

# Εργασία Μέρος Β - Θεωρία Εκτίμησης και Ανίχνευσης

## Ομάδα 29

Αριστείδης Δασκαλόπουλος (ΑΕΜ: 10640)

Ρουσομάνης Γεώργιος (ΑΕΜ: 10703)

Ιούνιος 2025

### Εισαγωγή

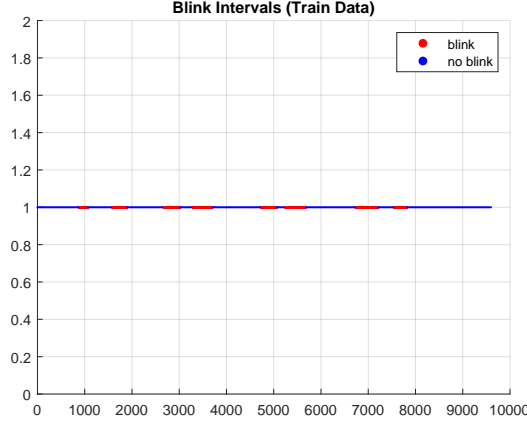
Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η αποθρομβοποίηση πολυκαναλικών ΗΕΓ σημάτων  $y[k] \in \mathbb{R}^N$ , τα οποία περιέχουν παρεμβολές λόγω ανοιγοκλεισίματος των ματιών. Το σήμα μοντελοποιείται ως

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{v}[k] + \mathbf{d}[k],$$

όπου  $\mathbf{v}[k]$  είναι το καθαρό εγκεφαλικό σήμα και  $\mathbf{d}[k]$  ο θόρυβος (artifact).

Για την αποθρομβοποίηση των δεδομένων θα εξετάσουμε δύο μεθόδους. Στην πρώτη (offline) μέθοδο, θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τα καθαρά δυναμικά  $\theta = [\mathbf{v}[0], \mathbf{v}[1], \dots, \mathbf{v}[n-1]]$  με βάση τις τρέχουσες, παρελθοντικές και μελλοντικές τιμές των μετρήσεων  $[\mathbf{y}[0], \mathbf{y}[1], \dots, \mathbf{y}[n-1]]$  – smoothing. Στη δεύτερη (offline) μέθοδο, θα εκτιμήσουμε το  $\theta = \mathbf{v}[m]$  με βάση μόνο τις τρέχουσες και παρελθοντικές τιμές των μετρήσεων  $[\mathbf{y}[0], \mathbf{y}[1], \dots, \mathbf{y}[m-1]]$  – filtering.

Για κάθε μία από τις παραπάνω μεθόδους, ακολουθούμε δύο προσεγγίσεις. Στην πρώτη (μονοκαναλική) προσέγγιση, κάθε κανάλι αντιμετωπίζεται ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Στη δεύτερη (πολυκαναλική) προσέγγιση, λαμβάνεται υπόψη η συσχέτιση μεταξύ των καναλιών – υπενθυμίζουμε ότι ο θόρυβος που οφείλεται στο ανοιγοκλείσιμο των ματιών είναι εντονότερος στα μετωπιαία ηλεκτρόδια.



Σχήμα 1: Διαστήματα με και χωρίς θόρυβο στα δεδομένα εκπαίδευσης

## Μονοκαναλικό Wiener Smoothing

Έστω  $\mathbf{y}_i$ ,  $\mathbf{d}_i$  και  $\mathbf{v}_i$  οι μετρήσεις, ο θόρυβος και το καθαρό δυναμικό, αντίστοιχα, στο  $i$ -οστό κανάλι, για τις χρονικές στιγμές  $k = 0, \dots, n - 1$ . Η εκτίμηση του φίλτρου Wiener είναι:

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{C}_{vy}^{(i)} \left( \mathbf{C}_{yy}^{(i)} \right)^{-1} \mathbf{y}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

όπου  $\mathbf{C}_{vy}^{(i)}$  είναι ο πίνακας συνδιασποράς των  $\mathbf{v}_i$  και  $\mathbf{y}_i$ , και  $\mathbf{C}_{yy}^{(i)}$  είναι ο πίνακας αυτοδιασποράς του  $\mathbf{y}_i$ .

