

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εργασία 1: Γραμμική Παραμετροποίηση - Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Θεολόγης Γεώργιος
AEM:10413
email: gtheolog@ece.auth.gr

Απρίλιος 2024

1 Θέμα 1

Στο παρόν θέμα καλούμαστε να εκτιμήσουμε τις άγνωστες παραμέτρους συστήματος μάζας ($m > 0$)-ελατηρίου (σταθεράς $k > 0$)-αποσβεστήρα (σταθεράς απόσβεσης $b > 0$) στο οποίο επενεργεί γνωστή εξωτερική δύναμη $u(t)$. Το σχήμα του συστήματος είναι το εξής:

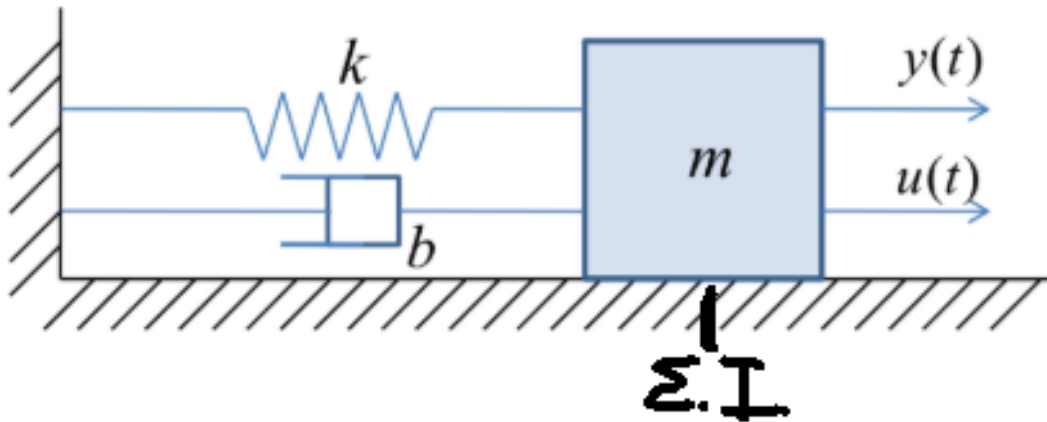


Figure 1: Σύστημα Ελατηρίου-Αποσβεστήρα-Εξωτερικής Δύναμης

Ως $y(t)$ θεωρούμε την μετατόπιση της μάζας από το σημείο ισορροπίας της, την οποία θεωρούμε ότι είναι αρχικά μηδενική αλλά και μετρήσιμη.

1.1 Υποερώτημα 1

Για να βρούμε μια μαθηματική περιγραφή για το μοντέλο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα που μας δίνει την εξής δυναμική του συστήματος:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -b \frac{dy}{dt} - ky + u$$

Ισοδύναμα θα χρησιμοποιήσουμε την συμβολική σύμβαση dot για τις παραγώγους για να έχουμε πιο συμπαγείς εξισώσεις. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -b\dot{y} - ky + u \\ \ddot{y} &= -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}u \\ \ddot{y} &= -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}u \end{aligned}$$

Ορίζοντας τις καταστάσεις του συστήματος $x_1 = y$ και $x_2 = \dot{y}$ έχουμε τις εξισώσεις κατάστασης:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \end{aligned}$$

Άρα οι καταστάσεις του συστήματος στο χρόνο εξαρτώνται από την "είσοδο" $u(t)$ την γνωστή εξωτερική δύναμη στη μάζα, από τις μηδενικές αρχικές συνθήκες και από τις σταθερές παραμέτρους: $\frac{b}{m}, \frac{k}{m}, \frac{1}{m}$. Θα συνεχίσουμε τώρα την παραμετροποίηση της εξίσωσης ώστε να έρθουμε πιο κοντά στον ζητούμενο στόχο και συνεπώς έχουμε:

$$\ddot{y} = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ -y \\ u \end{bmatrix} \quad (1)$$

Με διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων:

$$\theta_r = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T$$

Ισοδύναμα μετά απο μετασχηματισμό Laplace η γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή είναι η:

$$s^2 y = \theta_r^T \begin{bmatrix} -sy \\ -y \\ u \end{bmatrix}$$

Η παρούσα παραμετροποιημένη ως προς τις άγνωστες παραμέτρους μορφή μας δίνει την επιτάχυνση σε σχέση με μετρήσεις ταχύτητας, θέσης και εξωτερική δύναμης εισόδου. Αυτό, όμως δεν μας εξυπηρετεί γιατί το ζητούμενο είναι να βρούμε μια παραμετροποιημένη μορφή που να συσχετίζει την έξοδο y με μετρήσεις της εισόδου $u(t)$ και της μετατόπισης $y(t)$ ή πρακτικά από προσεγγιστικές τεχνικές αποκρίσεις που μπορούμε να κατασκευάσουμε εκμεταλλευόμενοι των μετρήσεων αυτών. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το ευσταθές φίλτρο δεύτερης τάξης (καθώς η διαφορική εξίσωση είναι δεύτερης τάξης ως προς y):

$$F(s) = \frac{1}{\Lambda(s)}$$

Όπου $\Lambda(s)$ δευτεροβάθμιο ευσταθές πολυώνυμο με $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ σύμφωνα με το κριτήριο Ruth-Hurwitz:

$$\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2$$

Προσπαθώντας να βρούμε την ζητούμενη παραμετροποιημένη μορφή πολλαπλασιάζουμε με το φίλτρο την ΔΕ:

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{\Lambda(s)} y &= \theta^T \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y \\ -\frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix} \\ \frac{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2}{\Lambda(s)} y &= \theta^T \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y \\ -\frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix} + [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{s}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2}{\Lambda(s)} y = \theta^T \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y \\ -\frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y \\ -\frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}$$

Και μαζεύοντας έχουμε μια παραμετροποιημένη μορφή ως προς το y :

$$y = (\theta^*)^T \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y \\ -\frac{1}{\Lambda(s)} y \\ \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}$$

Όπου:

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} - \lambda_1 & \frac{k}{m} - \lambda_2 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T$$

$$Z(s) = \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)} y & -\frac{1}{\Lambda(s)} y & \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}^T$$

ή ισοδύναμα στο πεδίο του χρόνου:

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} ILT\{-\frac{s}{\Lambda(s)} y\} & ILT\{-\frac{1}{\Lambda(s)} y\} & ILT\{\frac{1}{\Lambda(s)} u\} \end{bmatrix}^T$$

Ή για απλότητα:

$$\zeta(t) = [\zeta_1(t) \quad \zeta_2(t) \quad \zeta_3(t)]^T$$

Όποτε βρήκαμε την επιθυμητή γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή:

$$y = (\theta^*)^T \zeta$$

Το θ^* σε αυτή την εξίσωση μπορεί να γραφθεί και ως θ_λ με την έννοια που εννοείται και στο βιβλίο του μαθήματος. Ο συμβολισμός με το $*$ επιλέχτηκε καθαρά λόγω της εκφώνησης της εργασίας ενώ κανονικά θα είχε προτιμηθεί το θ_λ το οποίο σημειώνεται με αυτόν τον τρόπο στον κώδικα της matlab για να αναπαραστήσει αυτό το αποτέλεσμα.

Έχοντας τις μετρήσεις των $y(t)$ και $u(t)$ μπορούμε ότι απευθείας είτε μέσω προσομοίωσης με χρήση των μετρήσεων, να ανακτήσουμε τα $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$, $\zeta_3(t)$ αφού αυτά είναι οι αποκρίσεις ευσταθών συστημάτων με αυστηρά κανονικές συναρτήσεις μεταφοράς: $H_1(s) = -\frac{s}{\Lambda(s)}$, $H_2(s) = -\frac{1}{\Lambda(s)}$, $H_3(s) = \frac{1}{\Lambda(s)}$ με εισόδους $y(t)$, $y(t)$ και $u(t)$ αντίστοιχα.

