

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Project: Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων - -Μέθοδοι Πραγματικού Χρόνου με Προβολή - - Αξιολόγηση Μοντέλου

Θεολόγης Γεώργιος

AEM:10413

email: gtheolog@ece.auth.gr

Ιούλιος 2024

1 Εισαγωγή

Το αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η υλοποίηση μεθόδου πραγματικού χρόνου με προβολή μέσω της οποίας θα γίνεται η εκτίμηση των παραμέτρων άγνωστου αλλά ασταθούς γραμμικού συστήματος καθώς και η αξιολόγηση του προκύπτοντος μοντέλου για το σύστημα μέσω της εγκάρσιας αξιολόγησης. Συγκεκριμένα, το σύστημα στο οποίο θα εφαρμόσουμε την μέθοδο έχει την εξής μορφή:

$$\dot{x} = ax + \beta u \quad , \quad x(0) = 0$$

Όπου x η κατάσταση του συστήματος, u η είσοδος ελέγχου και a, β άγνωστες σταθερές παράμετροι τις οποίες θέλουμε να εκτιμήσουμε. Για αυτές γνωρίζουμε ότι :

$$a > 0$$

$$0.5 \leq \beta \leq 1.5$$

Το γεγονός ότι ισχύει $a > 0$ καθιστά το γραμμικό σύστημα ασταθές και κατά συνέπεια δεν έχουμε ευστάθεια BIBO (πεπερασμένη είσοδος-πεπερασμένη έξοδος) έτσι ώστε να χρησιμοποιήσουμε όποια πεπερασμένη είσοδο ελέγχου θα επιθυμούσαμε για την εφαρμογή της μεθόδου εκτίμησης. Για αυτό το σήμα ελέγχου $u(t)$ επιλέγεται κατάλληλα ώστε να ισχύει $x(t), u(t) \in L_\infty$ δηλαδή η κατάσταση x και η είσοδος u να είναι φραγμένες για κάθε $t \geq 0$. Όπως θα αποδείξουμε στο θέμα 3 της εργασίας, μπορούμε να εγγυηθούμε ότι $x(t), u(t) \in L_\infty$ για το συγκεκριμένο σύστημα αν η είσοδος $u(t)$ ορίζεται ως εξής:

$$u(t) = -\frac{k}{w(t)} \epsilon(t)$$

Όπου $k > 0$, $0 < w_1 \leq w(t) \leq w_2$ και $\epsilon(t)$ τέτοιο ώστε:

$$\epsilon(t) = \ln \left(\frac{1 + \xi(t)}{1 - \xi(t)} \right)$$

$$\xi(t) = \frac{x(t) - x_d(t)}{\rho(t)}$$

$$\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t} + \rho_\infty$$

Όπου $\lambda > 0$, $\rho_\infty > 0$, $\rho_0 > |x(0) - x_d(0)|$ και $x_d(t)$ τέτοιο ώστε $x_d(t), \dot{x}_d(t) \in L_\infty$. Πράγματι υλοποιώντας αυτή την σχεδίαση ελέγχου μπορούμε να εγγυηθούμε και η κατάσταση $x(t)$ του ασταθούς σήματος ελέγχου και η είσοδος ελέγχου $u(t)$ θα παραμένουν φραγμένες μέσα στο χρόνο και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την είσοδο ελέγχου $u(t)$ προκειμένου να εφαρμόσουμε μέθοδο εκτίμησης των παραμέτρων του συστήματος αυτού. Δηλαδή με γνωστή είσοδο $u(t)$ θα μπορούμε να παίρνουμε μετρήσεις $x(t)$ της κατάστασης του συστήματος τις οποίες θα αξιοποιήσουμε στην μέθοδο εκτίμησης.

Η μέθοδος εκτίμησης που επιλέχθηκε να υλοποιηθεί είναι η μέθοδος Lyapunov με προβολή. Αυτή η μέθοδος συνίσταται από αλγόριθμο πραγματικού χρόνου, ο οποίος εγγυάται ότι τα σφαλμάτα εκτίμησης παραμέτρων e_a, e_β παραμένουν φραγμένα και επομένως οι εκτιμήσεις $\hat{a}, \hat{\beta}$ των αγνώστων παραμέτρων a, β παραμένουν φραγμένες.

Επίσης, η χρήση της προβολής στον αλγόριθμο κρατάει τις εκτιμήσεις στο εφικτό σύνολο:

$$\Theta = \{(\hat{a}, \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^2 : \hat{a} > 0, 0.5 \leq \hat{\beta} \leq 1.5\}$$

Θέλουμε οι εκτιμήσεις των σταθερών να ανήκουν στο Θ καθώς αυτές είναι οι τιμές των αγνώστων σταθερών του πραγματικού συστήματος περιορίζεται επίσης μέσα στο σύνολο αυτό.

Για την αξιόπιστη εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων a, β θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο εκτίμησης με την χρήση διαφορετικών εισόδων $u(t)$ της μορφής που προαναφέρθηκε (δηλαδή διαφορετικών $x_d(t)$) έτσι ώστε να προκύψουν πολλά μοντέλα για το σύστημα. Τα μοντέλα αυτά θα αξιολογηθούν στην συνέχεια με την χρήση της εγκάρσιας αξιολόγησης. Με αυτό τον τρόπο θα γίνει η επιλογή των βέλτιστων εκτιμήσεων $\hat{a}, \hat{\beta}$ για τις οποίες η συμπεριφορά του πραγματικού συστήματος αλλά και του συστήματος μοντέλου $a_m = \hat{a}$, $\beta_m = \hat{\beta}$ να ταυτίζονται όσο περισσότερο γίνεται για διάφορες από τις εισόδους $u(t)$ της μορφής που προαναφέρθηκε.

2 Θέμα 1

Για την υλοποίηση της online μεθόδου Lyapunov με προβολή θα χρησιμοποιηθεί είσοδος $u(t)$ της μορφής που περιγράφηκε με $w(t) = \hat{\beta}(t)$ δηλαδή ίσο $w(t)$ με την online εκτίμηση της β παραμέτρου. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η μέθοδος της προβολής θα διατηρεί την εκτίμηση στην εφικτή περιοχή Θ και ακολούθως αυτό σημαίνει ότι για κάθε t θα ισχύει η απαιτούμενη ιδιότητα για το $w(t)$: $0 < w_1 \leq w(t) \leq w_2$ με $w_1 = 0.5$ και $w_2 = 1.5$ δηλαδή:

$$0 < 0.5 \leq w(t) \leq 1.5, t \geq 0$$

Αυτό ισχύει εφόσον βέβαια οι αρχικές τιμές των εκτιμήσεων βρίσκονται εντός του εφικτού συνόλου Θ δηλαδή $(\hat{a}(0), \hat{\beta}(0)) \in \Theta$. Στη προσομοίωση ωστόσο γιατί η εκτίμηση γίνεται σε διακριτές χρονικές στιγμές μπορεί να ξεφύγουν οι εκτιμήσεις εκτός του εφικτού συνόλου Θ . Αυτό συμβαίνει διότι αν η μέθοδος της προβολής υλοποιούνταν με συνεχή χρονικά τρόπο οι εκτιμήσεις θα έμεναν στο Θ ενώ τώρα στη προσομοίωση ο χρόνος διασχίζεται με σταθερό βήμα $\Delta t > 0$ καθώς και οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τον αλγόριθμο εκτίμησης υλοποιούνται με αριθμητικές μεθόδους. Για αυτό τον λόγο επιλέγουμε μικρό $\Delta t = 0.01$ sec έτσι ώστε η προσομοίωση να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην αναλογική συμπεριφορά και επομένως ακόμα και αν οι εκτιμήσεις ξεφύγουν από το Θ να ξεφύγουν ελάχιστα και άμεσα να επιστρέψουν στο Θ λόγω της μεθόδου. Για αυτό το λόγο ακόμα και στην προσομοίωση το $w(t) = \hat{\beta}(t)$ θα παραμείνει άνω και κάτω φραγμένο από θετικές τιμές όπως επιθυμούμε.

