

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εργασία 2: Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων - - Μέθοδοι Πραγματικού Χρόνου

Θεολόγης Γεώργιος
AEM:10413
email: gtheolog@ece.auth.gr

Απρίλιος 2024

1 Θέμα 1

Στο παρόν θέμα έχουμε στην διάθεση μας το ακόλουθο δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x} = -ax + bu$$

Εδώ $x \in \mathbb{R}$ είναι η κατάσταση του συστήματος (με $x(0)=0$), $u \in \mathbb{R}$ είναι η είσοδος του συστήματος και a, b είναι οι σταθερές παράμετροι του συστήματος αλλά παραμένουν άγνωστες σε εμάς.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους a, b ενός τέτοιου πραγματικού συστήματος θα σχεδιάσουμε έναν ειδικό για το σύστημα εκτιμητή πραγματικού χρόνου (online) βασισμένο στην μέθοδο της κλίσης. Στη συνέχεια θα προσομοιώσουμε την απόκριση της εξόδου του πραγματικού συστήματος x και την λειτουργία του εκτιμητή που σχεδιάσαμε.

1.1 Σχεδίαση του Εκτιμητή

Ο εκτιμητής μας καθώς είναι βασισμένος στην μέθοδο κλίσης λειτουργεί σε συστήματα της μορφής :

$$y(t) = \theta^T \phi(t)$$

Συνεπώς θα προσπαθήσουμε να φέρουμε το σύστημα $\dot{x} = -ax + bu$ σε αντίστοιχη περιγραφή-μορφή. Αρχικά για να γίνει αυτό θα πάρουμε τον μετασχηματισμό Laplace της δυναμικής εξίσωσης της κατάστασης x :

$$sX(s) = -aX(s) + bU(s)$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την έκφραση με ευσταθές φίλτρο της μορφής $F(s) = \frac{1}{s+\theta_m}$ όπου $\theta_m > 0$. Το αποτέλεσμα είναι μια εξίσωση που συνδέει τα φιλτραρισμένα μεγέθη:

$$\begin{aligned} F(s)sX(s) &= F(s)(-aX(s) + bU(s)) \\ \frac{s}{s+\theta_m}X(s) &= -\frac{a}{s+\theta_m}X(s) + \frac{b}{s+\theta_m}U(s) \\ F(s)sX(s) &= F(s)(-aX(s) + bU(s)) \\ \frac{s}{s+\theta_m}X(s) &= -\frac{a}{s+\theta_m}X(s) + \frac{b}{s+\theta_m}U(s) \\ \frac{s+\theta_m}{s+\theta_m}X(s) &= \frac{\theta_m}{s+\theta_m}X(s) - \frac{a}{s+\theta_m}X(s) + \frac{b}{s+\theta_m}U(s) \\ X(s) &= \frac{\theta_m - a}{s+\theta_m}X(s) + \frac{b}{s+\theta_m}U(s) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε:

$$x(t) = (\theta_m - a) \cdot ILT\left(\frac{X(s)}{s + \theta_m}\right) + b \cdot ILT\left(\frac{U(s)}{s + \theta_m}\right)$$

Θέτοντας επομένως $\theta = [\theta_m - a \quad b]^T$ και $\phi(t) = \left[ILT\left(\frac{X(s)}{s + \theta_m}\right) \quad ILT\left(\frac{U(s)}{s + \theta_m}\right) \right]^T$ με $\phi_1(t)$ την απόκριση του F(s) με είσοδο x(t) και $\phi_2(t)$ την απόκριση του F(s) με είσοδο u(t) έχουμε τελικά:

$$x(t) = \theta^T \phi(t)$$

Άρα έχουμε εκφράσει την κατάσταση του συστήματος σε μορφή γραμμικά παραμετροποιημένη με όρους που περιέχουν τις παραμέτρους a,b. Βάση αυτής της έκφρασης ορίζουμε το σύστημα αναγνώρισης :

$$\hat{x}(t) = \hat{\theta}^T(t) \phi(t)$$

Όπου $\hat{\theta}(t) = [\hat{\theta}_m - \hat{a}(t) \quad \hat{b}(t)]^T$ Η λειτουργία του συστήματος αναγνώρισης είναι απλή. Θα παίρνει ως είσοδο την κατάσταση του πραγματικού συστήματος x(t) κάθε δεδομένη στιγμή και αντίστοιχα την είσοδο u(t) και θα τις φιλτράρει με το φίλτρο $F(s)$ για να κατασκευάσει εσωτερικά τα $\phi_1(t), \phi_2(t)$. Έξοδο έχει την εκτίμηση της κατάστασης $\hat{x}(t)$. Τέλος για την πλήρη λειτουργία χρειαζόμαστε έναν αναδρομικό αλγόριθμο προσδιορισμού του $\hat{\theta}(t)$. Η μέθοδο της κλίσης επιλέγει δυναμικές σχέσεις για την εκτίμηση $\hat{\theta}(t)$ τέτοια ώστε να ελαχιστοποιεί μια συνάρτηση κόστους $K(\hat{\theta})$ που περιέχει $e_x = x(t) - \hat{x}(t)$ το σφάλμα αναγνώρισης. Επιλέγουμε την συνάρτηση κόστους :

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e_x^2}{2} = \frac{(x(t) - \hat{\theta}^T(t) \cdot \phi(t))^2}{2} = \frac{(x(t) - \hat{\theta}_1(t) \cdot \phi_1(t) - \hat{\theta}_2(t) \cdot \phi_2(t))^2}{2}$$

Και αναζητούμε κάθε στιγμή t το $\hat{\theta}(t)$ για το οποίο ελαχιστοποιείται η συνάρτηση κόστους δηλαδή:

$$\underset{\hat{\theta}}{\operatorname{argmin}} K(\hat{\theta})$$

Η συνάρτηση κόστους είναι κυρτή και συνεχής όποτε έχει μοναδικό ελάχιστο για το οποίο ισχύει :

$$\nabla K(\hat{\theta})_{\hat{\theta}=\theta} = 0$$

Το gradient είναι :

$$\nabla K(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} -\phi_1(t)(x(t) - \hat{\theta}^T(t) \cdot \phi(t)) \\ -\phi_2(t)(x(t) - \hat{\theta}^T(t) \cdot \phi(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi_1(t)e_x \\ -\phi_2(t)e_x \end{bmatrix}$$

Η μέθοδος κλίσης ορίζει τελικά την δυναμική του διανύσματος παραμέτρων ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= -\Gamma \nabla K(\hat{\theta}) \\ \dot{\hat{\theta}} &= \Gamma \begin{bmatrix} \phi_1(t)e_x \\ \phi_2(t)e_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \phi_1(t)e_x \\ \gamma_2 \phi_2(t)e_x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Όπου $\Gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ θετικά ορισμένος διαγώνιος πίνακας με στοιχεία $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Άρα :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_1 &= \gamma_1 \phi_1(t)e_x \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \gamma_2 \phi_2(t)e_x \end{aligned}$$

Με $\hat{\theta}_1(0) = \theta_{1,0}$ και $\hat{\theta}_2(0) = \theta_{2,0}$. Άρα έχοντας όλα αυτά έχουμε το σύστημα αναγνώρισης το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του συστήματος. Θα προσομοιώσουμε την απόκριση του πραγματικού συστήματος και του συστήματος αναγνώριση-εκτιμητή μέσω της ODE 45 στην matlab με την εφαρμογή της στην συνάρτηση `gradient_method_identifier.m`. Σε αυτή προκειμένου να αποκτήσουμε τις αποκρίσεις του φίλτρου $\phi_1(t), \phi_2(t)$ πρέπει να ανακτήσω τις δυναμικές τους ως προς γνωστά μεγέθη. Ξέρουμε

ότι ισχύει: $\Phi_1(s) = \frac{X(s)}{s+\theta_m}$ και $\Phi_2(s) = \frac{U(s)}{s+\theta_m}$ συνεπώς πολλαπλασιάζοντας με τους παρανομαστές και χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε:

$$\dot{\phi}_1(t) = -\theta_m \phi_1(t) + x(t)$$

$$\dot{\phi}_2(t) = -\theta_m \phi_2(t) + u(t)$$

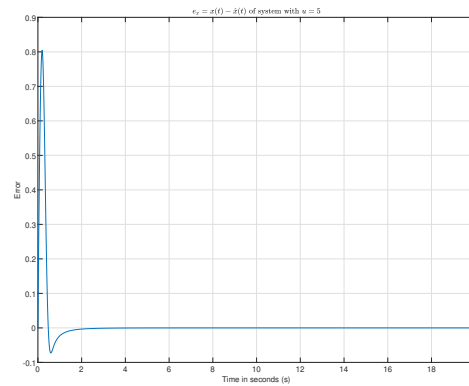
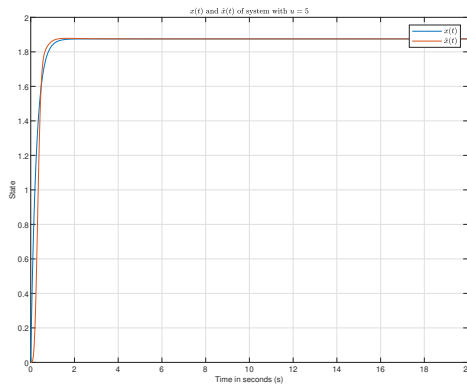
Με $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$. Άρα έτσι η ode45 θα μας επιστρέψει τα $\phi_1(t), \phi_2(t)$ καθώς και θα μπορεί να τα χρησιμοποιεί εσωτερικά κατά την λειτουργία της. Προφανώς αφού το φίλτρο είναι ευσταθές και τα $x(t), u(t)$ φραγμένα και οι αποκρίσεις του φίλτρου $F(s)$ δηλαδή οι $\phi_1(t), \phi_2(t)$ είναι φραγμένες. Στη προσομοίωση για το πραγματικό σύστημα θεωρούμε ότι οι τιμές των παραμέτρων ήταν :

$$a = 4 \quad b = 1.5$$

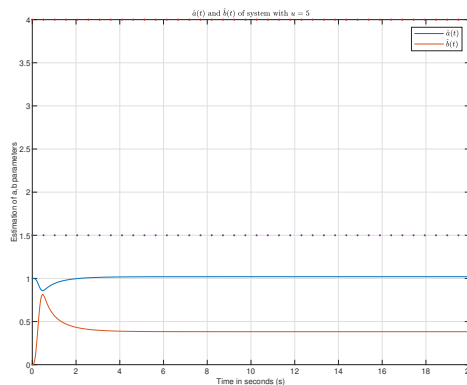
Στην προσομοίωση θα εξετάσουμε τι συμβαίνει με την λειτουργία του συστήματος εκτίμησης για 2 διαφορετικές εισόδους $u(t) = 5 \quad t \geq 0$ και $u(t) = 5 \sin(2t) \quad t \geq 0$

1.2 Βηματική είσοδος $u(t) = 5$

Για την βηματική είσοδο $u(t)=5$, με όλες τις αρχικές τιμές μηδενικές, $\gamma_1=5, \gamma_2=4$ και $\theta_m = 1$ έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



((a)) Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος και $\hat{x}(t)$ της εκτίμησης της. ((b)) Σφάλμα αναγνώρισης $e_x = x(t) - \hat{x}(t)$ συναρτήσεως του χρόνου.

