

# Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων Project

Ρουσομάνης Γεώργιος (ΑΕΜ: 10703)

Ιούνιος 2025

## Θέμα 1

Σε αυτό το μέρος μελετάται ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα δεύτερης τάξης της μορφής:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (1)$$

όπου  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$  είναι το διάνυσμα των καταστάσεων, και  $u(t) \in \mathbb{R}$  η είσοδος του συστήματος. Οι πίνακες  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  και  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  είναι άγνωστοι αλλά σταθεροί. Επίσης, γνωρίζουμε ότι:

$$-3 \leq a_{11} \leq -1, \quad b_2 \geq 1. \quad (2)$$

Σκοπός είναι η ανάπτυξη και ανάλυση ενός αλγορίθμου πραγματικού χρόνου για την εκτίμηση  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$  των πινάκων  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$ , με δεδομένο ότι τόσο η είσοδος  $u(t)$  όσο και το διάνυσμα καταστάσεων  $\mathbf{x}(t)$  είναι μετρήσιμα. Για τη σχεδίαση του αλγορίθμου, αρχικά υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει σφάλμα μοντελοποίησης που οφείλεται στην μορφή του συστήματος. Στη συνέχεια, εισάγεται στο σύστημα σφάλμα πόλωσης και επανασχεδιάζεται ο αλγόριθμος, με στόχο τη μελέτη της επίδρασης του σφάλματος στην ακρίβεια των εκτιμήσεων. Για σκοπούς προσομοίωσης, χρησιμοποιούνται ως πραγματικές τιμές οι παρακάτω πίνακες:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2.15 & 0.25 \\ -0.75 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}.$$

## Ερώτημα α)

Πρωτού προχωρήσουμε στη σχεδίαση του αλγορίθμου πραγματικού χρόνου για την εκτίμηση των  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , πρέπει να επιλέξουμε το είδος της εισόδου που θα

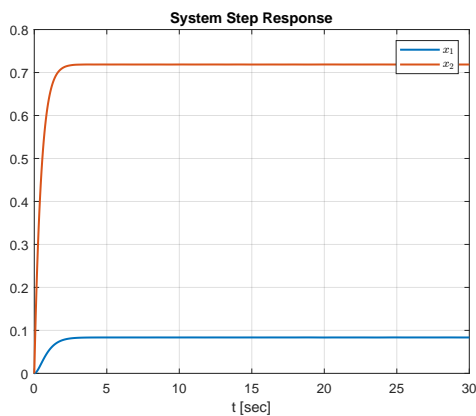
εφαρμόσουμε στο σύστημα, καθώς και τη συχνότητα δειγματοληψίας. Μία συνήθης πρακτική για την επιλογή της συχνότητας δειγματοληψίας είναι να την ορίζουμε περίπου δέκα φορές μεγαλύτερη από το εύρος ζώνης του συστήματος. Ωστόσο, επειδή το μοντέλο μας υπάγεται στην κατηγορία ‘γκρι κουτί’, η εκ των προτέρων γνώση μας για το σύστημα δεν επαρκεί για τον άμεσο υπολογισμό του εύρους ζώνης.

### Επιλογή συχνότητας δειγματοληψίας

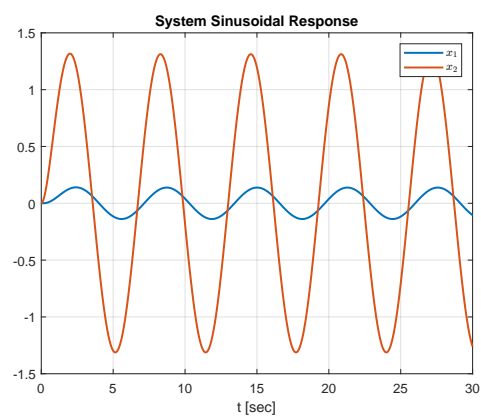
Εφαρμόζουμε βηματική είσοδο στο σύστημα ώστε να εκτιμήσουμε την κυρίαρχη σταθερά χρόνου και να αποκτήσουμε μία πρώτη εικόνα για τη δυναμική του. Η βηματική απόκριση του συστήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 1α' για συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s = 1$  kHz. Η  $f_s$  επιλέχθηκε αυθαίρετα ως μία υψηλή τιμή, επαρκής για να αποτυπώσει τη δυναμική του συστήματος.

Από το σχήμα είναι εμφανές ότι η απόκριση της κατάστασης  $x_2(t)$  είναι ταχύτερη αυτής της  $x_1(t)$ , συνεπώς η σταθερά χρόνου του συστήματος θα προσδιοριστεί μέσω της  $x_2(t)$ . Στην απόκριση της  $x_2(t)$  δεν παρατηρείται υπερρύψωση, άρα ο χρόνος αποκατάστασης  $t_s$  ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σύστημα να φτάσει στο 98% της εξόδου του. Από το σχήμα βλέπουμε ότι  $t_s \approx 2$  sec. Η σταθερά χρόνου είναι  $\tau \approx t_s/4 = 0.5$  sec. Συνεπώς, η συχνότητα δειγματοληψίας πρέπει να ικανοποιεί  $f_s > 10/\tau = 20$ Hz.

Για το πραγματικό σύστημα, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}$  είναι  $\lambda_{1,2} = -2.075 \pm 0.4265j$ , και η σταθερά χρόνου  $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} = 0.482$ , η οποία είναι πολύ κοντά στην αρχική μας εκτίμηση.



(α')



(β')

Σχήμα 1: Απόκριση του συστήματος για α) βηματική είσοδο, β)  $u(t) = 2 \sin t$

## Επιλογή εισόδου

Για να αποτυπωθεί πλήρως η δυναμική του συστήματος, είναι σημαντικό η είσοδος να περιέχει αρκετές συχνότητες ώστε να διεγείρει όλους τους ρυθμούς του συστήματος. Επίσης, με κατάλληλη επιλογή της εισόδου ώστε να ικανοποιεί την Συνθήκη Εναπομείνουσας Διέγερσης (ΣΕΔ), οι μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων πραγματικού χρόνου (κλίσης, Lyapunov) μας εγγυόνται την σύγκλιση των παραμετρικών σφαλμάτων στο μηδέν.

Το γραμμικό μας σύστημα είναι τάξεως  $n = 2$ . Για να ικανοποιεί η είσοδος μας  $u$  μία ΣΕΔ πρέπει να περιέχει τουλάχιστον  $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  διακριτές συχνότητες και τότε το σήμα  $u$  λέγεται επιμένουσα διέγερση τάξεως  $n$ . Στην ανάλυσή μας παρακάτω χρησιμοποιούμε ως είσοδο την  $u(t) = 2 \sin t$ .

## Μέθοδος Lyapunov με προβολή

Λόγω της εκ των προτέρων γνώσης που έχουμε για το επιτρεπτό εύρος τιμών ορισμένων παραμέτρων, ο χώρος αναζήτησης  $\Theta$  των παραμέτρων του μοντέλου θα περιορίζεται σε ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ . Θα χρησιμοποιήσουμε κάποιο αναδρομικό αλγόριθμο προβολής ο οποίος εξασφαλίζει ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων παραμένουν εντός του  $\Theta$ . Ειδικότερα θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Lyapunov με προβολή.

Πρωτού προχωρήσουμε στην εκτίμηση των παραμέτρων, θα εξετάσουμε την ευστάθεια της μεθόδου Lyapunov με M-δομή χωρίς περιορισμούς.