Αν θεωρήσουμε ότι τα  $\mathbf{y}_i$ ,  $\mathbf{v}_i$ , και  $\mathbf{d}_i$  είναι σήματα μηδενικής μέσης τιμής, και ότι τα  $\mathbf{v}_i$  και  $\mathbf{d}_i$  είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{yy}^{(i)} &= \mathbb{E}[\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T] = \mathbf{R}_{yy}^{(i)} \\ \mathbf{C}_{vy}^{(i)} &= \mathbb{E}[\mathbf{v}_i \mathbf{y}_i^T] = \mathbb{E}[\mathbf{v}_i (\mathbf{d}_i + \mathbf{v}_i)^T] = \mathbf{R}_{vv}^{(i)} \end{aligned}$$

με  $\mathbf{R}_{yy}^{(i)}$ ,  $\mathbf{R}_{vv}^{(i)}$  τους πίνακες αυτοδιακύμανσης των χρονοσειρών  $\mathbf{y}_i$ ,  $\mathbf{v}_i$  αντίστοιχα.

Στα δεδομένα εκπαίδευσης γνωρίζουμε εκ των προτέρων τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες οι μετρήσεις περιέχουν θόρυβο, και οι στιγμές αυτές είναι κοινές για όλα τα κανάλια. Μάλιστα, από το Σχήμα 1 παρατηρούμε ότι οι χρονικές αυτές στιγμές διαμορφώνουν διαστήματα. Έστω

$$Q = \{k = 0, \dots, n - 1 : \mathbf{y}[k] = \mathbf{v}[k]\} = \bigcup_j Q_j$$

με  $Q_j$  το  $j$ -οστό διάστημα όπου  $\mathbf{y}[k] = \mathbf{v}[k]$  και

$$P = \{k = 0, \dots, n - 1 : \mathbf{y}[k] = \mathbf{d}[k] + \mathbf{v}[k]\} = \bigcup_j P_j$$

με  $P_j$  το  $j$ -οστό διάστημα όπου  $\mathbf{y}[k] = \mathbf{d}[k] + \mathbf{v}[k]$ .

Θα εκτιμήσουμε τον πίνακα  $\mathbf{R}_{vv}^{(i)}$  από τα δεδομένα απουσίας θορύβου, δηλαδή από το σύνολο  $Q$ . Ο πίνακας  $\mathbf{R}_{yy}^{(i)}$  προκύπτει αντίστοιχα από τα δεδομένα παρουσίας θορύβου, δηλαδή από το σύνολο  $P$ .

Θεωρώντας ότι η χρονοσειρά  $\mathbf{y}_i$  είναι *στάσιμη* εντός κάθε διαστήματος  $Q_j$ , ο πίνακας αυτοσυσχέτισης  $\mathbf{R}_{vv}^{(i,j)}$  του  $i$ -οστού καναλιού στο  $j$ -οστό διάστημα όπου απουσιάζει ο θόρυβος είναι:

$$\mathbf{R}_{vv}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} r_v^{(i,j)}[0] & r_v^{(i,j)}[1] & \cdots & r_v^{(i,j)}[L-1] \\ r_v^{(i,j)}[1] & r_v^{(i,j)}[0] & \cdots & r_v^{(i,j)}[L-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_v^{(i,j)}[L-1] & r_v^{(i,j)}[L-2] & \cdots & r_v^{(i,j)}[0] \end{bmatrix}$$

όπου  $r_v^{(i,j)}[\tau] = \mathbb{E}[v_i[n]v_i[n+\tau]]$ , με  $n, \dots, n+\tau \in Q_j$ , είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του  $\mathbf{v}_i$  στο διάστημα  $Q_j$ , και  $L$  η μέγιστη υστέρηση. Προφανώς, η μέγιστη υστέρηση θα πρέπει να είναι μικρότερη από το μικρότερο μήκος διαστήματος με ή χωρίς θόρυβο, δηλαδή:

$$L \leq \min \left\{ \min_j |Q_j|, \min_j |P_j| \right\}.$$

Είναι σημαντικό να τονίσουμε σε αυτό το σημείο ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, και συνακόλουθα ο πίνακας αυτοσυσχέτισης, λαμβάνει υπ' όψιν της μόνο γραμμικές συσχετίσεις. Συνεπώς, το φίλτρο Wiener βασίζεται στην υπόθεση της γραμμικής αυτοσυσχέτισης και δεν λαμβάνει υπ' όψιν μη γραμμικές συσχετίσεις μεταξύ των δεδομένων της χρονοσειράς.

