Εργασία Ρομποτικής.
Ένδυση χεριού απο ρομποτικό βραχίωνα.

Θεολόγης Γεώργιος
AEM:10413
email: gtheolog@ece.auth.gr

Ιούνιος 2024

1 Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την σχεδίαση κινηματικού ελέγχου ενός ρομποτικού βραχίωνα ο οποίος θα πραγματοποιεί την ένδυση ανθρώπινου χεριού. Αρχικά, θα διατυπωθούν οι απαραίτητες μαθηματικές σχέσεις για υλοποίηση του στόχου του έλεγχου με τις ζητούμενες προδιαγραφές ενώ στη συνέχεια θα πραγματοποιηθεί η προσομοίωση της κίνησης του βραχίωνα σε δοσμένα δεδομένα κίνησης του ανθρώπινου χεριού.

Ο σκοπός του κινηματικού ελέγχου είναι η άκρη του βραχίωνα να ενδύσει ένα ανθρώπινο χέρι από τον καρπό του έως τον ώμο. Για να πραγματοποιηθεί αυτή η ένδυση αρκεί το άκρο του βραχίωνα να διατρέξει μια διαδρομή κατά μήκος του χεριού απο τον καρπό έως τον ώμο. Τα μόνα ουσιαστικά δεδομένα που έχει ο έλεγχος για το χέρι είναι οι μετρήσεις-(πιθανώς και εκτιμήσεις σε real-time setting) της θέσης , προσανατολισμού αλλά και γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας του καρπού του ανθρώπινου χεριού ως προς ένα αδρανειακό πλαίσιο **{0}** κάθε δεδομένη στιγμή δειγματοληψίας. Αυτό το πλαίσιο 0 θεωρείται στερεωμένο στον ώμο του χεριού ο οποίος στη συγκεκριμένη εφαρμογή θεωρείται ακίνητος καθόλη την διάρκεια του ελέγχου-ένδυσης. Επίσης γνωρίζει δομικά στοιχεία του χεριού και συγκεκριμένα ότι το μήκος του πήχη και το μήκος του μπράτσου είναι ίσα με 0.3 m.

Στα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας αντλούμε αυτές τις προαναφερόμενες μετρήσεις για τον καρπό από το αρχείο **human_arm.p** με χρήση της εντολής:

Επίσης γνωρίζουμε το μοντέλο του ρομποτικού βραχίωνα το οποίο περιέχεται στο **ur5robot.p** και αλληλεπιδρούμε με αυτό κάνοντας χρήση συναρτήσεων του robotics toolbox του Peter Crorke στη Matlab.

Κατά την διάρκεια της ένδυσης θα χωρίσουμε την κίνηση του βραχίωνα σε δύο σταδία. Το πρώτο στάδιο είναι η κίνηση απο καρπό έως τον αγκώνα κατά μήκος του πήχη και στη συνέχεια το δεύτερο στάδιο είναι η κίνηση από τον αγκώνα έως τον ώμο κατά μήκος του μπράτσου. Κατά την κίνηση στο πρώτο στάδιο (πήχης) θέλουμε ο προσανατολισμός του βραχίωνα να είναι ίδιος με το προσανατολισμό του καρπού. Στη συνέχεια μετά το πέρασμα του αγκώνα επιθυμούμε ο προσανατολισμός του βραχίωνα να έχει το **n** διάνυσμα του ευθυγραμμισμένο με το μπράτσο και δείχνοντάς στη κατεύθυνση του αγκώνα.

2 Ζητούμενο 1: Εύρεση $p_e, \dot{p}_e$

Πριν προχωρήσουμε στην σχεδίαση νόμου κινηματικού έλεγχου συνειδητοποιούμε ότι χρειαζόμαστε και άλλα δεδομένα για το χέρι και όχι μόνο του καρπού. Πράγματι η κίνηση γίνεται κατά μήκος δύο στερεών σωμάτων του πήχη και του μπράτσου. Εμείς γνωρίζουμε την γενικευμένη θέση του καρπού κάθε στιγμή δειγματοληψίας t μέσω την εντολής "HA.get_arm_posture(t)" η οποία μας δίνει την γενικευμένη θέση του πλαισίου του βραχίωνα **{w}** ως προς το αδρανειακό πλαίσιο {0}. Συγκεκριμένα μας δίνει την θέση του καρπού $\mathbf{p_w}$, τον προσανατολισμό του καρπού $\mathbf{Q_w}$, την γραμμική ταχύτητα του καρπού $\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{w}$ και την γωνιακή του ταχύτητα $\omega_\mathbf{w}$. Γνωρίζουμε προφανώς και την γενικευμένη θέση του ώμου ο οποίος είναι ακινητοποιημένος πάνω στο πλαίσιο {0}. Άρα για την πλήρη περιγραφή του χεριού χρειαζόμαστε να εξάγουμε δεδομένα για την συνδετική άρθρωση μεταξύ του πήχη και του μπράτσου δηλαδή του αγκώνα. Θεωρούμε , λοιπόν στον αγκώνα το πλαίσιο **{e}** και αρκεί να υπολογίσουμε την θέση $\mathbf{p_e}$ και την γραμμική ταχύτητα $\mathbf{\dot{p}_e}$ του αγκώνα ως προς το αδρανειακό πλαίσιο $\{0\}$ συναρτήσει γνωστών ποσοτήτων της γενικευμένης θέσης του καρπού.

Τα δεδομένα προσανατολισμού Q_w είναι σε μορφή quaternion. Μέσω της εντολής "quat2rotm(transpose(Qw))" του robotics toolbox μεταφράζουμε το περιγραφή προσανατολισμού απο quaternion σε πίνακα στροφής-προσανατολισμού R. Άρα το Q_w αντιστοιχεί στο πίνακα περιστροφής R_{0w} που θα χρησιμοποιήσουμε. Αντίστοιχα θα γίνεται η μετατροπή από την μια έκφραση στην άλλη και στην υπόλοιπη εργασία.

Επίσης, για το πλαίσιο του καρπού γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{n_w}$ του πίνακα στροφής $\mathbf{R_{0w}}$ είναι συνεχώς ευθυγραμμισμένο με τον πήχη και δείχνει προς την κατεύθυνση απο αγκώνα σε καρπό. Επομένως, έχοντας ότι το μήκος του πήχη είναι $\mathbf{l_f} = 0.3\ m$ γνωρίζουμε οτί η θέση του αγκώνα στο πλαίσιο {w} του καρπού είναι:

$$\mathbf{p_{we}} = -0.3\mathbf{x}$$

Όπου $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$. Στη συνεχεία μπορούμε να υπολογίσουμε την θέση του αγκώνα απο τα προαναφερόμενα χρησιμοποιώντας την σχέση :

$$\mathbf{p_e} = \mathbf{p_w} + \mathbf{R_{0w}}\mathbf{p_{we}}$$

Άρα αντικαθιστώντας η θέση του αγκώνα {e} ως προς το αδρανειακό πλαίσιο $\{0\}$ εκφρασμένο ως συνάρτηση του p_w και του R_{0w} (το R_{0w} υπολογίζεται από το Q_w) του καρπού είναι:

$$\mathbf{p_e} = \mathbf{p_w} - \mathbf{R_{0w}} \cdot 0.3 \cdot \mathbf{x} \tag{1}$$

Για να βρούμε την γραμμική ταχύτητα $\mathbf{\dot{p}_e}$ του αγκώνα ως προς το $\{0\}$ αρκεί να πάρουμε την χρονική παράγωγο της θέσης του p_e:

$$\mathbf{\dot{p}_e} = \mathbf{\dot{p}_w} - 0.3\mathbf{\dot{R}_{0w}}\mathbf{x}$$

Αναπτύσσοντας $\mathbf{I_{3x3}} = \mathbf{R_{0w}^T}\mathbf{R_{0w}}$ έχουμε:

$$\mathbf{\dot{p}_e} = \mathbf{\dot{p}_w} - 0.3\mathbf{\dot{R}_{0w}}\mathbf{R_{0w}^T}\mathbf{R_{0w}}\mathbf{x}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\mathbf{\dot{R}_{0w}}\mathbf{R_{ow}^T} = \hat{\omega}_\mathbf{w}$ και συνεπώς έχουμε:

$$\mathbf{\dot{p}_e} = \mathbf{\dot{p}_w} - 0.3 \cdot \hat{\omega}_\mathbf{w}\mathbf{R_{ow}}\mathbf{x} \tag{2}$$

Εδώ το $\hat{\omega}_w$ είναι απλά ο αντισυμμετρικός πίνακας so(3) που αντιστοιχεί στη γωνιακή ταχύτητα ω_w του αγκώνα.

Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα με την χρήση μετασχηματισμού συστροφών.

$$V_{w,h} = \begin{bmatrix}\dot{p}_w \\ \omega_w\end{bmatrix}$$

$$V_{w,b} = \begin{bmatrix}\mathbf{R_{ow}^T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R_{ow}^T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{p}_w \\ \omega_w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{R_{ow}^T}\mathbf{\dot{p}_w} \\ \mathbf{R_{ow}^T}\omega_\mathbf{w}\end{bmatrix}$$

$$V_{e,b} = \begin{bmatrix}\mathbf{I} & -\mathbf{\hat{p}_{we}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix} V_{w,b}$$

$$V_{e,b} = \begin{bmatrix}\mathbf{R_{ow}^T}\mathbf{\dot{p}_w} - \mathbf{\hat{p}_{we}}\mathbf{R_{ow}^T}\omega_\mathbf{w} \\ \mathbf{R_{ow}^T}\omega_\mathbf{w}\end{bmatrix}$$

$$V_{e,h} = \begin{bmatrix}\mathbf{R_{ow}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R_{ow}}\end{bmatrix} V_{e,b}$$

$$V_{e,h} = \begin{bmatrix}\mathbf{\dot{p}_w} - \mathbf{R_{ow}}\mathbf{\hat{p}_{we}}\mathbf{R_{ow}^T}\omega_\mathbf{w} \\ \omega_\mathbf{w}\end{bmatrix} V_{e,b}$$

$$V_{e,h} = \begin{bmatrix}\mathbf{\dot{p}_w} + 0.3\mathbf{R_{ow}}\mathbf{\hat{x}}\mathbf{R_{ow}^T}\omega_\mathbf{w} \\ \omega_\mathbf{w}\end{bmatrix} V_{e,b}$$

$$V_{e,h} = \begin{bmatrix}\mathbf{\dot{p}_w} + 0.3\widehat{(\mathbf{R_{ow}}\mathbf{x})}\omega_\mathbf{w} \\ \omega_\mathbf{w}\end{bmatrix} V_{e,b}$$

$$V_{e,h} = \begin{bmatrix}\mathbf{\dot{p}_w} - 0.3\hat{\omega}_\mathbf{w}\mathbf{R_{ow}}\mathbf{x} \\ \omega_\mathbf{w}\end{bmatrix} V_{e,b}$$

Άρα καταλήξαμε στην ίδια έκφραση με πριν για το $\mathbf{\dot{p}_e}$ ως προς το αδρανειακό πλαίσιο (0,0,0).

3 Ζητούμενο 2: Νόμος κινηματικού ελέγχου

3.1 Προσδιορισμός θέσεων και ταχυτήτων σημείων του χεριού

Έχοντας αντλήσει τις απαραίτητες πληροφορίες για τον αγκώνα είμαστε σε θέση να βρούμε την θέση οποιουδήποτε σημείου του χεριού μια δεδομένη στιγμή κάνοντας χρήση μόνο των πληροφοριών για τον καρπό. Πράγματι, τις ίδιες εξισώσεις (1),(2) που βγάλαμε για τον αγκώνα μπορούμε να βρούμε αντίστοιχες για όλα τα σημεία του πήχη αντικαθιστώντας το 0.3 με την απόσταση του σημείου του πήχη από τον καρπό.

Πράγματι για σημείο p του πήχη η σχετική του θέση από το w είναι $p_{wp} = -l_p\mathbf{x}$ με $0 < l_p < 0.3$. Αντίστοιχα με την απόδειξη για (1),(2) για δεδομένο σημείο του πήχη p έχουμε θέση και γραμμική ταχύτητα:

$$\mathbf{p_p} = \mathbf{p_w} - \mathbf{R_{0w}} \cdot l_p \cdot \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{p} = \dot{\mathbf{p}}_\mathbf{w} - l_p \cdot \hat{\omega}_\mathbf{w}\mathbf{R_{ow}}\mathbf{x} \tag{3}$$

Η ερώτηση τώρα είναι πως μπορούμε να βρούμε την θέση και την ταχύτητα δεδομένου σημείου του μπράτσου. Η απάντηση είναι ότι αντικαθιστώντας στις προηγούμενες σχέσεις αντί για τα μεγέθη γενικευμένης θέσης και ταχύτητας του καρπού αυτά του αγκώνα {e} παίρνουμε τα αντίστοιχα μεγέθη για κάθε σημείο του μπράτσου. Πράγματι για σημείο b του μπράτσου έχουμε $p_{eb} = -l_b\mathbf{x}$ με $0 < l_b < 0.3$

$$\mathbf{p_b} = \mathbf{p_e} - \mathbf{R_{0e}} \cdot l_b \cdot \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{b} = \dot{\mathbf{p}}_\mathbf{e} - l_b \cdot \hat{\omega}_\mathbf{e}\mathbf{R_{oe}}\mathbf{x} \tag{4}$$

Εδώ τα $p_e, \dot{p}_e$ είναι γνωστά από το ζητούμενο 1. Πρέπει όμως να προσδιορίσουμε τα R_{0e} και επομένως μαζί το ω_e.Για πλήρη αντιστοιχία με τον καρπό ορίζουμε το πλαίσιο του αγκώνα {e} με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η σχετική στροφή του πλαισίου {e} ως προς αυτό του καρπού {w} να είναι ίσο με $Rot(\mathbf{o_w}, \theta)$ (περιστρέφεται το {w} πλαίσιο γύρω απο το ow κατά ϑ γωνία) όπου το ϑ να είναι τέτοιο ώστε ο τελικός πίνακας στροφής του πλαισίου R_{0e} να έχει διάνυσμα n ευθυγραμμισμένο με το μπράτσο και δείχνοντας στην κατεύθυνση από τον ώμο στον αγκώνα.

Θα πρέπει άρα βάση αυτής της περιγραφής που βασίζεται σε στροφή κινητούς άξονες να ισχύει :

$$R_{0e} = R_{0w}Rot(\mathbf{y}, \theta)$$

Προφανώς ο άξονας y του πλαισίου {w} είναι ο o_w άρα πολλαπλασιάζοντας απο τα δεξιά με το Rot(y,ϑ) έχουμε στροφή κατά ϑ γύρω από τον κινητό άξονα y δηλαδή τον ow. Για να προσδιορίσουμε την γωνία ϑ επικαλούμαστε το δοσμένο σχήμα:

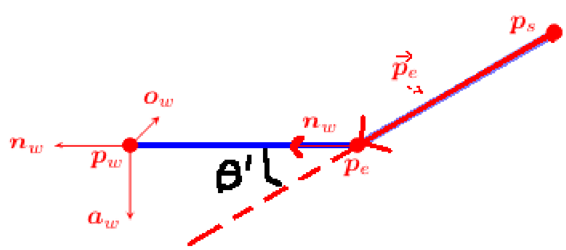


Figure 1: Σχετική γωνία ϑ'

Βλέπουμε εδώ ότι μπορούμε να βρούμε την σχετική γωνία ϑ' μεταξύ των δυο πλαισίων παρατηρώντας με χρήση εσωτερικού γινομένου ότι :

$$\mathbf{p_e} \cdot \mathbf{n_w} = |\mathbf{n_w}| \cdot |\mathbf{p_e}| \cos(\theta')$$

Παρατηρούμε επίσης ότι το ϑ' μπορεί να ανήκει μόνο από το 0 έως 180 μοίρες επειδή ο ανθρώπινος αγκώνας μπορεί να κινηθεί από στο εύρος 0-180 μοιρών μόνο. Μια κίνηση προς ϑ'<0 είναι αφύσικη για το ανθρώπινο χέρι (και θα αποτελούσε σοβαρό τραυματισμό). Συνεπώς, για το ϑ' έχουμε παίρνοντας υπόψη ότι για το μοναδιαίο διάνυσμα έχουμε $|n_w| = 1$:

$$\theta' = arc\cos(\frac{\mathbf{p_e} \cdot \mathbf{n_w}}{|\mathbf{p_e}|})$$

Όμως παρατηρούμε ότι η στροφή του πλαισίου {w} προς το {e} γύρω από το $\mathbf{o_w}$ γίνεται κατά γωνία ϑ' αλλά με ωρολογιακή φορά. Άρα, έχουμε ϑ=-ϑ' στη σχέση $R_{0e} = R_{0w}Rot(\mathbf{o_w}, \theta)$ δηλαδή:

$$\theta = -arc\cos(\frac{\mathbf{n_w} \cdot \mathbf{p_e}}{|p_e|})$$

Αυτή η γωνία στη πράξη μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο αν και στη συγκεκριμένη εφαρμογή παραμένει σταθερή. Εμείς θα πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο σαν να είναι μεταβλητή για να έχουμε έναν νόμο ελέγχου πιο γενικό.