Το σύστημα αναγνώρισης είναι:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}}u + \mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}), \quad (3)$$

όπου  $\mathbf{C}$  συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας. Η παράγωγος του σφάλματος αναγνώρισης  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  βρίσκεται:

$$\dot{\mathbf{e}} = -\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{B}}u - \mathbf{C}\mathbf{e} \quad (4)$$

όπου  $\tilde{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}$  τα παραμετρικά σφάλματα. Ως συνάρτηση Lyapunov επιλέγεται η:

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{e}^\top \mathbf{e} + \frac{1}{2}\text{Tr}\{\tilde{\mathbf{A}}^\top \tilde{\mathbf{A}}\} + \frac{1}{2}\text{Tr}\{\tilde{\mathbf{B}}^\top \tilde{\mathbf{B}}\} \quad (5)$$

Παραγωγίζοντας την (5) και αντικαθιστώντας την (4) προκύπτει:

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^\top \mathbf{C}\mathbf{e} + \text{Tr}\{\tilde{\mathbf{A}}^\top \dot{\tilde{\mathbf{A}}} + \tilde{\mathbf{B}}^\top \dot{\tilde{\mathbf{B}}} - \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}\mathbf{e}^\top - \tilde{\mathbf{B}}u\mathbf{e}^\top\}. \quad (6)$$

Επιλέγουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{A}}} &= \mathbf{e}\mathbf{x}^\top \\ \dot{\tilde{\mathbf{B}}} &= \mathbf{e}u^\top \end{aligned} \quad (7)$$

και η (6) γίνεται:

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^\top \mathbf{C} \mathbf{e} \quad (8)$$

Βλέπουμε ότι στη μικτή δομή ισχύει  $\dot{V} \leq 0, \forall t$ , καθώς ο  $\mathbf{C}$  είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος. Συνεπώς, το σύστημα (3), (7) είναι ευσταθές.

Στην ανάλυσή μας θέσαμε  $\mathbf{C} = k\mathbf{I}$ , όπου  $\mathbf{I}$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας και  $k > 0$  το κέρδος. Η επιλογή του  $k$  έγινε με τη μέθοδο trial and error. Μεγαλύτερες τιμές του  $k$  έχουν ως αποτέλεσμα να υπερισχύει ο διορθωτικός όρος  $\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$  στην (3), οδηγώντας σε ταχύτερη σύγκλιση. Ωστόσο, πολύ μεγάλες τιμές του  $k$  ενδέχεται να καταστήσουν το σύστημα άκαμπτο. Τελικά, επιλέγουμε  $k = 1$ .

Έχοντας εξασφαλίσει την ευστάθεια του αλγορίθμου απουσία περιορισμών, συνεχίζουμε με την σχεδίαση του αναδρομικού αλγορίθμου προβολής. Έστω

$$\hat{\theta} = [\hat{\alpha}_{11} \quad \hat{\alpha}_{12} \quad \hat{\alpha}_{21} \quad \hat{\alpha}_{22} \quad \hat{b}_1 \quad \hat{b}_2]^\top$$

το διάνυσμα των εκτιμήσεων των παραμέτρων που προκύπτει από το σύστημα (3), (7). Θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι το  $\hat{\theta}$  θα παίρνει τιμές εντός του κυρτού συνόλου:

$$\Theta = \{\hat{\theta} \in \mathbb{R}^6 : g(\hat{\theta}) \leq 0\}$$

όπου η  $g(\hat{\theta}) \in \mathbb{R}^3$  έχει διάσταση όση και το πλήθος των περιορισμών. Από την (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} \geq -3 &\Rightarrow -\alpha_{11} - 3 \leq 0 \\ \alpha_{11} \leq -1 &\Rightarrow \alpha_{11} + 1 \leq 0 \\ b_2 \geq 1 &\Rightarrow 1 - b_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς η  $g(\hat{\theta})$  θα είναι:

$$g(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} -\alpha_{11} - 3 \\ \alpha_{11} + 1 \\ 1 - b_2 \end{bmatrix}$$

και η Ιακωβιανή της  $g(\hat{\theta})$ :

$$\mathbf{J}_g(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \nabla g_1(\hat{\theta}) \\ \nabla g_2(\hat{\theta}) \\ \nabla g_3(\hat{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ο αλγόριθμος Lyapunov με προβολή μεικτής δομής που πετυχαίνει το παραπάνω αποτέλεσμα είναι:

$$\dot{\hat{\theta}}_\Pi = \begin{cases} \dot{\hat{\theta}}, & \text{αν } g_i(\hat{\theta}) < 0 \text{ ή } \nabla g_i^\top \dot{\hat{\theta}} \leq 0 \\ \dot{\hat{\theta}} - \mathbf{\Gamma} \frac{\nabla g_i \nabla g_i^\top}{\nabla g_i^\top \mathbf{\Gamma} \nabla g_i} \dot{\hat{\theta}}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (9)$$

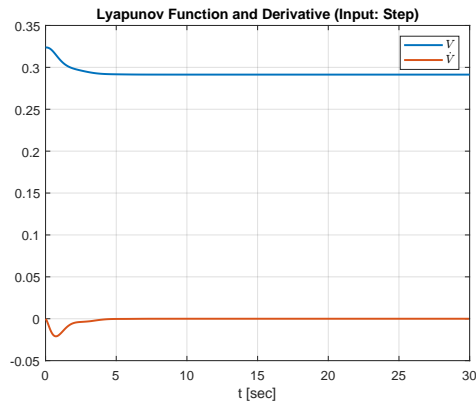
όπου  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^\top \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  ο πίνακας κέρδους προσαρμογής και ο δείκτης  $i$  υποδηλώνει τον  $i$ -οστό περιορισμό. Ο διορθωτικός όρος  $-\mathbf{\Gamma} \nabla g_i (\nabla g_i^\top \mathbf{\Gamma} \nabla g_i)^{-1} \nabla g_i^\top \hat{\theta}$  εγγυάται ότι  $\hat{\theta} \in \Theta$ ,  $\forall t \geq 0$  με την προϋπόθεση ότι  $\hat{\theta}(0) \in \Theta$ . Πράγματι:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_\Pi^\top \nabla g_i &= \dot{\hat{\theta}}^\top \nabla g_i - \dot{\hat{\theta}}^\top \frac{\nabla g_i \nabla g_i^\top}{\nabla g_i^\top \mathbf{\Gamma} \nabla g_i} \mathbf{\Gamma}^\top \nabla g_i \\ &= \dot{\hat{\theta}}^\top \nabla g_i - \dot{\hat{\theta}}^\top \nabla g_i \frac{\nabla g_i^\top \mathbf{\Gamma} \nabla g_i}{\nabla g_i^\top \mathbf{\Gamma} \nabla g_i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

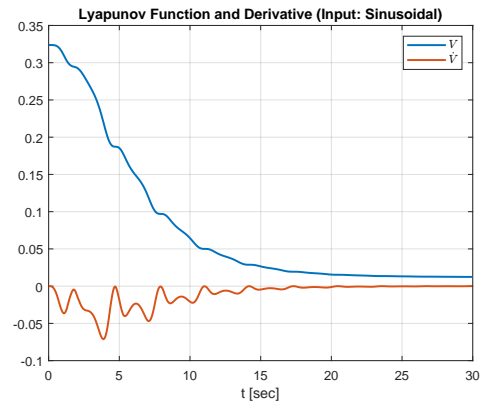
Συνεπώς, όταν ο  $i$ -οστός περιορισμός είναι ενεργός, η γωνία μεταξύ των  $\dot{\hat{\theta}}_\Pi^\top$  και  $\nabla g_i$  είναι ορθή, άρα η νέα εκτίμηση  $\hat{\theta}$  θα κινηθεί εφαπτομενικά πάνω στο σύνορο του  $\Theta$ .