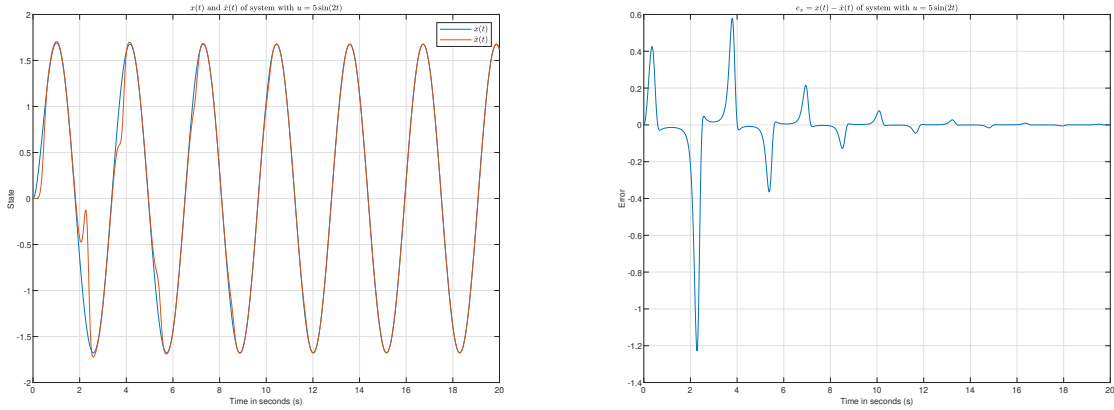


((c)) Εκτιμήσεις παραμέτρων \hat{a}, \hat{b} συναρτήσεως χρόνου. Με διακεκομμένες σημειώνονται $a=4, b=1.5$ οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων στο σύστημα.

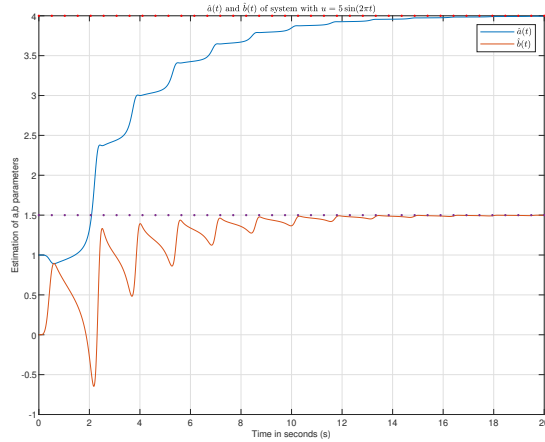
Παρατηρούμε ότι όπως περιμέναμε από την θεωρία το σφάλμα αναγνώρισης τείνει στο μηδέν και η εκτίμηση $\hat{x}(t)$ τείνει να ταυτιστεί στην $x(t)$. Ωστόσο, ενώ οι εκτιμήσεις των παραμέτρων \hat{a}, \hat{b} συγκλίνουν όπως επίσης περιμέναμε, η σύγκλιση δεν γίνεται στις πραγματικές τιμές των παραμέτρων. Γνωρίζουμε από την ανάλυση της θεωρίας ότι η είσοδος πρέπει να ικανοποιεί την ΣΕΔ (συνθήκη επιμένουσας διέγερσης) για να μπορούν οι εκτιμήσεις να συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε τον λόγο που συμβαίνει αυτό παρακάτω αφού παρουσιάσουμε πρώτα τα αποτελέσματα για την ημιτονοειδή είσοδο.

1.3 Ημιτονοειδής είσοδος $u(t) = 5 \sin(2t)$

Για την ημιτονοειδή είσοδο $u(t) = 5 \sin(2t)$, με όλες τις αρχικές τιμές μηδενικές, $\gamma_1=12, \gamma_2=14$ και $\theta_m = 1$ έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



((a)) Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος και $\hat{x}(t)$ της εκτίμησης της. ((b)) Σφάλμα αναγνώρισης $e_x = x(t) - \hat{x}(t)$ συναρτήσεως του χρόνου.



((c)) Εκτιμήσεις παραμέτρων \hat{a}, \hat{b} συναρτήσεως χρόνου. Με διακεκομμένες σημειώνονται $a=4, b=1.5$ οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων στο σύστημα.

Παρατηρούμε εδώ ότι το σφάλμα αναγνώρισης e_x συγκλίνει στο μηδέν όπως προβλέπει η θεωρία. Μάλιστα και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές σε αντίθεση με την βηματική είσοδο. Αυτό μας κάνει να αναρωτηθούμε τι διαφορά είχε η ημιτονοειδής είσοδο από την βηματική και μας οδήγησε σε σύγκλιση των εκτιμητών.

Άρα περιμέναμε την σύγκλιση των εκτιμήσεων των παραμέτρων στις πραγματικές τιμές.

Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι η $\dot{e}_\theta = \dot{\hat{\theta}} = \Gamma \phi(t) e_x = -\Gamma \phi(t) e_\theta^T \phi(t) = -\Gamma \phi(t) \phi^T(t) e_\theta$

$$\dot{e}_\theta = -\Gamma \phi(t) \phi^T(t) e_\theta$$

Έχουμε

$$A(t) = \phi(t) \phi(t)^T = \begin{bmatrix} \phi_1^2 & \phi_1 \phi_2 \\ \phi_1 \phi_2 & \phi_2^2 \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε ότι $\text{DET}(A(t))=0$ για κάθε t . Άρα δυστυχώς ενώ ξέρουμε ότι $\text{dote}_\theta - > 0$ δεν μπορούμε να δείξουμε ότι συγκλίνουν στο μηδέν και τα σφάλματα των εκτιμητών σε σχέση με τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων απλά αντιστρέφοντας τον πίνακα $A(t)$. Για να γίνει αυτό πρέπει η είσοδος του συστήματος μας να ικανοποιεί μια ΣΕΔ (Συνθήκη επιμένουσας διέγερσης). Μπορούμε από το βιβλίο του μαθήματος πάντως να δούμε τον ορισμό (6.1.1) ότι είσοδος $u(t)$ σε ΓΧΑ σύστημα αποτελεί επιμένουσα διέγερση για σύστημα τάξεως 2 (2 άγνωστες παράμετροι a, b) απαιτείται είσοδος με τουλάχιστον μια διακριτή συχνότητα μη μηδενική. Αυτή την συνθήκη από τις δύο εισόδους μας την ικανοποιεί μόνο η $u(t) = 5 \sin(2t)$ και όχι η $u(t) = 5$. Αυτή είναι μια εξήγηση γιατί στην ημιτονοειδή είσοδο έχουμε σύγκλιση των παραμέτρων ενώ με την βηματική όχι. Ωστόσο, η εργασία έγινε χωρίς να διδαχτούμε το (6.1.1) οπότε παρουσιάστηκε εδώ αυτή η πρόταση στην προσπάθεια να αποδοθεί ερμηνεία στο αποτέλεσμα της προσομοίωσης.

2 Θέμα 2

Σε αυτό το θέμα θα επαναπροσεγγίσουμε το σύστημα του προηγούμενου θέματος :

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t) \quad , \quad x(0) = 0$$

Όπως πριν τα a, b είναι άγνωστα αλλά σταθερά και σε αυτή την περίπτωση θα σχεδιάσουμε σύστημα εκτιμητή πραγματικού χρόνου των άγνωστων παραμέτρων βασισμένο στην μέθοδο Lyapunov. Προφανώς θα γίνει μια σχεδίαση για παράλληλη (parallel) τοπολογία και μια για μεικτή (series-parallel) τοπολογία. Ένα επιπλέον ζήτημα σε αυτό το θέμα είναι και η παρουσία θορύβου στην μέτρηση της κατάστασης $x(t)$ και πως αυτή επηρεάζει τις εκτιμήσεις.

2.1 Σχεδίαση Συστήματος Εκτιμητή

2.1.1 Παράλληλη τοπολογία

Το σύστημα αναγνώρισης στην παράλληλη τοπολογία θα έχει την μορφή :

$$\dot{\hat{x}}(t) = -\hat{a}(t)\hat{x}(t) + \hat{b}(t)u(t)$$

Αξιοποιώντας την συνάρτηση Lyapunov :

$$V = \frac{1}{2}e_x^2 + \frac{1}{2}e_a^2 + \frac{1}{2}e_b^2$$

Σύμφωνα με την ανάλυση του βιβλίου καταλήγουμε στις εξής διαφορικές εξισώσεις για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων:

$$\dot{\hat{a}}(t) = -\gamma_1 e_x \hat{x}(t)$$

$$\dot{\hat{b}}(t) = \gamma_2 e_x u(t)$$

Πρακτικά λόγω της παρουσίας του θορύβου $\eta(t)$ στην μέτρηση $x(t)$ έχουμε:

$$\dot{\hat{a}}(t) = -\gamma_1 e_x \hat{x}(t) = -\gamma_1 (x(t) + \eta(t) - \hat{x}(t)) \hat{x}(t)$$

$$\dot{\hat{b}}(t) = \gamma_2 e_x u(t) = \gamma_2 (x(t) + \eta(t) - \hat{x}(t)) u(t)$$

2.1.2 Μεικτή τοπολογία

Το σύστημα αναγνώρισης στην μεικτή τοπολογία θα έχει την μορφή :

$$\dot{\hat{x}}(t) = -\hat{a}(t)x(t) + \hat{b}(t)u(t) + \theta_m(x(t) - \hat{x}(t))$$

Με $\theta_m > 0$. Βέβαια, παρουσία θορύβου $\eta(t)$ στην μέτρηση της κατάστασης $x(t)$ η διαφορική εξίσωση του συστήματος αναγνώρισης είναι στη πράξη:

$$\dot{\hat{x}}(t) = -\hat{a}(t)(x(t) + \eta(t)) + \hat{b}(t)u(t) + \theta_m(x(t) + \eta(t) - \hat{x}(t))$$