1.2 Υποερώτημα 2

Ζητείται η υλοποίηση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Θα θεωρήσουμε σφάλμα πρόβλεψης:

$$e(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t, \theta) = y(t) - \theta^T \zeta$$

Συνάρτηση Νόρμας:

$$l(e) = \frac{e^2}{2}$$

Άμα έχουμε δείγματα N χρονικά δείγματα t_i για την μετατόπιση $y(t_i)$ και εξωτερική δύναμη $u(t_i)$ σκοπεύουμε να βρούμε το θ που θα ελαχιστοποιεί την :

$$V_N(\theta) = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N e^2(t_n, \theta)$$

$$V_N(\theta) = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N [y^2(t_n) - 2y(t_n)\theta^T \zeta(t_n) + \theta^T \zeta(t_n) \zeta(t_n)^T \theta]$$

$$\left(\frac{\partial V_N(\theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} = 0$$

$$\frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N [-2y(t_n)\zeta(t_n) + 2\zeta(t_n)\zeta(t_n)^T \theta_0] = 0$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\zeta(t_n)\zeta(t_n)^T] \theta_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [y(t_n)\zeta(t_n)]$$

$$\theta_0 = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\zeta(t_n)\zeta(t_n)^T] \right)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [y(t_n)\zeta(t_n)]$$

Που είναι η σχέση (3.2.5) του βιβλίου. Προφανώς, αντί να τα φανταστώ στον χρόνο τα $y(t), \zeta(t)$ μπορώ να τα φανταστώ ότι είναι πίνακες μετρήσεων όπου το $y[n] = y(t_n)$ και $\zeta[n] = \zeta(t_n)$. Οι δύο εκφράσεις είναι ισοδύναμες και προφανώς θα επιλεγεί η δεύτερη με το πίνακα μετρήσεων για την υλοποίηση στην Matlab.

1.3 Υποερώτημα 3

Σύμφωνα με την εκφώνηση θεωρούμε ότι το πραγματικό σύστημα έχει παραμέτρους: $m=8.5$ [kg], $b=0.65$ [kg/s], $k=2$ [kg/s²] και εξωτερική δύναμη $u(t)=10*\cos(0.5\pi t)+3$ [N]. Παρατηρούμε ότι η $u(t)$ είναι περιοδικό σήμα συχνότητας $f_u = 0.25Hz$. Μας, ζητείται να πάρουμε μετρήσεις ανά $T_s = 0.1s \Rightarrow f_s = 10Hz$ συνεπώς η δειγματοληψία μας είναι ικανοποιητική καθώς ικανοποιείται κατα πολύ το θεώρημα δειγματοληψίας Nyquist ($f_s > 2f_u$). Θα θεωρήσουμε όλες τις αρχικές συνθήκες και καταστάσεις του συστήματος μηδενικές. Βάση αυτών των παραμέτρων θα προσημειώσουμε την έξοδο του πραγματικού συστήματος με χρήση της συνάρτησης του matlab ode45 στο διάστημα 0-10s με δείγματα ανά 0.1s. Τρέχοντας την προσομοίωση θα πάρουμε τις "μετρήσεις" του θεωρούμενου πραγματικού συστήματος.

Στη συνέχεια θα επιλέξουμε στο φίλτρο όπου $\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2$ τις τιμές $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 5$ συνεπώς:

$$\Lambda(s) = s^2 + 2s + 5$$

Μέσω της συνάρτησης lsim του matlab έχοντας τις τιμές της μετατόπισης από την προσομοίωση της ode45 (με χρήση των εξισώσεων κατάστασης του συστήματος) καθώς και τις τιμές -μετρήσεις της δύναμης $u(t)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε τα $\zeta_1(t), \zeta_2(t), \zeta_3(t)$. Έτσι, τηρούμε την προδιαγραφή να είναι αντλημένο το ζ από τις μετρήσεις του $y(t)$ και του $u(t)$ και να ξέρουμε ότι δεν ξεφεύγουν οι τιμές των στοιχείων του καθώς τα φίλτρα είναι ευσταθή και πως οι μετρήσεις δίνουν πεπερασμένες τιμές.

Άρα, υλοποιώντας τον κώδικα (ergasia_1_A_modelo.m) παίρνουμε για το διάνυσμα παραμέτρων το :

$$\hat{\theta}^* = \theta_\lambda = \begin{pmatrix} -1.9273 \\ -4.7652 \\ 0.1174 \end{pmatrix}$$

Προσθέτοντας το διάνυσμα $\lambda = [2 \quad 5 \quad 0]^T$ ανακτούμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων :

$$\theta_r = \begin{bmatrix} \widehat{\frac{b}{m}} \\ \widehat{\frac{k}{m}} \\ \widehat{\frac{1}{m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0727 \\ 0.2348 \\ 0.1174 \end{bmatrix}$$

Από αυτές θα βρούμε άμα θέλουμε και τις εκτιμήσεις για τα αυτούσια άγνωστα στοιχεία m, b, k .

$$\hat{m} = \frac{1}{\theta^*(3)} = \frac{1}{0.1174} = 8.5195$$

$$\hat{b} = \frac{\theta^*(1)}{\theta^*(3)} = \frac{0.0729}{0.1174} = 0.6194$$

$$\hat{k} = \frac{\theta^*(2)}{\theta^*(3)} = \frac{0.2348}{0.1174} = 2.0007$$

Οι τιμές είναι αρκετά κοντά στις πραγματικές. Μέγιστο σχετικό σφάλμα παρουσιάζει η παράμετρος απόσβεσης b με σχετικό σφάλμα 4,7%.

Στη πράξη όμως η συμπεριφορά του συστήματος καθορίζεται από τις άμεσα εκτιμώμενες παραμέτρους όπως έχουμε δείξει στις εξισώσεις καταστάσεις του συστήματος. Συνεπώς, αυτές χρησιμοποιούνται και είναι καλύτερα να συγκρίνουμε ως προς τις πραγματικές τιμές

$$\theta_{real} = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0765 \\ 0.2353 \\ 0.1176 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι αποκλίσεις είναι σχετικά μικρές με μέγιστη αυτή της $\frac{b}{m}$ με απόκλιση 4,9%.

Τώρα είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε τις "μετρήσεις" του "πραγματικού συστήματος" στο χρόνο $y(t)$ (αντλημένο από την ode45) με το κατασκευασμένο παραμετρικά μοντέλο: $\hat{y}(t) = (\theta^*)\zeta$ και να εκτιμήσουμε πόσο καλό είναι το μοντέλο που κατασκευάσαμε και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων.

Τελικά παίρνουμε τα εξής διαγράμματα:

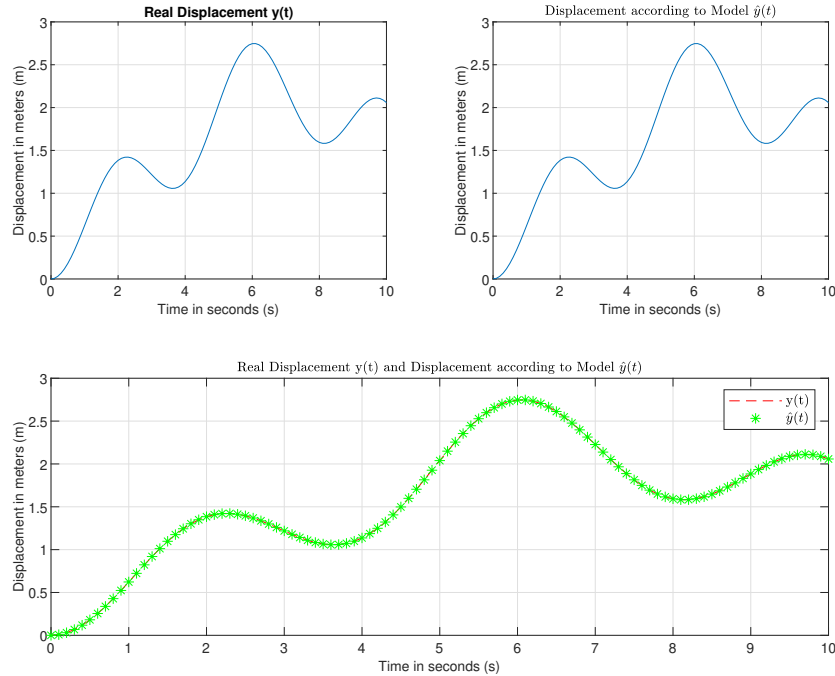


Figure 2: Γραφικές Παραστάσεις των $y(t)$, $\hat{y}(t)$ και 1-1 σύγκριση τους.