Η ανάλυση της ευστάθειας που προηγήθηκε, αφορούσε τη μέθοδο Lyapunov μεικτής δομής απουσία περιορισμών. Αποδεικνύεται ότι η προσθήκη του διορθωτικού όρου στην (9) όχι μόνο δεν επηρεάζει αρνητικά την ευστάθεια του συστήματος, αλλά αντιθέτως καθιστά την παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov πιο αρνητική. Συνεπώς, τα συμπεράσματά μας περί ευστάθειας μεταφέρονται αυτούσια και στην περίπτωση παρουσίας περιορισμών.

Στο Σχήμα 2 φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης Lyapunov καθώς και της παραγώγου της, για βηματική είσοδο (αριστερά) και ημιτονοειδή είσοδο  $u(t) = 2 \sin t$  (δεξιά). Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις ισχύει  $V \geq 0$ ,  $\dot{V} \leq 0, \forall t$ , γεγονός που επιβεβαιώνει την ευστάθεια του συστήματος εκτίμησης παραμέτρων.

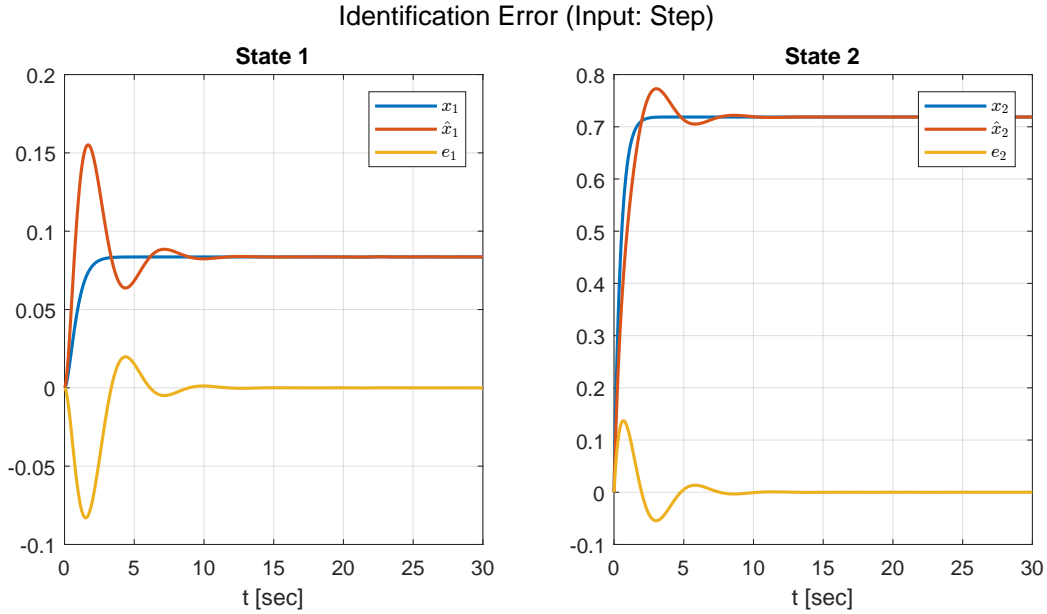


(α')



(β')

Σχήμα 2: Γραφική παράσταση της συνάρτησης Lyapunov καθώς και της παραγώγου της για α) βηματική είσοδο, β)  $u(t) = 2 \sin t$



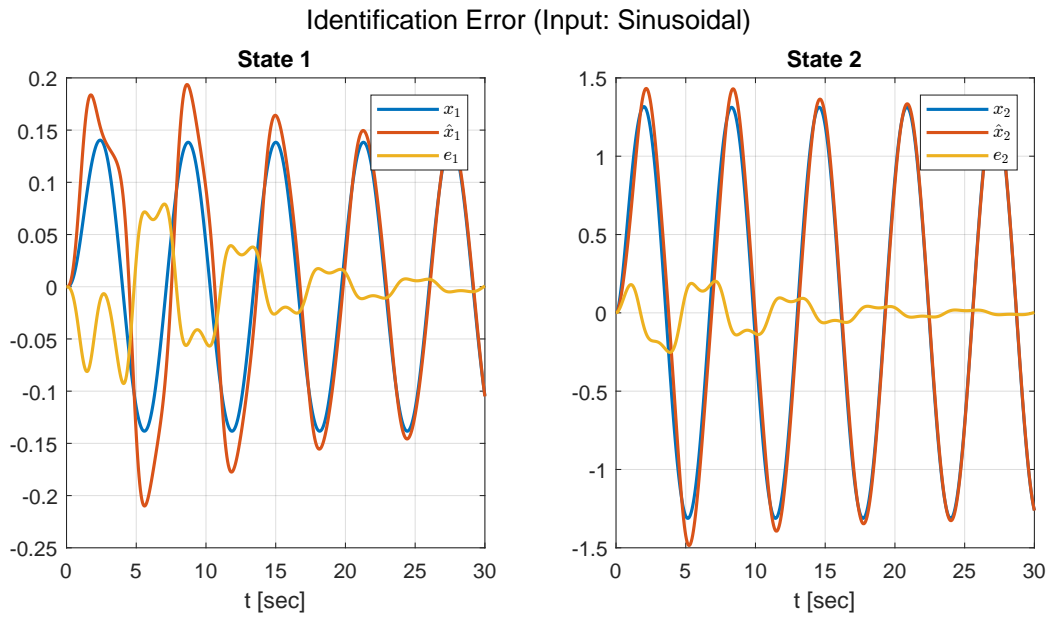
Σχήμα 3: Σφάλμα αναγνώρισης για βηματική είσοδο

Στο Σχήμα 3 παρουσιάζεται το σφάλμα αναγνώρισης των δύο καταστάσεων για βηματική είσοδο, ενώ στο Σχήμα 4 απεικονίζεται το αντίστοιχο σφάλμα για είσοδο  $u(t) = 2 \sin t$ . Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις τα σφάλματα συγκλίνουν στο μηδέν. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς οι είσοδοι είναι φραγμένες και, σύμφωνα με το λήμμα Barbalat, το σφάλμα αναγνώρισης τείνει στο μηδέν.

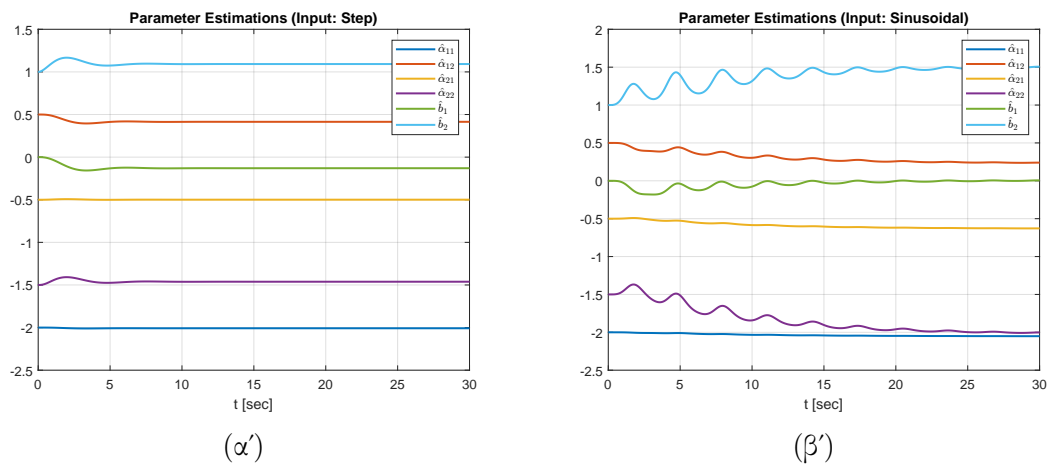
Στο Σχήμα 5 παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων για βηματική είσοδο (αριστερά) και για ημιτονοειδή είσοδο  $u(t) = 2 \sin t$  (δεξιά). Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις ικανοποιούνται οι περιορισμοί  $-3 \leq \hat{a}_{11} \leq -1$ ,  $b_2 \geq 1$ ,  $\forall t$ . Επιπλέον, για την ημιτονοειδή είσοδο όλες οι εκτιμήσεις συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές των παραμέτρων, σε αντίθεση με την περίπτωση της βηματικής εισόδου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η  $u(t) = 2 \sin t$  ικανοποιεί τη ΣΕΔ, όπως αναλύθηκε προηγουμένως.