Σύμφωνα με την ανάλυση του βιβλίου καταλήγουμε στις εξής διαφορικές εξισώσεις για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων:

$$\dot{\hat{a}}(t) = -\gamma_1 e_x x(t)$$

$$\dot{\hat{b}}(t) = \gamma_2 e_x u(t)$$

Πρακτικά λόγω της παρουσίας του θορύβου $\eta(t)$ στην μέτρηση $x(t)$ έχουμε:

$$\dot{\hat{a}}(t) = -\gamma_1 e_x (x(t) + \eta(t)) = -\gamma_1 (x(t) + \eta(t) - \hat{x}(t))(x(t) + \eta(t))$$

$$\dot{\hat{b}}(t) = \gamma_2 e_x u(t) = \gamma_2 (x(t) + \eta(t) - \hat{x}(t))u(t)$$

2.2 Αποτελέσματα Προσομοίωσης-Γραφήματα

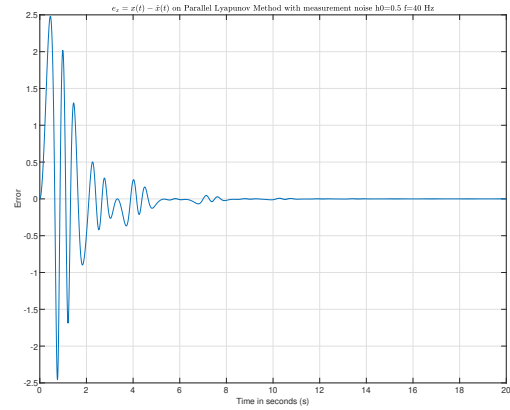
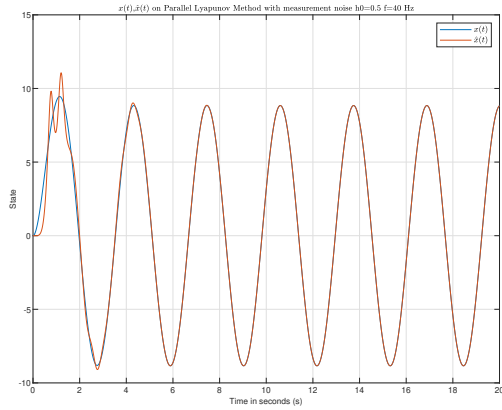
Στη προσομοίωση για το πραγματικό σύστημα θεωρούμε ότι οι τιμές των παραμέτρων ήταν :

$$a = 2 \quad b = 5$$

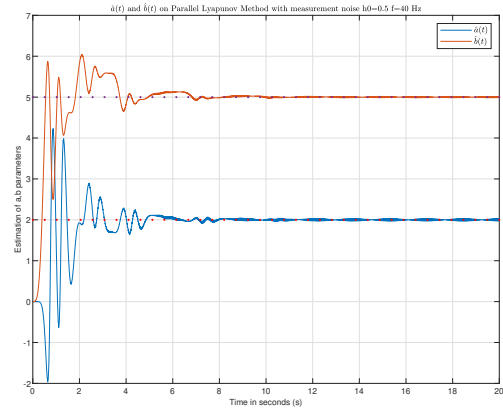
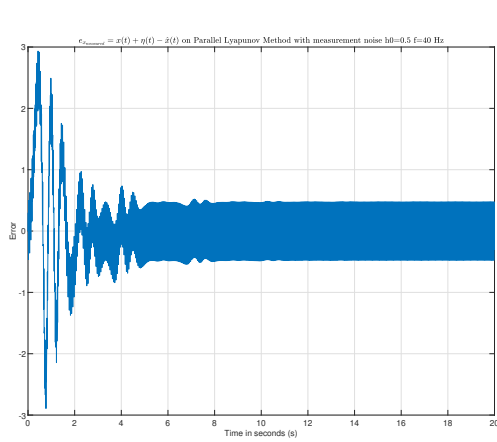
Στην προσομοίωση θα εξετάσουμε τι συμβαίνει με την λειτουργία του συστήματος εκτίμησης για είσοδο $u(t) = 5 \sin(2t)$ $t \geq 0$ και παρουσία θορύβου $\eta(t) = \eta_0 \sin(2\pi f t)$ με $\eta_0 = 0.5$, $f = 40 \text{ Hz}$.

2.2.1 Παράλληλη τοπολογία

Για την ημιτονοειδή είσοδο $u(t) = 5 \sin(2t)$, με όλες τις αρχικές τιμές μηδενικές, $\gamma_1=2, \gamma_2=2$ και παρουσία θορύβου $\eta(t) = 0.5 \sin(\pi 80 t)$ στην μέτρηση της κατάστασης του συστήματος, έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



((a)) Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος και $\hat{x}(t)$ της εκτίμησής της. ((b)) Σφάλμα αναγνώρισης $e_x = x(t) - \hat{x}(t)$ συναρτήσεως του χρόνου.

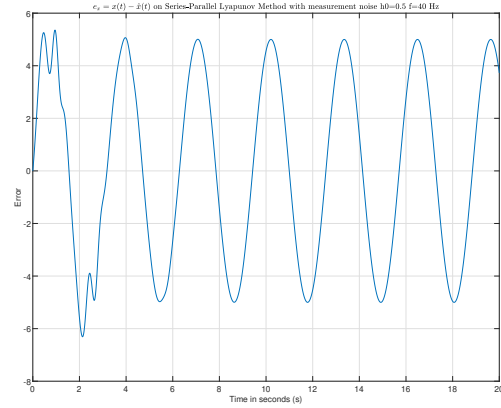
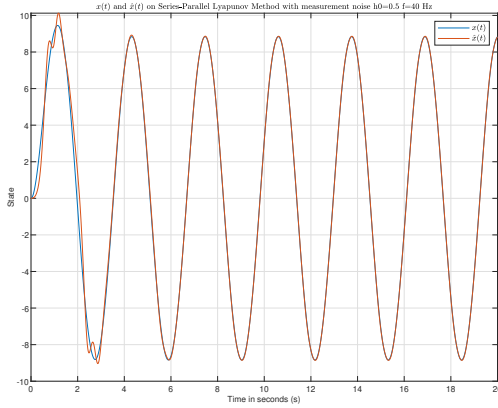


((c)) Σφάλμα αναγνώρισης $e_{x_{measured}} = x(t)_{measured} - \hat{x}(t)$ συναρτήσεως του χρόνου. ((d)) Εκτιμήσεις παραμέτρων \hat{a}, \hat{b} συναρτήσεως χρόνου. Με διακεκομμένες σημειώνονται $a=2, b=5$ οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων στο σύστημα.

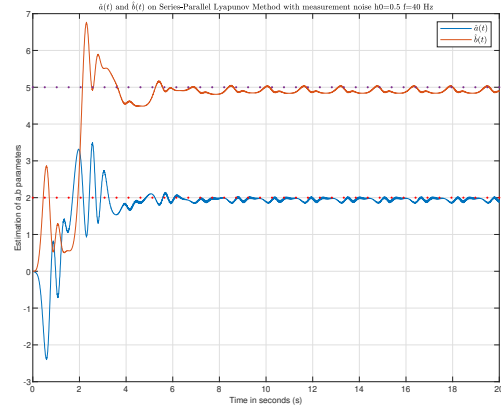
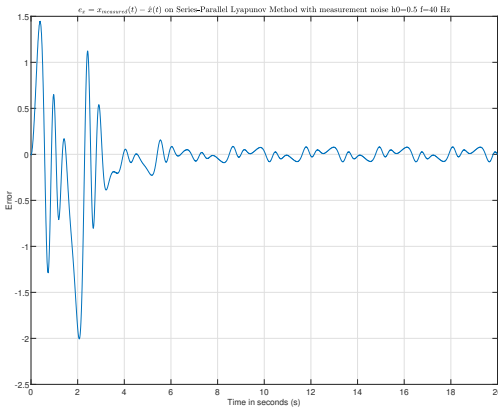
Βλέπουμε ότι το θεωρητικό σφάλμα αναγνώρισης τείνει στο μηδέν $x - \hat{x} \rightarrow 0$ ενώ το μετρούμενο προφανώς εδώ τείνει στον θόρυβο. Βλέπουμε επίσης ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων τείνουν πάνω στις πραγματικές τιμές αλλά παρουσιάζουν μικρές ταλαντώσεις γύρω από αυτές λόγω του θορύβου μέτρησης. Συνεπώς, η ύπαρξη του θορύβου προφανώς επηρεάζει την λειτουργία του εκτιμητή με παράλληλη τοπολογία αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση αυτός δεν είναι τόσο έντονος ώστε να μας απομακρύνει από την ιδανική λειτουργία χωρίς θόρυβο ($\eta_0 = 0$).

2.2.2 Μεικτή τοπολογία

Για την ημιτονοειδή είσοδο $u(t) = 5 \sin(2t)$, με όλες τις αρχικές τιμές μηδενικές, $\gamma_1=2, \gamma_2=2, \eta_m=3$ και παρουσία θορύβου $\eta(t) = 0.5 \sin(\pi 80t)$ στην μέτρηση της κατάστασης του συστήματος, έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα: Η εικόνα της προσομοίωσης για την μεικτή τοπολογία είναι παρόμοια με αυτή της παράλληλης αλλά ωστόσο είναι



((a)) Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος και $\hat{x}(t)$ της εκτίμησής της. ((b)) Σφάλμα αναγνώρισης $e_x = x(t) - \hat{x}(t)$ συναρτήσεως του χρόνου.



((c)) Σφάλμα αναγνώρισης $e_{x_{measured}} = x(t)_{measured} - \hat{x}(t)$ συναρτήσεως του χρόνου. ((d)) Εκτιμήσεις παραμέτρων \hat{a}, \hat{b} συναρτήσεως χρόνου. Με διακεκομμένες σημειώνονται $a=2, b=5$ οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων στο σύστημα.

