

# Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων Εργασία 2

Ρουσομάνης Γεώργιος (ΑΕΜ: 10703)

Απρίλιος 2025

## Εισαγωγή

Σκοπός της εργασίας είναι η εκτίμηση αγνώστων παραμέτρων με χρήση της μεθόδου μέγιστης καθόδου και της μεθόδου σχεδίασης κατά Lyapunov (παράλληλη και μικτή τοπολογία). Οι μέθοδοι αυτοί ονομάζονται μέθοδοι πραγματικού χρόνου ή online γιατί δίνουν εκτίμηση μέσα σε χρόνο μιας δειγματοληψίας. Για την εκτίμηση αυτή, οι αλγόριθμοι πραγματικού χρόνου στηρίζονται στην τρέχουσα τιμή και στην αμέσως προηγούμενη, δουλεύουν δηλαδή αναδρομικά. Απευθύνονται κυρίως σε εφαρμογές στις οποίες ο αλγόριθμος πρέπει να είναι υπολογιστικά απλός και η διαδικασία της εκτίμησης να ολοκληρωθεί πριν λάβει χώρα η επόμενη δειγματοληψία. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων εφαρμογών είναι ο προσαρμοστικός έλεγχος συστημάτων, η πρόβλεψη της απόκρισης συστημάτων, η ανίχνευση και αναγνώριση βλαβών σε δυναμικά συστήματα. Η εργασία επικεντρώνεται στην υλοποίηση των μεθόδων στο MATLAB, την κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων σύμφωνα με την λογική του trial and error και την επίδραση του θορύβου στις εκτιμήσεις.

## Θέμα 1

Το σύστημα που μελετούμε είναι το σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα με εξωτερική δύναμη, η εξίσωση του οποίου δίνεται από τη σχέση:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t), \quad (1)$$

όπου  $x(t)$  [m] η μετατόπιση,  $m > 0$  η μάζα,  $b > 0$  ένας σταθερός συντελεστής απόσβεσης,  $k > 0$  η σταθερά του ελατηρίου, και  $u(t)$  η εξωτερική δύναμη.

Θεωρούμε ότι οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων είναι  $m = 1.315$ ,  $b = 0.225$  και  $k = 0.725$ . Θεωρούμε επίσης πως οι καταστάσεις  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  και η είσοδος  $u(t)$  είναι μετρήσιμες. Θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις όπου  $u(t) = 2.5$  και  $u(t) = 2.5 \sin t$ .

Πρώτο βήμα στην ανάλυσή μας είναι η προσομοίωση της απόκρισης του συστήματος με κάποια συνάρτηση ODE solver του MATLAB. Η παραπάνω ΔΕ περιγράφει ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα (ΓΧΑ). Συνεπώς, μπορεί να αναπαρασταθεί από τις εξισώσεις κατάστασης:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{2}$$

όπου εδώ  $x(t)$  είναι το διάνυσμα καταστάσεων και  $y$  η έξοδος του συστήματος. Ξεκινώντας από την (1) έχουμε:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{b}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}u(t).\tag{3}$$

Θέτοντας  $x_1 = x(t)$  και  $x_2 = \dot{x}(t)$ , δηλαδή  $\ddot{x}(t) = \dot{x}_2$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u(t).\end{aligned}$$

Θεωρώντας ως έξοδο  $y$  την μετατόπιση  $x(t)$ , οι εξισώσεις κατάστασης γράφονται:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Άρα οι πίνακες  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0\tag{4}$$

Για την επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης ODE solver είναι σημαντικό να προσδιορίσουμε αν το σύστημά μας είναι άκαμτο ή μη-άκαμτο. Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τον τύπο:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

και με αντικατάσταση των πινάκων από την (4) παίρνουμε

$$H(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}\tag{5}$$

Η γενική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς δευτεροβάθμιου συστήματος δίνεται από:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (6)$$

όπου  $\omega_n$  η φυσική συχνότητα του συστήματος και  $\zeta$  ο συντελεστής απόσβεσης. Συγκρίνοντας τις σχέσεις (5) και (6) παίρνουμε:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{mk}}$$

και με αντικατάσταση των  $m = 1.315$ ,  $b = 0.225$  και  $k = 0.725$  βρίσκουμε ότι  $\omega_n = 0.7425$ ,  $\zeta = 0.1152$ . Εφόσον ισχύει  $\zeta < 1$  οι πόλοι του συστήματος είναι συζυγείς μιγαδικοί με σταθερά χρόνου  $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} = 11.7 \text{ sec}$ . Επειδή οι σταθερές χρόνου του συστήματος είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως μη-άκαμπτο. Συνεπώς, επιλέγουμε την συνάρτηση ode45 με βήμα ολοκλήρωσης  $dt = 0.01 < 2\tau$ .

## Μέθοδος μέγιστης καθόδου

Για την εκτίμηση των παραμέτρων  $m$ ,  $b$  και  $k$  πρέπει αρχικά να φέρουμε το σύστημά μας σε γραμμικά παραμετροποιήσιμη μορφή. Η (1) μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\ddot{x} = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{x} & -x & u \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

Η παραπάνω εξίσωση περιέχει το  $\ddot{x}$ , το οποίο δεν είναι μετρήσιμο, γεγονός που καθιστά αδύνατη την άμεση εκτίμηση των παραμέτρων. Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα, θέτουμε  $\ddot{x} = s^2x$  και εφαρμόζουμε και στα δύο μέλη το ευσταθές φίλτρο  $\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1s + \lambda_2$ . Τότε η εξίσωση (7) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\frac{s^2}{\Lambda(s)}x = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\dot{x}}{\Lambda(s)} & -\frac{x}{\Lambda(s)} & \frac{u}{\Lambda(s)} \end{bmatrix}^T \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{\lambda_1s + \lambda_2}{\Lambda(s)}\right)x = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\dot{x}}{\Lambda(s)} & -\frac{x}{\Lambda(s)} & \frac{u}{\Lambda(s)} \end{bmatrix}^T \Rightarrow$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} - \lambda_1 & \frac{k}{m} - \lambda_2 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\dot{x}}{\Lambda(s)} & -\frac{x}{\Lambda(s)} & \frac{u}{\Lambda(s)} \end{bmatrix}^T$$

και περνώντας στο πεδίο του χρόνου:

$$x(t) = \theta^{*T} \phi(t) \quad (8)$$

όπου  $\theta^*$  είναι ένα άγνωστο σταθερό διάνυσμα που εμπεριέχει τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων προς εκτίμηση και  $\phi(t)$  το μετρήσιμο διάνυσμα οπισθοδρόμησης. Στόχος μας είναι η εύρεση μίας εκτίμησης  $\hat{\theta}$  του  $\theta^*$  και έπειτα η εύρεση των εκτιμήσεων  $\hat{m}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{k}$  για κάθε χρόνο  $t$ . Θεωρούμε το σύστημα αναγνώρισης:

$$\hat{x}(t) = \hat{\theta}(t)\phi(t), \quad (9)$$

όπου η έξοδος  $\hat{x}(t)$  αποτελεί εκτίμηση της εξόδου  $x(t)$  του πραγματικού συστήματος (8). Από τις (8) και (9) σχηματίζεται το σφάλμα αναγνώρισης:

$$e = x - \hat{x} = x - \hat{\theta}\phi = (\theta^* - \hat{\theta})\phi \quad (10)$$