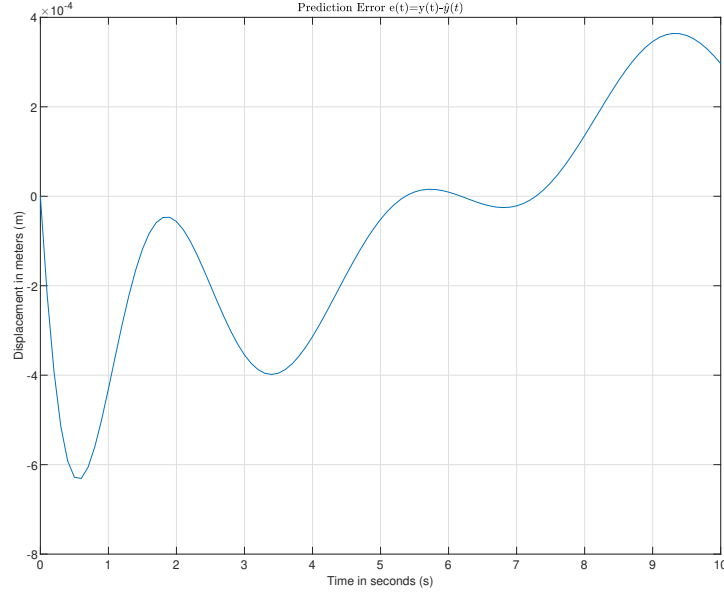


Figure 3: Μεταβολή της διαφοράς $y(t) - \hat{y}(t)$ συναρτήσει του χρόνου.

Βλέπουμε ότι το σφάλμα είναι πολύ μικρό και ουσιαστικά της τάξης του 10^{-4} . Συνεπώς, η εκτίμηση των παραμέτρων σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι αποτελεσματική (άλλωστε αυτό βλέπουμε συγκρίνοντας αυτές με τις πραγματικές) αλλά και από το γεγονός κάνει εξαιρετικά καλό fit πάνω στα πραγματικά μετρούμενα δεδομένα $y(t)$.

Παίζοντας με το φίλτρο άμα προσπαθήσουμε να φέρουμε τους πόλους του φίλτρου πιο κοντά στο φανταστικό άξονα παρατηρούμε ότι οι τιμές των παραμέτρων πλησιάζουν καλύτερα τις πραγματικές ενώ το μέγιστο σφάλμα δεν μεταβάλλεται κατά πολύ. Ωστόσο, προκειμένου να εξασφαλίσουμε την ευστάθεια του φίλτρου είναι καλύτερο να έχουμε τους πόλους του σε επαρκή απόσταση από τον φανταστικό άξονα. Όπως και να έχει μπορούμε να κάνουμε αρκετές δοκιμές για διάφορες τιμές λ_1, λ_2 και από εκεί να δούμε πως παίζει το σφάλμα αλλά και οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων και να κρατήσουμε ότι θεωρούμε βέλτιστο. Τα σχετικά διαγράμματα αφαιρέθηκαν λόγω compile time error της πλατφόρμας overleaf που γινόταν η συγγραφή του report. Ωστόσο, εύκολα με επιλογή $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ στον βασικό κώδικα βλέπουμε:

$$\hat{m} = 8.4904, \hat{b} = 0.6440, \hat{k} = 1.9997$$

Σαφώς πιο κοντινές εκτιμήσεις από ότι προηγούμενος αλλά δεν έχει ουσιαστική διαφορά ως προς τα σφάλματα και την γραφική παράσταση του μοντέλου.

2 Θέμα 2

Στο παρόν θέμα έχουμε την υλοποίηση κυκλώματος που περιλαμβάνει στοιχεία αντίστασης, χωρητικότητας και επαγωγής καθώς και ιδανικές πηγές τάσεις $u_1(t) = 3 \sin(\pi t)[V]$, $u_2(t) = 2.5[V]$ τις οποίες θεωρούμε εισόδους. Ως μετρούμενες εξόδους έχουμε τις τάσεις V_R, V_C που είναι οι τάσεις στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή αντίστοιχα.

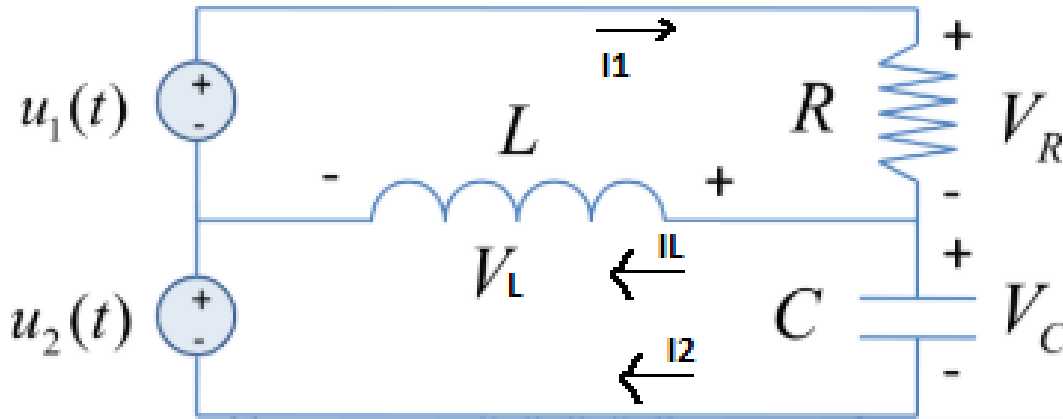


Figure 4: Κύκλωμα Θέματος 2

2.1 Υποερώτημα 1

Προκειμένου να αντλήσουμε μια εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων πρέπει να βρούμε ένα μαθηματικό μοντέλο περιγραφής για το σύστημα το οποίο θα συσχετίζει μετρούμενα μεγέθη και βρίσκεται σε γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή. Για να γίνει αυτό, θα κάνουμε ανάλυση βρόχων στο κύκλωμα.

Από τις εξισώσεις των δύο βρόχων έχουμε:

$$u_1 = V_R + V_L$$

$$u_2 = V_C - V_L$$

Για τα ρεύματα ισχύει:

$$I_L = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \frac{V_R}{R}$$

$$I_2 = C \frac{dV_C}{dt}$$

$$V_L = L \frac{dI_L}{dt} = \frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt} - CL \frac{d^2V_C}{dt^2}$$

Άρα παίρνουμε:

$$u_1 = V_R + \frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt} - CL \frac{d^2V_C}{dt^2}$$

$$u_2 = V_C - \frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt} + CL \frac{d^2V_C}{dt^2}$$

Μετά από μετασχηματισμό Laplace:

$$U_1(s) = V_R(s) + \frac{L}{R}sV_R(s) - s^2CLV_C(s)$$

$$U_2(s) = -\frac{L}{R}sV_R(s) + V_C(s) + s^2CLV_C(s)$$

Και σε μορφή πίνακα έχουμε :

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{L}{R}s & -s^2CL \\ -\frac{L}{R}s & 1 + s^2CL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix}$$

Ως είσοδο θεωρούμε τις τάσεις $\mathbf{U} = [U_1(s) \ U_2(s)]^T$ ενώ ως έξοδο τις μετρούμενες τάσεις $\mathbf{V} = [V_R(s) \ V_C(s)]^T$ συνεπώς ο πίνακας μεταφοράς A εκφράζει στην σχέση

$$\mathbf{V}(s) = A(s)\mathbf{U}(s)$$

Άρα , ο πίνακας μεταφοράς είναι ίσος με :

$$A(s) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{L}{R}s & -s^2CL \\ -\frac{L}{R}s & 1 + s^2CL \end{bmatrix}^{-1}$$

Έχουμε $\det(A^{-1}) = 1 + \frac{L}{R}s + s^2CL$ και από τον ορισμό του αντίστροφου πίνακα ο πίνακας μεταφοράς γίνεται :

$$A(s) = \frac{1}{1 + \frac{L}{R}s + s^2CL} \begin{bmatrix} 1 + s^2CLs & s^2CL \\ \frac{L}{R}s & 1 + \frac{L}{R}s \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε ότι για να ανακτήσουμε τον πίνακα μεταφοράς απαιτείται ο προσδιορισμός των CL και $\frac{L}{R}$ σκοπός είναι λοιπόν να ανακτηθούν-εκτιμηθούν με την χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων σε κάποια παραμετροποιημένη μορφή των διαφορικών εξισώσεων. Αν επιστρέψουμε στην διαφορική εξίσωση στον χρόνο έχουμε από τα προηγούμενα:

$$CL \frac{d^2V_C}{dt^2} = V_R + \frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt} - u_1$$

$$CL \frac{d^2V_C}{dt^2} = \frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt} - V_C + u_2$$