Έχοντας εγγυηθεί ότι η είσοδος ελέγχου $u(t)$ είναι κατάλληλη ώστε να ισχύει $x(t), u(t) \in L_\infty$, μπορούμε να προχωρήσουμε με την σχεδίαση της μεθόδου Lyapunov. Πρέπει καταρχάς να γίνει επιλογή ανάμεσα στην μεικτή και στην παράλληλη τοπολογία. Καταρχάς θεωρούμε θετικά κέρδη $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, $\theta_m > 0$ και στη συνέχεια εκφράζουμε τις δυναμικές (διαφορικές εξισώσεις) των εκτιμήσεων $\hat{a}, \hat{\beta}$ καθώς και του συστήματος αναγνώρισης \hat{x} για τις δύο τοπολογίες:

Μεικτή Τοπολογία	Παράλληλη Τοπολογία
$\dot{\hat{a}} = \gamma_1 e_x x$	$\dot{\hat{a}} = \gamma_1 e_x \hat{x}$
$\dot{\hat{\beta}} = \gamma_2 e_x u$	$\dot{\hat{\beta}} = \gamma_2 e_x u$
$\dot{\hat{x}} = \hat{a}x + \hat{\beta}u + \theta_m(x - \hat{x})$	$\dot{\hat{x}} = \hat{a}\hat{x} + \hat{\beta}u$

Όπου το σφάλμα αναγνώρισης είναι το :

$$e_x = x - \hat{x}$$

Το σφάλμα εκτίμησης της α παραμέτρου είναι το:

$$e_a = a - \hat{a}$$

Το σφάλμα εκτίμησης της β παραμέτρου είναι το:

$$e_\beta = \beta - \hat{\beta}$$

Οι παράγωγοι των σφαλμάτων στον χρόνο είναι :

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = ax + \beta u - \dot{\hat{x}} \\ \dot{e}_a &= -\dot{\hat{a}} \\ \dot{e}_\beta &= -\dot{\hat{\beta}}\end{aligned}$$

Επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov την εξής:

$$V = \frac{1}{2}e_x^2 + \frac{1}{2\gamma_1}e_a^2 + \frac{1}{2\gamma_2}e_\beta^2$$

Για αυτήν ισχύει ότι $V \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$ καθώς είναι και ακτινικά μη φραγμένη.
Η παράγωγος της στον χρόνο είναι ίση με :

$$\dot{V} = e_x \dot{e}_x + \frac{1}{\gamma_1}e_a \dot{e}_a + \frac{1}{\gamma_2}e_\beta \dot{e}_\beta$$

Άρα χρησιμοποιήσουμε την σχεδίαση παράλληλης τοπολογίας έχουμε:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e_x(ax + \beta u - \hat{a}\hat{x} - \hat{\beta}u) + \frac{1}{\gamma_1}e_a(-\gamma_1 e_x \hat{x}) + \frac{1}{\gamma_2}e_\beta(-\gamma_2 e_x u) \\ \dot{V} &= e_x(ae_x + e_\beta u + e_a \hat{x}) - e_a e_x \hat{x} - e_\beta e_x u \\ \dot{V} &= ae_x^2 \geq 0, \quad a > 0\end{aligned}$$

Άρα λόγω της εγγενούς αστάθειας του συστήματος εξαιτίας του $a > 0$, η σχεδίαση παράλληλης τοπολογίας κρίνεται ακατάλληλη για την εκτίμηση των παραμέτρων αυτού του συστήματος καθώς οδηγεί σε αστάθεια ($\dot{V} \geq 0 \Rightarrow V(t) \geq V(0) \quad t > 0$). Για αυτό θα προχωρήσουμε με την σχεδίαση μεικτής τοπολογίας.

Με μεικτή τοπολογία έχουμε αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e_x(ax + \beta u - \hat{a}\hat{x} - \hat{\beta}u - \theta_m e_x) + \frac{1}{\gamma_1}e_a(-\dot{\hat{a}}) + \frac{1}{\gamma_2}e_\beta(-\dot{\hat{\beta}}) \\ \dot{V} &= -\theta_m e_x^2 + e_a(-\frac{\dot{\hat{a}}}{\gamma_1} + e_x \hat{x}) + e_\beta(-\frac{\dot{\hat{\beta}}}{\gamma_2} + e_x u)\end{aligned}$$

Επιλέγουμε ως γνωστόν:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{a}} &= \gamma_1 e_x \hat{x} \\ \dot{\hat{\beta}} &= \gamma_2 e_x u\end{aligned}$$

Και συνεπώς καταλήγουμε σε:

$$\dot{V} = -\theta_m e_x^2 \leq 0, \quad \theta_m > 0$$

Άρα $V(t) \geq 0$ και $\dot{V}(t) \leq 0$ συνεπώς η $V(t)$ συγχλίνει σε πεπερασμένη τιμή V_∞ ενώ για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $0 \leq V(t) \leq V(0)$ συνεπώς είναι φραγμένες οι ποσότητες e_x, e_a, e_β (δηλαδή $e_x, e_a, e_\beta \in L_\infty$). Επιπλέον ολοκληρώνοντας την ποσότητα \dot{V} από 0 έως ∞ έχουμε:

$$\int_0^\infty \dot{V} dt = \int_0^\infty -\theta_m e_x^2 dt$$

$$\int_0^\infty e_x^2 dt = \frac{1}{-\theta_m} \cdot (V_\infty - V(0))$$

Συνεπώς $e_x \in L_2$. Επίσης γνωρίζουμε και έχουμε δείξει ότι $x, u, e_x \in L_\infty$ αρά ισχύει ότι $\hat{x} \in L_\infty$. Όμως γιατί ισχύει ότι $\dot{e}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = ax + bu - \dot{\hat{x}}$ δηλαδή ότι \dot{e}_x είναι άθροισμα ομοιόμορφα φραγμένων ποσοτήτων είναι και η ίδια ομοιόμορφα φραγμένη. Δηλαδή $\dot{e}_x \in L_\infty$. Συνεπώς, από το λήμμα του Barbalat :

$$e_x \in L_2 \cap L_\infty$$

$$\dot{e}_x \in L_\infty$$

Βάση του λήμματος αφού ισχύουν τα παραπάνω ισχύει ότι :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_x = 0$$

Άρα το σφάλμα αναγνώρισης τείνει στο μηδέν. Επίσης οι παράγωγοι των σφαλμάτων εκτίμησης άρα και των εκτιμήσεων (καθώς οι άγνωστες παράμετροι α, β είναι σταθερές) $\dot{e}_\alpha = -\dot{\hat{\alpha}}, \dot{e}_\beta = -\dot{\hat{\beta}}$ είναι γινόμενο ομοιόμορφα φραγμένης συνάρτησης με την e_x που τείνει στο 0 και συνεπώς τείνουν και αυτές στο μηδέν:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\alpha}} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{\beta}} = 0$$

Άρα πράγματι με την χρήση της μεικτής τοπολογίας εφόσον βρισκόμαστε πάντα στο εσωτερικό της εφικτής περιοχής Θ , οι εκτιμήσεις των παραμέτρων θα τείνουν σε τιμές, όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο, τις οποίες μπορούμε να αξιοποιήσουμε σε μοντέλο του συστήματος. Από όλα τα παραπάνω έχουμε δείξει ότι αν ο αλγόριθμος αυτός υλοποιούνταν χωρίς προβολή θα είχαμε σίγουρα ευστάθεια.

Όλα όσα προαναφέρθηκαν αφορούσαν την σχεδίαση μεικτής τοπολογίας χωρίς περιορισμούς. Θα τροποποιήσουμε αυτή την σχεδίαση μεθόδου Lyapunov έτσι ώστε να λειτουργεί με προβολή και έτσι οι εκτιμήσεις να τείνουν στο εσωτερικό των περιορισμών. Το εφικτό σύνολο Θ στο οποίο θέλουμε να περιορίζονται οι εκτιμήσεις είναι το :

$$\Theta = \{(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^2 : \hat{\alpha} > 0, 0.5 \leq \beta \leq 1.5\}$$

Συνεπώς, αν ορίσουμε την ποσότητα κατεύθυνσης \mathbf{d} :

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} e_x x \\ e_x u \end{bmatrix}$$

Θα έχουμε αν ορίσουμε $\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}$ έχουμε για την κατεύθυνση των εκτιμήσεων $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ πάνω στο R^2 όσο βρισκόμαστε στο εσωτερικό του εφικτού συνόλου :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\alpha}} \\ \dot{\hat{\beta}} \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} e_x x \\ e_x u \end{bmatrix} = \Gamma \mathbf{d}$$

Θέλουμε για την σχεδίαση του αλγορίθμου με προβολή να ορίσουμε κατάλληλη συνάρτηση Π τέτοια ώστε να ισχύει :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\alpha}} \\ \dot{\hat{\beta}} \end{bmatrix} = \Pi(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

Η συνάρτηση Π πρέπει να οδηγεί τις εκτιμήσεις στο εφικτό σύνολο Θ και να τις διατηρεί σε αυτό. Μια θεμιτή επιλογή είναι ότι όσο η κατεύθυνση που προβλέπει η μέθοδος Lyapunov $\Gamma \mathbf{d}$ δείχνει μέσα στο σύνολο Θ , τότε θα επιλέγεται αυτή ως η κατεύθυνση μεταβολής (τροχιά) του διανύσματος εκτιμήσεων $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$. Αν από την άλλη βρεθούμε στο σύνορο της εφικτής περιοχής Θ , το οποίο θα ονομάσουμε Θ_b τότε η κατεύθυνση που προβλέπει η μέθοδος χωρίς περιορισμούς $\Gamma \mathbf{d}$ θα οδηγεί τις εκτιμήσεις εντός ή εκτός του συνόλου Θ . Σε περίπτωση, που το οδηγεί εντός του Θ επιλέγεται αυτή η κατεύθυνση. Αλλιώς, γιατί δεν θέλουμε να ξεφύγουμε από το Θ επιλέγεται κατεύθυνση που οδηγεί τις κατευθύνσεις πάνω στο σύνορο Θ_b . Έτσι διατρέχοντας το σύνορο θα