Τέλος πρέπει να προσδιορίσουμε και την γωνιακή ταχύτητα του πλαισίου {e} που ορίσαμε στον αγκώνα. Ο προσανατολισμός του πλαισίου {e} είναι $R_{0e} = R_{0w}Rot(\mathbf{o_w}, \theta)$ ενώ η γωνιακή ταχύτητα του ω_e ως προς το αδρανειακό πλαίσιο 0 έχει αντισυμμετρική so(3) μορφή:

$$\hat{\omega}_e = \dot{R}_{0e} \cdot R_{0e}^T$$

Όμως ισχύει :

$$\dot{R}_{0e} = \dot{R}_{0w}Rot(\mathbf{y}, \theta) + R_{0w}\dot{R}ot(\mathbf{y}, \theta)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\hat{\omega}_e = \dot{R}_{0w}Rot(\mathbf{y}, \theta) \cdot Rot^T(\mathbf{y}, \theta)R_{0w}^T + R_{0w}\dot{R}ot(\mathbf{y}, \theta)Rot^T(\mathbf{y}, \theta)R_{0w}^T$$

Άμεσα με πράξεις βρίσκουμε την μορφή:

$$\hat{\omega}_e = \hat{\omega}_w + R_{0w}\dot{\theta}\hat{\mathbf{y}}R_{0w}^T$$

Δηλαδή:

$$\hat{\omega}_e = \hat{\omega}_w + \dot{\theta}(R_{0w} \cdot \mathbf{y})\hat{}$$

Τελικά λόγω $R_{0w} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{o_w}$ είναι ίση με:

$$\hat{\omega}_e = \hat{\omega}_w + \dot{\theta}\hat{\mathbf{o}}_\mathbf{w}$$

Άρα η γωνιακή ταχύτητα του πλαίσιου {e} είναι:

$$\omega_\mathbf{e} = \omega_\mathbf{w} + \dot{\theta}\mathbf{o_w}$$

Το $\dot{\theta}(t)$ το εκτιμούμε ως : $\dot{\theta}(t) = \frac{\theta(t) - \theta(t - T_s)}{T_s}$ ενώ το ω_w και το R_{0w} είναι γνωστά μεγέθη του καρπού.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι σε αυτή την εργασία τα δεδομένα του χεριού ήταν τέτοια που διατηρούσαν σταθερή την γωνία ϑ. Επομένως πρακτικά ίσχυε : $\omega_e = \omega_w$. Ωστόσο θα αξιοποιήθει στον έλεγχο της κίνησης η πιο γενική σχέση που βγάλαμε παραπάνω.

3.2 Γενική Διατύπωση Νόμου Κινηματικού Ελέγχου

Για τον κινηματικό έλεγχο του άκρου του βραχίωνα θα αξιοποιήσουμε την σχεδίαση Closed Loop Inverse Kinematics (CLICK). Σύμφωνα με αυτή την σχεδίαση κάθε χρονική στιγμή έχουμε μια επιθυμητή γραμμική και γωνιακή ταχύτητα για το άκρο , $\dot{p}_d$ και ω_d αντίστοιχα αλλά και επιθυμητή θέση p_d και προσανατολισμό Q_d.

Σκοπός του ελέγχου είναι να οδηγήσουμε το άκρο στο να παρακολουθεί δίχως σφάλμα την επιθυμητή θέση και προσανατολισμό. Ως σφάλματα ορίζουμε το σφάλμα θέσης $\mathbf{e_p} = \mathbf{p} - \mathbf{p_d}$ και το σφάλμα προσανατολισμού $\mathbf{e_i}$ μεταξύ των $\mathbf{Q}, \mathbf{Q_d}$. Για να βρούμε το σφάλμα προσανατολισμού βάσει της θεωρίας πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα του σφάλματος:

$$\mathbf{Q_e} = \mathbf{Q} * \mathbf{Q_d^{-1}} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta_e}{2}) \\ \sin(\frac{\theta_e}{2})\mathbf{k_e} \end{bmatrix} \in S^3$$

Για το σφάλμα προσανατολισμού e_i χρησιμοποιήσαμε τον εξής ορισμό από την βιβλιογραφία:

$$\mathbf{e_i} = \sin(\frac{\theta_e}{2})\mathbf{k_e}$$

Δηλαδή κρατάμε το 2ο,3ο και 4ο στοιχείο του $\mathbf{Q_e}$. Ο αναλυτικός υπολογισμός του $\mathbf{Q_e}$ γίνεται με τον εξής τρόπο: $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \eta \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$ $\quad\quad$ $\mathbf{Q_d^{-1}} = \begin{bmatrix} \eta_d \\ -\mathbf{e_d} \end{bmatrix}$ Άρα:

$$\mathbf{Q_e} = \begin{bmatrix} \eta \cdot \eta_d - \mathbf{e^T} \cdot (-\mathbf{e_d}) \\ \eta \cdot (-\mathbf{e_d}) + \eta_d \mathbf{e} + \mathbf{ex}(-\mathbf{e_d}) \end{bmatrix} \in S^3$$

Με αυτό τον τρόπο υπολογίζεται στο πρόγραμμα της matlab.

Επιπλέον προσδιορίζοντας επιθυμητή γραμμική και γωνιακή ταχύτητα για το άκρο $\dot{p}_d$ και ω_d είμαστε επιτέλους στην θέση να ορίσουμε μια είσοδο ελέγχου σε μορφή ταχύτητας για το χώρο εργασίας του άκρου:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_\mathbf{d} \\ \omega_\mathbf{d} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K_p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e_p} \\ \mathbf{e_i} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Όπου $\mathbf{K_p}, \mathbf{K_0}$ θετικά ορισμένοι πίνακες 3χ3 και η είσοδος ελέγχου στο χώρο εργασίας u διάνυσμα 6χ1 που εκφράζει την επιθυμητή υβριδική ταχύτητα του άκρου {a} του βραχίωνα ως προς το πλαίσιο {0}. Εμείς όμως μόνο την ταχύτητα των αρθρώσεων του βραχίωνα μπορούμε να ελέγξουμε και συνεπώς οι πραγματικές εντολές που δίνουμε είναι για την ταχύτητα των αρθρώσεων $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J^{-1}}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{u} \tag{6}$$

Όπου $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ είναι η ιακωβιανή του βραχίωνα την δεδομένη στιγμή ενώ ο βραχίωνας είναι 6 βαθμών ελευθερίας (άρα ιακωβιανή 6χ6) και υποθέτουμε ότι ο βραχίωνας λειτουργεί εντός του χώρου εργασίας του και άρα δεν διέρχεται από ιδιάζοντα σημεία. Για τους παραπάνω λόγους υποθέτουμε ότι η αντίστροφη ιακωβιανή $\mathbf{J^{-1}}(\mathbf{q})$ ορίζεται δίχως πρόβλημα.

Ενώ πράγματι με το παραπάνω τρόπο έχουμε εντολές ταχύτητας αρθρώσεων $\dot{\mathbf{q}}$ δεν έχουμε /γνωρίζουμε κάποια συνάρτηση για να εφαρμόζει αυτό τον έλεγχο στις αρθρώσεις του μοντέλου του βραχίωνα στον κώδικα της matlab. Για αυτό το λόγω θεωρούμε ότι οι εντολές $\dot{\mathbf{q}}$ εφαρμόζονται με επιτυχία και η εφαρμογή τους υλοποιείται στο κώδικα με τον υπολογισμό της επόμενης θέσης μεσώ της μεθόδου Euler:

$$q(t + T_s) = q(t) + \dot{q}(t) \cdot T_s$$

3.3 1ο Στάδιο Κίνησης: Κίνηση κατά μήκος του πήχη

Έχοντας φτιάξει την υποδομή του νόμου ελέγχου μένει να ορίσουμε ποίες είναι οι επιθυμητές θέσεις και προσανατολισμοί που επιθυμούμε να παρακολουθήσει το άκρο του βραχίωνα.