Άρα, απομονώνοντάς την υψηλότερης τάξης παράγωγο έχουμε:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} = \frac{1}{CL}V_R + \frac{1}{CR} \frac{dV_R}{dt} - \frac{1}{CL}u_1$$

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} = \frac{1}{CR} \frac{dV_R}{dt} - \frac{1}{CL}V_C + \frac{1}{CL}u_2$$

Σε dot μορφή γράφονται απλούστερα συμβολικά;

$$\ddot{V}_C = \frac{1}{CL}V_R + \frac{1}{CR}\dot{V}_R - \frac{1}{CL}u_1$$

$$\ddot{V}_C = \frac{1}{CR}\dot{V}_R - \frac{1}{CL}V_C + \frac{1}{CL}u_2$$

Σε αυτό το σημείο από την μεθοδολογία το οδηγούμε με τον μετασχηματισμό Laplace στην μορφή:

$$s^2V_C(s) = \frac{1}{CL}V_R(s) + \frac{1}{CR}sV_R(s) - \frac{1}{CL}U_1(s)$$

$$s^2V_C = \frac{1}{CR}sV_R(s) - \frac{1}{CL}V_C(s) + \frac{1}{CL}U_2(s)$$

Λόγω της δευτέρου βαθμού τάξης της διαφορικής εξίσωσης , επιλέγω φιλτράρισμα με το ευσταθές αυστηρά κανονικό φίλτρο:

$$F(s) = \frac{1}{\Lambda(s)}$$

Όπου $\Lambda(s)$ δευτεροβάθμιο ευσταθές πολυώνυμο με $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ σύμφωνα με το κριτήριο Ruth-Hurwitz:

$$\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2$$

Άρα με αυτό τον τρόπο οι δύο διαφορικές εξισώσεις φιλτράρονται με το φίλτρο $F(s)$:

$$\begin{aligned}\frac{s^2}{\Lambda(s)} V_C(s) &= \frac{1}{\Lambda(s)} \frac{1}{CL} V_R(s) + \frac{s}{\Lambda(s)} \frac{1}{CR} V_R(s) - \frac{1}{\Lambda(s)} \frac{1}{CL} U_1(s) \\ \frac{s^2}{\Lambda(s)} V_C &= \frac{s}{\Lambda(s)} \frac{1}{CR} V_R(s) - \frac{1}{\Lambda(s)} \frac{1}{CL} V_C(s) + \frac{1}{\Lambda(s)} \frac{1}{CL} U_2(s)\end{aligned}$$

Στη συνέχεια παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2}{\Lambda(s)} V_C(s) &= \frac{1}{\Lambda(s)} \frac{1}{CL} V_R(s) + \frac{s}{\Lambda(s)} \frac{1}{CR} V_R(s) + \frac{\lambda_1 s}{\Lambda(s)} V_C(s) + \frac{\lambda_2}{\Lambda(s)} V_C(s) - \frac{1}{\Lambda(s)} \frac{1}{CL} U_1(s) \\ \frac{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2}{\Lambda(s)} V_C(s) &= \frac{s}{\Lambda(s)} \frac{1}{CR} V_R(s) + \frac{\lambda_1 s}{\Lambda(s)} V_C(s) - \frac{1}{\Lambda(s)} \left(\frac{1}{CL} - \lambda_2 \right) V_C(s) + \frac{1}{\Lambda(s)} \frac{1}{CL} U_2(s)\end{aligned}$$

Και άρα:

$$\begin{aligned}V_C(s) &= \frac{1}{CR} \frac{s}{\Lambda(s)} V_R(s) + \frac{1}{CL} \frac{1}{\Lambda(s)} V_R(s) + \lambda_1 \frac{s}{\Lambda(s)} V_C(s) + \lambda_2 \frac{1}{\Lambda(s)} V_C(s) - \frac{1}{CL} \frac{1}{\Lambda(s)} U_1(s) \\ V_C(s) &= \frac{1}{CR} \frac{s}{\Lambda(s)} V_R(s) + \lambda_1 \frac{s}{\Lambda(s)} V_C(s) - \left(\frac{1}{CL} - \lambda_2 \right) \frac{1}{\Lambda(s)} V_C(s) + \frac{1}{CL} \frac{1}{\Lambda(s)} U_2(s)\end{aligned}$$

Άρα, τώρα έχουμε δύο δυνατές γραμμικές παραμετροποιήσεις ως προς το $V_C(s)$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο και στις δύο εξισώσεις ωστόσο θα προτιμήσουμε την πρώτη γιατί έχει τους περισσότερους όρους του διανύσματος $\zeta(t)$ που θα προκύψει που αντιστοιχούν σε μη μηδενική παράμετρο χρησιμοποιήσουμε αυτή:

$$V_C(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{CR} & \frac{1}{CL} & \lambda_1 & \lambda_2 & \frac{1}{CL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{\Lambda(s)} V_R(s) \\ \frac{1}{\Lambda(s)} V_R(s) \\ \frac{s}{\Lambda(s)} V_C(s) \\ \frac{1}{\Lambda(s)} V_C(s) \\ -\frac{1}{\Lambda(s)} U_1(s) \end{bmatrix}$$

Η για την πρακτική εφαρμογή στον χρόνο:

$$V_C(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{CR} & \frac{1}{CL} & \lambda_1 & \lambda_2 & \frac{1}{CL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ILT\{\frac{s}{\Lambda(s)} V_R(s)\} \\ ILT\{\frac{1}{\Lambda(s)} V_R(s)\} \\ ILT\{\frac{s}{\Lambda(s)} V_C(s)\} \\ ILT\{\frac{1}{\Lambda(s)} V_C(s)\} \\ ILT\{-\frac{1}{\Lambda(s)} U_1(s)\} \end{bmatrix}$$

Εν συντομία το φέρνω στην μορφή :

$$V_C(t) = \theta_\lambda^T \zeta(t)$$

Όπου (ILT=Inverse Laplace Transform):

$$\theta_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{CR} & \frac{1}{CL} & \lambda_1 & \lambda_2 & \frac{1}{CL} \end{bmatrix}^T$$

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} ILT\{\frac{s}{\Lambda(s)} V_R(s)\} & ILT\{\frac{1}{\Lambda(s)} V_R(s)\} & ILT\{\lambda_1 \frac{s}{\Lambda(s)} V_C(s)\} & ILT\{\frac{1}{\Lambda(s)} V_C(s)\} & ILT\{-\frac{1}{\Lambda(s)} U_1(s)\} \end{bmatrix}^T$$

Στη πράξη και την πρώτη να χρησιμοποιούσαμε απλά για να έχουμε έναν πιο μικρότερο πίνακα ζ (με 4 στοιχεία αντί για 5) θα παίρναμε παρόμοια αποτελέσματα. Για αυτό αυτή η περίπτωση είναι στον κώδικα μέσα σε σχόλιο σε περίπτωση που θέλουμε επιτόπου να δούμε το αποτέλεσμα αυτής της εναλλακτικής υλοποίησης.

Η εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων είναι πανομοιότυπη με αυτή στο θέμα 1 καθώς χρησιμοποιούμε τον ίδιο τύπο που δείξαμε στο θέμα 1 καθώς και η απόδειξη του υπάρχει και στο βιβλίο αναφερόμενα στη σχέση (3.2.5) έχουμε ότι η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων δίνει την εξής εκτίμηση για το θ_λ :

$$\hat{\theta}_\lambda = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [\zeta(t_n)\zeta(t_n)^T] \right)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [V_C(t_n)\zeta(t_n)]$$

Συνεπώς, από την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων παίρνω το διάνυσμα παραμέτρων με το οποίο φτιάχνω αρχικά την εκτίμηση της $V_C(t)$:

$$\hat{V}_C(t) = \hat{\theta}_\lambda^T \zeta(t)$$

Και στη συνέχεια της $V_R(t)$:

$$\hat{V}_R(t) = u_1(t) + u_2(t) - \hat{V}_C(t)$$

Η υλοποίηση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων θα γίνει αρχικά στο χρονικό διάστημα 0-10s με βήμα 0.01 s. Οι παράμετροι του φίλτρου επιλέγονται αρχικά όπως και πριν ως $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$. Ο χρόνος δειγματοληψίας τηρεί το θεώρημα δειγματοληψίας του Nyquist για τις εισόδους ($f_1=0.5$ Hz και u_2 είναι DC) και ως προς τις εξόδους (VR έχει μια συνιστώσα $f_{r1}=0.5$ Hz και μια εκθετικά αποσβενύμενη αρμονική γύρω στα 1.25 Hz που εναλλάσσεται μεταξύ του πυκνωτή και αντίστασης. Μπορούμε να δούμε αυτή την κοινή αρμονική στη Matlab με την `plot(t,vr-3*sin(pi*t))` εντολή).