Η μέθοδος της μέγιστης καθόδου στηρίζεται για την εύρεση της αναδρομικής εκτίμησης  $\hat{\theta}$  του  $\theta^*$  στην ελαχιστοποίηση ως προς  $\hat{\theta}$  κατάλληλα ορισμένης συνάρτησης κόστους του  $e$ . Η συνάρτηση κόστους που επιλέγουμε είναι:

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{(x - \hat{\theta}\phi)^2}{2}. \quad (11)$$

Θέλουμε λοιπόν:

$$\arg \min_{\hat{\theta}} K(\hat{\theta}).$$

Η αναδρομική σχέση της νέας εκτίμησης  $\hat{\theta}_{k+1}$  δίνεται από:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \gamma \nabla K(\hat{\theta}) = \hat{\theta}_k + \gamma(x - \hat{\theta}\phi)\phi = \hat{\theta}_k + \gamma e\phi, \quad \hat{\theta}(0) = \theta_0 \quad (12)$$

όπου  $\gamma > 0$  μία σταθερά,  $\hat{\theta}(0)$  η αρχική τιμή του  $\hat{\theta}$  και  $\phi$ ,  $e$  μετρήσιμα. Έχοντας την εκτίμηση  $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2 \quad \hat{\theta}_3]^T$ , τα  $\hat{m}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{k}$  προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$\hat{m} = \frac{1}{\hat{\theta}_3}, \quad \hat{b} = \frac{\hat{\theta}_1 + \lambda_1}{\hat{\theta}_3}, \quad \hat{k} = \frac{\hat{\theta}_2 + \lambda_2}{\hat{\theta}_3}$$

Θα μελετήσουμε την ευστάθεια του συστήματος (9), (12). Για  $m = 1.315$ ,  $b = 0.225$ ,  $k = 0.725$ , το σύστημα (1) είναι ευσταθές, καθώς οι πόλοι του βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Επομένως, για φραγμένη είσοδο  $u$ , οι μεταβλητές κατάστασης  $x$  και  $\dot{x}$  θα είναι επίσης φραγμένες, καθώς σχετίζονται γραμμικά με το  $u$ . Στην (8), το  $\phi$  ορίζεται ως:

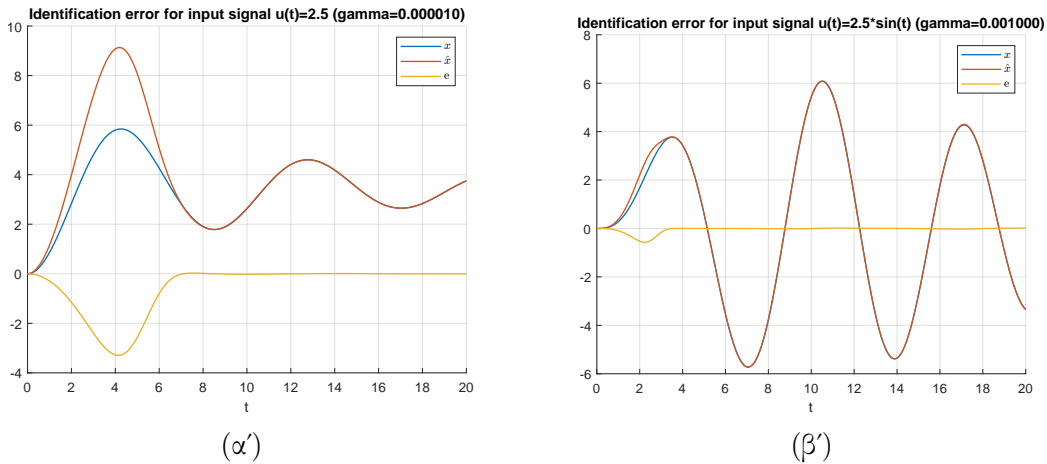
$$\phi = \left[ -\frac{\dot{x}}{\Lambda(s)} \quad -\frac{x}{\Lambda(s)} \quad \frac{u}{\Lambda(s)} \right]^T. \quad (13)$$

Εφόσον το  $\Lambda(s)$  είναι ευσταθές φίλτρο και  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $u \in L_\infty$  τότε θα ισχύει  $\phi \in L_\infty$ . Παραγωγίζοντας την (13) έχουμε:

$$\dot{\phi} = \left[ -\frac{s}{\Lambda(s)}\dot{x} \quad -\frac{s}{\Lambda(s)}x \quad \frac{s}{\Lambda(s)}u \right]^T. \quad (14)$$

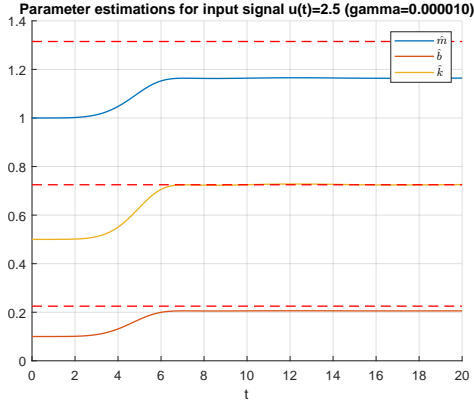
Αφού το  $\Lambda(s)$  είναι φίλτρο 2ης τάξης, ο βαθμός του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς  $\frac{s}{\Lambda(s)}$  θα είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή, άρα  $\phi \in L_\infty$ . Επομένως, σύμφωνα με το λήμμα Barbalat, για εισόδους στην (8) που ικανοποιούν  $\phi, \dot{\phi} \in L_\infty$ , η (12) εξασφαλίζει ότι η εκτιμώμενη έξοδος  $\hat{x}(t)$  του συστήματος αναγνώρισης  $\hat{x}(t) = \hat{\theta}(t)u(t)$  θα συγκλίνει ασυμπτωτικά στην έξοδο  $x(t)$  του πραγματικού συστήματος  $x(t) = \theta^*u(t)$ , και ο ρυθμός μεταβολής των παραμέτρων  $\dot{\hat{\theta}}(t)$  θα μειώνεται με τον χρόνο και θα συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν.

Στο Σχήμα 1 φαίνεται το σφάλμα αναγνώρισης  $e(t)$ , η πραγματική έξοδος του συστήματος  $x(t)$  και η εκτίμησή της  $\hat{x}(t)$ , για  $u(t) = 2.5$  με  $\gamma = 10^{-5}$  (αριστερά) και για  $u(t) = 2.5 \sin t$  με  $\gamma = 10^{-3}$  (δεξιά). Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις το σφάλμα μηδενίζεται μέσα σε εύλογο χρονικό διάστημα. Όπως έχει ήδη εξηγηθεί, η σύγκλιση του  $\hat{x}(t)$  στο  $x(t)$  είναι εγγυημένη, καθώς και στις δύο περιπτώσεις ισχύει  $u, \dot{u} \in L_\infty$ , άρα  $\phi, \dot{\phi} \in L_\infty$ .

