t) E_1(|t-\tau_\nu|) dt = \Lambda_{\tau_\nu}[S_\nu(t)].$$

Näherung: Graue Atmosphäre

Neben den Strahlungstransportgleichungen haben wir für eine Sternatmosphäre noch eine weitere wichtige Einschränkung: da in der Atmosphäre selbst keine Energieerzeugung stattfindet, sondern lediglich die im Inneren des Sterns thermonuklear erzeugte Energie nach außen transportiert wird, und da außerdem dieser Energietransport ausschließlich durch Strahlung passiert (Annahme hier: keine Konvektion!). muß der gesamte Strahlungsfluß konstant sein. Für den gesamten Energiefluß in Strahlung $H(z) = \int H_\nu(z) d\nu$ erhalten wir (s.o.)

$$-\frac{dH}{dz} = \frac{1}{2} \int d\nu [\chi_\nu(z) J_\nu(z) - \eta_\nu(z)] = 0,$$

d.h.

$$\int \chi_\nu(z) J_\nu(z) d\nu = \int \eta_\nu(z) d\nu.$$

Dies gilt integral über alle Frequenzen, nicht aber für jede Frequenz einzeln. Es stellt also nur eine zusätzliche Bedingung an die Form des Strahlungsfeldes.

Als einfache Annahme kann man zunächst die Frequenzabhängigkeit des Absorptions- und Emissionskoeffizienten ignorieren, d.h. man betrachtet eine "graue" Atmosphäre. Dann ergibt die obige Betrachtung

$$\frac{dH}{d\tau} = 0 = J(\tau) - S(\tau),$$

d.h. $J(\tau) = S(\tau)$, und $H = \text{const.}$ als charakteristische Größe der grauen Atmosphäre.
Entsprechend wird die zweite Momentengleichung zu

$$\frac{dK}{d\tau} = H = \text{const.}, \text{ also } K = H \cdot \tau + c$$

mit einer noch zu bestimmenden Integrationskonstanten c .

Mit dem Λ -Operator und der Identität $J(\tau) = S(\tau)$ ergibt sich die Integralgleichung für $J(\tau)$:

$$J(\tau) = \Lambda_\tau(S(t)) = \Lambda_\tau(J(t)) = \frac{1}{2} \int_0^\infty J(t) E_1(|t-\tau|) dt,$$

die sogenannte **Milne's** Gleichung.

Zur Lösung dieser Gleichung betrachten wir zunächst die Verhältnisse in großer optischer Tiefe. Hier wird das Strahlungsfeld näherungsweise thermisch sein, d.h. die spezifische Intensität ist näherungsweise isotrop und homogen, nämlich durch die Planck-Fkt. gegeben. Wie oben bereits abgeleitet ist dann $K = \frac{1}{3} J$. Damit also für

$$\tau \gg 1: J(\tau) \approx 3K = 3H\tau + 3c.$$

Eddington-Näherung

In der *Eddington*-Näherung nehmen wir an, daß dieser Ausdruck nicht nur für große τ gilt, sondern für alle optischen Tiefen, und bestimmen die Integrationskonstante c so, daß sich der richtige Wert für den Strahlungsfluß der Atmosphäre, nämlich H , ergibt:

$$\text{Eddington-Näherung: } J(\tau) = S(\tau) = 3H\tau + 3c.$$

Für die austretende spezifische Intensität ergibt sich dann

$$\mu > 0: I(0, \mu) = \int_0^\infty S(t) e^{-t/\mu} \frac{dt}{\mu} = 3H \int_0^\infty (t+c') e^{-t/\mu} \frac{dt}{\mu} = 3H \left[\mu \int_0^\infty \frac{t}{\mu} e^{t/\mu} \frac{dt}{\mu} + c' \int_0^\infty e^{-t/\mu} \frac{dt}{\mu} \right] = 3H \left[\mu + c' \right],$$

mit einer neuen Konstante $c' = c/H$. Der austretende Fluß berechnet sich als das 1. Moment; dabei trägt an der Oberfläche nur der Anteil mit $\mu > 0$ bei, für den Halbraum mit $\mu < 0$ ist die spezifische Intensität =0:

$$H = \frac{1}{2} \int_0^1 I(0, \mu) \mu d\mu = \frac{3}{2} H \int_0^1 (\mu^2 + c' \mu) d\mu = \frac{3}{2} H \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} c' \right) = \frac{H}{2} + \frac{3}{4} c',$$

so daß c' bestimmt ist zu $c' = \frac{2}{3} H$. Damit ist in Eddington-Näherung $J(\tau) = 3H\left(\tau + \frac{2}{3}\right)$, und

$$I(\tau, \mu) = \int_\tau^\infty S(t) e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} = 3H \int_\tau^\infty \left(\tau + \frac{2}{3} \right) e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} = 3H \int_0^\infty \left(\mu z + \tau + \frac{2}{3} \right) e^{-z} dz = 3H \left(\mu + \tau + \frac{2}{3} \right),$$

wobei wir die Substitution $z = \frac{t-\tau}{\mu}$, $dz = \frac{dt}{\mu}$ benutzt haben.

Damit wir haben wir im Rahmen der Eddington-Näherung eine vollständige Beschreibung der Sternatmosphäre erhalten. Die Atmosphäre wird allein durch den austretenden Strahlungsfluß, hier als Eddington-Fluß H beschrieben, charakterisiert. Insbesondere haben wir eine geschlossene Form

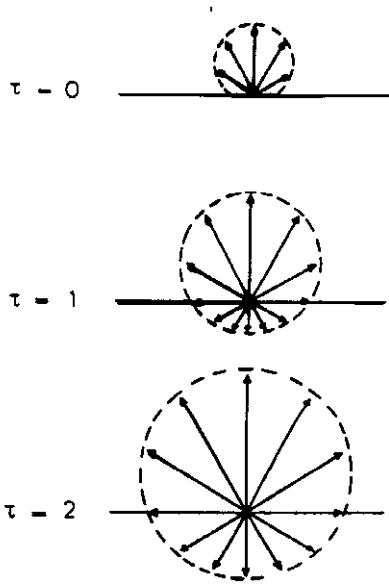


Abb. 61: Richtungsverteilung der spezifischen Intensität einer grauen Atmosphäre in verschiedenen optischen Tiefen

für die Winkelabhängigkeit der spezifischen Intensität in allen Tiefen erhalten. In großen Tiefen ist das Strahlungsfeld näherungsweise isotrop (s.o.):

$$\tau \gg 1: I(\tau, \mu) \approx 3H\tau$$

und die isotrope spezifische Intensität nimmt linear mit der optischen Tiefe zu. In der Nähe der Oberfläche wird es zunehmend anisotroper. An der Oberfläche selbst erhalten wir für die Variation mit $\mu = \cos \vartheta$, und damit auch für die **Mitte-Rand-Variation** der Sonnenscheibe in dieser Näherung

$$I(0, \mu) = 3H\left(\mu + \frac{2}{3}\right), \text{ d.h.}$$

$$\frac{I(0, \vartheta)}{I(0, 0)} = \frac{I(0, \mu = \cos \vartheta)}{I(0, \mu = 1)} =$$

$$\frac{\cos \vartheta + 2/3}{5/3} = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta\right)$$

Die nebenstehende Tabelle zeigt, daß dies eine recht gute Näherung für die tatsächlich beobachtet Variation ist.

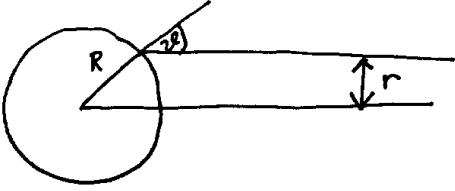
Die genaue Lösung der Milne's Gleichung für die graue Atmosphäre ergibt sich durch Reihenentwicklung der exp-Funktion in der Exponential-Integralfkt. im Λ -Operator. Wir wollen sie hier nur abgeben. Sie wird üblicherweise mit der **Hopf-Funktion** $q(\tau)$ geschrieben als $J(\tau) = 3H(\tau + q(\tau))$. In der Eddington-Näherung ist also $q(\tau) = 2/3$. Tatsächlich ist in sehr guter Näherung $q(\tau) = 0.7104 - 0.1331 \cdot \exp(-3.4488 \tau)$.

Beschreiben wir den die Atmosphäre charakterisierenden Strahlungsfluß durch eine effektive Temperatur, so ist gemäß den Beziehungen für das thermische Gleichgewicht $H = \frac{\sigma}{4\pi} T_{\text{eff}}^4$,

$J = \frac{\sigma}{\pi} T^4$, und damit ist die Temperaturschichtung der Atmosphäre gegeben durch

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 (\tau + q(\tau)) \approx \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3}\right),$$

sie ist also ebenfalls durch den Strahlungsfluß bzw. die effektive Temperatur als Funktion der optischen Tiefe vollständig bestimmt.



$\sin \vartheta = \frac{r}{R_\odot}$	$\cos \vartheta$	$\left[\frac{I(\vartheta)}{I(0)} \right]_{\text{Beob.}}$	$\frac{2}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right)$
0.00	1.000	1.00	1.00
.20	0.980	0.99	0.99
.40	0.916	.96	.95
.55	.835	.92	.90
.65	.760	.89	.86
.75	.661	.83	.80
.875	.484	.74	.69
.95	.312	.63	.59
.975	.222	.55	.53
1.00	.000	--	.40

Die Temperatur an der Oberfläche ist im Rahmen der Eddington-Näherung gegeben durch

$$\tau=0: T_0 = T(0) = T_{\text{eff}} / \sqrt[4]{2} = 0.84 T_{\text{eff}}.$$

Aus dem Strahlungstransport haben wir jetzt also die Temperaturstruktur der Atmosphäre in Abhängigkeit von der optischen Tiefe beschrieben. Als Parameter für die Atmosphäre tritt hier nur der gesamte Strahlungsstrom H bzw. die effektive Temperatur

$$T_{\text{eff}}, \text{ gegeben durch } H = \frac{\sigma}{4\pi} T_{\text{eff}}^4, \text{ auf.}$$

Um die Struktur der Atmosphäre vollständig zu bestimmen, müssen wir zusätzlich die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts

$$\frac{dP}{dt} = g \rho \text{ hinzunehmen. Der}$$

Druckverlauf ist durch die Schwerkraftbeschleunigung (gegeben durch die Masse und den Radius des Sternes, wie sie aus den Gleichungen des Sternaufbaus folgen: $g = G \frac{M}{r^2}$) gegeben. Die

Schwerkraftbeschleunigung ist die zweite die Sternatmosphäre charakterisierende Größe. Daneben tritt in der hydrostatischen Gleichung die Massendichte der stellaren Materie in der Atmosphäre auf. Sie hängt über die Zustandsgleichung von Druck und Temperatur, ihrerseits gegeben durch die Lösung des Strahlungstransport-Problems, ab. Statt der geometrischen Tiefe t wechseln wir auch in der hydrostatischen Gleichung zur optischen Tiefe: $dt = d\tau / \chi$. Statt des Volumen-

Absorptionskoeffizienten χ verwenden wir jetzt aber den Massen-Absorptionskoeffizienten k ,

definiert durch $\chi = k \rho$. Damit ist $\frac{dP}{dt} = \chi \frac{dP}{d\tau} = k \rho \frac{dP}{d\tau} = g \rho$, also $\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{k}$ (genau genommen ist

der hier verwendete Massenabsorptionskoeffizient als Mittelwert über alle Frequenzen nur richtig definiert, wenn wir die Mittelungsvorschrift angegeben; ohne hier im einzelnen die Gründe

anzugeben, definiert man mit $\frac{1}{k} \int_0^\infty \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu = \int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{dB_\nu(T)}{dT} d\nu$ die Rosseland'sche Mittelung.

Sie bewirkt, daß der Strahlungsstrom bei LTE den richtigen frequenz-integralen Wert ergibt). Bei sehr heißen Sternen müssen wir die Gleichung des Druckgleichgewichts noch um den Strahlungsdruck ergänzen; dazu ersetzen wir die Schwerkraftbeschleunigung durch die *effektive*

Schwerkraftbeschleunigung $g_{\text{eff}} = g - g_r$, mit $g_r = \frac{k \sigma}{c} T_{\text{eff}}^4$.

Der Absorptionskoeffizient der Materie enthält Beiträge der frei-frei-Strahlung, der frei-gebunden Übergänge und auch Linienstrahlungsanteile, jeweils für die verschiedenen atomaren Spezies in der Sternatmosphäre. Im Fall lokalen thermischen Gleichgewichts (LTE), den wir hier betrachten, und bei einheitlicher chemischer Zusammensetzung (d.h. im astrophysikalischen Sinne Häufigkeitsverteilung der Elemente) sind alle diese Prozesse und damit auch der Absorptionskoeffizient aber allein durch die Temperatur des Materials, den Gasdruck und den Partialdruck der Elektronen (bzw. die gesamte Teilchendichte und die Elektronendichte) gegeben.

Damit ist der Massenabsorptionskoeffizient eine Funktion allein dieser Größen, in die allerdings eine Menge an physikalischer Beschreibung eingeht: $k=k(T, P, P_e)$. Des weiteren sind der Gasdruck und der Elektronendruck (bzw. die Gesamtteilchenzahldichte und die Elektronendichte) verknüpft durch die Saha-Gleichung, die den Ionisationsgrad der einzelnen Elemente beschreibt.

Genauer ist: $\frac{P}{P_e} = \frac{N k T}{N_e k T} = \frac{N}{N_e} = \frac{N_e + \sum N_{A,j}}{N_e} = f(T, N_e)$, wobei $N_{A,j}$ die Anzahldichte von Atomen mit Massenzahl A und Ionisationsgrad j bezeichnet. Da Wasserstoff das häufigste Element ist, ist bei hohen Temperaturen ungefähr $N_e = N_{H,1}$; $N_{H,0} = 0$, und damit $\frac{P}{P_e} \approx 2$. Die Abbildung (aus Scheffler & Elsässer) zeigt die Funktion für die chemische Zusammensetzung normaler Sterne.

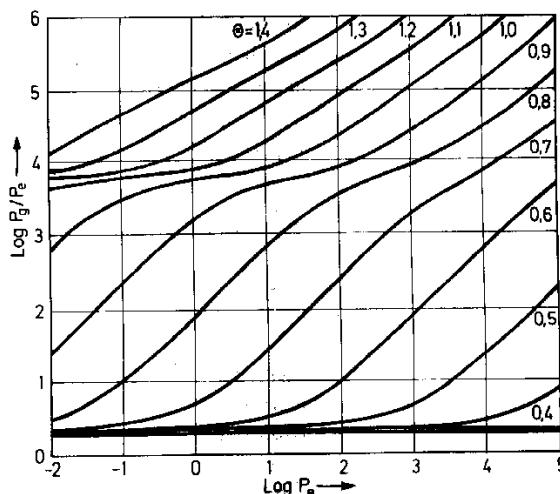


Abb. V.8 Zusammenhang zwischen $\log(P_g/P_e)$ und $\log P_e$ für verschiedene Werte des Parameters $\Theta = 5040/T$. (Nach A. Rosa).

Damit ist auch der Massenabsorptionskoeffizient nur eine Funktion von T und P_e , $k=k(T, P_e)$. Da die Temperatur selber über die optische Tiefe gegeben ist, $T(\tau)$, kann man mit dieser Verknüpfung die hydrostatische Gleichung lösen und erhält den Gasdruck und den Elektronendruck als Funktion der optischen Tiefe: $P(\tau)$, $P_e(\tau)$.

Damit sind Temperatur, Druck und Ionisationsgrad als Funktion der optischen Tiefe bekannt. Mit der hydrostatischen Gleichung und der Zustandsgleichung des

Gases $P = \frac{\rho}{\mu} RT$, wobei μ die mittlere

Teilchenmasse ist, d.h. sich aus dem Ionisationsgrad berechnen lässt, ergibt sich als Gleichung des Druckes mit der geometrischen Tiefe $\frac{dP}{P} = d \ln P = \frac{dt}{H}$, mit der Äquivalenthöhe $H = \frac{RT}{\mu g}$. Sie lässt sich leicht aufintegrieren, um den Höhenverlauf des Druckes zu berechnen. Die beiliegende Tabelle zeigt das Ergebnis für die Berechnung einer grauen Sonnenatmosphäre.

Die graue Atmosphäre gibt eine gute erste Näherung an. Ist über dieses Modell die Druck- und Temperaturverteilung bekannt, so kann man z.B. die Frequenzabhängigkeit der Opazität einbeziehen, indem man zunächst einfach annimmt, daß der genaue Frequenzverlauf die tatsächliche Temperatur- und Dichtestruktur nicht beeinflußt. Man rechnet also einfach die frequenzabhängige Opazität als durch die Temperatur- und Dichteverteilung der grauen Atmosphäre gegeben aus; damit ist die Quellfunktion überall bekannt und eine einfache Integration entsprechend der formalen Lösung der Strahlungstransportgleichung ergibt ein Modell für die frequenzabhängige Intensitätsverteilung des Sternes. Im nächsten Schritt kann man auch die Änderung des Strahlungsstromes durch diese bessere Intensitätsverteilung berücksichtigen. Hierbei wird sich ergeben, daß in Bereichen starker Linienabsorption (wegen der nach außen abfallenden Temperatur treten die Linien in Absorption auf) die Emission verringert wird. Damit der gesamte Strahlungsfluß gleich bleibt (er ist ja durch die aus dem Inneren dringende Energie bestimmt), muß sich die Strahlung im Bereich zwischen den Linien erhöhen. Der "Energiestau" durch die Absorptionslinien führt also zu einer Anhebung der Temperatur gegenüber dem grauen Modell, ähnlich wie die Bettdecke durch Verhinderung des Wärmetransports eine Aufwärmung des Bettes

Tabelle V.2: Graue Modellatmosphäre für die Sonne, berechnet für $T_{\text{eff}} = 5740 \text{ K}$, $g = 2.74 \cdot 10^4 \text{ cm sec}^{-1}$ und die Elementhäufigkeiten der Population I. Der Nullpunkt der geometrischen Tiefe t ist willkürlich bei $\bar{r} = 1.0$ angenommen worden. Einheit der Drucke: dyn cm^{-2} .

\bar{r}	$T[\text{K}]$	$\log P_g$	$\log P_c$	$\rho[\text{g cm}^{-3}]$	$t [\text{km}]$
0.01	4650	3.74	-0.15	1.4×10^{-8}	-412
0.02	4700	4.01	+0.09	2.7	-325
0.06	4790	4.30	0.36	5.0	-230
0.10	4890	4.43	0.50	6.6	-187
0.20	5090	4.60	0.71	9.4	-129
0.32	5290	4.71	0.87	11.7	-89
0.40	5400	4.77	0.96	13.1	-67
0.60	5660	4.86	1.15	15.4	-32
0.80	5870	4.91	1.32	16.6	-12
1.00	6070	4.94	1.48	17.3	0

interstellarer Materie). Solche *non-LTE* Probleme sind überhaupt erst mit genügender Rechenleistung numerisch lösbar. Heute gibt es sehr gute, aufwendige Sternatmosphären-Rechnungen, die detaillierten Vergleichen mit Beobachtungen standhalten und detaillierte Rückschlüsse auf die Feinheiten der atmosphärischen Struktur zulassen.

Abschließend wollen wir noch einmal darauf hinweisen, daß die Eigenschaften der Atmosphäre, und damit die charakteristischen Merkmale des stellaren Spektrum durch zwei Parameter gegeben sind (bei festgelegter chemischer Zusammensetzung): den gesamten Energiefluß und die Schwerbeschleunigung an der Sternoberfläche. Damit erklärt sich der physikalische Hintergrund der zweidimensionalen Spektralklassifikation: die Harvard-Spektralklassen (O,B,A,F,G,...) bestimmen im wesentlich über die Stärke bestimmter Linien die Temperatur der Atmosphäre, d.h. den Energiefluß. Die verschiedenen Leuchtkraftklassen (Überriesen I, helle Riesen II, Riesen III, Unterriesen III, Zwerge (Hauptreihe) V, ...) etc. ergeben sich bei gleicher Masse der Sterne durch die verschiedenen Radien, und damit verschiedene Schwerbeschleunigung $g = G \frac{M}{r^2}$.

bewirkt. Deshalb spricht man im Englischen von "line blanketing".

Tatsächlich kann mit der heute zur Verfügung stehenden Rechnerkapazität dieses komplexe Problem direkt numerisch lösen. Als Ausgangspunkt für die aufwendige numerische Iteration sind aber nach wie vor graue Modell-Atmosphären nützlich. Ebenso zum Verständnis der prinzipiellen Vorgänge. Bei genauer Betrachtung wird für eine Reihe von Spezies und Linienübergängen die Besetzung der Niveaus vom thermischen Gleichgewicht abweichen. Die Besetzung ist dann im Detail durch die mikroskopischen Ratengleichungen geben (s.u. für den Fall von

13 Sternaufbau und Entwicklung

Wir wollen jetzt untersuchen, warum die Sterne so sind, wie sie sind. D.h. insbesondere: warum befinden sich die meisten Sterne auf der Hauptreihe im H-R-Diagramm. Was ist mit den Sternen los, die den anderen Leuchtkraftklassen zu geordnet sind?

Wir werden zeigen, dass sich aus 4 Grundgleichungen (Hydrostatik bzw. Impulserhaltung, Kontinuitätsgleichung bzw. Massenerhaltung, Energieerhaltung, und Energietransport) zusammen mit den Eigenschaften des stellaren Materials (Zustandsgleichung, d.h. Druck, Opazität, und Energieerzeugung jeweils als Fkt. von Dichte, Temperatur und chemischer Zusammensetzung) der innere Aufbau der Sterne ohne weitere freie Parameter ergibt. Die Hauptreihe im H-R-Diagramm entspricht dem langen Zeitraum, den die Sterne in ihrer Entwicklung quasi stabil mit Wasserstoff-Brennen zubringen. Da sich die chemische Zusammensetzung der verschiedenen Sterne nur im Detail unterscheidet (Metallizität je nach Anreicherung des sternbildenden Materials), folgen alle Sterne derselben Leuchtkraft/Masse-Beziehung auf dieser Hauptreihe. Die Streuung auf der Hauptreihe entsteht durch geringfügig verschiedene chemische Zusammensetzung (konsistent mit Beobachtungen, die für einzelne Sternhaufen, entstanden aus demselben Material, eine viele engere Hauptreihe zeigen, etc.).

Die anderen Leuchtkraftklassen entsprechen anderen Stadien in der Sternentwicklung: die aus denselben Grundgleichungen berechneten Entwicklungswege im H-R-Diagramm ergeben eine gute Korrelation mit den beobachteten Leuchtkraftklassen und Entwicklungsstadien der Sterne.

13.1 Grundgleichungen des Sternaufbaus

Wir betrachten im folgenden nur kugelsymmetrische Sterne (d.h. insbesondere keine Rotation, und keine Magnetfelder). Damit bleiben alle wichtigen Größen nur noch als Funktion des Sternradius zu bestimmen. Außerdem nehmen wir an, dass der Stern zu jedem Zeitpunkt in einem quasi stationären Zustand ist, in dem sich die charakteristischen Größen so langsam ändern, dass sich lokal immer ein thermodynamischer Gleichgewichtszustand einstellt (LTE). Damit reichen bei ebenfalls vorgegebener Zusammensetzung des Materials (chemische Zusammensetzung:

$X_i = A_i n_i / \sum_i (A_i n_i)$) zwei Größen, z.B. Dichte und Temperatur aus, um den Zustand der Materie.

d.h. insbesondere die Dichte (über die Zustandsgleichung), und andere Eigenschaften, wie die Opazität und die Energieerzeugungsrate festzulegen. (Alternativ könnte man auch die Druck und Temperatur als "freie" Parameter nehmen, die dann die Dichte über die Zustandsgleichung festlegen.

Kontinuitätsgleichung

Die lokale Dichte legt im radialen Verlauf die Masse des Sternes fest. Wir bezeichnen mit M_r die innerhalb des Radius r eingeschlossene Masse des Sternes:

$$M_r = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr';$$

oder in differentieller Schreibweise (Massenzuwachs in der Schale mit Radius r):

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r).$$

mit der Randbedingung $M_r(r=0)=0$ und $M_r(r=R)=M_0$, wobei R der Radius des Sternes und M_0 dessen Masse ist.

Hydrostatisches Gleichgewicht (Impulserhaltung)

Betrachten wir einen Flächenausschnitt ΔS aus einer Kugelschale der Dicke dr beim Radius r .

Der Druck von innen bei r (Gesamtdruck = Gasdruck und Strahlungsdruck) drückt die Kugelschale nach außen; der Druck der darüber liegenden Schicht bei $r+dr$ drückt nach innen.

Außerdem wirkt die Schwerkraft des innerhalb von r liegenden Teils des Sterns nach innen:

$$dF_G = -g(r)\rho(r)\Delta S dr, \text{ mit } g(r) = G \frac{M_r}{r^2}.$$

Das Kräftegleichgewicht

$$0 = \Delta S (P(r) - P(r+dr)) - g(r)\rho(r)\Delta S dr$$

verlangt, dass der Druckgradient (nach außen abnehmender Druck, d.h. nach außen gerichtete Nettokraft) gerade die Schwere-Last der Schicht trägt:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r}{r^2} \rho(r).$$

Diese Gleichung legt zusammen mit der Randbedingung $P(r)|_{r=R}=0$ am Rand des Sterns bei bekannter DichteVerteilung den Druckverlauf im Stern fest.

dynamische Zeitskala

Man kann sehr einfach abschätzen, dass die Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichts sehr gut erfüllt sein muss: nimmt man an, dass ein Bruchteil f der Schwerkraft bei einem gegebenen Radius r nicht durch Druckkräfte ausgeglichen ist, so ergibt sich eine Beschleunigung $\ddot{r} = f g(r)$. Mit der Näherung $g(r) \approx \bar{g} = \text{const.} = G M_0 / R^2$ mit $M_0 = 4\pi/3 R^3 \bar{\rho}$ ergibt sich über ein Zeitintervall τ eine Verschiebung (Fallstrecke) von $\Delta r = f \bar{g} \tau^2 / 2$. Damit die Verschiebung demselben Bruchteil f des Radius entspricht, $\Delta r = f R$, muss das Zeitintervall sein

$$\tau = \tau_{dyn} \approx \sqrt{2R/\bar{g}} = \sqrt{2R^3/GM_0} = \sqrt{\frac{6}{4\pi G \bar{\rho}}} \approx \frac{1}{\sqrt{G \bar{\rho}}}.$$

Die ist die sogenannte dynamische oder frei-Fall-Zeitskala

Für die Sonne mit $\bar{\rho} = 1.4 \text{ g cm}^{-3}$ ergibt sich $\tau_{dyn} = 3 \times 10^3 \text{ sec} \approx 50 \text{ min}$, so dass die Sonne innerhalb von ca. 1 Std. auf Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewicht reagiert. Für Schwingungen um die Gleichgewichtslage sollte obige Gleichung ungefähr die Schwingungsperiode angeben.

Energieerhaltung

Der der Leuchtkraft L_r entsprechende Energieverlust durch Abstrahlung über die Oberfläche einer Kugel mit Radius r muss durch Energieerzeugung aus dem Inneren der Kugel kommen. Damit erhöht sich die Leuchtkraft über eine Kugelschale von r bis $r+dr$ um die innerhalb der Kugelschale erzeugte Energie:

$$dL_r = \epsilon_N \rho 4\pi r^2 dr, \text{ d.h. } \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dL_r}{dr} = \epsilon_N \rho.$$

Dabei ist ϵ_N der Energiegewinn pro Gramm und Sekunde, $\epsilon_N \rho$ also die Energieerzeugungsrate pro Volumenelement. Weiter oben hatten wir in Zusammenhang mit der Diskussion der Kernfusionsprozesse ϵ_N als Funktion der Dichte und Temperatur (und chemischer Zusammensetzung) angegeben.

Mit der Randbedingung $L_r|_{r=0}=0$ erlaubt diese Differentialgleichung die Berechnung der radialen Zunahme der Leuchtkraft bei bekannter Dichte und Temperatur (und chemischer Zusammensetzung); letztere legen die Energieerzeugungsrate fest.

Beachte: hierbei haben wir bereits angenommen, dass das Strahlungsfeld den lokalen Bedingungen des thermischen Gleichgewichts genügt. Aus der Strahlungstransportgleichung

$$\vec{n} \cdot \nabla I_\nu = -\chi_\nu I_\nu + \epsilon_\nu \quad \text{in sphärischen Koordinaten, also mit } \vec{n} \cdot \nabla I_\nu = \frac{\partial I}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

ergibt sich nach Integration über alle Wellenlängen (gesamte Strahlung) und Integration über $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ über den gesamten Raumwinkel (mit partieller Integration im zweiten Term)

$$\text{für den Strahlungsfluß } \Phi = \int d\nu F_\nu \quad (\text{und mit der mittleren Opazität } \bar{\chi} = \left. \frac{\int d\nu \chi_\nu J_\nu}{\int d\nu J_\nu} \right) \\ \frac{d\Phi}{dr} + \frac{2}{r} \Phi = -\bar{\chi} 4\pi J + 4\pi \eta + \epsilon_N \rho .$$

Im thermischen Gleichgewicht ist wegen $\eta = \int d\nu \chi_\nu S_\nu = \bar{\chi} B(T) = \bar{\chi} \sigma / \pi T^4$ und

$J_{TE} = B(T) = \sigma / \pi T^4$ der erste Summand (Volumenabsorption) gleich dem zweiten (Volumenemission), so dass allein der Erzeugungsterm durch Kernfusion überbleibt. Die linke Seite erweist sich mit $L_r = 4\pi r^2 \Phi$, d.h. $dL_r = 4\pi (2r\Phi + r^2 d\Phi) dr$ als $\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dL_r}{dr} = \frac{d\Phi}{dr} + \frac{2}{r} \Phi$.

Energietransport

Die Energie kann entweder durch Strahlung oder durch Konvektion transportiert werden (Wärmeleitung hatten wir schon mit einfacher Abschätzung als Größenordnungen zu gering ausgeschlossen).

Energietransport durch Strahlung

Analog zu der obigen Herleitung können wir durch Multiplikation der Strahlungstransportgleichung mit $\cos \theta$ und anschließende Integration über Raumwinkel und Frequenzen (wiederum mit partieller Integration im zweiten Glied) eine Gleichung für die radiale Änderung des Strahlungsdruckes (genauer: die in sphärischer Symmetrie als einzige verbleibende radiale Komponente des Drucktensors) herleiten:

$$\frac{dP_s}{dr} + \frac{1}{r} \left(3P_s - \frac{4\pi}{c} J \right) = -\frac{\bar{\chi}}{c} \Phi .$$

Im thermischen Gleichgewicht ist der Klammer-Term auf der linken Seite gleich 0 (

$$P_{TE} = \frac{4\pi}{3c} B(T), \quad J_{TE} = \frac{4\pi}{3} B(T) . \quad \text{Mit dem Ausdruck für den Druck im TE,}$$

$$P_s = \frac{4\pi}{3c} \frac{ac}{4\pi} T^4 = \frac{1}{3} a T^4 \quad \text{ergibt sich dann}$$

$$\frac{dP_s}{dr} = -\frac{\bar{\chi}}{c} \Phi, \text{ bzw. } \Phi = -K_s \frac{dT}{dr} \text{ mit } K_s = \frac{4 c a T^3}{3 \bar{\chi}}.$$

K_s ist analog dem Wärmeleitvermögen definiert, und wird als **Strahlungsleitvermögen** bezeichnet. Wir hatten oben gesehen, dass Wärmeleitung (mit dem Leitkoeffizienten K_L) normalerweise wegen der extrem kurzen freien Weglängen keine Rolle im Innern der Sterne spielt. Trotzdem sollten wir anmerken, dass wir sie hier ohne weiteren Aufwand mitberücksichtigen können, wenn wir als allgemeinen Wärmeleitkoeffizienten schreiben: $K = K_s + K_L$.

Drücken wir noch den Fluss durch die Leuchtkraft aus, so ergibt sich $\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{K} \frac{L_r}{4 \pi r^2}$. Der Temperaturverlauf ist also durch die Leuchtkraft als Funktion des Radius bestimmt.

Energietransport durch Konvektion

Man spricht von Konvektion, wenn begrenzte Bereiche in einem Gas oder einer Flüssigkeit wärmer, d.h. spezifisch leichter, sind als ihre Umgebung, so dass sie einen entsprechenden Auftrieb erfahren und entgegen der Schwerkraft aufsteigen (Schlieren über dem heißen Ofen, Granulation auf der Sonnenoberfläche, etc.).

Unter welchen Bedingungen setzt Konvektion ein? Das aufsteigende Materieelement muss nach Zurücklegen eines kleinen Weges immer noch wärmer sein, als seine Umgebung, damit es weiter steigt; umgekehrt muss eine kühleres Element beim Absteigen kühler als seine Umgebung bleiben. Da der Druck entgegen der Schwerkraft abnimmt, expandiert ein Materieelement beim Aufsteigen. Ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung (Wärmeleitung, Strahlung als Diffusionsprozesse sind zu langsam) geschieht diese Expansion adiabatisch. Der Temperaturgradient der Umgebung ist im Sterninnern ohne Konvektion durch das Strahlungsgleichgewicht gegeben, wie oben diskutiert. Damit ist die Bedingung für das Auftreten von Konvektion:

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} < \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}}$$

Für ein ideales Gas mit Adiabaten-Koeffizient $\gamma = c_p / c_v$ ($c_{p,v}$: spezifische Wärmen bei konstanten Druck respektive Volumen) ist mit der Adiabatengleichung $\rho = A p^{1/\gamma}$ und der Idealgas-Gleichung $p = \frac{k}{\mu} \rho T$ insgesamt $T = \frac{\mu}{k} p / \rho = \frac{\mu}{k A} p^{1-1/\gamma}$, also $\frac{dT}{dp} \Big|_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{p}$, und damit

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} = \left| \frac{dT}{dp} \right|_{\text{ad}} \left| \frac{dp}{dr} \right| = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{p} \left| \frac{dp}{dr} \right|.$$

Entsprechend der Konvektionsbedingung ist also der Temperaturgradient als der kleinere der beiden (Strahlungsgradient oder adiabatischer Gradient) zu wählen; ist der adiabatische Gradient der kleinere, so schaltet der Stern auf konvektiven Energietransport um.

Zusammenfassung: Grundgleichungen des Sternaufbaus

Es ist physikalisch sinnvoll und mathematisch zweckmäßig, als unabhängige Variable die im Radius r eingeschlossene Masse M_r zu betrachten und damit die vier Grundgleichungen als Differentialgleichungen für die vier Funktionen $P(M_r), r(M_r), L(M_r)$ und $T(M_r)$ zu schreiben:

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{G}{4\pi} \frac{M_r}{r^4} \text{ (Impulserhaltung)}$$

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \text{ (Massenerhaltung)}$$

$$\frac{dL}{dM_r} = \epsilon_N \text{ (Energieerhaltung)}$$

$$\frac{dT}{dM_r} = \begin{cases} -\frac{3\bar{\chi} L}{64\pi^2 acr^4 T^3} & \text{(Energietransport durch Strahlung)} \\ \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{p} \frac{dp}{dM_r} & \text{(Energietransport durch Konvektion)} \end{cases}$$

Zustandsgleichung, Opazität und Energieerzeugung

In den obigen Gleichungen kann die Dichte mit Hilfe der Zustandsgleichung durch die beiden anderen Zustandsgrößen p und T (und in Abhängigkeit der chemischen Zusammensetzung) eliminiert werden: $\rho(p, T; X_i)$.

Ebenso ist die Energieerzeugungsrate und die mittlere Opazität eine Funktion der Zustandsgrößen:

$$\epsilon_N = \epsilon_N(\rho, T; X_i)$$

$$\bar{\chi} = \bar{\chi}(\rho, T; X_i),$$

und analoge Abhängigkeiten bestehen für die andern "Materialfunktionen", z.B. $\gamma = c_p/c_v$. Damit sind die Grundgleichungen ein System von 4 partiellen Differentialgleichungen für die 4 Funktionen $p(M_r), r(M_r), L_r(M_r)$ und $T(M_r)$. Deren Lösung ist numerisch etwas aufwendiger, da zwei der Randbedingungen im Inneren des Sterns

$$M_r = 0 : r = 0 \quad L_r = 0,$$

und zwei am Außenrand

$$M_r = M : p = 0, T = 0.$$

gegeben sind. Die tatsächliche Lösung muss also in einer Art *trial and error*-Verfahren gewonnen werden, indem man mit "vernünftigen Annahmen" für die beiden fehlenden Randbedingungen z.B. von innen das Dgl.-System integriert. Das Ergebnis außen wird nicht mit den vorgegebenen Randbedingungen dort übereinstimmen; durch Variation der geratenen Randbedingungen innen muss dann die Lösung verändert werden, bis sie auch außen passt.

Tatsächlich sind die äußeren Randbedingungen für eine genauere Rechnung durch die entsprechenden Randbedingungen am unteren Rand einer Modellphotosphäre zu ersetzen, die ja (gemäß dem vorigen Kapitel) durch die Leuchtkraft und die Schwerbeschleunigung, d.h. über $g = -GM/R^2$ durch Masse und Radius festgelegt ist.

Vogt-Russel Theorem/H-R-Diagramm

Der obige Satz von 4 Differentialgleichungen mit den Randbedingungen und den Materialfunktionen wird im allgemeinen eine eindeutige Lösung haben. Dies ist jedoch nicht als mathematisch exaktes Theorem beweisbar, sondern ist ein "Erfahrungssatz". Er wurde erstmals

von Vogt und Russel formuliert (1927): *Zu einer vorgegebenen Gesamtmasse M und einer bestimmten chemischen Zusammensetzung (X_1, \dots) gibt es nur eine Gleichgewichtskonfiguration.* (Tatsächlich zeigt sich, dass es in einigen Extremfällen eine zweite Lösungen gibt; die beiden Lösungen liegen aber im Parameterraum weit auseinander, so dass ein gegebener Stern nicht aus einer in die andere Konfiguration übergehen kann).

Damit ist die Hauptreihe im Hertzsprung-Russel-Diagramm als Ort der Sterne in dieser Gleichgewichtskonfiguration erklärt. Da alle Sterne eine annähernd gleiche chemische Zusammensetzung haben, liegen sie alle nahe beieinander auf der Hauptreihe. Als einziger für die verschiedenen Sterne variierender Parameter bleibt die Masse, die alle anderen Größen (Leuchtkraft, Radius, ...) eindeutig festlegt. Erst wenn die chemische Zusammensetzung sich aufgrund der Kernbrennprozesse im Inneren merklich so ändert, dass die Energieerzeugungsrate sich deutlich ändert, beginnt der Stern von der Hauptreihe wegzwandern (s.u.).

Wir wollen noch einmal betonen, warum dieser Gleichgewichtszustand auf der Hauptreihe so stabil ist: eine kleine Verringerung der Energieerzeugungsrate, z.B. Abnahme der Temperatur, eventuell aufgrund der langsam abnehmenden H-Konzentration wegen der nuklearen Brenns, führt zu einer Verminderung des Druckes im Inneren, und damit zu einer Kontraktion. Dabei erhöht sich die Temperatur, so dass die Energieerzeugungsrate zunimmt. Dies wiederum führt zu Temperaturerhöhung, so dass der Stern insgesamt sehr stabil in der Gleichgewichtskonfiguration brennt.

Bemerkungen zum konvektiven Energietransport

Wir haben hier nicht abgeschätzt, wie groß der Energietransport durch Konvektion tatsächlich ist (die ist im Rahmen der sog. Mischungsweg-Näherung möglich). Da die Konvektion einsetzt, wenn der Temperaturgradient durch Strahlung zu große (zu steil) ist, ist aber klar, dass die Konvektion den Energietransport effektiver bewerkstellt als Strahlung. Typischerweise tritt Konvektion dann auf, wenn sich die Opazität stark ändert, z.B. weil die Temperatur gerade soweit abnimmt, dass die H-Atome teilweise rekombinieren (Konvektionsschicht direkt unterhalb der Photosphäre in der Sonne); oder wenn He im Sterninneren wegen abnehmender Temperatur nur noch einfach ionisiert vorliegt (Konvektionszone im Inneren von Sternen mit $M > \text{ca. } 1.5 M_\odot$).

Der Energietransport in der Konvektionsschicht ist also effizienter. Besteht ein Stern abwechselnd aus Schichten mit konvektivem und strahlungsdominierten Energietransport, so ist die Gesamtleuchtkraft durch die nichtkonvektiven Schichten begrenzt, da diese den "Flaschenhals" darstellen.

Grenzmassen der Sterne

Damit ein Stern die stabile Konfiguration auf der Hauptreihe erreicht, muss er im Inneren heiß genug werden, dass das Wasserstoffbrennen zünden kann. Ohne dass wir dies hier ableiten, stellt sich heraus, dass das nur für Sterne mit Massen $> 0.1 M_\odot$ erreicht wird. Bei niedrigeren Massen bleibt die Zentraltemperatur zu niedrig zum Wasserstoffzünden. Der Stern kontrahiert weiter (Helmholtz-Kelvin Zeitskala) bis die Dichte im Inneren so weit steigt, dass das Elektronengas entartet. Der Druck ist dann nur noch durch die Dichte bestimmt und unabhängig von der Temperatur (siehe Diskussion unten, wie bei den *Weissen Zwergen*), so dass der Stern stabil wird und die Kontraktion anhält, ohne das die Zündtemperatur für Wasserstoffbrennen erreicht wurde. Der Stern kühlt dann sehr langsam (wegen der kleinen Oberfläche und niedrigen Temperatur) über Milliarden Jahre weiter ab. Diese Sterne nennt man *Braune Zwergen*.

Braune Zwergen sind wegen ihrer geringen Leuchtkraft und niedrigen Temperatur nur sehr schwer

zu entdecken. Da die Verteilung der Sternmassen bei der Entstehung (*initial mass function*) sehr viel mehr leichte Sterne als massereiche aufweist (Potenzgesetz $dN/dM \propto M^{-\gamma}$, $\gamma \approx 2.3$, Salpeter-IMF) wird spekuliert, dass eventuell viele solche Brauen Zwerge existieren und zu einem guten Teil der sog. *dunklen Materie* (s.u.) beitragen. Inzwischen haben aber sorgfältige Beobachtungen (direkte IR-Durchmusterungen, Mikro-Gravitationslinsen-Experimente) gezeigt, dass die IMF wohl doch bei Massen in diesem Bereich abbricht: man findet zwar Braune Zwerge, aber deutlich weniger als durch Extrapolation der IMF erwartet.