βρεθεί σε σημείο που η κατεύθυνση $\Gamma \mathbf{d}$ της μεθόδου Lyapunov χωρίς περιορισμούς να οδηγεί τις εκτιμήσεις ξανά στο Θ . Για να γίνει προσδιοριστεί αν η κατεύθυνση $\Gamma \mathbf{d}$ οδηγεί στο Θ ή στο εξωτερικό του όταν είμαστε στο σύνορο Θ_b θα θεωρήσουμε

Έρα ∇g ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε στο κλειστό σύνορο του Θ , Θ_b δηλαδή συμπεριλαμβανόμενου του $\hat{a} = 0$, να είναι κάθετο διάνυσμα στο σύνορο και προς το εξωτερικό του. Το σύνορο είναι μπορεί να θεωρηθεί έως μια ισοσταθμική καμπύλη για την οποία $g=0$ και στο εξωτερικό της $g>0$ ενώ εσωτερικά $g<0$. Συνεπώς, όταν βρισκόμαστε στην πάνω πλευρά του συνόρου ($a>0$, $b=1.5$) είναι $\nabla g = [0 \ 1]$, στην κάτω πλευρά ($a>0$, $b=0.5$) $\nabla g = [0 \ -1]$. Αντίστοιχα, θα θεωρήσουμε και την αριστερή πλευρά του "κλειστού συνόρου" $a=0$ $0.5<b<1.5$ αν και πρακτικά δεν ανήκει στην εφικτή περιοχή Θ . Η επιλογή δεν μας πειράζει καθώς είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το ελάχιστο δεν βρίσκεται στο $a=0$ ή και αν βρισκόταν, το ελάχιστο στο πραγματικό Θ θα ήταν απειροελάχιστα δίπλα του και μη διακεκριμένο. Συνεπώς, η προσθήκη αυτής της πλευράς δεν αλλάζει το πρόβλημα ουσιαστικά. Έρα στην αριστερή πλευρά $\nabla g = [-1 \ 0]$. Τέλος γιατί μπορούμε να δώσουμε αυθερετά ∇g στα μη λεία σημεία $(0,1.5), (0,0.5)$ μονό και μόνο για την λειτουργικότητα του κώδικα. Εκεί, για το $(0,0.5)$ $\nabla g = [-\frac{1}{\sqrt{2}} \ -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ και για το $(0,1.5)$ $\nabla g = [-\frac{1}{\sqrt{2}} \ +\frac{1}{\sqrt{2}}]$. Όλα αυτά φαίνονται και στο σχήμα. Πρακτικά, και να βρεθούμε στα μη λεία σημεία της καμπύλης ο αλγόριθμος που σχεδιάζουμε στη συνέχεια μας οδηγεί σχεδόν παράλληλα από ένα από τις πλευρές που ακουμπάνε στο μη λείο σημείο. Καθώς ο αλγόριθμος είναι σχεδιασμένος για να συμπεριλαμβάνει σαν σύνορο και μια μικρή γειτονιά έξω από το σύνορο (λόγω της μη αναλογικότητας της ode όπως εξηγήθηκε πριν) ακόμα και αν ατυχώς βρεθούμε στα μη λεία σημεία ο αλγόριθμος θα μας επαναφέρει απευθείας στο επομένο βήμα σε σχεδόν λείο σύνορο και θα λειτουργήσει ορθά. Ακολουθεί σχήμα του Θ εφικτής περιοχής και του "κλειστού" συνόρου του:

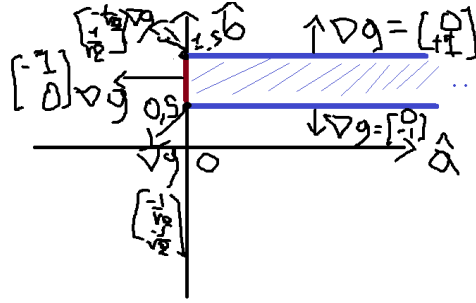


Figure 1: Το σκιαγραφημένο εφικτό κυρτό σύνολο Θ μαζί με το κλειστό σύνορο του και τα κάθετα διανύσματα στο σύνορο.

Συνεπώς, η συνάρτηση Π μέσω της οποίας υλοποιείται η προβολή στη μέθοδο Lyapunov είναι η εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{a}} \\ \dot{\hat{\beta}} \end{bmatrix} = \begin{cases} \Gamma \mathbf{d}, & \text{if } \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \in \Theta_{in} \\ \Gamma \mathbf{d} - \Gamma \frac{\nabla g \nabla^T g}{\nabla^T g \Gamma \nabla g} \Gamma \mathbf{d}, & \text{or if } \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \in \Theta_b \text{ and } (\Gamma \mathbf{d})^T \nabla g \leq 0 \\ \Gamma \mathbf{d} - \Gamma \frac{\nabla g \nabla^T g}{\nabla^T g \Gamma \nabla g} \Gamma \mathbf{d}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Έρα αντικαθιστώντας $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} e_x x \\ e_x u \end{bmatrix}$ και το Γ έχουμε :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{a}} \\ \dot{\hat{\beta}} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma_1 e_x x \\ \gamma_2 e_x u \end{bmatrix}, & \text{if } \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \in \Theta_{in} \\ \begin{bmatrix} \gamma_1 e_x x \\ \gamma_2 e_x u \end{bmatrix} - \Gamma \frac{\nabla g \nabla^T g}{\nabla^T g \Gamma \nabla g} \begin{bmatrix} \gamma_1 e_x x \\ \gamma_2 e_x u \end{bmatrix}, & \text{or if } \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \in \Theta_b \text{ and } (\Gamma \mathbf{d})^T \nabla g \leq 0 \\ \begin{bmatrix} \gamma_1 e_x x \\ \gamma_2 e_x u \end{bmatrix} - \Gamma \frac{\nabla g \nabla^T g}{\nabla^T g \Gamma \nabla g} \begin{bmatrix} \gamma_1 e_x x \\ \gamma_2 e_x u \end{bmatrix}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Από την θεωρία των σημειώσεων του μαθήματος η κατεύθυνση $d_{projection} = \Gamma \mathbf{d} - \Gamma \frac{\nabla g \nabla^T g}{\nabla^T g \Gamma \nabla g} \Gamma \mathbf{d}$ είναι κάθετη στο ∇g , ($d_{projection}^T \nabla g = 0$) και συνεπώς η κίνηση γίνεται πάνω στο σύνορο ακριβώς όπως επιθυμούμε. Η σχεδίαση

αυτή μας εγγυάται ότι εφόσον ξεκινήσουμε στην περιοχή $(\hat{\alpha}(0), \hat{\beta}(0)) \in \Theta$ οι εκτιμήσεις θα παραμείνουν πάντοτε στο εσωτερικό του Θ . Στη πράξη όμως όπως εξηγήθηκε προηγουμένως, γιατί το σύστημα δεν είναι αναλογικό άλλα προσομοιώνεται στον υπολογιστή με αριθμητικές μεθόδους μπορεί να ξεφύγει ο αλγόριθμος ελάχιστα έξτος του συνόρου. Για αυτό επιλέγουμε μικρό χρόνο δειγματοληψίας $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$ και υποθέτουμε ότι αν ξεφύγουμε είμαστε ικανοποιητικά κοντά στο σύνορο έτσι ώστε να μην υπάρχει ουσιαστική διαφορά στην συμπεριφορά του αλγορίθμου είτε είμαστε στο σύνορο ή ελάχιστα αποκλίνουμε αριθμητικά απο αυτό. Συνεπώς, ακόμα και στη προσομοίωση ο αλγόριθμος διατηρεί τις εκτιμήσεις πρακτικά στο Θ και στο γενικευμένο σύνορο του Θ_b και για αυτό τον λόγο η μέθοδος Lyapunov με προβολή λειτουργεί αποτελεσματικά.

