



Софийски университет "Св. Климент Охридски"  
Факултет по математика и информатика

# КУРСОВА РАБОТА

по

Небесна механика

Избираема дисциплина, летен семестър,

учебна година 2020/2021

10.06.2021 г.

гр. София

Изготвил: Георги Събев

Спец. „Софтуерно инженерство“

Ф. No. 62380

Група 3.

## ***Съдържание:***

Съдържание.....	2
Задача 1. Координати и скорости на планетите в деня на раждане.....	3
Задача 2. Елементи на Поанкаре от 1. и 2. вид и елементи на Делоне в деня на раждане .....	6
Приложение 1. Код на Задача 1.....	8
Приложение 2. Код на Задача 2.....	9

**Задача 1.** Да се пресметнат координатите и скоростите на планетите в деня на раждане.

Тук от нас се изисква да решим Задача на Кеплер.

В тази задача орбитата на дадена планета зависи от следните шест елемента:

- $a$  – дължина на голямата полу-ос на орбитата;
- $e$  – ексцентрицитетът на орбитата;
- $i$  – наклонеността на плоскостта на орбитата;
- $l$  – средна аномалия, където  $l_0$  е средната аномалия в момента  $t_0$ ;
- $g + \theta$  – дължина на перихелия;
- $\theta$  – дължина на възела.

Всички от посочените елементи освен средната аномалия  $l$  са константи.

Средната аномалия  $l$  е линейна функция на времето  $t$ .

Допълнителен елемент е ексцентричната аномалия  $u$ .

В сила е уравнението на Кеплер:

$$l = u - e * \sin(u)$$

Ексцентрицитетът  $e$  характеризира сплеснатостта на елипсата:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in [0,1), b - \text{дължина на малката полу-ос}$$

Връзката на елиптичните елементи с декартовите координати в  $R^3$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos g & -\sin g & 0 \\ \sin g & \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Кеплерови елементи и техните стойности:

Keplerian elements and their rates, with respect to the mean ecliptic and equinox of J2000, valid for the time-interval 1800 AD - 2050 AD.						
	$a$ [au, au/cty]	$e$ [ , /cty]	$I$ [deg, deg/cty]	$L$ [deg, deg/cty]	$\varpi$ [deg, deg/cty]	$\Omega$ [deg, deg/cty]
Mercury	0.38709927 0.00000037	0.20563593 0.00001906	7.00497902 -0.00594749	252.25032350 149472.67411175	77.45779628 0.16047689	48.33076593 -0.12534081
Venus	0.72333566 0.00000390	0.00677672 -0.00004107	3.39467605 -0.00078890	181.97909950 58517.81538729	131.60246718 0.00268329	76.67984255 -0.27769418
EM Bary	1.00000261 0.00000562	0.01671123 -0.00004392	-0.00001531 -0.01294668	100.46457166 35999.37244981	102.93768193 0.32327364	0.0 0.0
Mars	1.52371034 0.00001847	0.09339410 0.00007882	1.84969142 -0.00813131	-4.55343205 19140.30268499	-23.94362959 0.44441088	49.55953891 -0.29257343
Jupiter	5.20288700 -0.00011607	0.04838624 -0.00013253	1.30439695 -0.00183714	34.39644051 3034.74612775	14.72847983 0.21252668	100.47390909 0.20469106
Saturn	9.53667594 -0.00125060	0.05386179 -0.00050991	2.48599187 0.00193609	49.95424423 1222.49362201	92.59887831 -0.41897216	113.66242448 -0.28867794
Uranus	19.18916464 -0.00196176	0.04725744 -0.00004397	0.77263783 -0.00242939	313.23810451 428.48202785	170.95427630 0.40805281	74.01692503 0.04240589
Neptune	30.06992276 0.00026291	0.00859048 0.00005105	1.77004347 0.00035372	-55.12002969 218.45945325	44.96476227 -0.32241464	131.78422574 -0.00508664
Pluto	39.48211675 -0.00031596	0.24882730 0.00005170	17.14001206 0.00004818	238.92903833 145.20780515	224.06891629 -0.04062942	110.30393684 -0.01183482

Източник на таблицата: [https://ssd.jpl.nasa.gov/txt/aprx\\_pos\\_planets.pdf](https://ssd.jpl.nasa.gov/txt/aprx_pos_planets.pdf)

Обръщаме  $\theta$  и  $g + \theta$  в радиани.

Обръщаме  $i$  в градуси.

Стойностите на  $\mu$  за планетите са:

Планета	$\mu$
Меркурий	1/6023600
Венера	1/408523
Земя	1/328900.5
Марс	1/3098708
Юпитер	1/1047.34
Сатурн	1/3497.8
Уран	1/22902.9
Нептун	1/19402
Плутон	1/135000000

$\gamma = 1 + \mu$ , където  $\gamma = Gm_A = 6.670 * 10^{-8} \frac{sm^3}{g * sec^2}$  е гравитационна константа.

$$n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}$$

Величината  $n$  наричаме средно движение.