### Ερώτημα β)

Θεωρούμε τώρα ότι στο σύστημά μας υπάρχει σφάλμα πόλωσης  $\omega \in \mathbb{R}^2$  που να ικανοποιεί  $\|\omega(t)\| \leq \bar{\omega}$ ,  $\forall t \geq 0$ , για κάποια άγνωστη σταθερά  $\bar{\omega} > 0$ . Τα σφάλματα πόλωσης αποτελούν σταθερές ή αργά μεταβαλλόμενες διαταραχές που οφείλονται στην εσφαλμένη επιλογή της δομής του μοντέλου. Στην παρακάτω



Σχήμα 4: Σφάλμα αναγνώρισης για είσοδο  $u(t) = 2 \sin t$



Σχήμα 5: Εκτιμήσεις παραμέτρων για α) βηματική είσοδο, β)  $u(t) = 2 \sin t$

ανάλυση το σφάλμα πόλωσης μοντελοποιείται ως:

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\omega} \sin(2\pi f_w t) \\ \bar{\omega} \cos(2\pi f_w t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \quad (10)$$

όπου  $f_w \ll f_n$  με  $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$  τη φυσική συχνότητα του συστήματος.

Παρουσία σφάλματος πόλωσης, οι κλασικές μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων πραγματικού χρόνου διασφαλίζουν ότι το σφάλμα αναγνώρισης  $e$  παραμένει φραγμένο, δηλαδή  $\|e\| \leq \bar{\omega}$ . Ωστόσο, η εκτίμηση των παραμέτρων  $\hat{\theta}$  ενδέχεται να αποκλίνει σημαντικά από τις πραγματικές τιμές  $\theta^*$ , οδηγώντας σε παραμετρικό σφάλμα  $\|\tilde{\theta}\| = \|\hat{\theta} - \theta\| \rightarrow \infty$ .

Ένας τρόπος αντιμετώπισης της απόκλισης αυτής είναι η χρήση της μεθόδου προβολής, η οποία περιορίζει το διάνυσμα εκτίμησης εντός ενός κυρτού συνόλου  $\Theta$ , υπό την προϋπόθεση ότι  $\theta^* \in \Theta$ . Με αυτόν τον τρόπο διασφαλίζεται ότι  $\hat{\theta} \in \Theta, \forall t \geq 0$ , αποφεύγοντας την περίπτωση όπου  $\hat{\theta} \rightarrow \infty$  δηλαδή την *παραμετρική ολίσθηση*.

Αντί της μεθόδου προβολής, θα χρησιμοποιήσουμε έναν εύρωστο αλγόριθμο εκτίμησης παραμέτρων: τη μέθοδο κλίσης με διακοπτική  $\sigma$ -τροποποίηση.

### Μέθοδος κλίσης με διακοπτική $\sigma$ -τροποποίηση

Θα φέρουμε το σύστημα της σχέσης (1) στην ισοδύναμη γραμμική παραμετροποιήσιμη μορφή. Από την πρώτη εξίσωση κατάστασης έχουμε:

$$\dot{x}_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + b_1u \quad (11)$$

Εφόσον το  $\dot{x}_1$  δεν είναι μετρήσιμο, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση  $\dot{x}_1 = sx_1$ , οπότε η (11) γίνεται:

$$\begin{aligned} sx_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + b_1u \Rightarrow \\ (s - \alpha_{11})x_1 &= \alpha_{12}x_2 + b_1u \end{aligned} \quad (12)$$



Φιλτράροντας τα δύο μέλη της (12) με ευσταθές φίλτρο 1ης τάξης  $\Lambda(s) = s + \lambda$ ,  $\lambda > 0$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{s - \alpha_{11}}{\Lambda(s)} x_1 &= \alpha_{12} \frac{x_2}{\Lambda(s)} + b_1 \frac{u}{\Lambda(s)} \Rightarrow \\
\frac{\Lambda(s) - \lambda - \alpha_{11}}{\Lambda(s)} x_1 &= \alpha_{12} \frac{x_2}{\Lambda(s)} + b_1 \frac{u}{\Lambda(s)} \Rightarrow \\
\left(1 - \frac{\lambda + \alpha_{11}}{\Lambda(s)}\right) x_1 &= \alpha_{12} \frac{x_2}{\Lambda(s)} + b_1 \frac{u}{\Lambda(s)} \Rightarrow \\
x_1 &= (\lambda + \alpha_{11}) \frac{x_1}{\Lambda(s)} + \alpha_{12} \frac{x_2}{\Lambda(s)} + b_1 \frac{u}{\Lambda(s)} \Rightarrow \\
x_1 &= [\lambda + \alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad b_1] \cdot \left[ \frac{x_1}{\Lambda(s)} \quad \frac{x_2}{\Lambda(s)} \quad \frac{u}{\Lambda(s)} \right]^\top \Rightarrow \\
x_1 &= \theta_1^*{}^\top \phi
\end{aligned}$$

όπου

$$\phi = \left[ \frac{x_1}{\Lambda(s)} \quad \frac{x_2}{\Lambda(s)} \quad \frac{u}{\Lambda(s)} \right]^\top \quad (13)$$

το μετρήσιμο διάνυσμα οπισθοδρόμησης και

$$\theta_1^* = [\lambda + \alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad b_1]^\top \quad (14)$$

το άγνωστο σταθερό διάνυσμα που εμπεριέχει τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων προς εκτίμηση.