Η εφαρμογή των ελαχίστων τετραγώνων (`ergasia_2_A_modelo.m`) μας δίνει την εκτίμηση του διανύσματος θ_λ :

$$\hat{\theta}_\lambda = \left[\widehat{\left[\frac{1}{CR}\right]} \quad \widehat{\left[\frac{1}{CL}\right]} \quad \hat{\lambda}_1 \quad \hat{\lambda}_2 \quad \widehat{\left[\frac{1}{CL}\right]} \right]^T = [0.0671 \quad 62.5124 \quad 1.9715 \quad 4.9978 \quad 62.5212]^T$$

Βλέπουμε ότι οι παράμετροι του φίλτρου είναι ικανοποιητικά κοντά στις πραγματικές $\hat{\lambda}_1 \approx 2, \hat{\lambda}_2 \approx 5$. Η εκτιμήσεις των παραμέτρων του συστήματος άρα και του πίνακα μεταφοράς είναι επίσης ίσες με :

$$\widehat{\left[\frac{1}{CR}\right]} = 0.0671$$

$$\widehat{\left[\frac{1}{CL}\right]} = \frac{62.5124 + 62.5212}{2} = 62.5168 \Rightarrow \widehat{CL} = 0.0160$$

$$\widehat{\left[\frac{L}{R}\right]} = \frac{\widehat{\left[\frac{1}{CR}\right]}}{\widehat{\left[\frac{1}{CL}\right]}} = 0.0011$$

Αντικαθιστώντας τις εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων στον πίνακα μεταφοράς έχουμε:

$$A(s) = \frac{1}{1 + 0.0011s + 0.0160s^2} \begin{bmatrix} 1 + 0.0160s^2 & 0.0160s^2 \\ 0.0011s & 1 + 0.0011s \end{bmatrix}$$

Ανακατασκευάζοντας τα \hat{V}_C, \hat{V}_R με τη χρήση του παραμετρικού διανύσματος όπως περιγράφηκε παραπάνω παίρνουμε τα εξής διαγράμματα:

Για το V_R :

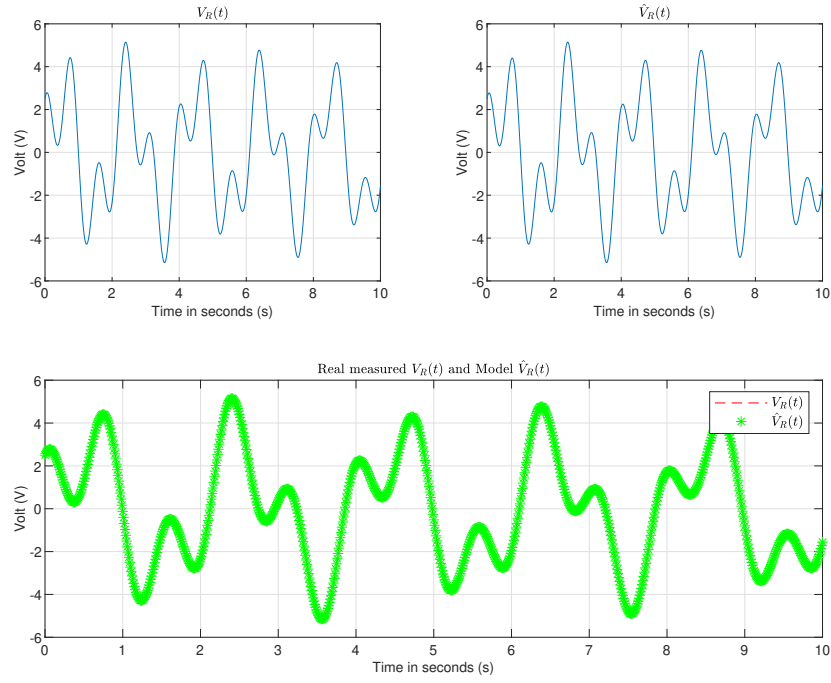


Figure 5: Γραφικές Παραστάσεις των $V_R(t)$, $\hat{V}_R(t)$ και 1-1 σύγκριση τους.

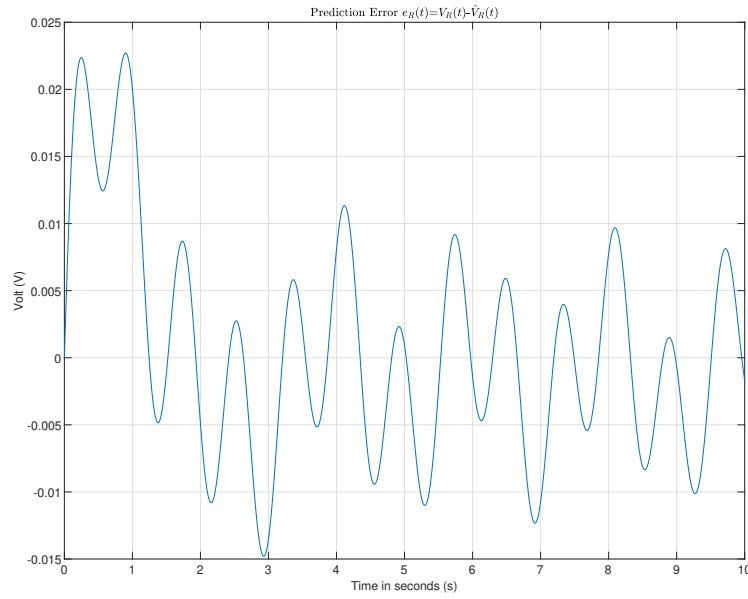


Figure 6: Μεταβολή της διαφοράς $V_R(t) - \hat{V}_R(t)$ συναρτήσει του χρόνου.

Για το V_C :

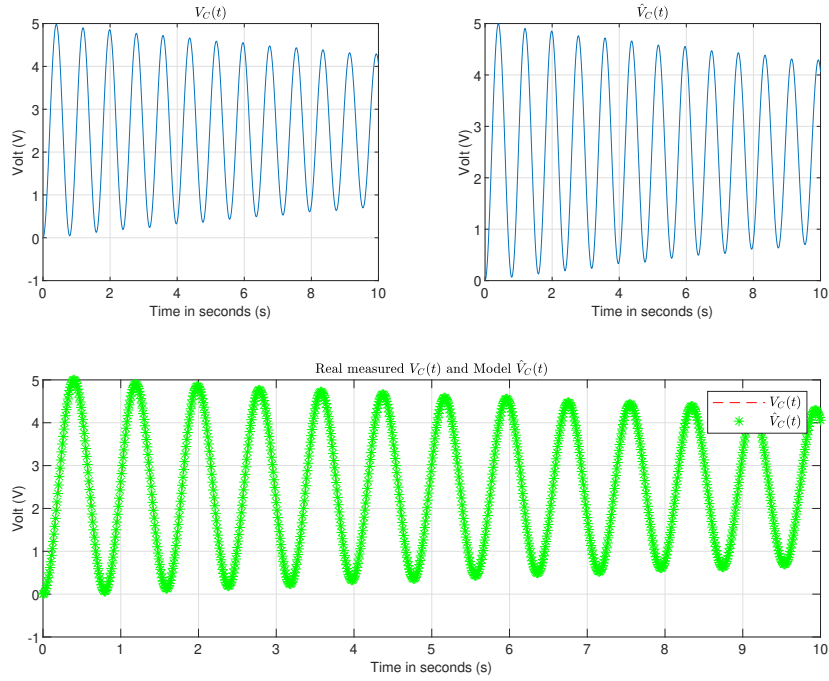


Figure 7: Γραφικές Παραστάσεις των $V_C(t)$, $\hat{V}_C(t)$ και 1-1 σύγκριση τους.