Έχοντας αποδείξει την ευστάθεια της μεθόδου Lyapunov χωρίς περιορισμούς για το συγκεκριμένο σύστημα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα 4.3.1 των σημειώσεων του μαθήματος η συνάρτηση προβολής Π διατηρεί την ευστάθεια της μεθόδου Lyapunov χωρίς περιορισμούς και εγγυάται ότι οι εκτιμήσεις ανήκουν στο Θ αρκεί τα α, β να ανήκουν στο Θ (ισχύει εξ ορισμού του προβλήματος) και οι αρχικές εκτιμήσεις $(\hat{\alpha}(0), \hat{\beta}(0))$ να ανήκουν και αυτές στο Θ . Το Θ είναι κυρτό σύνολο ως ορθογώνια περιοχή. Έτσι επιλέγοντας $\hat{\alpha}(0) = 0.4 > 0$ και $\hat{\beta}(0) = 1$ ($0.5 < 1 < 1.5$) με την παραπάνω σχεδίαση έχουμε εξασφαλίσει την ευστάθεια της μεθόδου, το φραγμένο της όλης κατάστασης και ότι οι τελικές εκτιμήσεις θα ανήκουν στο εφικτό σύνολο για κάθε $t \geq 0$.

3 Θέμα 2

Εφόσον πραγματοποιήθηκε η σχεδίαση του αλγορίθμου στο θέμα 1 , τώρα είμαστε σε θέση να τον υλοποιήσουμε σε κώδικα και να πραγματοποιήσουμε τις απαραίτητες προσομοιώσεις για να εξάγουμε μια εικόνα για την εφαρμογή του αλγορίθμου-μεθόδου σε πραγματικό σύστημα και σε πραγματικό χρόνο.

Το πραγματικό σύστημα διέπεται από την διαφορική εξίσωση :

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x(0) = 0$$

Θεωρούμε ότι $\alpha=0.75$ και $\beta=1.25$ για το πραγματικό σύστημα έτσι ώστε να μπορούμε να προσομοιώσουμε την συμπεριφορά του άρα και τις μετρήσεις εξόδου του που θα κάναμε σε πραγματική εφαρμογή της μεθόδου.

Το σύστημα αναγνώρισης διέπεται από την διαφορική εξίσωση:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{a}x + \hat{\beta}u + \theta_m(x - \hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{a}} \\ \dot{\hat{\beta}} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma_1 e_x x \\ \gamma_2 e_x u \end{bmatrix}, & \text{if } \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \in \Theta_{in} \\ \begin{bmatrix} \gamma_1 e_x x \\ \gamma_2 e_x u \end{bmatrix} - \Gamma \frac{\nabla g \nabla^T g}{\nabla^T g \Gamma \nabla g} \begin{bmatrix} \gamma_1 e_x x \\ \gamma_2 e_x u \end{bmatrix}, & \text{or if } \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \in \Theta_b \text{ and } (\Gamma d)^T \nabla g \leq 0 \\ \begin{bmatrix} \gamma_1 e_x x \\ \gamma_2 e_x u \end{bmatrix} - \Gamma \frac{\nabla g \nabla^T g}{\nabla^T g \Gamma \nabla g} \begin{bmatrix} \gamma_1 e_x x \\ \gamma_2 e_x u \end{bmatrix}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Με $\hat{a}(0) = 0.4$, $\hat{\beta}(0) = 1$ αρχικές εκτιμήσεις στην εφικτή περιοχή.

Η είσοδος ελέγχου που επιλέξαμε είναι η $u(t)$:

$$u(t) = -\frac{k}{\hat{b}(t)} \ln \left(\frac{1 + \frac{x(t) - x_d(t)}{(\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t} + \rho_\infty}}{1 - \frac{x(t) - x_d(t)}{(\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t} + \rho_\infty}} \right)$$

Με $\rho_\infty = 0.05$, $\rho_0 = 2|x(0) - x_d(0)| + 1 > 2|x(0) - x_d(0)|$. Εμπειρικά μετά απο πολλές προσομοιώσεις και δοκιμές καταλήξαμε σε αυτές τις τιμές για τις παραμέτρους k, λ του σήματος ελέγχου και θ_m του συστήματος αναγνώρισης:

$$k = 10$$

$$\lambda = 2$$

$$\theta_m = 3$$

Τέλος για το $x_d(t)$ μας δίνονται οι δυο περιπτώσεις :

- $x_d(t) = A \quad \forall t \geq 0$ Βηματική.
- $x_d(t) = A \cdot \cos(\omega t) \quad \forall t \geq 0$ Ημιτονοειδής.

Προφανώς για $\omega=0$ η ημιτονοειδής ταυτίζεται με την βηματική και συνεπώς στον κώδικα ορίζεται σαν ένα ημιτονοειδές function handle με παραμέτρους A, ω . Για $\omega=0$ προκύπτει βηματική ενώ για $\omega>0$ ημιτονοειδής (συνιμήτονο).

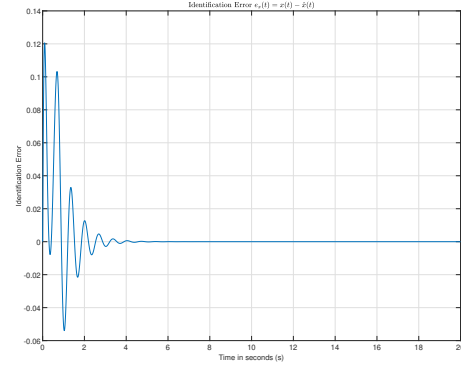
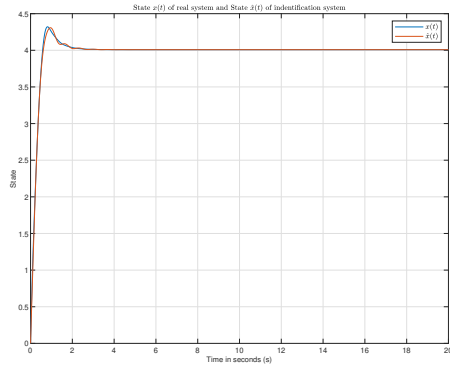
Επιλέγουμε $A=4$, $\omega= 10$ για τις προσομοιώσεις μας. Παρατηρήθηκε κατά την διάρκεια δοκιμών του αλγορίθμου ότι κάποιες τιμές παραμέτρων όπως k, λ, θ_m κτλ έκαναν πολύ stiff την διαφορική εξίσωση που καλούνταν να λύσει η ode . Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να προκύψουν μιγαδικές τιμές για διάφορα μεγέθη ενώ στη πράξη ποτέ δεν βγήκε το ξ από την περιοχή $|\xi(t)| < 1$. Για να αποφύγουμε αυτή την ανεπιθύμητη συμπεριφορά στην προσομοίωση η οποία οφείλεται στα όρια και τις ανοχές των αριθμητικών μεθόδων βάλουμε την ρύθμιση για την ode:

`opts = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',1e-10);`

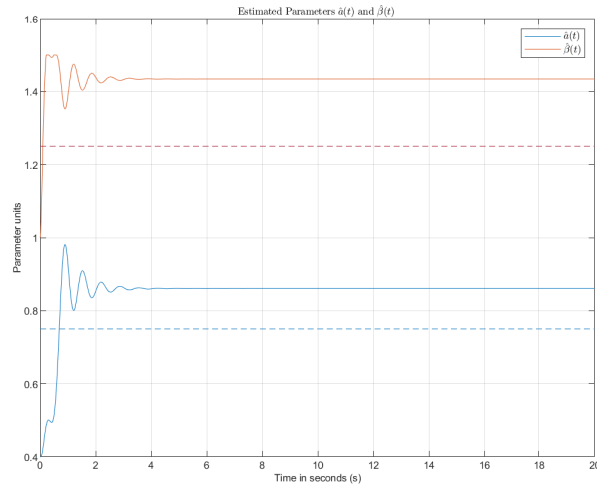
Θα μπορούσαμε ισοδύναμα να βάλουμε να χρησιμοποιήσουμε την `ode15s` η οποία είναι πιο ικανή στο αντιμετωπίζει stiff καταστάσεις.

3.1 Βηματική $x_d(t) = A \quad \forall t \geq 0$

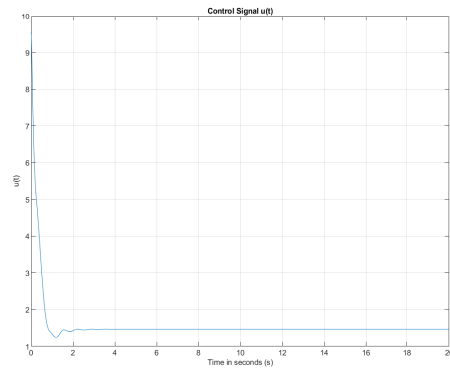
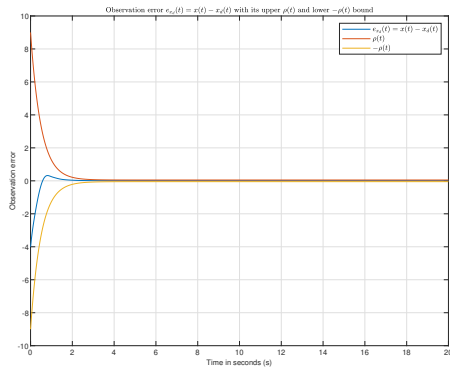
Επιλέγαμε $x_d(t) = A = 4$. Ακολουθούν τα διαγράμματα της προσομοίωσης στο χρονικό διάστημα $t=[0:0.01:20]$ sec :



((a)) Γράφημα συναρτήσεως χρόνου της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος και $\hat{x}(t)$ του συστήματος αναγνώρισης. ((b)) Σφάλμα αναγνώρισης $e_x = x(t) - \hat{x}(t)$ συναρτήσεως του χρόνου.