Εργαζόμενοι αντίστοιχα και για τη δεύτερη εξίσωση κατάστασης, καταλήγουμε στη γραμμικά παραμετροποιήσιμη μορφή:

$$x_2 = \theta_2^*{}^\top \phi$$

με

$$\theta_2^* = [\alpha_{21} \quad \lambda + \alpha_{22} \quad b_2]^\top \quad (15)$$

Οι εκτιμήσεις  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$  των  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$  της μεθόδου κλίσης με διακοπτική  $\sigma$ -τροποποίηση (στην συνεχή της μορφή) δίνονται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned}
x_i &= \theta_i^*{}^\top \phi + \omega_i, \quad |\theta_i^*| \leq M \\
\hat{x}_i &= \hat{\theta}_i^\top \phi \\
\dot{\hat{\theta}}_i &= -\gamma \sigma_\delta(\hat{\theta}_i) \hat{\theta}_i + \gamma e_i \phi, \quad \gamma > 0, \quad i = 1, 2 \\
e_i &= x_i - \hat{x}_i
\end{aligned} \quad (16)$$

όπου τα σφάλματα πόλωσης  $\omega_i$  δίνονται από την (10),  $\hat{\theta}_i$  η εκτίμηση του  $\theta_i^*$ ,  $M, \bar{\sigma}, \gamma > 0$  σχεδιαστικές σταθερές και

$$\sigma_s(\hat{\theta}) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \|\hat{\theta}\| < M \\ \bar{\sigma} \left( \frac{\|\hat{\theta}\|}{M} - 1 \right), & \text{αν } M \leq \|\hat{\theta}\| \leq 2M, \quad \bar{\sigma} > 0 \\ \bar{\sigma}, & \text{αν } \|\hat{\theta}\| > 2M \end{cases}$$

Αποδεικνύεται ότι η διακοπτική  $\sigma$ -τροποποίηση λύνει το πρόβλημα της παραμετρικής ολίσθησης. Ειδικότερα, για την βαθμωτή περίπτωση το παραμετρικό σφάλμα  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$  συγκλίνει εκθετικά με ρυθμό  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \sigma_s \gamma$  στο σύνολο  $\Theta$ , όπου:

$$\Theta = \left\{ \tilde{\theta} \in \mathbb{R} : \|\tilde{\theta}\|^2 \leq \frac{\gamma}{\alpha} (\bar{\omega}^2 + \sigma_s |\theta^*|^2) \right\}. \quad (17)$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι το σφάλμα αναγνώρισης  $e$  είναι ομοιόμορφα τελικώς φραγμένο ως προς το

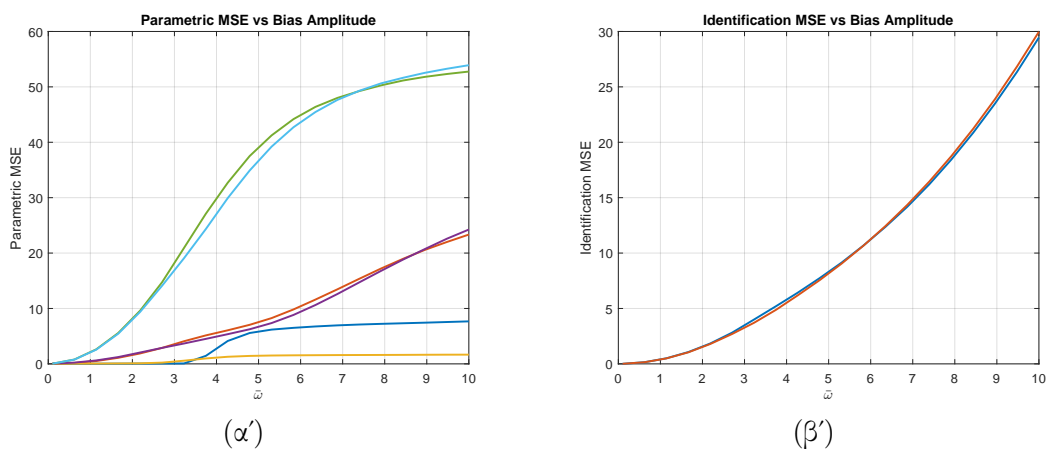
$$\Omega = \{e \in \mathbb{R} : |e|^2 \leq \bar{\omega}^2 + \sigma_s |\theta^*|^2\}. \quad (18)$$

Οι (17), (18) γενικεύονται και στην περίπτωση όπου το  $\theta^*$  είναι διάνυσμα. Από τις εξισώσεις αυτές παρατηρούμε ότι τα άνω φράγματα τόσο για το παραμετρικό σφάλμα όσο και για το σφάλμα αναγνώρισης αυξάνονται με το πλάτος του σφάλματος πόλωσης. Πράγματι, στο Σχήμα 6α' φαίνεται ότι το παραμετρικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα (Mean Squared Error – MSE) αυξάνεται καθώς αυξάνεται το  $\bar{\omega}$ . Αντίστοιχα, στο Σχήμα 6β', το μέσο τετραγωνικό σφάλμα αναγνώρισης αυξάνεται με την αύξηση του πλάτους του σφάλματος πόλωσης.

Οι σχεδιαστικές σταθερές  $M, \bar{\sigma}, \gamma > 0$  επιλέχθηκαν με τη μέθοδο trial and error. Ειδικότερα, το  $M$  επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιείται η απαίτηση  $|\theta_i^*| \leq M$ . Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του  $M$ , τόσο περισσότερο 'καθυστερεί' η ενεργοποίηση της  $\sigma$ -τροποποίησης, επιτρέποντας στο  $\hat{\theta}_i$  να φτάσει σε μεγαλύτερες τιμές πριν ενεργοποιηθεί ο μηχανισμός περιορισμού.

Ο συντελεστής  $\gamma$  ελέγχει την ταχύτητα σύγκλισης του  $\hat{x}_i(t)$  προς το  $x_i(t)$ . Αυξάνοντας την τιμή του  $\gamma$ , επιτυγχάνεται ταχύτερη σύγκλιση. Ωστόσο, πολύ μεγάλες τιμές καθιστούν το σύστημα 'άκαμπτο'. Επιπλέον, από τη σχέση (17) προκύπτει ότι η αύξηση του  $\gamma$  οδηγεί σε αύξηση του άνω φράγματος του παραμετρικού σφάλματος, επιτρέποντας στις εκτιμήσεις των παραμέτρων να αποκλίνουν περισσότερο από τις πραγματικές τιμές.

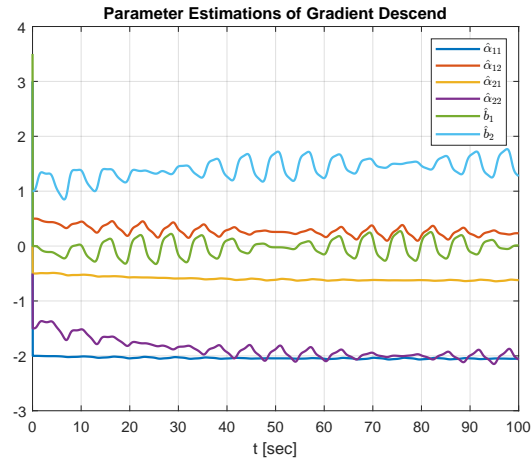
Τέλος, ο συντελεστής  $\bar{\sigma}$  καθορίζει το πόσο έντονα 'τραβάει' η μέθοδος τις εκτιμήσεις των παραμέτρων όταν αυτές απομακρύνονται από το κατώφλι  $M$ . Τελικά, επιλέγουμε  $M = 10$ ,  $\bar{\sigma} = 5$ ,  $\gamma = 10$ .