Για το πρώτο στάδιο της κίνησης επιθυμούμε το άκρο του βραχίωνα {a} να κινηθεί από το καρπό {w} στον αγκώνα μέσα σε διάστημα 5 δευτερολέπτων. Καθώς, γίνεται η ένδυση του πήχη περνάμε επιθυμούμε να περάσει το άκρο {a} από διαδοχικά σημεία του πήχη στη διαδρομή καρπού-αγκώνα. Αυτά τα σημεία είναι που θέλουμε το άκρο να βρίσκεται σε μια δεδομένη στιγμή t είναι η επιθυμητή θέση $p_d(t)$. Εκφράζεται ως:

$$\mathbf{p_d}(t) = \mathbf{p_w}(t) - \mathbf{R_{0w}}(t) \cdot l_p(t) \cdot \mathbf{x} \quad t \in [0, 5] \ sec$$

Αυτή ήταν η σχέση που εξηγήσαμε παραπάνω στη αρχή της περιγραφής του ζητουμένου 2. Ωστόσο εδώ η επιθυμητή θέση μεταβάλλεται κάθε t καθώς διατρέχουμε τον πήχη. Έχουμε επομένως $l_p(0) = 0$ (θέση καρπού t=0) και $l_p(5) = 0.3$ (θέση αγκώνα την t=5 sec) με $l_p(t)$ η κατάλληλη συνάρτηση που προσδιορίζει τον τρόπο που θέλουμε το άκρο να διατρέχει τον πήχη. Μπορεί να θέλουμε αυτό να γίνει με σταθερή ταχύτητα

$$V = \frac{0.3}{5} = 6 \cdot 10^{-2} \ \frac{m}{s} \quad => \quad l_{p_1}(t) = 6 \cdot 10^{-2} \cdot t \quad\ t \ (m) \ \in [0, 5]$$

Το πρόβλημα με αυτή την σχεδίαση είναι η ασυνέχεια στην αρχική και τελική ταχύτητα , η οποία από μηδενική γίνεται στιγμιαία 0.06 m/s και μετά μηδενίζεται ξανά την t=5. Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα μπορούμε να σχεδιάσουμε πολυωνυμική τροχιά για την θέση l_p με $l_p(0) = 0,\ l_p(5) = 0.3$ και $\dot{l}_p(0) = \dot{l}_p(5) = 0$. Με αυτές τις προδιαγραφές η πολυωνυμική τροχιά αρκεί να είναι 3ου βαθμού και σύμφωνα με την (6.5) σχέση του βιβλίου του μαθήματος:

$$l_{p_2}(t) = \frac{3 \cdot 0.3}{25} \cdot t^2 - \frac{2 \cdot 0.3}{125} \cdot t^3 \quad (m)\ t \in [0, 5]$$
$$l_{p_2}(t) = \frac{9}{250} \cdot t^2 - \frac{3}{625} \cdot t^3 \quad (m)\ t \in [0, 5]$$

Η σχεδίαση της επιθυμητής σχετικής θέσης πάνω στον πήχη είναι σαφώς πιο ομαλή για την περίπτωση l_{p_2} καθώς η ταχύτητα και η θέση είναι συνεχής τότε.

Η επιθυμητή γραμμική ταχύτητα τότε όπως εξηγήθηκε πριν γίνεται ίση με την χρονική παράγωγο :

$$\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{d}}(t) = \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{w}}(t) - l_p(t) \cdot \hat{\omega}_{\mathbf{w}}(t)\mathbf{R}_{\mathbf{ow}}(t)\mathbf{x} - \dot{l}_p(t)\mathbf{R}_{\mathbf{0w}}(t) \cdot \mathbf{x}$$

Άρα για την πρώτη περίπτωση $l_{p_1}(t)$:

$$\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{d_1}}(t) = \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{w}}(t) - 6 \cdot 10^{-2} t \cdot \hat{\omega}_{\mathbf{w}}(t)\mathbf{R}_{\mathbf{ow}}(t)\mathbf{x} - 6 \cdot 10^{-2}\mathbf{R}_{\mathbf{0w}}(t) \cdot \mathbf{x} \quad t \in [0, 5]$$

Ενώ για την δεύτερη περίπτωση με το πολυώνυμο 3ου βαθμού $l_{p_2}(t)$ έχουμε:

$$\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{d_2}}(t) = \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{w}}(t) - (\frac{9}{250} \cdot t^2 - \frac{3}{625} \cdot t^3) \cdot \hat{\omega}_{\mathbf{w}}(t)\mathbf{R}_{\mathbf{ow}}(t)\mathbf{x} - (\frac{9}{125} \cdot t - \frac{9}{625} \cdot t^2)\mathbf{R}_{\mathbf{0w}}(t) \cdot \mathbf{x} \quad t \in [0, 5]$$

Για τον προσανατολισμό του άκρου του βραχίωνα θέλουμε κατά την διάρκεια της κίνησης του πήχη να ταυτίζεται με αυτόν του καρπού {w}. Με άλλα λόγια ο επιθυμητός προσανατολισμός $\mathbf{Q_d}$ πρέπει να είναι ίσος με τον προσανατολισμό του καρπού $\mathbf{Q_w}$:

$$\mathbf{Q_d}(t) = \mathbf{Q_w}(t) \quad t \in [0, 5]$$

Καθώς ο καρπός και οποιοδήποτε σημείο του πήχη βρίσκεται στον πήχη ,δηλαδή στο ίδιο σώμα, η επιθυμητή γωνιακή ταχύτητα του άκρου όσο διατρέχει τον πήχη είναι ίσο με την γωνιακή ταχύτητα του καρπού (η γωνιακή ταχύτητα εκφρασμένη στο πλαίσιο {0} δηλαδή). Άρα:

$$\omega_{\mathbf{d}}(t) = \omega_{\mathbf{w}}(t) \quad t \in [0, 5]$$

Τελικά, έχουμε βγάλει 2 νόμους κινηματικού ελέγχου για την κίνηση των πρώτων 5 δευτερολέπτων μεταξύ του καρπού και του αγκώνα.

3.4 2ο Στάδιο Κίνησης: Κίνηση κατά μήκος του μπράτσου

Σε πλήρη αντιστοιχία με τις προηγούμενες αναλύσεις, θέλουμε στο χρονικό διάστημα [5-10] second το άκρο του βραχίωνα να ενδύσει το μπράτσο , διατρέχοντας τα σημεία μεταξύ του αγκώνα {e} και του ώμου {s}. Συνεπώς, η επιθυμητή του θέση αυτό το διάστημα πρέπει να είναι:

$$\mathbf{p_d}(t) = \mathbf{p_e}(t) - \mathbf{R_{0e}}(t) \cdot l_b(t) \cdot \mathbf{x} \quad t \in [5, 10]\ sec$$

Όπως πριν η επιθυμητή θέση μεταβάλλεται κάθε t καθώς διατρέχουμε το μπράτσο. Έχουμε επομένως $l_b(5) = 0$ (θέση αγκώνα t=5 sec) και $l_b(10) = 0.3$ (θέση ώμου την t=10 sec) με $l_b(t)$ η κατάλληλη συνάρτηση που προσδιορίζει τον τρόπο που θέλουμε το άκρο να διατρέχει τον μπράτσο. Μπορεί να θέλουμε αυτό να γίνει με σταθερή ταχύτητα

$$V = \frac{0.3}{5} = 6 \cdot 10^{-2}\ \frac{m}{s} \quad => \quad l_{b_1}(t) = 6 \cdot 10^{-2} \cdot (t-5) \quad t\ (m)\ \in [5, 10]$$

Με αυτή την σχεδίαση πάλι έχουμε το πρόβλημα της ασυνέχειας στην ταχύτητα. Αντίστοιχα με πριν για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα μπορούμε να σχεδιάσουμε πολυωνυμική τροχιά για την θέση l_b με $l_b(5) = 0,\ l_b(10) = 0.3$ και $\dot{l}_b(0) = \dot{l}_b(5) = 0$. Με αυτές τις προδιαγραφές η πολυωνυμική τροχιά αρκεί να είναι 3ου βαθμού και σύμφωνα με την (6.5) σχέση του βιβλίου του μαθήματος:

$$l_{b_2}(t) = \frac{3 \cdot 0.3}{25} \cdot (t-5)^2 - \frac{2 \cdot 0.3}{125} \cdot (t-5)^3 \quad (m)\ \in [5, 10]$$

$$l_{b_2}(t) = \frac{9}{250} \cdot (t-5)^2 - \frac{3}{625} \cdot (t-5)^3 \quad (m) \ \in [5,10]$$

Η σχεδίαση της επιθυμητής σχετικής θέσης πάνω στον πήχη είναι σαφώς πιο ομαλή για την περίπτωση l_{b_2} καθώς η ταχύτητα και η θέση είναι συνεχής τότε.