Връзката между средната и ексцентрична аномалия наричаме Уравнение на Кеплер, което показваме и по-горе.

Въвеждаме времето от рождената дата след 01.01.2000г. –  $t$ .

**Рождена дата: 18.07.2000 г.**

$$t = \frac{200}{365.25} = 0.54757015742$$

От решението на задачата на Кеплер в декартови координати:

$$l = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}} (t - T_0) \Rightarrow l = n(t(2\pi) - T_0) = u - e \cdot \sin(u)$$

$$u = l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l)))$$

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \cdot a \cdot (\cos(u) - e; \sin(u); \sqrt{1 - e^2}; 0)$$

$$v = Q \frac{(-\sin(u); \cos(u)\sqrt{1 - e^2}; 0) \cdot a \cdot n}{1 - e \cdot \cos(u)}$$

където  $Q$  е от Основна формула на сферичната тригонометрия.

[Теорема] Всяка матрица  $Q \in SO(3, R)$  може да се представи аналитично във вида:

$$Q = \overbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{Ротация на ъгъл } \theta \text{ около оста } Oz} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}}^{\text{Ротация на ъгъл } i \text{ около оста } Ox} \overbrace{\begin{pmatrix} \cos g & -\sin g & 0 \\ \sin g & \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{Ротация на ъгъл } g \text{ около оста } Oz} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos g - \sin \theta \sin g \cos i & -\cos \theta \sin g - \sin \theta \cos g \cos i & \sin \theta \sin i \\ \sin \theta \cos g + \cos \theta \sin g \cos i & -\sin \theta \sin g + \cos \theta \cos g \cos i & -\cos \theta \sin i \\ \sin g \sin i & \cos g \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$

където  $\theta, g \in [0, 2\pi)$  и  $i \in [0, \pi]$

Описаните процедури се повтарят за всяка планета поотделно.

### Краен резултат:

	Меркурий	Венера	Земя	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
$r$	0.33493	-0.57111	0.46315	-0.51236	2.9101	5.5064	14.9441	17.3441	-9.34507
	-0.20979	0.43464	-0.90373	1.5268	4.0714	7.2828	-13.1959	-24.6102	-28.2663
	-0.047872	0.038898	0	0.04456	-0.081985	-0.34573	-0.242547	0.107092	5.72782
$v$	0.54803	-0.7161	0.87446	-0.7406	-0.36253	-0.27565	0.14957	0.14798	0.17719
	1.4611	-0.94123	0.45256	-0.19007	0.27582	0.19499	0.16071	0.10603	-0.08649
	0.069048	0.028465	0	0.014216	0.0069735	0.0075609	-0.001341	-0.005593	-0.04199
$ r $	0.3981	0.71874	1.0155	1.6111	5.0052	9.1367	19.9378	30.108	30.317
$ v $	1.562	1.183	0.98462	0.76473	0.45558	0.33773	0.21955	0.18213	0.2016

**Задача 2.** Пресметнете елементите на Поанкаре от 1. и 2. вид и елементите на Делоне в деня на раждане.

Елементите на Делоне -  $L, G, \Theta, l, g, \theta$ , където  $(l, L), (G, g)$  и  $(\Theta, \theta)$  са спрегнати канонични променливи, се изразяват чрез орбиталните елементи:

- $a$  – дължина на голямата полу-ос на орбитата;
- $e$  – ексцентрицитета на орбитата;
- $i$  – наклонеността на плоскостта на орбитата;
- $l$  – средна аномалия, където  $l_0$  е средната аномалия в момента  $t_0$ ;
- $g + \theta$  – дължина на перихелия;
- $\theta$  – дължина на възела.

Както следва:

$$L = \mu\sqrt{\gamma a}$$

$$G = \mu\sqrt{\gamma a(1 - e^2)} \Rightarrow G = L\sqrt{1 - e^2}$$

$$\Theta = \mu\sqrt{\gamma a(1 - e^2)} \cos i \Rightarrow \Theta = G \cdot \cos i$$

Като при това  $l, g$  и  $\theta$  съвпадат и в двата случая.

Елементите на Делоне -  $L, G, \Theta, l, g, \theta$  са константи с хамилтони:

$$\hat{H} = -\frac{\mu^3 \gamma^2}{2L^2} = -\frac{\mu^3 \gamma^2}{2\mu^2 \gamma a} = -\frac{\mu \gamma}{2a}$$

Обръщаме  $\theta$  в радиани. Обръщаме  $i$  в градуси.