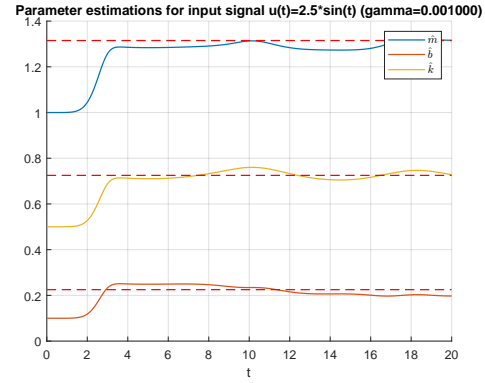


Σχήμα 1: Σφάλμα αναγνώρισης για α)  $u(t) = 2.5$  και β)  $u(t) = 2.5 \sin t$

Στο Σχήμα 2 φαίνονται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων για  $u(t) = 2.5$  με  $\gamma = 10^{-5}$  (αριστερά) και για  $u(t) = 2.5 \sin t$  με  $\gamma = 10^{-3}$  (δεξιά). Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις ο ρυθμός μεταβολής των παραμέτρων  $\dot{\hat{\theta}}(t)$  μειώνεται με τον χρόνο, όπως άλλωστε αναμέναμε από το λήμμα Barbalat. Επίσης, διαπιστώνουμε ότι για  $u(t) = 2.5$  οι εκτιμήσεις των  $m$  και  $k$  απέχουν από τις πραγματικές τιμές τους κατά κάποια σταθερή ποσότητα. Αυτό μας προϊδεάζει ότι, ίσως σε αυτή την περίπτωση, το  $\phi(t)$  δεν ικανοποιεί τη ΣΕΔ. Αντιθέτως, για  $u(t) = 2.5 \sin t$ , οι εκτιμήσεις των παραμέτρων τείνουν ασυμπτωτικά να γίνουν ίσες με τις πραγματικές τιμές, κάτι που αποτελεί ένδειξη ότι το  $\phi(t)$  ικανοποιεί τη ΣΕΔ.



(α')



(β')

Σχήμα 2: Εκτιμήσεις παραμέτρων για α)  $u(t) = 2.5$  και β)  $u(t) = 2.5 \sin t$

Θα εξετάσουμε αν το διάνυσμα  $\phi(t)$  ικανοποιεί τη ΣΕΔ για τις δύο περιπτώσεις εισόδου. Λέμε ότι το διάνυσμα  $\phi(t)$  ικανοποιεί τη Συνθήκη Εναπομένουσας Διέγερσης (ΣΕΔ) με επίπεδο διέγερσης  $\alpha_0 > 0$ , αν υπάρχουν σταθερές  $\alpha_1, T_0 > 0$  τέτοιες ώστε:

$$\alpha_1 I \geq \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \phi(\tau) \phi^T(\tau) d\tau \geq \alpha_0 I, \quad \forall t \geq 0 \quad (15)$$

με  $I$  τον μοναδιαίο πίνακα.

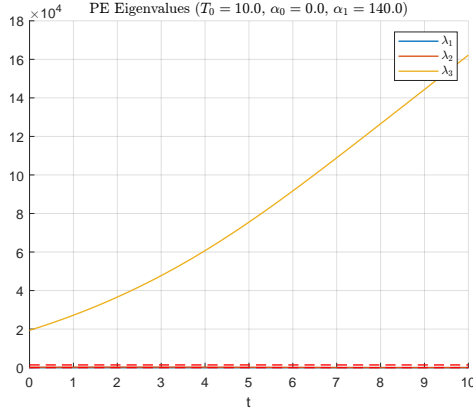
Όπως φαίνεται από την (13), η μορφή του  $\phi$  δεν επιτρέπει τον εκ των προτέρων έλεγχο ικανοποίησης της (15), γνωρίζοντας την είσοδο  $u(t)$ . Πρέπει δηλαδή εκ του αποτελέσματος να διαπιστώσουμε την ικανοποίηση της συνθήκης αυτής, άρα και τη σύγκλιση του  $\hat{\theta}$  στο  $\theta^*$ .

Στο Σχήμα 3α' φαίνονται οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\int_t^{t+T_0} \phi(\tau) \phi^T(\tau) d\tau$  για  $u(t) = 2.5$ . Βλέπουμε ότι μία εκ των τριών ιδιοτιμών δεν έχει άνω φράγμα, άρα η ΣΕΔ δεν ικανοποιείται, κάτι που συμφωνεί με τις παρατηρήσεις μας για το Σχήμα 2α'.

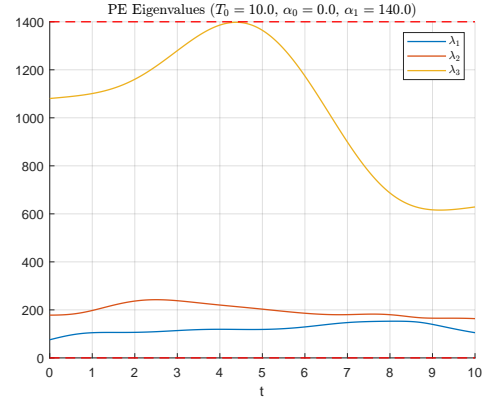
Στο Σχήμα 3β' φαίνονται οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\int_t^{t+T_0} \phi(t) \phi(t)^T dt$  για  $u(t) = 2.5 \sin t$ . Σε αυτή την περίπτωση, βλέπουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι φραγμένες  $\forall t \geq 0$ , άρα ικανοποιείται η ΣΕΔ, κάτι που συμφωνεί με τα σχόλιά μας για το Σχήμα 2β'.

Βλέπουμε επομένως ότι η ενέργεια του σήματος εισόδου  $u(t) = 2.5 \sin t$  είναι τέτοια που να ενεργοποιεί με επειμένοντα τρόπο το σύστημα ώστε να μπορέσει να εμφανίσει την κρυμμένη πληροφορία  $\theta^*$ .

Στην (12), η επιλογή του  $\gamma$  έγινε με τη μέθοδο trial and error. Γνωρίζουμε ότι όταν ισχύει η ΣΕΔ, αυξάνοντας την τιμή του  $\gamma$ , επιτυγχάνουμε ταχύτερη



(α')



(β')

Σχήμα 3: Ιδιοτιμές πίνακα  $\int_t^{t+T_0} \phi(\tau)\phi^T(\tau)d\tau$  για α)  $u(t) = 2.5$  και β)  $u(t) = 2.5 \sin t$

σύγκλιση του  $\hat{\theta}(t)$  στο  $\theta^*$ . Πολύ μεγάλες τιμές του  $\gamma$ , όμως, καθιστούν την (12) άκαμπτη και επομένως δύσκολα αριθμητικά επιλύσιμη. Συνεπώς, οι τιμές του  $\gamma$  επιλέχθηκαν ως οι μέγιστες δυνατές που δεν καθιστούν την (12) άκαμπτη.