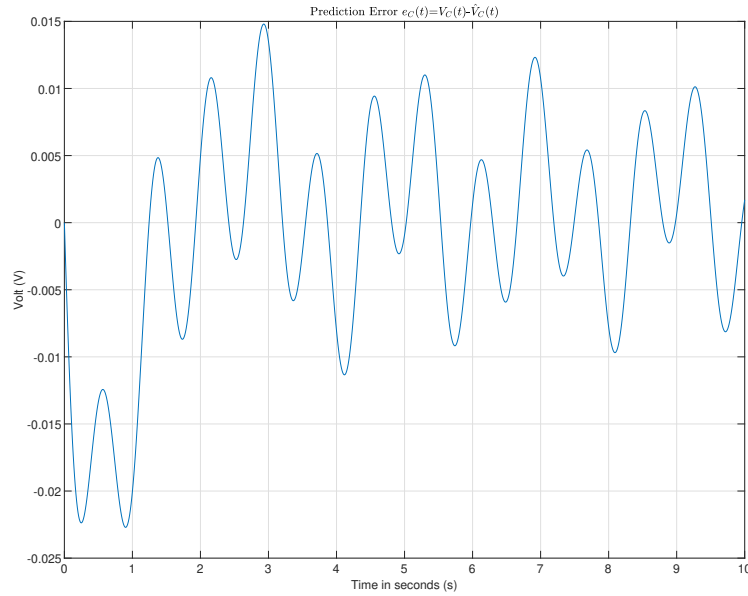


Figure 8: Μεταβολή της διαφοράς $V_C(t) - \hat{V}_C(t)$ συναρτήσει του χρόνου.

Παρατηρούμε στα διαγράμματα σφάλματος ότι για το σφάλμα πρόβλεψης της τάσης της αντίστασης e_R και της τάσης του πυκνωτή e_C ότι ισχύει προσεγγιστικά $e_R \approx -e_C$ για αρκετές χρονικές στιγμές. Αυτό είναι

λογικό καθώς ισχύει από την εξίσωση βρόχου :

$$V_R = u_1 + u_2 - V_C \Rightarrow e_R = u_1 + u_2 - \hat{V}_R - \hat{V}_C - e_C$$

Προφανώς αφού παρατηρούμε ότι στα διαγράμματα ισχύει ικανοποιητικά $V_R \approx \hat{V}_R$ και $V_C \approx \hat{V}_C$ αφού το απόλυτο σφάλμα δεν ξεπερνάει το 0.03 (αμελητέα τιμή σε σχέση με αυτές που παίρνουν οι τάσεις) είναι λογικό να υποθέσουμε ότι $u_1 + u_2 - \hat{V}_R - \hat{V}_C \approx 0$ και άρα:

$$e_R \approx -e_C$$

Γενικά οι εκτιμήσεις των παραμέτρων φαίνονται αρκετά καλές ενώ τα σφάλματα πρόβλεψης είναι πολύ μικρά σε σχέση με τις τιμές που παίρνουν οι τάσεις. Άμα μεγαλώσουμε το χρονικό διάστημα από 0-10s με βήμα 0.01 s σε 0-100 s με βήμα 0.01s ώστε να πάρουμε μια καλύτερη εικόνα αυτού του δυναμικού φαινομένου, βλέπουμε ότι οι τιμές των εκτιμώμενων παραμέτρων αλλάζουν ελάχιστα. Για να μην γεμίσουμε παραδοτέα αρχεία η αλλαγή στο χρόνο είναι στο κύριο αρχείο της δεύτερης άσκησης σε σχόλια. Για να τρέξουμε τον αλγόριθμο με αυτό το χρόνο αρκεί να αφαιρέσουμε το σχόλιο. Με εφαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων παίρνουμε εκτίμηση για το διάνυσμα θ :

$$\hat{\theta}_\lambda = \left[\left[\frac{1}{CR} \right] \quad \left[\frac{1}{CL} \right] \quad \hat{\lambda}_1 \quad \hat{\lambda}_2 \quad \left[\frac{1}{CL} \right] \right]^T = [0.0691 \quad 62.5232 \quad 1.9805 \quad 4.9998 \quad 62.5246]^T$$

Βλέπουμε ότι οι παράμετροι του φίλτρου είναι ικανοποιητικά κοντά στις πραγματικές $\hat{\lambda}_1 \approx 2$, $\hat{\lambda}_2 \approx 5$ και μάλιστα είναι πιο κοντινές στις πραγματικές με σχέση με πριν. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων του συστήματος άρα και του πίνακα μεταφοράς είναι επίσης ίσες με :

$$\left[\frac{1}{CR} \right] = 0.0691$$

$$\left[\frac{1}{CL} \right] = \frac{62.5124 + 62.5212}{2} = 62.5239 \Rightarrow \widehat{CL} = 0.0160$$

$$\left[\frac{L}{R} \right] = \frac{\left[\frac{1}{CR} \right]}{\left[\frac{1}{CL} \right]} = 0.0011$$

Αντικαθιστώντας τις εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων στον πίνακα μεταφοράς έχουμε τον ίδιο μορφή με πριν (στην πράξη έχω αλλαγή μόνο σε δεκαδικά ψηφία που παραλείπονται):

$$A(s) = \frac{1}{1 + 0.0011s + 0.0160s^2} \begin{bmatrix} 1 + 0.0160s^2 & 0.0160s^2 \\ 0.0011s & 1 + 0.0011s \end{bmatrix}$$

Ανακατασκευάζοντας ξανά τα \hat{V}_C, \hat{V}_R με τη χρήση του παραμετρικού διανύσματος όπως περιγράφηκε παραπάνω παίρνουμε τα εξής διαγράμματα: Για το V_R :

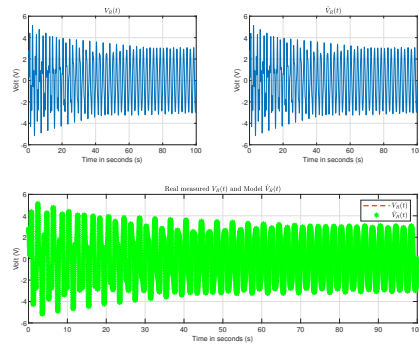


Figure 9: Γραφικές Παραστάσεις των $V_R(t), \hat{V}_R(t)$ και 1-1 σύγκρισή τους.

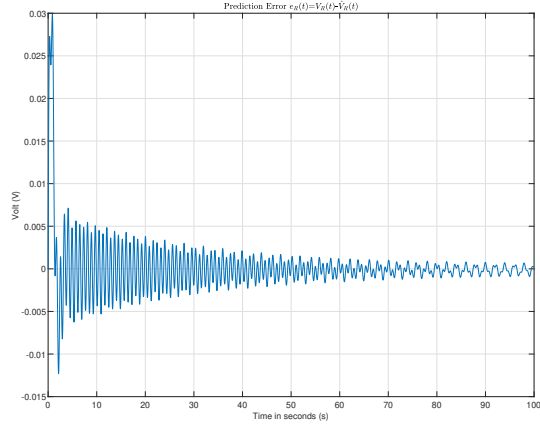


Figure 10: Μεταβολή της διαφοράς $V_R(t) - \hat{V}_R(t)$ συναρτήσει του χρόνου.

Για το V_C :

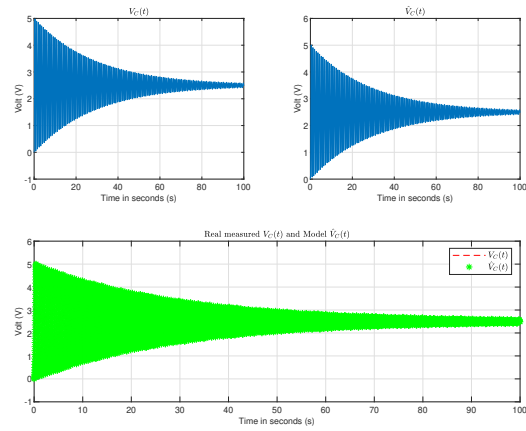


Figure 11: Γραφικές Παραστάσεις των $V_C(t)$, $\hat{V}_C(t)$ και 1-1 σύγκριση τους.