Die obere Massengrenze ergibt sich, weil die Sterne mit sehr hoher Masse sich schließlich als instabil erweisen. Zunächst kann man die *Eddington-Grenze* für die Leuchtkraft eines Sternes ableiten: wenn die nach außen gerichtete Strahlungsbeschleunigung $g_s = \bar{\chi} \Phi/c = (\bar{\chi}/c)(L/4\pi R^2)$ genauso groß wird wie die nach innen gerichtete Schwerkraftbeschleunigung $g = GM/R^2$, bläst der Stern seine äußeren Schichten durch den Strahlungsdruck weg. Als obere Grenze für die Leuchtkraft massereicher Sterne ergibt sich also

$$L_{Eddington} = 4\pi G c M / \bar{\chi} = 2.5 \times 10^4 M / \bar{\chi} = 4.2 \times 10^4 L_0 (M/M_0) (0.3 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} / \bar{\chi}),$$

mit dem typischen Wert für die mittlere Opazität des Sonnenmaterials im Inneren (s.o.). Diese Abschätzung ist konsistent mit den Leuchtkräften der massereichsten Sterne im Bereich 50-100 M_0 von einigen $10^6 L_0$. Hiernach wären zwar noch massereichere Sterne möglich; es stellt sich aber heraus, dass diese nicht mehr stabil sind gegenüber radialen Oszillationen. Die äußeren Schichten werden dabei durch den Strahlungsdruck so stark beschleunigt, dass sie nach einigen Oszillationen mit hoher Geschwindigkeit abströmen.

Anmerkung: zeitabhängige Rechnungen

Die letzten Betrachtungen erinnern daran, dass die Untersuchung der stationären Gleichungen im Prinzip nicht ausreichend ist. Man muss auch immer untersuchen, ob die gefundenen stationären Lösungen stabil gegenüber Oszillationen, d.h. Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage sind, oder ob sie bei kleiner Auslenkung weglaufen, bzw. sich die Schwingungen aufschaukeln.

Im allgemeinen muss man also in den obigen Erhaltungsgleichungen auch die zeitlichen Änderungen berücksichtigen. Dies ist auch deshalb nötig, weil sich ja z.B. die chemische Zusammensetzung wegen des Kernbrennens zeitlich ändert. Insbesondere, wenn der Stern sich schließlich von der lange andauerenden, stabilen Hauptreihenphase weg entwickelt, wird eine zeitabhängige Beschreibung notwendig. Dies ist mit heutigen Rechnerkapazitäten kein Problem mehr.

13.2 Hauptreihensterne

Damit erweist sich die Hauptreihe im Hertzsprung-Russell-Diagramm als der Parameterbereich, in dem sich die Sterne (annähernd) gleicher Zusammensetzung während der relativ langen und stabilen Phase des Wasserstoffbrennens aufhalten. Die Entwicklungsdauer auf der Hauptreihe ist durch das Verhältnis von Brennstoffvorrat und Leuchtkraft gegeben: $\tau_{Hauptreihe} \propto M/L$. Außerdem ist $L \propto M^3$. Mit der Energieausbeute des Wasserstoffbrennens, der Annahme, dass ca. 1/10 der Sternmasse umgesetzt wird, und mit den Zahlenwerten der Sonne können wir (s.o.) die Entwicklungszeit auf der Hauptreihe quantitativ abschätzen zu:

$$\tau_{Hauptreihe} = 9 \times 10^9 (M/M_0)^{-2}.$$

Diese Beziehung wird durch die detaillierten Rechnungen des Sternaufbaus bestätigt. Bei den

genauen Rechnungen ergibt sich natürlich der Anteil des auf der Hauptreihe im Inneren verbrannten Materials als Ergebnis der Rechnungen. Außerdem berücksichtigen sie als zeitabhängige Rechnungen, dass die chemische Zusammensetzung sich nach und nach im Innern ändert, und demzufolge der Stern langsam seine Eigenschaften ändert. So hat sich die Sonne im Vergleich zur "Ursonne" bereits im Radius um 5% vergrößert, die Leuchtkraft hat um 40% zugenommen, die Dichte im Innern (höherer Helium-Anteil ist um 70% gestiegen).

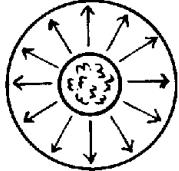
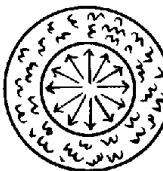
Eigenschaften der Hauptreihensterne	
Obere Hauptreihe ($M > 1.5 M_{\odot}$)	Untere Hauptreihe ($M < 1.5 M_{\odot}$)
CNO Zyklus	pp-Kette
Energieerzeugung stark im Kern konzentriert (wg. sehr starker Temperaturabhängigkeit)	Energieerzeugungsbereich ausgedehnter
	
Konvektiver Kern (je größer M , umso größer ist der konvektive Kern)	Kern im Strahlungsgleichgewicht
Hülle um Strahlungsgleichgewicht	Konvektive Hülle (Oberfläche: H neutral, darunter Ionisation, schnelle Zunahme der Opazität, steiler Temperaturgradient), je kleiner M , umso weiter reicht die konvektive Hülle in den Stern hinein.

Tabelle 13.1: Vergleich von massereichen und -armen Sternen auf der Hauptreihe

Die Rechnungen zeigen auch, dass bei den Sternen auf der oberen Hauptreihe ($M > 1.5 M_{\odot}$) der Kern konvektiv ist (Nachliefern von Brennstoff!), während im äußeren Bereich die Energie durch Strahlung transportiert wird. Auf der unteren Hauptreihe ($M < 1.5 M_{\odot}$) ist der Stern im Inneren durch Strahlungstransport dominiert, dagegen ist der äußere Bereich konvektiv. Die Tabelle vergleicht die wichtigsten Eigenschaften.

13.3 Nach-Hauptreihenentwicklung

Durch das Wasserstoffbrennen wird nach und nach das mittlere Molekulargewicht erhöht. An der Grenze zwischen $r=r_1$ zwischen Helium-reichem Innern und Wasserstoff-reichem Äußeren gilt im Gleichgewicht $P_i=P_a$ und $T_i=T_a$, und damit wegen $P=NkT$ auch gleiche Teilchendichte: $N_i=N_a$. Entsprechend ist die Massendichte im Kern größer: $\rho_i=N_i \mu_i m_H > \rho_a=N_a \mu_a m_H$. Die Konstanz der Teilchendichte erfordert wegen des höheren Molekulargewichts und der Massenerhaltung eine Verkleinerung des Kernvolumens,

Die Kontraktion geht mit einer Temperaturerhöhung im Inneren, und damit mit einer erhöhten Fusionsrate und einer größeren Leuchtkraft einher. Die Rechnungen zeigen, dass sich der Radius des Sternes insgesamt vergrößert. Die Oberflächenzunahme überwiegt die Zunahme der Leuchtkraft, so dass die Oberfläche etwas kühler wird. Insgesamt bewegt sich der Stern im HR-Diagramm leicht nach rechts oben.

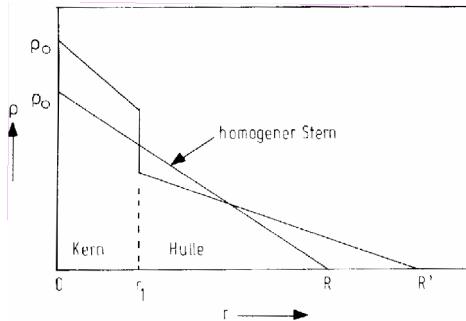


Abb. 62 Dichteverlauf im inhomogenen Stern; Zunahme des Radius

Nebenbemerkung: die Radiuszunahme lässt sich qualitativ aus den Aufbau-Gleichungen abschätzen: wir erhalten

$$\frac{d \ln(r)}{d \ln(M_r)} = \frac{dr}{r} \frac{M_r}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho(r)} \frac{M_r}{r} = \frac{1}{3} \frac{\bar{\rho}}{\rho(r)} ; \text{ daraus durch}$$

Integration $\ln(R) - \ln(r_1) = \frac{1}{3} \int \frac{\bar{\rho}}{\rho(r)} d(\ln M_r)$. Der Bereich im Inneren mit erhöhter Dichte wird kleiner, der größere Bereich im Äußeren mit geringerer Dichte wird also entsprechend ausgedehnt.

Wenn im Inneren der Wasserstoff-Vorrat weitgehend verbraucht ist, beginnt der Kern zu kontrahieren. Bevor die Temperatur im Inneren groß genug ist, um das Helium-Brennen zu zünden (10^8 K), entsteht zunächst eine wasserstoffbrennende Schale um den Heliumkern. Da diese Schale maßgeblich zur Leuchtkraft beiträgt, muss im Inneren der Temperaturverlauf flacher werden. Entsprechend erhöht sich (zur Aufrechterhaltung des Druckes) die Dichte weiter. Außerdem vergrößert der Stern weiter seinen Radius.

Die Entwicklungswägen der Sterne verschiedener Massen unterscheiden sich sehr stark. Wir hatten bereits oben gesehen, dass massearme Sterne im Inneren im Strahlungsgleichgewicht sind, und entsprechend keine Durchmischung erfahren. Bei massereichen Sternen wird ein größeres Volumen wegen der konvektiven Zone als Kernbrennstoff zur Verfügung stehen.

Die Zentraltemperatur ist bei masseärmeren Sternen genügend niedrig, dass das Elektronengas im heliumreichen Teil (4-fach höhere Elektronendichte plus weitere Verdichtung) entartet ist (bis ca. $2.5 M_\odot$). Der Druck ist also durch den Entartungsdruck der Elektronen gegeben, und damit von der Temperatur unabhängig. Beim Zünden des Heliumbrennens ergibt sich durch die zusätzliche Energieerzeugung ein Temperaturanstieg, der bei den schweren Sternen (nicht entartet) geregelt einsetzt, da er wiederum zu einer Druckzunahme, d.h. Ausdehnung etc., s.o.) führt. Bei den masseärmeren Sternen (entartetes Elektronengas) kann die Temperatur ansteigen, ohne eine Druckerhöhung zu bewirken. Damit steigt die Energieerzeugung ($\epsilon_{He} \propto T^{30}$) explosionsartig an, bis die wesentlich höhere Temperatur zu einer Aufhebung der Entartung führt (sog. **Helium-Flash**)

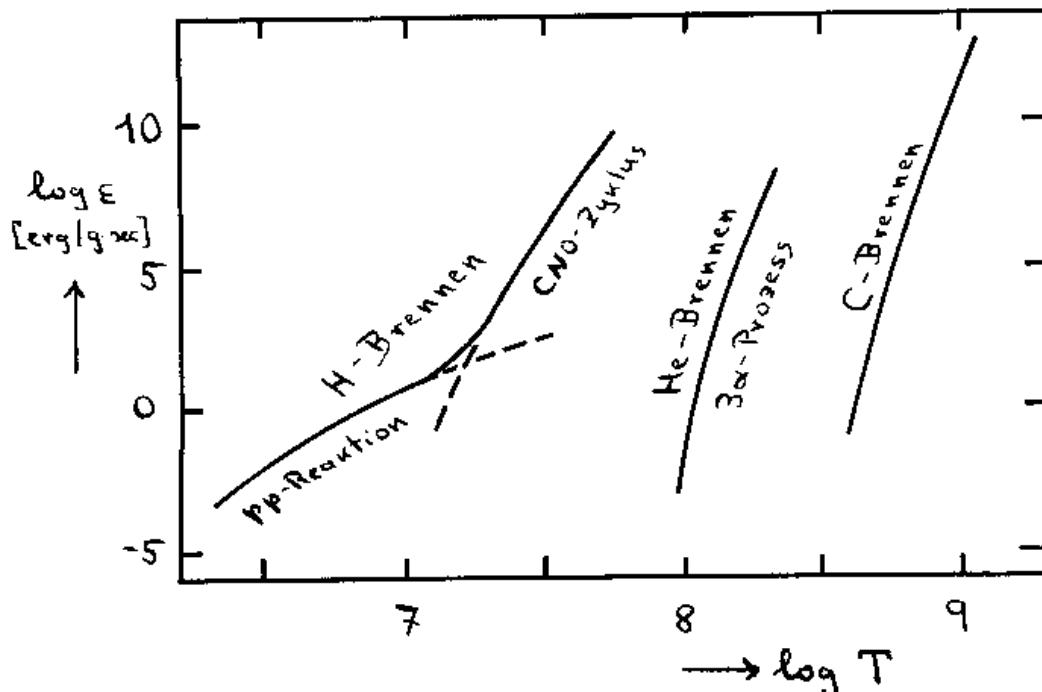


Abb. 63 Temperaturabhängigkeit der verschiedenen Kernbrenn-Prozesse

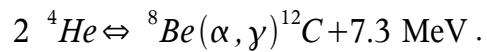
triple- α -Prozess und weitere Kernbrenn-Stufen

Wir müssen hier die Beschreibung der Kernbrennprozesse jenseits des Wasserstoffbrennens (pp-Kette, CNO-Zyklus) kurz nachholen.

Sukzessive Anlagerung von Protonen an He ist energetisch nicht möglich. Außerdem kann die Coulombbarriere erst überwunden werden, wenn die Temperaturen hinreichen hoch werden, d.h. nachdem das Wasserstoffbrennen erschöpft ist, und demnach Protonen als Reaktionspartner selten geworden sind. Die Elemente Li, Be und B entstehen also nicht in Sternen! Da sie auch nicht im Urknall entstehen, bleibt als einzige "Quelle" die Spallation (Aufspaltung) schwererer Kerne bei Treffern durch die kosmische Strahlung. Dies korrespondiert mit ihrer geringen Häufigkeit.

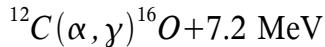
Im Helium-reichen Innern der Sterne nach dem Ausbrennen des Wasserstoffs sind die Temperaturen schließlich (Kontraktion) hoch genug, dass He-Kerne verschmelzen können.

Allerdings ist der dabei entstehende 8Be -Kern instabil und zerfällt sehr schnell wieder in 2 He Kerne. Die Reaktion ist endotherm, die Bindungsenergie ist nur 85 keV. Im Gleichgewicht bei den im Sterninneren herrschenden Bedingungen kommt ein 8Be Kern auf 10^{10} He Kerne!. Wegen der hohen He-Konzentration besteht aber eine ausreichende Chance, dass die wenigen Be-Kerne weiterfusionieren und ^{12}C bilden:



De facto entspricht dies wegen der kurzen Lebensdauer des Be-Kernes einem dreifach-Stoß von α -Teilchen: **triple- α -Prozess**

Die entstandenen ^{12}C Kerne können (je besser, je höher die Temperatur) mit weiteren He-Kernen zu ^{16}O reagieren:



u.s.w. zu ^{20}Ne , ^{24}Mg . Für die Bildung weiterer Kerne reichen die Temperaturen in dieser Phase der stellaren Entwicklung aber noch nicht aus.

Als Nebenprodukt des CNO-Zyklus vorhandene ^{14}N -Kerne können sich durch sukzessiven Einfang von 4He ^{18}O und ^{22}Ne bilden. Nachfolgende Reaktionen $^{18}O(\alpha, n)^{21}Ne$ und $^{22}Ne(\alpha, n)^{25}Mg$ setzen Neutronen frei, die ohne Coulombbarriere durch Anlagerung weitere Isotope bilden und schrittweise schwerere Elemente erzeugen können.

sog. *Thermische Prozesse*:

Bei Temperaturen oberhalb $6 \times 10^8 \text{ K}$ können zwei Kohlenstoffkerne fusionieren:

$^{12}C(^{12}C, p)^{23}Na + 2.2 \text{ MeV}$ und $^{12}C(^{12}C, \alpha)^{20}Ne + 4.6 \text{ MeV}$. Für Fragen der Elementsynthese ist außerdem die Reaktion $^{12}C(p, \gamma)^{13}N(e^+)^{13}C(\alpha, n)^{16}O$ von Bedeutung. Sie liefert ebenfalls Neutronen, aber auch eine gewisse Konzentration an ^{13}C .

Ab ca. $2 \times 10^9 \text{ K}$ können ^{16}O und ^{20}Ne (Sauerstoff- und Neonbrennen) zu ^{28}Si , ^{32}S und ^{24}Mg fusionieren u.s.w.. Dies führt zu einer relativ höheren Häufigkeit der sog. α -Kerne (Atomgewichte 16, 20, 24, 28, ..., 40).

Gleichgewichtsprozess oder e-Prozess (equilibrium):

Bei $T \approx 4 \times 10^9 \text{ K}$ gewinnen Photospaltungen zunehmend an Bedeutung. Sie erzeugen Protonen, Neutronen und α -Teilchen, die rasch von den stabilen Kernen eingefangen werden. Zwischen beiden Reaktionen bildet sich ein Gleichgewicht; die Häufigkeit der Kerne entspricht dann ihrer Bindungsenergie (Boltzmann-Verteilung). Dies führt zu einer relativ größeren Häufigkeit von ^{56}Fe und seinen Nachbarkernen.

Entwicklungswege

Die vollständige numerische Modellierung entlang der oben aufgezählten Vielzahl von Prozessen erlaubt es heutzutage, die zeitliche Entwicklung der Sterne im Detail im Modell zu verfolgen. Als Beispiel wollen wir hier die Entwicklung eines Sternes mit $M = 5 M_\odot$ verfolgen. Die erste Abbildung zeigt den Aufbau des Sternes zu den verschiedenen Phasen, die zweite zeigt seine Entwicklung um HR-Diagramm.

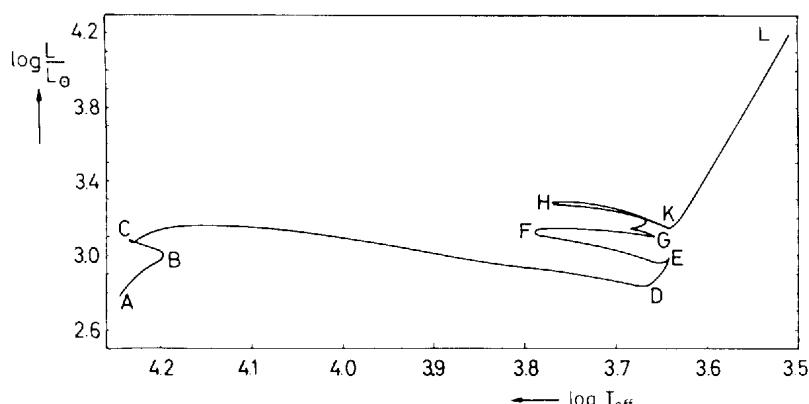


Abb. 64 Entwicklungsweg eines 5 Sonnenmasse-Sternes im HR-Diagramm

Während der Hauptreihenphase, die insgesamt 5.6×10^7 Jahre dauert, erstreckt sich der konvektive Kern zunächst (Zeitpunkt A) über die inneren 21% der Masse; die Brennzone (CNO-Zyklus) erstreckt sich über die inneren 7% der Masse. Am Ende dieser Phase (B) bewegt er sich innerhalb von 0.25×10^7 Jahren nach C. Die Wasserstoff-Schalen-Brennphase in weiteren 0.3×10^7 Jahren führt zu einer schnellen Ausdehnung und

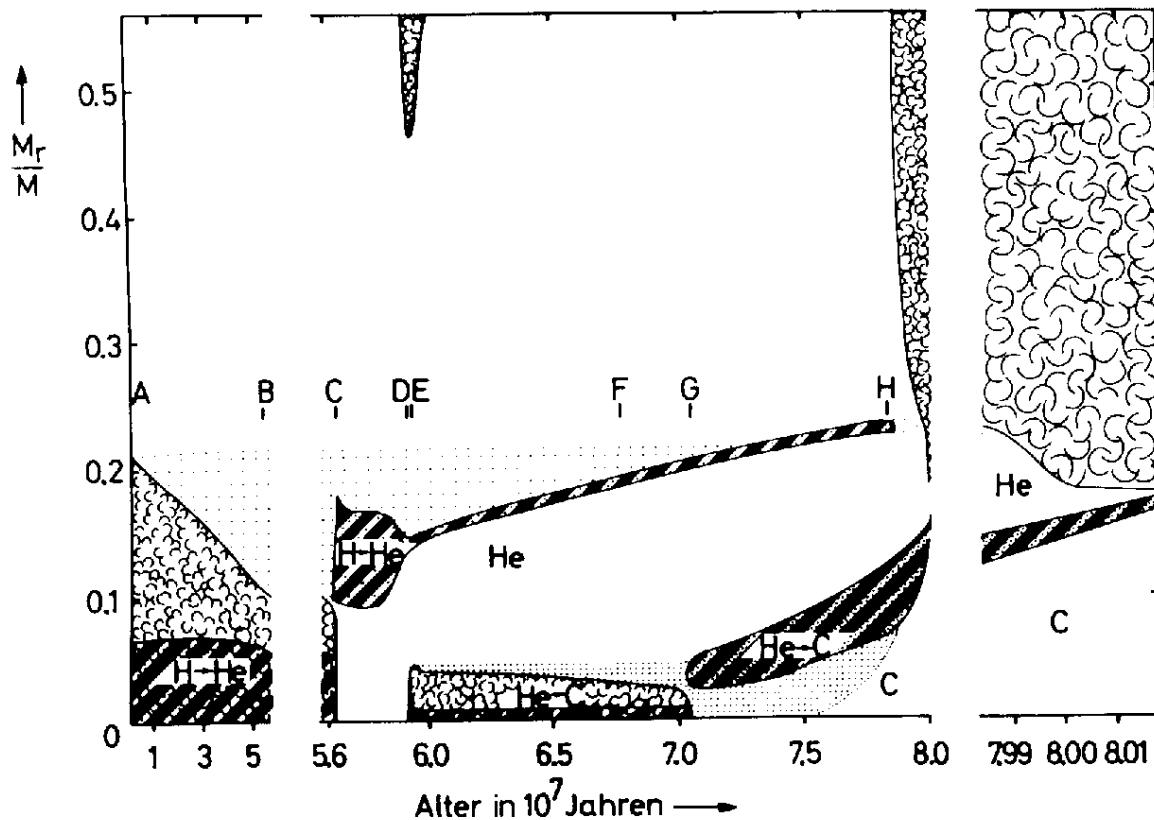


Abb. 65 Entwicklung des inneren Aufbaus eines Sterns mit 5 Sonnenmassen (aus Scheffler & Elsässer: Physik der Sterne und der Sonnen): schraffierte Gebiete: nukleare Energieerzeugung; Wirbel: konvektive Zonen. Die Zeitpunkte A,...,H entsprechen den Punkten des Entwicklungsweges in der nächsten Abb.

entsprechenden Abkühlung der Oberfläche (Zeitpunkt D); der Stern wird zum **roten Riesen**. In Endphasen wird im Inneren Kohlenstoff verbrannt, He und H in zwei Schalen, und der Stern besitzt eine ausgedehnte konvektive Hülle. Dazwischen durchläuft er im HR-Diagramm mehrere Schleifen mit komplexen Abläufen, die wir hier nicht weiter behandeln können. Hierbei kommt es teilweise zu Pulsationen und Sternwinden. Sind alle Kernbrennquellen erschöpft, kann der Stern nur noch durch Kontraktion Energie gewinnen. Er erleidet einen Gravitationskollaps mit verschiedenem Ausgang (siehe Endstadien weiter unten).

Solche Entwicklungswege können für Sterne verschiedener Massen bestimmt werden. Die folgenden Abb. fasst diese Entwicklungsweg-Rechnungen zusammen.

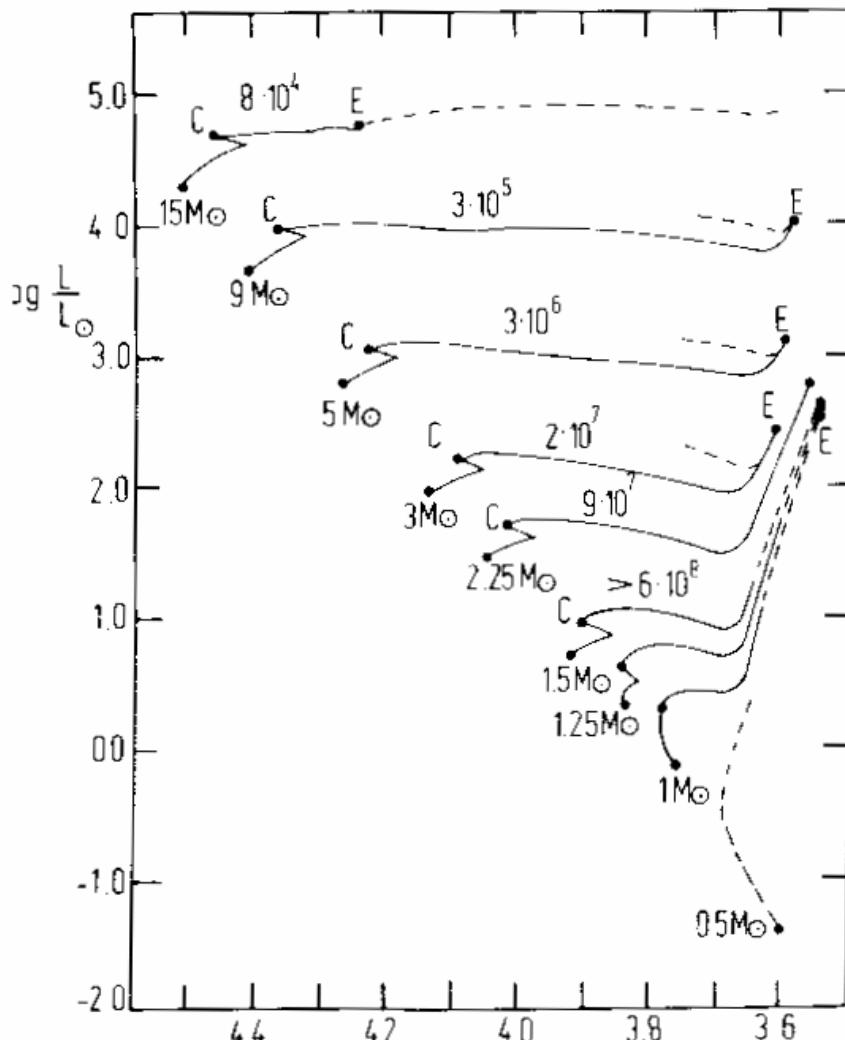


Abb. 66 Entwicklungswege der Sterne verschiedener Massen im HR-Diagramm

Leichtere Sterne ($M < 2.5 M_\odot$) entwickeln sich nicht über das He-Brennen; sie haben am Ende ihrer Entwicklung einen Kohlenstoff/Sauerstoff-Kern. Die Temperatur zum Zünden des Kohlenstoffbrennens wird nicht erreicht. Stattdessen werden sie im Inneren durch den Entartungsdruck der Elektronen stabilisiert und beenden ihr Leben als sog. **Weisse Zwerge** (s.u.). Vorher durchlaufen sie aber noch verschiedene interessante Phasen, in denen der Stern sich im Stadium des Schalenbrennens stark ausdehnt (Roter Riese). Mit einem kräftigen Sternwind wird ein wesentlicher Teil der wasserstofffreien Hülle weggeblasen (Planetarischer Nebel). Und in vielen Fällen ist die Hülle instabil gegen (mehr oder wenig periodische) Pulsationen (lang-periodische Mira-Veränderliche, RR-Lyrae-Sterne).

Altersbestimmung

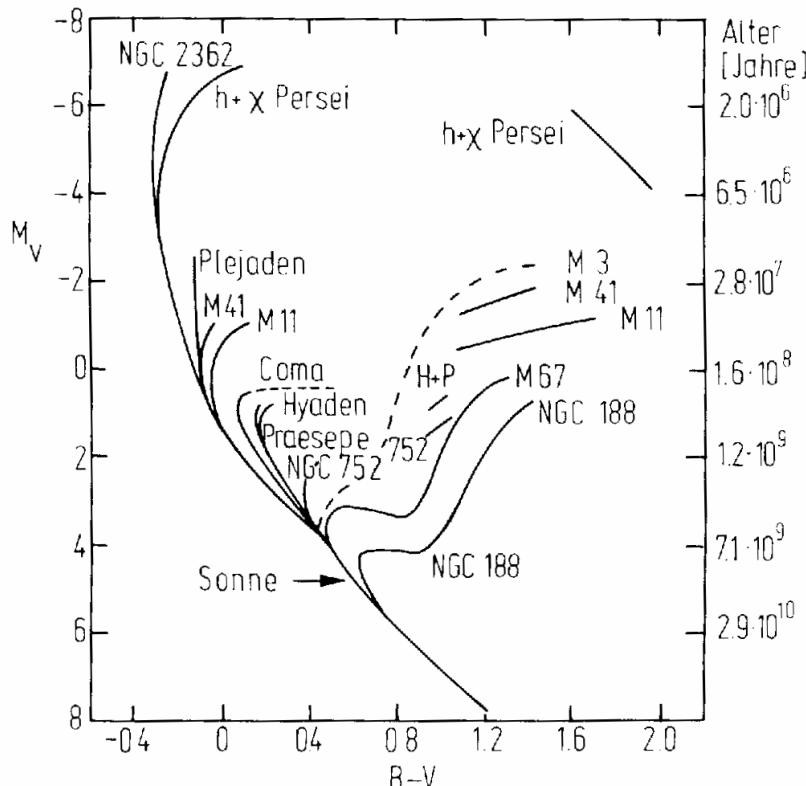


Abb. 67 Verschiedene Sternhaufen im HR-Diagramm: Altersbestimmung durch Abknickpunkt

Die Sterne eines Sternhaufens sind mutmaßlich alle gleichzeitig entstanden. Da die Sterne mit zunehmender Masse kürzer auf der Hauptreihe verweilen, beobachtet man einen Abknickpunkt, bis zu dem die Hauptreihe bevölkert ist, und ab dem die Sterne entsprechend ihren Entwicklungswegen die Hauptreihe verlassen. Aus dem Ort dieses Abknickens im HR-Diagramm kann man damit das Alter des Sternhaufens bestimmen.

13.4 Entwicklung in engen Doppelsternsystemen

Tatsächlich befinden sich gut 2/3 der Sterne in Doppelsternsystemen. Ist die Bahn der Sterne im Doppelsystem genügend eng, so kann mit der Ausdehnung des jüngeren Sternes, der ja als erster das Ende der Hauptreihenentwicklung/des Wasserstoffbrennens erreicht und sich aufbläht, ein Teil

der Masse dieses Sternes auf den anderen, Masse-ärmeren Begleiter hinüberfließen. Die Annahme der Konstanz der Masse in den Sternentwicklungsrechnungen ist nicht mehr erfüllt und es ergeben sich eine Reihe sehr interessanter (und beobachtbarer) Effekte.

Zunächst ist es wichtig, die Äquipotentialflächen in einem Doppelsternsystem zu untersuchen: nahe an jedem der Sterne umschließt die Äquipotentialfläche den jeweiligen Stern. In großem Abstand von beiden umschließt sie beide Sterne gemeinsam. Die kritische Grenzfläche zwischen beiden Fällen ist die

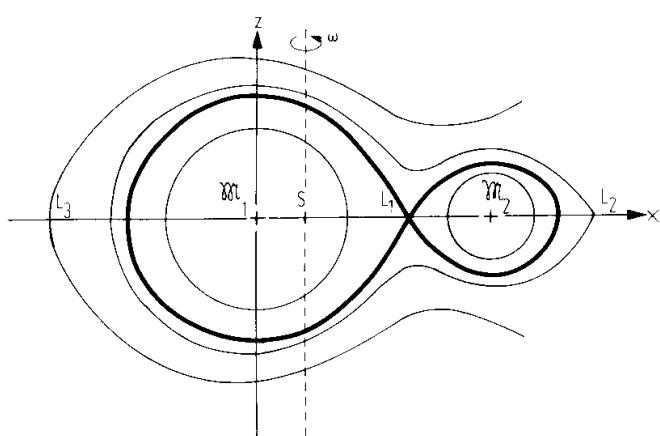


Abb. 68 Roche-Grenze: Äquipotentialflächen im Doppelsternsystem

sogenannten Roche-Fläche (englisch: *Roche-lobe*). Entsprechend ist das Material innerhalb der Roche-Fläche jeweils einem der beiden Sterne klar zugeordnet: ohne zusätzliche Energie kann es

dessen Einflussbereich nicht verlassen. Am "Gleichgewichtspunkt" L_1 (erster Lagrange Punkt, Librationspunkt) kann Material vom einen auf den anderen Stern überfließen, wenn der jeweilige Stern sich bis zur Roche-Grenze ausdehnt.

Mit dem Gesamtdrehimpuls $J = a_1 M_1 v_1 + a_2 M_2 v_2 = a \mu v$ (reduzierte Masse $\mu = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$, $a = a_1 + a_2$, $v = v_1 + v_2$ und der Annahme einer Kreisbahn

(Fliehkraft=Schwerkraft, $v^2/a = G(M_1 + M_2)/a^2$) ist dann $J = \text{const.} = \sqrt{\frac{Ga}{M_1 + M_2}} M_1 M_2$, also

wegen $M_1 + M_2 = \text{const.}$ $a \propto \frac{1}{M_1^2 M_2^2} = \frac{(1+\mu)^4}{\mu^2}$. Erreicht der massereiche Stern, M_1 , die Roche-

Grenze und beginnt Masse auf den Begleiter zu transferieren, so geht μ näher an 1, d.h. a verringert sich (Drehimpulserhaltung), was den Massenaustausch beschleunigt. Erst wenn $M_2 > M_1$, also μ wieder größer 1 geworden ist, kann durch Zunahme von a der Massenaustausch beendet werden. Dies erklärt, warum man oft die kühle, entwickelte Komponente als den masseärmeren Stern findet (WZ in Doppelsystemen).

Der Massentransfer führt oft zu Instabilitäten, sog. **Nova**-Ausbrüchen, die sich teilweise wiederholen. Wir können hier nicht auf die Details eingehen.

Einschub: Massenbestimmung in Doppelsternsystemen

In diesem Zusammenhang wollen wir kurz die einzige Methode diskutieren, Sternmassen direkt zu messen. Dies ist in Doppelsternsystemen aus den Bahnparametern der Sterne möglich. Ca. 2/3 der Sterne stehen nicht allein, sondern haben einen Begleiter. Wenn die Sterne genügend nahe im Abstand zur Sonne stehen, kann man die Bewegung der beiden Sterne umeinander in der Projektion am Himmel sehen; sind sie genügend hell, dass man auch Spektren aufnehmen kann, so kann man auch deren radiale Komponente der Geschwindigkeit messen. Unter Umständen ist nur einer der beiden Sterne sichtbar, der andere zu schwach. In beiden Fällen spricht man von visuellen Doppelsternen. Oder die Sterne sind zu weit weg, so dass man nur in den Spektren durch die periodische Linienverschiebung auf die Bewegung der Sterne umeinander herum schließen kann (spektroskopische Doppelsterne).

Betrachten wir zwei umeinander umlaufende Sterne. Nach dem 3. Keplerschen Gesetz ist

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{U^2}, \text{ oder, wenn wir die Massen in Sonnenmassen, die große Halbachse } a \text{ der}$$

Bahn in astronomischen Einheiten, und die Umlaufzeit U in Jahren angeben:

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{U^2}$$

Durch direkte Beobachtung (visuelle Doppelsterne) kann die Umlaufzeit, und bei bekannter Entfernung aus dem Winkelabstand der Sterne die Halbachse bestimmt werden. Damit ist die Massensumme bekannt.

Kann die Bewegung beider Sterne relativ zum Fixsternhimmel um den gemeinsamen Schwerpunkt ausgemessen werden, dann ergibt das Verhältnis der großen Halbachsen (dafür braucht die Entfernung nicht bekannt zu sein) das Massenverhältnis an:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Aus Massensumme und -verhältnis sind dann die einzelnen Massen bestimmt.

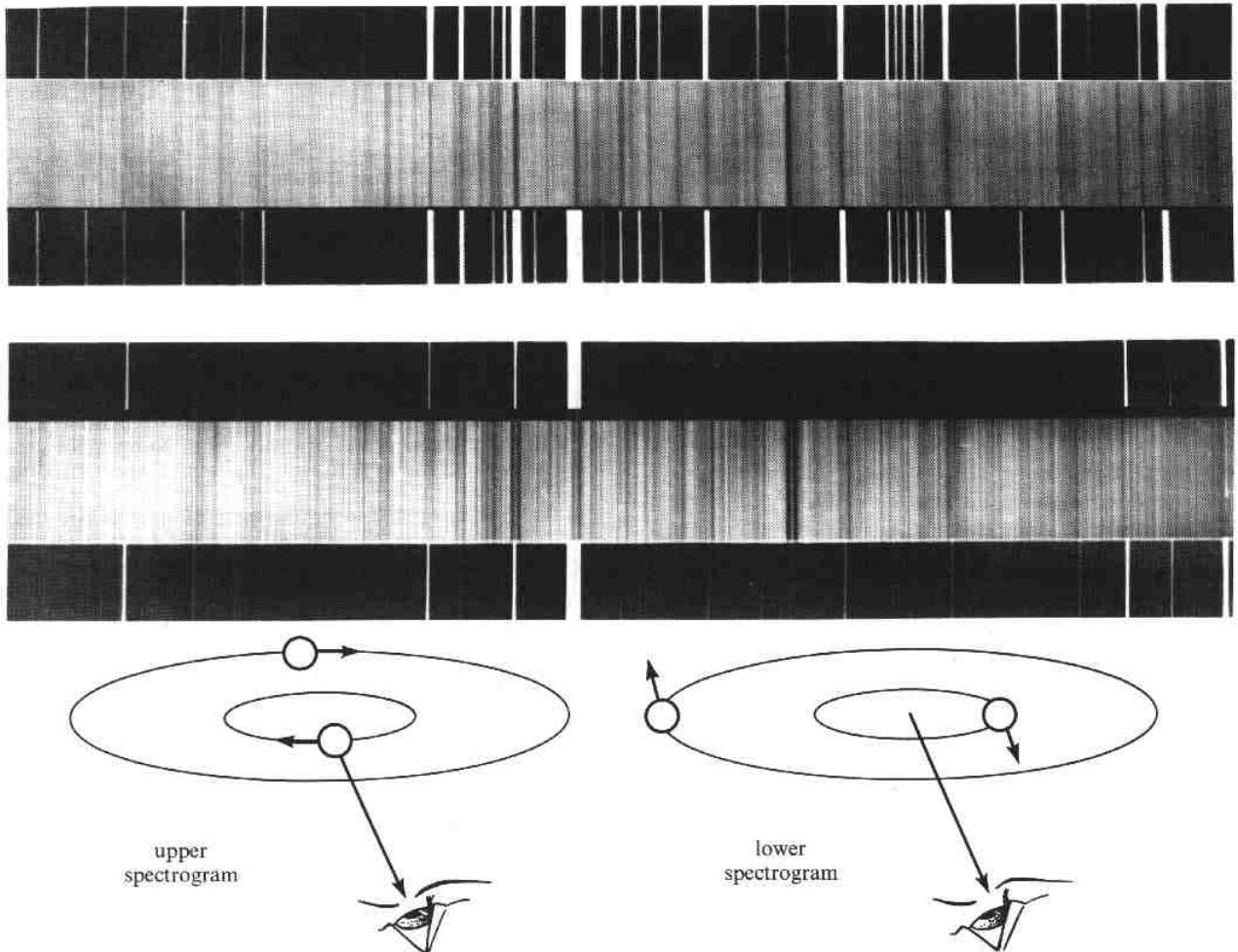


Abb. 69 spektroskopischer Doppelstern Mizar A (aus Shu, The Physical Universe)

Bei *spektroskopischen Doppelsternen* ist nur die Geschwindigkeitskomponente entlang der Sichtlinie bekannt. Bezeichnet man mit i die Inklination der Bahn, d.h. den Winkel der Normalen auf der Bahnebene mit der Sichtlinie ($i=0^\circ$: Bahn in der Himmelsebene), dann ist die maximale Dopplergeschwindigkeit (Amplitude) $v_{1,2} \sin i$. Zusammen mit der Umlaufzeit (Periode der Dopplerverschiebung) kann die Geschwindigkeit in die große Halbachse umgerechnet werden: $v_{1,2} = 2\pi a_{1,2} / U$, so dass $a_{1,2} \sin i$ bekannt ist.

Ist nur ein Spektrum (z.B. von Stern 1) vermessbar, so ist mit $a_1 = a \frac{M_2}{(M_1 + M_2)}$

$$(M_1 + M_2) \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^3 \sin^3 i = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = f(M_1, M_2) = \frac{(a_1 \sin i)^3}{U^2}$$

die sogenannte *Massenfunktion*, die durch die Beobachtungsgrößen $U, a_1 \sin i$ festgelegt ist. Da die Inklination des Systems nicht bekannt ist, ergibt sich aus den Beobachtungsgrößen nur eine untere Grenze für die Massenfunktion.

Sind beide Spektren messbar, aber nur relativ zu einander, so ergibt sich $(a_1 + a_2) \sin i$ und damit

$(M_1+M_2)\sin^3 i = \frac{(a \sin i)^3}{U^2}$. Sind beide Spektren absolut vermessbar, so ist auch das

Massenverhältnis bekannt ($\frac{M_1}{M_2} = \frac{(a_1 \sin i)}{(a_2 \sin i)}$) und damit auch $M_1 \sin^3 i$ und $M_2 \sin^3 i$.

Im seltenen Fall der spektroskopischen Bedeckungsveränderlichen, bei denen $i=90^\circ$ ist, kann so die Masse der Sterne direkt und sogar ohne Entfernungsbestimmung gemessen werden.

13.5 Pulsationen und Ausbrüche: Veränderliche Sterne

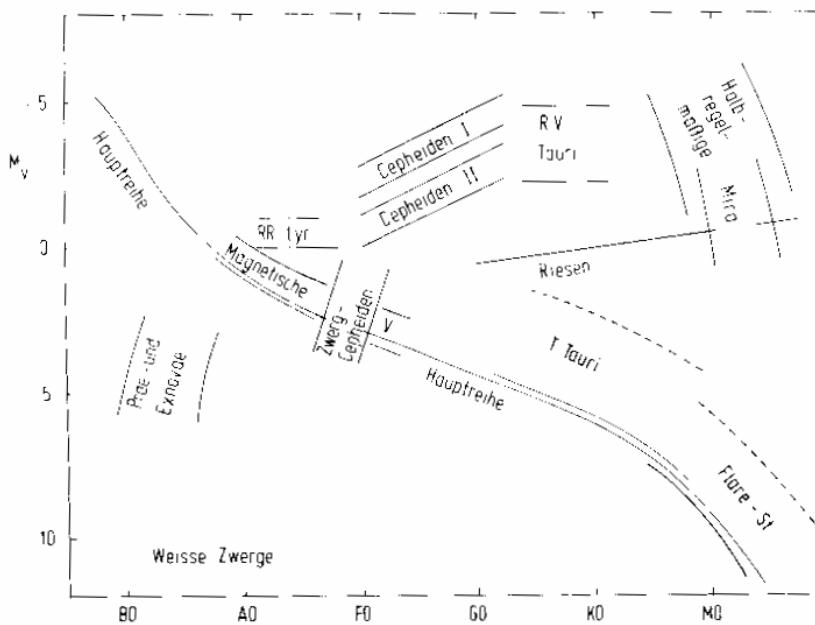


Abb. 70 Lage der verschiedenen Klassen variabler Sterne im HR-Diagramm

Man beobachtet, dass verschiedene Sterne in ihrer Helligkeit veränderlich sind. Einige zeigen unregelmäßige, aber sich wiederholende Variationen, andere streng periodische Helligkeitsschwankungen. Wieder andere nur einmalige Ausbrüche. Je nach diesem Verhalten und nach der Amplitude der Helligkeitsschwankungen (gemessen in Magnitudines) werden die verschiedenen Veränderlichen klassifiziert. Im HR-Diagramm liegen sie zum einen im oberen Bereich des Riesenastes und oberhalb der Weißen Zwerge. Wir können

hier nicht im einzelnen auf die verschiedenen Typen eingehen, sondern verweisen stattdessen auf die Zusammenstellung in Scheffler & Elsässer, Physik der Sterne und der Sonne, S. 129 ff.