Στην ανάλυση που προηγήθηκε, φιλτράραμε το μη μετρίσιμο  $\ddot{x}(t)$  με ένα ευσταθές φίλτρο 2ης τάξης. Αν χρησιμοποιούσαμε ένα ευσταθές φίλτρο 1ης τάξης, θα καταλήγαμε στη γραμμικά παραμετροποιήσιμη μορφή  $\dot{x}(t) = \theta^{*T}\phi(t)$ . Τότε το σύστημα αναγνώρισης θα ήταν  $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{\theta}(t)\phi(t)$  και το σφάλμα αναγνώρισης  $e = \dot{x} - \hat{\dot{x}}$ . Επομένως, σε αυτή την περίπτωση, η μέθοδος μέγιστης καθόδου θα μας έδινε την εκτίμηση  $\hat{\theta}$  για την οποία η απόκλιση του  $\hat{\dot{x}}$  από το  $\dot{x}$  θα ήταν ελάχιστη.

## Μέθοδος Lyapunov

Θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους  $m$ ,  $b$ ,  $k$  με τη μέθοδο Lyapunov παράλληλης (Π) και μικτής (Μ) δομής, θεωρώντας ως είσοδο την  $u(t) = 2.5 \sin t$ .

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, το σύστημά μας μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

όπου οι πίνακες  $A$ ,  $B$  δίνονται από την (4) και  $x$  το διάνυσμα καταστάσεων. Προφανώς, ο πίνακας  $A$  είναι αρνητικά ημιορισμένος καθώς οι ιδιοτιμές του βρίσκονται στο αρνητικό ημιεπίπεδο.

Θα μελετήσουμε πρώτα την Π δομή. Το σύστημα αναγνώρισης είναι:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u, \quad (16)$$

όπου  $\hat{x}$  η εκτίμηση του διανύσματος καταστάσεων και  $\hat{A}, \hat{B}$  οι εκτιμήσεις των  $A, B$ . Ορίζουμε το σφάλμα αναγνώρισης  $e = x - \hat{x}$ . Παραγωγίζοντας το  $e$  ως προς τον χρόνο προκύπτει η διαφορική εξίσωση του σφάλματος:

$$\dot{e} = Ax + Bu - \hat{A}\hat{x} - \hat{B}u. \quad (17)$$

Αν προσθαφαιρέσουμε τον όρο  $A\hat{x}$  η (17) γίνεται:

$$\dot{e} = A(x - \hat{x}) - (\hat{A} - A)\hat{x} - (\hat{B} - B)u. \quad (18)$$

Ορίζουμε τα παραμετρικά σφάλματα  $\tilde{A} = \hat{A} - A, \tilde{B} = \hat{B} - B$  και η (18) παίρνει τη μορφή:

$$\dot{e} = Ae - \tilde{A}\hat{x} - \tilde{B}u. \quad (19)$$

Επιλέγουμε την συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}\text{Tr}\{\tilde{A}^T \tilde{A}\} + \frac{1}{2}\text{Tr}\{\tilde{B}^T \tilde{B}\} \quad (20)$$

όπου  $\text{Tr}\{\cdot\}$  το ίχνος ενός πίνακα. Αν παραγωγίσουμε την (20) ως προς τον χρόνο κατά μήκος της λύσης της (19) βρίσκουμε έπειτα από πράξεις:

$$\dot{V} = e^T Ae + \text{Tr}\{\tilde{A}^T \dot{\tilde{A}} + \tilde{B}^T \dot{\tilde{B}} - \tilde{A}\hat{x}e^T - \tilde{B}ue^T\}. \quad (21)$$

Επιλέγοντας:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{A}} &= e\hat{x}^T \\ \dot{\tilde{B}} &= eu^T \end{aligned} \quad (22)$$

η (21) γίνεται:

$$\dot{V} = e^T Ae \quad (23)$$

Παρατηρούμε ότι η (22) είναι υλοποιήσιμη, καθώς τα  $e, u$  είναι μετρήσιμα. Επιπλέον, για να είναι το σύστημα (16), (22) ευσταθές, πρέπει να ισχύει  $\dot{V} = e^T Ae \leq 0, \forall t$ . Για να ισχύει αυτό για κάθε  $e$ , ο πίνακας  $A$  θα πρέπει, εκτός από αρνητικά ημιορισμένος, να είναι και συμμετρικός - κάτι που στην περίπτωσή μας δεν ισχύει. Επομένως, δεν μπορούμε να εγγυηθούμε ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

Στο Σχήμα 4α' φαίνεται η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov. Διαπιστώνουμε ότι δεν ισχύει  $\dot{V} \leq 0, \forall t$ , επαληθεύοντας τη θεωρητική μας ανάλυση.

Στο Σχήμα 5α' παρατηρούμε ότι το σφάλμα αναγνώρισης δεν συγκλίνει στο μηδέν αλλά ταλαντώνεται. Αυτό αιτιολογείται από το γεγονός ότι η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov λαμβάνει και θετικές τιμές, καθιστώντας το σύστημα εκτίμησης ασταθές.



Στο Σχήμα 6α' παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων για τη Π δομή. Παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις δεν συγκλίνουν σε μία σταθερή τιμή αλλά ταλαντώνονται λόγω της αστάθειας του συστήματος εκτίμησης.

Για τη Μ δομή εργαζόμαστε αντίστοιχα. Το σύστημα αναγνώρισης είναι:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}x + \hat{B}u + C(x - \hat{x}), \quad (24)$$

όπου  $C$  συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας. Η παράγωγος του σφάλματος αναγνώρισης  $e = x - \hat{x}$  βρίσκεται:

$$\dot{e} = -\tilde{A}x - \tilde{B}u - Ce \quad (25)$$

Η συνάρτηση Lyapunov θα δίνεται και πάλι από την (20). Παραγωγίζοντας την (20) και αντικαθιστώντας την (25) προκύπτει:

$$\dot{V} = -e^T Ce + \text{Tr}\{\tilde{A}^T \dot{\hat{A}} + \tilde{B}^T \dot{\hat{B}} - \tilde{A}xe^T - \tilde{B}ue^T\}. \quad (26)$$

Επιλέγουμε τώρα:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{A}} &= ex^T \\ \dot{\hat{B}} &= eu^T \end{aligned} \quad (27)$$

και η (26) γίνεται:

$$\dot{V} = -e^T Ce \quad (28)$$

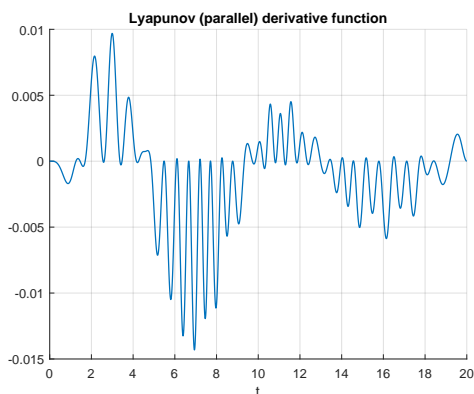
Βλέπουμε ότι στη μικτή δομή ισχύει  $\dot{V} \leq 0$ ,  $\forall t$ , καθώς ο  $C$  είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος. Συνεπώς, το σύστημα (24), (27) είναι ευσταθές.