$T_0$  е моментът на преминаване през перихелия на планета (начало на епоха).

$$l = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}} (t - T_0)$$

$$l = u - e \cdot \sin u - \text{Уравнение на Кеплер} \Rightarrow u = l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l)))$$

$$n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}$$

Взимаме  $t = 0.54757015742$  от предната задача и правим  $t = t \cdot 2\pi = 3.44048476775$ .

$$l = n(t - T_0)$$

Чрез  $\lambda = l + g + \theta$  (дължина на епохата) ще можем да изразим елементите от двете системи на Поанкаре:

Първа система:

$$\begin{pmatrix} L & L - G & G - \Theta \\ l + g + \theta & -g - \theta & -\theta \end{pmatrix}$$

Втора система:

$$\begin{pmatrix} L & \xi := \sqrt{2(L - G)} \cos(g + \theta) & p := \sqrt{2(G - \Theta)} \cos \theta \\ \lambda := l + g + \theta & \eta := -\sqrt{2(L - G)} \sin(g + \theta) & q := -\sqrt{2(G - \Theta)} \sin \theta \end{pmatrix}$$

**Елементи на Делоне:**

	$L$	$G$	$\Theta$	$l$	$g$	$\theta$	$H$
Меркурий	1.0328e-07	1.0108e-07	1.0033e-07	17.3414	0.5084	0.8435	-2.1449e-07
Венера	2.0814e-06	2.0814e-06	2.0777e-06	6.4757	0.9586	1.3383	-1.6928e-06
Земя	3.0404e-06	3.0400e-06	3.0400e-06	3.3973	1.7966	0	-1.5202e-06
Марс	3.9826e-07	3.9654e-07	3.9633e-07	2.1689	-1.2829	0.8650	-1.0595e-07
Юпитер	0.0022	0.0022	0.0022	0.6332	-1.4965	1.7536	-9.1860e-05
Сатурн	8.8298e-04	8.8174e-04	8.8091e-04	-0.6274	-0.3676	1.9838	-1.4995e-05
Уран	1.9127e-04	1.9106e-04	1.9104e-04	2.5243	1.6919	1.2918	-1.1377e-06
Нептун	2.8263e-04	2.8262e-04	2.8249e-04	-1.7259	-1.5153	2.3001	-8.5709e-07
Плутон	4.6544e-08	4.5090e-08	4.3088e-08	0.2732	1.9856	1.9252	-9.3807e-11

**Първа система на Поанкаре:**

	$L$	$L - G$	$G - \Theta$	$l + g + \theta$	$-g - \theta$	$-\theta$
Меркурий	1.0328e-07	2.1934e-09	7.5431e-10	18.6933	-1.3519	-0.8435
Венера	2.0814e-06	3.7465e-11	3.6506e-09	8.7726	-2.2969	-1.3383
Земя	3.0404e-06	3.8920e-10	0	5.1939	-1.7966	0
Марс	3.9826e-07	1.7260e-09	2.0646e-10	1.7510	0.4179	-0.8650
Юпитер	0.0022	2.5114e-06	5.6359e-07	0.8903	-0.2571	-1.7536
Сатурн	8.8298e-04	1.2410e-06	8.2918e-07	0.9887	-1.6161	-1.9838
Уран	1.9127e-04	2.1137e-07	1.7343e-08	5.5080	-2.9837	-1.2918
Нептун	2.8263e-04	9.0444e-09	1.3485e-07	-0.9412	-0.7848	-2.3001
Плутон	4.6544e-08	1.4540e-09	2.0026e-09	4.1840	-3.9107	-1.9252

**Втора система на Поанкаре:**

	$L$	$\xi$	$p$	$\lambda$	$\eta$	$q$
Меркурий	1.0328e-07	1.4384e-05	2.5823e-05	18.6933	-6.4652e-05	-2.9014e-05
Венера	2.0814e-06	-5.7473e-06	1.9688e-05	8.7726	-6.4729e-06	-8.3148e-05
Земя	3.0404e-06	-6.2462e-06	0	5.1939	-2.7192e-05	0
Марс	3.9826e-07	5.3698e-05	1.3181e-05	1.7510	2.3844e-05	-1.5466e-05
Юпитер	0.0022	0.0022	-1.9299e-04	0.8903	-5.6977e-04	-0.0010
Сатурн	8.8298e-04	-7.1412e-05	-5.1684e-04	0.9887	-0.0016	-0.0012
Уран	1.9127e-04	-6.4210e-04	5.1285e-05	5.5080	-1.0223e-04	-1.7904e-04
Нептун	2.8263e-04	9.5162e-05	-3.4604e-04	-0.9412	-9.5042e-05	-3.8724e-04
Плутон	4.6544e-08	-3.8747e-05	-2.1959e-05	4.1840	3.7507e-05	-5.9354e-05