Wir wollen hier lediglich auf eine wichtige Klasse, nämlich die Cepheiden, eingehen. Sie zeigen einen sehr regelmäßigen Lichtwechsel mit einer Periode zwischen einigen und bis zu 50 Tagen. Parallel zur Helligkeitsschwankung sind die Spektrallinien im Spektrum verschoben, d.h. die Änderung der Helligkeit entsteht durch eine Pulsation der Hülle. Die Cepheiden haben in der Astrophysik eine so große Bedeutung, weil man empirisch fand, dass sie einer sehr genauen Periode-Leuchtkraft-Beziehung genügen. Man unterscheidet zwei Arten von Cepheiden:

I-Cepheiden (klassische Cepheiden): Perioden sehr gut konstant; Vertreter der Population I; Perioden-Helligkeits-Beziehung $M_V = -1.4 - 2.8 \log P[d]$

II-Cepheiden (W-Virginis-Sterne): Perioden weniger gut konstant, bei gleicher Periode etwa 1.5 mag schwächer als Typ I, Population II; Perioden Helligkeits-Relation $M_V = -0.1 - 1.6 \log P[d]$

Da die Cepheiden insgesamt sehr hell sind, sind sie auch noch in nahen anderen Galaxien sichtbar. Wegen der Periode-Leuchtkraft-Beziehung kann man aus der beobachteten Periode auf die absolute Helligkeit schließen und damit die Entfernung bestimmen!

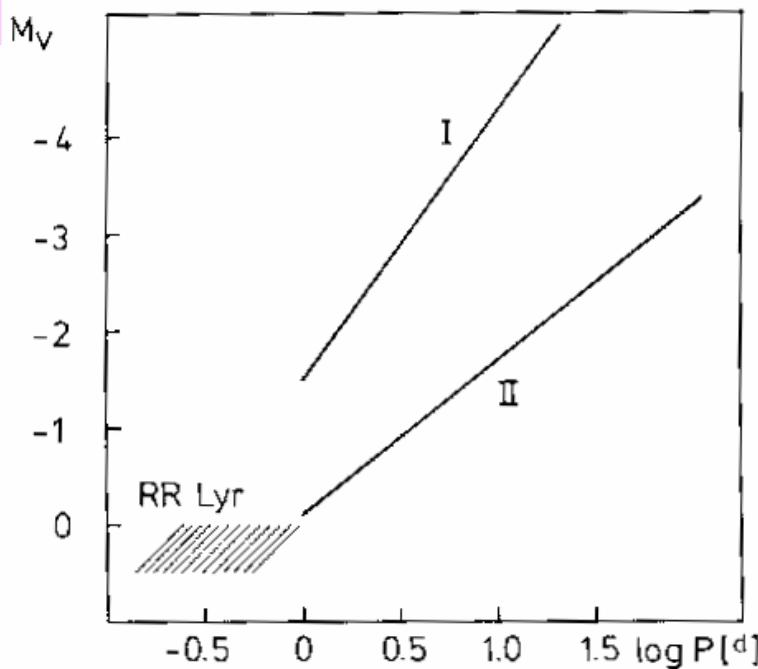


Abb. 71 Periode Leuchtkraft-Beziehung der Klasse I und II Cepheiden und RR-Lyrae Sterne

Diese Methode gab historisch die erste Entfernungsmessung zu einer anderen Galaxie (Andromeda) und bewies dass diese tatsächlich außerhalb der Milchstraße stand. Die Periode-Leuchtkraft-Beziehung wurde für die ungefähr in gleicher Entfernung stehenden Cepheiden in der Magellanschen Wolke gefunden (Henrietta Leavitt, Anfang des 20. Jahrhunderts), deren Entfernung als gleich angenommen werden konnte und bekannt war. Übertragung auf die Cepheiden in Andromeda legte damit die Entfernung zu Andromeda fest. Der Unterschied zwischen Typ I und II war zunächst nicht klar, so dass diese Entfernungsmessung noch einen systematischen Fehler hatte. Heute können Cepheiden bis in den Virgo-Cluster gemessen werden (HST) und stellen damit einen wichtigen Schritt bei der

Entfernungsbestimmung auf kosmischen Skalen dar.

Die RR Lyrae Sterne sind eine andere Klasse von Veränderlichen, die nahezu konstante Helligkeit besitzen ($M_V \approx 0$) und damit ebenfalls zur Entfernungsbestimmung herangezogen werden können. Sie sind aber etwas schwächer als die Cepheiden, außerdem seltener und damit nicht so gut geeignet.

Die Pulsation der Cepheiden entsteht (nachvollziehbar in genauen Rechnungen zum Sternaufbau) dadurch, dass die Opazität der Hülle mit wachsendem Druck zunimmt. Im Gegensatz zum normalen Verhalten, wo die entsprechende Druckzunahme mit einer Erhöhung der Temperatur, und damit einer verstärkten Abstrahlung einhergeht, führt die Erhöhung der Opazität bei den Pulsations-instabilen Cepheiden zu einem Wärmestau, d.h. einer weiteren Druckerhöhung und erst mit einer dadurch bedingten wesentlich stärkeren Ausdehnung der Hülle zu einer Öffnung des "Ventils": die Druckabnahme beim Ausdehnen verringert die Opazität, dies führt zu besserer Wärmeableitung durch Strahlung, Abkühlung und Kontraktion. Der mikroskopische Effekt, der für die Opazitätszunahme mit wachsendem Druck verantwortlich ist, ist die zweite Ionisation von He in den äußeren Sternschichten. Die genauen Rechnungen zeigen, dass diese speziellen Bedingungen für Pulsationsinstabilität tatsächlich im HR-Diagramm gerade für die späteren Entwicklungsphasen von Sternen mit 5 bis 9 Sonnemassen vorliegen, und diese Sterne dann im Cepheiden-Streifen liegen.

14 Endstadien der Sterne

Wir haben anhand der Hauptreihensterne, und speziell der Sonne, im Detail gesehen, wie die Möglichkeit der Energie "erzeugung" durch thermonukleare Fusion für eine gewisse Dauer ein Gegengewicht zu der letztlich den Stern immer über alles andere dominierenden Gravitation aufrechterhalten kann. Wenn der Brennstoff aufgebraucht ist, gewinnt schließlich immer die Selbst-Gravitation des Sternes. Wie katastrophal diese Entwicklung verläuft, hängt wiederum hauptsächlich von der Masse des Sternes (und zum gewissen Grade auch von seiner "chemischen" Zusammensetzung) ab. Insbesondere kann das Zusammenstürzen des Sternes unter seinen eigenen Schwerkraft so heftig von statten gehen, dass die schnell freiwerdende Gravitationsenergie und die damit bedingte Aufheizung einen wesentlichen Teil des Sternes oder das gesamte Material in einer anschließenden Explosion wieder nach außen schleudert; oder ein Teil des stellaren Materials bleibt dominiert von der eigenen Gravitation auf einem engen Raumgebiet zusammen. Vier Endzustände sind möglich:

- 1) nichts bleibt übrig: die endgültige Explosion schleudert das gesamte Material weg; der ultimative Sieg der Thermodynamik, in der die durch die den Stern darstellende Materiekonzentration angesammelte Gravitationsenergie wieder vollständig verteilt wird und schließlich als thermische Energie (Strahlung und heiße Materie) umgesetzt wird.
- 2) mindestens ein Teil des stellaren Materials bleibt übrig und dieser Stern wird als ionisierte Materie durch den Entartungsdruck des Elektronengas (Temperatur-unabhängig!) stabilisiert (Weißen Zwerg).
- 3) der verbleibende Reststern kann auch durch den Elektronen-Entartungsdruck nicht mehr stabilisiert werden, sondern verdichtet sich zu einem *Neutronenstern* (Kernmaterie), stabilisiert durch den Entartungsdruck der Neutronen (die Elektronen "rekombinieren" mit den Protonen zu Neutronen).
- 4) auch der Neutronen-Entartungsdruck reicht nicht zur Stabilisierung aus. Der Stern kollabiert zu einer Raum-Zeit-Singularität, einem Schwarzen Loch.

Wir haben oben bereits gesehen, dass die große Häufigkeit von Doppelsternsystemen und der dort mögliche Materieaustausch zwischen den Partner das endgültige Schicksal eines Sternes maßgeblich mitbestimmen kann. Insofern kommt es hinsichtlich der obigen vier Optionen nicht nur auf die Masse des stabilen Hauptreihensternes an, sondern auch auf seinen eventuell vorhandenen Partner und die Konfiguration des Doppelsternsystems.

Wir wollen die verschiedenen Endstadien im Einzelnen besprechen:

14.1 Weiße Zwerge

Wir hatten bei der Diskussion der Sonne gesehen, dass die Entartung des Elektronengases noch keine Rolle für den Druck im Sterninneren bei Hauptreihensternen spielt (Vergleich von Fermi-Energie und thermischer Energie: $\bar{\epsilon}_F \approx 1/30 E_{\text{therm}}$ für die Sonne). Wir wollen jetzt untersuchen, wie ein Stern aussieht, bei dem die Entartung der Elektronen den maßgeblichen Beitrag zum Druck ausmacht.

Entartungsdruck

Der Druck ergibt sich als mittlerer Impulsübertrag durch Stöße: z.B. für die Kraft pro Fläche auf eine Einheitsfläche in x-Richtung $P = n v_x p_x$. Im Fall des idealen Gases folgt daraus mit $p_x = m v_x$, $mv_x^2 = 2/3 E_{\text{kin}}$ und durch Mittelung über die Maxwell-Verteilung die Zustandsgleichung des

idealen Gases: $P = nkT$.

Im Entartungsfall ergibt sich folgendes: aus der Dichte der Elektronen ergibt sich für ein entartetes Elektronengas die mittlere Ortsunschärfe $\Delta x \approx n_e^{-1/3}$, und mit der Heisenberg'schen Unschärferelation als mittlerer Elektronenimpuls $p_x \approx \Delta p_x = h/\Delta x = hn_e^{1/3}$. Solange die Elektronen nicht-relativistisch sind, ist ihre Geschwindigkeit gegeben als $v_x = p_x/m_e$. Damit ist insgesamt der Druck $P \propto h^2 n_e^{5/3}/m_e$. Tatsächlich trägt nur ein kleiner Teil der Elektronen, nämlich die mit hohen Geschwindigkeiten, d.h. die an der Oberfläche der Fermikugel, zum Druck bei.

Genaue Rechnung, d.h. Integration über die tatsächliche Geschwindigkeits- oder Energieverteilung

entsprechend der Fermi-Verteilung $dn(p) = \frac{g_s}{\exp[(E-\mu)/kT]+1} (h^{-3} 4\pi p^2 dp)$ ergibt:

$$\text{Entartungsdruck, nicht-relativistisch: } P_e = 0.0485 \frac{h^2 n_e^{5/3}}{m_e}.$$

Mit höherer Dichte wird die Fermi-Energie immer höher bis die Elektronen schließlich relativistisch werden, d.h. $v_x = c$ (anstelle von $v_x = p_x/m_e$). Damit ist der Druck jetzt $P \propto hc n_e^{4/3}$ und die genaue Wichtung mit der Fermi-Verteilung ergibt

$$\text{Entartungsdruck, relativistisch: } P_e = 0.123 hc n_e^{4/3}.$$

Diese beiden Gleichungen ersetzen die Zustandsgleichung des idealen Gases im Fall eines entarteten Fermionengases. Man beachte, dass der Druck für ein entartetes Gas nur noch von der Dichte und nicht mehr von der Temperatur abhängt.

Sternaufbau: Weißer Zwerg

Pro Nukleon gibt es bei vollständiger Ionisierung (die im Falle der Entartung sicher erreicht ist; die Elektronen gehören nicht mehr zu einzelnen Atomen!) Z Elektronen; damit ist die Elektronendichte $n_e = Z n_+$. Die Massendichte ist $\rho = A m_p n_+ + m_e n_e \approx A m_p n_+$.

Damit ist $n_e = \frac{Z}{A} \frac{\rho}{m_p}$, und im nicht-relativistischen Fall $P_e = 0.0485 \frac{h^2}{m_e} \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} \frac{\rho^{5/3}}{m_p^{5/3}}$. Da die

Zustandsgleichung jetzt den Druck als Funktion allein der Dichte, d.h. insbesondere unabhängig von der Temperatur angibt, entkoppeln die vier fundamentalen Gleichungen für den Sternaufbau (s.o.). Es bleiben nur die ersten beiden (Hydrostatisches Gleichgewicht und Materieerhaltung übrig; die Sternstruktur ist unabhängig von der Temperaturverteilung und dem Strahlungstransport).

Bemerkung: Zustandsgleichungen der Form $P \propto \rho^s$ nennt man **polytropen Zustandsgleichungen** mit dem Polytropenindex $s = 1 + 1/n$. Das ideale Gas genügt nicht dieser Form; das entartete Fermigas, sowohl nicht-relativistisch wie auch relativistisch, entspricht einer polytropen Zustandsgleichung mit $s = 5/3, 4/3$, resp. $n = 3/2, 3$. Durch Kombination der Gleichung des

hydrostatischen Gleichgewichts ($dP/dr = -\rho \frac{GM_r}{r^2}$) und der Materieerhaltung ($dM_r/dr = 4\pi \rho r^2$)

in eine Differentialgleichung für die Variation des Druckes mit der eingeschlossenen Masse, und mit den Randbedingungen $\rho(0) = \rho_c$, $\rho(R) = 0$; $P(0) = P_c = \alpha \rho_c^s$, $P(R) = 0$, erhält man in

dimensionslosen Variablen $\rho = \rho_c \Theta^n$, $r = \hat{R} \xi$ (mit $\hat{R} = \sqrt{\frac{(n+1)\alpha \rho_c^{1-n}}{4\pi G}}$) die *Lane-Emden*-

Differential-Gleichung $\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d}{d\xi} \Theta \right) = -\Theta^n$, mit den Anfangsbedingungen $\Theta(0)=1, \Theta'(0)=0$. Die Fälle $n=0,1$ und 5 können analytisch gelöst werden; ansonsten numerisch.

Wir wollen hier (analog zur Behandlung der Sonne) das typische Verhalten abschätzen: aus den ersten beiden Grundgleichungen $\frac{dP}{dM_r} = -\frac{G}{4\pi} \frac{M_r}{r^4}$ und $\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$ ergibt sich bei

Betrachtung mittlerer Größen (d.h. $\frac{dP}{dM_r} \approx \frac{\Delta P}{\Delta M_r} = \frac{P_c}{M}$ etc.):

$$P_c = a \frac{GM^2}{R^4}, \quad \rho_c = b \frac{M}{R^3}.$$

Dabei wäre $a=b=\frac{1}{4\pi}$; die numerische Lösung der Lane-Emden Gleichung ergibt

$$\rho_c = 5.99 \bar{\rho} = 1.43 \frac{M}{R^3} \quad (\text{mit } \bar{\rho} = \frac{M}{4\pi R^3/3}) \quad \text{und} \quad P_c = 0.770 \frac{GM^2}{R^4}, \quad \text{also } a=0.770 \text{ und } b=1.43.$$

Einsetzen der Zustandsgleichung $P_c = \alpha \rho_c^{5/3}$, mit $\alpha = 0.0485 \frac{h^2}{m_e m_p} \left(\frac{Z}{A} \right)^{5/3}$ resultiert in der

Bedingung $a \frac{GM^2}{R^4} = \alpha \left(b \frac{M}{R^3} \right)^{5/3}$, bzw. aufgelöst nach R :

$$R = \frac{\alpha 1.43^{5/3}}{0.770 G} M^{-1/3} = 0.114 \frac{h^2}{G m_e m_p^{5/3}} \left(\frac{Z}{A} \right)^{5/3} M^{-1/3}.$$

Der Radius solcher, durch Entartungsdruck stabilisierter, Sterne nimmt also $\propto M^{-1/3}$ mit zunehmender Masse ab (das Volumen ist umgekehrt proportional zur Masse), d.h. mit zunehmender Masse wird der Stern immer dichter (bis die Elektronen relativistisch werden, s.u.). Unabhängig davon, ob der (ausgebrannte) Stern aus He, oder einem Gemisch aus Kohlenstoff und Sauerstoff besteht ist $Z/A \approx 0.5$. Einsetzen von Zahlenwerten ergibt für $M=M_0$ einen Radius von $R \approx 10^{-2} R_0$, d.h. ungefähr Erdradius! Die Dichte ist ca. 10^6 g/cm^{-3} !

Im Inneren der Weißen Zwerge erfolgt der Strahlungstransport durch Wärmeleitung der Elektronen. Nach dem Kollaps des ursprünglichen Sternes kühlen sie bei einer anfänglichen Zentraltemperatur von ca. 10 MioK und einer Oberflächentemperatur von ca. 10000K wegen der kleinen Oberfläche langsam über mehrere Milliarden Jahre (d.h. vergleichbar dem Alter des Universums) ab. Entsprechend ihrer hohen Oberflächentemperatur und geringen Leuchtkraft (Weiße Zwerge!) populieren sie den entsprechenden Bereich im HR-Diagramm.

Die Weißen Zwerge entstehen aus Sternen mit Ursprungsmassen von bis zu ca. $3-5 M_0$. In der Phase der Planetaren Nebel wird ein wesentlicher Teil der Masse abgestoßen, der überbleibende Kern bildet einen Weißen Zwerg.

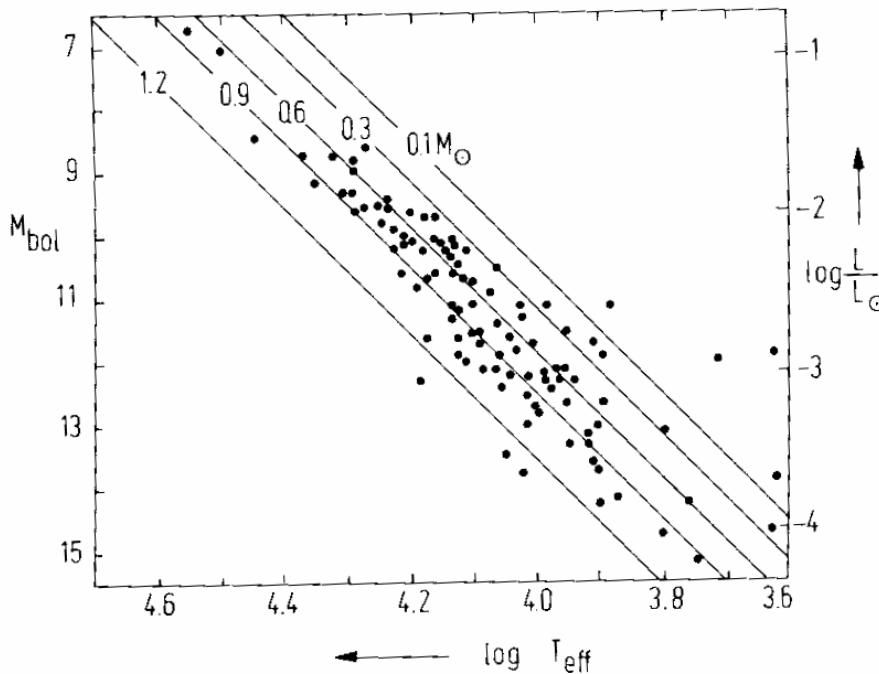


Abb. VI.20: Hertzsprung-Russell-Diagramm für Weiße Zwerge. Die Geraden sind Linien gleicher Masse und damit auch gleichen Radius' für vollständig entartete Konfigurationen, die nur aus den Elementen C bis Mg bestehen. Sterne eines endlichen Massenbereiches bedecken einen Flächenstreifen. Die eingetragenen Punkte entsprechen den beobachteten Weißen Zwergen mit bekannten Entfernungen. (Nach V. Weidemann.)

Abb. 72 aus Scheffler/Elsässer: Physik der Sterne und der Sonne

entsprechend $\propto M^2$ zu. Damit wird die Fermi-Energie immer höher, bis die Elektronen

relativistisch werden. Im relativistischen Fall ist mit $n_e = \frac{Z}{A} \frac{\rho}{m_p}$ die Zustandsgleichung

$$P_e = 0.123 \frac{hc}{m_p^{4/3}} \left(\frac{Z}{A} \right)^{4/3} \rho^{4/3}, \text{ also in obiger Notation } s=4/3, \alpha=0.123 \frac{hc}{m_p^{4/3}} \left(\frac{Z}{A} \right)^{4/3}.$$

(numerische) Lösung der Lane-Emden Gleichung für relativistisch entartetes Gas ergibt (in obiger Notation) $a=11.0$, $b=12.9$, und damit entsprechend für einen relativistisch entarteten Stern:

$$a \frac{GM^2}{R^4} = \alpha \left(b \frac{M}{R^3} \right)^{4/3}. \text{ Man beachte das dieses Gleichgewicht, wenn überhaupt, unabhängig vom}$$

Radius erfüllt ist. Es erfordert aber eine bestimmte Masse, die **Chandrasekhar-Masse**:

$$M_{Ch} = \frac{\alpha^{3/2} b^2}{(aG)^{3/2}} = 0.2 \left(\frac{Z}{A} \right)^2 \left(\frac{hc}{G m_p^2} \right)^{3/2} m_p.$$

Insbesondere kann der Radius beliebig klein werden. Dieser Grenzfall eines entarteten Sternes mit Chandrasekhar-Masse ergibt sich, wenn ein nicht-relativistischer Weißer Zerg mit zunehmender Masse immer kleiner und dichter wird, bis er beginnt, relativistisch zu werden und schließlich die maximale stabile Konfiguration bei der Grenzmasse erreicht.

14.2 Grenzmasse Weißer Zwerge: Chandrasekhar- Limit

Mit höherer Masse nimmt der Radius eines Weißen Zwerges $\propto M^{-1/3}$ ab, die Dichte nimmt

Für $Z/A=0.5$ ergibt sich die Grenzmasse zu $M=1.4 M_0$. Diese obere Massengrenze für Weiße Zwerge wird durch die Beobachtung ausgezeichnet bestätigt (Doppelstern-Systeme).

Beachte: die Chandrasekhar-Masse entspricht einer festen Zahl von Protonen oder Neutronen:

$$N_{Ch} = M_{Ch}/m_p = 0.2 \left(\frac{Z}{A} \right)^2 \left(\frac{hc}{G m_p^2} \right)^{3/2}$$

numerischen Integration der Lane-Emden-Gleichung und den nahezu konstanten Faktor

$$Z/A=0.5 \text{ durch das Inverse der dimensionslose Zahl } \alpha_G = \left(\frac{G m_p^2}{hc} \right)^{3/2} = 9.398 \times 10^{-40}, \text{ der}$$

$$\text{Gravitations-Feinstruktur-Konstante, zu } N_{Ch} = 0.2 \left(\frac{Z}{A} \right)^2 \alpha_G^{-3/2} = 1.74 \times 10^{57} \text{ gegeben.}$$

14.3 Neutronensterne

Was passiert mit Sternen, von denen nach dem Ausbrennen ein Kern mit $M > M_{Ch}$ übrig bleibt? Diese Sterne kollabieren zu Dichten, die weit über die der Weißen Zwerge hinausgehen. Die Nukleonen bleiben für eine ganze Weile nichtrelativistisch (wegen ihrer 2000-fach höheren Masse); allerdings führt der hohe Druck der (entarteten) Elektronen dazu, dass sie mit den Protonen "rekombinieren", d.h. in einem inversen β -Zerfall mehr und mehr Protonen zu Neutronen werden. Solange die Neutronen nichtrelativistisch bleiben, erhalten wir ganz analog zur obigen Radius-Masse-Beziehung der Weißen Zwerge eine Radius-Masse Beziehung der Neutronensterne:

$$\text{Neutronenstern: } R = 0.114 \frac{h^2}{G m_p^{8/3}} M^{-1/3}.$$

Für einen Neutronenstern mit der Chandrasekhar-Grenzmasse ergibt sich als Zahlenwert ein Radius von 10 km!

Die Dichte entspricht der von Kernmaterie. Offensichtlich müssen wir zur genaueren Beschreibung also Kernkräfte mitberücksichtigen!

Außerdem zeigt sich, dass ein so kompakter Stern schon kurz vor dem Übergang zu einem schwarzen Loch steht: wir sehen weiter unten, dass der sog *Schwarzschild*-Radius als der minimale Radius, auf den eine Masse M konzentriert sein kann, bevor sie unter der Eigengravitation in einer Raumzeit-Singularität zusammenbricht, gegeben ist durch $M_s = \frac{2GM}{R}$. Für einen Stern mit

$M=1.4 M_0$ ist $R_s=4.2$ km, d.h. der obige stabile Radius ist nur noch das 2-fache des Schwarzschild-Radius!

Zur korrekten Beschreibung von Neutronensternen müssen wir also die Zustandsgleichung von (relativistischer) Kernmaterie und die allgemeine Relativitätstheorie heranziehen. Je nach Modell der Kernwechselwirkung etc. erhält man so in numerischen Rechnungen stabile Konfigurationen von Neutronensternen. Als obere Grenze ergibt sich eine Masse im Bereich von 3-10 M_0 .

Neutronensterne können als **Pulsare** beobachtet werden. Pulsare sind Himmelsquellen, von denen man kurze, sich periodisch wiederholende Pulse, meist im Radiobereich (dort wurden sie entdeckt. Bell and Hewish, 1967; Nobelpreis!), aber auch bis hin ins Sichtbare und den Röntgenbereich, beobachtet. Die gängige Erklärung ist, dass der kollabierte Stern (als Rest einer Supernova) sehr schnell rotiert (Drehimpulserhaltung) und ein starkes Magnetfeld (Einfrieren der Magnetfeldlinien im Plasma) hat. Die Rotationsachse und die Magnetfeldachse sind aber nicht in die gleiche

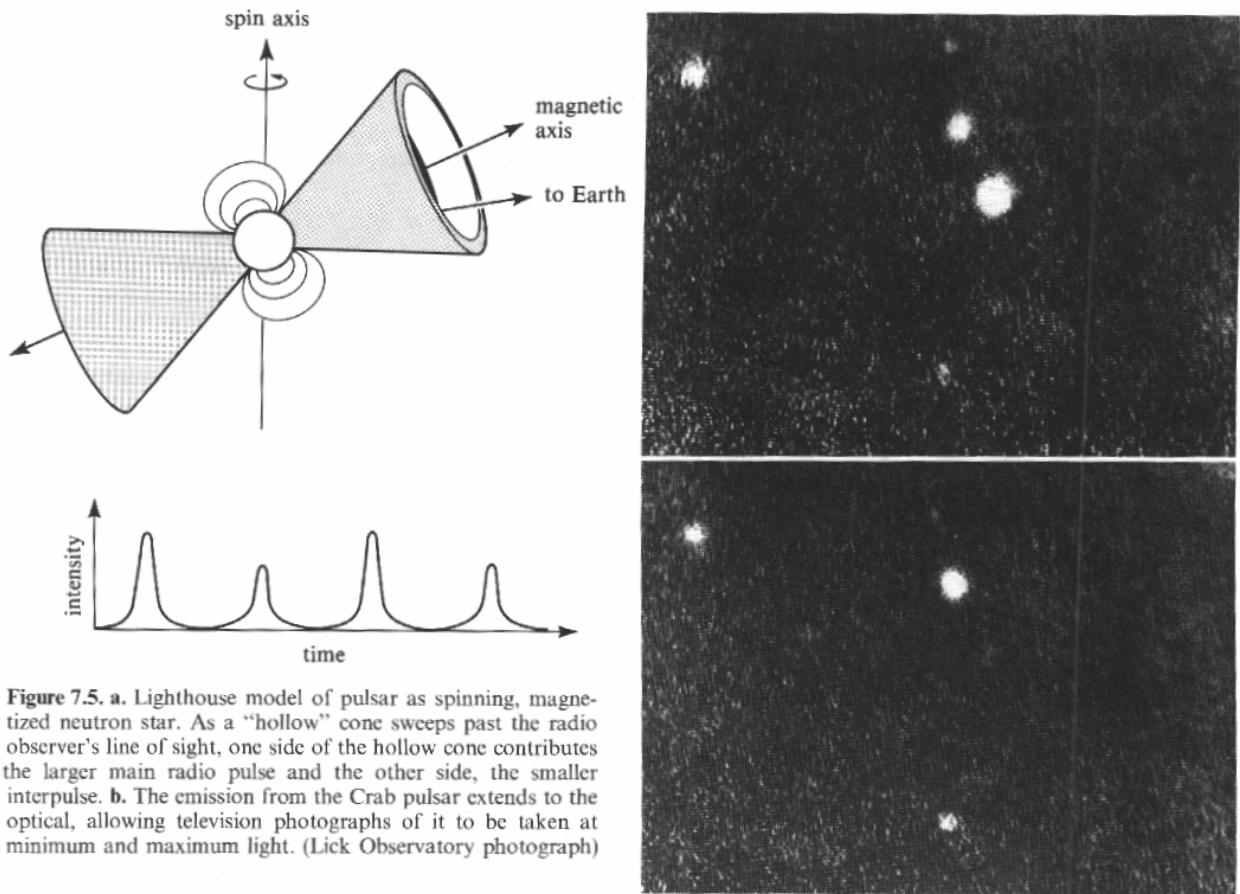


Figure 7.5. a. Lighthouse model of pulsar as spinning, magnetized neutron star. As a “hollow” cone sweeps past the radio observer’s line of sight, one side of the hollow cone contributes the larger main radio pulse and the other side, the smaller interpulse. b. The emission from the Crab pulsar extends to the optical, allowing television photographs of it to be taken at minimum and maximum light. (Lick Observatory photograph)

Abb. 73 aus Shu, *The Physical Universe*

Richtung gerichtet. Der genaue Strahlungsmechanismus ist nach wie vor umstritten. Es ist aber klar, dass sich im Bereich der hohen Magnetfeldstärken in der Nähe der Pole starke elektrische Felder aufbauen, die die dort bei den relativistischen Energien spontan erzeugten Positronen und Elektronen beschleunigen; die relativistischen Teilchen im Magnetfeld erzeugen Synchrotronstrahlung (aus deren Spektralverteilung man auf die Energie der Teilchen und die Magnetfeldstärke am Entstehungsort schließen kann). Auf diese Weise entstehen ähnlich einem Leuchtturm zwei Leuchtkegel. Je nach Orientierung zwischen Drehachse und Beobachter können diese den Beobachter einmal pro Rotation überstreichen: daher die Pulse. Tatsächlich findet man Pulsare im Zentrum von **Supernova** (Typ II)-Überresten. Typ II SN sind die Explosionen am Ende eines massereichen Sternes, bei denen wohl mindestens gelegentlich eine zentraler Rest als Neutronenstern übrig bleibt. Das berühmteste Beispiel ist der Crab-Nebel (SN im Jahre 1084 von chinesischen Astronomen beobachtet und dokumentiert).

Zur Vollständigkeit sei hier erwähnt: Typ I Supernovae entstehen in engen Doppelsternsystemen, wenn der schon zum Weißen Zwerg entwickelte Stern vom Begleiter am Ende dessen Entwicklung zusätzliches Material aufgeladen bekommt, so dass er jenseits der Chandrasekhar-Masse gerät. In der anschließenden Kollaps/Explosion bleibt meist kein zentraler Kern übrig.

Neutronensterne zeigen eine Menge interessanter Effekte: sie rotieren sehr präzise (genaueste Uhren?); gelegentliche Sprünge in der Periode eines einzelnen Pulsars lassen auf ein Pulsar-Beben (Umstrukturierung der festen (!) Kruste) schließen. Die Abstrahlung führt zu langsamem Energieverlust, d.h. Verlängerung der Periodendauer. Es sind auch einige Pulsare in Doppelsternsystemen bekannt.

14.4 Schwarze Löcher

Bei Massen oberhalb der Grenzmasse von Neutronensternen (die leider nicht sehr genau bekannt ist) kann schließlich nichts mehr den Stern gegen seine Eigengravitation stabilisieren. Er kontrahiert so stark, dass er von außen gesehen innerhalb des sog. Schwarzschild-Radius verschwindet. Wir können hier nicht die Allgemeine Relativitätstheorie konsistent und knapp behandeln, um Schwarze Löcher besser zu verstehen.

Wir merken aber an, dass schon Newton bemerkte: wenn ein Objekt genügend kompakt ist, dann kann die Fluchtgeschwindigkeit den Wert der Lichtgeschwindigkeit übersteigen, so dass selbst Licht nicht mehr von dem Objekt weg kann: aus $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ und $E_{pot} = -G \frac{M m}{R}$ ergibt sich wegen der Energieerhaltung als minimale Geschwindigkeit, die nötig ist, um von einem Radius R aus beliebig weit weg zu kommen, die Fluchtgeschwindigkeit $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Damit ist der kritische Radius (**Schwarzschild-Radius**) $R_s = \frac{2GM}{c^2}$.

Direkt beobachtbar sind Schwarze Löcher nicht. Allenfalls kann man die Energiefreisetzung der in ein Schwarzes Loch fallenden Materie sehen (wenn welche hineinfällt). Die freigesetzte Energie ist gewaltig (Größenordnung Ruheenergie der Teilchen). Deshalb kommen akkretierende Schwarze Löcher als Energiequellen von Quasaren (Erklären!) in Betracht. Entsprechend dem heutigen Wissensstand haben viele Galaxien in ihrem Inneren (als Folge ihrer Entwicklung im frühen Universum) ein supermassives Schwarzes Loch (mit mehreren bis mehrenen 1000 Millionen Sonnenmassen). Auch unsere eigene Galaxie hat ein (vergleichsweise kleines) Schwarzes Loch von ca. $2 \times 10^6 M_\odot$ im Zentrum (Arbeit von Eckart und Genzel). Die Beobachtung der Sternbewegungen (Eigenbewegungen mit IR-Interferometrischen Methoden; l.o.s.-Geschwindigkeiten durch Spektroskopie) zeigen, dass diese Masse innerhalb eines genügend kleinen Radius konzentriert ist, dass keine stabile Materiekonfiguration möglich ist.

Zurück zu stellaren Skalen: Schwarze Löcher mit einer Masse von einigen Sonnenmassen sind Kandidaten für Röntgenquellen, deren Energieumsatz man sich erklären kann durch das vom Begleiter auf ein schwarzes Loch überströmende Material in einem Doppelsternsystem. Der eindeutige Beweise für ein schwarzes Loch ist aber bisher nicht möglich.

15 Die Milchstraße

In einer mondlosen Nacht und fernab der Lichter der Zivilisation sieht man die Milchstraße als helles Band am Himmel, das sich von Horizont zu Horizont erstreckt. Die einzelnen Sterne, die zusammen das diffuse Lichtband der Milchstraße ausmachen, kann man mit bloßem Auge nicht auflösen und auch bei der starken Vergrößerung mit guten astronomischen Teleskopen verschmelzen die Sterne bei der durch das *seigern* begrenzten Auflösung zu einem Kontinuum.



Abb. 74: Die Milchstraße im sichtbaren Licht

Die Vorstellung, daß das Band der Milchstraße ein scheibenförmiges Sternensystem ist, in dem wir selber mit der Sonne eingebettet sind, stammt von Immanuel Kant. Er diskutierte, basierend auf früheren Ideen von Thomas Wright und in Analogie zur scheibenförmigen Struktur des



Abb. 75: Die externe Galaxie NGC 291 entspricht nach heutigem Wissen relativ gut der Milchstraße

Planetensystems, daß die Schwerkraft zusammen mit der Drehimpulserhaltung gravitativ gebundene Gebilde in eine Scheibenform zwingt. Er erkannte auch, daß die Umlaufzeit der Sterne bei "vernünftigen" Annahmen über die Masse des Systems so groß sein würden, daß sie nur schwer zu beobachten wären. Schließlich spekulierte er, daß die Milchstraße nicht das einzige solche System ist, sondern daß zumindest einiger der mit bloßen Auge sichtbaren leuchtenden Nebel am Himmel andere solche Galaxien ("Inseln im Universum") in entsprechend großer Entfernung sein könnten.

Mit der fortschreitenden Verbesserung der Teleskop wurde gegen Ende des 18. Jahrhunderts und zunehmend im 19. Jahrhundert klar, daß diese Nebel in vollkommen verschiedene Arten eingeteilt werden können, die zum Teil galaktischen Ursprungs sind (leuchtende Gasnebel: HII-Regionen, planetare Nebel, Reflexionsnebel), und zum anderen Teil tatsächlich die von Kant postulierten anderen Galaxien darstellen. Die verschiedenen Nebel wurden in Katalogen zusammengestellt (Messier, Mxx; new general catalogue, NGCxxxx, index catalogue, ICxxx)

und sowohl die galaktischen Nebel wie auch die Galaxien aufgrund ihres verschiedenen Erscheinungsbildes klassifiziert.

Erst mit der Anwendung der Photographie in der Astronomie gegen Ende des 19. Jahrhunderts, mit der durch lange Belichtung (Integration) wesentlich lichtschwächere Objekte abgebildet werden konnten als mit bloßem Auge selbst in den größten Teleskopen sichtbar waren, gelang der endgültige Durchbruch, indem die Emission der externen Galaxien wenigstens teilweise in das Licht einzelner Sterne (Hubble 1923) und dortiger HII-Regionen aufgelöst werden konnte, und mehr und mehr immer weiter entfernte Galaxien entdeckt wurden.

15.1 Aufbau der Milchstraße

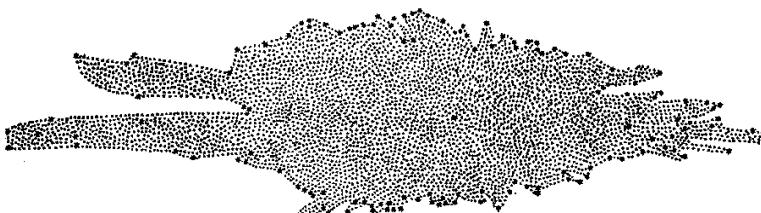


Abb. 76: Herschel's Bild der Milchstraße aufgrund von Sternzählungen (aus Binney & Merrifield)

Herschel versuchte gegen Ende des 18. Jahrhunderts die Form der Milchstraße zu bestimmen, indem er die Verteilung der Anzahl der Sterne bestimmte, die er bis zu immer schwächeren Helligkeiten in verschiedene Richtungen am Himmel (683 Felder) beobachten konnte.

Unter der Annahme, daß die Sterne im Mittel konstante Helligkeit haben,

und daß sie im Mittel mit gleichförmiger Dichte verteilt sind, bestimmte er daraus die räumliche Verteilung der Sterne (siehe Abb.). Die Methode wurde von Kapteyn zum Beginn des 20. Jahrhunderts wesentlich verfeinert: photographische Methoden erlaubten die Ausdehnung zu viel schwächeren, und damit entfernteren Sternen, die Eigenbewegungen der Sterne, gemessen von Jahr zu Jahr, wurden zur Entfernungsbestimmung herangezogen, durch Koordination der Beobachtungen mit vielen anderen Astronomen weltweit wurde eine große Datenbasis angelegt. Das Ergebnis dieser umfangreichen Beobachtungen publizierte er 1922. In Übereinstimmung mit Herschels Ergebnissen ergab sich ein Bild (Kapteyn'sches Universum), in dem die Sonne ungefähr im Zentrum einer ovalen Verteilung von Sternen steht, die sich ca. 5 mal weiter in der Ebene der Milchstraße ausdehnt, als senkrecht dazu. Die Anzahl der Sterne nimmt über eine Entfernung von 800 pc in der Ebene der Milchstraße auf die Hälfte ab, in 2800 pc auf 10%, und in 8500 pc auf 1%.

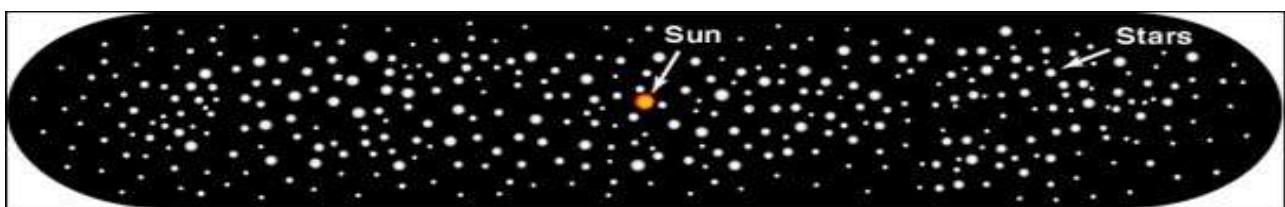


Abb. 77: Bild der Stellung der Sonne in der Milchstraße entsprechend dem Wissensstand am Ende des 19. Jahrhunderts. Da die Extinktion des interstellaren Staubes nicht berücksichtigt wurde, schloss man, dass die Sonne im Zentrum der Milchstraße stünde.

Die Tatsache, daß die Sonne ausgerechnet nahe dem Zentrum unserer so bestimmten Milchstraße steht ist natürlich beunruhigend. Tatsächlich waren sich die Astronomen der damaligen Zeit bewusst, daß eine eventuell vorhandene generelle Absorption oder Streuung des Sternenlichts diese zentrale Stellung der Sonne vortäuschen könnte. Tatsächlich sieht man direkt einige dunkle Regionen im Band der Milchstraße, in denen deutlich weniger Sterne als an anderen Stellen stehen. Es war aber nicht klar, ob dies einfach Regionen ohne Sterne waren, oder Regionen, in denen das Licht der Sterne durch irgend etwas absorbiert wurde. Kapteyn selbst führte sehr sorgfältige Überlegungen hierzu durch: es war damals bereits bekannt, daß Gasatome Licht durch Rayleigh-

Streuung ablenken können. Wegen der Wellenlängenabhängigkeit ($\propto 1/\lambda^4$) ist die Streuung für blaues Licht viel stärker als für rotes (Rötung der untergehenden Sonne; blauer Tageshimmel). Durch Vergleich der Sternhelligkeiten auf photographischen Platten (größere Empfindlichkeit für kurzwelliges Licht im Vergleich zum menschlichen Auge) sollte eine systematische Abschwächung des Lichtes entfernter Sterne durch Rayleighstreuung als Rötung, d.h. als stärkere visuelle Helligkeit im Vergleich zur photographischen, sichtbar sein. Kapteyn fand nur schwache Rötung und schloss daraus, daß die Abdunkelung des Sternenlichts durch dazwischenliegende Materie unbedeutend sei. Heute wissen wir, daß Absorption an interstellarem Staub (s.u.) tatsächlich im sichtbaren Spektralbereich dominiert und uns nur einen kleinen, lokalen Teil der Milchstraße der Beobachtung zugänglich macht.