Στην ανάλυσή μας θέσαμε  $C = \psi I$ , όπου  $I$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας και  $\psi > 0$  το κέρδος. Η επιλογή του  $\psi$  έγινε και πάλι με την τεχνική trial and error. Μεγαλύτερες τιμές του  $\psi$  έχουν ως αποτέλεσμα να υπερισχύει ο διορθωτικός όρος  $C(x - \hat{x})$  στην (24), οδηγώντας σε ταχύτερη σύγκλιση. Ωστόσο, πολύ μεγάλες τιμές του  $\psi$  ενδέχεται να καταστήσουν το σύστημα άκαμπτο. Τελικά, επιλέγουμε  $\psi = 5$ .

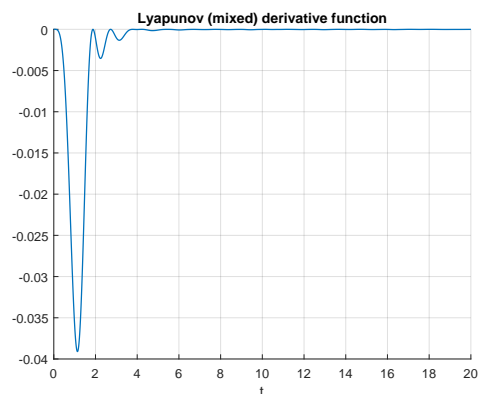
Στο Σχήμα 4β' φαίνεται η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov. Πράγματι, ισχύει  $\dot{V} \leq 0$ ,  $\forall t$ , καθιστώντας το σύστημα εκτίμησης ευσταθές.

Στο Σχήμα 5β' παρατηρούμε ότι το σφάλμα αναγνώρισης συγκλίνει, και μάλιστα πολύ γρήγορα, στο μηδέν, λόγω της μεγάλης τιμής του κέρδους  $\psi$  που επιλέξαμε.

Στο Σχήμα 6β' παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων για τη Π δομή. Παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις συγκλίνουν προς μία σταθερή τιμή, η οποία μάλιστα ταυτίζεται με την πραγματική. Αυτό αιτιολογείται από το γεγονός ότι η είσοδος  $u(t) = 2.5 \sin t$  ικανοποιεί τη ΣΕΔ.

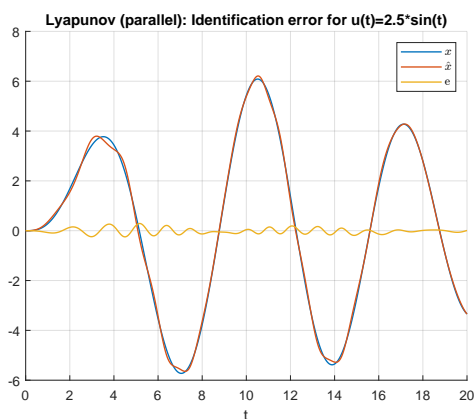


(α')

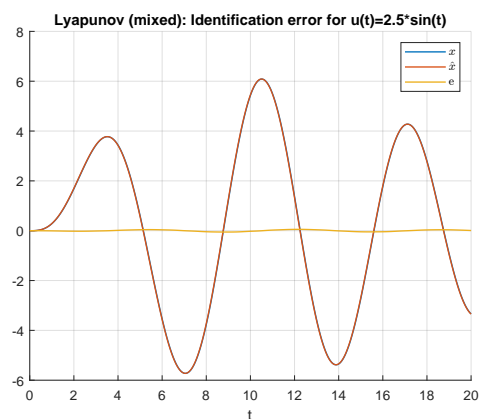


(β')

Σχήμα 4: Παράγωγος συνάρτησης Lyapunov για α) παράλληλη δομή β) μεικτή δομή



(α')



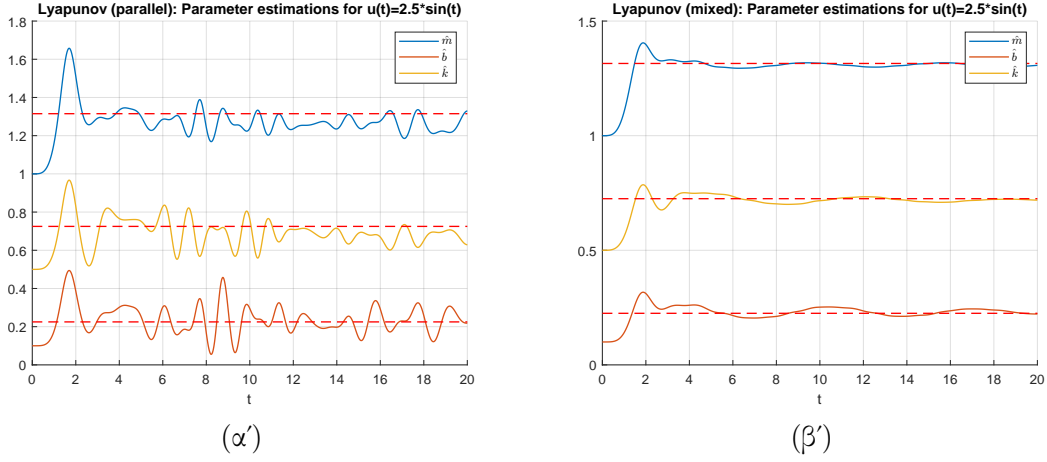
(β')

Σχήμα 5: Σφάλμα αναγνώρισης της μεθόδου Lyapunov για α) παράλληλη δομή β) μεικτή δομή

## Μέθοδος Lyapunov και θόρυβος δειγματοληψίας

Θεωρούμε ότι η έξοδος  $x(t)$  μετριέται με θόρυβο  $\eta(t) = \eta_0 \sin(2\pi f_0 t)$ ,  $\forall t \geq 0$ , όπου  $\eta_0 = 0.25$  και  $f_0 = 20$ . Θα μελετήσουμε την επίδραση του θορύβου στις εκτιμήσεις των παραμέτρων και της εξόδου για τη μέθοδο Lyapunov με παράλληλη και μικτή δομή.

Στο Σχήμα 7 παρουσιάζεται η απόλυτη τιμή του σφάλματος εκτίμησης των παραμέτρων, με και χωρίς προσθήκη θορύβου στην έξοδο, για τη Π δομή (αριστερά) και την Μ δομή (δεξιά). Παρατηρούμε ότι η προσθήκη θορύβου έχει αμελητέα επίδραση στο σφάλμα και για τις δύο περιπτώσεις. Αυτό ενδεχομένως



Σχήμα 6: Εκτιμήσεις παραμέτρων της μεθόδου Lyapunov για α) παράλληλη δομή β) μεικτή δομή

να συμβαίνει λόγω του μικρού πλάτους του θορύβου  $\eta_0$ .

Στο Σχήμα 8 παρουσιάζεται το σφάλμα εκτίμησης των παραμέτρων συναρτήσει του πλάτους του θορύβου, για την παράλληλη (αριστερά) και τη μεικτή (δεξιά) δομή. Παρατηρούμε ότι στην παράλληλη δομή το σφάλμα εκτίμησης είναι ουσιαστικά ανεξάρτητο από το πλάτος του θορύβου, ενώ στη μεικτή δομή το σφάλμα μεταβάλλεται με την αύξηση του πλάτους του θορύβου.