((c)) Εκτιμήσεις παραμέτρων \hat{a}, \hat{b} συναρτήσεως χρόνου. Πραγματικές τιμές $a=0.75, b=1.25$

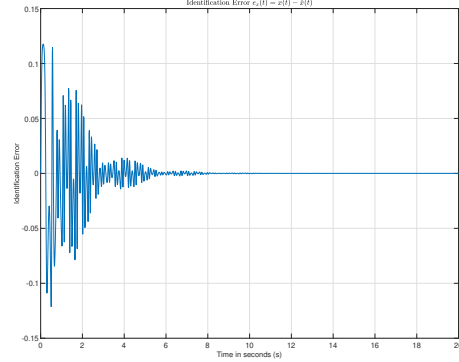
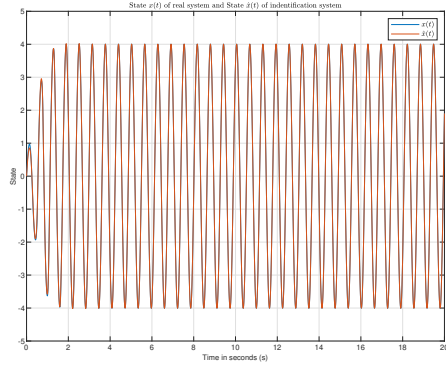


((d)) Σφάλμα παρακολούθησης $e_{x_d}(t) = x(t) - x_d(t)$

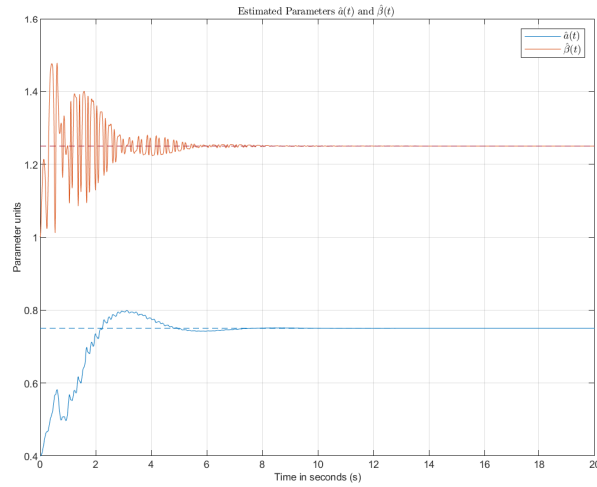
((e)) Σήμα Ελέγχου $u(t)$.

3.2 Ημιτονοειδής $x_d(t) = A \cdot \cos(\omega t) \quad \forall t \geq 0$

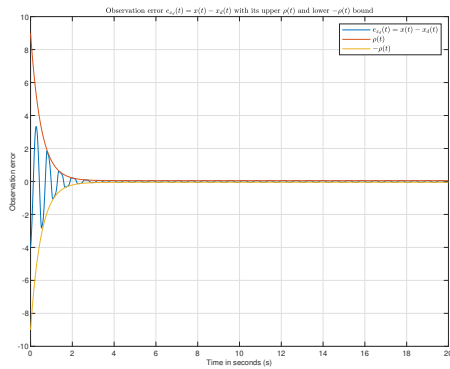
Επιλέγαμε $x_d(t) = 4 \cdot \cos(10t)$. Δηλαδή $A=4$ και $\omega=10$ r/s. Ακολουθούν τα διαγράμματα της προσομοίωσης στο χρονικό διάστημα $t=[0:0.01:20]$ sec :



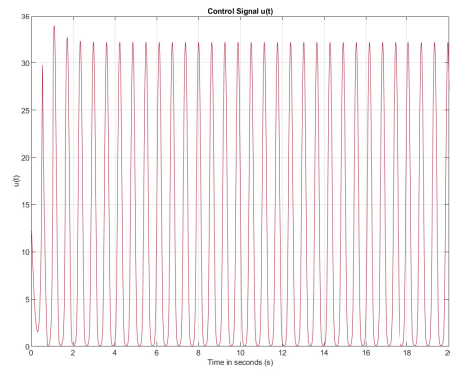
((a)) Γράφημα συναρτήσεως χρόνου της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος και $\hat{x}(t)$ του συστήματος αναγ- ((b)) Σφάλμα αναγνώρισης $e_x = x(t) - \hat{x}(t)$ συναρτήσεως του χρόνου.



((c)) Εκτιμήσεις παραμέτρων \hat{a}, \hat{b} συναρτήσεως χρόνου. Πραγματικές τιμές $a=0.75, b=1.25$



((d)) Σφάλμα παρακολούθησης $e_{x_d}(t) = x(t) - x_d(t)$



((e)) Σήμα Ελέγχου $u(t)$.

3.3 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων Προσομοίωσης

3.3.1 Βηματική $x_d(t) = 4 \quad \forall t \geq 0$

Με την χρήση της βηματικής συνάρτησης $x_d(t) = 4$ στο σήμα ελέγχου παρατηρούμε πράγματι το φραγμένο όλων των καταστάσεων κατά την λειτουργία του αλγορίθμου εκτίμησης. Πράγματι η $x(t)$ ξεκινά από την μηδενική της τιμή, παραμένει φραγμένη και συγκλίνει εν τέλει κοντά στην τιμή 4. Αυτό είναι λογικό και εμφανές από το γεγονός ότι σύμφωνα με το θέμα 3 πρέπει να ισχύει ότι $|x - x_d| < \rho(t)$ και συνεπώς εν τέλει τείνει το απόλυτο της διαφοράς x, x_d να είναι φραγμένο από την ποσότητα 0.05. Επίσης βλέπουμε ότι το σύστημα αναγνώρισης \hat{x} μέσα στο χρονικό διάστημα 5 δευτερολέπτων έχει καταφέρει να παρακολουθήσει εξαιρετικά ικανοποιητικά την έξοδο y του πραγματικού συστήματος καθώς το σφάλμα αναγνώρισης e_x τείνει στο μηδέν όπως περιμέναμε από την μέθοδο Lyapunov. Επιπλέον, για τον ίδιο λόγο παρατηρούμε την σύγκλιση των εκτιμήσεων $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ σε σταθερές τιμές οι οποίες ωστόσο διαφέρουν από τις πραγματικές τιμές $\alpha=0.75, \beta=1.25$. Ως προς αυτό παρατηρούμε ομοιότητα με την 2η εργασία όπου η χρήση βηματικής εισόδου οδηγούσε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων σε σύγκλιση μακριά των πραγματικών τους τιμών. Αυτό, μπορεί θεωρητικά να δικαιολογηθεί από το ότι δεν ικανοποιείται κάποια Συνθήκη Επιμέρους Διέγερσης όπως συμβαίνει συνήθως στις βηματικές εισόδους αν και εδώ η πραγματική είσοδος $u(t)$ είναι πιο περίπλοκη. Ωστόσο, μπορούμε να αποδώσουμε μια διαισθητική ερμηνεία κοιτώντας την χρονική απόκριση του $x(t), \hat{x}(t)$ και του $u(t)$. Όταν τα πρώτα δυο σχεδόν σταθεροποιούνται το ίδιο κάνει και το $u(t)$, άρα καθίσταται μια ισορροπία στο σύστημα η οποία δεν επιτρέπει την περαιτέρω μεταβολή δυναμικών των συστημάτων και συνεπώς δεν αφήνει την διόρθωση των εκτιμήσεων από τις τιμές που συγκλίνουν στις πραγματικές. Θα δούμε στην συνέχεια ότι με το ημιτονοειδές x_d επιτυγχάνουμε την σύγκλιση και θα παρατηρήσουμε ότι το $u(t)$ είναι μεταβλητό και δεν σταθεροποιείται ακόμα και όταν το σφάλμα αναγνώρισης συγκλίνει στο μηδέν.