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης  $\mathbf{R}_{vv}^{(i)}$  προκύπτει από τον σταθμισμένο μέσο όρο όλων των  $\mathbf{R}_{vv}^{(i,j)}$  ως εξής:

$$\mathbf{R}_{vv}^{(i)} = \frac{1}{|Q|} \sum_j |Q_j| \mathbf{R}_{vv}^{(i,j)}, \quad i = 1, \dots, N$$

Εργαζόμενοι κατά ανάλογο τρόπο για τα δεδομένα παρουσία θορύβου, έχουμε:

$$\mathbf{R}_{yy}^{(i)} = \frac{1}{|P|} \sum_j |P_j| \mathbf{R}_{yy}^{(i,j)}, \quad i = 1, \dots, N$$

Ο πίνακας Wiener για το  $i$ -οστό κανάλι θα είναι:

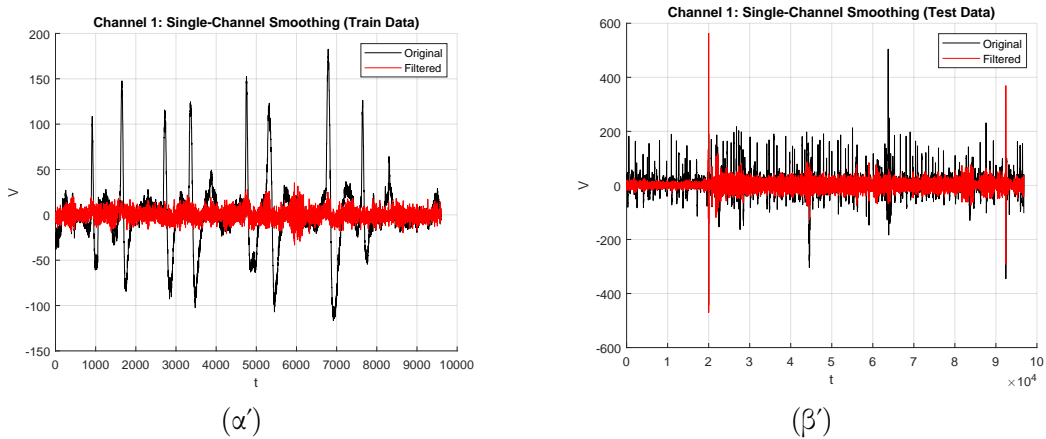
$$\mathbf{W}^{(i)} = \mathbf{R}_{vv}^{(i)} (\mathbf{R}_{yy}^{(i)})^{-1} \in \mathbb{R}^{L \times L}$$

Το φίλτρο εφαρμόζεται διαδοχικά στις μετρήσεις του εκάστοτε καναλιού, σε παράθυρα μήκους  $L$ , σύμφωνα με τη σχέση:

$$\hat{\mathbf{v}}_i[k : k + L - 1] = \mathbf{W}^{(i)} \mathbf{y}_i[k : k + L - 1], \quad i = 1, \dots, N.$$

Είναι προφανές ότι για την εκτίμηση του  $\mathbf{v}_i$  χρησιμοποιούνται κάθε φορά οι τελευταίες  $L$  μετρήσεις του  $\mathbf{y}_i$ .

Στο Σχήμα 2 φαίνεται η εφαρμογή του φίλτρου στα δεδομένα εκπαίδευσης (αριστερά) και στα δεδομένα ελέγχου (δεξιά) για το κανάλι 1. Παρατηρούμε ότι στα δεδομένα εκπαίδευσης η εξομάλυνση των μετρήσεων όπου υπάρχει θόρυβος (διαστήματα με μεγάλες διακυμάνσεις) είναι επιτυχής με κόστος ωστόσο την αλοιώωση της πληροφορίας στα διαστήματα όπου δεν υπάρχει θόρυβος. Επίσης, βλέπουμε ότι στα δεδομένα ελέγχου το φίλτρο αδυνατεί να επιτύχει την απο-θορυβοποίηση του σήματος όταν παρουσιάζονται μεγάλα spikes του δυναμικού  $> 200V$ . Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι το Wiener φίλτρο βασίζεται σε στατιστικά χαρακτηριστικά που υπολογίζονται από τα δεδομένα εκπαίδευσης, όπου τέτοιες ακραίες τιμές δεν εμφανίζονται. Τα spikes είναι μη-γραμμικά και υψηλής ενέργειας γεγονότα που παραβιάζουν τις υποθέσεις στάσιμης και γραμμικής συσχέτισης πάνω στις οποίες βασίζεται το φίλτρο, με αποτέλεσμα την αδυναμία του να τα εξομαλύνει επαρκώς.