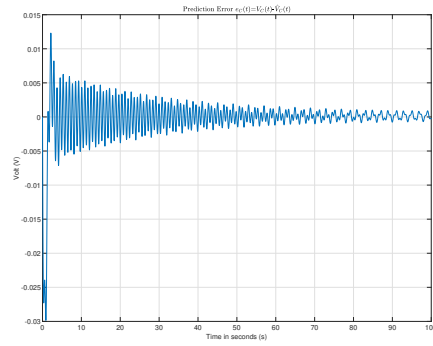


Figure 12: Μεταβολή της διαφοράς $V_C(t) - \hat{V}_C(t)$ συναρτήσει του χρόνου.

Βλέπουμε εδώ ότι με αρκετό χρόνο το μεταβατικό φαινόμενο λόγω των αρχικών συνθηκών του κυκλώματος αποσβένει. Τα σφάλματα αρχικά είναι πανομοιότυπα με τα προηγούμενα που αντλήσαμε σε χρόνο 0-10s ενώ όταν αποκαθίσταται η μόνιμη κατάσταση στο κύκλωμα φαίνονται να ταλαντώνονται με σχετικά σταθερό πλάτος γύρω από το μηδέν χωρίς να παρουσιάζουν σημαντικές-αισθητές αποκλίσεις από αυτή την κατάσταση.

2.2 Υποερώτημα 2

Σε αυτό το σημείο ερχόμαστε αντιμέτωποι με την εμφάνιση σφαλμάτων στις μετρήσεις μας. Συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε ότι **ορισμένες χρονικές στιγμές** πραγματοποιείται σφάλμα στη μέτρηση και έχουμε προσθήκη **τυχαίων τιμών** $\eta_i(t_i)$, μια στη μέτρηση της τάσης της αντίστασης και μια σε αυτή του πυκνωτή. Μάλιστα η τάξη αυτών των τιμών πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερη από αυτές των ορθών μετρήσεων. Καθώς αυτές είναι μικρότερες από 10 (max 5) μπορούμε να ορίσουμε ότι αυτές οι τιμές $\eta_i(t_i)$ ακολουθούν κανονική κατανομή (normrnd στη Matlab) με μέση τιμή 500 και τυπική απόκλιση 50. Οι τιμές αυτές είναι πράγματι τυχαίες έτσι και λαμβάνουν τιμές κυρίως γύρω από το 500 (πάνω και κάτω) οι οποίες είναι πολύ μεγαλύτερης τάξης από τις μετρήσεις μας στα στοιχεία. Πιο συχνά πέφτουν στο range [400-600]. Δεν αποκλείεται βέβαια να πάρουν και σχετικά μικρές τιμές αν και αυτό θα συμβεί με πάρα πολύ μικρή πιθανότητα (ούτε 0.0 και επομένως με διαδοχικές επαναλήψεις αυτής της προσομοίωσης θα έχουμε κυρίως αποτελέσματα όπου όλες οι προστιθέμενες τιμές είναι επαρκώς μεγάλες. Στη χειρότερη περίπτωση βάζουμε στον κώδικα ένα κατώφλι για να εμποδίσουμε πλήρως αυτό το ενδεχόμενο.

Σύμφωνα με την εκφώνηση θέλουμε την πρόσθεση αυτών των τιμών σε **ορισμένες χρονικές στιγμές**. Αυτό μπορεί να εκληφθεί είτε πως πρέπει η πρόσθεση να γίνει σε συγκεκριμένο πλήθος χρονικών στιγμών είτε ότι κάθε χρονική στιγμή υπάρχει μια μικρή πιθανότητα να γίνει η προσθήκη αυτή. Θα εξεταστούν και τα δύο αυτά σενάρια:

2.2.1 M=5 χρονικές στιγμές σφάλματος

Σε αυτή την περίπτωση θα επιλέξουμε στο διάστημα 0-10 s ακριβώς 5 χρονικές στιγμές που μπορεί να γίνει η προσθήκη του θορύβου. Η επιλογή υλοποιείται σχετικά απλά με κώδικα στη matlab. Αφού επιλέξουμε τις τυχαίες και συγκεκριμένες σε αριθμό χρονικές στιγμές και κάνουμε την προσθήκη αυτών των τιμών στις μετρήσεις, υλοποιούμε όπως πριν στο α υποερώτημα την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (ergasia_2_B_modelo.m) στην εκτίμηση του διανύσματος παραμέτρων είναι το εξής :

$$\hat{\theta}_\lambda = \left[\widehat{\left[\frac{1}{CR}\right]} \quad \widehat{\left[\frac{1}{CL}\right]} \quad \hat{\lambda}_1 \quad \hat{\lambda}_2 \quad \widehat{\left[\frac{1}{CL}\right]} \right]^T = [0.4009 \quad -6.0291 \quad 0.4772 \quad 4.4877 \quad -10.7472]^T$$

Βλέπουμε ότι για τις εκτιμήσεις των παραμετρικών τιμών του φίλτρου η $\hat{\lambda}_1 \neq 2$ διαφέρει αισθητά ενώ η $\hat{\lambda}_2 \approx 5$ είναι αρκετά στην πραγματική της τιμή.

Η εκτιμήσεις των παραμέτρων του συστήματος άρα και του πίνακα μεταφοράς είναι επίσης ίσες με :

$$\widehat{\left[\frac{1}{CR}\right]} = 0.4009$$

$$\widehat{\left[\frac{1}{CL}\right]} = \frac{-6.0291 - 10.7472}{2} = -8.3882 \Rightarrow \widehat{CL} = -0.1192$$

$$\widehat{\left[\frac{L}{R}\right]} = \frac{\widehat{\left[\frac{1}{CR}\right]}}{\widehat{\left[\frac{1}{CL}\right]}} = -0.0478$$

Πραγματικά δεν έχει νόημα σε αυτό το σημείο ο υπολογισμός πίνακα μεταφοράς καθώς οι ίδιες οι παράμετροι παίρνουν αρνητικές τιμές πράγμα που είναι εκ φύσεως **αδύνατο**. Συνεπώς, η εφαρμογή των ελαχίστων τετραγώνων απέτυχε παταγωδώς στο να εκτιμήσει ορθά τις παραμέτρους του κυκλώματος. Αυτό, είναι λογικό άμα σκεφτούμε ότι ο σκοπός της μεθόδου είναι η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N e^2(t_n, \theta)$$

Αν ακόμα και μια χρονική στιγμή εκεί που έχουμε μικρά σφάλματα εμφανιστεί σφάλμα της τάξης 10^2 λόγω του τετραγωνισμού προκύπτει όρος 10^4 ο οποίος διαταράσσει αισθητά το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων πρόβλεψης. Το σφάλμα στη μέτρηση είναι τόσο μεγάλο και με τέτοια ασυνέχεια που ακόμα και αν η βαρεία πλειοψηφία των μετρήσεων είναι σωστή, η μέθοδος προσπαθεί να βρει τιμές παραμέτρων για το μοντέλο, έτσι όπως έχει οριστεί παραμετρικά, τέτοιες ώστε αυτές οι ξαφνικές ασυνέχειες στην μέτρηση να μπορούν να αναπαραχθούν. Βέβαια, από αυτό το κύκλωμα με αυτές τις εισόδους και μοντέλο αυτές οι έξοδοι είναι αδύνατες. Μάλιστα, στην προσπάθεια να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα, καθώς οι κυρίαρχοι όροι των αθροισμάτων προέρχονται από τις στιγμές σφάλματος-απότομης αλλαγής, το \hat{V}_R επιλέγεται έτσι ώστε τα \hat{V}_R, \hat{V}_C να κάνουν το καλύτερο δυνατό fit σε αυτές τις στιγμές. Για αυτό το λόγο θα απομακρυνθούν οι εκτιμήσεις του μοντέλου αρκετά από τις τιμές που παίρνουν οι ενδιάμεσες μη εσφαλμένες μετρήσεις προσπαθώντας να κάνουν ένα συμβιβασμό ανάμεσα σε αυτές και στις στιγμές του σφάλματος.