3.3.2 $x_d(t) = 4 \cdot \cos(10t) \quad \forall t \geq 0$

Με την χρήση της ημιτονοειδούς συνάρτησης $x_d(t) = 4 \cdot \cos(10t)$ στο σήμα ελέγχου παρατηρούμε πράγματι το φραγμένο όλων των καταστάσεων κατά την λειτουργία του αλγορίθμου εκτίμησης. Πρακτικά εξάγουμε τα ίδια συμπεράσματα με την βηματική προηγουμένως. Δηλαδή $x, \hat{x}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ φραγμένα, σύγκλιση του σφάλματος αναγνώρισης e_x στο μηδέν καθώς και σύγκλιση των εκτιμήσεων των παραμέτρων $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ σε σταθερές τιμές. Σε αντίθεση, όμως με την βηματική εδώ η σύγκλιση των εκτιμήσεων γίνεται πρακτικά πάνω στις πραγματικές του τιμές, $\alpha=0.75$ και $\beta=0.125$!

Αυτό θυμίζει πάλι την 2η εργασία όπου με την χρήση ημιτονοειδούς εισόδου είχαμε σύγκλιση των εκτιμήσεων των παραμέτρων στις πραγματικές τους τιμές. Η θεωρητική ερμηνεία είναι ότι τώρα η είσοδος ικανοποιεί ΣΕΔ. Αλλά, στη πράξη φαίνεται εδώ η χρησιμότητα της διαισθητικής ερμηνείας που έγινε απόπειρα να δωθεί προηγουμένως. Με την χρήση ημιτονοειδούς x_d λόγω του ελέγχου το $x(t)$ τείνει εν τέλει να παρακολουθεί αρκετά καλά (διαφορά < 0.05 πολύ μικρό ποσοστό του πλάτους 4 του συνημιτόνου) την x_d . Άρα μεταβάλλεται και το ίδιο παρατηρούμε ότι κάνει το $u(t)$. Αυτή η συνεχής μεταβολή δεν επιτρέπει το σύστημα αναγνώρισης \hat{x} να "προλάβει" το x ωστόσο οι εκτιμήσεις $\hat{\alpha}, \hat{\beta}(t)$ να φτάσουν πάνω στις πραγματικές τιμές (στη πράξη ικανοποιητικά κοντά). Τότε το σύστημα x και \hat{x} ταυτίζονται ως προς την απόκριση και το σφάλμα αναγνώρισης συγκλίνει στο μηδέν. Συνεπώς, ενώ εδώ αυτό το συνεχές toogling επέτρεψε τις εκτιμήσεις να συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές προηγουμένως η απουσία του με την σταθεροποίηση του $u(t)$ δεν άφησε τις εκτιμήσεις να προλάβουν να συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές. Όλο αυτό είναι μονάχα μια διαισθητική ερμηνεία της λειτουργίας της μεθόδου εν συναρτήσει της $u(t)$ από τον φοιτητή.

3.4 Εγκάρσια Αξιολόγηση Μοντέλου

Παραπάνω παρατηρήσαμε ότι ανάλογα το $x_d(t)$ που χρησιμοποιούμε στο σήμα ελέγχου $u(t)$ οι εκτιμήσεις των παραμέτρων του συστήματος συγκλίνουν σε διαφορετικές τιμές. Στη πράξη όμως, θα χρησιμοποιούσαμε το αποτέλεσμα του συστήματος αναγνώρισης-εκτίμησης για να κατασκευάσουμε το μαθηματικό μοντέλο του πραγματικού συστήματος. Σύμφωνα με την θεωρία του μαθήματος μπορούμε να εκπαιδεύσουμε το μοντέλο -δομή με χρήση του αλγορίθμου εκτίμησης σε διαφορετικά δεδομένα $u(t)$ (δηλαδή $x_d(t)$) έτσι ώστε να προκύψουν διάφορα μοντέλα τα οποία αφού αξιολογηθούν θα επιλεγεί το βέλτιστο ως το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε για το πραγματικό σύστημα σε περαιτέρω χρήση.

Θα χρησιμοποιηθεί η εγκάρσια αξιολόγηση που είναι γνωστή από την μηχανική μάθηση. Συγκεκριμένα, θα κατασκευάσουμε N εισόδους $u(t)$ δηλαδή N εισόδους $x_d(t)$ τις οποίες στη συνέχεια μπορούμε να διαμοιράσουμε σε M ομάδες. Ο αριθμός M των ομάδων πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε η διαίρεση $elems_per_section = \frac{N}{M}$ να δίνει ακέραιο αριθμό και συνεπώς η κάθε ομάδα να έχει ίδιο αριθμό στοιχείων $elems_per_section$. Στη συνέχεια, ξεκινά μια μεγάλη λούπα στην οποία σε κάθε επανάληψη επιλέγονται οι $M-1$ ομάδες ως δεδομένα εκπαίδευσης (training data) και 1 ομάδα ως δεδομένα ελέγχου (test data). Κάθε ομάδα θα χρησιμοποιηθεί ως δεδομένα ελέγχου μοναδική φορά, ενώ ως δεδομένα εκπαίδευσης $M-1$ φορές.

Στο στάδιο εκπαίδευσης το μοντέλο εκπαιδεύεται στις $M-1$ ομάδες της παρούσας επανάληψης. Συγκεκριμένα, για κάθε ομάδα εφαρμόζεται ο αλγόριθμος εκτίμησης παραμέτρων συστήματος με προβολή βασισμένη στη μέθοδο Lyapunov (αλγόριθμος θέματος 1) για κάθε x_d της ομάδας. Συνεπώς για κάθε ομάδα προκύπτουν $elems_per_section$ εκτιμήσεις των α και β και για να βγάλουμε μια συνολική εκτίμηση για την ομάδα παίρνουμε τον μέσο όρο των (α_{mi}, β_{mi}) που προέκυψε για κάθε στοιχείο της. Για να προκύψει ένα μοναδικό μοντέλο από αυτό το στάδιο εκπαίδευσης παίρνουμε τον μέσο όρο των εκτιμήσεων κάθε ομάδας και ως αποτέλεσμα έχουμε τιμές (a_m, β_m) για το μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί στο στάδιο ελέγχου. Το μοντέλο που προκύπτει είναι το εξής:

$$\dot{x}_m = a_m x_m + b_m u_m$$

Στο στάδιο ελέγχου έχω την σύγκριση του πραγματικού συστήματος με το μοντέλο που προέκυψε στο στάδιο εκπαίδευσης της παρούσας επανάληψης. Συγκεκριμένα παίρνουμε το κάθε στοιχείο x_d της ομάδας ελέγχου και κατασκευάζουμε μια είσοδο $u(t)$ για το πραγματικό σύστημα και μια είσοδο $u_m(t)$ για το μοντέλο. Θα ισχύει:

$$u(t) = -\frac{k}{b_m} \ln \left(\frac{1 + \frac{x(t) - x_d(t)}{(\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t} + \rho_\infty}}{1 - \frac{x(t) - x_d(t)}{(\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t} + \rho_\infty}} \right)$$

$$u_m(t) = -\frac{k}{b_m} \ln \left(\frac{1 + \frac{x_m(t) - x_d(t)}{(\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t} + \rho_\infty}}{1 - \frac{x_m(t) - x_d(t)}{(\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t} + \rho_\infty}} \right)$$

Παρατηρούμε ότι χρειάζεται ανάδραση της x στο πραγματικό σύστημα και της x_m στο μοντέλο για να παραμείνουν στα δυο συστήματα φραγμένες οι καταστάσεις του συστήματος. Δηλαδή $x(t), x_m(t) \in L_\infty$. Αν το μοντέλο είναι ιδανικό και ταυτίζεται με το πραγματικό σύστημα τότε η αποκρίσεις θα είναι ταυτόσημες και το σφάλμα μοντελοποίησης $e_m = x - x_m$ θα είναι ίσο με το μηδέν. Στην πράξη το μοντέλο θα διαφέρει από το πραγματικό σύστημα και το σφάλμα μοντελοποίησης δεν θα είναι μηδενικό. Συνεπώς, παίρνουμε την νόρμα l_2 του e_m ως μέτρο ποιότητας του μοντέλου και αξιολογούμε βάσει αυτού. Το διάστημα προσομοίωσης είναι 0:0.01:20 sec. Άρα χρονικό βήμα $\Delta t = 0.01$ sec. Η νόρμα l_2 ορίζεται ως:

$$l_2 = \int_0^{20} e_m^2 dt$$

Αυτή η σχέση προσεγγίζεται αριθμητικά χρησιμοποιώντας τις I μετρήσεις στον πίνακα em που σχηματίζεται στον κώδικα με :

$$l_2 \approx \left(\sum_{i=1}^I e_m^2(i) \right) \cdot \Delta t$$

Αυτή υπολογίζεται για κάθε στοιχείο των δεδομένων ελέγχου και τελικά επιστρέφεται ο μέσος όρος l_2 για αυτά από την διαδικασία ελέγχου της συγκεκριμένης επανάληψης μαζί με τα α_m, β_m του μοντέλου.