Σχήμα 2: Εφαρμογή μονοκαναλικού Smoothing Wiener Filter στα α) δεδομένα εκπαίδευσης β) δεδομένα ελέγχου

## Πολυκαναλικό Wiener Smoothing

Μέχρι στιγμής, στην ανάλυσή μας εξετάζαμε κάθε κανάλι μεμονωμένα, αγνοώντας τη συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ των μετρήσεών τους. Αυτό, ωστόσο,

δεν είναι απολύτως ορθό, καθώς ο θόρυβος είναι εντονότερος στα μετωπιαία η-λεκτροδία· επομένως, υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των μετρήσεων διαφορετικών καναλιών. Στην παρούσα ενότητα θα συμπεριλάβουμε αυτές τις συσχετίσεις μεταξύ των καναλιών.

Έστω  $\mathbf{Y}_t \in \mathbb{R}^{N \cdot L}$  το διάνυσμα υστέρησης, το οποίο περιέχει τις τιμές όλων των καναλιών σε ένα παράθυρο μήκους  $L$ :

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1[t : t + L - 1] \\ \mathbf{y}_2[t : t + L - 1] \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N[t : t + L - 1] \end{bmatrix}$$

όπου  $\mathbf{y}_i[t : t + L - 1] \in \mathbb{R}^L$  είναι οι μετρήσεις του  $i$ -οστού καναλιού. Επίσης, γράφουμε  $\mathbf{Y}_t \equiv \mathbf{Y}_t^{(j)}$ , με  $t, \dots, t + L - 1 \in P_j$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι το διάστημα  $P_j$  ξεκινά από τη χρονική στιγμή  $t = 1$ .

Σχηματίζουμε τον πίνακα:

$$\mathbf{Y}^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^{(j)} & \mathbf{Y}_2^{(j)} & \dots & \mathbf{Y}_T^{(j)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \cdot L \times T}, \quad T = |P_j| - L + 1,$$

ή

$$\mathbf{Y}^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1[1 : L] & \mathbf{y}_1[2 : L + 1] & \dots & \mathbf{y}_1[T - L + 1 : T] \\ \mathbf{y}_2[1 : L] & \mathbf{y}_2[2 : L + 1] & \dots & \mathbf{y}_2[T - L + 1 : T] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_N[1 : L] & \mathbf{y}_N[2 : L + 1] & \dots & \mathbf{y}_N[T - L + 1 : T] \end{bmatrix}$$

Αν υποθέσουμε ότι  $\mathbb{E}[\mathbf{Y}_t^{(j)}] = 0$ , για κάθε  $t = 1, \dots, T$ , τότε ο πίνακας συσχέτισης  $\mathbf{R}_{yy}^{(j)}$  για το διάστημα  $P_j$  δίνεται από:

$$\mathbf{R}_{yy}^{(j)} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{Y}_i^{(j)} (\mathbf{Y}_i^{(j)})^\top = \frac{1}{T} \mathbf{Y}^{(j)} \cdot (\mathbf{Y}^{(j)})^\top$$

Αν, επιπλέον, οι χρονοσειρές δύο καναλιών  $p$  και  $q$  είναι από κοινού στάσιμες, δηλαδή ισχύει:

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}_p[k] \cdot \mathbf{y}_q[l]] = r_{pq}[k - l] \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η εταιροσυσχέτισή τους εξαρτάται μόνο από την υστέρηση  $\tau = k - l$  και όχι από τον χρόνο, τότε:

$$\mathbf{R}_{yy}^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \dots & \mathbf{R}_{1N} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \dots & \mathbf{R}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{N1} & \mathbf{R}_{N2} & \dots & \mathbf{R}_{NN} \end{bmatrix}$$

όπου  $\mathbf{R}_{pq} \in \mathbb{R}^{L \times L}$  είναι ο πίνακας συνδιασποράς μεταξύ των καναλιών  $p$  και  $q$  για υστερήσεις  $\tau = 0, \dots, L - 1$ . Το στοιχείο  $[\mathbf{R}_{pq}]_{k,l} = r_{pq}[k - l]$  δείχνει πόσο συσχετίζεται η τιμή του καναλιού  $p$  για υστέρηση  $k - 1$  με την τιμή του καναλιού  $q$  για υστέρηση  $l - 1$ .