Η επιθυμητή γραμμική ταχύτητα τότε όπως εξηγήθηκε πριν γίνεται ίση με την χρονική παράγωγο :

$$\mathbf{\dot{p}_d}(t) = \mathbf{\dot{p}_e}(t) - l_b(t) \cdot \hat{\omega}_\mathbf{e}(t)\mathbf{R_{oe}}(t)\mathbf{x} - \dot{l}_b(t)\mathbf{R_{0e}}(t) \cdot \mathbf{x} \quad t \in [5,10]$$

Άρα για την πρώτη περίπτωση $l_{b_1}(t)$:

$$\mathbf{\dot{p}_{d_1}}(t) = \mathbf{\dot{p}_e}(t) - 6 \cdot 10^{-2}(t-5) \cdot \hat{\omega}_\mathbf{e}(t)\mathbf{R_{0e}}(t)\mathbf{x} - 6 \cdot 10^{-2}\mathbf{R_{0e}}(t) \cdot \mathbf{x} \qquad t \in [5,10]$$

Ενώ για την δεύτερη περίπτωση με το πολυώνυμο 3ου βαθμού $l_{p_2}(t)$ έχουμε:

$$\mathbf{\dot{p}_{d_2}}(t) = \mathbf{\dot{p}_e}(t) - (\frac{9}{250} \cdot (t-5)^2 - \frac{3}{625} \cdot (t-5)^3) \cdot \hat{\omega}_\mathbf{e}(t)\mathbf{R_{0e}}(t)\mathbf{x} - (\frac{9}{125} \cdot (t-5) - \frac{9}{625} \cdot (t-5)^2)\mathbf{R_{0e}}(t) \cdot \mathbf{x} \quad t \in [5,10]$$

Για τον προσανατολισμό του άκρου του βραχίωνα θέλουμε κατά την διάρκεια της κίνησης στο μπράτσο να ταυτίζεται με αυτόν του πλαισίου που ορίσαμε για τον αγκώνα {e}. Δηλαδή , θέλουμε ο προσανατολισμός του άκρου να είναι τέτοιος ώστε η σχετική του στροφή από το πλαίσιο {w} να είναι ίση με $Rot(o_w, \theta)$ (όπου ow ο κινητός άξονας y του πλαισίου w). Αφού αποδείξαμε προηγουμένως ότι ο προσανατολισμός του πλαισίου του αγκώνα {e} είναι ίσος με $R_{0e} = R_{0w}Rot(\mathbf{y}, \theta)$ θέλουμε να ισχύει απλά $R_{0d} = R_{0e} = R_y Rot(\mathbf{y}, \theta)$. Με άλλα λόγια ο επιθυμητός προσανατολισμός $\mathbf{Q_d}$ πρέπει να είναι ίσος με το Quaternion $\mathbf{Q_e}$ που αντιστοιχεί στο πίνακα στροφής $R_{0d} = R_{0w}Rot(\mathbf{y}, \theta)$. Άρα:

$$\mathbf{Q_d}(t) = \mathbf{Rot2Quart}(\mathbf{R_{0w}Rot}(\mathbf{y}, \theta(\mathbf{t})))(t) \quad t \in [5,10]$$

Με $\theta(t) = -arc\cos(\frac{\mathbf{n_w(t)} \cdot \mathbf{p_e(t)}}{|p_e(t)|})$.

Κάθε σημείο του μπράτσου βρίσκεται στο ίδιο σώμα και έχει τον ίδιο προσανατολισμό με το πλαίσιο {e}. Για αυτό το λόγο η επιθυμητή γωνιακή ταχύτητα του άκρου όσο διατρέχει τον πήχη είναι ίσο με την γωνιακή ταχύτητα του πλαισίου {e} που έχουμε ορίσει. Άρα:

$$\omega_\mathbf{d}(t) = \omega_\mathbf{e}(t) \quad t \in [5,10]$$

Με $\omega_\mathbf{e}(t)$ να ορίζεται βάση της :

$$\hat{\omega}_e(t) = \hat{\omega}_w(t) + \dot{\theta}(t)\mathbf{\hat{o}_w}$$

που αποδείξαμε προηγουμένως.

Παρατηρούμε ότι με την παρούσα σχεδίαση για τον προσανατολισμό, έχουμε ασυνέχεια του επιθυμητού προσανατολισμού την στιγμή t=5 sec που βρίσκεται στον αγκώνα. Πράγματι τότε το R_d αλλάζει απότομα από R_{0w} σε $R_{0w}Rot(o_w, \theta)$. Αυτό οδηγεί σε ένα ξαφνικό σφάλμα προσανατολισμού e_i καθώς ο προσανατολισμός του άκρου του βραχίωνα παρακολουθούσε πιστά τον προσανατολισμό του καρπού {w} και τώρα καλείται ξαφνικά να ευθυγραμμιστεί με το {e}. Το σφάλμα αυτό διορθώνεται μέσω του ελέγχου ο οποίος αναγκάζει το βραχίωνα μέσα σε ορισμένο χρόνο να παρακολουθήσει τον προσανατολισμό του πλαισίου {e} (ή αλλιώς θα μπορούσαμε να πούμε να ευθυγραμμιστεί με αυτό).

Σε περίπτωση που δεν επιθυμούμε την εμφάνιση αυτής της ασυνέχειας και της τόσο απότομης αλλαγής του προσανατολισμού του άκρου λόγω του ελέγχου , μπορούμε να φτιάξουμε μια ελεγχόμενη σταδιακή μετάβαση από τον προσανατολισμό του καρπού που είχε το άκρο πριν περάσει τον αγκώνα στον τελικό επιθυμητό. Αυτό, θα μπορούσαμε να το κάνουμε για να αποφύγουμε κάποια πιθανή απότομη στροφή του άκρου κατά την διόρθωση του προσανατολισμού ή οποία μπορεί να γίνει με τρόπο εκτός των προδιαγραφών που δόθηκαν για το βραχίωνα. Για αυτή την σταδιακή μετάβαση επιλέξαμε να πραγματοποιηθεί στο διάστημα [5,7] sec της κίνησης. Ο επιθυμητός προσανατολισμός R_d (άρα και Q_d) επιλέγεται να είναι ίσος με :

$$R_d = R_{0w}Rot(o_w, \frac{t-5}{2}\theta(t)) \quad t \in [5,7]$$

Έτσι οι αλλαγές στον επιθυμητό προσανατολισμό είναι σταδιακές και το άκρο θα της ακολουθήσει ομαλά στο διάστημα 2 δευτερολέπτων μέχρι να ευθυγραμμιστεί το διάνυσμα n του πίνακα στροφής του άκρου ως προς το {0} με το μπράτσο όπως προβλέπει ο στόχος της σχεδίασης της κινηματικής του. Μάλιστα έτσι αποφεύγουμε και το ξαφνικό σφάλμα στον προσανατολισμό που εμφανίζεται την t=5 και έχουμε έναν αλγόριθμο που μας επιτρέπει να εισάγουμε ένα έξτρα επίπεδο ελέγχου πάνω από την σχεδίαση CLICK.

3.5 Σύνοψη Νόμων Κινηματικού Ελέγχου που έχουν εξαχθεί.

Συμπεριληπτικά, πραγματοποιούμε την χρήση του σχήματος ελέγχου CLICK.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_\mathbf{d} \\ \omega_\mathbf{d} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K_p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e_p} \\ \mathbf{e_i} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Επιλέγουμε για τα κέρδη $\mathbf{K_p}, \mathbf{K_0}$ την τιμή

$$\mathbf{K_p} = \mathbf{K_0} = 3 \cdot I_{3x3}$$

Θεωρούμε περίοδο δειγματοληψίας την $T_s = 0.01$ *second*.