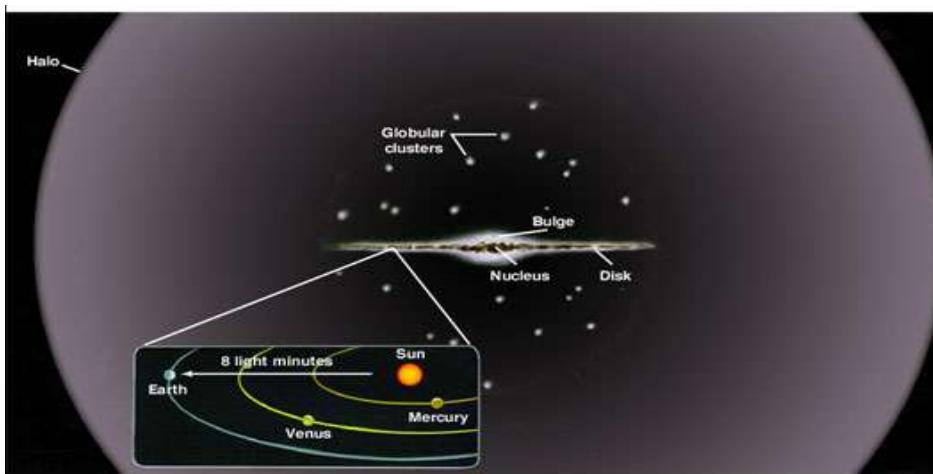


Abb. 78: Shapleys Bild der Milchstraße (weitgehend heute akzeptiert)

Ein vollkommen anderes Bild ergab sich aufgrund der Untersuchungen von Shapley, der 1919 seine Beobachtungen von Kugelsternhaufen veröffentlichte. Mit den Teleskopen der damaligen Zeit waren diese "Nebel" leicht in einige 10^4 bis 10^6 Sterne aufzulösen. Im Unterschied zu den Sternen im Band der

Milchstraße sind die Kugelsternhaufen weit über den Himmel verteilt. Es sind zwar gleich viele auf jeder Seite des Bandes der Milchstraße, die Verteilung ist aber längs des Bandes der Milchstraße asymmetrisch, mit einer klaren Konzentration in Richtung des Sternbild Sagittarius. Shapley interpretierte seine Beobachtungsergebnisse so, daß die Kugelsternhaufen einerseits wegen ihrer großen Masse (große Anzahl von Sternen) dominanten Anteil an der Milchstraße bilden, und deshalb symmetrisch um das Zentrum der Milchstraße angeordnet sein müssten. So daß andererseits die Asymmetrie Richtung Sagittarius im Gegensatz zu Kapteyns Bild die Sonne nicht ins Zentrum der Milchstraße stellt, sondern dieses in Richtung Sagittarius zu vermuten ist. Shapley leitete die Entfernung zu den näheren Kugelsternhaufen durch die Helligkeit der in ihnen enthaltenen Cepheiden-Veränderlichen ab, und schätzte die Entfernung zu den entfernteren mit der Annahme gleicher intrinsischer Helligkeit der verschiedenen Kugelsternhaufen ab. Auf diese Weise bestimmte er den Abstand zum galaktischen Zentrum, d.h. zum Zentrum der Kugelsternhaufen-Verteilung, zu ca. 15 kpc (etwas hoch im Vergleich zum heutigen Wert: 8 kpc). Erst mit dem quantitativen Verständnis der durch den interstellaren Staub hervorgerufenen Absorption konnte Angelegenheit zugunsten des Shapley'schen Bildes entschieden werden.

Nach unserem heutigen Bild liegen die meisten Sterne (Population I) der Milchstraße in einer sehr flachen Scheibe (Dicke ca. 1 kpc). Die Sonne liegt in 8 kpc Entfernung vom Zentrum der Milchstraße. In den inneren 2 kpc nimmt die Dicke der Scheibe erheblich zu (central bulge), so daß sich annähernd kugelförmiger Kern ergibt. Die Sterne in der Scheibe sind im Mittel nur ca. 1 kpc weit im Sichtbaren beobachtbar, weil der interstellare Staub als Komponente der interstellaren Materie optisches Licht sehr stark absorbiert. Als Population II sind die Sterne in Kugelsternhaufen ungefähr sphärisch symmetrisch um das Zentrum der Milchstraße herum verteilt (Halo), mit einer starken Konzentration zum Zentrum hin. Die Sterne des central bulge sind eine Mischung aus

Population I und II. Population I und II unterscheiden sich spektroskopisch dadurch, daß Population II metallarm ist, mutmaßlich also die früheste Generation der Sterne in der Milchstraße darstellt (s.u.). Die Sterne im Halo machen nur einige % der gesamten Masse aus. Die Struktur der Milchstraße ist damit sehr ähnlich zu der vieler externer Galaxien.

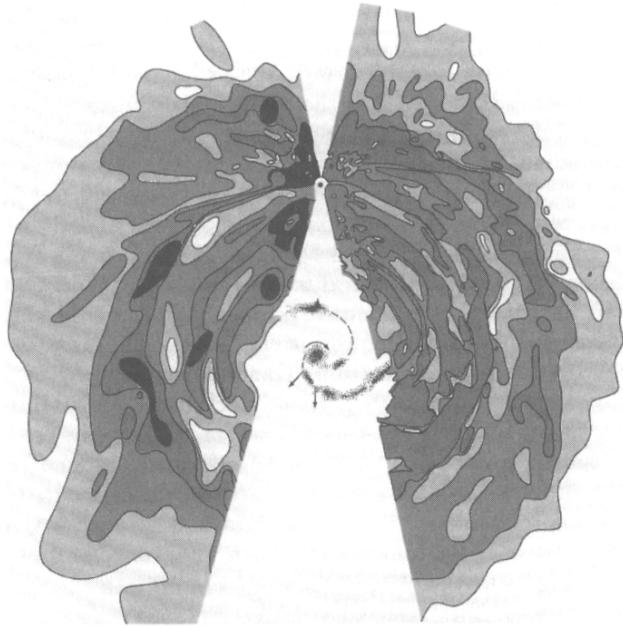


Figure 1.6 The distribution of atomic hydrogen in the plane of the Milky Way as inferred from early 21 cm observations. The Sun is located at the point marked “O.” The empty cone toward the Galactic Center and anti-center cannot be mapped out using the kinematic technique employed here. [Reproduced from Oort, Kerr & Westerhout (1958), by permission]

In der Scheibe der Milchstraße machen die Sterne ca. 90 % der Masse aus. Die andere Materie liegt als *interstellares Gas* vor, dem mit ca. 1% der Masse der interstellare Staub beigemischt ist. Gut die Hälfte der interstellaren Materie liegt als Molekülwolken vor (Wasserstoff in Form von H_2), der andere ist atomar (Wasserstoff als H, bzw. HI in der astronomischen Notation). Ein kleiner Teil des atomaren Gases ist ionisiert (H^+ , HII). Die Verteilung der interstellaren Materie ist sehr inhomogen. Sie ist in Form der massiven Molekülwolken längs der Spiralarme und im galaktischen Zentralbereich konzentriert. Aus den Molekülwolken entstehen neue Sterne. Nach ihrem thermonuklearen Ausbrennen geben die Sterne den meisten Teil ihrer Materie wieder an das interstellare Medium zurück, daß so nach und nach mit in den Sternen erzeugten schwereren Elementen ("Metalle" in der astronomischen Sprechweise) angereichert wird.

Abb. 79: Verteilung von atomarem Wasserstoff, HI

15.2 Dynamik der Milchstraße

Auskunft über die Bewegung der Materie in der Milchstraße erhalten wir über die spektroskopisch vermessene Dopplerverschiebung. Im optischen Spektralbereich können wir dabei nach dem oben Gesagten nur die unmittelbare Sonnenumgebung studieren. Um die großräumige dynamische Struktur zu untersuchen, müssen wir Beobachtungen des interstellaren Gases heranziehen. Hier hat sich insbesondere die Linienemission von atomarem Wasserstoff bei 21 cm (den wir unten genauer besprechen) als sehr wichtig herausgestellt.



Abb. 80: schematisches Bild der Massenverteilung in der Milchstraße

mit der innerhalb des Radius eingeschlossenen Masse $M(R)$, die in dieser Näherung rotationssymmetrisch verteilt sein muss (wir beschränken uns auf Bewegungen innerhalb der Scheibe der Milchstraße). Mit dem Zusammenhang zwischen Umlaufzeit und

Im Mittel ist die Fliehkraft gleich der Gravitation. Mit dem 3. Keplerschen Gesetz erhält man

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi} M(R),$$

Bahngeschwindigkeit, $T = \frac{2\pi R}{v}$, ergibt sich aufgelöst nach der Geschwindigkeit

$$v(R) = \sqrt{G M \frac{(R)}{R}}$$
 (Rotationskurve). Ein einfaches Modell unterscheidet 3 Bereiche für die

Massenverteilung (siehe Abbildung):

a) konstante Volumendichte im Inneren:

$$M(R) = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho ; \text{ dies führt zu}$$

$$v(R) = \sqrt{G \frac{4\pi}{3} \rho \frac{R^3}{R}} \propto R, \text{ d.h. Rotation wie ein starrer Körper.}$$

b) konstante Flächendichte in der Scheibe:

$$M(R) \propto R^2, \text{ entsprechend } v(R) \propto \sqrt{R},$$

c) vernachlässigbare weitere Masse im Außenbereich, d.h. $M(R) = \text{const.}$, entsprechend

$$v(R) \propto \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Abb. 81: Rotationskurve gemäß dem einfachen Modell

Tatsächlich ist die Annahme konstanter Dichte im Inneren nicht sehr gut. Vielmehr wird in vielen externen Galaxien und auch in der Milchstraße zusätzlich eine Massenkonzentration im Zentrum ("central bulge") mit einem entsprechenden $1/\sqrt{R}$ außerhalb desselben beobachtet. Dann folgt der Bereich b) (Scheibe). Der Bereich c) wird oft nicht klar erreicht, sondern die eingeschlossene Masse nimmt weiter nach außen zu (siehe Abb.).

Entsprechend diesem einfachen Bild geben die Bahndaten der Sonne ($R=7$ kpc, $v=250$ km/s) eine eingeschlossene Masse von $M(R_0) = \frac{R_0 v^2}{G} = 2 \times 10^{44} \text{ g} = 10^{11} M_\odot$.

15.3 Dunkle Materie

Die Rotationskurve der Milchstraße, ebenso wie die vieler anderer Galaxien (meist in HI 21cm gemessen), bleiben nach außen flach, d.h. zeigen eine Zunahme der eingeschlossenen Masse $\propto R$ an. Vergleicht man dies mit der sichtbaren Materie in Form von Sternen (und den interstellaren Gaswolken selbst, deren Masse man auf verschiedene Weisen abschätzen kann), so zeigt sich, dass die Milchstraße und andere Galaxien in diesen Tracern einen relativ scharfen Rand haben, d.h. es kommt weiter außen keine sichtbare Materie mehr hinzu. Die durch die Rotationskurve, d.h. durch ihre Gravitationswirkung nachgewiesene Masse ist also "dunkel".

Es wird viel spekuliert, in welcher Form diese dunkle Materie existiert. Es könnte nicht leuchtende, d.h. bei den dort herrschenden Bedingungen (Dichte, Temperatur) nicht zur Strahlung angeregte interstellare Materie sein; dann sollte sie aber u.U. in Absorption gegen helle extragalaktische Quellen nachweisbar sein. Oder sie könnte in Form von diskreten, dichten Massepunkten (Braune Zwerge, ultraleichte Schwarze Löcher primordialen Ursprungs) vorliegen; dann sollte sie in Mikro-Gravitationslinsen-Experimenten nachweisbar sein. Neueste Ergebnisse zeigen, dass nur ein sehr kleiner Bruchteil der dunklen Materie auf diese Weise erklärt werden kann. Neutrinos scheiden nach der kürzlichen Bestimmung der endlichen, aber sehr kleinen Masse mittlerweile auch aus. Alternativ kann es sich um exotische, nicht baryonische Materie handeln.

Die durch die Rotationskurve der Milchstraße nachgewiesene Materie entspricht gut dem Doppelten der sichtbaren Materie. Bei anderen Galaxien ist der Anteil der dunklen Materie noch

deutlich höher.

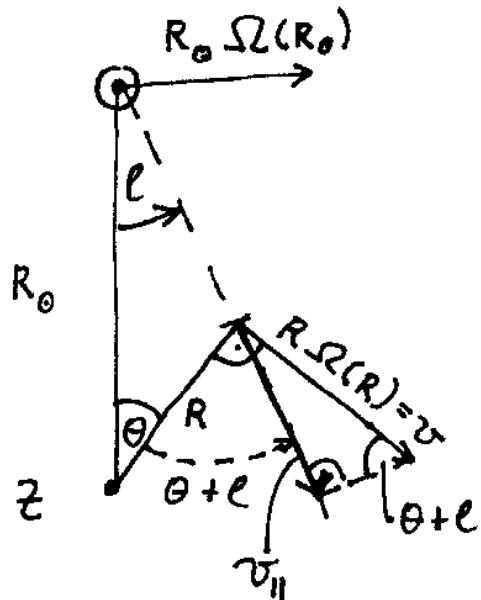


Abb. 82: zur Geschwindigkeitsmessung in der Milchstraße

Geschwindigkeiten im mit der Sonne mitrotierenden System ab: $v_{\parallel} = R(\Omega(R) - \Omega(R_0)) \sin(\theta + l)$.

Mit dem Sinussatz $\frac{R_0}{\sin(\theta + l)} = \frac{R}{\sin(l)}$ wird also $v_{\parallel} = R_0(\Omega(R) - \Omega(R_0)) \sin(l)$. Die

Geschwindigkeit längs des Sehstrahles wird also maximal bei $\theta + l = \frac{\pi}{2}$, $R = R_0 \sin(l)$; dort

beträgt sie $v_{max} = v(R = R_0 \sin l)$. Damit ergibt sich die Rotationskurve als

$$v(R) = R\Omega(R) = v_{max} + R_0\Omega(R_0)\sin l$$

aus den messbaren Größen v_{max} , d.h. der maximalen Geschwindigkeit in einem gegen die Richtung l aufgenommenen Spektrum, und $\Omega(R_0)$, d.h. die Winkelgeschwindigkeit oder Umlaufperiode der Sonne.

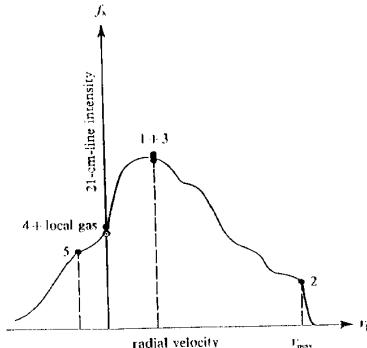
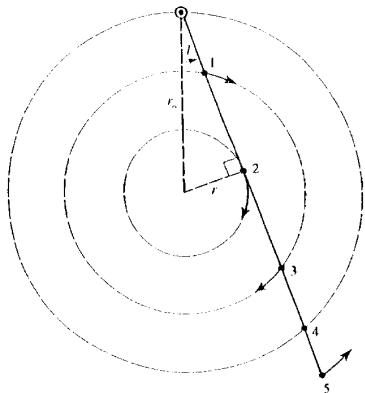


Abb. 83: Zuordnung von Dopplergeschwindigkeit und Position in der Milchstraße

Mit ähnlichen Argumenten lässt sich auch in Galaxienhaufen aus der mittleren Geschwindigkeit der einzelnen Galaxien oder deren Geschwindigkeitsdispersion unter der Annahme, dass der ganze Haufen gravitativ gebunden ist, eine Virialmasse des Haufens herleiten, die deutlich (bis zu einem Faktor 10 oder mehr) höher ist als die sichtbare, d.h. über die Leuchtkraft, bestimmte Masse der einzelnen Galaxien zusammen. Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man das sehr heiße, in thermischer Röntgenstrahlung nachgewiesene intergalaktische Plasma als gravitativ gebunden annimmt.

Was diese dunkle Materie ist, stellt sicher eine der spannendsten Fragen der modernen Astrophysik für die nächsten Jahre oder Jahrzehnte dar!

Messung der Rotationskurve der Milchstraße

Aus der nebenstehenden Skizze lesen wir für die

$$v_{\parallel} = R(\Omega(R) - \Omega(R_0)) \sin(l)$$

Umgekehrt kann man bei bekannter Rotationskurve die verschiedenen Geschwindigkeitskomponenten der HI-21cm-Emission der entsprechenden Entfernung zuordnen, und so die Materieverteilung des HI-Gases in der Milchstraße vermessen (siehe Abb.).

15.4 Galaxien der lokalen Gruppe

Die Milchstraße ist Mitglied einer Ansammlung von Galaxien, der sog. lokalen Gruppe. Die genaue Zuordnung einzelner Galaxien zur lokalen Gruppe ist nicht ganz eindeutig, da der Übergang zu Nachbargruppen fließend ist. Außerdem sind sicher viele schwächere Galaxien bisher unentdeckt geblieben (siehe Scientific American, September 1998, pp. 28 ff. bezüglich neuerer

Table 4.3 Local Group members

Name	Alternate Name	Coordinates		Type	Distance (kpc)	M_V
		RA (1950)	Dec			
M31	NGC 224	00 40.0	+40 59	Sb	725	-21.1
Milky Way	Galaxy	17 42.4	-28 55	Sbc	8	-20.6
M33	NGC 598	01 31.1	+30 24	Sc	795	-18.9
LMC		05 24.0	-69 48	Irr	49	-18.1
IC 10		00 17.7	+59 01	Irr	1250	-17.6
NGC 6822	DDO 209	19 42.1	-14 56	Irr	540	-16.4
M32	NGC 221	00 40.0	+40 36	dE2	725	-16.4
NGC 205		00 37.6	+41 25	dE5	725	-16.3
SMC		00 51.0	-73 06	Irr	58	-16.2
NGC 3109	DDO 236	10 00.8	-25 55	Irr	1260	-15.8
NGC 185		00 36.2	+48 04	dE3	620	-15.3
IC 1613	DDO 8	01 02.2	+01 51	Irr	765	-14.9
NGC 147	DDO 3	00 30.5	+48 14	dE4	589	-14.8
Sextans A	DDO 75	10 08.6	-04 28	Irr	1450	-14.4
Sextans B	DDO 70	09 57.4	-05 34	Irr	1300	-14.3
WLM	DDO 221	23 59.4	-15 45	Irr	940	-14.0
Sagittarius		18 51.9	-30 30	dSph/E7	24	-14.0
Fornax		02 37.8	-34 44	dSph/E3	131	-13.0
Pegasus	DDO 216	23 26.1	+14 28	Irr	759	-12.7
Leo I	DDO 74	10 05.8	+12 33	dSph/E3	270	-12.0
Leo A	DDO 69	09 56.5	+30 59	Irr	692	-11.7
And II		01 13.5	+33 09	dSph/E3	587	-11.7
And I		00 43.0	+37 44	dSph/E0	790	-11.7
SagDIG		19 27.9	-17 47	Irr	1150	-11.0
Antlia		10 01.8	-27 05	dSph/E3	1150	-10.7
Sculptor		00 57.6	-33 58	dSph/E3	78	-10.7
And III		00 32.6	+36 12	dSph/E6	790	-10.2
Leo II	DDO 93	11 10.8	+22 26	dSph/E0	230	-10.2
Sextans		10 10.6	-01 24	dSph/E4	90	-10.0
Phoenix		01 49.0	-44 42	Irr	390	-9.9
LGS 3		01 01.2	+21 37	Irr	760	-9.7
Tucana		22 38.5	-64 41	dSph/E5	900	-9.6
Carina		06 40.4	-50 55	dSph/E4	87	-9.2
Ursa Minor	DDO 199	15 08.2	+67 23	dSph/E5	69	-8.9
Draco	DDO 208	17 19.2	+57 58	dSph/E3	76	-8.6

SOURCE: From data kindly provided by M. Irwin.

Tabelle 15.1: Die Mitglieder der lokalen Gruppe

Ergebnisse, insbesondere die Zwerggalaxie in Sagittarius innerhalb der äußersten Spiralarme der Milchstraße). Die Tabelle listet ca. 35 Mitglieder, die Abb. zeigt deren grobe Lage im Raum.

Die lokale Gruppe gliedert sich in zwei Untergruppen, konzentriert um die Milchstraße und um die Andromeda Galaxie (M31), die sich mit ca. 130 km/s aufeinander zu bewegen ($v_{LSR}(M31)=300$ km/s). Ähnlich zu den dicht benachbarten Zwerggalaxien, die M31 begleiten, hat die Milchstraße mit der Großen und der Kleinen Magellanschen Wolke (LMC, SMC) ebenfalls zwei Tochtergalaxien, die sich so nahe an der Milchstraße bewegen, daß Gasaustausch und dynamische Störung zwischen diesen drei Galaxien von Bedeutung sind. Die LMC bewegt sich mit 275 km/s zum LSR. In der LMC ereignete sich 1987 eine Supernova, die erste seit Kepler, die mit bloßem Auge sichtbar war.

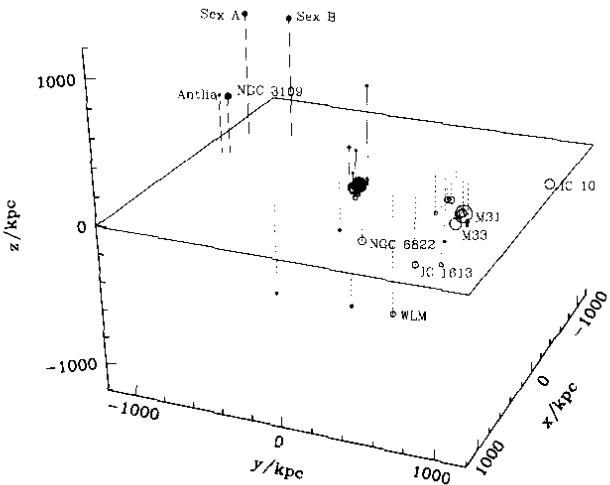


Figure 4.15 Galactocentric coordinates of Local Group galaxies. The Milky Way lies at the origin, with the Galactic plane at $z = 0$, and the vector from the Sun to the Galactic center parallel to the x -axis. Galaxies at positive Galactic latitudes are shown as filled points, while those at negative latitudes are shown as open symbols. The projection on to the $z = 0$ plane is also indicated. The size of the symbol increases with the luminosity of the galaxy.

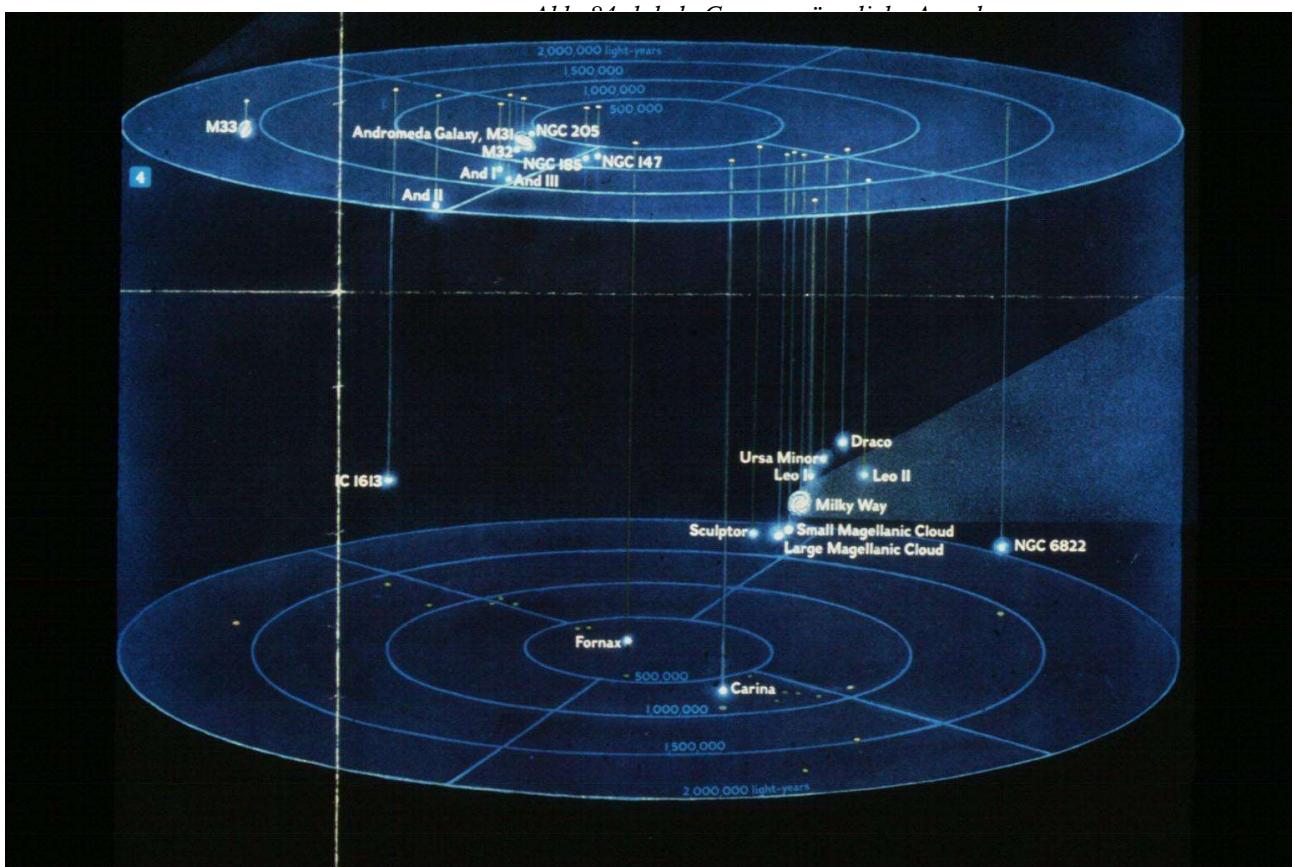


Abb. 85: die lokale Gruppe

16 Die interstellare Materie (ISM)

In den äußeren Bereichen der Milchstraße, z.B: im Abstand der Sonnenbahn, ist der mittlere Abstand der Sterne ca. 1 pc. Vergleich mit dem Sternradius von typisch 10^6 km zeigt, daß nur ein verschwindender Teil des Volumens mit Sternen ausgefüllt ist:

$1 \text{ pc}/10^6 \text{ km} = 3 \times 10^{18} \text{ cm}/10^{11} \text{ cm} = 3 \times 10^7$, d.h. ein Volumenverhältnis von $10^{23}!$ Dieses Volumen ist keineswegs leer, sondern mit Gas und Staub mit einer mittleren Teilchendichte von ca. 1 Atom/cm³ ausgefüllt. Die genauen Eigenschaften dieser interstellaren Materie (interstellar matter; ISM) kennen wir erst seit wenigen Jahrzehnten. Die wesentlichen Aspekte wollen wir in den folgenden Kapiteln behandeln.

Hier zunächst eine Übersicht:

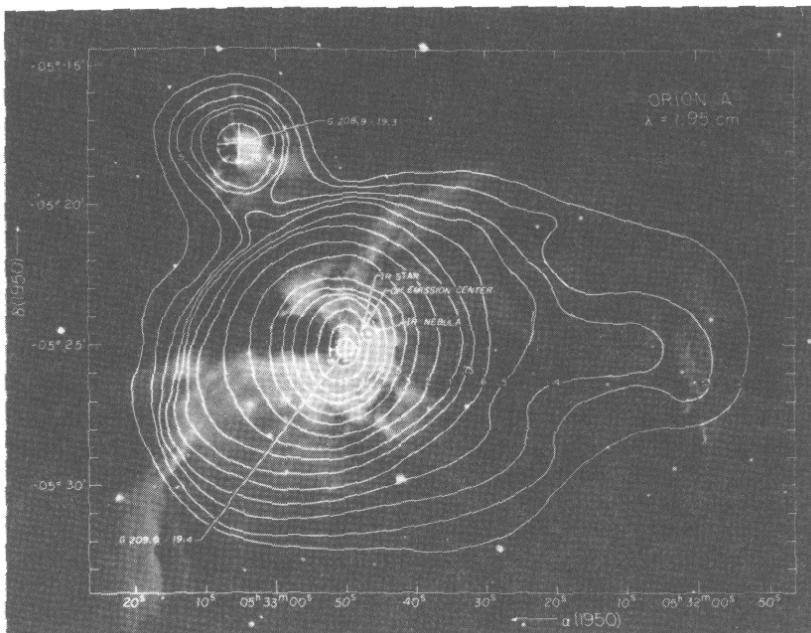


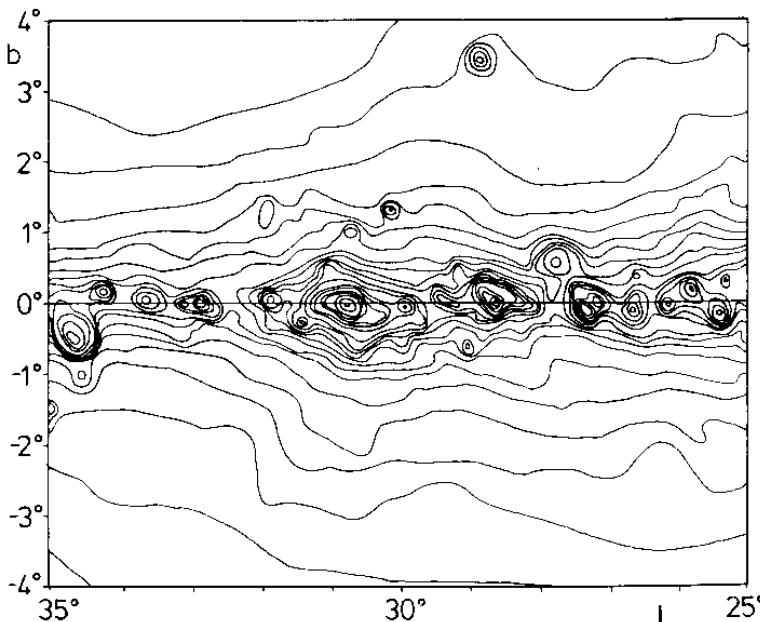
Abb. 86: Optische Aufnahme von der HII Region Orion A, kombiniert mit den Konturlinien der Radio-frei-frei-Strahlungsintensität bei 1.95 cm-Wellenlänge (aus Scheffler & Elsässer; Bau und Physik der Galaxis)

Die bekannte Materie in der Milchstrasse ist ca. zu je 90% in Sternen und zu 10% im interstellaren Gas lokalisiert. Die Sterne bilden sich aus dem interstellaren Material, genauer aus den dichten, neutralen und kalten Molekülwolken, die ihrerseits ca. 50% des interstellaren Materials in der Milchstraße ausmachen. Nach ihrem Ausbrennen geben sie die nuklear prozessierte Materie in Supernovae oder Novae-Explosionen an das interstellare Material zurück, z.T. auch während der Hauptreihenphase und Riesenphase durch Sternwinde. Die Materie durchläuft also einen *kosmischen Kreislauf*. Die Sternentwicklung

und der Sternen "tod" als Teil dieses Kreislaufes sind relativ gut verstanden, da Sterne relativ einfach zu beschreibende Strukturen sind (hohe Symmetrie, einige wenige grundlegende physikalische Effekte und Prozesse). Die Sternbildung, d.h. die sukzessive Fragmentierung des dünnen interstellaren Gases zu immer dichteren Strukturen, aus denen schließlich protostellare Kondensationen und Sterne entstehen, ist sehr viel schlechter verstanden. Diese Vorgänge sind sehr komplex; sie sind auf großen Skalen maßgeblich beeinflusst durch das im interstellaren Gas eingebetteten galaktische Magnetfeld und durch (magnetohydrodynamische) Turbulenz. Bei der eigentlichen Sternbildung spielt das Magnetfeld und der Drehimpulstransport eine wesentliche Rolle. Viele Aspekte sind noch nicht verstanden. Generell kann man sagen, daß sich im Laufe der letzten Jahre herauskristallisiert hat, daß der Sternentstehungsprozess ein überraschend komplexer Vorgang ist; Selbstregulation durch Rückwirkung der entstehenden Sterne auf ihre "Mutter" wolke, z.B. durch die ionisierende Strahlung, die Sternwinde und die Schockwellen der Supernovae-Explosionen, spielen eine entscheidende Rolle. Ebenso der großräumige Zustand der Galaxie (getriggerte Sternentstehung-Ausbrüche durch Galaxienkollisionen). Da andererseits der kosmische Kreislauf insgesamt für die Entwicklung der Galaxien im Universum von den frühen Phasen kurz nach dem Urknall bis zum jetzigen Zustand von entscheidender Rolle ist, ist das

Gebiet ein sehr aktuelles und aktives Forschungsgebiet.

Die Erscheinungsformen der interstellaren Materie sind entsprechend dem oben gesagten sehr vielfältig. Entsprechend der Entdeckungsgeschichte ist zunächst der **interstellare Staub** zu nennen: interstellare Wolken fallen wegen der Absorption des Lichtes dahinter liegender Sterne als dunkle Flecken auf großräumigen Himmelsaufnahmen auf, ebenso sehen wir viele dunkle Filament vor dem Hintergrund der optischen Nebelemission in HII-Regionen (s.u.). Außerdem ist er als Reflexionsnebel um relativ isoliert stehende Sterngruppen (Beispiel: Plejaden) zu sehen; die spektrale Analyse des diffusen Lichtes weist dieses als gestreutes Sternlicht aus (stellare Spektrallinien; blau-Färbung des Lichtes). Wegen der Ausrichtung der (länglichen) Staubkörner im interstellaren Magnetfeld ist das sowohl das am Staub gestreute Sternlicht, wie auch das absorbierte Licht (und die vom Staub ausgesandte IR-Strahlung) polarisiert. Systematische Untersuchungen der interstellaren Absorption haben mittlerweile ein relativ gutes qualitatives Bild der Eigenschaften des interstellaren Staubes ergeben, daß die wesentlichen beobachteten Eigenschaften (Rötung; Extinktionskurve, Polarisation) erklärt.



Ausschnitt einer Konturenkarte der galaktischen Radiokontinuumsstrahlung bei 1414 MHz. Winkelauflösungsvermögen 11 Bogenminuten. Die mittlere horizontale Linie $b = 0^\circ$ stellt den Verlauf des galaktischen Äquators dar (b = galaktische Breite, l = galaktische Länge). Die hier stark konzentrierten HII-Regionen treten klar als diskrete Radioquellen hervor. (Nach W.J. Altenhoff et al. 1970).

Abb. 87: Kontinuumstrahlung: HII Regionen

ISM ihrer Umgebung ionisiert: **HII Regionen**. Die sind assoziiert mit großen Molekülwolken-Komplexen, aus denen heraus offensichtlich die Sterne entstehen. Erst mit der Entwicklung der Radioastronomie (nach dem 2. Weltkrieg) konnten diese HII-Regionen auch durch ihre frei-frei-Radiokontinuumstrahlung (siehe letztes Semester) durch die ganze Milchstraße hindurch nachgewiesen werden (siehe Abb.).

Es stellt sich heraus, daß der interstellare Staub nur ca. 1% der Masse der ISM ausmacht. Die HII-Regionen sind nur ein unbedeutender Anteil des Volumens. Der eigentliche Durchbruch bei dem Verständnis des ISM gelang erst mit der Weiterentwicklung der Radioastronomie, zunächst mit der Entdeckung der HI 21cm Linie, und später mit der Entdeckung verschiedener Moleküllinien, insbesondere den CO-Rotationsübergängen (beide werden wir unten ausführlich besprechen).

Direkter Hinweis auf **interstellares Gas** ergab sich historisch daraus, daß Spektren mancher spektroskopischer Doppelsterne scharfe Absorptionslinien aufweisen, die nicht der Bewegung der Sterne folgen, d.h. von ruhender Materie im Vordergrund hervorgerufen sind. Mit der durch die Einführung der Photographie bedingten Empfindlichkeitssteigerung wurden die teilweise schon mit bloßem Auge erkennbaren diffusen Emissionsnebel ausgiebig untersucht. Heute wissen wir, daß diese Nebel in atomare Linienstrahlung, vor allem in den Rekombinationslinien von Wasserstoff, leuchten. Sie werden angeregt durch massereiche, junge Sterne, deren UV-Strahlung das

Großräumige Kartierungen der Milchstraße in beiden Tracern zeigen heute, daß das ISM in einer sehr dünnen Scheibe in der Ebene der Milchstraße konzentriert ist. Es ist dynamisch sehr aktiv (siehe oben) und bestimmt über die aus dem ISM stattfindende Sternentstehung maßgeblich die Entwicklung der Galaxien. Die Struktur ist sehr komplex (Klumpigkeit, Struktur auf allen Skalen) und nach heutiger Meinung durch nichtlineare Dynamik (Turbulenz) bedingt.

Die besten Untersuchungen zur globalen Dynamik der Milchstraße ergeben sich aus dem Studium der HI 21cm -Linie, genauer deren großräumiger Verteilung und Geschwindigkeitsstruktur. Das Verständnis der Sternentstehungs-Aktivität ist eng verknüpft mit der Untersuchung der Molekülwolken in CO und anderen Molekülen. Rückschlüsse auf die dort herrschenden Bedingungen (Dichte, Temperatur) sind über die Anregungsverhältnisse der beobachteten Molekül-Übergänge möglich. Untersuchung der räumlichen Verteilung und kinematischen Information in den Linienprofilen ergeben ein Bild der Struktur und Dynamik.

16.1 interstellarer Staub

Schon Herschel beobachtete im 18. Jahrhundert, daß in vielen Regionen am Himmel scheinbar "Löcher" sind, d.h. daß es Gebiete ohne sichtbare Sterne gibt. Heute wissen wir, daß hier das Sternenlicht durch vorgelagerten Staub blockiert wird.

Quantitativer leitete Trümpler (1930) mit folgender

Überlegung die Existenz interstellarer Absorption ab: für offene Sternhaufen ist sowohl die scheinbare Helligkeit,

d.h. der beobachtbare Strahlungsfluß $F = \frac{L}{4\pi r^2}$ wie auch

der von ihnen eingenommene Raumwinkel $\pi \Theta^2 = \frac{D^2}{r^2}$

proportional zu $1/r^2$. Nimmt man an, daß im Mittel alle Sternhaufen eine einheitliche Leuchtkraft und einen einheitlichen Durchmesser haben, so sollte sich beim Auftrag der einfach zu beobachtenden Größen F und Θ^2

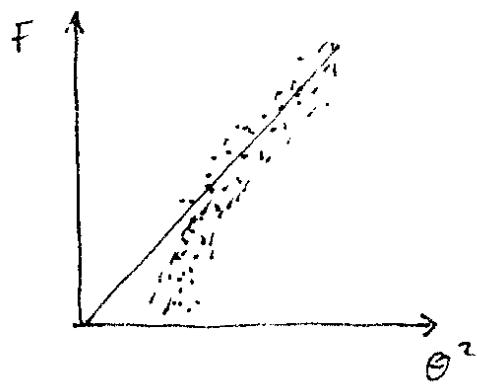


Abb. 88: Verhältnis von Fluss und Raumwinkel offener Sternhaufen

Tatsächlich zeigt die Beobachtung eine Tendenz derart, daß kleine Haufen dunkler sind als erwartet (siehe Abb.). Sorgfältiger Ausschluss von einem möglichen Beobachtungsbias und die Tatsache, daß die Erde wohl nicht an einem ausgezeichneten Punkt im Universum steht (Kopernikanisches Prinzip), läßt als Erklärung nur zu, daß eine mit der Entfernung zunehmende interstellare Extinktion vorhanden ist. Man definiert diese Extinktion A so, daß

$$m - M = -5 + 5 \log r + A$$

Die Extinktion ist je nach Wellenlängenbereich verschieden (s.u.), der Wellenlängenbereich wird durch die astronomisch üblichen Buchstaben als Index gekennzeichnet, z.B. visuelle Extinktion A_v . Vergleicht man mit der Definition der optischen Tiefe $I = I_0 e^{-\tau}$, so ergibt sich

$$A = \Delta m = -2.5 \log \frac{I}{I_0} = 2.5 \log e^\tau = 1.086 \tau, \text{ d.h. unabhängig vom Wellenlängenbereich sind}$$

Extinktion und optische Tiefe fast gleich.

Staubextinktion

Wir wissen heute, daß wir im Mittel ca. 1 kpc weit in der Ebene der Milchstraße sehen können, d.h.

wir sehen im sichtbaren Spektralbereich tatsächlich nur einen kleinen Teil der Milchstraße ($R=7\text{ kpc}$ für die Sonnenbahn). Welche Materie kann diese Extinktion verursachen? Allgemein gilt, daß die stärkste Streuung an Teilchen auftritt, die eine Größe von ungefähr der Lichtwellenlänge haben.

Man schreibt die optische Tiefe als $A_\lambda \approx \tau_\lambda \approx \chi r$, mit einem Extinktionskoeffizienten

$\chi = \pi a^2 Q_{ext} n_{dust}$, d.h. dem geometrischen Querschnitt der Streuteilchen und einem Streufaktor Q , sowie der Teilchendichte der Streuer n_{dust} . Für $a \approx \lambda$ ist $Q_{ext} \approx 1$. Insgesamt ist also

$$A_\lambda = 1.086 \tau_\lambda = 1.086 \pi a^2 Q_{ext}(\lambda) n_{dust} r.$$

Im sichtbaren Spektralbereich ($\lambda = 500\text{ nm}$) ergibt sich also ein A_v von 1 für Teilchen der Größe der Lichtwellenlänge über eine Entfernung von 1 kpc bei einer Teilchendichte von

$$n_{dust} = \frac{A_v = 1}{1.086 \pi a^2 Q_{ext} (\approx 1) r (= 1 \text{ kpc})} = \frac{1}{\pi a^2 r} = 4 \times 10^{-14} \text{ cm}^{-3}. \text{ Bei einer spezifischen Dichte der}$$

Staubteilchen von $\rho_0 = 1 \text{ g/cm}^{-3}$ entspricht dies einer Massendichte der Staubteilchen von

$$\rho_{dust} = \frac{4\pi}{3} a^3 n_{dust} \rho_0 = 2 \times 10^{-26} \text{ g/cm}^{-3}. \text{ Vergleich mit mittleren Massendichte in der Ebene der}$$

Milchstraße (die aus der Höhenverteilung der Sterne senkrecht zur Galaktischen Scheibe bekannt ist), der sogenannten Oort'schen Dichte $\rho_{Oort} = 10^{-24} \text{ g/cm}^3$ macht dieser Staub also nur ca. 2% der

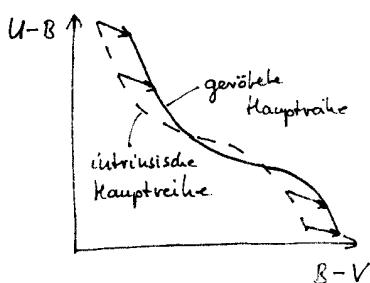
Materie aus. Dies stimmt gut mit den Elementhäufigkeiten und der Annahme, daß der Staub im wesentlichen aus schweren Elementen und deren Verbindungen (Silicate, Graphit, ...) überein.