σαφώς επηρεασμένη η μεικτή αρκετά περισσότερο από την παράλληλη από τον θόρυβο της μέτρησης. Πράγματι βλέπουμε ότι το θεωρητικό e_x δεν συγκλίνει στο μηδέν τόσο καλά στην μεικτή τοπολογία όπως κάνει στην παράλληλη. Το θεωρητικό e_x εμφανίζει σαφώς μεγαλύτερη διακύμανση γύρω από το μηδέν σε σχέση με την παράλληλη. Τα ίδια ισχύουν και για τις εκτιμήσεις οι οποίες ενώ φτάνουν αρκετά κοντά στις πραγματικές τιμές των παραμέτρων παρουσιάζουν σημαντικά μεγαλύτερη διακύμανση σε σχέση με την παράλληλη τοπολογία με τον ίδιο θόρυβο. Αυτό είναι λογικό από την θεωρία και το περιμέναμε. Αφού ισχύει για την εκτίμηση της a

παράμετρου:

$$(II) \quad \dot{\hat{a}}_{parallel}(t) = -\gamma_1(x(t) + \eta(t) - \hat{x}(t))(\hat{x}(t))$$

$$(M) \quad \dot{\hat{a}}_{seriesparallel}(t) = -\gamma_1(x(t) + \eta(t) - \hat{x}(t))(x(t) + \eta(t))$$

Βλέπουμε ότι η επιρροή του θορύβου στην παράλληλη περίπτωση εμφανίζεται γραμμικά ενώ στην μεικτή τοπολογία περιλαμβάνει και τετραγωνικό όρο. Άρα έχουμε επιβεβαιώσει έμπρακτα στην προσομοίωση ότι η μεικτή τοπολογία είναι πιο πολύ ευαίσθητη στον θόρυβο της μέτρησης της κατάστασης του συστήματος όπως περιμέναμε από την θεωρία.

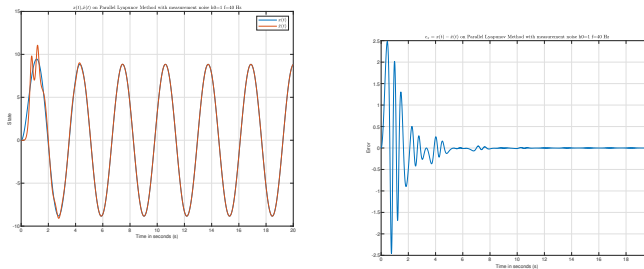
2.3 Δοκιμές με άλλους θορύβους

2.3.1 Παράλληλη δομή

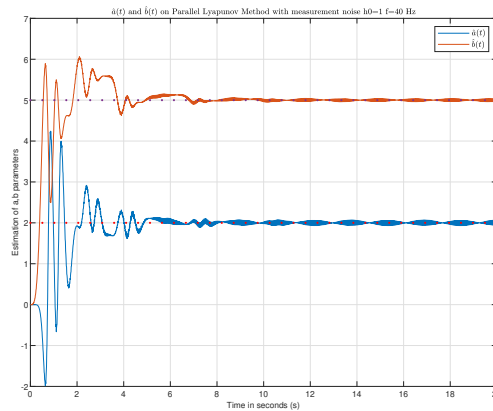
Άμα μεγαλώσουμε το πλάτος η_0 παίρνουμε τα εξής γραφήματα:

$$\eta_0 = 1$$

Βλέπουμε ότι η αύξηση του πλάτους του θορύβου στην παράλληλη τοπολογία (διατηρώντας σταθερή συχνότητα



((a)) Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x(t)$ του ((b)) Σφάλμα αναγνώρισης $e_x = x(t) - \hat{x}(t)$ της εκ- $x(t) - \hat{x}(t)$ συναρτήσεως του χρόνου της.

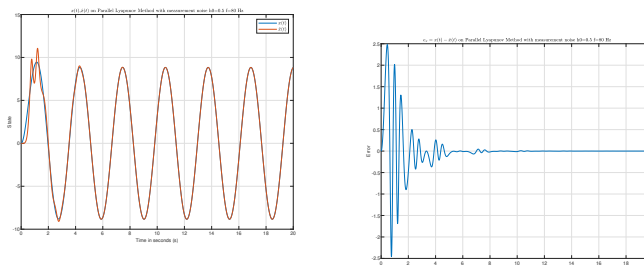


((c)) Εκτιμήσεις παραμέτρων \hat{a}, \hat{b} συναρτήσεως χρόνου. Με διακεκομμένες σημειώνονται $a=2, b=5$ οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων στο σύστημα.

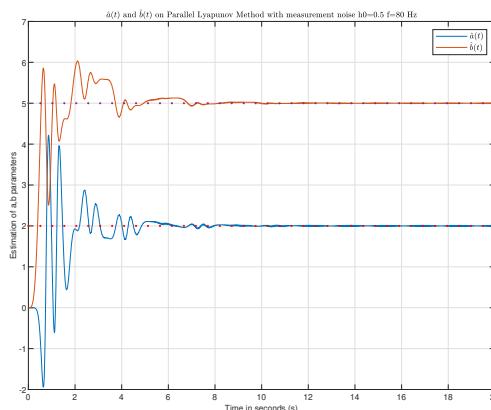
$f=40$ Hz) οδηγεί σε μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης των εκτιμήσεων λόγω του θορύβου. Προφανώς, όσο αυξάνουμε το η_0 τόσο πιο έντονες θα γίνουν αυτές οι ταλαντώσεις και θα οδηγηθούμε σε αποτελέσματα πιο απομακρυσμένα από τα ιδανικά.

$$f = 80 \text{ Hz}$$

Παρατηρούμε ότι με την αύξηση της συχνότητας του θορύβου και την διατήρηση του πλάτους του ($\eta_0=0.5$)



((a)) Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x(t)$ του ((b)) Σφάλμα αναγνώρισης $e_x = x(t) - \hat{x}(t)$ της εκ- $x(t) - \hat{x}(t)$ συναρτήσεως του χρόνου της.



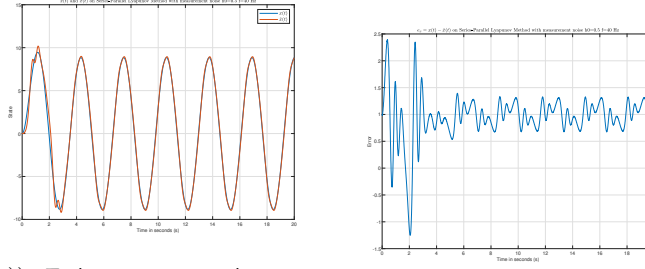
((c)) Εκτιμήσεις παραμέτρων \hat{a}, \hat{b} συναρτήσεως χρόνου. Με διακεκομμένες σημειώνονται $a=2, b=5$ οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων στο σύστημα.

η επιρροή του θορύβου στην εκτίμηση φαίνεται να έχει αποσβεστεί πιο πολύ σε σχέση με την περίπτωση που είχαμε την μισή συχνότητα $f=40 \text{ Hz}$. Αυτό μπορούμε να το ερμηνεύσουμε παρατηρώντας ότι καταλήγουμε τα $x(t), \hat{x}(t)$ καταλήγουν σε ταλαντώσεις (πολύ όμοιες με ημίτονου) ενώ το $x - \hat{x} > 0$ άρα το μετρούμενο $e_x > \eta(t)$. Συνεπώς, οι ρυθμοί μεταβολής των εκτιμήσεων (άρα και των e_a, e_b εκφράζονται ως αθροίσματα ημίτονων με συχνότητες κοντά σε αυτή του θορύβου. Επομένως από την χρονική ολοκλήρωση των e_a, e_b η μεγαλύτερη συχνότητα 80 Hz πάει στον παρανομαστή και μικραίνει σε σχέση με πριν την επιρροή του θορύβου μέτρησης στις εκτιμήσεις. Αυτή η ανάλυση δεν είναι αυστηρά μαθηματική αλλά μια απόπειρα να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα αυτά στην παράλληλη τοπολογία.

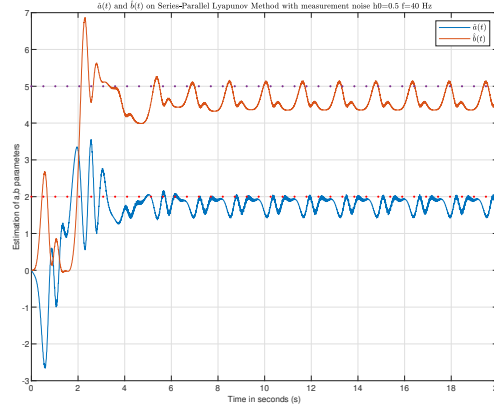
2.3.2 Μεικτή Τοπολογία

Άμα μεγαλώσουμε το πλάτος η_0 παίρνουμε τα εξής γραφήματα:

$$\eta_0 = 1$$



((a)) Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x(t)$ του ((b)) Σφάλμα αναγνώρισης $e_x = x(t) - \hat{x}(t)$ της $e_x = x(t) - \hat{x}(t)$ συναρτήσεως του χρόνου της.



((c)) Εκτιμήσεις παραμέτρων \hat{a}, \hat{b} συναρτήσεως χρόνου. Με διακεκομμένες σημειώνονται $a=2, b=5$ οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων στο σύστημα.

Παρατηρούμε ότι μονάχα ο διπλασιασμός του πλάτους του θορύβου επηρεάζει το σύστημα της μεικτής τοπολογίας αισθητά. Οι ταλαντώσεις του e_x και των εκτιμήσεων των παραμέτρων a, b κατά από τις πραγματικές τιμές γίνονται πολύ πιο αισθητοί από τις αντίστοιχες στην παράλληλη τοπολογία λόγω διπλασιασμού του πλάτους του θορύβου. Συνεπώς, και αυτό το παράδειγμα δείχνει πόσο πιο εύαλωτο είναι το μεικτό από το παράλληλο σύστημα στον θόρυβο στην μέτρηση του $x(t)$.

3 Θέμα 3

Στο παρόν θέμα έχουμε το εξής γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0$$

Με $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ και αρνητικά ημιορισμένος σταθερός αλλά άγνωστος πίνακας, και $B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ σταθερός αλλά άγνωστος πίνακας. Η είσοδος αυτού του γραμμικού δυναμικού συστήματος είναι η $u(t) = 4 \sin(2\pi t) + 2 \sin(8\pi t)$, $t \geq 0$.

Σκοπός μας είναι η σχεδίαση εκτιμητή πραγματικού χρόνου (online) βασισμένος στη μέθοδο Lyapunov που θα εκτιμά τους άγνωστους πίνακες A,B του πραγματικού συστήματος και η προσομοίωση της λειτουργίας αυτού.