Αφού η διαδικασία εκπαίδευσης και ελέγχου επαναληφθεί M φορές , έχουμε M μοντέλα (a_m, b_m) με M μέτρα αξιολόγησης l_2 νόρμας.

Το λογικό της διαδικασίας θα ήταν να επιλέξουμε το μοντέλο (a_m, b_m) που αντιστοιχεί στο μικρότερο μέτρο νόρμας l_2 . Ωστόσο, αυτό ίσως ελοχεύει κινδύνους άμα το dataset δεν είναι δίκαια μοιρασμένο και ίσως είναι προτιμότερο η επιλογή μιας άλλης εισόδου μεσώ της οποίας θα επιβεβαιωθεί η ακρίβεια του μοντέλου αυτού επιτόπου μετά την διαδικασία της αξιολόγησης ώστε ο σχεδιαστής να επιβεβαιώσει το αποτέλεσμα με το μάτι.

Στον κώδικα έχουμε χρησιμοποιήσει $M=N$ άρα 1 στοιχείο ανά ομάδα . Μπορεί εύκολα ο διδάσκων να αλλάξει το M κατάλληλα γιατί ο κώδικας που γράφτηκε επιτρέπει την διαμέριση των ομάδων σε ίσο ακέραιο πλήθος στοιχείων. Για παράδειγμα αλλάζοντας απλά το σημείο που ορίζεται το M μπορεί να επιλεγθεί $M=N/2$ ή $M=2$ ή οποιο άλλο M δίνει ακέραιο πλήθος στοιχείων. Προφανώς πρέπει $M \geq 2$ γιατί θέλω τουλάχιστον μια ομάδα για εκπαίδευση και μια για έλεγχο.

3.5 Προσομοίωση Εγκάρσιας Αξιολόγησης

Ως $x_d(t)$ ορίσαμε ένα γενικευμένο function handle της μορφής:

$$x_d(t) = A * \cos(\omega t) * e^{-Dt} + B + C * e^{-\frac{(t-2)^2}{2}}$$

Έχουμε βάλει στο κώδικα μας τυχαίους πίνακες $N=10$ στοιχείων και προκύπτουν $N=10$ διαφορετικά x_d .

$A_Data=[1\ 2\ 3\ 3\ 2\ 6\ 7\ 8\ 3\ 2]$; $\Omega_Data=[1\ 0\ 2\ 2\ 3\ 0\ 5\ 3\ 0\ 1]$; $B_Data=[3\ 2\ 1\ 0\ 1\ 0\ 4\ 5\ 0\ 6]$; $C_Data=[1\ 5\ 0\ 2\ 3\ 1\ 0\ 3\ 2\ 8]$; $D_Data=[0\ 1\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0\ 0\ 1\ 0]$;

Τρέχοντας για $M=10$ παίρνουμε:

$$a_m = 0.8195$$

$$b_m = 1.3268$$

$$l_2 = 0.0359$$

Παρατηρούμε ότι στην πράξη τα βηματικά στοιχεία επηρεάζουν το αποτέλεσμα και δίνουν μη ακριβές μοντέλα. Για να το αποφεύγαμε αυτό ίσως θα έπρεπε να αυξήσουμε τα δεδομένα και να βάλουμε λιγότερες βηματικές αφού οδηγούν σε ελαττωματικά μοντέλα.

Δυστυχώς ο χρόνος δεν με έφτασε για να προσθέσω plots για το modelo για τυχαία είσοδο $x_d=@(m) 1*\cos(1*m)*\exp(-0.5*m)+1+0.5*\exp(-(m-2)^2/2)$; όπως επιθυμούσα.

Άμα επιλέξουμε να έχουμε μόνο ημιτονοειδή x_d (1η εναλλακτική περίπτωση στα σχόλια $C=0, D=0, B=0$ και $\Omega>0$) βγάζουμε πολύ καλύτερα αποτελέσματα :

$$a_m = 0.7502$$

$$b_m = 1.2501$$

$$l_2 = 1.3616e - 05$$

Προφανώς τότε οι αποκρίσεις των συστημάτων είναι σχεδόν ταυτόσημες.

4 Θέμα 3

Στο παρόν θέμα θα επιβεβαιώσουμε μαθηματικά ότι για το σήμα ελέγχου $u(t)$ που παρουσιάστηκε στην εισαγωγή της εργασίας ισχύει ότι $x(t), u(t) \in L_\infty$ κάτι που είδαμε πειραματικά και στη προσομοίωση του συστήματος στο θέμα 2. Υπενθυμίζουμε ότι $k > 0$, $0 < w_1 \leq w(t) \leq w_2$ και :

$$u(t) = -\frac{k}{w(t)}\epsilon(t)$$

$$\epsilon(t) = \ln\left(\frac{1+\xi(t)}{1-\xi(t)}\right)$$

$$\xi(t) = \frac{x(t) - x_d(t)}{\rho(t)}$$

Ενώ επιλέγουμε $\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t} + \rho_\infty$ όπου $\lambda > 0$, $\rho_\infty > 0$, $-\rho_0 < x(0) - x_d(0) < \rho_0$ δηλαδή $\xi(0) \in (-1, 1)$ και $x_d(t)$ τέτοιο ώστε $x_d(t), \dot{x}_d(t) \in L_\infty$.

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση Lyapunov :

$$V(t) = \frac{1}{2}\epsilon(t)^2$$

Καταρχάς θα υπολογίσουμε καποιες ποσότητες που θα προκύψουν στην ανάλυση εκ των προτέρων:

$$\epsilon(t) = \ln\left(\frac{1+\xi(t)}{1-\xi(t)}\right)$$

Η χρονική του παράγωγος είναι:

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{1}{\frac{1+\xi(t)}{1-\xi(t)}} \cdot \frac{1-\xi(t)+1+\xi(t)}{(1-\xi(t))^2} \cdot \dot{\xi}(t)$$

Δηλαδή:

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{2\dot{\xi}(t)}{1-\xi^2(t)}$$

Η παράγωγος της $\xi(t)$ είναι:

$$\dot{\xi}(t) = \frac{\dot{x}(t) - \dot{x}_d(t)}{\rho(t)} - \frac{\dot{\rho}(t)\xi(t)}{\rho(t)} \Rightarrow$$

$$\dot{\xi}(t) = \frac{ax(t) + bu(t) - \dot{x}_d(t)}{\rho(t)} - \frac{\dot{\rho}(t)\xi(t)}{\rho(t)} \Rightarrow$$

$$\dot{\xi}(t) = \frac{ax(t) - ax_d(t) + ax_d(t) - \dot{x}_d(t) - b\frac{k\epsilon(t)}{w(t)} - \dot{\rho}(t)\xi(t)}{\rho(t)} \Rightarrow$$

$$\dot{\xi}(t) = \frac{a(x(t) - x_d(t))}{\rho(t)} + \frac{ax_d(t) - \dot{x}_d(t) - b\frac{k\epsilon(t)}{w(t)} - \dot{\rho}(t)\xi(t)}{\rho(t)}$$

Η χρονική παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov είναι ίση με:

$$\dot{V}(t) = \epsilon\dot{\epsilon} = \frac{2\epsilon}{1-\xi^2}\left(a\xi + \frac{ax_d - \dot{x}_d - \dot{\rho}\xi}{\rho} - \frac{bk\epsilon}{w\rho}\right)$$

Ισοδύναμα:

$$\dot{V}(t) = \frac{2bk}{\rho w \cdot (1-\xi^2)}\left(\frac{w}{bk}(\rho a\xi + ax_d - \dot{x}_d - \dot{\rho}\xi)\epsilon - \epsilon^2\right)$$

Με την προϋπόθεση ότι την χρονική στιγμή t ισχύει ότι $\xi^2(t) < 1$

$$\dot{V}(t) \leq \frac{2bk}{\rho w \cdot (1 - \xi^2)} \left(\frac{w}{bk} (\rho a |\xi| + a |x_d| + |\dot{x}_d| + |\dot{\rho} \xi|) |\epsilon| - \epsilon^2 \right)$$

