Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Τελική Εργασία

Έυρωστες Μέθοδοι Πραγματικού Χρόνου - Μέθοδοι Προβολής
Επιλογή Δομής και Αξιολόγηση Μοντέλου

23 Μαΐου 2025

Θέμα 1 (5 μονάδες)

Θεωρήστε το γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

όπου $x(t) \in \mathbb{R}^2$ η κατάσταση του συστήματος, $u(t) \in \mathbb{R}$ η είσοδος, και $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right)$ σταθεροί αλλά άγνωστοι πίνακες. Για τα στοιχεία των A και B επίσης γνωρίζουμε ότι $-3 \leq a_{11} \leq -1$ και $b_2 \geq 1$. Για τα πειράματα θεωρήστε ότι οι καταστάσεις του συστήματος και η είσοδος είναι μετρήσιμα, και επίσης ότι $A = \left(\begin{smallmatrix} -2.15 & 0.25 \\ -0.75 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ και $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1.5 \end{smallmatrix}\right)$.

α) Να σχεδιάστε αλγόριθμο πραγματικού χρόνου για την εκτίμηση $\hat{A}$, $\hat{B}$ των άγνωστων πινάκων A και B, με είσοδο $u(t)$ δική σας επιλογής. Να μελετήσετε την ευστάθεια του συστήματος εκτίμησης που σχεδιάσατε. Να δημιουργήστε τις γραφικές παραστάσεις των $x(t)$, $\hat{x}(t)$ και της διαφοράς $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, καθώς και των εκτιμήσεων $\hat{A}(t)$, $\hat{B}(t)$ των A και B, αντίστοιχα. Να σχολιάστε τα αποτελέσματα.

β) Να εισάγετε στο σύστημα σφάλμα πόλωσης $\omega \in \mathbb{R}^2$ που να ικανοποιεί $||\omega(t)|| \leq \bar{\omega}$, $\forall t \geq 0$, για κάποια άγνωστη σταθερά $\bar{\omega} > 0$. Να προτείνετε έναν κατάλληλο τρόπο μοντελοποίησης του ω, και να σχεδιάστε αλγόριθμο πραγματικού χρόνου για την εκτίμηση $\hat{A}(t)$, $\hat{B}(t)$ των άγνωστων πινάκων A, B με είσοδο $u(t)$ δική σας επιλογής. Να δημιουργήστε τις γραφικές παραστάσεις των $x(t)$, $\hat{x}(t)$ και της διαφοράς $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, καθώς και των εκτιμήσεων $\hat{A}(t)$, $\hat{B}(t)$ των A και B, αντίστοιχα. Να μελετήσετε την επίδραση της μεταβολής του $\bar{\omega}$ στην ακρίβεια των εκτιμήσεων. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

Θέμα 2 (5 μονάδες)

Σκοπός του θέματος είναι η μελέτη της διαδικασίας επιλογής και αξιολόγησης μοντέλου για την προσέγγιση αγνώστου μη-γραμμικού δυναμικού συστήματος της μορφής:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \theta), \tag{2}$$

όπου $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια άγνωστη μη-γραμμική συνάρτηση, $x(t)$ είναι η έξοδος του συστήματος και $u(t)$ η είσοδος, οι οποίες θεωρούνται μετρήσιμες, και $\theta = [\theta_1, \theta_2]^\top$ είναι σταθερό διάνυσμα παραμέτρων. Να θεωρήσετε ότι $f(x, u, \theta) = -x^3 + \theta_1 \tanh(x) + \theta_2 \frac{1}{1+x^2} + u$, με δικές σας επιλογές των $\theta_1, \theta_2 \in [0.5, 2]$ και $u(t)$.

α) Να σχεδιάσετε μία διαδικασία επιλογής δομής μοντέλου για την προσέγγιση του άγνωστου συστήματος χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης της επιλογής σας (π.χ. πολυωνυμικές, γκαουσιανές, κλπ), και να εφαρμόσετε μία κατάλληλη μέθοδο εκτίμησης παραμέτρων πραγματικού χρόνου. Στη συνέχεια, να εφαρμόσετε τη μέθοδο εγκάρσιας αξιολόγησης για τη σύγκριση των διαφορετικών υποψήφιων δομών μοντέλων. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

β) Να καταλήξετε στην τελική μορφή μοντέλου που να επιτυγχάνει την ελαχιστοποίηση του συνολικού σφάλματος μοντελοποίησης $\int_0^t e^2(\tau)d\tau$ και πολυπλοκότητας του μοντέλου ως προς την διάσταση των διανυσμάτων παραμέτρων $\hat{\theta}$ και συναρτήσεων βάσης ϕ. Να αξιολογήσετε τη σταθερότητα του τελικού μοντέλου με χρήση διαφορετικών συνόλων δεδομένων ελέγχου από αυτά του ερωτήματος (α). Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

Σημειώσεις

- Να παραδώσετε: (i) αναφορά (pdf) στην οποία θα καταγράψετε όλα τα αποτελέσματα συνοδευόμενα από τις όποιες παρατηρήσεις/συμπεράσματα, (ii) όλους του κώδικες (m-files) που αναπτύξατε.
- Να ανεβάσετε στο elearning ένα συμπιεσμένο αρχείο με ονομασία: 'Lastname_Firstname_AEM_project'.
- Προθεσμία υποβολής: έως και Παρασκευή 04/07/25.