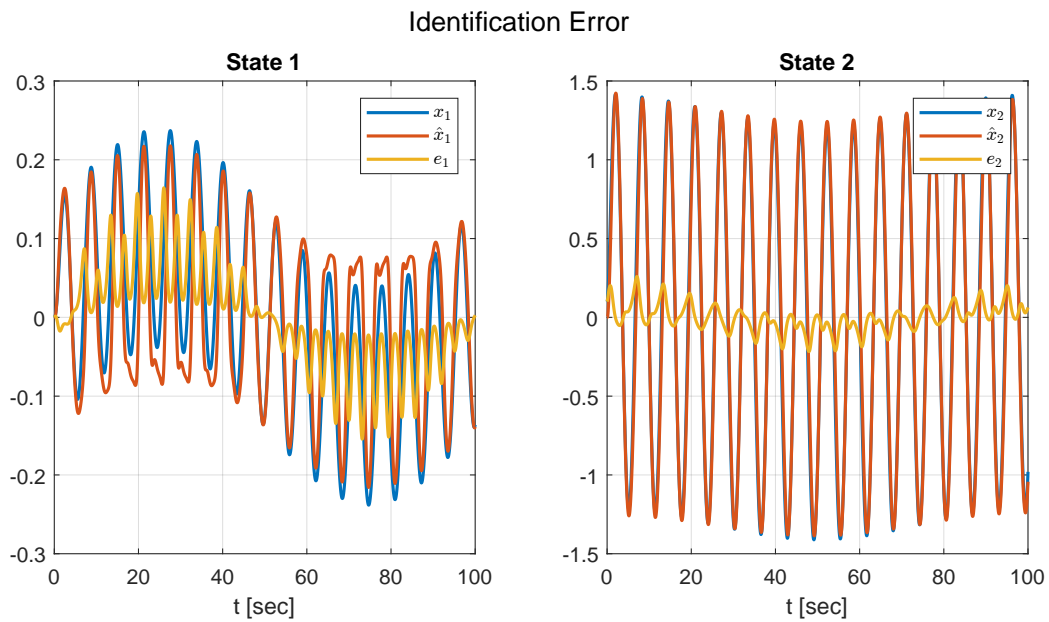
Σχήμα 6: Επίδραση του πλάτους του σφάλματος πόλωσης ως προς α) το παραμετρικό σφάλμα, β) το σφάλμα αναγνώρισης

Στο Σχήμα 7 παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων για την προαναφερθείσα επιλογή των σχεδιαστικών σταθερών. Παρατηρείται ότι οι εκτιμήσεις εμφανίζουν ταλαντώσεις πεπερασμένου πλάτους γύρω από τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων. Το φαινόμενο αυτό είναι σύμφωνο με τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη σχέση (17), σύμφωνα με την οποία το παραμετρικό σφάλμα παραμένει φραγμένο.

Τέλος, στο Σχήμα 8 απεικονίζεται το σφάλμα αναγνώρισης των δύο καταστάσεων του συστήματος. Και σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούνται ταλαντώσεις πεπερασμένου πλάτους, όπως σχολιάστηκε στη σχέση (18).



Σχήμα 7: Εκτιμήσεις παραμέτρων της μεθόδου κλίσης με διακοπτική σ-τροποποίηση



Σχήμα 8: Σφάλματα αναγνώρισης της μεθόδου κλίσης με διακοπτική σ-τροποποίηση

## Θέμα 2

Σε αυτό το μέρος καλούμαστε να μοντελοποιήσουμε και στη συνέχεια να αξιολογήσουμε ένα άγνωστο μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα της μορφής:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), \theta),$$

όπου  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μία άγνωστη μη-γραμμική συνάρτηση,  $x(t)$  η έξοδος του συστήματος και  $u(t)$  η είσοδος, οι οποίες θεωρούνται μετρήσιμες, και  $\theta = [\theta_1 \ \theta_2]^\top$  είναι ένα σταθερό διάνυσμα παραμέτρων με  $\theta_1, \theta_2 \in [0.5, 2]$ . Για την προσομοίωση της απόκρισης του πραγματικού συστήματος θεωρούμε ότι  $f(x, u, \theta) = -x^3 + \theta_1 \tanh(x) + \theta_2 \frac{1}{1+x^2} + u$  και επιλέγουμε  $\theta = [1.2, 0.8]^\top$ .

### Ερώτημα α)

#### Επιλογή δομής μοντέλου

Δεδομένου ότι δεν έχουμε καμία εκ των προτέρων πληροφορία για τη μορφή του υπό μελέτη συστήματος, η προσέγγιση που ακολουθούμε ανήκει στην κατηγορία ‘μαύρο κουτί’. Το πρώτο βήμα σε μια τέτοια προσέγγιση είναι η επιλογή της δομής του μοντέλου, δηλαδή της μαθηματικής του περιγραφής. Υποθέτουμε ότι το μοντέλο περιγράφεται από τη γραμμικά παραμετροποιήσιμη μορφή:

$$y = \theta^{*\top} \phi,$$

όπου:

$$\phi = [g_1(x) \ g_2(x) \ \cdots \ g_N(x)]^\top$$

είναι το διάνυσμα οπισθοδρόμησης,  $g_i(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$  οι συναρτήσεις βάσης, και  $\theta^* \in \mathbb{R}^N$  το διάνυσμα των συντελεστών. Οι συναρτήσεις βάσης που εξετάζονται είναι:

- **Πολυωνυμικές:**  $g_i(x) = x^i, i = 1, \dots, N$
- **Γκαουσιανού πυρήνα:**  $g_i(x) = e^{-(x-c_i)^2/(2w_i^2)}, \quad c_i \neq c_j, \quad i \neq j$
- **Ημιτονοειδείς:**  $g_i(x) = \sin(w_i t), \quad w_i \neq w_j, \quad i \neq j$

Ένα δεύτερο κρίσιμο ζήτημα, μετά την επιλογή της μορφής του μοντέλου, είναι ο προσδιορισμός της πολυπλοκότητας του, δηλαδή του πλήθους των παραμέτρων  $N$ , που ισοδυναμεί με τη διάσταση του διανύσματος  $\theta^*$ . Μία κοινή τεχνική επιλογής του πλήθους των παραμέτρων είναι η **προσθετική δόμηση**, η οποία ανήκει στις άμεσες τεχνικές επιλογής δομής. Σύμφωνα με αυτή τη μεθοδολογία, ξεκινάμε από ένα απλό μοντέλο και αυξάνουμε προοδευτικά την

πολυπλοκότητά του προσθέτοντας παραμέτρους. Ως κατάλληλο πλήθος παραμέτρων  $n^*$  επιλέγεται αυτό που ελαχιστοποιεί το σφάλμα μοντελοποίησης. Η επιλογή αυτή δεν είναι απαραίτητα η βέλτιστη συνολικά, αλλά είναι η βέλτιστη εντός της εξεταζόμενης οικογένειας μοντέλων.

Στο Σχήμα 9 παρουσιάζεται η εφαρμογή της προσθετικής δόμησης και για τις τρεις οικογένειες μοντέλων που προκύπτουν από τις υπό μελέτη συναρτήσεις βάσης. Ειδικότερα, το σύνολο των δεδομένων χωρίστηκε σε υποσύνολα εκπαίδευσης και ελέγχου. Σε κάθε επανάληψη, η εκτίμηση των παραμέτρων έγινε με βάση το σύνολο εκπαίδευσης, ενώ η αξιολόγηση του μοντέλου πραγματοποιήθηκε στο σύνολο ελέγχου.

Από το Σχήμα 9 προκύπτουν ορισμένα ιδιαίτερα χρήσιμα συμπεράσματα. Παρατηρούμε ότι, ανεξαρτήτως της επιλεγμένης δομής του μοντέλου, το σφάλμα εκπαίδευσης μειώνεται μονοτονικά καθώς αυξάνεται το πλήθος των παραμέτρων  $n$ . Ωστόσο, η ίδια συμπεριφορά δεν παρατηρείται στο σφάλμα ελέγχου.

Όταν το  $n$  είναι μικρό, το σφάλμα ελέγχου διατηρείται σε υψηλά επίπεδα, γεγονός που υποδηλώνει *υποεκμάθηση* (underfitting) – δηλαδή, το μοντέλο δεν είναι αρκετά ευέλικτο ώστε να συλλάβει τη δυναμική του συστήματος. Καθώς αυξάνεται το  $n$ , το μοντέλο προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα και το σφάλμα ελέγχου μειώνεται.