Ισχύει ότι $0 < w(t) \leq w_2$, $\alpha > 0$, $0.5 \leq b \leq 1.5$, $k > 0$ σταθερά δικής μας επιλογής, $x_d(t), \dot{x}_d(t) \in L_\infty$ άρα υπάρχουν πεπερασμένα $M_1, M_2 > 0$ τέτοια ώστε $|x_d(t)| < M_1$ και $|\dot{x}_d(t)| < M_2$, $\rho(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t αρά $\rho_{max} = \rho_0 > 0$ και $\dot{\rho} = -\lambda(\rho_0 - \rho_\infty)e^{-\lambda t}$ δηλαδή $|\dot{\rho}|_{max} = \lambda(\rho_0 - \rho_\infty) > 0$ και τέλος λόγω της υπόθεσης $\xi^2(t) < 1$ ισχύει $|\xi(t)| < 1$. Άρα, αντικαθιστώντας όλα αυτά έχουμε:

$$\dot{V} \leq \frac{2bk|\epsilon|}{\rho w \cdot (1 - \xi^2)} \left(\frac{w}{bk} (\rho a |\xi| + a |x_d| + |\dot{x}_d| + |\dot{\rho} \xi|) - |\epsilon| \right)$$

$$\dot{V} \leq \frac{2bk|\epsilon|}{\rho w \cdot (1 - \xi^2)} \left(\frac{w_2}{0.5k} (\rho_0 a + a M_1 + M_2 + \lambda(\rho_0 - \rho_\infty)) - |\epsilon| \right)$$

Ορίζω σταθερά A και συνάρτηση $\gamma(t)$ για $\xi^2(t) < 1 \Rightarrow |\xi(t)| < 1$ τέτοιες ώστε:

$$A = \frac{w_2}{0.5k} (\rho_0 a + a M_1 + M_2 + \lambda(\rho_0 - \rho_\infty)) > 0$$

$$\gamma(t) = \frac{2bk|\epsilon|}{\rho w \cdot (1 - \xi^2)} > 0, \text{ if } |\xi(t)| < 1$$

Το $\gamma(t)$ είναι θετικό καθώς ξεκινάμε από $|\xi(0)| < 1$ ενώ φτάνει στην περιοχή αλλαγής προσήμου αν το $|\epsilon(t)|$ προσεγγίσει το άπειρο. Όσο το $|\epsilon(t)|$ είναι πεπερασμένο όμως σίγουρα το $\gamma(t)$ θα είναι θετικό.

Τελικά για t τέτοια ώστε $|\xi(t)| < 1$:

$$\dot{V}(t) \leq \gamma(t)(A - |\epsilon(t)|)$$

Παρατηρούμε ότι την χρονική στιγμή $t=0$ ισχύει $|\xi(0)| < 1$ και επομένως ισχύει $\dot{V}(0) \leq \gamma(0)(A - |\epsilon(0)|)$. Στη συνέχεια μπορούμε να δείξουμε ότι το μέτρο του $|\epsilon(t)|$ είναι ομοιόμορφα τελικά φραγμένο από το A δηλαδή ισχύει $|\epsilon(t)| \leq A$, $\forall t \geq 0$. Πράγματι γιατί ξεκινάμε από $|\xi(0)| < 1$ είναι και $|\epsilon(0)|$ πεπερασμένο. Έστω ότι την $t=0$ ή κάποια άλλη t το σύστημα βρεθεί στην κατάσταση $V(t) > 0$ και $A > |\epsilon(t)|$ (άλλωστε για $A \leq |\epsilon(t)|$ το $\dot{V} \leq 0$ λόγω της ανισότητας που εξαγάμε παραπάνω). Τότε το μέτρο του $|\epsilon(t)|$ μεγαλώνει έως ότου να ισχύει ότι $A = |\epsilon(t)|$ και άρα $\dot{V} \leq 0$. Τότε από εκείνη την χρονική στιγμή και μετά ξεκινά η μείωση του μέτρου του $|\epsilon(t)|$ και έστω για απειροελάχιστο χρονικό διάστημα θα ξανά ισχύει ότι $A > |\epsilon(t)|$. Παρατηρούμε ότι ακόμα και αν προκύψει ξανά το $\dot{V}(t) > 0$ τότε το $|\epsilon(t)|$ δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερο της ποσότητας A . Έχουμε δείξει δηλαδή ότι εφόσον βρεθεί το μέτρο του $|\epsilon(t)|$ στην περιοχή $|\epsilon(t)| \leq A$ κάποια στιγμή t_m δεν μπορεί να ξεφύγει από αυτή την περιοχή. Αφού όπως δείξαμε μόλις εξισωθεί με αυτή ($|\epsilon(t)|=A$) δεν μπορεί να την ξεπεράσει καθώς θα ισχύει $\dot{V} \leq 0$ και το μέτρο $|\epsilon(t)|$ θα πρέπει να μειωθεί. Ακόμα και αν την $t=0$ έχουμε ξεκινήσει στην περιοχή $|\epsilon(t)| > A$ (π.χ. $|\epsilon(0)|=M > A$ με M πεπερασμένο γιατί $|\xi(0)| < 1$) τότε ισχύει $\dot{V} < 0$ και έχω σίγουρη μείωση ωσότου $|\epsilon(t)| = A$. Τότε θα εισέλθει το $|\epsilon(t)|$ στην περιοχή $|\epsilon(t)| \leq A$ και θα εγκλωβιστεί σε αυτή όπως έχουμε εξηγήσει. Συνεπώς, το $|\epsilon(t)|$ άρα και το $\epsilon(t)$ είναι φραγμένα (ομοιόμορφα τελικώς φραγμένα) από το A . Ενώ αν ορίσουμε το πεπερασμένο αριθμό $C = \max(A, M)$ με $|\epsilon(0)|=M$ για κάθε $t \geq 0$ ισχύει:

$$|\epsilon(t)| \leq C \quad \forall t \geq 0$$

Δηλαδή:

$$|\epsilon(t)| \leq \max\left(\frac{w_2}{0.5k} (\rho_0 a + a M_1 + M_2 + \lambda(\rho_0 - \rho_\infty)), |\epsilon(0)|\right) \quad \forall t \geq 0$$

Συνεπώς, το $|\epsilon(t)|$ άρα και το $\epsilon(t)$ είναι φραγμένα για κάθε $t \geq 0$. Παρατηρώντας όμως ότι $\lim_{t \rightarrow -1^-} \epsilon(t) = \infty$ και $\lim_{t \rightarrow -1^+} \epsilon(t) = -\infty$ δηλαδή με άλλα λόγια ισχύει ότι $\lim_{|\xi(t)| \rightarrow 1^-} |\epsilon(t)| = \infty$. Ακριβώς, ο μόνος τρόπος που μπορεί το $|\xi(t)|$ με αρχική τιμή $|\xi(0)| < 1$ να τείνει στην μονάδα είναι το $|\epsilon(t)|$ να τείνει στο άπειρο. Αυτό όμως αποδείξαμε ότι είναι αδύνατο λόγω της

$$|\epsilon(t)| \leq C \quad \forall t \geq 0$$

. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι :

$$|\xi(t)| < 1 \quad \forall t \geq 0$$

Συνεπώς ισχύει ότι :

$$\left| \frac{x(t) - x_d(t)}{\rho(t)} \right| < 1 \quad \forall t \geq 0$$

Και γιατί $\rho(t) > 0$ ισχύει :

$$-\rho(t) < x(t) - x_d(t) < \rho(t) \quad , \forall t \geq 0$$

Έχουμε αποδείξει μια από τις δύο ζητούμενες ιδιότητες της σχεδίασης ελέγχου. Στη συνέχεια γιατί το $u(t)$:

$$u(t) = -\frac{k}{w(t)}\epsilon(t)$$

Είναι γινόμενο φραγμένων ποσοτήτων στο χρόνο και $w(t) > 0$ (συγκεκριμένα $w(t) \geq w_1 > 0$) και το $u(t)$ είναι φραγμένο στον χρόνο. Επομένως ισχύει ότι :

$$u(t) \in L_\infty$$

Επίσης δείξαμε ότι το $\xi(t)$ είναι φραγμένο από πάνω και κάτω ($-1 < |\xi(t)| < 1$) και $-\rho(t) < x(t) - x_d(t) < \rho(t)$, $\forall t \geq 0$ ή ισοδύναμα:

$$-\rho(t) + x_d(t) < x(t) < \rho(t) + x_d(t) \quad , \forall t \geq 0$$

Αφού $x_d(t) \in L_\infty$ και $\rho(t)$ επίσης φραγμένη ποσότητα από πάνω και κάτω , είναι και το $x(t)$ φραγμένο από πάνω και από κάτω. Άρα :

$$x(t) \in L_\infty$$

Τελικά , αποδείξαμε ότι όντως με αυτή την σχεδίαση ελέγχου πετυχαίνουμε:

$$x(t), u(t) \in L_\infty$$

$$-\rho(t) < x(t) - x_d(t) < \rho(t) \quad , \forall t \geq 0$$

Αυτή είναι η απαραίτητη μαθηματική βάση στην οποία βασίστηκε η σχεδίαση στο θέμα 1 καθώς και η σύγκλιση των προσομοιώσεων στο θέμα 2.

5 Κώδικας

Δυστυχώς δεν ήταν αρκετός ο χρόνος για να εξηγηθούν τα αρχεία κώδικα. Άμα είναι δυνατό η εξηγησή θα σταλθεί με email.

Το main script του κώδικα είναι το **project_modelo.m**