Die Abnahme der Extinktion, d.h. des Streuvermögens, mit wachsender Wellenlänge führt zu einer Rötung des durchtretenden Sternenlichts. Man definiert den Farbexzess $E_{B-V} = A_B - A_V$ und

findet empirisch als grobe Näherung $\frac{A_V}{E_{B-V}} \approx 3$ als Unterschied der

Extinktion im Visuellen und Blauen. Entsprechend erscheint das von *Reflexionsnebeln* gestreute Licht bläulich, tief eingebettete Sterne rötllich. Im Zweifarben-Diagramm erscheint z.B. die Hauptreihe wegen des Farbexzesses verschoben (siehe Abb.). Aus der beobachteten Lage der Hauptreihe eines Sternhaufens im

Abb. 89: Rötungskurve



Zweifarben-Diagramm kann man so auf den Farbexzess schließen, und damit die Extinktion in Richtung dieses Sternhaufens bestimmen.

Staubbildung

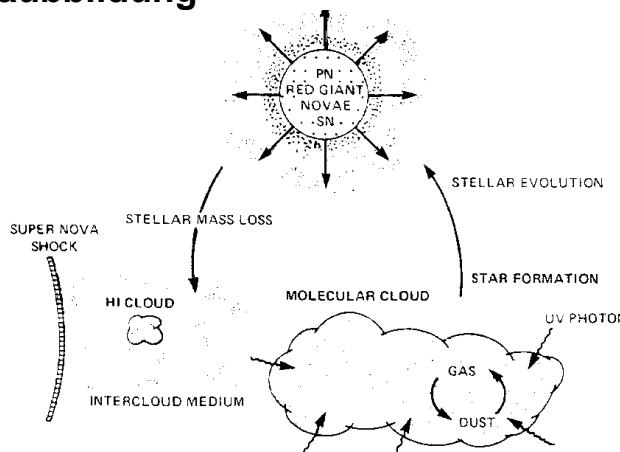


Abb. 90: Staubbildung

Der interstellare Staub entsteht hauptsächlich bei der Expansion und schnellen Abkühlung der Hülle später Riesen; je nach Zusammensetzung der Materie hauptsächlich in Form von Silikaten (sauerstoffreich) und Graphit (kohlenstoffreich). Im interstellaren Raum frieren auf die Stauboberfläche Moleküle aus; chemische Reaktionen sättigen die Verbindungen mit Wasserstoff (Wassereis- (H_2O)- und Ammoniak (NH_3)-Mäntel), die unter Umständen in warmen Gebieten wieder schnell Abdampfen.

Staubemission im Infraroten

Die optische Tiefe des Staues kann im Infraroten und Ferninfraroten gut folgendermaßen parametrisiert werden:

$$\tau_\lambda = N_H \begin{cases} 7 \times 10^{-21} (\lambda / [\mu\text{m}])^{-2}; & \lambda > 100 \mu\text{m} \\ 7 \times 10^{-22} (\lambda / [\mu\text{m}])^{-1.5}; & 40 \mu\text{m} < \lambda < 100 \mu\text{m} \end{cases}.$$

Hierbei ist N_H die Säulendichte (cm^{-2}) an Wasserstoffatomen (im Sichtbaren gilt ungefähr

$$\frac{N_H}{A_v} = 2 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2} \text{ mag}^{-1},$$
 bestimmt durch Vergleich der visuellen Extinktion (Sternzählungen)

mit der Stärke der Ly α -Kante).

Der Staub wird z.B. durch die Absorption von UV-Photonen oder durch Stöße mit dem Wasserstoffgas aufgeheizt und strahlt entsprechend einem Schwarzkörper, aber vermindert um die mit zunehmender Wellenlänge schnell abnehmenden optischen Tiefe. Entsprechend der *detection-equation* (s.u.) ist die spezifische Intensität $I_\lambda = B_\lambda(T)(1 - e^{-\tau})$, bzw. im optischen dünnen Fall

$\tau_\lambda \ll 1$: $I_\lambda \approx B_\lambda(T) \tau_\lambda$. Durch photometrische Beobachtung, d.h. Messung der

Strahlungsintensität bei zwei Wellenlängen, ergibt sich dann aus dem Verhältnis der Intensitäten

$$\frac{I_{\lambda_1}}{I_{\lambda_2}} = \frac{B_{\lambda_1}(T_d)}{B_{\lambda_2}(T_d)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{-\beta} \quad \text{mit einem spektralen Staubindex von } \beta \text{ von 1.5 oder 2 (je nach}$$

Wellenlängenbereich). Daraus lässt sich sofort die Staubtemperatur T_d bestimmen. Mit bekannter Staubtemperatur kann dann aus der absoluten Intensität bei einer Wellenlänge auf die Menge an

$$\text{Material, d.h. die Wasserstoff-Säulendichte, geschlossen werden: } N_H = \frac{I_\lambda}{B_\lambda(T_d) 7 \times 10^{-21} \lambda^{-\beta}}.$$

Integration der beobachteten Intensitätsverteilung über die Fläche am Himmel ergibt dann die gesamte Anzahl von Wasserstoff-Atomen und damit die Masse. Diese Methode ist gut geeignet, um z.B. dichte, relative kalte Kondensationen in interstellaren Wolken zu untersuchen. Ebenso kann man aus großräumigen Kartierung im Infraroten (IRAS-Satellit) die relativ schwache diffuse Emission analysieren und so die Temperatur und Säulendichteverteilung im sogenannten Galaktischen Cirrus, d.h. diffusen Wolken in hohen Galaktischen Breiten, untersuchen.

Die Rolle des Staubes

Obwohl der Staub nur einen kleinen Anteil an der Gesamtmasse der interstellaren Materie hat, spielt er in vielen Bereichen eine wichtige Rolle. Wir listen hier kurz die wichtigsten auf:

- einige Moleküle können sich nicht in 2-Körper-Stößen in der Gasphase bilden; 3-Körper-Stöße sind wegen der geringen Dichte im interstellaren Medium viel zu selten. Wenn die Molekülbausteine aber durch Stöße auf der Oberfläche steckenbleiben und dort einigermaßen beweglich sind, können sich auf der Stauboberfläche Moleküle bilden. Die freiwerdende Bindungsenergie kann gleichzeitig benutzt werden, um das Molekül von der Stauboberfläche abzulösen. Dies ist die einzige Art, wie sich effizient molekularer Wasserstoff im ISM bilden kann!
- der Staub absorbiert sehr effizient optisches und noch effizienter UV-Licht und schirmt so das Strahlungsfeld junger, heißer Sterne, aber auch das mittlere interstellare Strahlungsfeld, so daß bei genügender Säulendichte Moleküle nicht mehr durch die Strahlung dissoziert werden
- der Staub kann sehr effizient durch seine breitbandige Emission entsprechend einer Schwarzkörper-Strahlung Energie abstrahlen. Bei genügender Gasdichte, d.h. Stoßrate der

Wasserstoffatome/-moleküle mit dem Staub, kann so das Gas über den Staub sich abkühlen

- der Staub setzt mit hoher Effizienz die Energie einfallender UV-Photonen in eine Heizung des Gases um: die UV-Photonen lösen Photoelektronen ab, die ihre Überschußenergie effizient durch Stöße mit den Gasmolekülen/-atomen verlieren (Photoelektrische Heizung)
- der Staub spielt eine wichtige Rolle im Ionisations- /Rekombinationsgleichgewicht bei der Restionisation des weitgehend neutralen ISM

16.2 Interstellares Gas

Historisch gab es zwei Evidenzen für die Existenz von interstellarem Gas: zum einen die diffus leuchtenden Nebel, die wir heute als vor allem in den Rekombinationslinien von Wasserstoff leuchtende Ionisationsnebel in der Nähe junger, massereicher Sterne verstehen (externe Galaxien wurden ursprünglich auch als Nebel klassifiziert), und die Existenz unverschobener Spektrallinien in den Spektren von Doppelsternsystemen. Tatsächlich wissen wir, daß die Ionisationsnebel, bzw. HII-Regionen, nur einen sehr kleinen Teil der interstellaren Materie ausmachen, auch wenn sie im optischen die auffälligsten Erscheinungen sind. Für die Wechselwirkung der jungen Sterne mit der sie umgebenden Molekülwolke sind die astrophysikalischen Prozesse in diesen Nebeln aber von entscheidender Bedeutung.

Da der größte Teil des interstellaren Gases aber relativ kühl ist, entweicht die hauptsächliche Emission in Spektrallinien im Radiobereich (Molekülrotationslinien) und Infrarotbereich (atomare Feinstrukturlinien, molekulare Rotations-Vibrationsspektren), die beide mittlerweile der Beobachtung zugänglich sind.

Bevor wir die Beobachtungen des interstellaren Mediums im Einzelnen besprechen können, müssen einige Grundlagen zu den Strahlungsmechanismen und zur Anregung der relevanten Linien erarbeiten.

17 Strahlungsmechanismen

Nachdem wir die Emission und Absorption von Strahlung durch den interstellaren Staub weitgehend phänomenologisch behandelt haben (und eine genauere Behandlung ja detaillierte Kenntnisse der im IR-Spektralbereich liegenden spektralen Strukturen des Festkörpermaterials erfordert hätten, deren Behandlung über den Rahmen dieser Vorlesung hinausgeht), wollen wir jetzt zunächst einen weitere grundlegende Strahlungsmechanismen kennen lernen, der von großer astrophysikalischer Bedeutung ist. Es handelt sich um Strahlung eines Plasmas, genauer wegen der größeren Geschwindigkeit und Beschleunigung der leichteren Elektronen um die von den Elektronen im ionisierten Medium ausgesandte Strahlung. Wir betrachten die thermalisierte Translationsbewegung der Elektronen im Plasma; die Elektronen führen Stöße an den schwereren Ionen aus und Strahlen dabei *thermische Bremsstrahlung (frei-frei Strahlung)* ab.

Ein zweiter wichtiger Strahlungsmechanismus für ein Plasma tritt auf, wenn das Plasma in einem starken Magnet eingebettet ist: die Elektronen "spiralen" um die Magnetfeldlinien; die beschleunigte Bewegung auf Kreisbahnen senkrecht zum Magnetfeld führt zu Synchrotron-Strahlung, wobei die Strahlung von hochenergetischen nicht thermischen Elektronen dominiert. Diesen Mechanismus können wir hier aus Zeitgründen nicht näher behandeln.

Die Emission von Staub, die frei-frei Emission eines Plasmas und die Synchrotronstrahlung sind die astrophysikalisch wichtigsten Kontinuums-Strahlungsmechanismen des interstellaren Mediums. Dazu kommt die Linienstrahlung, d.h. Übergänge zwischen gebundenen Zuständen. Als Strahlung mit definierter Ruhefrequenz erlauben sie über den Doppler-Effekt Information über die Geschwindigkeit des emittierenden Gases zu gewinnen. Außerdem dient die Linienstrahlung natürlich als wichtigste Diagnostik für die "chemische" Zusammensetzung des interstellaren Mediums. Darüber hinaus erlaubt der Vergleich der Intensitäten verschiedener Übergänge einer Spezies Aussagen über deren Anregungsbedingungen, d.h. die Verteilung der Besetzung auf die verschiedenen Niveaus. Im thermischen Fall (*LTE - local thermodynamic equilibrium*) würde die Besetzung einfach einer Boltzmann-Verteilung genügen und damit als einzigen Parameter die Temperatur des Mediums liefern. Im interstellaren Medium ist die Besetzung aber in der Regel nicht-thermisch (*non-LTE*), sondern ergibt sich aus dem stationären (oder auch dynamischen) Gleichgewicht zwischen verschiedenen konkurrierenden mikroskopischen An- und Abregungsprozessen (Stöße mit anderen Atomen/Molekülen; Emission und Absorption von Strahlung, u.U. chemische Reaktionsnetzwerke etc.). Die Analyse der beobachteten Intensitätsverteilung im Hinblick auf die physikalischen (und chemischen) Bedingungen am Entstehungsort ist dann natürlich entsprechend kompliziert, kann aber auch eine wesentlich größere Vielfalt an Informationen über das ISM ergeben als im LTE.

17.1 Kontinuums-Strahlung: Bremsstrahlung oder frei-frei-Strahlung

Emissivität

Bei der Ableitung der frei-frei-Emissivität folgen wir der Darstellung in *F.Shu, The Physics of Astrophysics*, Band I, Kapitel 15.

Die exakte Bahn eines Elektrons beim Stoß mit einem Ion ist eine Hyperbel (unter Vernachlässigung der Strahlungsdämpfung). Wir kennen deren Beschleunigung (gegeben durch die Coulomb-Kraft) und damit im Prinzip über die Lamor-Formel die in jedem Moment abgestrahlte Leistung berechnen. Das wird aber sehr schnell sehr kompliziert und wir wollen hier eine einfachere Näherung benutzen, die praktisch alle relevanten Eigenschaften richtig wiedergibt. Dazu zeigen wir zunächst, dass die meisten Stöße in dem astrophysikalisch relevanten

Parameterbereich von Dichten und Temperaturen nur zu kleinen Streuwinkeln führen, d.h. bei großen Stoßparametern stattfinden.

Der mittlere Abstand zwischen den Elektronen ist durch die Elektronendichte gegeben: $L = n_e^{-1/3}$.

Damit ist das Verhältnis von mittlerer Coulomb-Energie $\frac{Ze^2}{L}$ zu thermischer Energie kT gegeben durch

$$\frac{Ze^2 n_e^{-1/3}}{kT} = \frac{Z}{4\pi} (n_e \lambda_{De}^3)^{-2/3},$$

mit der Debye Länge $\lambda_{De} = \left(\frac{kT}{4\pi n_e e^2} \right)^{-1/2}$, die die Längenskala angibt, über die die Ladung der

Ionen effektiv durch die frei beweglichen Elektronen abgeschirmt wird. Die Größe $n_e \lambda_{De}^3$ gibt die Anzahl der Elektronen im Debye-Volumen; in cgs-Einheiten ist $n_e \lambda_{De}^3 \approx 330 (T^3 / n_e)^{1/2}$, und damit die Anzahl der Elektronen im Debye-Volumen $\gg 1$, d.h. die Coulomb-Energie viel kleiner als die thermische Energie. Das bedeutet, dass das Plasma sich in guter Näherung wie ein ideales Gas verhält und die meisten Stöße nur zu kleinen Winkelabweichungen führen.

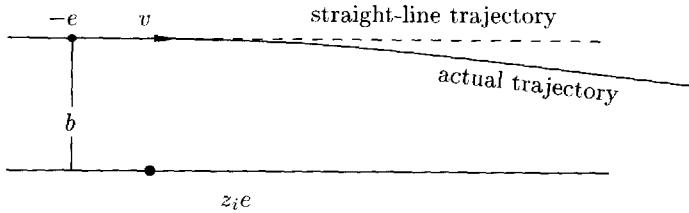


Abb. 91: Coulomb-Streuung

Wir können die Trajektorien dann in 0-ter Näherung (analog zur Born-Näherung in der QM) durch Geraden beschreiben, und nur die während des Durchfluges wirkenden Kräfte entsprechend der Coulomb-Wechselwirkung in der gemäß der Lamor-Formel abgestrahlten Energie berücksichtigen (siehe Abb.). Die Beschleunigung ist dann

$$|\ddot{\vec{r}}| = \frac{Ze^2}{m_e(b^2 + v^2 t^2)}, \text{ mit dem Stoßparameter } b. \text{ Gemäß der Lamor-Formel ist das im Abstand } R$$

unter dem Winkel Θ zur momentanen Beschleunigungsrichtung beobachtete elektrische Feld dann

$$|\vec{E}(t)| = \frac{e |\ddot{\vec{r}}|}{c^2 R} \sin \Theta = \frac{ze^3 \sin \Theta}{m_e c^2 R (b^2 + v^2 t^2)}.$$

Der Poynting Fluss ist $c \vec{E}(t)^2$; Mittelung über die Richtungen, z.B. um die mittlere Intensität für viele stoßende Elektronen zu beschreiben, ($\int d\Omega \sin^2 \Theta = 4/3$) und Integration über die Kugeloberfläche im Abstand R ergibt den zeitlichen Verlauf der abgestrahlten Leistung

$$P(t) = \frac{4}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \frac{1}{(b^2 + v^2 t^2)^2}.$$

Die gesamte abgestrahlte Energie ist $E = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P_v d\nu = 2 \int_0^{+\infty} P_v d\nu$, wobei die spektrale

Verteilung der Leistung als Betragsquadrat der Fouriertrafo des zeitlichen Feldverlaufes gegeben ist: $P_\nu = \frac{4}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} |\epsilon_\nu|^2$, mit

(Auswerten des Integrals durch Kontur-Integration in der komplexen Ebene):

$$\epsilon_v = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{e^{2\pi i \nu t}}{b^2 + v^2 t^2} = \frac{\pi}{bv} \exp(-2\pi|v|b/v), \text{ also}$$

$$P(t) = \frac{4}{3} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c^3} \left(\frac{\pi}{bv} \right)^2 e^{-4\pi v b/v}.$$

Durch Integration über alle Stoßparameter und Stoßgeschwindigkeiten (wegen der obigen Annahme von vielen Teilchen im Debye-Volumen können wir die Elektronenverteilung näherungsweise als Maxwell-Verteilung annehmen) ergibt die gesamte Volumen-Emissivität

$$\eta = n_Z n_e \int_{v_{min}}^{\infty} v f_e(v) 4\pi v^2 dv \frac{4\pi^2 Z^2 e^6}{3 m_e^2 c^3 v^2} \int_{b_{min}}^{\infty} \exp(-4\pi v b/v) \frac{2\pi b db}{b^2}.$$

Dabei haben wir ad hoc untere Integrationsgrenzen für die Geschwindigkeit und den Stoßparameter eingeführt, um logarithmische Divergenzen der Integrale zu vermeiden. Die Wahl der Grenzen müssen wir im folgenden begründen.

Zunächst sehen, wir, dass wir per Substitution $x = m_e v^2 / 2kT$ und $\xi = 4\pi v b/v$ den Ausdruck

$$\eta = n_Z n_e \left(\frac{2m_e}{\pi kT} \right)^{1/2} \left(\frac{8\pi^3 Z^2 e^6}{3 m_e^2 c^3} \right) I(x_{min}, \xi_{min}),$$

$$\text{mit } I(x, \xi) = \int_x^{\infty} dx' e^{-x'} \int_{\xi}^{\infty} d\xi' \frac{e^{-\xi'}}{\xi'} = \int_x^{\infty} dx' e^{-x'} E_1(\xi) \text{ und } x_{min} = m_e v_{min}^2 / 2kT, \xi_{min} = 4\pi v b_{min}/v.$$

Was sie Divergenzen der klassisch abgeleiteten Ausdrücke vermeidet, sind quantenmechanische Einschränkungen, die wir hier ziemlich ad hoc einführen, die aber dadurch gerechtfertigt sind, dass die genaue quantenmechanische Beschreibung die gleichen Resultate liefert. Zunächst können wir argumentieren, dass die Elektronen vor dem Stoß mindestens die Energie $m_e v^2 / 2 = h\nu$ haben müssen, damit sie überhaupt ein Photon aussenden können; das liefert die Bedingung

$$x_{min} = h\nu/kT.$$

Bei einer bestimmten Geschwindigkeit v muss zum einen der Stoßparameter groß genug sein, dass die kinetische Energie auch bei größter Annäherung überwiegt; sonst ist unsere obige Annahme der Kleinwinkel-Streuung nicht mehr richtig. Dies führt auf die Bedingung $Ze^2/b_{min} = m_e v^2$. Andererseits muss das einlaufende Elektron mindestens ein Drehimpulsquant besitzen, d.h. $b_{min} m_e v = h$ (Heisenberg'sche Unschärferelation). Die beiden alternativen Ausdrücke ergeben denselben Wert für b_{min} bei der Geschwindigkeit $v = Ze^2/h$, so dass für die untere Integrationsgrenze gilt:

$$b_{min} = \begin{cases} Ze^2/m_e v^2, & v \leq Ze^2/h \\ h/m_e v, & v \geq Ze^2/h \end{cases}.$$

In x und ξ ausgedrückt ergibt dies

$$\xi_{min} = \begin{cases} \frac{h\nu}{\chi} \left(\frac{x}{(\chi/kT)} \right)^{-3/2}, & x \leq \chi/kT \\ \frac{h\nu}{kT} x^{-1}, & x \geq \chi/kT \end{cases}$$

mit der Ionisationsenergie $\chi = m_e/2(Ze^2/h^2)$. Für niedrige Frequenzen, $h\nu \ll \chi$ oder kT , ist das Argument der E_1 Funktion im obigen Integral $\xi_{min} \ll 1$, und wir können mit der Entwicklung $E_1(\xi) \approx \ln(\gamma/\xi), \xi \ll 1$, der Euler'schen Konstante $\gamma = 0.5772$ schreiben

$$I \approx \ln[\gamma(\chi/h\nu)(\chi/kT)^{-3/2}] - \frac{3}{2}\gamma, \text{ für } h\nu \ll \chi \text{ oder } kT;$$

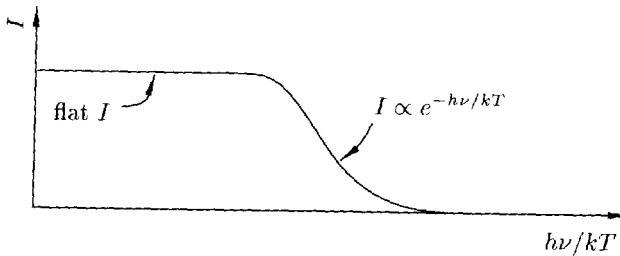


Abb. 92: spektrale Verteilung der Intensität

dass die Emission eines einzelnen Stoßes praktisch nur ein sehr kurzer Puls ist, mit dem entsprechenden flachen Spektrum.

Bei hohen Frequenzen, $h\nu \gg \chi$ oder kT , tragen wegen der Exponentialfunktion nur die Werte des Integranden nahe an der unteren Grenze bei; dort ist $\xi_{min} \approx 1$, so dass wir näherungsweise schreiben können

$$I \approx E_1(1)e^{-h\nu/kT}, \quad h\nu \gg \chi \text{ oder } kT.$$

Der exponentielle cut-off entsteht, weil wegen der Maxwell-Boltzmann-Verteilung nur noch exponentiell wenige Elektronen eine genügend hohe Energie haben, um ein Photon mit hoher Frequenz auszusenden.

In der exakten quantenmechanischen Behandlung (Quantenelektrodynamik) ergibt sich weitgehend dasselbe Ergebnis, nur ergeben sich die oben ad hoc eingeführten scharfen Abschneidewerte x_{min}, ξ_{min} nicht in dieser Form, sondern die entsprechenden Integrale sind mit weichem Abschneideverhalten modifiziert, so dass sie konvergieren. Die qualitative Form des Ergebnisses und auch die quantitativen Werte sind aber weitgehend gleich. Üblicherweise wird das Ergebnis in der folgenden Form geschrieben:

$$I \xrightarrow{\text{QED}} \frac{4}{\pi\sqrt{3}} g_{ff}(\nu) \exp(-h\nu/kT),$$

mit dem *quantenmechanischen Gauntfaktor* $g_{ff}(\nu)$. Der Gaunt-Faktor variiert langsam mit der Frequenz und ist in den meisten Fällen von der Größenordnung 1.

Wenn das Plasma verschiedene Ionensorten enthält, müssen wir die Emissivität über die verschiedenen Beiträge summieren. Damit erhalten wir für die frei-frei-Emissivität

$$\eta_\nu = \sum_i n(Z_i) n_e \left(\frac{2m_e}{3\pi kT} \right)^{1/2} \left(\frac{32\pi^2 Z_i^2 e^6}{3m_e^2 c^3} \right) g_{ff}(\nu) \exp(-h\nu/kT).$$

Absorptionskoeffizient, optische Tiefe

Da die Strahlung aus dem thermischen Reservoir der kinetischen Energie erzeugt wird, erhalten wir die Absorptivität über das Kirchhoff'sche Gesetz:

$$\chi_\nu = \eta_\nu / B_\nu(T) = \sum_i n(Z_i) n_e \left(\frac{2m_e}{3\pi kT} \right)^{1/2} \left(\frac{16\pi^2 Z_i^2 e^6}{3m_e^2 c h \nu^3} \right) g_{ff}(\nu) (1 - \exp(-h\nu/kT)).$$

In Vorgriff auf die folgende Darstellung notieren wir, dass der Faktor $(1 - \exp(-h\nu/kT))$ die Korrektur für stimuliertes Emission enthält. Für niedrige Frequenzen $h\nu \ll kT$ ergibt die Entwicklung der Exponentialfunktion das Verhalten

$$\chi_\nu \propto \left[\sum_i Z_i^2 n(Z_i) n_e \right] T^{-3/2} g_{ff}(\nu) \frac{1}{\nu^2}.$$

Die optische Tiefe als Integral längs des Sehstrahls über die Absorptivität ist dann

$$\tau_\nu \propto T^{-3/2} g_{ff}(\nu) \frac{1}{\nu^2} \int \left[\sum_i Z_i^2 n(Z_i) n_e \right] dl.$$

Der Faktor $\int \left[\sum_i Z_i^2 n(Z_i) n_e \right] dl$ heißt Emissionsmaß (engl. *emission measure*), abgekürzt EM.

Für ein reines Wasserstoffplasma ist $Z=1$, $n(Z)=n_e$, und damit $EM = \int n_e^2 dl$, also das Wegintegral über die Elektronendichte zum Quadrat. Dies gilt näherungsweise auch für andere Plasmen, da Wasserstoff wegen des hohen Ionisationspotentials von He und der niedrigen Häufigkeit aller anderen Ionen den Hauptbeitrag zur Ionisation liefert.

Eine gute Näherung für den Gaunt-Faktor ergibt in diesem Spektralbereich die Formel

$$\tau_\nu \approx 8.235 \times 10^{-2} \left(\frac{T}{K} \right)^{-1.35} \left(\frac{\nu}{GHz} \right)^{-2.1} \int n_e^2 dl / [pc cm^{-6}].$$

Spektrum einer HII-Region

Junge, massive Sterne emittieren eine genügende Anzahl von Photonen mit Energie jenseits der Ionisationsenergie von Wasserstoff (Lyman-Kante), dass sie den Wasserstoff im interstellaren Gas ihrer Umgebung ionisieren. Wegen der starken Absorption an der Ionisationskante und wegen der Details des Rekombinationsprozesses, zu dem die Ionisation ja im Gleichgewicht steht, bildet sich eine räumlich scharf begrenzte, ionisierte Zone um den jungen Stern aus, eine sog. HII-Region. (siehe Übungsaufgabe). Bei Kugelsymmetrie hat diese einen Radius (Strömgren-Radius) $r_s = (3N_{Ly}/4\pi\alpha n_e^2)^{1/3}$; dabei ist die Anzahl der pro Sekunde ausgesandten Photonen jenseits der Lyman-Kante N_{Ly} , und der Volumen-Rekombinationskoeffizient α [$cm^3 sec^{-1}$] so definiert, dass die Rate von Rekombinationen pro Volumenelement $R = \alpha n_p n_e = \alpha n_e^2$ ist. Für den relevanten Temperaturbereich von HII-Regionen ist die Rekombinationsrate konstant und ungefähr gleich $\alpha = 3 \times 10^{-13} cm^3 sec^{-1}$. Die Temperatur des Plasma ist ca. 10000K.

Mit der obigen Formel für die optische Tiefe sehen wir, dass wegen der ν^{-2} -Abhängigkeit die

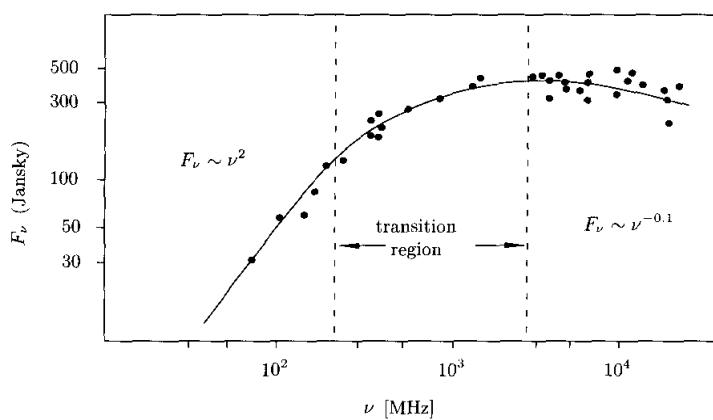


Abb. 93: Spektrum des Orion Nebels

Frequenzen entsprechend dem $\exp(-h\nu/kT)$ -Faktor schnell abnimmt. Für die Übergangsfrequenz ergibt sich entsprechend er obigen Formel

$$\nu_T / [\text{GHz}] \approx 0.3 \left[\left(\frac{T}{K} \right)^{-1.35} \frac{\int n_e^2 dl}{\text{pc cm}^{-6}} \right]^{1/2}.$$

Mit aus dem niederfrequenten Teil des Spektrums bekannter Temperatur lässt sich aus dem flachen Spektralbereich dann das Emissionsmaß EM , und damit bei aus der Winkelaustrahlung und Entfernung bekanntem Radius die Elektronendichte der HII-Region bestimmen.

17.2 Linienstrahlung

Linienemission, -absorption, Einstein-Koeffizienten

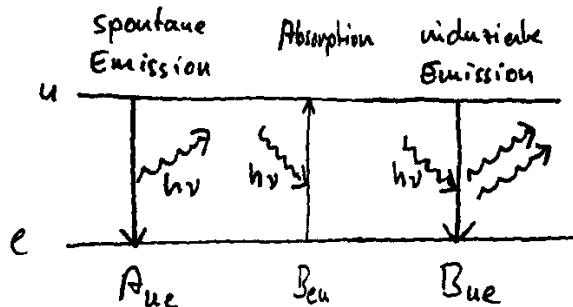


Abb. 94: Strahlungsübergänge

Betrachten wir zwei beliebige diskrete Energiezustände eines Systems (Atom, Molekül, Atomkern). Wir bezeichnen das obere (*upper*) mit u , das untere (*lower*) mit l . Befindet sich das System im oberen Zustand, so wird es nach einer charakteristischen Zeit spontan unter Emission eines Photons der Frequenz $h\nu = E_u - E_l$ in den unteren Zustand "zerfallen". Die charakteristische Zeit τ ist die *Lebensdauer* des Zustandes gegen Strahlungszerfall. Das inverse dieser Zeit gibt die

Wahrscheinlichkeit an, dass das System sich in der nächsten Zeiteinheit durch Strahlung abregt, bzw. durch Strahlung zerfällt. Diese Zerfallsrate wird *Einstein-A-Koeffizient* genannt.

$$\text{Einstein-A-Koeffizient } A_{ul} = 1/\tau, [\text{sec}^{-1}] = \text{spontane Emissionsrate}$$

Die Größe des A -Koeffizienten hängt von den Eigenschaften des Systems ab, genauer davon, wie stark das System im angeregten Zustand an das Strahlungsfeld koppelt (elektrischer Dipol, magnetischer Dipol, Quadrupol, Symmetrie). Dies werden wir unten genauer behandeln. In der quantenelektronischen Behandlung sehen wir, dass diese spontanen Übergänge durch die Vakuum-Fluktuationen des elektromagnetischen Feldes veranlasst werden (s.u.).

Die Absorptionsrate (d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass das System aus dem unteren Zustand durch

Absorption eines Photons in den angeregte Zustand übergeht) ist proportional zur einfallenden Intensität. Solange wir nicht den exotischen Fall polarisierter (z.B. im Magnetfeld ausgerichteter) Systeme betrachten, ist es dabei egal, aus welcher Richtung die einfallenden Photonen kommen. Die Rate ist also proportional zur mittleren Intensität J_ν . Entsprechend definiert man den

$$\text{Einstein-}B\text{-Koeffizient } B_{lu}; [\text{cm}^2 \text{ erg}^{-1} \text{ sec}^{-1}]: \text{Absorptionsrate} = B_{lu} J_\nu$$

Einstein's Verdienst war es, zu erkennen dass das Kirchhoff'sche Gesetz erfordert, dass es auch *induzierte Emission* gibt. Hierbei strahlt das System angeregt durch ein einfallendes Photon ein weiteres Photon aus. Wir werden dies im nächsten Abschnitt herleiten. Insbesondere ist dieses Photon völlig *kohärent* (d.h. in Polarisation, Phase und Frequenz identisch) zu dem anregenden.

$$\text{Einstein-}B\text{-Koeffizient } B_{ul}; [\text{cm}^2 \text{ erg}^{-1} \text{ sec}^{-1}]: \text{Rate für induzierte Emission} = B_{ul} J_\nu$$

Bei der Absorption und Emission ist die Frequenz der Photonen nicht genau gleich der Energiedifferenz. Durch die endliche Lebensdauer der Zustände (Einstein- A -Koeffizient) ergibt sich ein Lorentzprofil der Linie, dessen Frequenzbreite (*natürliche Linienbreite*) entsprechend der Heisenberg'schen Unschärfe-Relation gerade durch die Zerfallsrate, d.h. den A -Koeffizienten gegeben ist. Ist die Lebensdauer des Zustandes zusätzlich durch andere Wechselwirkungs-Prozesse, z.B: Stöße mit umgebenden Gasatomen, verkürzt, so wird die Linie weiter verbreitert (*Druckverbreiterung*, Lorentz-förmig). Aufgrund der thermischen Bewegung sind die Frequenzen der einzelnen Atome außerdem Doppler-verschoben. Die Maxwell-Verteilung resultiert in einem Gaußschen Linienprofil. Kombination der beiden insgesamt ein sog. *Voigt-Profil*. Wir werden dies unten genauer behandeln. Hier schreiben wir das Linienprofil $\phi(\nu - \nu_0)$, so normiert dass

$$\int \phi(\nu - \nu_0) d\nu = 1.$$

Mit der Anzahldichte n_u, n_l [cm^{-3}] der Atome im oberen und unteren Zustand ergeben sich dann die Emissivität und die Absorptivität zu

$$\begin{aligned}\eta_\nu(\vec{r}) &= \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} n_u \phi(\nu - \nu_0) \\ \chi_\nu(\vec{r}) &= \frac{h\nu}{4\pi} (B_{lu} n_l - B_{ul} n_u) \phi(\nu - \nu_0).\end{aligned}$$

Hierbei haben wir berücksichtigt, dass jedes Photon die Energie $h\nu$ trägt, und dass die Emissivität und Absorptivität raumwinkelspezifisch definiert sind (Faktor $\frac{1}{4\pi}$). Beachte: die induzierte Emission zählt hier als "negative" Absorption!

Die Quellfunktion ist dann

$$S_\nu(\vec{r}) = \frac{\eta_\nu(\vec{r})}{\chi_\nu(\vec{r})} = \frac{A_{ul} n_u}{B_{lu} n_l - B_{ul} n_u} = \frac{A_{ul}}{B_{lu} n_l / n_u - B_{ul}}.$$

Sie hängt neben den durch die atomaren Eigenschaften des Systems bestimmten Einstein-Koeffizienten nur noch von dem Verhältnis der Besetzungszahlen ab!

Einstein-Relationen

Im thermischen Gleichgewicht muss die Quellfunktion jedes Systems gleich der Planck-Funktion sein (s.o.):

$$\text{thermisches Gleichgewicht: } S_\nu(\vec{r}) = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}.$$

Das Besetzungszahl-Verhältnis der Zustände ist dann aber gerade durch die Boltzmann-Formel gegeben:

$$\text{thermisches Gleichgewicht: } \frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp(-h\nu/kT).$$

Hierbei haben wir durch die statistischen Gewichte $g_{u,l}$ berücksichtigt, dass die Energieniveaus entartet sein können (z.B. Rotationszustände, charakterisiert durch die Quantenzahlen Drehimpuls J und dessen Projektion M auf die z -Achse, mit den $2J+1$ möglichen Werten für M von $M = -J, -J+1, \dots, 0, \dots, J-1, J$; die Energie ist allein durch J bestimmt, alle M -Zustände sind energetisch entartet; entsprechend ist das statistische Gewicht der J -Zustände $g_J = 2J+1$).

Setzt man diese beiden Beziehungen in den im vorigen Abschnitt abgeleiteten Ausdruck

$$S_\nu(\vec{r}) = \frac{\eta_\nu(\vec{r})}{\chi_\nu(\vec{r})} = \frac{A_{ul}}{B_{lu} n_l / n_u - B_{ul}} \text{ ein, so ergibt sich}$$

$$\frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(-h\nu/kT) - 1} = \frac{A_{ul}}{B_{lu} \frac{g_l}{g_u} \exp(h\nu/kT) - B_{ul}} = \frac{A_{ul}/B_{ul}}{\frac{g_l B_{lu}}{g_u B_{ul}} \exp(h\nu/kT) - 1}.$$

Daraus ersehen wir, dass die Einstein- A - und B -Koeffizienten nicht unabhängig voneinander sind, sondern den *Einstein-Beziehungen* genügen müssen:

$$\text{Einstein-Beziehungen: } \frac{g_l B_{lu}}{A_{ul}} = \frac{g_u B_{ul}}{\frac{2h\nu^3}{c^2} B_{ul}}.$$

Offensichtlich ist also die Absorption immer auch mit induzierter Emission verknüpft (wie oben behauptet)! Wir sehen, dass das Verhältnis A_{ul}/B_{ul} mit ν^3 wächst, d.h. die induzierte Emission wird relativ zur spontanen mit höherer Frequenz immer schwächer.

Anregungstemperatur

Da die Quellfunktion nur vom Besetzungszahlverhältnis abhängt, das außerdem im thermischen Gleichgewicht über die Boltzmann-Formel durch die Temperatur bestimmt ist, liegt es nahe die *Anregungstemperatur* eines Übergangs zu definieren durch:

$$T_{ex}: \frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp(-h\nu/kT_{ex})$$

Sie ist einfach eine Abkürzung für das Besetzungszahlverhältnis der an dem Übergang beteiligten Zustände. Auch wenn sie als Temperatur angegeben wird, hat sie zunächst nichts mit einer physikalischen Temperatur des physikalischen Systems zu tun. Insbesondere werden im allgemeinen verschiedene Übergänge, d.h. Paare von Zuständen eines Systems, völlig verschiedene Temperaturen haben. Allerdings ist sie im thermischen Gleichgewicht gleich der Temperatur, die dieses Gleichgewicht charakterisiert. (dies sollte man immer im Hinterkopf haben!)

Damit lässt sich die Quellfunktion eines Übergangs schreiben als:

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT_{ex}) - 1} = B_\nu(T_{ex}).$$

Der Absorptionskoeffizient ergibt sich zu

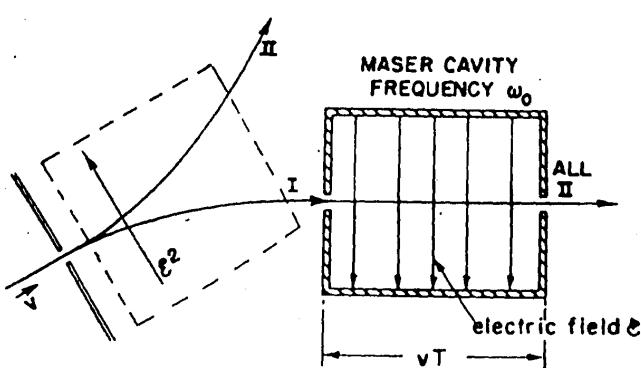
$$\begin{aligned}\chi_\nu &= \frac{1}{4\pi} h\nu (B_{lu}n_l - B_{ul}n_u) \phi(\nu - \nu_0) = \frac{h\nu}{4\pi} n_u B_{ul} \left(\frac{g_u n_l}{g_l n_u} - 1 \right) \phi(\nu - \nu_0) \\ &= \frac{c^2}{8\pi\nu^2} A_{ul} n_u (\exp(h\nu/kT_{ex}) - 1) \phi(\nu - \nu_0)\end{aligned}$$

Mit z.B. der Besetzungszahl des oberen Niveaus und dem Verhältnis der Besetzungszahlen, ausgedrückt durch die Anregungstemperatur, sind also alle für den Strahlungstransport wichtigen Größen bestimmt.

Anmerkung: Maser- und Laseremission

Die Einstein-Relationen besagen, dass neben der normalen Absorption immer auch induzierte Emission als sozusagen "negative" Absorption möglich ist. Im thermischen Gleichgewicht ist immer $(B_{lu}n_l - B_{ul}n_u) = \frac{c^2}{2n\nu^3} A_{ul} n_u (\exp(h\nu/kT) - 1) > 0$, und damit der Absorptionskoeffizient

positiv: die einfallende Strahlung wird abgeschwächt. Auch außerhalb des thermischen Gleichgewichts ist fast immer der obere Zustand weniger als der untere Zustand besetzt, so dass die oben definierte Anregungstemperatur positiv ist; entsprechend der Absorptionskoeffizient ebenfalls positiv. Es kann aber vorkommen, dass für ein bestimmtes atomares System eine *Besetzungsinversion* erreicht wird, d.h. der obere Zustand ist stärker besetzt als der untere; dies entspricht einer negativen Anregungstemperatur: $T_{ex} < 0$. In diesem Fall ist der Absorptionskoeffizient negativ, d.h. zu der einfallenden Strahlung kommt weiter Strahlung hinzu. Da die jetzt überwiegende stimulierte Emission außerdem Photonen aussendet, die in Phasenlage und Frequenz mit den anregenden übereinstimmen, ist die verstärkte Strahlung sehr kohärent. Man spricht von Maser- oder Laseraktivität (microwave/light amplification by stimulated emission of radiation). Einstein erkannte bereit diese Möglichkeit.



Der erste Maser wurde von Townes realisiert: er erreichte die Besetzungsinversion durch geometrische Trennung der beiden Inversionszustände in einem Ammoniak-Molekularstrahl in einem starken elektrischen Feld. Der vorwiegend mit Molekülen im oberen Inversionszustand besetzte Teilstrahl durchläuft einen Mikrowellenresonator, in dem die Maserstrahlung entsteht. Der erste Laser wurde von Schawlow realisiert. Meist wird die Besetzungsinversion in

einem 3-Niveausystem erreicht, in dem Stoß- oder Strahlungsanregung vom untersten in den obersten Zustand und anschließende schnelle Stoß-Abregung in den mittleren Zustand zu einer Überbesetzung dieses Zustandes relativ zum untersten führt. Um die entstehende induzierte Strahlung zur weiteren Verstärkung zu nutzen, wird das Medium in einen Resonator eingebaut, indem die Strahlung viele Male hin- und zurückläuft.