Ωστόσο, πέρα από μια συγκεκριμένη τιμή του  $n$ , η περαιτέρω αύξηση των παραμέτρων οδηγεί σε μείωση της απόδοσης στο σύνολο ελέγχου. Το σφάλμα αρχίζει να αυξάνεται ξανά, και για πολύ μεγάλες τιμές του  $n$  γίνεται ιδιαίτερα υψηλό. Αυτό είναι ένδειξη *υπερεκμάθησης* (overfitting) – το μοντέλο απομνημονεύει τα δεδομένα εκπαίδευσης, αλλά αποτυγχάνει να γενικεύσει σε νέα δεδομένα.

Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνει την ανάγκη ύπαρξης ενός κατάλληλου συμβιβασμού μεταξύ πολυπλοκότητας μοντέλου και ικανότητας γενίκευσης, γεγονός που καθιστά την επιλογή του κατάλληλου πλήθους παραμέτρων  $n$  κομβικής σημασίας.

Τονίζουμε ότι το σφάλμα μοντελοποίησης εκτιμάται αποκλειστικά με βάση τα δεδομένα ελέγχου και όχι τα δεδομένα εκπαίδευσης. Εάν δεν είχαμε προβεί σε αυτόν τον διαχωρισμό, θα οδηγούμασταν στην εσφαλμένη εντύπωση ότι η συνεχής μείωση του σφάλματος με την αύξηση του πλήθους των παραμέτρων  $n$  αντανάκλα βελτίωση της ικανότητας μοντελοποίησης. Στην πραγματικότητα, η μείωση αυτή αφορά το *σφάλμα πόλωσης*, δηλαδή τη μεροληψία που προκύπτει λόγω ανεπαρκούς ή ακατάλληλης επιλογής δομής μοντέλου. Η χρήση μόνο των δεδομένων εκπαίδευσης μπορεί να αποκρύψει το φαινόμενο της υπερεκμάθησης και να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα ως προς την αποδοτικότητα του μοντέλου.

Συνοψίζοντας, το βέλτιστο πλήθος παραμέτρων που προκύπτει από το γράφημα είναι  $n^* = 2, 3, 3$  για τις οικογένειες πολυωνυμικών, ημιτονοειδών και γκα-



Σχήμα 9: Σφάλμα μοντελοποίησης συναρτήσεων του πλήθους των παραμέτρων του μοντέλου

ουσιανών συναρτήσεων βάσης αντίστοιχα.

## Αξιολόγηση μοντέλου

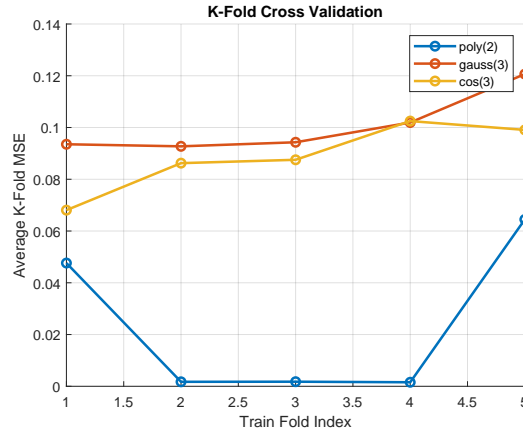
Έχοντας επιλέξει τη δομή και την πολυπλοκότητα των τριών υποψήφιων μοντέλων, προχωράμε στην αξιολόγησή τους, δηλαδή στον έλεγχο του κατά πόσο περιγράφουν επαρκώς τη συμπεριφορά του πραγματικού συστήματος. Από την προηγούμενη ανάλυση έχει καταστεί σαφές ότι η ποιότητα ενός μοντέλου εκτιμάται με ακρίβεια μόνο όταν αξιολογείται σε δεδομένα που δεν χρησιμοποιήθηκαν κατά τη φάση της εκπαίδευσης.

Ένας συνήθης και ιδιαίτερα χρήσιμος τρόπος αξιολόγησης – ιδίως όταν το πλήθος των διαθέσιμων δεδομένων είναι περιορισμένο – είναι η διαδικασία της εγκάρσιας αξιολόγησης (cross validation).

Η εγκάρσια αξιολόγηση λειτουργεί με το να χωρίζει τα δεδομένα σε  $K$  ίσα υποσύνολα (“folds”). Το μοντέλο εκπαιδεύεται κάθε φορά σε  $K - 1$  υποσύνολα και αξιολογείται στο εναπομείναν, με τη διαδικασία να επαναλαμβάνεται ώστε κάθε υποσύνολο να λειτουργήσει μία φορά ως σύνολο ελέγχου. Ο μέσος όρος του σφάλματος σε όλα τα folds αποτελεί την τελική εκτίμηση της γενικευτικής ικανότητας του μοντέλου.

Για την εκπαίδευση των μοντέλων χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος κλίσης με διακοπτική σ-τροποποίηση, όπως δίνεται στη σχέση (16), καθώς εξετάζουμε τη μη ιδανική περίπτωση όπου η παρουσία σφάλματος πόλωσης είναι αναπόφευκτη.

Εφόσον για την εκτίμηση των παραμέτρων χρησιμοποιείται αλγόριθμος πραγματικού χρόνου, η χρονική αλληλουχία των δεδομένων έχει σημασία. Όταν το fold αξιολόγησης είναι ενδιάμεσο, τα δεδομένα εκπαίδευσης διασπώνται, δημιουργώντας μία ασυνέχεια που δεν είναι αντιπροσωπευτική του πραγματικού



Σχήμα 10: Εγκάρσια αξιολόγηση πολυωνυμικού μοντέλου δεύτερης τάξης και μοντέλου συναρτήσεων βάσης γκαουσιανού πυρήνα τρίτης τάξης

συστήματος. Συνεπώς, υιοθετούμε μία παραλλαγή της τυπικής εγκάρσιας αξιολόγησης, στην οποία τα δεδομένα εισόδου-εξόδου κάθε fold είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και προέρχονται από διαφορετικά σήματα εισόδου. Σε κάθε επανάληψη, επιλέγεται ένα fold για την εκπαίδευση του μοντέλου, ενώ σε καθένα από τα υπόλοιπα  $K - 1$  folds υπολογίζεται το MSE. Το σφάλμα της επανάληψης αυτής υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των MSE στα υπόλοιπα  $K - 1$  folds.

Η υλοποίηση των παραπάνω παρουσιάζεται στο Σχήμα 10, για τα μοντέλα που επέδειξαν την καλύτερη γενίκευση σε νέα δεδομένα κατά το στάδιο επιλογής δομής μοντέλου, δηλαδή το πολυωνυμικό μοντέλο δεύτερης τάξης, το μοντέλο βάσεων γκαουσιανού πυρήνα τρίτης τάξης και το μοντέλο ημιτονοειδών συναρτήσεων βάσης τρίτης τάξης. Παρατηρούμε ότι ανεξαρτήτως του fold που επιλέγεται για εκπαίδευση, το πολυωνυμικό μοντέλο υπερτερεί των άλλων δύο. Συνεπώς, είναι ασφαλές να συμπεράνουμε ότι το πολυωνυμικό μοντέλο δεύτερης τάξης είναι καταλληλότερο. Οι εισοδοί που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε fold είναι:  $\sin(2\pi t)$ ,  $1$ ,  $\sin(2\pi t + \sin(0.5\pi t))$ ,  $e^{-t} \sin(2\pi t)$ ,  $1 + e^{-t}$ .