Όπως και στη μονοκαναλική προσέγγιση, ο πίνακας  $\mathbf{R}_{yy}$  δίνεται από τον σταθμισμένο μέσο όρο των πινάκων διασποράς για όλα τα διαστήματα όπου υπάρχει θόρυβος:

$$\mathbf{R}_{yy} = \frac{1}{|P|} \sum_j |P_j| \mathbf{R}_{yy}^{(j)}$$

Εργαζόμενοι κατ' αντίστοιχο τρόπο στα διαστήματα  $Q_j$  όπου απουσιάζει ο θόρυβος, προκύπτει ο πίνακας  $\mathbf{R}_{vv}$ .

Ο πίνακας Wiener θα είναι:

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}_{vv} \mathbf{R}_{yy}^{-1} \in \mathbb{R}^{N \cdot L \times N \cdot L}$$

Και εδώ το φίλτρο εφαρμόζεται διαδοχικά σε παράθυρα μήκους  $L$  σύμφωνα με την σχέση:

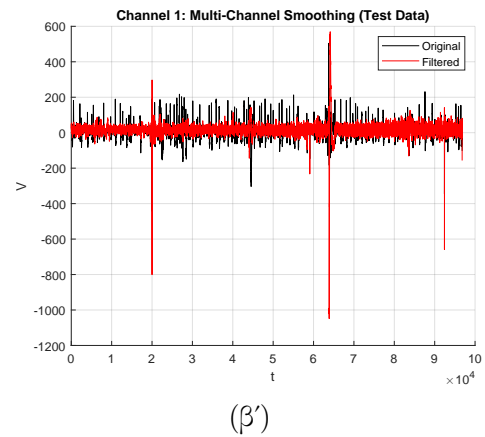
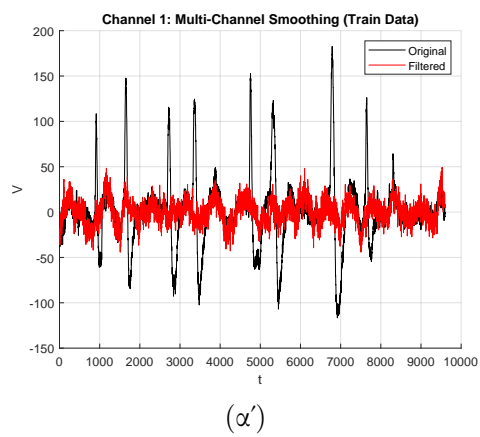
$$\hat{\mathbf{V}}_k = \mathbf{W} \cdot \mathbf{Y}_k$$

όπου  $\hat{\mathbf{V}}_k \in \mathbb{R}^{N \cdot L}$  το διάνυσμα στήλη με τις εκτιμήσεις του καθαρού σήματος όλων των καναλιών στο χρονικό παράθυρο  $k, \dots, k + L - 1$ .

Στο Σχήμα 3 φαίνεται η εφαρμογή του φίλτρου στα δεδομένα εκπαίδευσης (αριστερά) και στα δεδομένα ελέγχου (δεξιά) για το κανάλι 1. Είναι εμφανές ότι, σε αυτή την περίπτωση, η απώλεια πληροφορίας στα καθαρά δεδομένα εκπαίδευσης είναι μικρότερη σε σχέση με τη μονοκαναλική προσέγγιση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στην πολυκαναλική προσέγγιση λαμβάνουμε υπόψη τη συσχέτιση μεταξύ των καναλιών, οδηγώντας σε μικρότερες τιμές μέσου τετραγωνικού σφάλματος (RMSE).

Ωστόσο, παρατηρούμε και σε αυτή την περίπτωση ότι το φίλτρο αδυνατεί να εξομαλύνει spikes του δυναμικού  $> 200V$ , καθώς, όπως έχουμε αναφέρει, οφείλονται σε μη γραμμικές συσχετίσεις που δεν λαμβάνει υπόψη το φίλτρο Wiener.

## Σύγκριση φίλτρων



Σχήμα 3: Εφαρμογή πολυκαναλικού Smoothing Wiener Filter στα α) δεδομένα εκπαίδευσης β) δεδομένα ελέγχου