3.5.1 Περίπτωση 1: Σταθερές Ταχύτητες και Απότομη διόρθωση προσανατολισμού μετά τον αγκώνα

Για την επιθυμητή θέση p_d έχουμε:

$$\mathbf{p_d} = \begin{cases} \mathbf{p_w}(t) - 6 \cdot 10^{-2} \cdot t \cdot \mathbf{R_{0w}}(t) \cdot \mathbf{x} & t \in [0,5] \ second \\ \mathbf{p_e}(t) - 6 \cdot 10^{-2} \cdot (t-5)\mathbf{R_{0e}}(t) \cdot \mathbf{x} & t \in [5,10] \ second \end{cases}$$

Με $R_{0e} = R_{0w}Rot(\mathbf{y}, \theta)$ και $\theta(t) = -arc\cos(\frac{\mathbf{n_w(t) \cdot p_e(t)}}{|p_e(t)|})$.
Για τον επιθυμητό προσανατολισμό Q_d έχουμε:

$$\mathbf{Q_d} = \begin{cases} \mathbf{Q_w} & t \in [0,5] \ second \\ \mathbf{Q_e} & t \in [5,10] \ second \end{cases}$$

Με $\mathbf{Q_e}(t) = \mathbf{Rot2Quart}(\mathbf{R_{0w}(t)Rot}(\mathbf{y}, \theta(\mathbf{t})))$.
Για την επιθυμητή γραμμική ταχύτητα $\dot{p}_d$ έχουμε:

$$\dot{\mathbf{p}}_\mathbf{d} = \begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_\mathbf{w}(t) - 6 \cdot 10^{-2} t \cdot \hat{\omega}_\mathbf{w}(t)\mathbf{R_{ow}}(t)\mathbf{x} - 6 \cdot 10^{-2}\mathbf{R_{0w}}(t) \cdot \mathbf{x} & t \in [0,5] \ second \\ \dot{\mathbf{p}}_\mathbf{e}(t) - 6 \cdot 10^{-2}(t-5) \cdot \hat{\omega}_\mathbf{e}(t)\mathbf{R_{0e}}(t)\mathbf{x} - 6 \cdot 10^{-2}\mathbf{R_{0e}}(t) \cdot \mathbf{x} & t \in [5,10] \ second \end{cases}$$

Με $\omega_\mathbf{e}(t)$ να ορίζεται από τον αντίστοιχο αντισυμμετρικό πίνακα : $\hat{\omega}_e(t) = \hat{\omega}_w(t) + \dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{o}}_\mathbf{w}(t)$
Για την επιθυμητή γωνιακή ταχύτητα ω_d έχουμε:

$$\omega_\mathbf{d} = \begin{cases} \omega_\mathbf{w} & t \in [0,5] \ second \\ \omega_\mathbf{e} & t \in [5,10] \ second \end{cases}$$

3.5.2 Περίπτωση 2: Ομαλές Ταχύτητες και Απότομη μεταβολή προσανατολισμού αναφοράς μετά τον αγκώνα

Για την επιθυμητή θέση p_d έχουμε:

$$\mathbf{p_d} = \begin{cases} \mathbf{p_w}(t) - (\frac{9}{250} \cdot t^2 - \frac{3}{625} \cdot t^3) \cdot \mathbf{R_{0w}}(t) \cdot \mathbf{x} & t \in [0,5] \ second \\ \mathbf{p_e}(t) - (\frac{9}{250} \cdot (t-5)^2 - \frac{3}{625} \cdot (t-5)^3)\mathbf{R_{0e}}(t) \cdot \mathbf{x} & t \in [5,10] \ second \end{cases}$$

Με $R_{0e} = R_{0w}Rot(\mathbf{y}, \theta)$ και $\theta(t) = -arc\cos(\frac{\mathbf{n_w(t) \cdot p_e(t)}}{|p_e(t)|})$.
Για τον επιθυμητό προσανατολισμό Q_d έχουμε:

$$\mathbf{Q_d} = \begin{cases} \mathbf{Q_w} & t \in [0,5] \ second \\ \mathbf{Q_e} & t \in [5,10] \ second \end{cases}$$

Με $\mathbf{Q_e}(t) = \mathbf{Rot2Quart}(\mathbf{R_{0w}(t)Rot}(\mathbf{y}, \theta(\mathbf{t})))$.

Για την επιθυμητή γραμμική ταχύτητα $\dot{p}_d$ έχουμε:

$$\mathbf{\dot{p}_d} = \begin{cases} \mathbf{\dot{p}_w}(t) - 6\cdot 10^{-2}t\cdot\hat{\omega}_\mathbf{w}(t)\mathbf{R_{ow}}(t)\mathbf{x} - 6\cdot 10^{-2}\mathbf{R_{0w}}(t)\cdot\mathbf{x} & t\in[0,5]\ second \\ \mathbf{\dot{p}_e}(t) - (\frac{9}{250}\cdot(t-5)^2 - \frac{3}{625}\cdot(t-5)^3)\cdot\hat{\omega}_\mathbf{e}(t)\mathbf{R_{0e}}(t)\mathbf{x} - (\frac{9}{125}\cdot(t-5) - \frac{9}{625}\cdot(t-5)^2)\mathbf{R_{0e}}(t)\cdot\mathbf{x} & t\in[5,10]\ second \end{cases}$$

Με $\omega_\mathbf{e}(t)$ να ορίζεται από τον αντίστοιχο αντισυμμετρικό πίνακα : $\hat{\omega}_e(t) = \hat{\omega}_w(t) + \dot{\theta}(t)\mathbf{\hat{o}_w(t)}$
Για την επιθυμητή γωνιακή ταχύτητα ω_d έχουμε:

$$\omega_\mathbf{d} = \begin{cases} \omega_\mathbf{w} & t\in[0,5]\ second \\ \omega_\mathbf{e} & t\in[5,10]\ second \end{cases}$$

3.5.3 Περίπτωση 3: Ομαλές Ταχύτητες και ομαλή μεταβολή προσανατολισμού αναφοράς μετά τον αγκώνα

Για την επιθυμητή θέση p_d έχουμε:

$$\mathbf{p_d} = \begin{cases} \mathbf{p_w}(t) - (\frac{9}{250}\cdot t^2 - \frac{3}{625}\cdot t^3)\cdot\mathbf{R_{0w}}(t)\cdot\mathbf{x} & t\in[0,5]\ second \\ \mathbf{p_e}(t) - (\frac{9}{250}\cdot(t-5)^2 - \frac{3}{625}\cdot(t-5)^3)\mathbf{R_{0e}}(t)\cdot\mathbf{x} & t\in[5,10]\ second \end{cases}$$

Με $R_{0e} = R_{0w}Rot(\mathbf{y},\theta)$ και $\theta(t) = -arc\cos(\frac{\mathbf{n_w(t)}\cdot\mathbf{p_e(t)}}{|p_e(t)|})$.
Για τον επιθυμητό προσανατολισμό Q_d έχουμε:

$$\mathbf{Q_d} = \begin{cases} \mathbf{Q_w} & t\in[0,5]\ second \\ \mathbf{Rot2Quat}(\mathbf{R_{0w}Rot}(\mathbf{y}, \frac{\mathbf{t-5}}{\mathbf{3}}\theta(\mathbf{t}))) & t\in[5,8]\ second \\ \mathbf{Q_e} & t\in[8,10]\ second \end{cases}$$

Με $\mathbf{Q_e}(t) = \mathbf{Rot2Quart}(\mathbf{R_{0w}(t)Rot}(\mathbf{o_w(t)},\theta(\mathbf{t})))$.
Για την επιθυμητή γραμμική ταχύτητα $\dot{p}_d$ έχουμε:

$$\mathbf{\dot{p}_d} = \begin{cases} \mathbf{\dot{p}_w}(t) - 6\cdot 10^{-2}t\cdot\hat{\omega}_\mathbf{w}(t)\mathbf{R_{ow}}(t)\mathbf{x} - 6\cdot 10^{-2}\mathbf{R_{0w}}(t)\cdot\mathbf{x} & t\in[0,5]\ second \\ \mathbf{\dot{p}_e}(t) - (\frac{9}{250}\cdot(t-5)^2 - \frac{3}{625}\cdot(t-5)^3)\cdot\hat{\omega}_\mathbf{e}(t)\mathbf{R_{0e}}(t)\mathbf{x} - (\frac{9}{125}\cdot(t-5) - \frac{9}{625}\cdot(t-5)^2)\mathbf{R_{0e}}(t)\cdot\mathbf{x} & t\in[5,10]\ second \end{cases}$$

Με $\omega_\mathbf{e}(t)$ να ορίζεται από τον αντίστοιχο αντισυμμετρικό πίνακα : $\hat{\omega}_e(t) = \hat{\omega}_w(t) + \dot{\theta}(t)\widehat{(o_w(t))}$
Για την επιθυμητή γωνιακή ταχύτητα ω_d έχουμε:

$$\omega_\mathbf{d} = \begin{cases} \omega_\mathbf{w} & t\in[0,5]\ second \\ \omega_\mathbf{W} + \frac{d}{dt}(\frac{t-5}{3}\theta(t)) * \hat{o}_w & t\in[5,8]\ second \\ \omega_\mathbf{e} & t\in[8,10]\ second \end{cases}$$

4 Αποτελέσματα Κώδικα-Προσομοίωσης

Ακολουθούν τα ζητούμενα διαγράμματα που εξάγαμε από την υλοποίηση του κώδικα στη matlab. Γιατί κάναμε την προσομοίωση 3 διαφορετικών κινηματικών νόμων αποφασίστηκε κάθε νόμος να **υλοποιηθεί σε δικό του αρχείο .m**.