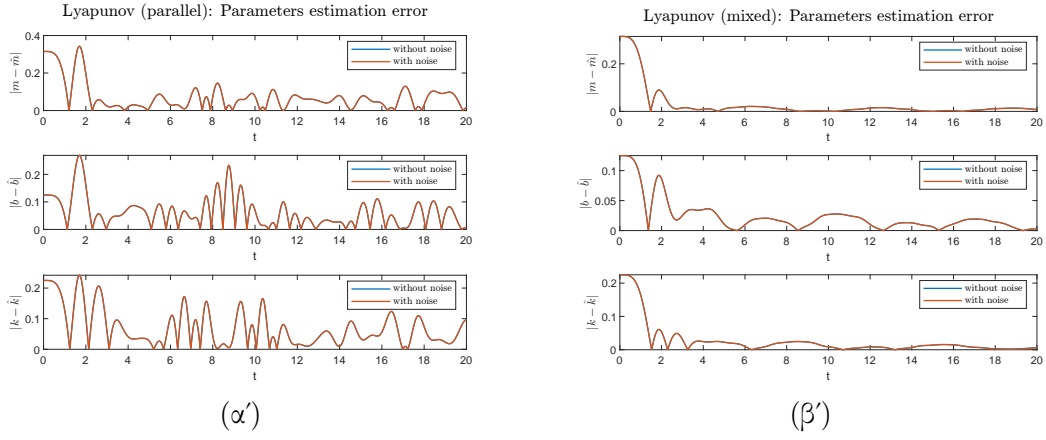
Η μειωμένη ευαισθησία στο πλάτος του θορύβου στη Π δομή μπορεί να αιτιολογηθεί παρατηρώντας το σύστημα αναγνώρισης (16), όπου διαπιστώνουμε ότι δεν χρησιμοποιούνται οι πραγματικές τιμές των καταστάσεων του συστήματος. Αντίθετα, στη Μ δομή, από τη σχέση (24), προκύπτει ότι χρησιμοποιούνται απευθείας οι μετρήσεις των καταστάσεων του πραγματικού συστήματος, γεγονός που εξηγεί την αυξημένη επίδραση του πλάτους του θορύβου.

## Θέμα 2

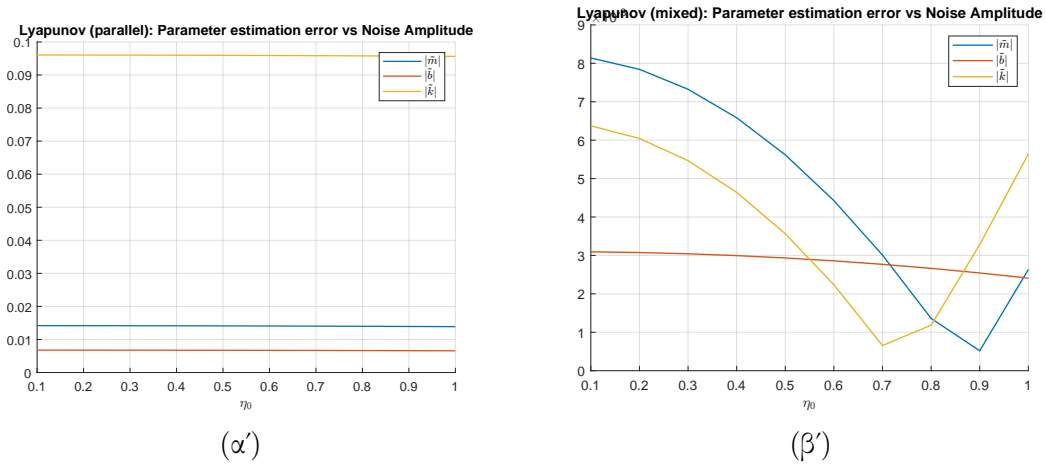
Το μη-γραμμικό σύστημα που περιγράφει τη γωνία κύλισης (roll angle) ενός αεροσκάφους δίνεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{r}(t) = -a_1\dot{r}(t) - a_2\sin(r(t)) + a_3\dot{r}^2(t)\sin(2r(t)) + bu(t) + d(t) \quad (29)$$

όπου  $r(t)$  η γωνία κύλισης [rad],  $a_i, i = 1, 2, 3$  και  $b$  σταθερές, άγνωστες παράμετροι,  $u(t)$  η είσοδος ελέγχου και  $d(t)$  οι εξωτερικές διαταραχές. Οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων είναι  $\alpha_1 = 1.315$ ,  $\alpha_2 = 0.725$ ,  $\alpha_3 = 0.225$  και  $b = 1.175$ .



Σχήμα 7: Σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων με και χωρίς θόρυβο εξόδου για την μέθοδο Lyapunov με α) παράλληλη δομή β) μεικτή δομή



Σχήμα 8: Σφάλματα εκτίμησης παραμέτρων συναρτήσει του πλάτους του θορύβου για την μέθοδο Lyapunov με α) παράλληλη δομή β) μεικτή δομή

## Σχεδίαση ελεγκτή ανάδρασης

Αρχικά θα σχεδιάσουμε ελεγκτή ανάδρασης ώστε η γωνία  $r(t)$  να ακολουθήσει την επιθυμητή τροχιά  $r_d(t)$ , η οποία ορίζεται ώστε:

$$r_d(t) = -\frac{\pi}{1000}t^2 + \frac{\pi}{50}t, \quad t \in [0, 20]. \quad (30)$$

Από την (30) μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι  $r_d(0) = 0$ ,  $r_d(10) = \pi/10$ ,  $r_d(20) = 0$ . Ο ελεγκτής ανάδρασης που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

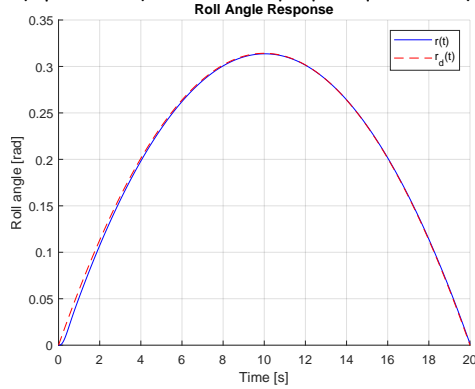
$$\begin{aligned} z_1(t) &= \frac{r(t) - r_d(t)}{\phi(t)} \\ \alpha(t) &= -k_1 T(z_1(t)) \\ z_2(t) &= \frac{\dot{r}(t) - \alpha(t)}{\rho} \\ u(t) &= -k_2 T(z_2(t)) \end{aligned} \quad (31)$$

όπου  $\phi(t) = (\phi_0 - \phi_\infty)e^{-\lambda t} + \phi_\infty$  η επιθυμητή ακρίβεια παρακολούθησης με παραμέτρους  $\phi_0 > \phi_\infty > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\phi_0 \gg |r(0) - r_d(0)|$  και  $T(z) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ . Επίσης  $\rho \gg |\dot{r}(0) - \alpha(0)|$  και  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$  κέρδη ελεύθερης επιλογής.