3.1 Σχεδίαση Συστήματος Εκτιμητή

3.1.1 Παράλληλη δομή

Για παράλληλη δομή το σύστημα αναγνώρισης είναι το:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t)\hat{x}(t) + \hat{B}(t)u(t)$$

Με $\hat{x}(t)$ την εκτίμηση της κατάστασης-εξόδου του συστήματος, $\hat{A}(t)$ την εκτίμηση του πίνακα A, και $\hat{B}(t)$ την εκτίμηση του πίνακα B. Το σφάλμα αναγνώρισης είναι ίσο με :

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\dot{e}_x(t) = Ax(t) + Bu(t) - \hat{A}(t)\hat{x}(t) - \hat{B}(t)u(t)$$

Θα ορίσουμε στη συνέχεια την εξής συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}e_x^T e_x + \frac{1}{2}\text{trace}((\hat{A}(t) - A)^T(\hat{A}(t) - A)) + \frac{1}{2}\text{trace}((\hat{B}(t) - B)^T(\hat{B}(t) - B))$$

Στη πράξη η Lyapunov αυτή εμπεριέχει τα αθροίσματα των σφαλμάτων υψωμένα στο τετράγωνο των εκτιμήσεων των παραμέτρων σε σχέση με την πραγματική τους τιμή καθώς και τα e_{x1}, e_{x2} στο τετράγωνο. Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\dot{V} = e_x^T \dot{e}_x + \text{trace}(\mathbf{e}_A^T \dot{\hat{A}}) + \text{trace}(\mathbf{e}_B^T \dot{\hat{B}})$$

$$\dot{V} = e_x^T (Ax(t) + Bu(t) - \hat{A}(t)\hat{x}(t) - \hat{B}(t)u(t)) + \text{trace}(\mathbf{e}_A^T \dot{\hat{A}}) + \text{trace}(\mathbf{e}_B^T \dot{\hat{B}})$$

$$\dot{V} = e_x^T (Ae_x - \mathbf{e}_A \hat{x}(t) - \mathbf{e}_B u(t)) + \text{trace}(\mathbf{e}_A^T \dot{\hat{A}}) + \text{trace}(\mathbf{e}_B^T \dot{\hat{B}})$$

$$\dot{V} = e_x^T Ae_x - e_x^T \mathbf{e}_A \hat{x}(t) - e_x^T \mathbf{e}_B u(t) + \text{trace}(\mathbf{e}_A^T \dot{\hat{A}}) + \text{trace}(\mathbf{e}_B^T \dot{\hat{B}})$$

Αφού τελικά τα μεγέθη $\mathbf{e}_B^T \dot{\hat{B}}$ και $-e_x^T \mathbf{e}_B u(t)$ είναι βαθμωτά ισούνται και με το trace-ίχνος τους, αρά και το άθροισμα τους είναι ίσο με το trace του:

$$\dot{V} = e_x^T Ae_x + \text{trace}(\mathbf{e}_A^T \dot{\hat{A}} - \mathbf{e}_A \hat{x}(t)e_x^T) + \text{trace}(\mathbf{e}_B^T \dot{\hat{B}} - e_x^T \mathbf{e}_B u(t))$$

Ισχύει ότι $\mathbf{e}_A, \hat{x}(t)e_x^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Ακόμα γνωρίζουμε ότι $\text{trace}(A) = \text{trace}(A^T)$ και $\text{trace}(MN) = \text{trace}(NM)$ για τετραγωνικούς πίνακες A,M,N. Άρα

$$\text{trace}(\mathbf{e}_A \hat{x}(t)e_x^T) = \text{trace}((\hat{x}(t)e_x^T)^T \mathbf{e}_A^T) = \text{trace}((\mathbf{e}_A^T)(\hat{x}(t)e_x^T)^T) = \text{trace}((\mathbf{e}_A^T)e_x \hat{x}(t)^T)$$

Αντίστοιχα για το $\text{trace}(e_x^T \mathbf{e}_B u(t))$ το $u(t)$ είναι βαθμωτό μέγεθος ενώ το $e_x^T \mathbf{e}_B$ είναι επίσης βαθμωτό και για αυτό το λόγο μπορούμε να πούμε ότι $\text{trace}(e_x^T \mathbf{e}_B u(t)) = \text{trace}(\mathbf{e}_B^T e_x u(t))$ αφού ο ανάστροφος βαθμωτού είναι ίσος με τον εαυτό του. Τελικά έχουμε μετά από όλα αυτά:

$$\dot{V} = e_x^T Ae_x + \text{trace}(\mathbf{e}_A^T (\dot{\hat{A}} - e_x \hat{x}(t)^T)) + \text{trace}(\mathbf{e}_B^T (\dot{\hat{B}} - e_x u(t)))$$

Επιλέγουμε τις δυναμικές των εκτιμήσεων των πινάκων με σκοπό να μηδενίσουμε το εσωτερικό των ιχνών. Άρα:

$$\dot{\hat{A}} = e_x \hat{x}^T$$

$$\dot{\hat{B}} = e_x u(t)$$

Και έτσι η παράγωγος την συνάρτησης Lyapunov καταλήγει να είναι αρνητικά ημιορισμένη : $\dot{V} = e_x^T A e_x \leq 0$. Προφανώς άμα είχαμε επιλέξει ως συνάρτηση Lyapunov να περιλαμβάνει κέρδη $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ τέτοια ώστε:

$$V = \frac{1}{2} e_x^T e_x + \frac{1}{2\gamma_1} \text{trace}((\hat{A}(t) - A)^T (\hat{A}(t) - A)) + \frac{1}{2\gamma_2} \text{trace}((\hat{B}(t) - B)^T (\hat{B}(t) - B))$$

Θα καταλήγαμε στις εξής δυναμικές των εκτιμήσεων των πινάκων:

$$\dot{\hat{A}} = \gamma_1 e_x \hat{x}^T$$

$$\dot{\hat{B}} = \gamma_2 e_x u(t)$$

3.1.2 Μεικτή δομή

Για παράλληλη δομή το σύστημα αναγνώρισης είναι το:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t)x(t) + \hat{B}(t)u(t) + \Theta_m(x(t) - \hat{x}(t))$$

Με $\hat{x}(t)$ την εκτίμηση της κατάστασης-εξόδου του συστήματος, $\hat{A}(t)$ την εκτίμηση του πίνακα A, $\hat{B}(t)$ την εκτίμηση του πίνακα B και Θ_m θετικά ορισμένος διαγώνιος πίνακας. Το σφάλμα αναγνώρισης είναι ίσο με :

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\dot{e}_x(t) = Ax(t) + Bu(t) - \hat{A}(t)x(t) - \hat{B}(t)u(t) - \Theta_m(x(t) - \hat{x}(t))$$

Θα ορίσουμε στη συνέχεια την εξής συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} e_x^T e_x + \frac{1}{2} \text{trace}((\hat{A}(t) - A)^T (\hat{A}(t) - A)) + \frac{1}{2} \text{trace}((\hat{B}(t) - B)^T (\hat{B}(t) - B))$$

Στη πράξη η Lyapunov αυτή εμπεριέχει τα αθροίσματα των σφαλμάτων υψωμένα στο τετραγώνων των εκτιμήσεων των παραμέτρων σε σχέση με την πραγματική τους τιμή καθώς και τα e_{x1}, e_{x2} στο τετράγωνο. Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\dot{V} = e_x^T \dot{e}_x + \text{trace}(\mathbf{e}_A^T \dot{\hat{A}}) + \text{trace}(\mathbf{e}_B^T \dot{\hat{B}})$$

$$\dot{V} = e_x^T (Ax(t) + Bu(t) - \hat{A}(t)x(t) - \hat{B}(t)u(t) - \Theta_m(x(t) - \hat{x}(t))) + \text{trace}(\mathbf{e}_A^T \dot{\hat{A}}) + \text{trace}(\mathbf{e}_B^T \dot{\hat{B}})$$

$$\dot{V} = e_x^T (-\Theta_m)e_x - \mathbf{e}_A x(t) - \mathbf{e}_B u(t) + \text{trace}(\mathbf{e}_A^T \dot{\hat{A}}) + \text{trace}(\mathbf{e}_B^T \dot{\hat{B}})$$

$$\dot{V} = e_x^T (-\Theta_m)e_x - e_x^T \mathbf{e}_A x(t) - e_x^T \mathbf{e}_B u(t) + \text{trace}(\mathbf{e}_A^T \dot{\hat{A}}) + \text{trace}(\mathbf{e}_B^T \dot{\hat{B}})$$

Αφού τελικά τα μεγέθη $\mathbf{e}_B^T \dot{\hat{B}}$ και $-e_x^T \mathbf{e}_B u(t)$ είναι βαθμωτά ισούνται και με το trace-ίχνος τους, αρά και το άθροισμα τους είναι ίσο με το trace του:

$$\dot{V} = e_x^T (A - \Theta_m)e_x + \text{trace}(\mathbf{e}_A^T \dot{\hat{A}} - \mathbf{e}_A x(t)e_x^T) + \text{trace}(\mathbf{e}_B^T \dot{\hat{B}} - e_x^T \mathbf{e}_B u(t))$$

Ισχύει ότι $\mathbf{e}_A, x(t)e_x^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Ακόμα γνωρίζουμε ότι $\text{trace}(A) = \text{trace}(A^T)$ και $\text{trace}(MN) = \text{trace}(NM)$ για τετραγωνικούς πίνακες A,M,N. Άρα

$$\text{trace}(\mathbf{e}_A x(t)e_x^T) = \text{trace}((x(t)e_x^T)^T \mathbf{e}_A^T) = \text{trace}((\mathbf{e}_A^T)(x(t)e_x^T)^T) = \text{trace}((\mathbf{e}_A^T)e_x x(t)^T)$$

Αντίστοιχα για το $trace(e_x^T \mathbf{e}_B u(t))$ το $u(t)$ είναι βαθμωτό μέγεθος ενώ το $e_x^T \mathbf{e}_B$ είναι επίσης βαθμωτό και για αυτό το λόγο μπορούμε να πούμε ότι $trace(e_x^T \mathbf{e}_B u(t)) = trace(\mathbf{e}_B^T e_x u(t))$ αφού ο ανάστροφος βαθμωτού είναι ίσος με τον εαυτό του. Τελικά έχουμε μετά από όλα αυτά:

$$\dot{V} = e_x^T (-\Theta_m) e_x + trace(\mathbf{e}_A^T (\dot{\hat{A}} - e_x x^T(t))) + trace(\mathbf{e}_B^T (\dot{\hat{B}} - e_x u(t)))$$