## Приложение 1. MatLab код на първа задача

```
function task1

function kepler_elements(a, e, i, L, w, omega, mu, t)

    theta = omega * pi/180;
    g = (w - omega) * pi/180;
    i = i * pi/180;

    Theta = [ cos(theta) , -sin(theta) , 0 ;
              sin(theta) ,  cos(theta) , 0 ;
              0          ,  0          , 1 ];

    I = [ 1 , 0 , 0 ;
          0 , cos(i) , -sin(i) ;
          0 , sin(i) ,  cos(i) ];

    G = [ cos(g) , -sin(g) , 0 ;
          sin(g) ,  cos(g) , 0 ;
          0 , 0 , 1 ];

    Q = Theta*I*G;

    gamma = 1 + mu;
    n = sqrt(gamma/a^3);
    to = ((w - L)/n)*pi/180;
    l = n*(t^2*pi - to);
    u = 1 + e*sin(l + e*sin(l + e*sin(l)));

    r = Q*a*[cos(u)-e ; sin(u)*sqrt(1-e^2) ; 0 ];
    v = Q*[-sin(u);cos(u)*sqrt(1-e^2);0]*a*n/(1-e*cos(u));

    disp('Coordinates (r)')
    disp(num2str(r))
    disp(['|r| = ', num2str(norm(r))])

    disp('Speed (v)')
    disp(num2str(v))
    disp(['|v| = ', num2str(norm(v))])

end

function calculations(data)

    time = 0.54757015742;

    kepler_elements(data(1), data(2), data(3), data(4), data(5), data(6), data(7), time)

end

d = [0.387 0.205 7.004 252.250 77.457 48.330 1/6023600;
     0.723 0.006 3.394 181.979 131.602 76.679 1/408523;
     1 0.016 0 100.464 102.937 0 1/328900.5;
     1.523 0.093 1.849 -4.553 -23.943 49.559 1/3098708;
     5.202 0.048 1.304 34.396 14.728 100.473 1/1047.34;
     9.536 0.053 2.485 49.954 92.598 113.662 1/3497.8;
     19.189 0.047 0.772 313.238 170.954 74.016 1/22902.9;
     30.069 0.008 1.770 -55.120 44.964 131.784 1/19402;
     39.482 0.248 17.140 238.929 224.068 110.303 1/135000000];

planets = {'Mercury', 'Venus', 'Earth', 'Mars', 'Jupiter', 'Saturn', 'Uranus', 'Neptune', 'Pluto'};

for i = 1:9
    disp(char(planets(i)))
    calculations(d(i,:))
end

end
```



## Приложение 2. MatLab код на втора задача

```
function task2

function calculate_elements(a, e, i, L, w, Omega, myu, t)

    i = i * pi/180;
    n = sqrt(1 / a^3);
    to = (w - L) / n * pi/180;
    gamma = 1 + myu;

    capL = myu * sqrt(gamma*a);
    G = capL * sqrt(1 - e^2);
    cTheta = G * cos(i);
    l = n * (t^2*pi - to);
    g = (w - Omega) * pi/180;
    sTheta = Omega * pi/180;
    H = -myu*gamma / (2*a);

    Delone = {capL, G, cTheta, l, g, sTheta, H}

    FirstPoincare = {capL, capL - G, G - cTheta, l + g + sTheta, -g - sTheta, -sTheta}

    SecondPoincare = {capL, sqrt(2 * (capL - G)) * cos(g + sTheta), sqrt(2 * (G - cTheta)) * cos(sTheta), ...
        l + g + sTheta, -sqrt(2 * (capL - G)) * sin(g + sTheta), -sqrt(2 * (G - cTheta)) * sin(sTheta)}

end

d = [0.387  0.205 7.004 252.250 77.457 48.330 1/6023600;
    0.723  0.006 3.394 181.979 131.602 76.679 1/408523;
    1      0.016 0      100.464 102.937 0      1/328900.5;
    1.523  0.093 1.849 -4.553 -23.943 49.559 1/3098708;
    5.202  0.048 1.304 34.396 14.728 100.473 1/1047.34;
    9.536  0.053 2.485 49.954 92.598 113.662 1/3497.8;
    19.189 0.047 0.772 313.238 170.954 74.016 1/22902.9;
    30.069 0.008 1.770 -55.120 44.964 131.784 1/19402;
    39.482 0.248 17.140 238.929 224.068 110.303 1/135000000];

time=0.54757015742;

planets = {'Mercury', 'Venus', 'Earth', 'Mars', 'Jupiter', 'Saturn', 'Uranus', 'Neptune', 'Pluto'};

for i=1:9

    disp(char(planets(i)))

    calculate_elements(d(i, 1), d(i, 2), d(i, 3), d(i, 4), d(i, 5), d(i, 6), d(i, 7), time)

end

end
```