## Ερώτημα β)

### Εύρεση τελικής μορφής μοντέλου

Έχοντας καταλήξει στη δομή του μοντέλου, δηλαδή στο πολυωνυμικό μοντέλο δεύτερης τάξης, στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε το διάνυσμα παραμέτρων  $\hat{\theta}$ , έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό σφάλμα μοντελοποίησης  $\int_0^t e^2(\tau) d\tau$ . Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία όπως και κατά την επιλογή της δομής του μοντέλου, διαχωρίζουμε τα δεδομένα σε σύνολα εκπαίδευσης και ελέγχου. Το σφάλμα μοντελοποίησης, όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, υπολογίζεται με βάση τα



δεδομένα ελέγχου. Επιπλέον, θεωρούμε ότι τα δεδομένα ελέγχου προέρχονται από διαφορετικό σήμα εισόδου σε σχέση με εκείνο των δεδομένων εκπαίδευσης.

Ουσιαστικά, καλούμαστε να πραγματοποιήσουμε fine-tuning τόσο στο σήμα εισόδου των δεδομένων εκπαίδευσης όσο και στις παραμέτρους του αλγορίθμου εκτίμησης παραμέτρων σε πραγματικό χρόνο, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα μοντελοποίησης στα δεδομένα ελέγχου.

Οι είσοδοι που επιλέγουμε για την παραγωγή των δεδομένων εκπαίδευσης είναι της μορφής:

$$u(t) = \sum_{k=1}^K \sin(2\pi kt)$$

ενώ για τα δεδομένα ελέγχου χρησιμοποιούνται οι ίδιες είσοδοι που εφαρμόστηκαν κατά την εγκάρσια αξιολόγηση του μοντέλου. Στο Σχήμα 11 απεικονίζεται το αθροιστικό σφάλμα μοντελοποίησης στα δεδομένα ελέγχου, συναρτήσει του πλήθους των συχνοτήτων στο σήμα εισόδου των δεδομένων εκπαίδευσης.

Παρατηρούμε ότι για όλα τα σύνολα δεδομένων ελέγχου, το σφάλμα μοντελοποίησης μειώνεται όσο αυξάνεται ο αριθμός των συχνοτήτων στο σήμα εισόδου των δεδομένων εκπαίδευσης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι διεγείρονται περισσότεροι ρυθμοί του πραγματικού συστήματος, με αποτέλεσμα η δυναμική του να απεικονίζεται πληρέστερα και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων του επιλεγμένου μοντέλου να είναι ακριβέστερες.

Το τελικό μοντέλο που προκύπτει, όταν το σήμα εισόδου των δεδομένων εκπαίδευσης περιλαμβάνει δέκα συχνότητες, είναι:

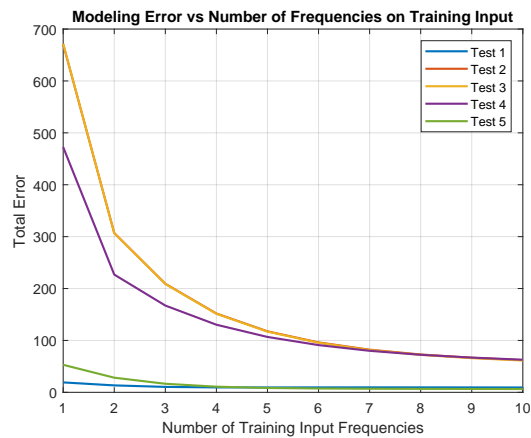
$$\dot{x}(t) = 0.3818x^2(t) + 0.2965x(t) + 0.2361 + 0.0083u(t) \quad (19)$$

Για την περαιτέρω μείωση του συνολικού σφάλματος μοντελοποίησης, πραγματοποιήσαμε fine-tuning στις υπερπαραμέτρους  $M$ ,  $\bar{\sigma}$ ,  $\gamma$  της μεθόδου κλίσης με διακοπτική  $\sigma$ -τροποποίηση, η οποία χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση των παραμέτρων. Οι τιμές των υπερπαραμέτρων που οδήγησαν στα καλύτερα αποτελέσματα είναι:  $\gamma = 1$ ,  $M = 5$ ,  $\bar{\sigma} = 0.001$ .

## Σταθερότητα Μοντέλου

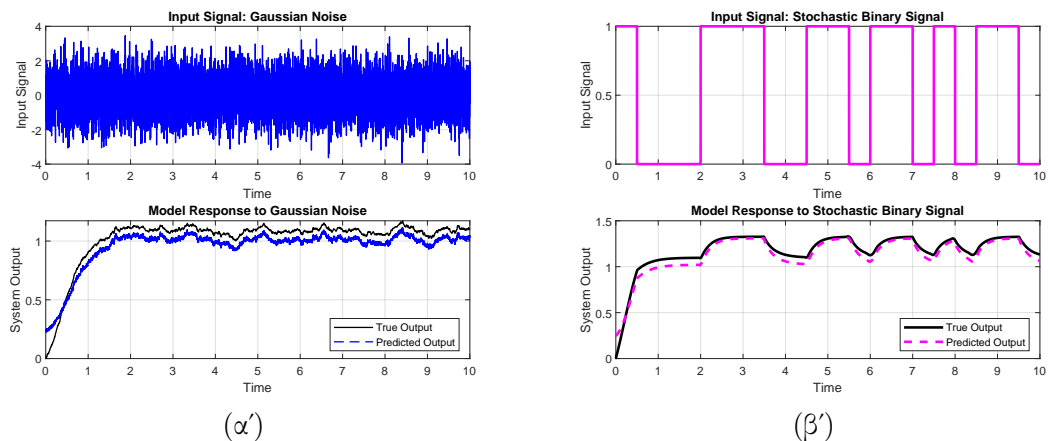
Μέχρι στιγμής, τα σήματα εισόδου που χρησιμοποιήθηκαν τόσο για την εκπαίδευση όσο και για την αξιολόγηση του μοντέλου ήταν φραγμένα και ντετερμινιστικά. Στη συνέχεια εξετάζουμε κατά πόσο το μοντέλο της σχέσης (19) μπορεί να γενικεύσει την απόκρισή του και σε περιπτώσεις όπου η είσοδος είναι στοχαστικής φύσης.

Στο Σχήμα 12α' παρουσιάζεται η έξοδος του μοντέλου όταν το σήμα εισόδου είναι γκαουσιανός θόρυβος, ενώ στο Σχήμα 12β' απεικονίζεται η απόκριση για



Σχήμα 11: Αθροιστικό σφάλμα μοντελοποίησης στα δεδομένα ελέγχου συναρτήσεων του πλήθους των συχνοτήτων στο σήμα εισόδου των δεδομένων εκπαίδευσης

ένα στοχαστικό δυαδικό σήμα εισόδου. Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις το μοντέλο προσεγγίζει ικανοποιητικά την έξοδο του πραγματικού συστήματος, γεγονός που υποδεικνύει πως διατηρεί τη λειτουργικότητά του και υπό μη ντετερμινιστικές διεγέρσεις. Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι το μοντέλο επιδεικνύει ικανοποιητική σταθερότητα ως προς μεταβολές στη στατιστική φύση του σήματος εισόδου.



Σχήμα 12: Εκτιμήσεις εξόδου τελικού μοντέλου για είσοδο α) γκαουσιανού θορύβου, β) στοχαστικό δυαδικό σήμα