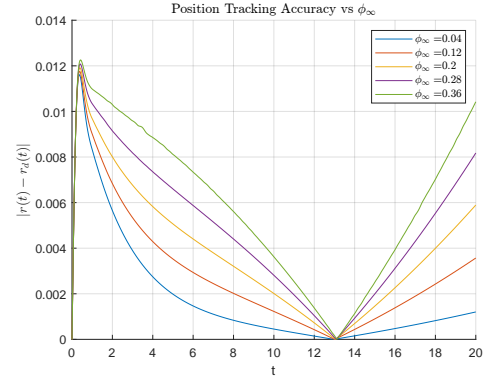
Στο Σχήμα 9 φαίνεται το γράφημα γωνίας κύλισης  $r(t)$  και τροχιάς αναφοράς  $r_d(t)$  για  $\phi_0 = 0.4$ ,  $\phi_\infty = 0.05$ ,  $\lambda = 0.4$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $k_1 = 1.2$ ,  $k_2 = 2$ .

Από το Σχήμα 11 βλέπουμε ότι για την ακρίβεια παρακολούθησης της επιθυμητής τροχιάς ισχύει  $|r(t) - r_d(t)| < \phi(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ . Ομοίως από το Σχήμα 12 για την ακρίβεια παρακολούθησης της επιθυμητής ταχύτητας ισχύει  $|\dot{r}(t) - \alpha(t)| < \rho$ ,  $\forall t \geq 0$ . Συνεπώς, η υλοποίησή μας είναι ορθή για αυτές τις επιλογές των παραμέτρων.

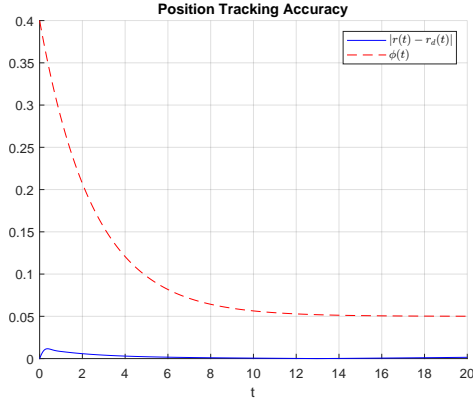
Τέλος, από το Σχήμα 10 παρατηρούμε ότι με τη μείωση του  $\phi_\infty$  βελτιώνεται η ακρίβεια παρακολούθησης της επιθυμητής τροχιάς  $r_d(t)$ .



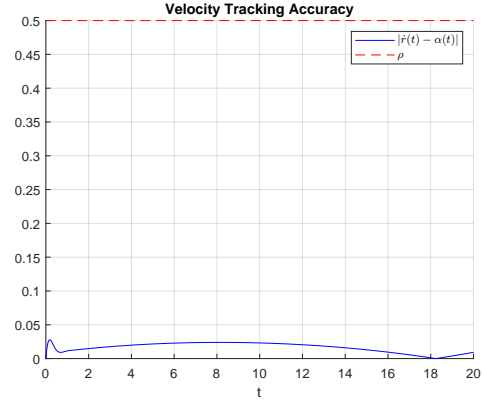
Σχήμα 9: Γράφημα γωνίας κύλισης  $r(t)$  και τροχιάς αναφοράς  $r_d(t)$



Σχήμα 10: Απόκλιση  $|r(t) - r_d(t)|$  για διάφορες τιμές του  $\phi_\infty$



Σχήμα 11: Απόκλιση  $|r(t) - r_d(t)|$



Σχήμα 12: Απόκλιση  $|\dot{r}(t) - \alpha(t)|$

## Εκτίμηση παραμέτρων με την μέθοδο Lyapunov

Θα σχεδιάσουμε εκτιμητή πραγματικού χρόνου των άγνωστων παραμέτρων με τη μέθοδο Lyapunov θεωρώντας  $d(t) = 0$ .

Το σύστημα (29) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\dot{x} = f(x)\theta_1^* + g(x)\theta_2^* \quad (32)$$

όπου  $x = [x_1, x_2]^T = [r, \dot{r}]^T$  το διάνυσμα καταστάσεων,  $\theta_1^* = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$ ,  $\theta_2^* = [1, b]$  τα διανύσματα των παραμέτρων που επιθυμούμε να εκτιμήσουμε και  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  συναρτήσεις που δίνονται από:

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & -\sin(x_1) & x_2^2 \sin(2x_1) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & u(x) \end{bmatrix} \quad (33)$$

με  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  τον ελεγκτή της (31).

Επιλέγουμε τη μεικτή δομή του συστήματος αναγνώρισης:

$$\dot{\hat{x}} = f(x)\hat{\theta}_1 + g(x)\hat{\theta}_2 + C(x - \hat{x}) \quad (34)$$

όπου  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  οι εκτιμήσεις των  $\theta_1^*, \theta_2^*$  αντίστοιχα και  $C$  συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας. Το σφάλμα αναγνώρισης ορίζεται ως  $e = x - \hat{x}$ . Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο το  $e$  κατά μήκος των λύσεων των (38), (34) προκύπτει η διαφορική εξίσωση του σφάλματος:

$$\dot{e} = -Ce - f(x)\tilde{\theta}_1 - g(x)\tilde{\theta}_2 \quad (35)$$

όπου  $\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1^*$  και  $\tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2^*$ . Ορίζουμε την συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_1^T \tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_2^T \tilde{\theta}_2 \quad (36)$$

Παραγωγίζοντας την (36) ως προς τον χρόνο και αντικαθιστώντας την (39) βρίσκουμε:

$$\dot{V} = -e^T C e - e^T f(x) \tilde{\theta}_1 - e^T f(x) \tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_1^T \dot{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2^T \dot{\theta}_2 \quad (37)$$

Επιλέγοντας:

$$\dot{\theta}_1 = f^T(x) e$$

$$\dot{\theta}_2 = g^T(x) e$$

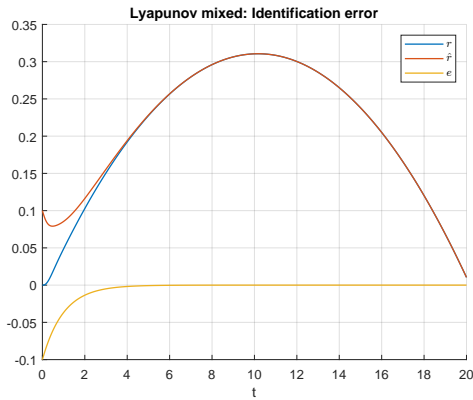
η (37) γίνεται:

$$\dot{V} = -e^T C e \leq 0$$

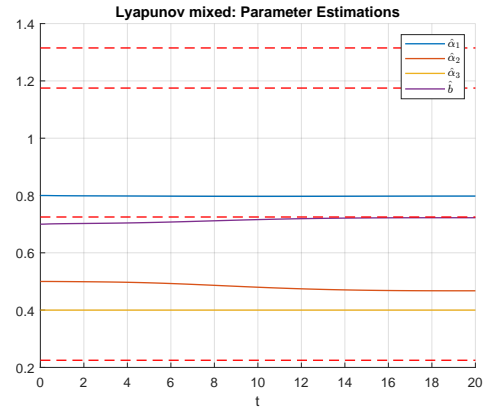
αφού ο  $C$  συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος. Όπως και προηγουμένως, θέτουμε  $C = \psi I$  με  $I$  τον μοναδιαίο πίνακα και  $\psi > 0$  το κέρδος.