Parallel zur induzierten Emission tritt natürlich immer auch spontane Emission auf, die ebenfalls die Besetzungsinverson abbaut. Wegen der $A_{ul}/B_{ul}=2\hbar\nu^3/c^2$ ist diese "Konkurrenz" bei höheren Frequenzen immer stärker. Entsprechend sind Maser leicht zu realisieren als Laser.

Astrophysikalisch treten Maser ebenfalls auf. Die Besetzungsinverson wird durch Stoßprozesse oder Strahlung erreicht. Wegen der zur Verfügung stehenden großen Weglängen kann die Strahlung effizient verstärkt werden, auch ohne Resonator. Die bekanntesten Beispiele sind die Maserlinie von Wasser bei 1.3 cm (Stoß-Pumpen in dichten Sternentstehungsregionen), von OH (Infrarotpumpen in der Atmosphäre von späten Sternen). Wegen der hohen Intensität sind Maser für einige spezifische Untersuchungen sehr gut geeignet, z.B: Entfernungsbestimmung durch statistische Parallaxe mit VLBI).

Einschub: Quantenelektrodynamische Herleitung der Einstein-Koeffizienten

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

klassisch (Zerlegung des EM-Feldes in Moden, periodische Randbedingungen im Kasten der Länge L): Vektorpotential

$$A = \sum_{\vec{k}\alpha} \left(c_{\vec{k}\alpha} A_{\vec{k}\alpha} e^{i\omega t} + c_{\vec{k}\alpha}^* A_{\vec{k}\alpha}^* e^{-i\omega t} \right), \text{ mit } A_{\vec{k}\alpha} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}} \vec{e}_\alpha e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Die Polarisation wird durch die Vektoren \vec{e}_α beschrieben. Es gilt die Dispersionsbeziehung $\omega = c|\vec{k}|$ und die möglichen Werte für \vec{k} sind $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$. Es gilt $\lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}$.

Zu Quantisierung werden die Fourieramplituden durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ersetzt:

$$\begin{aligned} c_{\vec{k}\alpha} &\rightarrow \hat{c}_{\vec{k}\alpha}, \text{ Vernichtungsoperator} \\ c_{\vec{k}\alpha}^* &\rightarrow \hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+, \text{ Erzeugungsoperator} \end{aligned}, \text{ mit den Vertauschungsrelationen}$$

$$\hat{c}_{\vec{k}\alpha} \hat{c}_{\vec{k}'\alpha}^+ - \hat{c}_{\vec{k}'\alpha}^+ \hat{c}_{\vec{k}\alpha} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\alpha\alpha'}.$$

Die Zustände werden charakterisiert durch die *Besetzungsahlen* (n Photonen mit \vec{k}, α , erzeugt aus dem Vakuum $|0\rangle$) durch wiederholtes Anwenden des Erzeugungsoperators:

$$|...n_{\vec{k}\alpha}...\rangle = ...(\hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+)^n...|0\rangle.$$

Sie haben

$$\text{die Energie } E_{...n_{\vec{k}\alpha}...} = \sum_{\vec{k}\alpha} (n_{\vec{k}\alpha} + 1/2) \hbar \omega \text{ und}$$

$$\text{den Impuls } \vec{p}_{...n_{\vec{k}\alpha}...} = \sum_{\vec{k}\alpha} n_{\vec{k}\alpha} \hbar \vec{k}.$$

Die Matrixelemente der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind

$$\begin{aligned} \langle n_{\vec{k}\alpha} + 1 | \hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+ | n_{\vec{k}\alpha} \rangle &= \sqrt{n_{\vec{k}\alpha} + 1} \\ \langle n_{\vec{k}\alpha} - 1 | \hat{c}_{\vec{k}\alpha} | n_{\vec{k}\alpha} \rangle &= \sqrt{n_{\vec{k}\alpha}} \\ \text{alle anderen} &= 0 \end{aligned}.$$

Übergangswahrscheinlichkeit bei periodischer Störung

ungestörter Hamiltonoperator \hat{H}_0 , Eigenzustände Ψ_0 , d.h. Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_0 = \hat{H}_0 \Psi_0 .$$

periodische Störung $\hat{V} = \hat{W} e^{-i\omega t + \lambda t}$ (λ beschreibt ein langsames Einschalten der Störung).

gestörte Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (\hat{H}_0 + \hat{V}) \Psi .$$

Lösungsansatz: $\Psi = \sum_k \alpha_k(t) \Psi_k^0$ mit Anfangsbedingung $\alpha_k(t=0) = \delta_{k,i} + \alpha_{k,i}(t)$; $\alpha_{k,i}(t=-\infty) = 0$ (für $t=-\infty$ ist das System im Zustand i). Ist die Störung klein, so ist $\alpha_{f,i} \ll 1$.

Einsetzen in die Schrödingergleichung ergibt Bewegungsgleichung für $\alpha_{f,i}(t)$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \alpha_{f,i} = \sum_k (\delta_{k,i} + \alpha_{k,i}) V_{f,k} = V_{f,i} + \sum_k \alpha_{k,i} V_{f,i} \approx V_{f,i} + O(\alpha) .$$

In 1. Ordnung Störungstheorie ist also

$$\alpha_{f,i} = \frac{-i}{\hbar} \int V_{f,i}(t) dt = \frac{-i}{\hbar} \int W_{f,i} e^{i(\omega_{f,i} - \omega)t + \lambda t} dt = -W_{f,i} \frac{1}{\hbar} \frac{e^{i(\omega_{f,i} - \omega)t + \lambda t}}{(\omega_{f,i} - \omega) - i\lambda} ,$$

und damit die Wahrscheinlichkeit, das System im Zustand f zu finden:

$$|\alpha_{f,i}|^2 = |W|^2 \frac{1}{\hbar^2} \frac{e^{2\lambda t}}{(\omega_{f,i} - \omega)^2 + \lambda^2} ,$$

und Übergangsrate ist $R_{f,i} = \frac{d}{dt} |\alpha_{f,i}|^2 = |W_{f,i}|^2 \frac{1}{\hbar^2} e^{2\lambda t} \frac{2\lambda}{(\omega_{f,i} - \omega)^2 + \lambda^2}$.

Im Grenzwert $\lim_{\lambda \rightarrow 0}$ ergibt sich mit $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2\lambda}{(\omega_{f,i} - \omega)^2 + \lambda^2} = \pi \delta(\omega_{f,i} - \omega)$

$$\text{Fermi's Goldene Regel } R_{f,i} = \frac{2Pi}{\hbar} |W_{f,i}|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) .$$

elektromagnetische Übergänge

Wechselwirkung zwischen elektromagnetischem Feld und Materie: Stromkopplung, 4er-Schreibweise $W = j^\mu A_\mu$ mit $j^\mu = \psi \gamma^\mu \psi^+$ und den Dirac'schen Spinmatrizen γ^μ ergibt

$$\hat{W} = \hat{W}_{el} + \hat{W}_{mag} = \frac{e}{m_e c} \vec{A} \cdot \vec{p} + \frac{g_s \mu_s}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A} .$$

Betrachten wir zunächst die *elektrische Wechselwirkung*. Mit $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ ergibt sich für den zeitunabhängigen Teil

$$\hat{W}_{el} = \frac{e}{m_e c} \vec{A}_0 \cdot \vec{p} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = \frac{e}{m_e c} \vec{A}_0 \cdot \vec{p} \left(1 + i \vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{1}{2} (\vec{k} \cdot \vec{r})^2 + \dots \right) .$$

Falls die Ladungsverteilung auf einen Bereich \ll Wellenlänge beschränkt ist, was bei atomaren

Systemen bis in den nahen UV Bereich eine gute Näherung ist, so nehmen die Glieder der Reihenentwicklung schnell ab $\vec{k} \cdot \vec{r} \approx \frac{a_0}{\lambda} \ll 1$. Sie ergeben nacheinander die Dipol-, Quadrupol-, Oktupol-, etc. Wechselwirkung. In der Dipolnäherung nehmen wir nur den ersten Term mit:

$$\hat{W}_{el} = \frac{e}{m_e c} \vec{A}_0 \cdot \vec{p}.$$

Betrachten wir als Ausgangszustand einen, in dem das elektrische Feld $n_{\vec{k}\alpha}^i$ Photonen der Sorte \vec{k}, α enthält und das atomare System im Zustand i ist: $|i\rangle = |n_{\vec{k}\alpha}^i\rangle |E_i\rangle$. Als Endzustand betrachten wir einen, in dem das elektrische Feld $n_{\vec{k}'\alpha'}^f$ Photonen der Wellenzahl \vec{k}' und Polarisation α' enthält, und das atomare System im Zustand f ist: $|f\rangle = |n_{\vec{k}'\alpha'}^f\rangle |E_f\rangle$. Damit ist für jeden der Beiträge $A_0 = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}} \vec{e}_{\alpha'} \hat{c}_{\vec{k}'\alpha'}$ im quantisierten Feld

$$W_{f,i} = \frac{1}{m_e} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} \left[\langle n_{\vec{k}'\alpha'}^f | \hat{c}_{\vec{k}'\alpha'} | n_{\vec{k}\alpha}^i \rangle \langle E_f | e \hat{p} \cdot \vec{e}_{\alpha'} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} | E_i \rangle + \langle n_{\vec{k}'\alpha'}^f | \hat{c}_{\vec{k}'\alpha'}^+ | n_{\vec{k}\alpha}^i \rangle \langle E_f | e \hat{p} \cdot \vec{e}_{\alpha'} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} | E_i \rangle \right]$$

Die Matrixelemente des Erzeugungs- und Vernichtungsoperators sind nur von 0 verschieden wenn $\vec{k}=\vec{k}'=\vec{k}''$; $\alpha=\alpha'=\alpha''$ ist. Außerdem muss entweder $n_{\vec{k}\alpha}^f = n_{\vec{k}\alpha}^i - 1$ sein (erster Term, Absorption eines Photons), oder $n_{\vec{k}\alpha}^f = n_{\vec{k}\alpha}^i + 1$ (zweiter Term, Emission). Im ersten Fall ist das Matrixelement $\langle n_{\vec{k}\alpha}^i - 1 | \hat{c}_{\vec{k}\alpha} | n_{\vec{k}\alpha}^i \rangle^2 = n_{\vec{k}\alpha}^i$, im zweiten Fall ist das Matrixelement $\langle n_{\vec{k}\alpha}^i + 1 | \hat{c}_{\vec{k}\alpha}^+ | n_{\vec{k}\alpha}^i \rangle^2 = n_{\vec{k}\alpha}^i + 1$. Die Absorptionsrate ist also proportional der Anzahl der im Strahlungsfeld vorhandenen Photonen, die Emissionsrate enthält einen zur Anzahl der Photonen proportionalen Anteil (stimulierte Emission) und den zusätzlichen Beitrag der spontanen Emission. Alle anderen Faktoren in der Übergangswahrscheinlichkeit sind gleich, so dass für das Verhältnis der Absorptions- und Emissionsrate gilt:

$$\frac{R_{em}}{R_{abs}} = \frac{n_{\vec{k}\alpha}^i + 1}{n_{\vec{k}\alpha}^i}.$$

Diese Betrachtung gilt unabhängig davon ob wir die elektrische oder magnetische Wechselwirkung betrachten.

Im folgenden beschränken wir uns auf die Dipolnäherung. Wir setzen o.b.d.A. $\vec{e}_\alpha = \vec{e}_z$ und damit $e \hat{p} \cdot \vec{e}_\alpha e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \approx e \hat{p} \cos \Theta = e \hat{p}_z$. Wir berechnen nur den A-Koeffizienten, betrachten also den Fall $n_{\vec{k}\alpha}^i = 0$, $n_{\vec{k}\alpha}^f = n_{\vec{k}\alpha}^i + 1 = 1$. Dann ist

$$W_{f,i} = \frac{1}{m_e} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} \langle 1 | \hat{c}_{\vec{k}z}^+ | 0 \rangle \langle E_f | e \hat{p}_z | E_i \rangle$$

Nach Fermi's Goldener Regel ist dann

$$R_{f,i} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{e^2}{m_e^2} \frac{2\pi\hbar}{\omega} |\langle E_f | \hat{p}_z | E_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)$$

Nach den Vertauschungsregeln für Impuls- und Ortsoperator ist

$$[\hat{z}, \hat{H}_0] = \left[\hat{z}, \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m_e} + \hat{V} \right] = \left[\hat{z}, \frac{\hat{p}_z^2}{2m_e} \right] = \frac{1}{2m_e} ([\hat{z}, \hat{p}_z] \hat{p}_z + \hat{p}_z [\hat{z}, \hat{p}_z]) = \frac{i\hbar}{m_e} \hat{p}_z, \text{ und damit}$$

$$\langle E_f | \hat{p}_z | E_i \rangle = \frac{i m_e}{\hbar} (E_f - E_i) \langle E_f | \hat{z} | E_i \rangle = i m_e \omega \langle E_f | \hat{z} | E_i \rangle. \text{ Damit ist}$$

$$R_{fi} = 4\pi^2 \omega |\langle E_f | e \hat{z} | E_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar \omega).$$

Der A-Koeffizient ergibt sich dann durch Integration über alle möglichen Endzustände, d.h.

$$A_{fi} = \sum_{\alpha} \frac{\int d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} R_{fi} = 2 \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} d\Omega 4\pi^2 c k |\langle E_f | e \hat{z} | E_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar ck).$$

Definiert man das *Dipolmatrixelement* μ_{fi} so, dass $\int d\Omega |\langle E_f | e \hat{z} | E_i \rangle|^2 = \frac{4\pi}{3} \mu_{fi}^2$ ist (d.h. μ_{fi}

ist der Erwartungswert des Betrages des Dipolmoments $e \vec{r}$, die Richtungsmittelung ergibt $\frac{4\pi}{3}$),

$$\text{ist schließlich mit } k = \frac{\omega}{c} = 2\pi \frac{\nu}{c}$$

$$A_{fi} = \frac{64\pi^4}{3hc^3} \nu^3 \mu_{fi}^2, \text{ Einstein A-Koeffizient für elektrische Dipolübergänge}$$

Entsprechende Rechnung für elektrische Quadrupolübergänge (d.h. mit nächsten Term der Reihenentwicklung $i \vec{k} \cdot \vec{r}$ im Matrixelement ergibt analog

$$A_{fi} = \frac{32\pi^6}{5h^3c^5} \nu^5 Q_{fi}^2, \text{ Einstein A-Koeff. für elektrische Quadrupolübergänge, Quadrupolmoment } Q_{fi}.$$

Für die magnetischen Übergänge (d.h. die aus dem $\frac{g_s \mu_s}{\hbar} \vec{s} \cdot \text{rot} \vec{A}$ -Term resultierenden ergeben sich dieselben Ausdrücke, aber mit dem magnetischen Dipolmatrixelement etc.

Die Multipolreihenentwicklung ergibt sukzessiv proportional zu $\alpha^2 \approx \left(\frac{1}{137}\right)^2$ schwächere Terme

(mit der *Feinstrukturkonstanten* $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$, wie eine einfache Abschätzung zeigt: die

Reihenentwicklung ist in $kr = 2\pi \frac{a_0}{\lambda} = 2\pi \frac{a_0 \Delta E}{hc}$; ΔE ist von der Größenordnung atomare

Bindungsenergien, d.h. $\Delta E \approx \frac{e^2}{a_0}$, damit also $kr \approx \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha$; die Matrixelemente im Quadrat

nehmen also $\propto \alpha^2$ ab. Ebenso sind die jeweiligen magnetischen Multipol-Übergänge um einen

Faktor α^2 schwächer als die elektrischen Übergänge: $\frac{A_{\text{mag dipol}}}{A_{\text{el dipol}}} = \frac{\mu_{\text{mag}}^2}{\mu_{\text{el}}^2} \approx \frac{\mu_{\text{Bohr}}}{(ea_0)^2} = \alpha^2$ (hierbei haben

wir benutzt $\mu_{\text{Bohr}} = \frac{e\hbar}{m_e c}$; $a_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m_e c}$). Elektrischer Quadrupol- und magnetischer Dipol-Übergang

sind also ungefähr gleich stark und α^2 schwächer als ein elektrischer Dipolübergang etc.

Auswahlregeln

Die Übergangsmatrixelemente (Dipol-, Quadrupol- etc.) hängen vom Anfangs- und Endzustand ab. Dabei sind je nach Symmetrie der Zustände nur wenige Übergänge möglich, d.h. deren Matrixelemente $\neq 0$. Entsprechend der insgesamten Rotationssymmetrie werden die Zustände neben weiteren Quantenzahlen (entsprechend weiteren Symmetrien) durch den gesamten Bahndrehimpuls L , den gesamten Spin S , den daraus gebildeten gesamten Drehimpuls J , und dessen magnetische Quantenzahl M charakterisiert. Für die Übergangsmatrixelemente $\langle L_f S_f J_f M_f | W | L_i S_i J_i M_i \rangle$ gelten für die verschiedenen Arten von Übergängen folgende Auswahlregeln:

elektrischer Dipolübergang:

$$\langle L_f S_f J_f M_f | e \hat{r} | L_i S_i J_i M_i \rangle \text{ nur wenn}$$

$$\Delta S=0 \text{ (} \hat{r} \text{ wirkt nur auf räumliche Koordinaten)}$$

$$\Delta L=\pm 1$$

$$\Delta J=0, \pm 1 \text{ (} J=0 \rightarrow 0 \text{ verboten)}$$

$$\Delta M=0, \pm 1$$

$$(\pm) \Leftrightarrow (\mp) \text{ Paritätswechsel}$$

magnetischer Dipolübergang:

$$\Delta S=0$$

$$\Delta L=0$$

$$\Delta J=0, \pm 1 \text{ (} J=0 \rightarrow 0 \text{ verboten)}$$

$$\Delta M=0, \pm 1$$

$$(\pm) \Leftrightarrow (\pm) \text{ Paritätserhaltung}$$

elektrischer Quadrupolübergang: $\langle L_f S_f J_f M_f | e \hat{r} \hat{r} | L_i S_i J_i M_i \rangle$ nur wenn

$$\Delta S=0 \text{ (} \hat{r} \text{ wirkt nur auf räumliche Koordinaten)}$$

$$\Delta L=\pm 2$$

$$\Delta J=0, \pm 1, \pm 2$$

$$\Delta M=0, \pm 1, \pm 2$$

$$(\pm) \Leftrightarrow (\pm) \text{ Paritätserhaltung}$$

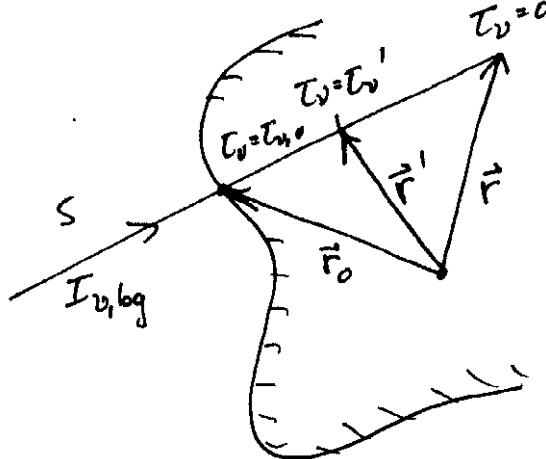
Betrachten wir als einfaches Beispiel ein lineares Molekül wie CO. Die Rotation wird durch die Drehimpulsquantenzahl J beschrieben, die Energieniveaus sind $E_J = BJ(J+1)$, je $g_J = 2J+1$ -fach entartet. Die Dipolauswahlregel erlaubt nur Übergänge mit $\Delta J = \pm 1$, d.h. schrittweise die Rotationsleiter herauf oder herunter. Die Übergangsfrequenzen sind $\nu_{J \rightarrow J-1} = 2BJ$, d.h. treten in der Frequenz äquidistanten Abständen im Spektrum auf. Für die Dipolmatrixelemente ergibt sich

$$\text{linearer Rotator, Rotationsübergang } J \rightarrow J-1 : \mu_{J \rightarrow J-1}^2 = \frac{J}{2J+1} \mu^2,$$

mit dem permanenten Dipolmoment des Moleküls μ . Damit sind die A-Koeffizienten

$$A_{J \rightarrow J-1} = \frac{64\pi^4}{3} h c^3 \nu^3 \mu_{J \rightarrow J-1}^2 \propto J^3 \frac{J}{2J+1} \mu^2, \text{ d.h. sie wachsen } \propto J^3 \text{ an.}$$

Strahlungstransport: Detection Equation



Die oben formulierte "formale" Lösung der Strahlungstransportgleichung, die wir für den Fall einer planparallelen Atmosphäre abgeleitet haben, kann man auch für eine beliebige Geometrie herleiten. Mit der in der Abb. definierten Nomenklatur erhalten wir für die Intensität an einer Stelle \vec{r} in Richtung \vec{n} auf einem Sehstrahl S den Ausdruck

Abb. 95: zur formalen Lösung der Strahlungstransport-Gleichung

$$I_v(\vec{r}, \vec{n}) = I_{v, bg, S} \exp(-\tau_{v_0}) + \int_0^{\tau_{v_0}} S_v(\tau_v') \exp(-\tau_v') d\tau_v'$$

Wir wollen im folgenden annehmen, dass die Anregungstemperaturen in allen Übergängen räumlich konstant sind (allerdings durchaus für die verschiedenen Übergänge verschieden). Dann kann die Quellfunktion vor das Integral gezogen werden und es ergibt sich

$$I_v(\vec{r}, \vec{n}) = I_{v, bg, S} \exp(-\tau_{v_0}(\vec{r}, \vec{n})) + S_v \left[1 - \exp(-\tau_{v_0}(\vec{r}, \vec{n})) \right].$$

Als Beobachter (längs des Sehstrahls in Richtung \vec{n}) beobachten wir also (Kurzschreibweise der obigen Gleichung) eine Intensität

$$I_v = S_v \left(1 - \exp(-\tau_{v, S}) \right) + I_{t, bg, S} \exp(-\tau_{v, S}).$$

$\tau_{v, S} = \tau_{v, 0} \phi(v - v_0)$ ist dabei die optische Tiefe längs des Sehstrahles. Außerhalb des Linienprofils ist die optische Tiefe =0, so dass nur der Kontinuums-Hintergrund sichtbar ist (z.B. mindestens die 2.7K-kosmische Hintergrundstrahlung):

$$v_t - v \gg \Delta v: \tau_{v, S} = 0, I_v = I_{t, bg}.$$

Abb. 96: Definitionen zum Linienprofil
Kontinuumintensität und Linie, ist dann

Die Linienintensität, d.h. der Unterschied zwischen

$$I_{v, l} = I_v - I_{t, bg} = (S_t - I_{t, bg}) \left(1 - \exp(-\tau_{v, S}) \right).$$

Dies ist die sog. **detection equation**.

Im Folgenden schreiben wir die bereits oben im allgemeinen definierten Größen optische Tiefe, Quellfunktion etc. für den Fall von Linienstrahlung zusammen. Sie sind durch die oben definierte Anregungstemperatur des Überganges und die Säulendichte der betrachteten Spezies im unteren oder oberen Niveau des Übergangs gegeben sind:

$$\text{Quellfunktion: } S_i(T_{ex}) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT_{ex}) - 1},$$

$$\text{Anregungstemperatur } T_{\text{ex}}: \frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp(-h\nu/kT_{\text{ex}})$$

$$\tau_{v_0} = \int \chi_{v_0} ds = \frac{c^2}{8\pi\nu^2} A_{ul} N_u (\exp(h\nu/kT_{\text{ex}}) - 1) \frac{1}{\Delta\nu}$$

optische Tiefe (im Linienzentrum):

$$= \frac{c^2}{8\pi\nu^2} A_{ul} \frac{g_u}{g_l} N_l (1 - \exp(-h\nu/kT_{\text{ex}})) \frac{1}{\Delta\nu}$$

mit der Säulendichte $N = \int n ds$ als Anzahl der Moleküle pro cm² längs des Sehstrahl.

optische Tiefe, frequenzabhängig: $\tau_v = \tau_{v_0} \Delta\nu \phi(v - v_0)$

(Beachte: Normierung des Linienprofiles hier so, dass $\int \phi_v d\nu = 1$, d.h. im Maximum bei $v = v_0$ ist $\phi_{v=v_0} = \frac{1}{\Delta\nu}$, mit der sog. Äquivalentbreite der Linie $\Delta\nu$).

Aus der "detection equation" $I_{v,l} = (S_t(T_{\text{ex}}) - I_{t, bg}) (1 - \exp[-\tau_{v_0} \Delta\nu \phi_v(v - v_0)])$ sehen wir, dass eine Linie relativ zum Kontinuum in Emission auftritt, solange die der Anregungstemperatur entsprechende Planck-Intensität höher ist als das Kontinuum. Ist das Kontinuum ebenfalls thermischer Natur, d.h. wird es durch eine Planck-Funktion beschrieben, $I_{v, bg} = B_v(T_{bg})$, so ist die Linie in Emission wenn $T_{\text{ex}} > T_{bg}$. Umgekehrt ist die Linie in Absorption sichtbar.

Grenzfall optisch dick

Ist die Linie optisch dick, d.h. $\tau_{v_0} \gg 1$, so ist $1 - \exp(-\tau_{v_0}) \approx 1$, und die Linienintensität im Linienzentrum ist vollständig bestimmt durch die Anregungstemperatur (abzgl. der Hintergrundstrahlung):

$$\text{optisch dick } \tau_{v_0} \gg 1: I_{v_0,l} = S_t(T_{\text{ex}}) - I_{t, bg}.$$

Bis auf die Korrektur des Hintergrundes messen wir also im Linienzentrum einfach die Anregungstemperatur des Übergangs.

Grenzfall optisch dünn

Ist die Linie optisch dünn, d.h. $\tau_{v_0} \ll 1$ und Vernachlässigen wir im Moment den Hintergrund (sonst werden die Formeln unnötig kompliziert), so ist $1 - \exp(-\tau) \approx \tau$, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} I_{v,l} &\approx (S_t(T_{\text{ex}}) - I_{t, bg}) \tau_{v_0} \Delta\nu \phi(v - v_0) \\ &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT_{\text{ex}}) - 1} \frac{c^2}{8\pi\nu^2} A_{ul} N_u (\exp(h\nu/kT_{\text{ex}}) - 1) \frac{1}{\Delta\nu} \Delta\nu \phi(v - v_0) \text{ Integration} \\ &= \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} N_u \phi(v - v_0) \end{aligned}$$

über das Linienprofil ergibt also einfach

$$\text{optisch dünn } \tau_{v_0} \ll 1: \int I_{v,l} d\nu = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} N_u$$

Dieses Ergebnis ist anschaulich sofort klar. Ist die Emission optisch dünn, so zählen wir mit der integrierten Intensität einfach die emittierten Photonen. Sie verteilen sich auf eine Raumwinkel

4π , jedes hat die Energie $h\nu$, und die emittierte Anzahl ist gegeben durch die Anzahl der Atome/Moleküle pro cm^2 längs der Sichtlinie, mal der Übergangsraten.

Rayleigh-Jeans-Näherung; Temperatur als äquivalente Intensitätsskala

In der Radioastronomie misst man die Intensität üblicherweise über die äquivalente Rayleigh-Jeans-Temperatur $T_l(\nu) = \frac{\lambda^2}{2} k I_{\nu,l}$. Mit der Abkürzung

$$\mathfrak{I}_\nu(T) = \frac{\lambda^2}{2} k B_\nu(T) = \frac{c^2}{2k\nu^2} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1} = \frac{h\nu}{k} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}$$

lautet die "detection equation" dann:

$$T_l = (\mathfrak{I}_\nu(T_{ex}) - \mathfrak{I}_\nu(T_{bg})) (1 - \exp(-\tau_\nu)).$$

In Rayleigh-Jeans-Näherung, d.h. solange $h\nu \ll kT$ erfüllt ist, ist

$$\mathfrak{I}_\nu(T) \approx \frac{h\nu}{k} \frac{1}{\left(1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{1}{2} \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 + \dots\right)} \approx T - \frac{h\nu}{2k} \approx T,$$

und damit

$$\text{Rayleigh-Jeans-Näherung: } T_l(\nu) \approx (T_{ex} - T_{bg})(1 - \exp(-\tau_\nu)).$$

Die integrierte Linienintensität (in Einheiten K km/s) ergibt sich gemäß der Definition der äquivalenten Linienhelligkeitstemperatur als:

$$\int T_l d\nu = \frac{c^2}{2k\nu^2} \int I_{\nu,l} d\nu \frac{d\nu}{d\nu} = \frac{c^3}{2k\nu^3} \int I_{\nu,l} d\nu \quad \text{und damit im optisch dünnen Fall für}$$

Abhängigkeit zwischen linienintegrierter Intensität und Säulendichte des oberen Zustandes:

$$\int T_l d\nu = \frac{hc^3}{8\pi k \nu^2} A_{ul} N_u.$$

18 Das Interstellare Medium: Gas

Da der größte Teil des interstellaren Gases relativ kühl ist, entweicht die hauptsächliche im Radiobereich (HI 21cm, Molekülrotationslinien) und Infrarotbereich (atomare Feinstrukturlinien, molekulare Rotations-Vibrationsspektren), die beide mittlerweile der Beobachtung zugänglich sind.

18.1 HI-Komponente

Das interstellare Gas in der Milchstraße ist etwa halbe/halbe in atomarer Form (d.h. der Wasserstoff liegt als HI vor) und in molekularer Form (d.h. der Wasserstoff liegt als H₂-Molekül vor). Die HI-Komponente kann über die 21 cm Spin-Flip-Linie des Wasserstoffatoms beobachtet werden.

HI 21 cm Linie

Proton und Elektron tragen einen Spin. Im elektronischen Grundzustand ($n=1, l=0, m=0$; d.h. 1s-Zustand) ist der Bahndrehimpuls =0, so dass sich der Gesamtdrehimpuls aus der Summe der beiden Spins ergibt. Die beiden Spins können entweder entgegengesetzt gerichtet sein, mit Gesamtspin $S=0$, oder

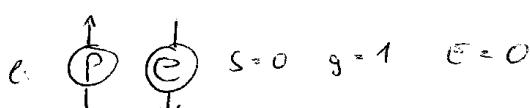
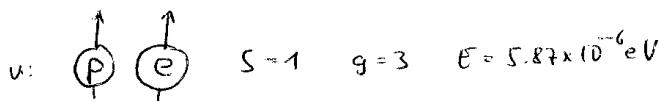


Abb. 97: 21cm Spin-Flip Übergang HI

parallelgerichtet, mit Gesamtspin $S=1$. Wegen der gegensätzlichen Ladung ist die entgegengerichtete Stellung (Parallelstellung der magnetischen Momente) energetisch (etwas) günstiger. Der Energieunterschied beträgt $\Delta E/k=0.0682$ K

(Hyperfeinaufspaltung), entsprechend $\nu=\Delta E/h=1420.40575$ MHz, oder $\lambda=c/\nu=21.1049$ cm. Zwischen den beiden Zuständen gibt es einen magnetischen Dipolübergang, der A-Koeffizient ist entsprechend $A \propto \mu^2 v^3$ sehr klein: $A=2.869 \times 10^{-15}$ sec = $\frac{1}{1.10 \times 10^7 \text{ yr}}$ (beachte: wegen der geringen Übergangswahrscheinlichkeit, und da der untere Zustand als Grundzustand absolut stabil ist, ist die natürliche Linienbreite extrem schmal: $\Delta \nu=A/2\pi=4.5 \times 10^{-16}$ Hz).

Neben den schwachen Strahlungsübergängen sind auch stoßinduzierte Übergänge möglich. Bei den üblichen Dichten von mindestens 1 Teilchen / cm³ sind diese viel häufiger als die Strahlungsübergänge (s.u.), so dass die Anregung, d.h. das Besetzungsverhältnis, durch die Stöße dominiert ist. Damit ist die Anregungstemperatur in guter Näherung gleich der kinetischen Temperatur des Gases (s.u.). Es stellt sich heraus, dass Temperaturen von einigen 10 bis einigen 100 K für das diffuse atomare ISM charakteristisch sind.

Die durch das Besetzungsverhältnis definierte Anregungstemperatur (siehe Kapitel 2.8.2.3) wird meist Spin-Temperatur genannt: $\frac{n(S=1)}{n(S=0)} = \frac{g(S=1)}{g(S=0)} \exp(-h\nu/kT_{\text{spin}})$. Bei den oben genannten Temperaturen von einigen 10 bis einigen 100 K ist immer in guter Näherung $T_{\text{ex}}=T_{\text{spin}} \gg \Delta E/k=0.0682$ K, so dass das Besetzungsverhältnis praktisch unabhängig von der Spintemperatur ist: $\frac{n(S=1)}{n(S=0)} = \exp(-h\nu/kT_{\text{spin}}) \approx \frac{g(S=1)}{g(S=0)} = 3$.

Damit ist auch die Emissivität unabhängig von der Spintemperatur ($n_u = \frac{3}{4} n(\text{H I})$)

$$\eta_\nu = n_u \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} \phi_\nu = \frac{3}{16\pi} n(\text{H I}) A_{ul} h\nu \phi_\nu ,$$

und für den Absorptionskoeffizienten gilt wegen $\left[1 - \frac{g_l}{g_u} \frac{n_u}{n_l}\right] = 1 - \exp(-h\nu/kT_{\text{spin}}) \approx \frac{h\nu}{kT_{\text{spin}}} :$

$$\chi_\nu = \frac{3}{32\pi} \frac{c^2}{\nu^2} n(\text{H I}) A_{ul} \phi_\nu \frac{h\nu}{kT_{\text{spin}}} .$$

Einsetzen der Zahlenwerte und Umrechnung auf eine Linienbreite gemessen in km/sec

($\phi_\nu d\nu = \phi_\nu d\nu$, d.h. $\phi_\nu = \phi_\nu \frac{d\nu}{d\nu} = \phi_\nu \frac{c}{\nu}$) ergibt:

$$\chi_\nu = 5.49 \times 10^{-19} \text{ cm}^{-1} \frac{n(\text{H I})}{[\text{cm}^{-3}]} \frac{\phi_\nu}{[(\text{km/sec})^{-1}]} \frac{\text{K}}{T_{\text{spin}}} ,$$

bzw. für die optische Tiefe in der Linienmitte einer Linie mit Äquivalentbreite $\Delta v = 1/\phi_0$, $\tau_0 = \int \chi_0 ds$:

$$\tau_0 = 5.49 \times 10^{-19} \frac{N(\text{H I})}{[\text{cm}^{-2}]} \frac{[\text{km/sec}]}{\Delta v} \frac{[\text{K}]}{T_{\text{spin}}} .$$

Für typische Werte von $T_{\text{spin}} = 80 \text{ K}$, $\Delta v = 3 \text{ km/sec}$ ist eine optische Tiefe von 1 also bei einer Wasserstoffsäulendichte von $N(\text{H I}) = 4.4 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2}$, d.h. bei einer Wasserstoffdichte von $n(\text{H I}) = 20 \text{ cm}^{-3}$ nach einer Weglänge von $s = \frac{N}{n} = 2.2 \times 10^{19} \text{ cm} \approx 7 \text{ pc}$ erreicht. HI 21cm-Emission kann also durchaus optisch dicht werden, Selbstabsorption ist nicht zu vernachlässigen!

HI-Säulendichte

Nach diesem Exkurs kehren wir wieder zur Interpretation der HI 21cm-Linie zurück:

Im optisch dünnen Fall ergibt sich aus der integrierten Linienintensität wie üblich die Säulendichte des oberen Niveaus, die hier aber unabhängig von der Anregungstemperatur, d.h. der Spintemperatur, direkt die Wasserstoffsäulendichte angibt: $N_u = \frac{3}{4} N(\text{H I})$.

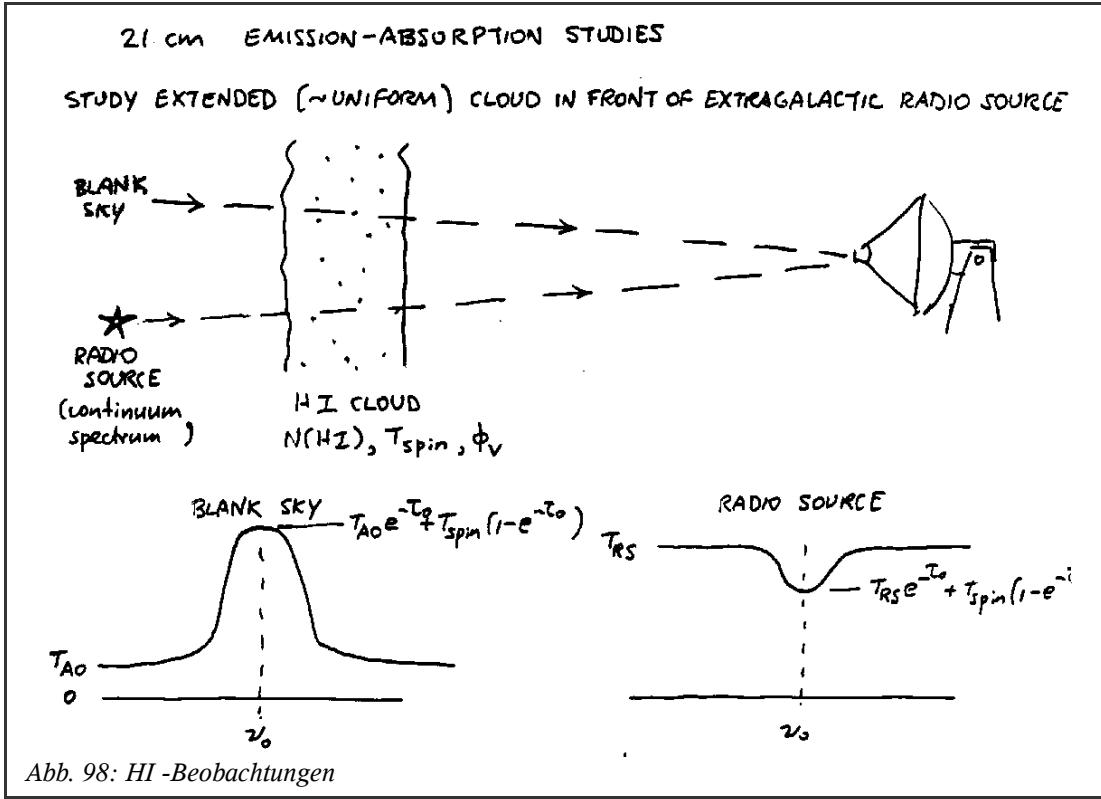
Damit ist $\int I_\nu d\nu = \frac{3}{16\pi} A_{ul} h\nu N(\text{H I})$, bzw. $\int T_l d\nu = \frac{3hc^3}{32\pi k \nu^2} A_{ul} N(\text{H I})$, und in Zahlen:

$$N(\text{H I}) = \frac{32\pi k \nu^2}{3hc^3 A_{ul}} \int T_l d\nu = 1.811 \times 10^{18} \text{ cm}^{-2} \frac{\int T_l d\nu}{[\text{K km/s}]} .$$

Ableitung von Spintemperatur und optischer Tiefe

Für die 21cm-Linie ist praktisch immer die Rayleigh-Jeans-Näherung excellent erfüllt ($h\nu/kT \ll 1$; $\Im_\nu(T) \approx T$). Damit lautet die "detection equation"

$$T_l = T_R - T_{R,bg} = (T_{\text{spin}} - T_{bg}) (1 - \exp(-\tau_\nu)) .$$



Die Hintergrund-Temperatur ist mindestens durch die kosmische Hintergrund-Strahlung gegeben ($T_{bg}=2.7 \text{ K}$), oder gegebenenfalls durch die Radiokontinuums-frei-frei-Strahlung einer HII-Region.

Durch Kombination von Beobachtungen auf und neben einer solchen Radioquelle, und durch Vergleich der gemessenen Intensität im Linienzentrum und neben der Linie lassen sich die Spintemperatur und die optische Tiefe direkt bestimmen (unter der Annahme, dass sie vor der Radioquelle daneben gleich sind).

Bezeichnen wir mit "blank" und "RS" die Position auf dem nackten Himmel und auf der Radioquelle (radio source), und mit "on" und "off" die Messung auf der Linie und daneben, so gilt

$$\begin{aligned} T_{\text{off}}(\text{blank}) &= T_{2.7} e^{-\tau} \\ T_{\text{on}}(\text{blank}) &= T_{2.7} e^{-\tau} + T_{\text{spin}}(1-e^{-\tau}) \\ T_{\text{off}}(\text{RS}) &= T_{\text{RS}} \\ T_{\text{on}}(\text{RS}) &= T_{\text{RS}} e^{-\tau} + T_{\text{spin}}(1-e^{-\tau}) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} T_{\text{on}}(\text{RS}) - T_{\text{on}}(\text{blank}) \text{ ober } T_{\text{off}}(\text{R}) - T_{\text{off}}(\text{blank}) &= \frac{(T_{\text{RS}} - T_{2.7}) e^{-\tau}}{T_{\text{RS}} - T_{2.7}} = e^{-\tau}, \\ \frac{T_{\text{on}}(\text{blank}) - T_{\text{off}}(\text{blank})}{1 - e^{-\tau}} + T_{\text{off}}(\text{blank}) &= (T_{\text{spin}} - T_{2.7}) + T_{2.7} = T_{\text{spin}}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise lässt sich in vielen Fällen T_{spin} bestimmen. Es stellt sich heraus, dass das meiste HI-Material $T_{\text{spin}}=50-150 \text{ K}$ hat. Ein Anteil von ca. 25% hat wesentlich höhere Temperaturen ($T_{\text{spin}}>500 \text{ K}$). Es bestätigt sich auch, dass ein großer Teil der HI-Emission moderate bis hohe optische Tiefen hat.

Bei bekannter Spintemperatur und optischer Tiefe ergibt sich (wenn auch wegen der Ungenauigkeiten beim bestimmen der beiden mit entsprechender Unsicherheit) direkt die Wasserstoffsäulendichte: aus obiger Beziehung $\chi_v = 5.49 \times 10^{-19} \text{ cm}^{-1} \frac{n(\text{H I})}{\text{cm}^{-3}} \frac{\phi_v}{\text{[km/sec]}^{-1}} \frac{[K]}{T_{\text{spin}}}$

folgt

$$N(\text{H I}) = \int n(\text{H I}) ds = 1.811 \times 10^{18} \text{ cm}^2 \frac{\int T_{\text{spin}} \tau_v dv}{[\text{K km/sec}]}.$$



Figure 1.6 The distribution of atomic hydrogen in the plane of the Milky Way as inferred from early 21 cm observations. The Sun is located at the point marked "O." The empty cone toward the Galactic Center and anti-center cannot be mapped out using the kinematic technique employed here. [Reproduced from Oort, Kerr & Westerhout (1958), by permission]

Abb. 99: HI in der Milchstraße

Die HI-Beobachtungen geben uns vor allem Aufschluss über die großräumige Struktur und Dynamik der Milchstraße. Wir wollen hier nur die systematische Bewegung kurz besprechen. Daneben sieht man in der HI 21cm Linie auch sehr schön Strukturen wie expandierende Supernova-Schalen, sog. "Kamine" als große, aus der Ebene der Milchstraße ausbrechende Superbubbles von mehreren SN-Überresten etc.