Επιλέγουμε τις δυναμικές των εκτιμήσεων των πινάκων με σκοπό να μηδενίσουμε το εσωτερικό των ιχνών. Άρα:

$$\dot{\hat{A}} = e_x x^T(t)$$

$$\dot{\hat{B}} = e_x u(t)$$

Και έτσι η παράγωγος την συνάρτησης Lyapunov καταλήγει να είναι αρνητικά ημιορισμένη: $\dot{V} = -e_x^T \Theta_m e_x \leq 0$. Προφανώς άμα είχαμε επιλέξει ως συνάρτηση Lyapunov να περιλαμβάνει κέρδη $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ τέτοια ώστε:

$$V = \frac{1}{2} e_x^T e_x + \frac{1}{2\gamma_1} trace((\hat{A}(t) - A)^T (\hat{A}(t) - A)) + \frac{1}{2\gamma_2} trace((\hat{B}(t) - B)^T (\hat{B}(t) - B))$$

Θα καταλήγαμε στις εξής δυναμικές των εκτιμήσεων των πινάκων:

$$\dot{\hat{A}} = \gamma_1 e_x x^T(t)$$

$$\dot{\hat{B}} = \gamma_2 e_x u(t)$$

3.2 Αποτελέσματα Προσομοίωσης-Γραφήματα

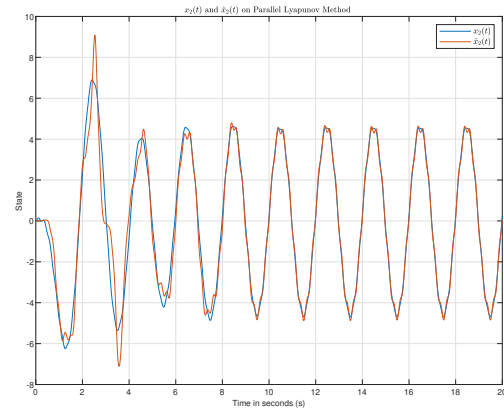
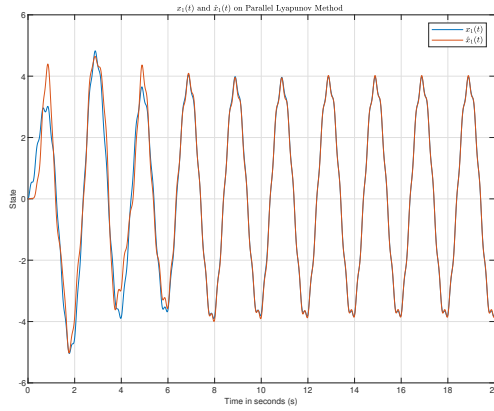
Στη προσομοίωση για το πραγματικό σύστημα θεωρούμε ότι οι τιμές των πινάκων της εξίσωσης κατάστασης του συστήματος ήταν :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

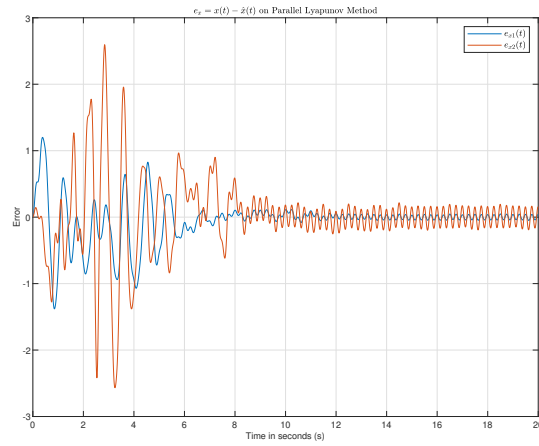
Στην προσομοίωση θα εξετάσουμε τι συμβαίνει με την λειτουργία του συστήματος εκτίμησης για είσοδο δυο διακριτών συχνοτήτων $u(t) = 4 \sin(\pi t) + 2 \sin(8\pi t)$ $t \geq 0$.

3.2.1 Παράλληλη τοπολογία

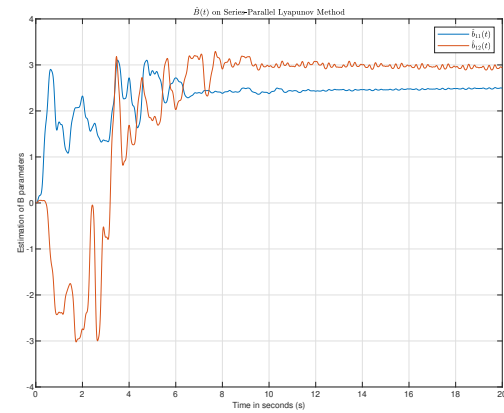
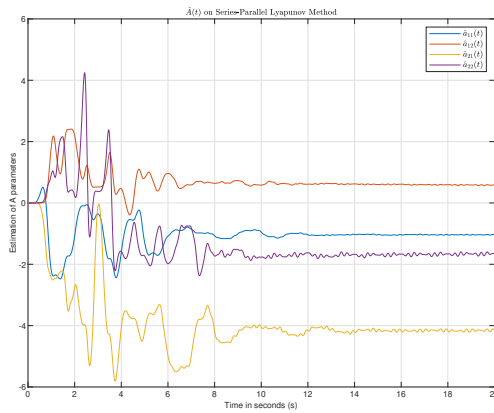
Για την είσοδο του συστήματος $u(t) = u(t) = 4 \sin(\pi t) + 2 \sin(8\pi t)$, με όλες τις αρχικές τιμές μηδενικές, $\gamma_1=2, \gamma_2=2$ και για χρόνο 0-20 sec έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



((a)) Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x_1(t)$ του συστήματος και $\hat{x}_1(t)$ της εκτίμησής της. Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x_2(t)$ του συστήματος και $\hat{x}_2(t)$ της εκτίμησής της.



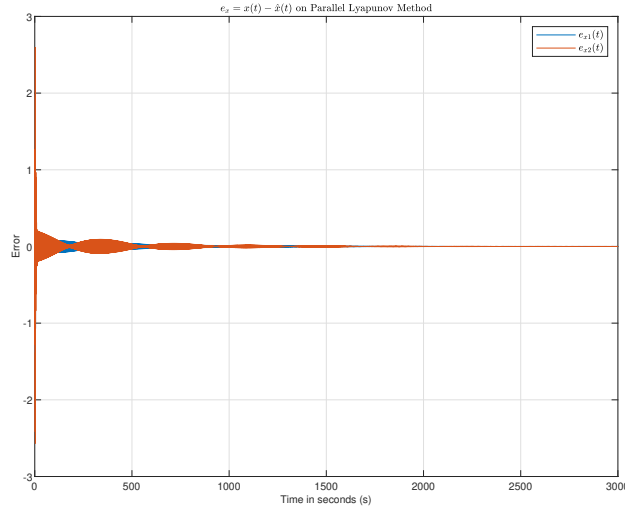
Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x_2(t)$ του συστήματος και $\hat{x}_2(t)$ της εκτίμησής της.



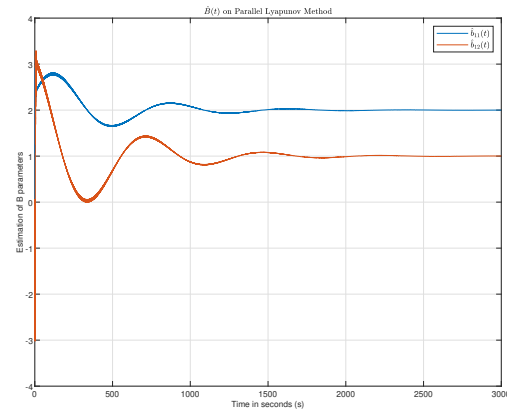
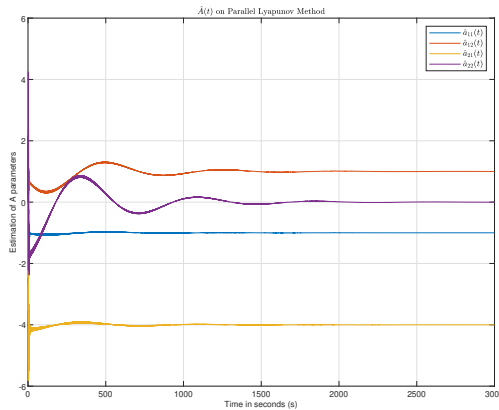
((a)) Εκτιμήσεις παραμέτρων του πίνακα Α συναρτήσει του χρόνου. ((b)) Εκτιμήσεις παραμέτρων του πίνακα Β συναρτήσει του χρόνου.

Βλέπουμε ότι κάποιες από τις παραμέτρους έχουν σχετικά σταθεροποιηθεί κάνοντάς κάποιες πολύ μικρές τα-

λαντώσεις κοντά στις πραγματικές τους τιμές ενώ κάποιες άλλες φαίνεται να μην έχουν σταθεροποιηθεί πλήρως ενώ απέχουν αισθητά από τις πραγματικές τους τιμές. Για παράδειγμα η \hat{b}_{12} αν και φαίνεται εκ πρώτης όψης σχετικά σταθερή άμα εξαιρέσουμε την μικρή ταλάντωση, κοιτώντας την πιο προσεκτικά βλέπουμε ότι έχει μια συνεχή αλλά πολύ αργή άνοδο. Μάλιστα και τα σφάλματα αναγνώρισης ταλαντώνονται ακόμα και δεν έχουν συγκλίνει στο μηδέν. Όποτε, μεγαλώσαμε τον χρόνο της προσομοίωσης στα 3000 sec για να δούμε τι συμβαίνει με αυτή την πολύ αργή άνοδο. Προφανώς το διάγραμμα των $x(t)$, $\hat{x}(t)$ είναι δύσκολο εδώ γιατί λόγω του μεγάλου χρονικού παραθύρου δεν μπορούμε να διακρίνουμε τις ταλαντώσεις των καταστάσεων. Ωστόσο, ελέγχοντας τα γραφήματα των εκτιμητών και των σφαλμάτων αναγνώρισης έχουμε πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα:



((a)) Εκτιμήσεις παραμέτρων του πίνακα A συναρτήσει χρόνου.

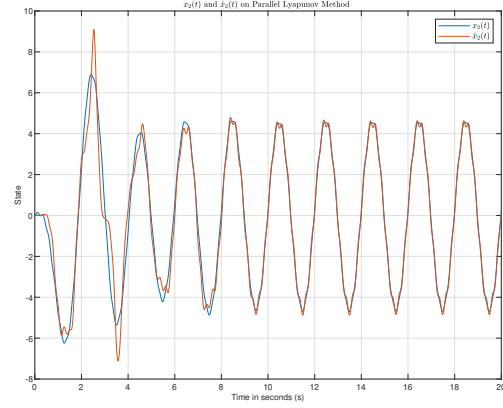
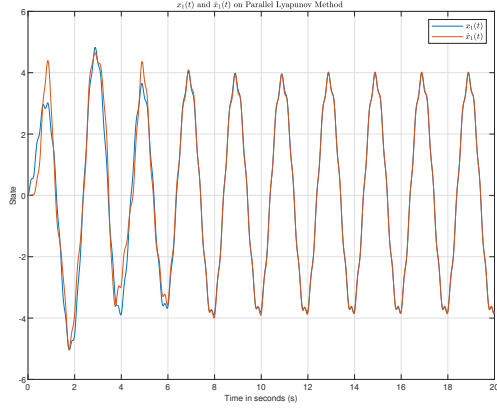


((b)) Εκτιμήσεις παραμέτρων του πίνακα A συναρτήσει χρόνου. ((c)) Εκτιμήσεις παραμέτρων του πίνακα B συναρτήσει χρόνου.