Στο Σχήμα 13 παρουσιάζεται η έξοδος και το σφάλμα του συστήματος αναγνώρισης. Διαπιστώνεται ότι το σφάλμα συγκλίνει γρήγορα στο μηδέν, ακόμη και όταν οι αρχικές συνθήκες διαφέρουν σημαντικά από την πραγματική αρχική κατάσταση του συστήματος. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στην ευστάθεια του συστήματος εκτίμησης, καθώς ισχύει  $V \leq 0$ . Η σύγκλιση αυτή είναι ταχύτερη όσο το κέρδος  $\psi$  αυξάνεται.

Στο Σχήμα 14 απεικονίζονται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων. Παρατηρείται ότι οι εκτιμήσεις συγκλίνουν προς σταθερές τιμές, γεγονός που απορρέει από την ευστάθεια του συστήματος εκτίμησης. Ωστόσο, οι τιμές αυτές διαφέρουν από τις πραγματικές παραμέτρους, καθώς η είσοδος ελέγχου  $u(t)$  από την (31) δεν ικανοποιεί τη ΣΕΔ.



Σχήμα 13: Σφάλμα αναγνώρισης με τη μέθοδο Lyapunov



Σχήμα 14: Εκτιμήσεις παραμέτρων με τη μέθοδο Lyapunov

## Εκτίμηση παραμέτρων παρουσία εξωτερικής διαταραχής

Θα επαναλάβουμε την εκτίμηση των παραμέτρων με τη μέθοδο Lyapunov, θεωρώντας αυτή τη φορά την ύπαρξη εξωτερικών διαταραχών  $d(t) = 0.15 \sin(0.5t)$ . Το σύστημα μπορεί να γραφεί ως:

$$\dot{x} = f(x)\theta_1^* + g(x)\theta_2^* + h(t) \quad (38)$$

όπου  $h(t) = [0, d(t)]^T$  και οι  $f(x)$ ,  $g(x)$  δίνονται από την (33). Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία με την περίπτωση χωρίς διαταραχές, προκύπτει η διαφορική εξίσωση του σφάλματος:

$$\dot{e} = -Ce - f(x)\tilde{\theta}_1 - g(x)\tilde{\theta}_2 + h(t) \quad (39)$$

Η συνάρτηση Lyapunov παραμένει ως έχει στην (36). Παράγωγίζοντας κατά τα γνωστά, λαμβάνουμε:

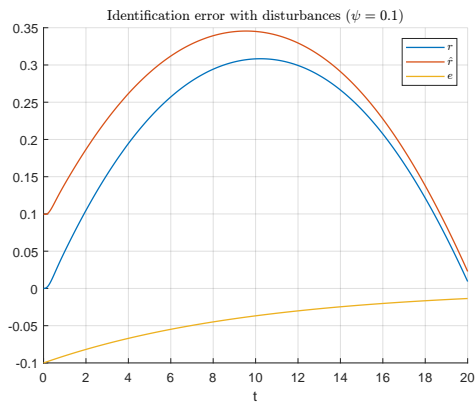
$$\dot{V} = -e^T Ce + e^T h(t) \quad (40)$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση δεν ισχύει  $\dot{V} \leq 0$ ,  $\forall t$  για οποιονδήποτε συμμετρικό και θετικά ημιορισμένο πίνακα  $C$ . Θέτοντας  $C = \psi I$ , προκύπτει:  $\dot{V} = -\psi \|e\|^2 + e_2 d(t)$ ,  $e = [e_1, e_2]^T$ . Συνεπώς, για επαρκώς μεγάλο  $\psi$  μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι  $\dot{V} \leq 0$  και να διατηρήσουμε την ευστάθεια του συστήματος εκτίμησης.

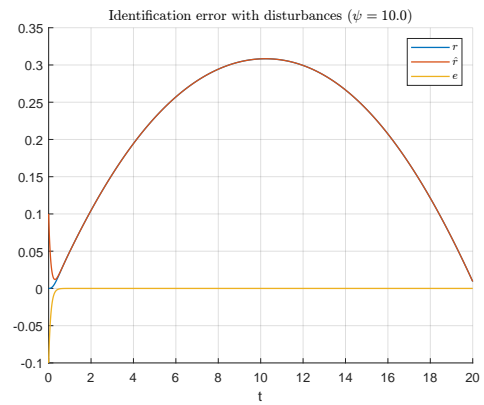
Από το Σχήμα 15α' παρατηρούμε ότι για  $\psi = 0.1$  το σύστημα αναγνώρισης αδυνατεί να παρακολουθήσει την πραγματική έξοδο λόγω αστάθειας στο σχήμα εκτίμησης. Αντιθέτως, για μεγαλύτερη τιμή του κέρδους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15β', το σφάλμα αναγνώρισης συγκλίνει ταχύτατα στο μηδέν επιβεβαιώνοντας την ευστάθεια του συστήματος.

Αντίστοιχα, από το Σχήμα 16α' παρατηρείται ότι για  $\psi = 0.1$  οι εκτιμήσεις των παραμέτρων δεν συγκλίνουν σε σταθερές τιμές, αλλά παρουσιάζουν ταλαντώσεις εξαιτίας της αστάθειας. Αντιθέτως, όπως φαίνεται στο Σχήμα 16β', για μεγαλύτερη τιμή του  $\psi$  οι εκτιμήσεις συγκλίνουν σε σταθερές τιμές, επαληθεύοντας την ευστάθεια του εκτιμητή υπό παρουσία διαταραχών.



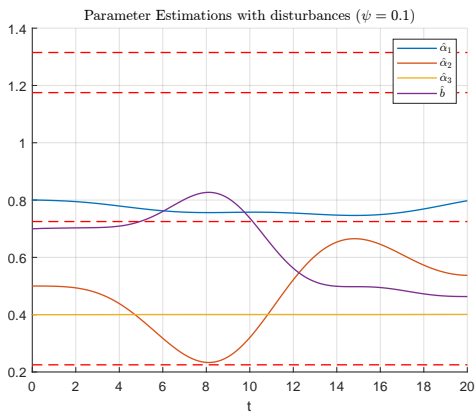


(α')

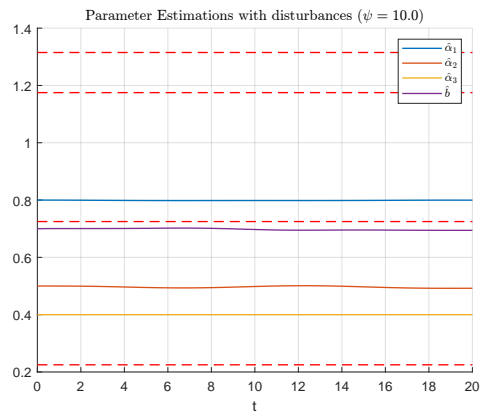


(β')

Σχήμα 15: Σφάλμα αναγνώρισης με τη μέθοδο Lyapunov παρουσία διαταραχών με α)  $\psi = 0.1$ , β)  $\psi = 10$



(α')



(β')

Σχήμα 16: Εκτιμήσεις παραμέτρων με τη μέθοδο Lyapunov παρουσία διαταραχών με α)  $\psi = 0.1$ , β)  $\psi = 10$