Αμα δούμε τα αντίστοιχα διαγράμματα με πριν επιβεβαιώνουμε τις πάνω παρατηρήσεις:
Για το V_R :

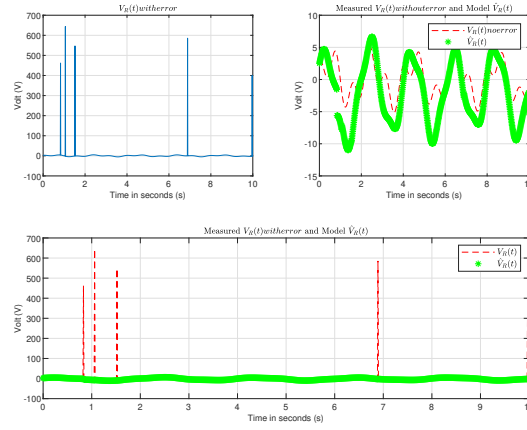


Figure 13: Γραφικές Παραστάσεις των $V_R(t), \hat{V}_R(t)$ και 1-1 σύγκρισή τους.

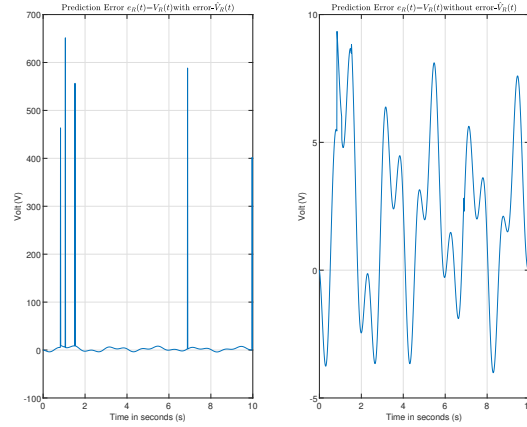


Figure 14: Μεταβολή της διαφοράς $V_R(t) - \hat{V}_R(t)$ συναρτήσει του χρόνου.

Για το V_C :

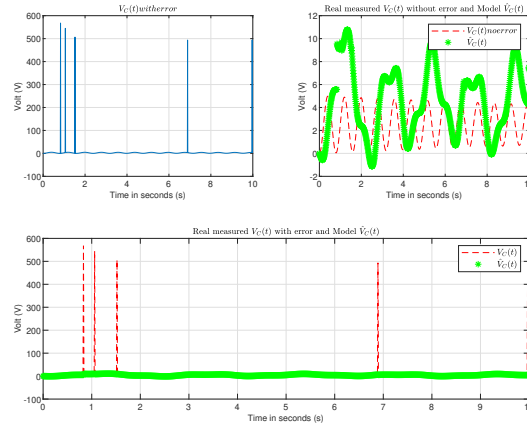


Figure 15: Γραφικές Παραστάσεις των $V_C(t)$, $\hat{V}_C(t)$ και 1-1 σύγκρισή τους.

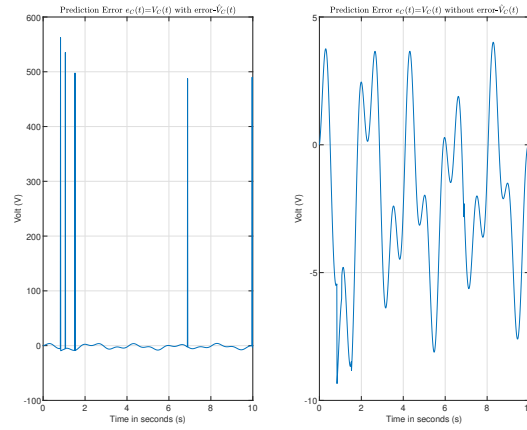


Figure 16: Μεταβολή της διαφοράς $V_C(t) - \hat{V}_C(t)$ συναρτήσει του χρόνου.

Όπως είπαμε και πριν βλέπουμε ότι οι εκτιμήσεις \hat{V}_R , \hat{V}_C παρουσιάζουν κάποια απότομες ασυνέχειες στις χρονικές στιγμές που εισήχθηκε σφάλμα στις μετρήσεις ή κοντά σε αυτές αλλά είναι πολύ μικρότερες σε σχέση με τις αντιστοιχίες απότομες μεταβολές που εμφανίζονται στις εσφαλμένες μετρήσεις μας.

2.2.2 Πιθανότητα σφάλματος $p_e=0.005$

Πρακτικά , η ίδια υλοποίηση απλά με την διαφορά ότι κάθε χρονική στιγμή υπάρχει πιθανότητα να γίνει η εσφαλμένη μέτρηση. Η υλοποίηση αυτή είναι σε σχόλια στο αρχείο (ergasia_2_B_modelo.m) . Για να δοκιμαστεί αφαιρούμε την while από τα σχόλια ενώ βάζουμε την πιο πάνω while της προηγούμενης υλοποίησης σε σχόλια. Πάλι παρατηρούμε τα ίδια πράγματα (αρνητικές εκτιμήσεις παραμέτρων) ενώ τα διαγράμματα είναι παρόμοια:

Για το V_R :

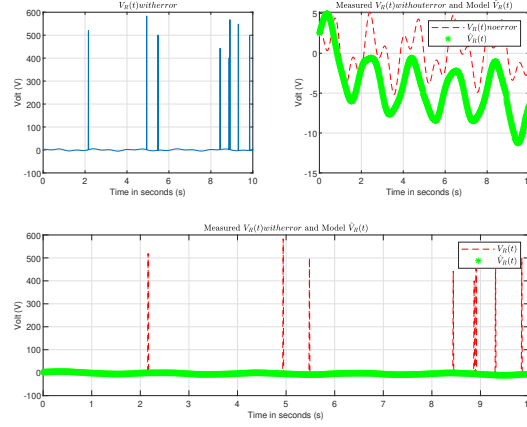


Figure 17: Γραφικές Παραστάσεις των $V_R(t)$, $\hat{V}_R(t)$ και 1-1 σύγκρισή τους.

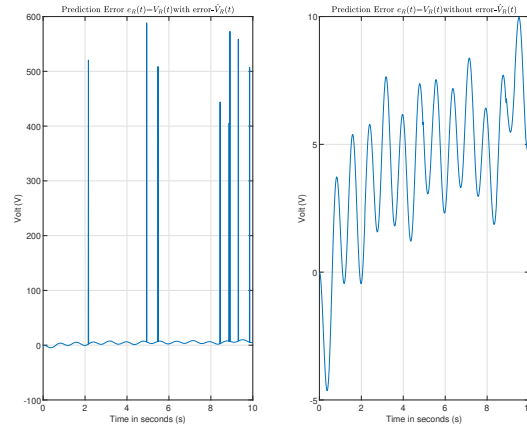


Figure 18: Μεταβολή της διαφοράς $V_R(t) - \hat{V}_R(t)$ συναρτήσει του χρόνου.

Για το V_C :

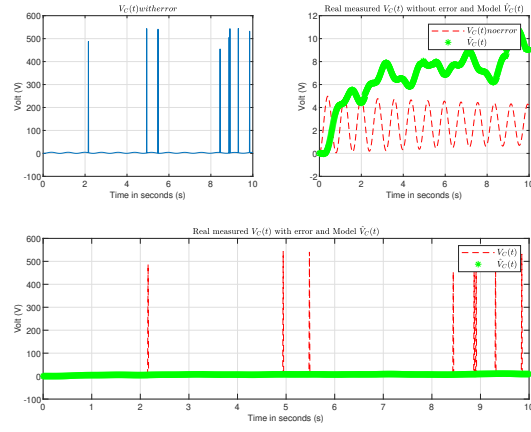


Figure 19: Γραφικές Παραστάσεις των $V_C(t)$, $\hat{V}_C(t)$ και 1-1 σύγκριση τους.

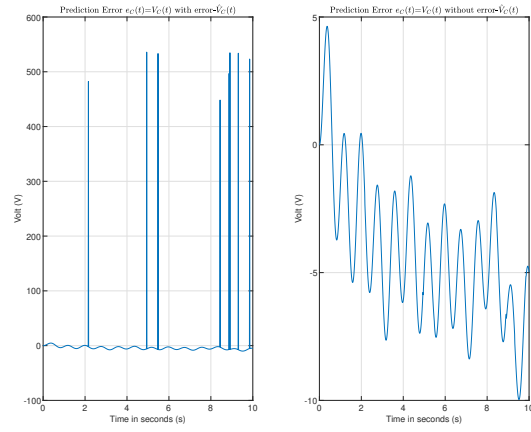


Figure 20: Μεταβολή της διαφοράς $V_C(t) - \hat{V}_C(t)$ συναρτήσει του χρόνου.