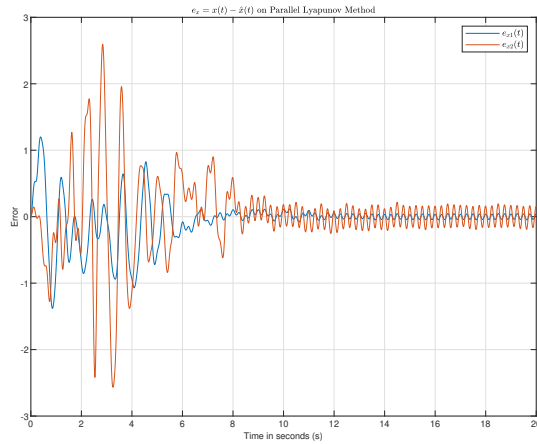
Βλέπουμε ότι δίνοντας αρκετό χρόνο (περίπου 2400sec=20 λεπτά) οι εκτιμήσεις των παραμέτρων των πινάκων A,B συγκλίνουν πάνω στις πραγματικές τιμές. Σε αντίστοιχο χρόνο και οι τιμές των σφαλμάτων συγκλίνουν στο μηδέν. Μπορούμε να κάνουμε πιο σύντομη αυτή την σύγκλιση επιλέγοντας μεγαλύτερα γ αλλά με αυτό το τρόπο κάνουμε πολύ πιο stiff τις διαφορικές εξισώσεις του εκτιμητή. Αυτή η αργή σύγκλιση οφείλεται σε διάφορα αίτια. Ένα από αυτά είναι ότι ο A που εμπλέκεται στην \dot{V} δεν έχει ικανοποιητικά μεγάλες ιδιοτιμές έτσι ώστε η σύγκλιση να γίνεται γρηγορότερα. Όπως θα δούμε αργότερα στην μεικτή τοπολογία με την χρήση του Θ_m με μεγαλύτερες ιδιοτιμές θα έχουμε γρηγορότερη σύγκλιση.

3.2.2 Μεικτή τοπολογία

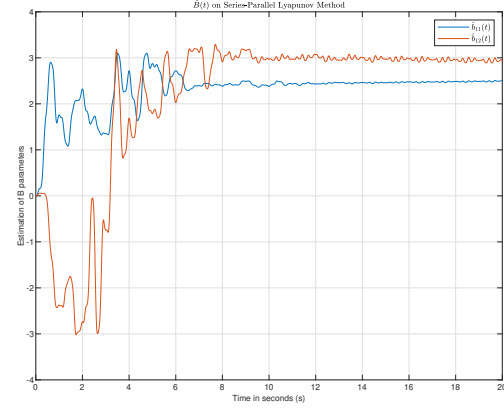
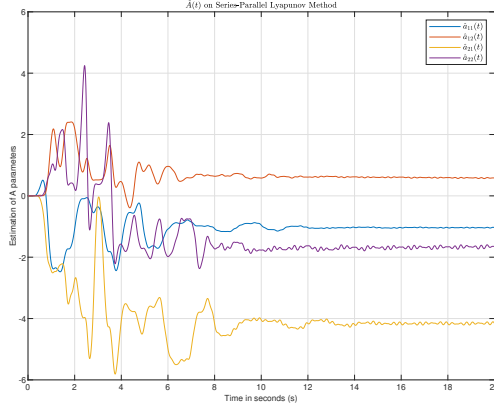
Για την είσοδο του συστήματος $u(t) = 4\sin(\pi t) + 2\sin(8\pi t)$, με όλες τις αρχικές τιμές μηδενικές, $\gamma_1=2, \gamma_2=2$, $\Theta_m = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ και για χρόνο 0-20 sec έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



((a)) Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x_1(t)$ του συστήματος και $\hat{x}_1(t)$ της εκτίμησής της. Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x_2(t)$ του συστήματος και $\hat{x}_2(t)$ της εκτίμησής της.



Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x_2(t)$ του συστήματος και $\hat{x}_2(t)$ της εκτίμησής της.



((a)) Εκτιμήσεις παραμέτρων του πίνακα A συναρτήσει χρόνου. ((b)) Εκτιμήσεις παραμέτρων του πίνακα B συναρτήσει χρόνου.

Παρατηρούμε εδώ ότι πάλι και τα σφάλματα αναγνώρισης των καταστάσεων e_{x_1}, e_{x_2} συγκλίνουν στο μηδέν αλλά και ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων των πινάκων A,B συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές. Μάλιστα η σύγκλιση πραγματοποιείται τώρα μέσα σε 2-3 λεπτά σημαντική βελτίωση από το τα 20 λεπτά που χρειάστηκε στην παράλληλη τοπολογία για την σύγκλιση με τα ίδια κέρδη γ . Άρα βλέπουμε ένα πλεονέκτημα της μεικτής τοπολογίας είναι η χρήση ικανοποιητικού Θ_m με κατάλληλες ιδιοτιμές το οποίο θα οδηγεί το σύστημα εκτίμησης σε συντομότερη σύγκλιση των παραμέτρων αλλά και δεν θα πρέπει να είναι οι ιδιοτιμές του υπερβολικά μεγάλες και να κάνουν stiff την διαφορική εξίσωση του συστήματος αναγνώρισης $\dot{\hat{x}}$. Θεωρώ ότι η επιλογή που έγινε είναι ικανοποιητική καθώς και ο χρόνος της προσομοίωσης είναι αρκετά λογικός για να εξάγουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα σε ένα σύστημα με είσοδο περιόδου $T=0.5$ s.

4 Θέμα 4

Στο τελευταίο θέμα έχουμε το εξής μη γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x} = -\theta_1^* f(x) + \theta_2^* u, \quad x(0) = 0$$

Παρόλο που είναι μη γραμμικό το σύστημα είναι γραμμικά παραμετροποιήσιμο. Όπως στα προηγούμενα θέματα οι παράμετροι θ_1^*, θ_2^* είναι σταθερές αλλά άγνωστες καθώς είναι και θετικές και επιθυμούμε τον σχεδιασμό κατάλληλου συστήματος αναγνώρισης μέσω του οποίου θα γίνεται η εκτίμηση των παραμέτρων βασισμένη στην μέθοδο Lyapunov.

4.1 Σχεδίαση Συστήματος Εκτιμητή

Αναγκαστικά αξιοποιούμε τη μεικτή τοπολογία του συστήματος αναγνώρισης αφού το σύστημα είναι μη-γραμμικό. Άρα το σύστημα αναγνώρισης είναι:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 f(x) + \hat{\theta}_2 u + \theta_m(x - \hat{x})$$

Το σφάλμα αναγνώρισης είναι ίσο με : $e_x = x - \hat{x}$ και άρα η παράγωγος του είναι ίση με:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= -\theta_1^* f(x) + \theta_2^* u + \hat{\theta}_1 f(x) - \hat{\theta}_2 u - \theta_m(x - \hat{x}) \\ \dot{e}_x &= -\theta_m e_x + e_{\theta_1} f(x) - e_{\theta_2} u \end{aligned}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} e_x^2 + \frac{1}{2\gamma_1} e_{\theta_1}^2 + \frac{1}{2\gamma_2} e_{\theta_2}^2$$

Η συνάρτηση είναι θετικά ορισμένη με $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}_x e_x + \frac{1}{\gamma_1} \dot{e}_{\theta_1} e_{\theta_1} + \frac{1}{\gamma_2} \dot{e}_{\theta_2} e_{\theta_2} \\ \dot{V} &= (-\theta_m e_x + e_{\theta_1} f(x) - e_{\theta_2} u) e_x + \frac{1}{\gamma_1} \dot{\hat{\theta}}_1 e_{\theta_1} + \frac{1}{\gamma_2} \dot{\hat{\theta}}_2 e_{\theta_2} \\ \dot{V} &= -\theta_m e_x^2 + e_{\theta_1} (f(x) e_x + \frac{1}{\gamma_1} \dot{\hat{\theta}}_1) + e_{\theta_2} (-e_x u + \frac{1}{\gamma_2} \dot{\hat{\theta}}_2) \end{aligned}$$

Επιλέγουμε τις εξής διαφορικές για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων και έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_1 &= -\gamma_1 f(x) e_x \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= \gamma_2 e_x u \end{aligned}$$

Και έτσι η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov γίνεται αρνητικά ημισορισμένη αφού $\theta_m > 0$:

$$\dot{V} = -\theta_m e_x^2 \leq 0$$

$V > 0$ και $\dot{V} \leq 0$ άρα $e_x, e_{\theta_1}, e_{\theta_2} \in L_\infty$. Το πραγματικό σύστημα το θεωρούμε ευσταθές άρα $x \in L_\infty$ και συνεπώς $\hat{x} \in L_\infty$ αλλά και γιατί θ_1^*, θ_2^* φραγμένες σταθερές ισχύει ότι $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \in L_\infty$. Από λήμμα Barbalat έχουμε $\lim_{t \rightarrow \infty} e_x(t) = 0$ και επομένως $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\theta}}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\theta}}_2 = 0$. Δεν έχουμε καμία εγγύηση για την σύγκλιση των e_{θ_1} και e_{θ_2} στο μηδέν. Ως είσοδο αξιοποιούμε την $u(t) = 1.5 \sin(2\pi t) e^{-3t}$ $t \geq 0$ και έχουμε δύο πιθανά συστήματα. Ένα με μη γραμμικότητα $f_1(x) = \frac{1}{2} \sin x \cdot x$ και ένα άλλο με $f_2(x) = -\frac{1}{4} x^2$.