Ergebnisse der HI-Beobachtungen

Entsprechend der obigen Ableitung kann man mittels der HI-Emission die Säulendichte längs des Sehstrahles zusammen mit der Geschwindigkeitsstruktur kartieren. Durch ein entsprechendes kinematisches Modell, das wir weiter unten besprechen, kann die Geschwindigkeitsinformation in eine Entfernungsinformation umgesetzt werden. Damit erschließt sich aus den HI-Beobachtungen die globale Struktur und Dynamik der Milchstraße.

Generell ist die HI-Emission sehr stark geklumpt, sowohl räumlich, d.h. in der 2-dimensionalen Verteilung am Himmel, wie auch in der Geschwindigkeits-Koordinate. Die Emission stammt aus einer dünnen Scheibe (Skalenhöhe 150 pc), wesentlich dünner als die Verteilung der Sterne senkrecht zur Ebene der Milchstraße.

Die Struktur ist an vielen Stellen filamentär und deutet auf große dynamische Aktivität in der Scheibe hin (SN-Ausbrüche erzeugen "Blasen", die sich in "Superblasen" nach oben und unten aus der Scheibe öffnen; Material wird also aus der Scheibe in den Halo befördert und stürzt von dort wieder auf die Scheibe ein). Die Sonnenumgebung liegt in einer solchen SN-Blase (dynamisches Alter 10^6 Jahre).

18.2 Molekülwolken

Bis in die 60'er Jahre hinein war die gängige Meinung, dass Moleküle im interstellaren Raum nicht existieren könnten, weil sie durch den UV-Anteil des interstellaren Strahlungsfeldes sofort dissoziiert würden. Zwar waren aus optischen Beobachtung (in Absorption gegen Sterne) einige wenige Molekül-Linien identifiziert (CH, CN); dies wurde aber als exotischer Einzelfall angesehen.

Man hatte dabei übersehen, dass der Staub die UV-Strahlung sehr effizient abschirmt kann. Sobald also genügende Säulendichten zustande kommen ($A_{\text{UV}} \approx 4 A_V = 1$), wird die UV-Strahlung

vollständig vom Staub absorbiert und sich bildende Moleküle werden nicht mehr zerstört. Mit der Entdeckung starker Radiolinien von OH und NH₃, Ende der 60'er Jahre begann dann eine sehr spannende Phase, in der die große Verbreitung und Bedeutung der Molekülwolken als Ort der Sternentstehung entdeckt wurde.

Heute wissen wir, dass ca. 50% des ISM in Form von kühlen, neutralen Moleküllinen vorliegen. Die anderen 50% Prozent sind atomar. Sie sind zum einen diffuse Wolken, die keine genügende Säulendichte erreichen, und andererseits die Oberfläche bis ca. $A_V \approx 1$ der dichten Wolken, die wegen der eindringenden UV-Strahlung atomar bleiben.

Die niedrige Temperatur ($T = \text{einige } 10 \text{ K, s.u.}$) der Wolken, und damit die niedrige Stoßenergie der Atome und Moleküle, reicht nicht aus, um viele der im Labor bekannten chemischen Reaktionen ablaufen zu lassen. Darüber hinaus können im interstellaren Medium wegen der geringen Dichte ohnehin nur 2-er Stöße eine Rolle spielen. Durch die alles durchdringende kosmische Strahlung wird aber eine Restionisation (ca. $10^8 - 10^9$) auch im Inneren der Wolke aufrechterhalten. Die vorhandenen Ionen können meist ohne Aktivierungsenergie in 2-er-Stößen reagieren und so sukzessive ein kompliziertes chemisches Netzwerk ablaufen lassen.

Voraussetzung ist aber zunächst die Bildung von molekularem Wasserstoff, der sich überhaupt nur auf Stauboberflächen bilden kann. Wir wollen hier die Astrochemie nicht näher behandeln, sondern nur bemerken, dass heute ca. 90 chemische Spezies bekannt sind, zum Teil sehr komplexe Strukturen wie lange Ketten etc., die im Labor gar nicht bekannt sind).

Typen Interstellarer Wolken	A_V	T [K]	$n(H_2)$ [cm ⁻³]	d [pc]	M/M_\odot
diffuse Wolken, High Latitude Clouds	1-2	30-50	10^3	01.-0.5	0.1 1
kalte Dunkelwolken	5	10-20	10^4	1-10	100-1000
massive Wolken Wolkenkerne	10-100	20-100	10^4-10^9	0.1-3	$100-10^4$
Giant Molecular Clouds	10-100	10-50	10^3-10^4	100	10^6

Tabelle 18.a: Typen interstellare Wolken

Entsprechend der Elementhäufigkeit wird man zunächst Hydride erwarten (CH, OH, NH, CH₂, H₂O, NH₂, ...) und deren Ionen. Man findet sie auch, aber nicht in sehr großer Häufigkeit. Einige sind auch sehr schwer zu beobachten, wie z.B. H₂O, wegen der Absorption in der Atmosphäre, so dass noch keine gesicherten Kenntnisse vorliegen. Die meisten Hydride und ihre Ionen sind sehr reaktiv, so dass sie schnell weitere Verbindungen eingehen. Eines der wichtigsten Moleküle ist das sehr stabile CO. Da es wegen seiner hohen Bindungsenergie praktisch nicht mehr weiter reagieren kann, erreicht es eine große Häufigkeit (8×10^{-5} relativ zu H₂). Tatsächlich ist ein wesentlicher Teil des Kohlenstoffs und Sauerstoffs in der Gasphase in CO gebunden.

Eine grobe Klassifizierung der Molekülwolken, die aber sicher in vielen Punkten willkürlich ist und einen großen Teil Beobachtungs-Bias widerspiegelt, ist in der Tabelle gegeben.

Die minimale Temperatur von ca. 10 K erklärt sich aus der immer vorhanden Heizung durch die kosmische Strahlung (Ionisation von Molekülen und Staubkörnern) und die dagegen wirkende Kühlung durch Staub-Kontinuumstrahlung und Linienstrahlung von Molekülen (CO). Höhere Temperaturen entstehen, soweit das interstellare Strahlungsfeld eindringen kann durch photoelektrische Heizung (s.o.) und durch mechanische Energiezufuhr (Stoßfronten von

Sternwinden, Ausflüssen; Turbulenz), wenn Sternentstehungsaktivität vorhanden ist.

Im folgenden wollen wir diskutieren, wie wir aus den Beobachtungen von Molekülen auf die physikalischen Parameter der Wolken schließen können.

Anregung und Strahlungstransport in Molekülwolken

Wir hatten oben gesehen, dass die entscheidende Größe für die Berechnung der Intensität die sog. Quellfunktion ist. Für den Fall von Linienstrahlung, d.h. Übergängen zwischen diskreten Energieniveaus, haben wir die Quellfunktion, d.h. das Verhältnis von spezifischer Volumen-Emissivität zu -Absorptivität, schon oben als Planck-Funktion bei der durch das Besetzungsverhältnis der beiden beteiligten Niveaus gegebenen Anregungstemperatur geschrieben: $S_\nu = B_\nu(T_{\text{ex}})$, mit $n_u/n_l = g_u/g_l \exp(h\nu/kT_{\text{ex}})$. Im Falle lokalen thermodynamischen Gleichgewichts ist das Besetzungsverhältnis durch die thermodynamische Temperatur gegeben: $T_{\text{ex}} = T$. Mit auf diese Weise aus der Temperaturverteilung bekannter Quellfunktion (z.B: die Temperaturschichtung in der Sternatmosphäre in "grauer" Näherung) kann durch Integration der formalen Lösung die austretende, beobachtbare Intensität berechnet werden. Oft ist das Besetzungsverhältnis aber nicht durch die einfache Annahme von LTE richtig beschrieben, vielmehr stellt sich ein Besetzungsverhältnis je nach den mikroskopisch ablaufenden Anregungsmechanismen ein. Insbesondere ist dann die Anregungstemperatur für jeden der vielen möglichen Übergänge eine andere. Um sie zu bestimmen, muss man die Ratengleichungen lösen, die die mikroskopischen Anregungsmechanismen beschreiben (s.u.). Für die Anregung in Molekülwolken spielen neben den durch die Einstein-Koeffizienten beschriebenen Strahlungsraten vor allem Stöße mit den Gasatomen eine Rolle. Wegen der dominanten Häufigkeit von (molekularem) Wasserstoff (10 mal häufiger als He, 10^4 mal häufiger als die nächst häufigen schwereren Elemente und damit die aus ihnen gebildeten Moleküle) muss man nur Stöße mit Wasserstoff (und He) berücksichtigen.

Insbesondere geht in diese Ratengleichungen auch das lokale Strahlungsfeld (über die Absorption und die induzierte Emission) ein, das sich wiederum aus der formalen Lösung der Strahlungstransportgleichung berechnet. Dieses gekoppelte System von Integralgleichungen, die für jeden Ort die mittlere Intensität als Funktion der Besetzungsgrößen an allen anderen Orten ausdrücken, und den Ratengleichungen, die die sich an jedem Ort ergebenden Besetzungsgrößen unter Einschluss dieser mittleren Intensität bestimmen, ist im allgemeinen nicht, oder wenn, dann nur für einfache Systeme mit großem numerischen Aufwand zu lösen.

Um trotzdem zu einem einfachen qualitativen Verständnis und zu einer einfachen Interpretation der beobachteten Intensitäten zu gelangen, hilft man sich meist mit relativ stark vereinfachenden Annahmen.

Strahlungstransport: Die Näherung der "Entweichwahrscheinlichkeiten"

Wir hatten oben gesehen, dass die Strahlungstransportgleichung formal gelöst werden kann in der Form:

$$I_\nu(\vec{r}, \vec{n}) = I_{\nu, \text{bg}, S} \exp(-\tau_{\nu_0}) + \int_0^{\tau_{\nu_0}} S_\nu(\tau_\nu') \exp(-\tau_\nu') d\tau_\nu'$$

Dies ist eine Integralgleichung, die die spezifische Intensität an jeder Stelle und in jeder Richtung als Linien-Integral längs dieser Richtung über die Quellfunktion und moduliert mit der jeweiligen optischen Tiefe angibt. Da die Quellfunktion, d.h. die Anregungstemperatur des Übergangs selber,

wiederum (neben der Anregung durch Stoßprozesse, s.u.) durch das Strahlungsfeld, genauer die mittlere Intensität in dem jeweiligen Übergang (und auch in Übergängen zwischen anderen Niveaus, an die das betrachtete Niveau z.B. über Stöße oder andere Übergänge ankoppelt) bestimmt ist, erlaubt diese formale Lösung alleine aber genauso wenig eine Bestimmung der Intensitäten, wie die zugrunde liegende Strahlungstransportgleichung. Nur ein sehr komplexes gekoppeltes Gleichungssystem, dass die Intensität an einer betrachteten Stelle mit den Quellfunktionen an allen anderen Stellen, und die Quellfunktionen an allen Stellen wiederum aus den Ratengleichungen (Stoß- und Strahlungsraten) unter Einbeziehung der jeweiligen lokalen mittleren Intensitäten berechnet, bestimmt die Lösung des Problems. Dies ist zusätzlich kompliziert dadurch, dass das Geschwindigkeitsfeld und die lokale Geschwindigkeitsdispersion in die Linienform und -position eingeht, so dass die Strahlungskopplung auch noch die Kinematik der Quelle berücksichtigen muss. Eine numerische Lösung ist selbst mit heutigen Rechnerkapazitäten nur in speziellen, vereinfachten Fällen möglich und im allgemeinen sehr aufwendig.

Als einfache, und in vielen Fällen ausreichende, wenn auch mit Vorsicht anzuwendende, Näherung hat sich die *escape probability* Näherung bewährt. Wir wollen im folgenden annehmen (wie bei der Herleitung der *detection equation*) dass die Anregungstemperaturen in allen Übergängen räumlich konstant sind (allerdings durchaus für die verschiedenen Übergänge verschieden). Wir können z.B. die mittleren Anregungstemperaturen in der Quelle betrachten. Dann kann die Quellfunktion vor das Integral gezogen werden und es ergibt sich

$$I_\nu(\vec{r}, \vec{n}) = I_{\nu, bg, S} \exp(-\tau_{\nu_0}(\vec{r}, \vec{n})) + S_\nu [1 - \exp(-\tau_{\nu_0}(\vec{r}, \vec{n}))].$$

Der Faktor $\beta_\nu(\vec{r}, \vec{n}) = \exp(-\tau_{\nu_0}(\vec{r}, \vec{n}))$ gibt an, welcher Anteil der Photonen längs des Sehstrahles S vom Rande der Wolke bis zum Aufpunkt gelangt (*Entweichwahrscheinlichkeit*), der komplementäre Faktor $[1 - \exp(-\tau_{\nu_0}(\vec{r}, \vec{n}))]$ gibt entsprechend die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Photon auf dem Weg vom Rande bis zum Aufpunkt in diese Richtung, d.h. entlang dieses Sehstrahls, absorbiert wird.. Berechnen wir aus der spezifischen Intensität durch Winkelmittlung die mittlere Intensität $J_\nu(\vec{r})$, so erhalten wir mit der winkelgemittelten

$$\text{Entweichwahrscheinlichkeit } \beta_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \exp(-\tau_{\nu_0}(\vec{r}, \vec{n})) d^2\vec{n} :$$

$$J_\nu(\vec{r}) = (1 - \beta_\nu(\vec{r})) S_{\nu_0} + \beta_\nu(\vec{r}) I_{\nu_0, bg}.$$

Hierbei haben wir angenommen, dass die Hintergrundintensität isotrop ist (und entsprechend den Index S fallen gelassen), so dass wir sie vor das Mittelungsintegral ziehen können. Ebenso haben wir angenommen, dass die Hintergrundintensität sich über die Linienbreite nicht ändert, ebenso die Quellfunktion, und entsprechend deren Frequenzindizes durch ν_0 , die Mittenfrequenz ersetzt.

Die Frequenzabhängigkeit der optischen Tiefe ist durch die Profilfunktion $\phi_{\nu_0}(\nu) = \phi(\nu_0 - \nu)$ mit der Normierung $\int d\nu \phi(\nu_0 - \nu) = 1$ gegeben. Entsprechend ist $\phi_{\nu_0}(\nu = \nu_0) = \frac{1}{\Delta\nu}$ mit der

"äquivalenten Frequenzbreite" der Linie $\Delta\nu$. Damit ist, mit der liniengemittelten optischen Tiefe $\bar{\tau}(\vec{r}, \vec{n}) = \int \tau_\nu(\vec{r}, \vec{n}) d\nu / \int \phi_\nu d\nu$, die optische Tiefe im Linienzentrum $\tau_{\nu_0} = \bar{\tau}/\Delta\nu$; und damit $\tau_\nu(\vec{r}, \vec{n}) = \tau_{\nu_0}(\vec{r}, \vec{n}) \Delta\nu \phi(\nu_0 - \nu)$. Durch Mittelung über alle Frequenzen, gewichtet mit dem Linienprofil, erhalten wir die mittlere Linienintensität

$$J_t(\vec{r}) = (1 - \beta_t(\vec{r})) S_t + \beta_t(\vec{r}) I_{\nu_0, bg, S},$$

mit der liniengemittelten Entweichwahrscheinlichkeit

$\beta_t(\vec{r}) = \int \beta_\nu(\vec{r}) \phi(\nu_0 - \nu) d\nu = \int d\nu \int d^2\vec{n} \phi(\nu_0 - \nu) \exp(-\tau_{\nu_0}(\vec{r}, \vec{n}) \Delta \nu \phi(\nu_0 - \nu))$ für den Übergang t .

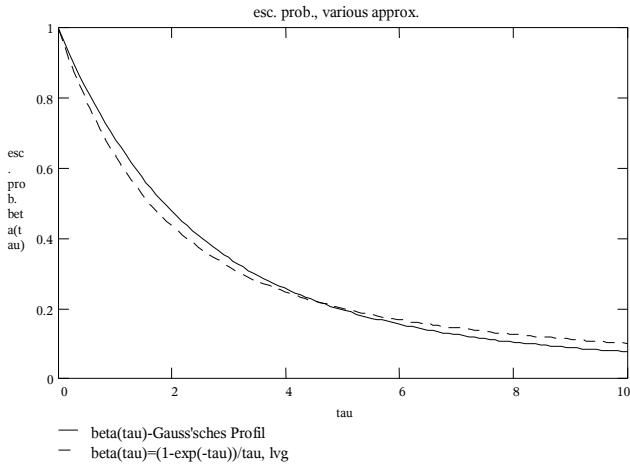


Abb. 100: Entweichwahrscheinlichkeit für Gauss'sches Linienprofil

Die so definierte Entweichwahrscheinlichkeit ist ortsabhängig. Insbesondere wird sie am Rande einer Wolke größer sein (freies Entweichen der Photonen in den einen Halbraum). Dies führt zu einer entsprechenden Ortsabhängigkeit der mittleren Linienintensität, die wiederum in die Ratengleichungen (zusammen mit den Einstein-B-Koeffizienten) eingeht (s.u.) und so zu ortsabhängigen Besetzungszahlen führt. Dies ist im Widerspruch zur Annahme konstanter Quellfunktion; die "Entweichwahrscheinlichkeits-Näherung" ist also nicht selbstkonsistent formulierbar.

Wir müssen die Näherung also so interpretieren, dass wir die Quellfunktion, bzw. die Anregungstemperaturen, durch deren effektive Mittelwerte ersetzen, ebenso die Entweichwahrscheinlichkeit durch einen geeigneten typischen mittleren Wert für die Quelle. Analog müssen wir eine typische, mittlere optische Tiefe für jeden Übergang einführen. Die Entweichwahrscheinlichkeit ist dann eine Funktion dieser optischen Tiefe:

$\beta_t(\tau_{nu_0}) = \int \exp(-\tau_{nu_0} \Delta \nu \phi(\nu_t - \nu)) \phi(\nu_t - \nu) d\nu$. Die Abbildung zeigt diese Funktion für ein Gauss'sches Linienprofil. In dieser Näherung ist dann entsprechend der obigen Gleichung die mittlere Intensität durch die mittlere Quellfunktion mal der Entweichwahrscheinlichkeit der Photonen, plus die Hintergrundintensität mal der komplementären "Eindringwahrscheinlichkeit". Dieses Ergebnis ist auch anschaulich einleuchtend. Wir haben also den nichtlokalen Zusammenhang zwischen mittlerer Intensität und Quellfunktion durch die Annahme einer mittleren Quellfunktion zu einem einfacheren, lokalen Zusammenhang gemacht. Dies bezeichnet man üblicherweise als "Entweichwahrscheinlichkeits"-Näherung ("escape probability approximation").

Bemerkung: dieses Ergebnis, nämlich dass die mittlere Intensität an einem bestimmten Ort nur durch die lokale Anregung (Quellfunktion) bestimmt ist, kann man auch unter anderen Bedingungen ableiten. Wir haben oben eine eventuelle systematische Bewegung, und damit Dopplerverschiebung der Linien, in der Quelle vernachlässigt. Im allgemeinen wird dadurch das Strahlungstransportproblem noch komplizierter. Ist der Geschwindigkeitsgradient aber genügend groß, so können die an einer Stelle emittierten Photonen wegen der Dopplerverschiebung gar nicht mehr in entsprechend weit weg liegendem Material mit anderen Geschwindigkeiten absorbiert werden, d.h. die verschiedenen Gebiete der Quelle entkoppeln strahlungsmäßig. Die mittlere Intensität einer bestimmten Stelle (gemittelt mit dem lokalen Linienprofil als Gewichtung, d.h. nur unter Berücksichtigung der für die lokale Anregung maßgeblichen Photonen) wird also wieder nur bestimmt durch die lokalen Eigenschaften. Dies führt ebenfalls auf eine "Entweichwahrscheinlichkeits"-Formulierung des Strahlungstransport, die sog. "Sobolev"- oder "large velocity gradient" Näherung. Wiederum ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der effektiven optischen Tiefe und der Entweichwahrscheinlichkeit; die genaue funktionale Form hängt von der Geometrie der Wolke und der Form des Linienprofils ab. Für ein Gauss'sches Linienprofil und eine planparallel Wolke mit Geschwindigkeitsgradient in z -Richtung ist

$$\beta(\tau) = (1 - \exp(-3\tau)) / 3\tau, \text{ für sphärische Geometrie ist } \beta(\tau) = (1 - \exp(-\tau)) / \tau \text{ (siehe Abb.)}$$

In "escape probability"-Näherung haben wir per definitionem eine über die Quelle konstante mittlere Quellfunktion, so dass sich gemäß der formalen Lösung der Strahlungstransportgleichung für die austretenden Intensität ergibt wie oben abgeleitet die detection equation in der üblichen Form ergibt:

$$I_v = S_t (1 - \exp(-\tau_{v,S})) + I_{t,bg} \exp(-\tau_{v,S}).$$

Die Linienintensität, d.h. der Unterschied zwischen Kontinuumintensität und Linie, ist dann

$$I_{v,l} = I_v - I_{t,bg} = (S_t - I_{t,bg}) (1 - \exp(-\tau_{v,S})).$$

Die ist die sog. "**detection equation**".

Anregung durch Stöße

Neben der Absorption und Emission von Strahlung kann die Besetzung der Niveaus eines Moleküls auch durch Stöße mit anderen Gasatomen und/oder Molekülen geändert werden. Die Strahlungsübergänge haben wir oben bereits durch die Einstein A- und B-Koeffizienten charakterisiert: die Übergangsrate für spontane Emission ist gerade der Einstein A-Koeffizient, die Übergangsraten für induzierte Emission sind gerade $B_{ul} J_t$, und die für Absorption $B_{lu} J_t$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül im Zustand 1 durch einen Stoß mit einem Stoßpartner, wegen der hohen Häufigkeit praktisch ausschließlich ein H₂-Molekül, in einen anderen Zustand 2 wechselt, wird phänomenologisch durch die Stoßrate C_{12} beschrieben. Sie ist zunächst proportional zur Dichte der Stoßpartner: $C_{12} = n(H_2) \gamma_{12}$, mit dem Stoßraten-Koeffizienten γ_{12} . Der Stoßratenkoeffizient ist gegeben durch das Produkt aus Stoßquerschnitt und Geschwindigkeit der Stoßpartner, $\sigma_{12} v$, bzw. genauer durch den Mittelwert von $\sigma_{12} v$ über die thermische (Maxwell'sche) Geschwindigkeitsverteilung der Stoßpartner:

$$\gamma_{12} = \langle \sigma_{12} v \rangle = \int \sigma_{12}(v) v f(v) dv, \text{ mit } f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2} kT \right)^{3/2} v^2 \exp(-mv^2/kT).$$

Der Streuquerschnitt muss im Prinzip mittels quantenmechanischer Streutheorie ausgerechnet werden. Das ist alles andere als trivial, insbesondere da die thermischen Energien in Molekülwolken typischerweise einigen K bis einigen 10K entsprechen, während die Wechselwirkungsenergien der Moleküle typischerweise im eV-Bereich, d.h. 10⁴ liegen. Das Wechselwirkungspotential (berechnet aus der quantenmechanischen Konfiguration der beteiligten Moleküle) wird also im Stoß nur bei sehr niedrigen Energien abgetastet, so dass das Potential mit Genauigkeiten 10⁻³-10⁻⁴ berechnet werden muss. tatsächlich sind solche ab-initio Berechnungen der Streuquerschnitte nur für einige wenige Systeme im Detail machbar und durchgeführt (CO-H₂, CO-H, H₂-H₂, etc.). Ansonsten hilft man sich mit einfachen Näherungen.

Als einfachste Näherung kann man den Stoßquerschnitt als den geometrischen Querschnitt des Moleküls annehmen (genauer: die Summe der Querschnitte des Moleküls und des Stoßpartners), für schwerere Moleküle also ca. (2Å)², also ca. 4×10⁻¹⁶ cm⁻². Die mittlere thermische Geschwindigkeit ist $v_{th} \approx \sqrt{kT/m}$. Dabei ist die Masse die reduzierte Masse des 2-Körper-Stoßproblems, also ca. 2 a.m.u. Bei einer Temperatur von 50 K ist also $v_{th} = 4.5 \times 10^4$ cm/s. Damit ergibt sich für den Stoßratenkoeffizienten näherungsweise $\gamma \approx \sigma v_{th} \approx 2 \times 10^{-11}$ cm³/s. In dieser einfachen Näherung erwarten wir, dass die Stoßratenkoeffizienten ungefähr $\propto \sqrt{T}$ gehen.

Genauso wie die Einstein-Beziehungen für die A- und B-Koeffizienten garantieren, dass die

Besetzung im Gleichgewicht mit einem thermischen Strahlungsfeld gerade durch die Boltzmann-Formel bestimmt wird, so müssen auch die Stoßraten C_{12} und C_{21} , bzw. die Stoßratenkoeffizienten γ_{12} , γ_{21} bestimmte Beziehungen erfüllen, damit im Gleichgewicht mit dem thermischen Reservoir der kinetischen Energie der Stoßpartner das Besetzungsverhältnis durch die Boltzmannformel gegeben ist. Dies wird durch die "Relationen des detaillierten Gleichgewichts" beschrieben.

"detailed balance"

Betrachten wir als einfachen Fall ein 2-Niveau-System, mit oberem Niveau u ("upper") und unterem Niveau l

("lower"). Mit den Stoßraten C_{ul} und C_{lu} ergibt sich, wenn die Besetzung nur durch Stöße beeinflusst wird, die Ratengleichung für die Änderung der Besetzung des oberen Zustandes, $\frac{dn_u}{dt} = -n_u C_{ul} + n_l C_{lu}$. Die entsprechende Gleichung für die Änderung der Besetzung des unteren

Niveaus, $\frac{dn_l}{dt} = +n_u C_{ul} - n_l C_{lu}$ ist trivial mit der ersten verknüpft, da die Gesamtzahl der Moleküle erhalten bleiben muss: $\frac{d}{dt}(n_u + n_l) = 0$, d.h. $\frac{dn_u}{dt} = -\frac{dn_l}{dt}$. Im Gleichgewicht ist die zeitliche Änderung $= 0$, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= -n_u C_{ul} + n_l C_{lu} \\ n_u C_{ul} &= n_l C_{lu} \\ \frac{n_u}{n_l} &= \frac{C_{lu}}{C_{ul}} := \frac{g_u}{g_l} \exp(-(E_u - E_l)/kT). \end{aligned}$$

Wie bei den Einstein-Relationen, gilt diese Beziehung als Beziehung zwischen mikroskopischen Größen, die nichts davon "wissen", ob die Moleküle einer thermischen Besetzung folgen oder nicht, immer und unabhängig davon, ob die Besetzung der Moleküle thermisch ist.

Der tiefere Grund für diese zunächst erstaunliche Beziehung zwischen den rauwärts und runterwärts gerichteten Stoßraten liegt darin, dass wegen der Energieerhaltung der stoßinduzierte Übergang z.B. von l nach u mit einer entsprechenden Energieänderung der kinetischen Energie des Stoßpartners einhergehen muss. Die elementare Wahrscheinlichkeit für einen Übergang, d.h. bei vollständiger Spezifizierung der Quantenzahlen beider Stoßpartner muss vorwärts und rückwärts die gleiche sein (Mikroreversibilität, begründet in der Hermitizität der Ww-Matrix z.B. in Fermi's Goldener Regel, s.o.). Aus dieser elementaren Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich die Stoßrate durch Mittelung über alle verfügbaren Anfangszustände und Summation über alle möglichen Endzustände. In die Mittelung über die Anfangszustände geht die thermische Besetzung der Stoßpartner ein. Das Verhältnis der Stoßraten rauwärts und runterwärts enthält also das Verhältnis der Besetzung der Stoßpartner. Da sich wegen der Energieerhaltung die Energien der Stoßpartner gerade um die Energiedifferenz der Niveaus unterscheiden, ist das Verhältnis der Besetzungen gerade durch den Boltzmann-Faktor mit der Übergangsenergie gegeben. Analog treten bei der Mittelung die statistischen Gewicht von Anfangs- und Endzustand auf, so dass im Verhältnis der Raten das Verhältnis der statistischen Gewichte wie oben angegeben auftritt.

Dies zeigt im Detail die folgende Ableitung: betrachten wir als System A das Molekül oder Atom mit seinen inneren Anregungen (Elektronische Zustände, Vibration, Rotation) und seiner kinetischen Energie, als System B das System der Stoßpartner, z.B. die molekularen Wasserstoffatome. Die Quantenzahlen des Systems A nennen wir a, α , die des Systems B b, β .

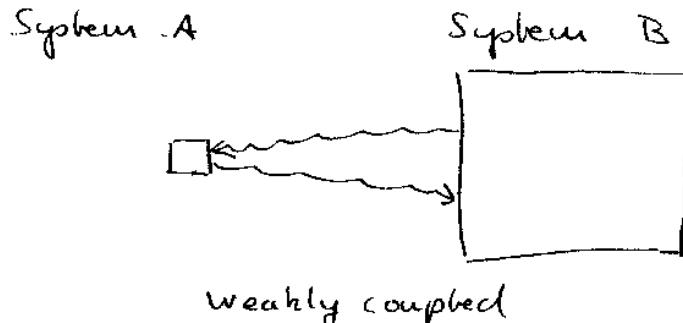


Abb. 101 Schwache Kopplung von System A und B

Definitionen zusammen.

Dabei bezeichnen die lateinischen Buchstaben alle Quantenzahlen, die die Energie charakterisieren, die griechischen die zusätzlichen Quantenzahlen der entarteten Zustände zur selben Energie. Die Energie des Systems A ist also E_a , die des Systems B E_b ; der Entartungsgrad der jeweiligen Zustände ergibt sich als $g_a = \sum_{\alpha_a} 1$ etc. Die Tabelle faßt diese

quantum numbers	a, α	b, β
energy	E_a	E_b
degeneracy	$g_a = \sum_{\alpha_a} 1$	$g_b = \sum_{\beta_b} 1$

Tabelle 18.b: Definition der Quantenzahlen etc.

Der gesamte Hamiltonian ist dann $\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{V}_{AB}$ mit den Eigenwerten $E = E_a + E_b + 0$, wobei wir angenommen haben, dass die (Stoß-)Kopplung schwach ist, so dass die Wechselwirkung die gesamte Energie nicht beeinflusst.

Jetzt machen wir die entscheidende Annahme, dass das System B im thermischen Gleichgewicht ist: $\rho_{b\beta} = \exp(-E_b/kT_{kin})$. Beachte: wir machen keine Annahme bezüglich System A.

Entsprechend Fermi's goldener Regel ist die Übergangswahrscheinlichkeit vom (vollständig charakterisierten) Zustand $a\alpha b\beta$ in den neuen (ebenfalls vollständig charakterisierten) Zustand $a'\alpha' b'\beta'$

$$W_{a\alpha b\beta \rightarrow a'\alpha' b'\beta'} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle a\alpha b\beta | \hat{V}_{AB} | a'\alpha' b'\beta' \rangle|^2 \delta(E_a + E_b - (E_a' + E_b')).$$

Die δ -Funktion drückt die Energieerhaltung aus. Jetzt benutzen wir die Tatsache, dass der Wechselwirkungsoperator hermitesch, so dass die Rolle von (vollständig charakterisiertem) Anfangs- und Endzustand auf mikroskopischem Niveau vertauscht werden können, das sog. *Prinzip der Mikroreversibilität*:

$$\begin{aligned} |\langle a\alpha b\beta | \hat{V}_{AB} | a'\alpha' b'\beta' \rangle|^2 &= |\langle a'\alpha' b'\beta' | \hat{V}_{AB} | a\alpha b\beta \rangle|^2 \\ \text{d.h. } W_{a\alpha b\beta \rightarrow a'\alpha' b'\beta'} &= W_{a'\alpha' b'\beta' \rightarrow a\alpha b\beta}. \end{aligned}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand a nach a' für das System A ergibt sich durch Mittelung über die nicht spezifizierten Anfangszustände (Quantenzahlen α, b, β) und Summation über die nicht spezifizierten Endzustände (Quantenzahlen α', b', β'), d.h.

$$W_{a \rightarrow a'} = \sum_{\alpha} \frac{1}{g_a} \sum_{b, \beta} \rho(b\beta) \sum_{\alpha'} \sum_{b', \beta'} W_{a\alpha b\beta \rightarrow a'\alpha' b'\beta'}.$$

Wegen der thermischen Besetzung von B und der Energieerhaltung ($E_b = E_b' + E_a' - E_a$) ergibt sich für die Zustandsdichte des Systems B im Zustand $b\beta$:

$$\rho(b\beta) = e^{-E_b/kT_{kin}} = e^{-E_b'/kT_{kin}} e^{-(E_a' - E_a)/kT_{kin}} = \rho(b'\beta') e^{-(E_a' - E_a)/kT_{kin}},$$

so dass

$$\begin{aligned} W_{a \rightarrow a'} &= \frac{1}{g_a} \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{b\beta b'\beta'} \rho(b'\beta') e^{-(E_a' - E_a)/kT_{kin}} W_{a'\alpha'b'\beta' \rightarrow a\alpha b\beta} \\ &= g_a' \frac{e^{-(E_a' - E_a)/kT_{kin}}}{g_a} \sum_{\alpha'} \frac{1}{g_{a'}} \sum_{b\beta} \rho(b'\beta') \sum_{ab\beta} W_{a'\alpha'b'\beta' \rightarrow a\alpha b\beta} \\ &= \frac{g_a'}{g_a} e^{-(E_a' - E_a)/kT_{kin}} W_{a' \rightarrow a}. \end{aligned}$$

Dies ist die "detailed balance"-Beziehung.

Wichtig ist also nur die thermische Besetzung der Stoßpartner, d.h. die Tatsache, dass die kinetische Energie Boltzmann-verteilt ist, bzw. die Geschwindigkeit der Stoßpartner durch eine Maxwell-Verteilung bestimmt ist. Die Thermalisierung der kinetischen Energie ist aber immer gesichert, da sich die kinetische Energie in den sehr häufigen Stößen zwischen den Wasserstoffmolekülen sehr schnell thermisch verteilt.

Falls allerdings eine atomares/molekulares System an ein System koppelt, das nicht im thermischen Gleichgewicht ist, z.B. eine Plasma mit unterschiedlichen Temperaturen für die Protonen und Elektronen, $T_{nucl} \neq T_{elec}$, so gibt es keine "detailed balance"-Beziehung und das System kann bei Dominanz der Stoßanregung sich nicht auf eine (ja auch gar nicht definierte) Gleichgewichts-Temperatur einstellen (dies ist ein möglicher Maser-/Lasermechanismus im Labor).

Ratengleichungen: Strahlungsübergänge und Stoßanregung

Sowohl die Strahlungsübergänge (Raten beschrieben durch die Einstein-Koeffizienten), wie auch die Stoßübergänge (beschrieben durch die Dichte der Stoßpartner mal den Stoßratenkoeffizienten) ändern die Besetzung der Niveaus. Dabei wird die Besetzung des oberen Niveaus für jeden möglichen Strahlungsübergang durch induzierte und spontane Emission verringert und durch Absorption erhöht, entsprechend umgekehrt für die unteren Niveaus. Analoges gilt für die Stoßraten. Für die Änderung der Besetzung des willkürlich herausgegriffenen i -ten Niveaus erhalten wir also

$$0 = \frac{dn_i}{dt} = - \sum_t \left\{ \delta_{u_t, i} [n_{u_t} A_t + n_{u_t} J_t B_{u_t l_t} - n_{l_t} J_t B_{l_t u_t}] + \delta_{l_t, i} [n_{u_t} A_t + n_{u_t} J_t B_{u_t l_t} - n_{l_t} J_t B_{l_t u_t}] \right\} - \sum_{j>i} [n_i C_{ij} - n_j C_{ji}] + \sum_{j$$

Dieses Gleichungssystem sieht zunächst wie ein lineares Gleichungssystem für die Besetzungszahlen der Niveaus aus. Tatsächlich hängt aber die mittlere Intensität, die die induzierte Emissions- und Absorptionsrate für jeden Strahlungsübergang bestimmt, wiederum von den Besetzungszahlen, nämlich der Quellfunktion und der optischen Tiefe, ab. Im allgemeinen ist diese Abhängigkeit sogar nichtlokal, und die Besetzungszahlen sind an jeder Stelle der Wolke anders. Dann müssen wir für jede Stelle die Ratengleichungen mit den dort herrschenden mittleren Intensitäten und die Integralgleichung (formale Lösung der Strahlungstransportgleichung) als gekoppeltes System lösen. Dies geht nur iterativ numerisch, und auch das nur für ein hinreichend

einfaches System mit einfacher Geometrie. In "escape probability"-Näherung vereinfacht sich die Sache erheblich, da die mittlere Intensität nur noch von den lokalen Besetzungszahlen (über Quellfunktion und mittlere optische Tiefe, d.h. Entweichwahrscheinlichkeit) abhängt. Auch dieses nichtlineare Gleichungssystem muss aber numerisch iterativ gelöst werden (Newton-Raphson-Verfahren, Linearisierung, etc.)

Falls die mittlere Intensität der Linienstrahlung klein ist, wird die Situation wesentlich einfacher: die mittlere Intensität ist dann nur durch das Hintergrund-Strahlungsfeld gegeben und hängt nicht von den Besetzungszahlen ab. Das Ratengleichungssystem ist dann linear und kann sofort gelöst werden. Die mittlere Intensität der Linienstrahlung kann vernachlässigt werden, wenn die Wolke in allen Übergängen optisch dünn ist.

Es stellt sich heraus, dass das System der Ratengleichungen so nicht vollständig bestimmt ist. Wegen der "detailed balance" Relationen und der Einstein-Relationen sind die Gleichungen für die verschiedenen Niveaus voneinander abhängig. Im optisch dünnen Fall ist das resultierende lineare Gleichungssystem linear abhängig. Man muss also eine der Ratengleichungen weglassen und durch die Gleichung der Teilchenzahlerhaltung, $n_{tot} = \sum_j n_j$ ersetzen, um zu einem vollständig bestimmten System zu kommen.

"radiative brackets", "collisional brackets"

In der obigen Schreibweise sind die Strahlungsübergänge als sog. "radiative brackets" für jeden Übergang t zusammengefasst:

$$RB_t = [n_{u_t} A_t + n_{u_t} J_t B_{u_t l_t} - n_{l_t} J_t B_{l_t u_t}] .$$

Im Fall, dass das Strahlungsfeld thermisch ist, $J_t = B_v(T_r)$, charakterisiert durch die Strahlungstemperatur T_r , garantieren die Einstein-Beziehungen dass die "radiative bracket" identisch =0 wird, wenn die Besetzung thermalisiert mit der Temperatur des Strahlungsfeldes ist (Nachrechnen). Dies gilt für jeden Strahlungsübergang des Systems; alle Übergänge sehen dasselbe thermische Strahlungsfeld, und damit ist die thermische Besetzung aller Niveaus entsprechend der Temperatur des Strahlungsfeldes eine Lösung der Ratengleichung, solange die Stoßübergänge keine Rolle spielen (z.B: weil die Teilchendichte der Stoßpartner zu gering ist, $C = n(H_2) \gamma \ll A$).

Analoges gilt für die "collisional brackets"

$$CB_{ij} = [n_i C_{ij} - n_j C_{ji}] .$$

Wegen der "detailed balance"-Beziehung für die Stoßraten sind sie identisch null bei thermischer Besetzung der Niveaus entsprechend der kinetischen Temperatur der Stoßpartner. Falls die Strahlungsraten keine Rolle spielen (weil es überhaupt keine Übergänge gibt, oder weil die Dichte der Stoßpartner so groß ist, dass die Stoßraten für alle Niveaus dominieren), ist also die thermische Besetzung mit der kinetischen Temperatur der Stoßpartner die Lösung des Ratengleichungssystems.

Wenn aber sowohl Strahlungs- wie auch Stoßraten von vergleichbarer Stärke vorliegen, die Strahlungstemperatur des Hintergrundes und die kinetische Temperatur der Stoßpartner aber verschieden sind, kann das System kein thermisches Gleichgewicht bei einer universellen Besetzungstemperatur erreichen, sondern muss sich mit anderen, durch die Ratengleichung im Detail zu bestimmenden Besetzungszahlen einstellen.

Die "radiative brackets" vereinfachen sich erheblich, wenn man für die mittlere Intensität den Ausdruck aus der "escape probability"-Näherung einsetzt: $J_t = (1 - \beta_t) S_t - \beta_t J_{bg}$. Um die

Umformung etwas transparenter zu machen, führen zunächst folgende Bezeichnungen ein:

$$a_t = g_u A_{ul}, \quad p_i = n_i / g_i, \quad j_t = \frac{c^2}{2h\nu^3} J_t, \quad s_t = \frac{c^2}{2h\nu^3} S_t = \frac{p_u}{p_l - p_u}.$$

Damit bekommt die "radiative bracket" schon eine wesentlich einfachere Form

$$RB_t = [n_{u_t} A_t + n_{u_t} J_t B_{u_t l_t} - n_{l_t} J_t B_{l_t u_t}] = -a_t [j_t (p_l - p_u) - p_u].$$

Für das weitere wollen wir insbesondere herleiten, was sich im optisch dünnen Fall ergibt. Dann ist die mittlere Intensität durch die Hintergrundstrahlung gegeben: $j_t = j_{bg}$, und wir können schreiben

$$RB|_{\tau \ll 1} = -a_t [j_{bg} (p_l - p_u) - p_u]$$

Mit der "escape-probability"-Näherung, $j_t = (1 - \beta_t) s_t + \beta_t j_{bg}$, wird der Ausdruck für die "radiative bracket"

$$\begin{aligned} RB_t|_{\text{esc.prob}} &= a_t [j_t (p_l - p_u) - p_u] = -a_t \left[(1 - \beta_t) \frac{p_u}{p_l - p_u} + \beta_t j_{bg} (p_l - p_u) - p_u \right]. \\ &= -\beta_t a_t [j_{bg} (p_l - p_u) - p_u] = RB_t|_{\tau \ll 1} (a_t \rightarrow \beta_t a_t) \end{aligned}$$

Wir erhalten das Ergebnis, dass die "radiative brackets", und damit die Ratengleichungen, im optisch dicken Fall in "escape-probability"-Näherung dieselben sind wie im optisch dünnen Fall, allerdings mit der einfachen Ersetzung $a_t \rightarrow \beta_t a_t$. Die Einstein-A-Koeffizienten, d.h. die spontanen Emissionraten (und proportional die B.Koeffizienten) werden also einfach effektiv um die Entweichwahrscheinlichkeit vermindert. Dies ist anschaulich verständlich, da eine reduzierte Entweichwahrscheinlichkeit ja bedeutet, dass das emittierte Photon nicht die Wolke verlässt, sondern innerhalb der Wolke wieder absorbiert wird. Für die Ratengleichung bedeutet dies, dass das nicht entweichende Photon de facto gar keine Besetzungsveränderung verursacht.