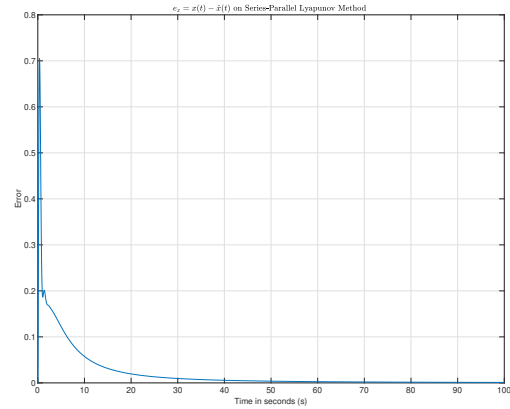
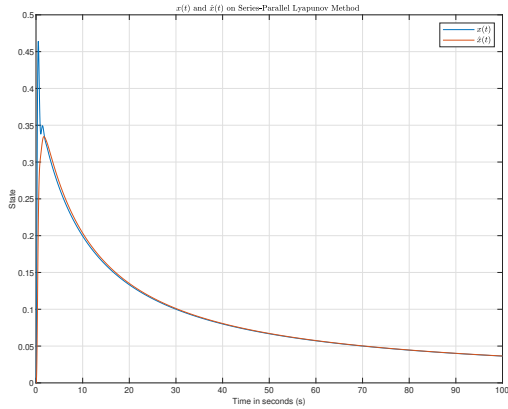
4.2 Αποτελέσματα Προσομοίωσης-Γραφήματα

Στην προσομοίωση θεωρούμε για το πραγματικό σύστημα ότι οι παράμετροι του είναι ίσες με :

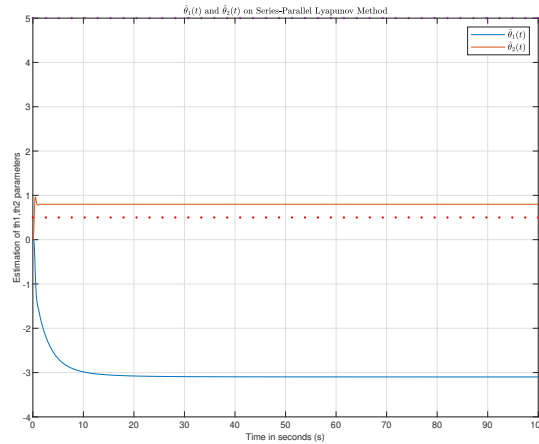
$$\theta_1^* = 0.5 \quad \theta_2^* = 2$$

4.2.1 Μη γραμμικός όρος $f(x) = \frac{1}{2} \sin x \cdot x$

Για την είσοδο $u(t) = 1.5 \sin(2\pi t)e^{-3t}$, με όλες τις αρχικές τιμές μηδενικές, $\gamma_1=10, \gamma_2=9, \theta_m = 2$ και χρόνο προσομοίωσης από 0 έως 100 δευτερόλεπτα έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



((a)) Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος και $\hat{x}(t)$ της εκτίμησής της. ((b)) Σφάλμα αναγνώρισης $e_x = x(t) - \hat{x}(t)$ συναρτήσεως του χρόνου.

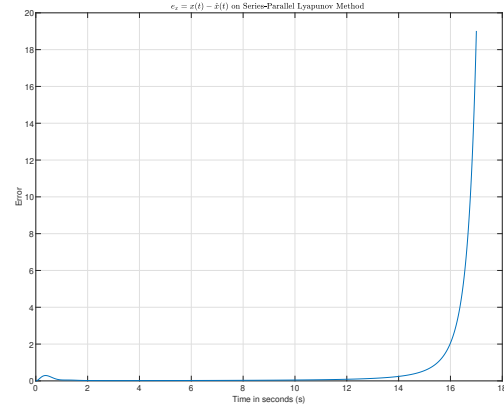
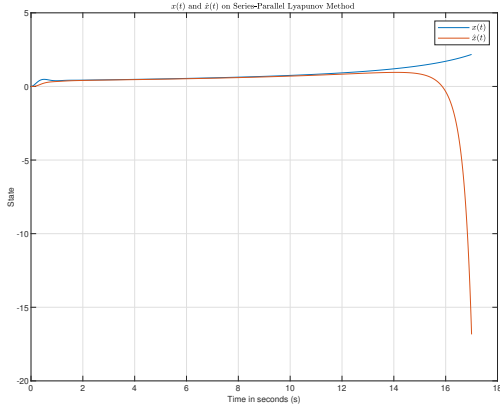


((c)) Εκτιμήσεις παραμέτρων \hat{a}, \hat{b} συναρτήσεως χρόνου. Με διακεκομμένες σημειώνονται $\theta_1 = 0.5, \theta_2 = 2$ οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων στο σύστημα.

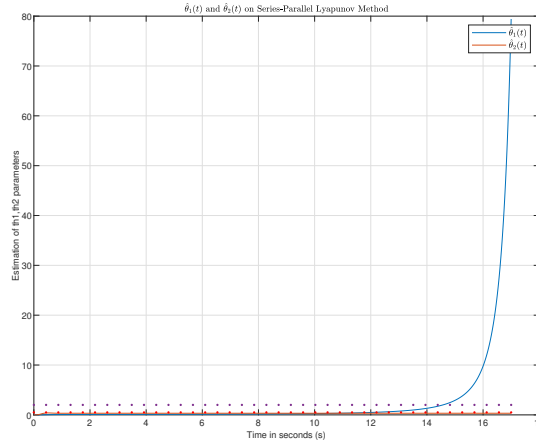
Παρατηρούμε ότι το σφάλμα αναγνώρισης τείνει στο μηδέν όπως προβλέπει η θεωρία εφόσον $x(t), \hat{x}(t) \in L_\infty$ δηλαδή είναι ομοιόμορφα φραγμένα κάτι που επαληθεύουμε στο πρώτο διάγραμμα. Οι εκτιμήσεις συγκλίνουν όπως περιμέναμε αλλά δεν τείνουν στις πραγματικές τιμές. Φαίνεται έτσι ότι η είσοδος $u(t)$ που χρησιμοποιήσαμε δεν ικανοποιεί την ΣΕΔ. Αυτό συμβαίνει αφενός λόγω της παρουσίας της εκθετικής απόσβεσης η οποία τείνει να μηδενίσει την είσοδο (και αν το φέρουμε το σύστημα σε μορφή $x = \hat{\theta}^T \phi$ θα τείνει και μέρος του $\phi(t)$ στο μηδέν) αλλά και με την λογική του (6.1.1) του βιβλίου δυστυχώς δεν έχουμε μορφή που θα εμπλέκει συνεχώς ένα ημίτονο (καθώς αυτό θα αποσβεστεί λόγω του εκθετικού) το οποίο θα απαιτούνταν για να είναι επιμένουσα διέγερση τάξης 2 (2 άγνωστοι θ_1^*, θ_2^*). Το ότι η είσοδος δεν έχει αυτή την μορφή δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι δεν είναι ΣΕΔ αλλά είναι καλή ένδειξη προς αυτή την κατεύθυνση. Επίσης και καθαρά ημιτονοειδή να χρησιμοποιήσουμε, λόγω της μη γραμμικότητας δεν έχουμε εγγύηση για την ευστάθεια του συστήματος. Άλλωστε το σύστημα είναι μη γραμμικό ενώ το (6.1.1) απαιτεί ΓΧΑ σύστημα οπότε η παραπάνω πρόταση παρουσιάστηκε μόνο στην προσπάθεια μας να δώσουμε μια διαισθητική εξήγηση για τα αποτελέσματα της προσομοίωσης.

4.2.2 Μη γραμμικός όρος $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

Για την είσοδο $u(t) = 1.5 \sin(2\pi t)e^{-3t}$, με όλες τις αρχικές τιμές μηδενικές, $\gamma_1=10, \gamma_2=9$ και χρόνο προσομοίωσης από 0 έως 100 δευτερόλεπτα έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



((a)) Γράφημα συναρτήσεως του χρόνου της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος και $\hat{x}(t)$ της εκτίμησής της. ((b)) Σφάλμα αναγνώρισης $e_x = x(t) - \hat{x}(t)$ συναρτήσεως του χρόνου.



((c)) Εκτιμήσεις παραμέτρων \hat{a}, \hat{b} συναρτήσεως χρόνου. Με διακεκομμένες σημειώνονται $\theta_1 = 0.5, \theta_2 = 2$ οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων στο σύστημα.

Το πρώτο πράγμα που παρατηρούμε είναι ότι το πρώτο σύστημα ξεφεύγει στην αστάθεια. Αυτό είναι απόλυτα λογικό γιατί για ένα μεγάλο t για το οποίο $u(t) \rightarrow 0$ λόγω της εκθετικής απόσβεσης το σύστημα έχει μορφή $\dot{x} = \theta_1^* \frac{1}{4}x^2$ με $\theta_1^* \frac{1}{4} > 0$. Αν την t στιγμή ισχύει $x(t) > 0$ θα ισχύει και $\dot{x}(t) > 0$. Άρα, θα αυξάνεται συνέχεια το t και το $x(t)$ παίρνει τιμές που οδηγεί είτε σε καταστροφή του συστήματος είτε αλλαγή της δυναμικής του συστήματος αφού έχουμε φύγει από την πιθανή περιοχή λειτουργίας που περιγραφόταν από την προηγούμενη δυναμική. Προφανώς, γιατί το $x(t)$ δεν είναι φραγμένο όλη η ανάλυση που κάναμε με την μέθοδο Lyapunov προηγουμένως δεν ισχύει εδώ καθώς αυτή απαιτούσε ότι το $x(t)$ θα παρέμενε φραγμένο. Συνεπώς, τα αποτελέσματα ως προς το σφάλμα και ως προς τις εκτιμήσεις είναι άσχετα με αυτά που περιμέναμε προηγουμένως από την θεωρία. Το σφάλμα και η εκτίμηση $\hat{\theta}_1$ εκτοξεύονται σε μεγάλες τιμές ενώ γιατί $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ και γρηγορότερα από ότι μεγαλώνει το e_x η εκτίμηση $\hat{\theta}_2$ σταθεροποιείται σε κάποια τυχαία τιμή. Αυτό, το παράδειγμα φανερώνει ότι η μέθοδος Lyapunov για online εκτίμηση δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε σύστημα αλλά απαιτεί BIBO (Φραγμένη Είσοδος Φραγμένη Έξοδος) συστήματα στα οποία για φραγμένο $u(t)$ έχουμε φραγμένο $x(t)$.

5 Κώδικας-Σχόλια

Το main script που επιστρέφει όλα τα διαγράμματα είναι το **ergasia_2_modelopoihsh.m**. Αυτό θα επιστρέφει όλα τα ζητούμενα διαγράμματα. Σε κάθε ode τροφοδοτείται η κατάλληλη συνάρτηση μεθόδου που ζητείται για το κάθε θέμα/υποερώτημα.