Bezüglich der Nichtlinearität der Ratengleichungen ändert dies natürlich nichts (die Entweichwahrscheinlichkeiten hängen ja über die optischen Tiefen von den Besetzungszahlen ab), lediglich die Struktur der Ratengleichungen wird einfacher.

ein einfaches Beispiel: ein 2-Niveau-System

Betrachten wir der Einfachheit halber ein System mit nur zwei Niveaus, u und l , zwischen denen Strahlungsübergänge und Stößen passieren können. Für die Stoßraten führen wir analog zu oben die folgende Abkürzung ein:

$$c_{ij} = g_i C_{ij}, \text{ damit für die "Stoßklammer" } CB_{ij} = n_i C_{ij} - n_j C_{ji} = p_i c_{ij} - p_j c_{ji}.$$

Außerdem wollen wir für die "Strahlungsklammer" die Formeln in "escape probability"-Näherung benutzen. Die Ratengleichung für das oberer Niveau ist dann einfach

$$0 = \frac{dn_u}{dt} = -RB_t - CB_{ul} = \beta_t a_t [p_u - j_{bg} (p_l - p_u)] - [p_u c_{ul} - p_l c_{lu}].$$

Die Ratengleichung für das untere Niveau ist dieselbe mit umgekehrten Vorzeichen

(Teilchenzahlerhaltung): $\frac{dn_u}{dt} = -\frac{dn_l}{dt}$. Statt der mittleren Intensität der Hintergrundstrahlung

beschreiben wir den Strahlungshintergrund durch seine äquivalente Schwarzkörpertemperatur T_r ,

d.h. $j_{bg} = \frac{1}{\exp(h\nu/kT_r) - 1}$. Für die Stoßraten benutzen wir die detailed-balance-Beziehung, die

die auf- und abwärts gerichteten Raten mit der kinetischen Temperatur des Gases, T_{kin} , verknüpft:

$c_{lu}/c_{ul} = \exp(-h\nu/kT_{kin})$. Damit ist

$$0 = \frac{dn_u}{dt} = \beta_t a_t \left[p_u - \frac{1}{\exp(h\nu/kT_r) - 1} (p_l - p_u) \right] - c_{ul} [p_u - p_l \exp(-h\nu/kT_{kin})]$$

$$= p_u \left[\beta_t a_t \left(1 + \frac{1}{\exp(h\nu/kT_r) - 1} \right) + c_{ul} \right] - p_l \left[\frac{\beta_t a_t}{\exp(h\nu/kT_r) - 1} + c_{ul} \exp(-h\nu/kT_{kin}) \right],$$

und daraus

$$\frac{p_u}{p_l} = \exp(-h\nu/kT_{ex}) = \frac{\exp(-h\nu/kT_{kin}) + \frac{\beta_t a_t / c_{ul}}{\exp(h\nu/kT_r) - 1}}{1 + \frac{\beta_t a_t / c_t}{1 - \exp(-h\nu/kT_r)}} = \frac{\exp(-h\nu/kT_{kin}) + \exp(-h\nu/kT_r)}{1 + \frac{\beta_t a_t / c_t}{1 - \exp(-h\nu/kT_r)}}$$

Mit $c_{ul} = g_u C_{ul} = g_u \gamma_{ul} n_{H_2}$ ist $\frac{a_t}{C_{ul}} = \frac{A_t}{C_{ul}} = \frac{A_t}{\gamma_{ul}} \frac{1}{n_{H_2}} = \frac{n^*}{n_{H_2}}$; dabei haben wir als Abkürzung die

"**kritische Dichte**" des Übergangs, $n^* = \frac{A_t}{\gamma_{ul}}$, eingeführt, bei der die Stoßrate gleich dem Einstein-A-

Koeffizienten ist. Definieren wir noch $n_{eff}^* = \frac{\beta_t}{1 - \exp(-h\nu/kT_r)} n^*$ als "effektive kritische Dichte",

so ist schließlich $\exp(-h\nu/kT_{ex}) = \frac{\exp(-h\nu/kT_{kin}) + \exp(-h\nu/kT_r) n_{eff}^* / n_{H_2}}{1 + n_{eff}^* / n_{H_2}}$.

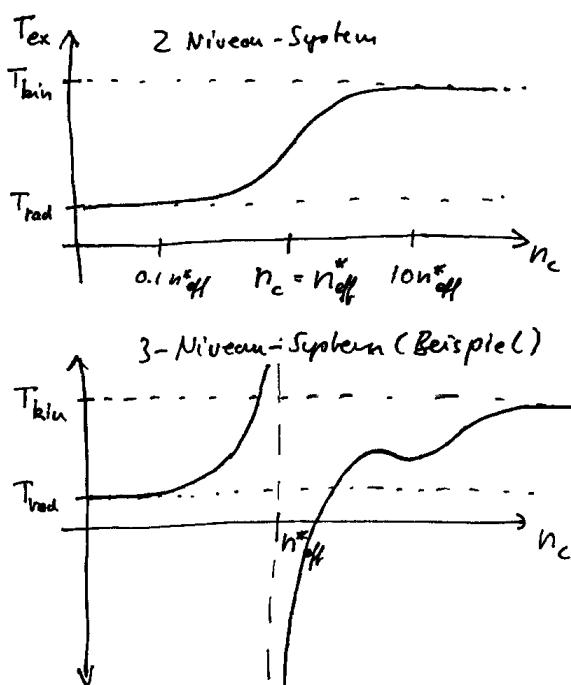


Abb. 102: Anregungstemperatur gegen Dichte beim 2- und 3-Niveau-System

Die Anregungstemperatur des Übergangs, genauer $\exp(-h\nu/kT_{ex})$, ergibt sich also als gewichtetes Mittel zwischen der kinetischen Temperatur, genauer $\exp(-h\nu/kT_{kin})$, und der Strahlungstemperatur, genauer $\exp(-h\nu/kT_r)$. Bei hoher Dichte, $n_{H_2} \gg n_{eff}^*$, d.h. groß gegenüber der effektiven kritischen Dichte, ist die Anregung durch die Stöße dominiert, und entsprechend $T_{ex} \approx T_{kin}$. Bei niedriger Dichte, $n_{H_2} \ll n_{eff}^*$, d.h. klein gegenüber der effektiven kritischen Dichte, sind die Stoßraten unwichtig und es ist $T_{ex} \approx T_r$. Der Übergang dazwischen ist beim Zwei-Niveau-System kontinuierlich und monoton (siehe Abb.), und findet im Bereich typischerweise $0.1 \times n_{eff}^*$ bis $10 \times n_{eff}^*$ statt.

Eine hohe optische Tiefe des Übergangs verringert die effektive kritische Dichte gegenüber der kritischen Dichte n^* um den Faktor der Entweichwahrscheinlichkeit, $\beta(\tau) \approx (1 - \exp(-\tau)) / \tau$ (s.o.). Analog vergrößert ein hohes Hintergrundstrahlungsfeld, $T_r \gg h\nu/k$, die effektive kritische Dichte um den Faktor

$$1/(1-\exp(-h\nu/kT_r)) \approx kT_r/h\nu.$$

Genau genommen ist die Situation etwas komplizierter: mit der optischen Tiefe hängt auch die Entweichwahrscheinlichkeit, und damit die *effektive kritische Dichte* von der Anregungstemperatur T_{ex} ab. Die obige Gleichung ist also bei hohen optischen Tiefen, d.h. sobald β_t beginnt von dem Wert 1 bei niedrigen optischen Tiefen abzuweichen, eine implizite Gleichung für die Anregungstemperatur. Sogar im einfachsten Fall eines 2-Niveau-Systems in "escape-probability"-Näherung ist also die Anregungstemperatur nur numerisch iterativ bestimmbar.

Für einen beliebigen Übergang, herausgegriffen aus einem Mehr-Niveau-System, gilt die einfache, monotone Übergang zwischen $T_{\text{ex}} \approx T_r$ bei niedrigen Dichten und $T_{\text{ex}} \approx T_{\text{kin}}$ bei hohen Dichten nicht mehr (siehe Übungsaufgabe: Besetzungsinvolution im 3-Niveau-System). Die Anregungstemperatur kann auf kompliziertere Weise zwischen den beiden Extremen wechseln; insbesondere kann im Bereich der kritischen Dichte auch Besetzungsinvolution auftreten ($T_{\text{ex}} < 0$), und damit u.U. Maser-Verstärkung. Was aber bestehen bleibt, ist die Tatsache, dass bei Dichten klein gegen n^* die Anregungstemperatur sich auf den Strahlungshintergrund einstellt; bei Dichten groß gegen n^* ist der Übergang auf die kinetische Temperatur "thermalisiert". Dies folgt, weil die *Strahlungsklammern* insgesamt proportional zu den Einstein-A-Koeffizienten sind, die *Stoßklammern* proportional zu den Stoßraten γn_{H_2} . Entsprechend ist das Ratengleichungssystem in den beiden Extrempfällen durch die Strahlungs-, resp. die Stoßklammern dominiert, die für sich alleine gerade Thermalisierung der Besetzung auf die Strahlungstemperatur bzw. die kinetische Temperatur ergeben. Das System der Moleküle ist über die Stoßraten an das Wärmereservoir der kinetischen Energie der Stoßpartner mit der Temperatur T_{kin} gekoppelt. Gleichzeitig ist es über die Strahlungsraten an den Strahlungshintergrund mit der Temperatur T_{rad} gekoppelt. Wenn die eine Kopplung klar dominiert, befindet es sich näherungsweise auf der entsprechenden Temperatur, sind beide Kopplungen vergleichbar, so ist das System explizit im Ungleichgewicht und stellt seine Besetzung auf komplexe Weise entsprechend den Ratengleichungen ein. Dabei wird immer Energie aus dem Reservoir bei der höheren Temperatur entzogen und an das Reservoir bei niedriger Temperatur abgegeben. Da für dunkle Molekülwolken der Strahlungshintergrund ausschließlich durch die kosmische Hintergrundstrahlung ($T_{\text{rad}} = 2.7$ K) gegeben ist, während die kinetische Temperatur (aufgrund der Heizung durch die hochenergetische kosmische Teilchen-Strahlung) bei ca. 10 K bleibt, sind es gerade die molekularen Rotationsübergänge von Molekülen wie CO, die diese Heiz-Energie über die Linienstrahlung abführen. Das Wasserstoffgas selber kann mangels anregbarer Übergänge bei solch niedrigen Temperatur nicht direkt über Strahlung kühlen.

19 Molekülwolken: Ableitung physikalischer Größen

19.1 optische Tiefe

Als wichtigste Größe für die Eigenschaften der austretenden Strahlung ist die optische Tiefe anzusehen. Wir wollen abschätzen, welche optischen Tiefen wir typischerweise für Molekül-Übergänge in interstellaren Wolken erwarten können. Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\tau_{\nu_0} = \int \chi_{\nu_0} ds &= \frac{c^2}{8\pi\nu^2} A_{ul} N_u (\exp(h\nu/kT_{ex}) - 1) \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{c^2}{8\pi\nu^2} \frac{64\pi^4}{3hc^3} \nu^2 \nu^3 \frac{c}{\nu} \frac{1}{\Delta\nu} N_u (\exp(h\nu/kT_{ex}) - 1) \\ &= N_u (\exp(h\nu/kT_{ex}) - 1) \frac{8\pi}{3h} \mu^2 \frac{1}{\Delta\nu} \\ &= N_u (\exp(h\nu/kT_{ex}) - 1) 1.26 \times 10^{-14} \frac{\nu^2 [\text{Debye}]}{\Delta\nu [\text{km}]}.\end{aligned}$$

Für den Vorfaktor können wir zwei Extremfälle unterscheiden, je nachdem ob die Anregungstemperatur groß oder klein gegen die Übergangsenergie ist:

$$N_u (\exp(h\nu/kT_{ex}) - 1) = \frac{g_u}{g_l} N_l (1 - \exp(-h\nu/kT_{ex})) \approx \begin{cases} N_u h \frac{\nu}{kT_{ex}}, & h\nu \ll kT_{ex} \\ g - \frac{u}{g_l} N_l, & h\nu \gg kT_{ex} \end{cases}.$$

Die optische Tiefe wird also gleich 1, wenn

$$\begin{cases} h\nu \ll kT_{ex}: & N_u \frac{h\nu}{kT_{ex}} \\ h\nu \gg kT_{ex}: & \frac{g_u}{g_l} N_l \end{cases} = 8 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2} \frac{\Delta\nu [\text{km/s}]}{\mu^2 [\text{Debye}]}.$$

Betrachten wir als Beispiel Kohlenmonoxid, CO. Es ist als sehr stabile Verbindung der zwei nach H und He (die beide bei den in Molekülwolken herrschenden Bedingungen keine anregbaren Linienübergänge haben) häufigsten Elemente der wichtigste Tracer interstellaren molekularen Gases. Entsprechend der Elementhäufigkeiten ist seine Häufigkeit relativ zu H₂ $[\text{CO}]/[\text{H}_2] \approx 8 \times 10^{-5}$. Das permanente Dipolmoment von CO ist ungewöhnlich niedrig, $\mu_0 = 0.112 \text{ Debye}$ (Notation: 1 Debye = $1 \times 10^{-18} \text{ esu cm}$), die Übergangsdipolmomente für Rotationsübergänge $J \rightarrow J-1$ sind $\mu_{J \rightarrow J-1}^2 = \mu_0^2 \frac{J}{2J+1}$, die Energieniveaus $E_J = BJ(J+1)$, die Übergangsfrequenzen damit $\nu_{J \rightarrow J-1} = 2BJ$, mit einem B-Wert von 57.5 GHz. Für den -Übergang ist dann $\frac{h\nu_{1 \rightarrow 0}}{k} = 5.6 \text{ K}$, deutlich niedriger als die Anregungstemperatur in den meisten astrophysikalisch relevanten Fällen (die kritische Dichte, s.o., von CO $1 \rightarrow 0$ ist ca. 2000 cm^{-3} , deutlich niedriger als die Teilchendichten in Molekülwolken, so dass der CO-Übergang meist thermalisiert ist auf die kinetische Temperatur von mindestens 10 K). Damit ergibt sich für CHECK!

CO $1 \rightarrow 0$: $\tau = 1$ bei

$$N_{J=0}|_{\tau=1} = \frac{T_{\text{ex}}}{5.6 \text{ K}} \frac{g_0}{g_1} 8 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2} \frac{\Delta v [\text{km/s}]}{0.112^2/3} = T_{\text{ex}} [\text{K}] \Delta v [\text{km/s}] 1.13 \times 10^{15} \text{ cm}^{-2}.$$

Eine Molekülwolke hat eine optische Tiefe von mindestens $A_v = 1$, entsprechend

$$N(\text{H}_2) = 2 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2}$$

bzw. bei der oben genannten Häufigkeit von CO,
 $N_{\text{CO}} = 8 \times 10^{-5} 2 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2} = 1.6 \times 10^{17} \text{ cm}^{-2}$. Typische Linienbreiten sind einige km/s. Ohne genaueres über die Anregung, d.h. die Verteilung auf die verschiedenen Rotationszustände, und insbesondere N_{1-0}/N , zu sagen (s.u.), können wir also sagen, dass die niedrigen Rotationsübergänge von CO praktisch immer optisch dicht sind. Erst seltene Isotopomere, wie

^{13}CO mit einer relativen Häufigkeit $\frac{[^{13}\text{CO}]}{[^{12}\text{CO}]} \approx \frac{1}{40}$ bis $\frac{1}{80}$ sind marginal optisch dünn, sehr seltene

Isotopomere sicher immer optisch dünn ($\frac{[C^{18}\text{O}]}{[C^{16}\text{O}]} \approx \frac{1}{300}$).

Viele andere einfache Moleküle haben ein Dipolmoment von ca. 1 Debye, dafür aber Häufigkeiten von nur 10^{-7} bis 10^{-9} . Auch sie erreichen optische Tiefen von ca. 1 bei typischen Gesamtsäulendichten der Wolke entsprechend einer visuellen Extinktion von einigen A_v .

Messung der optischen Tiefe

Durch Vergleich der Intensitäten im gleichen Übergang zweier Isotopomere, z.B. ^{12}CO und ^{13}CO , kann man mit einigen Annahmen die optische Tiefe direkt messen. Dazu nehmen wir an, dass für beide Isotopomere die Anregungstemperatur gleich. Dann ist nach dem obigen das Verhältnis der optischen Tiefen durch das Häufigkeitsverhältnis der Spezies, $\alpha = [^{13}\text{CO}]/[^{12}\text{CO}] \approx 1/40$ gegeben:

$$\tau(^{13}\text{CO} J \rightarrow J-1) = \alpha \tau(^{12}\text{CO} J \rightarrow J-1).$$

Nach der "detection equation" gilt für das Verhältnis der Linientemperatur

$$\frac{T_l(^{13}\text{CO} J \rightarrow J-1)}{T_l(^{12}\text{CO} J \rightarrow J-1)} = \frac{(\mathfrak{I}_v(T_{\text{ex},13}) - \mathfrak{I}_v(T_{\text{bg}})) (1 - \exp(-\tau_{13}))}{(\mathfrak{I}_v(T_{\text{ex},12}) - \mathfrak{I}_v(T_{\text{bg}})) (1 - \exp(-\tau_{12}))} = \frac{1 - \exp(-\alpha \tau_{12})}{1 - \exp(-\tau_{12})}.$$

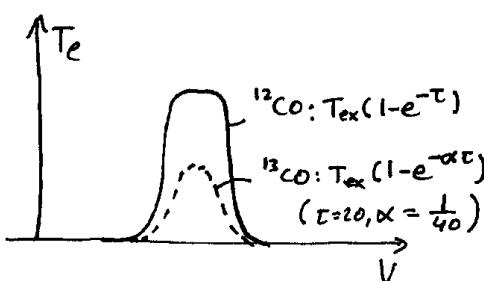


Abb. 103: optisch dünne/optisch dicke Linienform

Falls im (unrealistischen, s.o.) Extremfall selbst die ^{12}CO -optische Tiefe $\ll 1$ ist, so ist

$T_l(^{12}\text{CO})/T_l(^{13}\text{CO}) \approx \alpha \tau_{12}/\tau_{12} = \alpha$, also einfach des Häufigkeitsverhältnis (da im optisch dünnen Fall einfach die emittierenden Moleküle längs des Sehstrahls gezählt werden). Im anderen Extremfall, dass selbst die ^{13}CO -Linie optisch dick wird, ist das Linienverhältnis = 1. Wenn die ^{12}CO -Linie schon optisch dick ist, während die ^{13}CO -Linie noch optisch dünn ist, gilt:

$$1 \ll \tau_{12} \ll 1/\alpha: \frac{T_l(^{13}\text{CO})}{T_l(^{12}\text{CO})} = \frac{1 - \exp(-\alpha \tau_{12})}{1 - \exp(-\tau_{12})} \approx \alpha \tau_{12},$$

d.h. das Linienverhältnis/ α gibt direkt die

^{12}CO -optische Tiefe an.

Vorsicht: die Annahme gleicher Anregungstemperatur ist nicht immer erfüllt. Zum einen bewirkt die verschiedene optische Tiefe unterschiedliche Entweichwahrscheinlichkeit, und damit unterschiedliche effektive kritische Dichten. Zum anderen wird ^{12}CO wegen der höheren optischen Tiefe nur aus äußeren Zonen der Wolke emittieren, während ^{13}CO auch aus inneren Bereichen

emittiert. Bei externer Heizung, z.B. in Regionen mit starker UV-Strahlung, kommen die ^{12}CO -Linien dann aus wärmerem Material und haben entsprechend höheres T_{ex} als die ^{13}CO -Linien.

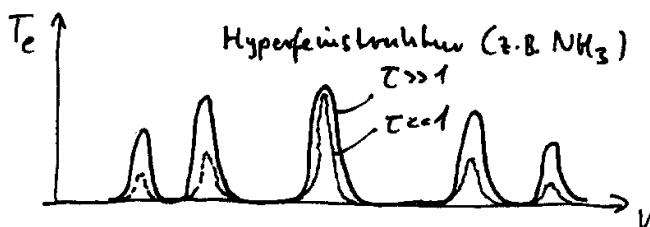


Abb. 104: Hyperfeinstruktur von NH_3 bei verschiedenen optischen Tiefen

Ähnlich lässt sich die optische Tiefe direkt bestimmen, wenn ein Übergang z.B. durch Kernquadrupol-Wechselwirkung Hyperfeinaufspaltung zeigt (Beispiel: NH_3 , HCN ; oder bei einem Molekül-Radikal Feinstruktur-Aufspaltung, z.B. CN). Die verschiedenen Hyperfeinkomponenten haben feste intrinsische Verhältnisse der Übergangsraten, und entsprechende Linienhelligkeits-Verhältnisse im optischen

dünnen Fall. Außerdem ist hier die Annahme gleicher Anregungstemperaturen meist gut gerechtfertigt. Die stärkeren Komponenten werden zuerst optisch dick, dann folgen die optisch dünneren mit wachsender optischer Tiefe nach. Entsprechend den obigen Ableitungen kann man dann im Übergangsbereich aus den beobachteten Linienverhältnissen direkt die optische Tiefe ableiten.

19.2 Bestimmung der Säulendichte

Wir haben bereits oben gesehen, dass für einen optischen dünnen Übergang die Linien-integrierte Intensität proportional zu Säulendichte im emittierenden (oberen) Zustand ist. Zur Messung der Säulendichte einer Wolke müssen wir also noch die Säulendichte im emittierenden Niveau mit der gesamten Säulendichte in Verbindung bringen, und mit der relativen Häufigkeit des beobachteten Moleküls auf die gesamte Säulendichte der Wolke schließen. Wir wollen das im folgenden für den Fall eines linearen Moleküls, z.B. CO , tun. Tatsächlich wird das praktisch immer optische dünne seltene Isotop C^{18}O genau so in der Astrophysik verwendet.

Es ist (s.o.) $\int I_\nu d\nu = \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} N_u$, bzw. auf einer Skala der Linientemperatur, also mit

$$I_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2} T_l, \text{ und auf einer Geschwindigkeits- statt Frequenzskala, } \frac{d\nu}{\nu} = \frac{dv}{c},$$

$$\int T_l dv = \frac{c^3}{2k\nu^3} \int I_\nu d\nu = \frac{c^3}{2k\nu^3} \frac{h\nu}{4\pi} A_{ul} N_u = \frac{8\pi^3}{3} k\nu \mu^2 N_u,$$

mit dem Einstein-Koeffizient $A_{ul} = \frac{64\pi^4 \nu^3}{3hc^3} \mu^2$.

Für einen linearen Rotator ist (s.o.) $\nu = 2BJ$, $\mu^2 = \mu_0^2 \frac{J}{2J+1}$. Im Fall thermischer Besetzung für alle Niveaus (der natürlich nicht genau gilt; insbesondere sind die höheren Niveaus wegen der nach oben wachsenden kritischen Dichte schließlich weit unter-thermisch besetzt) mit der Rotationstemperatur T_{rot} können wir als Verhältnis der "upper-state"-Säulendichte zur gesamten Säulendichte schreiben

$$\frac{N_u}{N} = \frac{g_u \exp(-hBJ(J+1)/kT_{\text{rot}})}{Q(T_{\text{rot}})},$$

Mit der aus der statistischen Physik bekannten Zustandssumme

$Q(T) = \sum_{J=0}^{\infty} g_J \exp(-hBJ(J+1)/kT)$. Falls die Rotationstemperatur genügend hoch ist, d.h.

$kT_{\text{rot}} \gg hB$, was bei CO mit $hB/k = 2.8$ K bei für Molekülwolken relevanten Temperaturen immer eine gute Näherung ist, kann die Zustandssumme näherungsweise geschlossen berechnet werden: $Q(T) = \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) \exp(-hBJ(J+1)/kT) \approx \int_0^{\infty} (2x+1) \exp(-hBx(x+1)/kT) dx$. Mit der

Substitution $u = \frac{hB}{kT} x(x+1)$, $du = \frac{hB}{kT} (2x+1)dx$ ist $Q(T) \approx \frac{kT}{hB} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{kT}{hB}$. Damit ist insgesamt

$$\begin{aligned} \int T_l d\nu &= \frac{8\pi^3}{3} k \nu \mu^2 N_u = \frac{8\pi^3}{3} k \frac{2hB^2}{kT_{\text{rot}}} \mu_0^2 N \exp(-hBJ(J+1)/kT_{\text{rot}}) J^2 \\ &= \frac{8\pi^3}{3k} 2B \mu_0^2 N f(T_{\text{rot}}/T_0, J) \end{aligned},$$

mit der Abkürzung $f(x, J) = \frac{1}{x} \exp\left(\frac{-J(J+1)}{x}\right) J^2$ und $T_0 = \frac{hB}{k}$.

Beachte: die integrierte Linienintensität (in K km/s) nimmt für optische dünne Emission bei thermalisierter Besetzung für einen linearen Rotator zu (schließlich bricht die Besetzung, und damit auch die Linienintensität zusammen, wenn die kritischen Dichten der Übergänge zu hoch im Vergleich zur Dichte der Wolke werden). Für $\int I_\nu d\nu$ ist die Zunahme $\propto J^5$ wegen der zusätzlichen ν^3 -Abhängigkeit.

T/K	J_{\max}	Die Funktion $f(x, J) = 1/x \exp(-J(J+1)/x) J^2$ hat ihr Maximum näherungsweise (für genügend große x) bei $J_{\max} \approx \sqrt{(x)} = \sqrt{T_0/T}$. Betrachten wir als Beispiel CO ($T_0 = 2.8$ K, s.o.). Dann ergibt sich nebenstehendes Bild. Mit höherem J wird man also in den Beobachtungen auf immer höhere Temperaturen empfindlich.
20	3	
50	4	
100	6	
1000	19	

Tabelle 19.1: Übergang maximaler Intensität bei linearem Rotor

Durch invertieren erhalten wir den Zusammenhang zwischen beobachteter Linien-integrierter Intensität und der Säulendichte. Mit den Werten von CO als Beispiel ergibt sich

$$N_{\text{CO}} = 1.14 \times 10^{14} \text{ cm}^{-2} 1/f(T_{\text{rot}}/T_0, J) \int T_{l,J \rightarrow J-1} d\nu [\text{K km/s}].$$

Die Abb. zeigt die Funktion $J^2/f(T/T_0, J)$ für $J=1,2,3$. Wir sehen, dass dieser Faktor für $T/T_0 \gg 1$ näherungsweise linear mit der Temperatur anwächst. Wegen des Abbiegens bei kleinen Werten ist aber tatsächlich die Variation für die Zustände $J \neq 1$, d.h. für die niedrigen Rotationszustände, aber nicht für den Grundzustand, sehr viel kleiner. Wir lesen ab, dass für $J=2$ der Faktor über den Temperaturbereich 10 bis 80 K nur zwischen 30 und 80 variiert. Selbst ohne genaue Kenntnis der Temperatur kann man also aus den "low-J" Übergängen linearer Moleküle im optischen dünnen Fall (seltene Isotope, z.B. C¹⁸O; seltene Spezies) die Säulendichte relativ genau abschätzen.

19.3 Massenbestimmung

aus Säulendichten

Mit bekannter Säulendichte eines Moleküls und dessen Häufigkeit relativ zu H₂ kann man die gesamte Säulendichte berechnen. Integration über die beobachtete Ausdehnung der Wolke am Himmel gibt dann die gesamte Zahl an H₂-Molekülen und damit die gesamte Masse der Wolke. Bis auf die Unsicherheit über die chemische Häufigkeit ist dies eine sehr robuste Methode, da wir mit einem optisch dünnen Übergang ja tatsächlich die Anzahl der Moleküle "zählen".

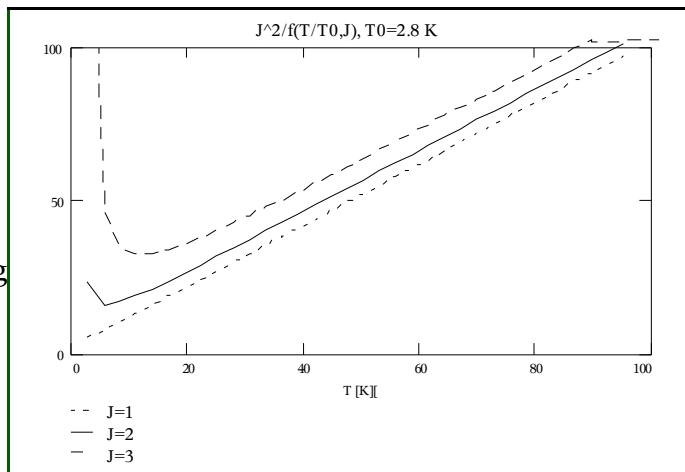


Abb. 105: zur Säulendichthebestimmung aus integrierter Linienintensität beim linearen Rotator

Erstaunlicherweise zeigt sich empirisch, dass auch die integrierte Intensität eines optisch dicken Übergang wie ¹²CO proportional zur Masse der Wolke ist (die ja auf obige Weise unabhängig bestimmt werden kann). Die empirische Beziehung lautet

$$N(H_2) = 2.3 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2} \int T_l(^{12}\text{CO}) d v .$$

Dies kann man verstehen, wenn man annimmt, dass die Wolke (wie ja auch aus anderen Beobachtungen ersichtlich) tatsächlich nicht homogen ist, sondern aus einzelnen Klumpen besteht, die jeder im Virialgleichgewicht sind. Jeder einzelne Klumpen hat im Mittel eine Linienbreite von Δv_{clump} . Außerdem nehmen wir an, dass die Klumpen sich umeinander mit einer genügenden Geschwindigkeitsdispersion bewegen, dass sie längs jeder Sichtlinie trotz eventuellen räumlichen Überlaps geschwindigkeitsmäßig noch getrennt erscheinen. Nehmen wir an, dass die einzelnen Klumpen optisch dick emittieren, d.h. dass ihre Linientemperatur gleich der Anregungstemperatur, und, bei den typischen Dichten > kritische Dichte für CO, gleich der kinetischen Temperatur ist. Die Gesamtzahl von v Klumpen im Teleskopstrahl (*beam*) füllen insgesamt einen Bruchteil $\phi = v \Omega_{\text{clump}} / \Omega_{\text{beam}}$ des Teleskop-Beams (Füllfaktor); der Füllfaktor kann sogar > 1 sein, da die Klumpen räumlich überlappen dürfen. Die beobachtete, beam-gemittelte Intensität ist dann

$$I(^{12}\text{CO}) = \frac{1}{\Omega_{\text{beam}}} \int d v \int d \Omega T_l(\Omega) \approx \frac{1}{\Omega_{\text{beam}}} v T_{\text{kin}} \Delta v_{\text{cloud}} \Omega_{\text{cloud}} = \phi T_{\text{kin}} \Delta v_{\text{cloud}} ,$$

die beam-gemittelte Säulendichte entsprechend

$$N(H_2) = \frac{1}{\Omega_{\text{beam}}} \int d \Omega N(\Omega) \approx \frac{1}{\Omega_{\text{beam}}} v N_{\text{clump}} \Omega_{\text{clump}} = \phi N_{\text{clump}} = \phi \frac{4}{3} R_{\text{clump}} \bar{n}_{\text{clump}} ,$$

mit der mittleren H₂-Dichte der Wolke \bar{n}_{cloud} , dem Klumpenradius R_{clump} und der mittleren

Säulendichte eines Klumpen $N_{\text{clump}} = \left(\frac{4\pi}{3} R_{\text{clump}}^3 \bar{n}_{\text{clump}} \right) / \left(\pi R_{\text{clump}}^2 \right) = \frac{4}{3} R_{\text{clump}} \bar{n}_{\text{clump}}$. Virialisierung der

einzelnen Klumpen bedeutet Gleichheit der potentiellen und kinetischen Energie,

$$\frac{G M_{\text{clump}}}{R_{\text{clump}}} \approx \Delta v_{\text{clump}}^2 ,$$

und mit $M_{\text{clump}} = \frac{4\pi}{3} R_{\text{clump}}^3 \bar{n}_{\text{clump}} \mu$, also $\Delta v_{\text{clump}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3} G \mu \bar{n}_{\text{clump}} R_{\text{clump}}}$ ergibt sich für das

Verhältnis von Säulendichte zu integrierter Intensität mit Einsetzen der Zahlenwerte und einer mittleren Molekularmasse pro H₂-Molekül von 4.3×10^{-24} g (Berücksichtigung von He)

$$\frac{N(\text{H}_2)}{I(^{12}\text{CO})} \frac{[\text{cm}^{-2}]}{[\text{K km/s}]} = \frac{\phi \frac{4}{3} R_{\text{clump}} \bar{n}_{\text{clump}}}{T_{\text{kin}} \sqrt{\frac{4\pi}{3} G \mu \bar{n}_{\text{clump}} R_{\text{clump}} \phi}} = 2.7 \times 10^{20} \frac{10 \text{ K}}{T_{\text{kin}}} \sqrt{\frac{\bar{n}_{\text{cloud}}}{200 \text{ cm}^{-3}}},$$

also mit typischen Wolkenparametern ungefähr der empirische Wert.

Hierbei zählt die optisch dicke Linie (bei der obigen Annahme nicht überlappender Klumpen) letztlich doch die Gesamtmasse der Wolke.

Virialmassen

Alternativ kann man aus dem gemessenen Radius einer Wolke, R_{cloud} , (aus der Winkelausdehnung bei bekannter Entfernung) und aus der gemessenen gesamten Linienbreite Δv_{cloud} , über die Virialbeziehung die Masse abschätzen:

$$M_{\text{vir}} \approx \frac{\Delta v_{\text{cloud}}^2 R_{\text{cloud}}}{G}$$

Die so bestimmten Säulendichten, und daraus abgeleiteten Massen heißen "Virialmassen".

Völlig unabhängig lassen sich die Säulendichten, und damit Massen, aus der Intensität der optisch dünnen Staubemission im mm- und Submm-Spektralbereich ableiten (zusammen mit der Temperatur, s.u.). Von besonderem astrophysikalischen Interesse ist dabei, ob Staub und Gas immer in der gleichen relativen Häufigkeit auftreten. Es gibt Anzeichen, dass in besonders kalten und dichten Gebieten (protostellare Kondensationen) tatsächlich ein Teil der als Gas-Tracer benutzten Moleküle auf dem Staub ausfrieren, so dass die aus Molekülbeobachtungen abgeschätzten Massen und Dichten zu niedrig sind.

19.4 Bestimmung der Temperatur

Bei einem optisch dicken Übergang ist die Linientemperatur im Linienzentrum direkt die Anregungstemperatur. Ist die kritische Dichte des Übergangs kleiner als die Dichte der Wolke, so ist die Anregungstemperatur ungefähr gleich der kinetischen Temperatur. Beide Annahmen sind für die niedrigen Rotationsübergänge von ¹²CO gut erfüllt, so dass man damit direkt die Temperatur der Wolke bestimmen kann. Allerdings muss man eventuell wegen der klumpigen Struktur eine Korrektur für einen Fülfaktor $\phi < 1$ (s.o.) berücksichtigen.

Eine sichere Bestimmung der Temperatur erlauben symmetrische Kreisel-Moleküle (NH₃, CH₃CN, etc.). Die Rotationszustände sind durch die Quantenzahlen J,K bestimmt, wobei K die Projektion des Drehimpulses J auf die Symmetrieachse des Moleküls ist. Da das Dipolmoment in der Symmetrieachse liegen muss, gibt es keine Strahlungsübergänge mit $\Delta K \neq 0$ (dafür müsste ein Drehmoment in der Symmetrieachse angreifen, d.h. eine Dipolmoment-Komponente senkrecht zur Symmetrieachse vorhanden sein). Die K-Leitern sind also strahlungsmäßig völlig getrennt (sozusagen separate lineare Rotoren), ihre relative Besetzung deshalb nur durch Stöße beeinflusst. Deshalb kann man erwarten, dass die relative Besetzung zwischen den K-Leitern in guter Näherung thermalisiert ist. Durch Vergleich der Linienintensität in den verschiedenen K-Leitern kann man also die kinetische Temperatur ableiten.

Vollkommen unabhängig lässt sich aus der im mm- und Submm-Spektralbereich optisch dünnen

Staubemission, genauer aus der Form des Spektrums, d.h. durch Messung der Intensität in mehreren breitbandigen Spektralbändern (typisch 1300, 800 und 450/350 μm) die Staubtemperatur bestimmen. Bei hohen Dichten ($>10^{4.5} \text{ cm}^{-3}$) wird der Staub durch Stöße mit dem Gas auf die gleiche Temperatur gezwungen.

19.5 Bestimmung der Dichte

Die mittlere Dichte einer Wolke lässt sich aus der Säulendichte berechnen, wenn man annimmt, dass die "line-of-sight"-Ausdehnung der Wolke vergleichbar ihrer lateral, an der Himmelssphäre beobachteten Ausdehnung ist. Wegen der Klumpigkeit der Wolken ist diese mittlere Dichte aber meist mindestens eine Größenordnung kleiner als die lokale Dichte in den Wolkenklumpen.

Die lokale Dichte kann man herleiten z.B: durch Vergleich der Intensitäten verschieden hoher Rotationsniveaus eines linearen Rotors. Da die A-Koeffizienten proportional v^3 , d.h. $\propto J^3$ mit wachsendem J schnell zunehmen, während die Stoßraten ungefähr konstant bleiben, wachsen die kritischen Dichten ebenfalls. Sobald man genügend hoch in der Rotationsleiter geht, so dass diese schnell wachsende kritische Dichte die lokale Dichte in der Molekülwolke überschreitet, bricht die bis dahin thermalisierte Besetzung der Niveaus zusammen, d.h. die Linienintensität fällt mit weiter wachsendem J schnell ab. Zur quantitativen Analyse muss man die Anregungsbedingungen, z.B. im Rahmen der "escape probability"-Näherungen, berechnen, und in einem "best fit" der Parameter Säulendichte, Temperatur und Dichte diese bestimmen.

Inhaltsverzeichnis

0 Organisation.....	1
0.1 Einheiten und physikalische Konstanten.....	3
1 Übersicht. Der Kosmos.....	5
1.1 Warum Astrophysik.....	5
1.2 kurze Skizze des heutigen physikalischen Weltbildes.....	6
2 Licht und Materie.....	9
2.1 Das elektromagnetische Spektrum.....	9
1.1 Liniенstrahlung.....	10
2.3 Temperatur/Verteilungsfunktion.....	11
2.4 Boltzmann-Verteilung.....	12
2.5 Ionisationsgleichgewicht/ Saha-Gleichung.....	12
2.6 Schwarzkörperstrahlung/Hohlraumstrahlung.....	13
3 Teleskope.....	19
3.1 Teleskope: Optischer Aufbau.....	20
3.2 Winkelauflösung.....	22
3.3 Interferometrie.....	25
4 Astronomische Instrumente.....	29
4.1 Nachweis elektromagnetischer Strahlung.....	29
4.2 Instrumentierung.....	29
5 Der Sternenhimmel.....	31
5.1 Historische Einleitung.....	31
5.2 Die Himmelskugel.....	32
5.3 Die Bewegung der Erde - Jahreszeiten und Tierkreis.....	36
5.4 Zeitmessung.....	37
5.5 Sternbilder/Konstellationen und Nomenklatur.....	38
5.6 Scheinbare Helligkeiten, Größenklassen/Magnitudines.....	38
6 Schwerkraft und Himmelsmechanik.....	41
6.1 Die Kepler'schen Gesetze.....	41
6.2 Virialsatz.....	43
6.3 Massen im Planetensystem.....	43
7 Das Sonnensystem.....	45
7.1 Entfernungsbestimmung im Sonnensystem.....	46
7.2 Die Planeten.....	49
7.3 Entstehung des Planetensystems, Planeten außerhalb des Sonnensystems.....	52
8 Die Sonne.....	55
8.1 Überblick.....	55
8.2 mittlere physikalische Parameter im Inneren der Sonne	56
8.3 Energietransport in der Sonne	58
8.4 Energieerzeugung in der Sonne.....	59
9 Kernfusion: die Energiequelle der Sterne	61
9.1 p-p Kette (Bethe-Critchfield):	61
9.2 C-N-O-Zyklus (Bethe-von Weizsäcker).....	64
9.3 Sonnen-Neutrinos.....	64
10 Entfernungsmessung außerhalb des Sonnensystems.....	67
10.1 Trigonometrische Parallaxe und das Entfernungsmaß parsec.....	67
10.2 Eigenbewegungen.....	68

10.3 Sternstrom-Parallaxe.....	68
10.4 Entfernungsbestimmung aus Expansionsbewegungen (H ₂ O-Maser, Supernovae, planetare Nebel).....	69
10.5 sekuläre Parallaxen, statistische Parallaxen.....	70
10.6 Photometrische Parallaxen.....	70
11 Grundlegende Eigenschaften der Sterne.....	73
11.1 Helligkeiten und Magnitudines (teilweise Wiederholung von 5.6).....	73
11.2 Absolute Helligkeiten, Entfernungsmodul.....	74
11.3 Spektrale Klassifikation	75
12 Strahlungstransport	79
12.1 Die Gleichung des Strahlungstransports.....	79
12.2 Quellfunktion im thermischen Gleichgewicht.....	79
12.3 Emissivität, Absorptivität, Quellfunktion.....	80
12.4 Strahlungstransport in Sternatmosphären, Grundlagen.....	80
12.5 formale Lösung der Strahlungstransportgleichung.....	81
13 Sternaufbau und Entwicklung.....	89
13.1 Grundgleichungen des Sternaufbaus.....	89
13.2 Hauptreihensterne.....	95
13.3 Nach-Hauptreihenentwicklung.....	96
13.4 Entwicklung in engen Doppelsternsystemen.....	102
13.5 Pulsationen und Ausbrüche: Veränderliche Sterne.....	105
14 Endstadien der Sterne	107
14.1 Weiße Zwerge.....	107
14.2 Grenzmasse Weißer Zwerge: Chandrasekhar-Limit.....	110
14.3 Neutronensterne.....	111
14.4 Schwarze Löcher.....	113
15 Die Milchstraße.....	115
15.1 Aufbau der Milchstraße.....	116
15.2 Dynamik der Milchstraße.....	118
15.3 Dunkle Materie	119
15.4 Galaxien der lokalen Gruppe.....	121
16 Die interstellare Materie (ISM).....	123
16.1 interstellarer Staub.....	125
16.2 Interstellares Gas.....	128
17 Strahlungsmechanismen	129
17.1 Kontinuums-Strahlung: Bremsstrahlung oder frei-frei-Strahlung.....	129
17.2 Linienstrahlung.....	134
18 Das Interstellare Medium: Gas.....	147
18.1 HI-Komponente.....	147
18.2 Molekülwolken.....	150
19 Molekülwolken: Ableitung physikalischer Größen.....	163
19.1 optische Tiefe	163
19.2 Bestimmung der Säulendichte.....	165
19.3 Massenbestimmung.....	167
19.4 Bestimmung der Temperatur.....	168
19.5 Bestimmung der Dichte	169