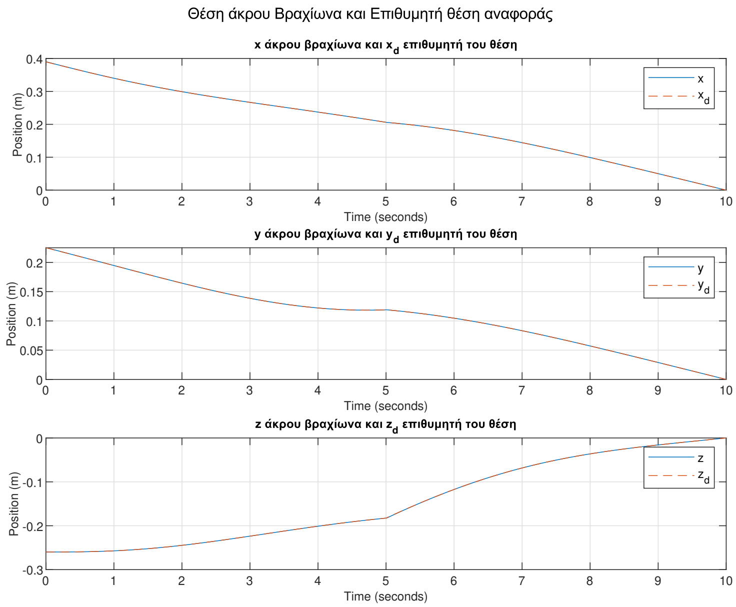
Για απόλυτη ασφάλεια στην robot_main.m θα κλειθούν και οι τρείς νόμοι άμα αν είναι επιθυμητό να καλέσουμε όλα τα διαγράμματα και των τριών περιπτώσεων με σειρά. Όπως και να έχει συνίσταται να εκτελεστούν ξεχωριστά τα robot_casex.m αρχεία για κάθε περίπτωση για να μην υπάρχει περίπτωση μπερδέματος.

4.1 Περίπτωση 1: Σταθερές Ταχύτητες και Απότομη διόρθωση προσανατολισμού μετά τον αγκώνα

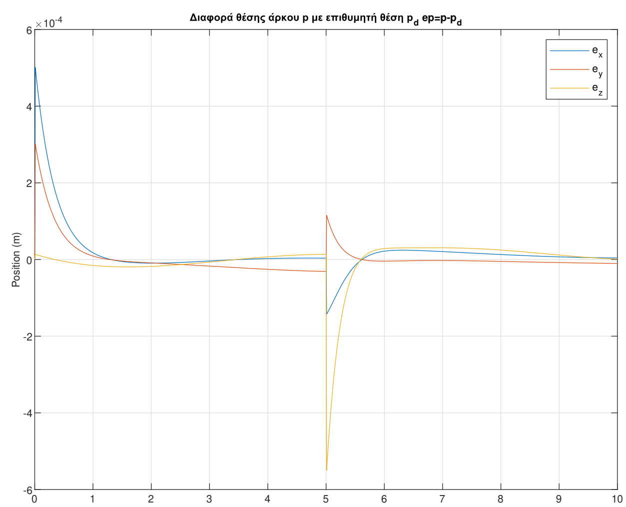
Η περίπτωση αυτή υλοποιείται ως κώδικας στο :

$$robot\_case1.m$$

Ακολουθεί γραφική παράσταση της θέσης $p(t)$ του άκρου του βραχίωνα σε σύγκριση με την επιθυμητή θέσης $p_d(t)$ (θέσης αναφοράς) στο νόμο ελέγχου κίνησης :

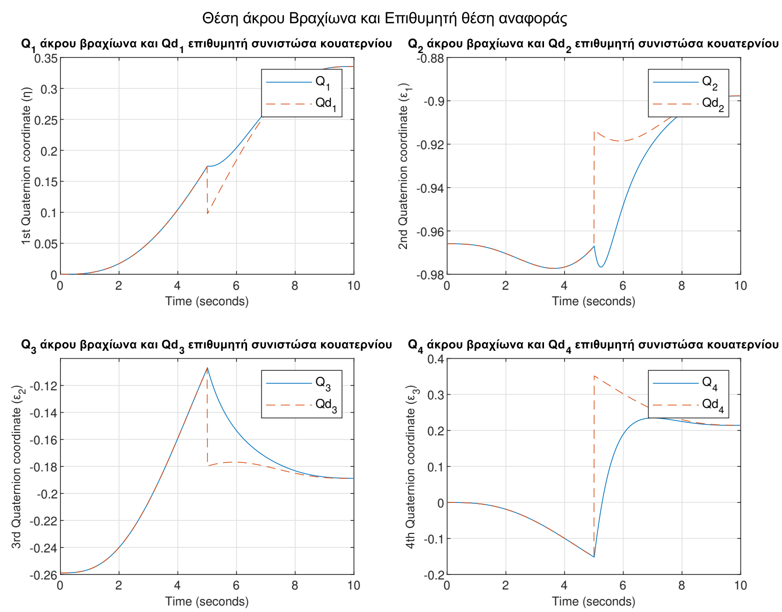


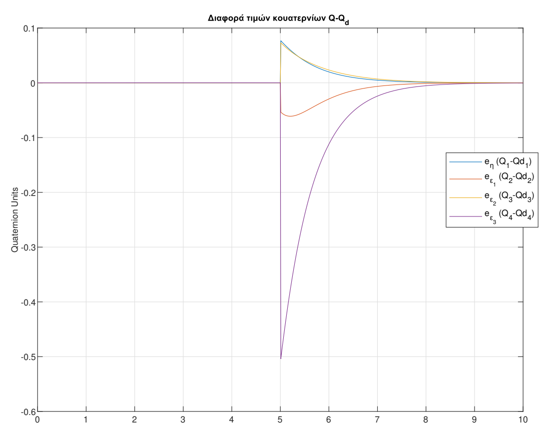
Για να φανεί καλύτερα η διαφορά ανάμεσα στη θέση και τη θέση αναφοράς αναπαριστούμε παρακάτω το σφάλμα παρακολούθησης θέσης στο χρόνο:



Παρατηρούμε από τα γραφήματα για την θέση του άκρου ότι έχουμε πάρα πολύ καλή παρακολούθηση της τροχιάς αναφοράς. Πράγματι καθόλη την διάρκεια των 10 δευτερολέπτων της κίνησης το σφάλμα παρακολούθησης είναι μικρότερο από 0.001 m (άρα ανεπαίσθητο άμα συγκρίνουμε ότι το μήκος πήχη 0.3 m) . Παρατηρούμε ότι ενώ στην αρχή το σφάλμα παρακολούθησης είναι μηδενικό ξαφνικά με ασυνεχή τρόπο μεγαλώνει. Αυτό είναι ερμηνεύεται από την ασυνέχεια στην ταχύτητα που απαιτεί αυτή η σχεδίαση όπως εξηγήθηκε προηγουμένως. Ωστόσο, αυτό το ξαφνικό σφάλμα γρήγορα διορθώνεται και πέφτει και γίνεται της τάξης των 10^{-5} m καθώς φτάνει το άκρο του βραχίωνα στον αγκώνα. Μόλις , φτάσει στον αγκώνα έχουμε πάλι ασυνέχεια στην ταχύτητα και αναμενόμενα ξαφνικό σφάλμα την t=5.01 sec που βέβαια όπως πριν διορθώνεται κατά την διάρκεια της κίνησης στον πήχη. Στο πέρας της κίνησης το άκρο του βραχίωνα απέχει ανεπαίσθητα από τον τελικό στόχο που ήταν ο ώμος {s} αφού τα τελικά σφάλματα παρακολούθησης των συντεταγμένων x,y,z είναι της τάξης του των 10^{-5} m. Όλα αυτά αποκαλύπτουν την αποτελεσματικότητα της παρακολούθησης της θέσης απο το ρομποτικό άκρο αλλά και κάποιες παθολογικές αδυναμίες της σχεδίασης με σταθερή σχετική ταχύτητα κατά τον σύνδεσμο(μπράτσο/πήχης). Ακολουθεί το γράφημα των συντεταγμένων του μοναδιαίου quaternion δηλαδή του προσανατολισμού του άκρου του βραχιώνα στο χρόνο έναντι του επιθυμητού προσανατολισμού αναφοράς:

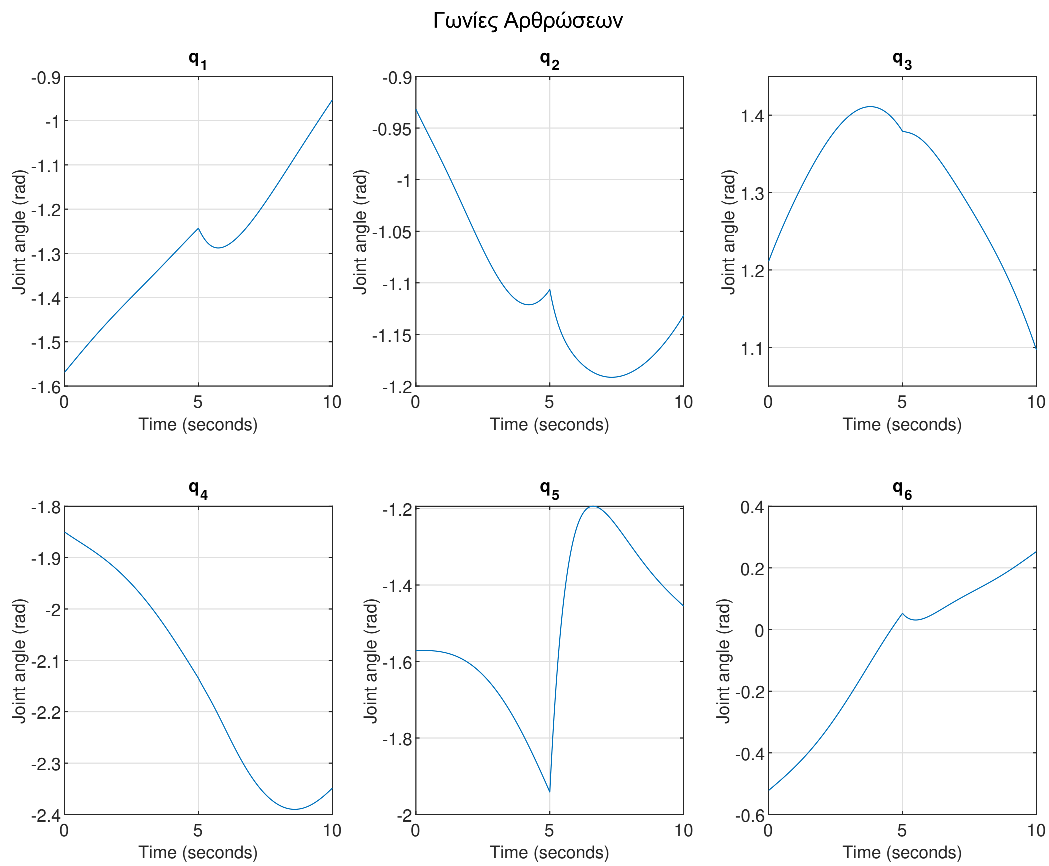
Απεικονίζουμε και την καθαρή διαφορά τους $Q - Q_d$ ανά συντεταγμένη:





Παρατηρούμε ότι στα 5 πρώτα δευτερόλεπτα κίνησης του άκρου πάνω στον πήχη έχουμε εξαιρετική παρακολούθηση του προσανατολισμού αναφοράς από το άκρο του βραχίωνα. Με το που φτάσουμε στον αγκώνα και το άκρο πάει να κινηθεί στον πήχη παρατηρούμε ασυνέχεια στον προσανατολισμό αναφοράς Qd όπως άλλωστε περιμέναμε βάσει της διατύπωσης του νόμου ελέγχου. Παρόλο την ύπαρξη αυτής της ξαφνικής ασυνέχειας στον προσανατολισμό αναφοράς , ο νόμος ελέγχου διορθώνει αποτελεσματικά το σφάλμα στον προσανατολισμό αρκετά αποτελεσματικά στο χρονικό διάστημα 5 sec-8 sec . Προς το τέλος της κίνησης το ο προσανατολισμός του ρομποτικού άκρου παρακολουθεί αποτελεσματικότατα τον προσανατολισμό αναφοράς. Άρα η σχεδίαση αυτή του νόμου ελέγχου είναι λειτουργική και ως προς το προσανατολισμό.

Τέλος , έχουμε και την χρονική απόκριση των γωνιών των αρθρώσεων κατά το διάστημα της κίνησης:



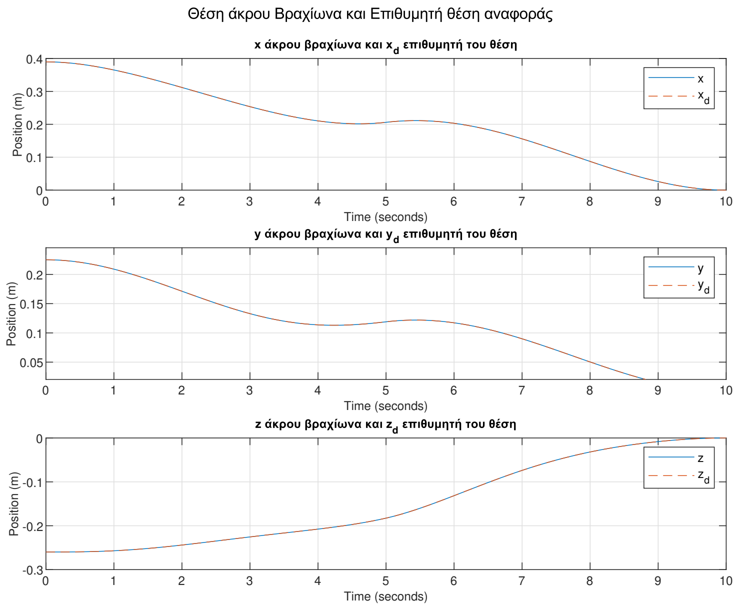
Παρατηρούμε ότι η μεταβολή των γωνιών των αρθρώσεων είναι κατά κύριο λόγω ομαλή με εξαίρεση την στιγμή t=5 που έχουμε την ταυτόχρονη ασυνέχεια ως προς τον προσανατολισμό αναφοράς κυρίως και έως προς τη θέση αναφοράς. Αυτό έχει ως η γραφική παράσταση της γωνίας αρκετών αρθρώσεων να εμφανίζουν μια "μύτη" την t=5 sec με άλλα λόγια μια ασυνέχεια ως προς την κλίση. Βέβαια αυτό το περιμέναμε καθώς η ασυνέχεια στον προσανατολισμό και θέση αναφοράς άρα και στα σφάλματα είναι και ασυνέχεια στην είσοδο ελέγχου u στον χώρο ταχυτήτων του βραχίωνα άρα και στο $\dot{q}$. Επομένως, μέσω τον επόμενων σχεδιάσεων θα προσπαθήσουμε να μειώσουμε όσο είναι δυνατόν αυτή την ασυνέχεια στο $\dot{q}$ καθώς σε ένα πραγματικό σύστημα τόσο απότομες αλλαγές στην είσοδο αναφοράς είναι δύσκολο να υλοποιηθούν.

4.2 Περίπτωση 2: Ομαλές Ταχύτητες και Απότομη μεταβολή προσανατολισμού αναφοράς μετά τον αγκώνα

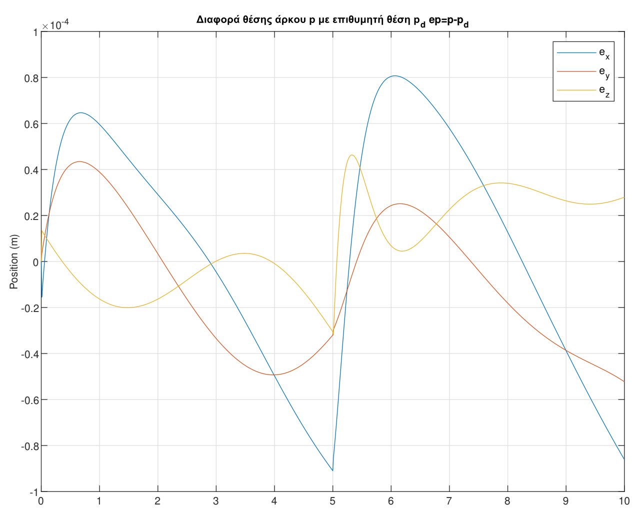
Η περίπτωση αυτή υλοποιείται ως κώδικας στο :

$$robot\_case2.m$$

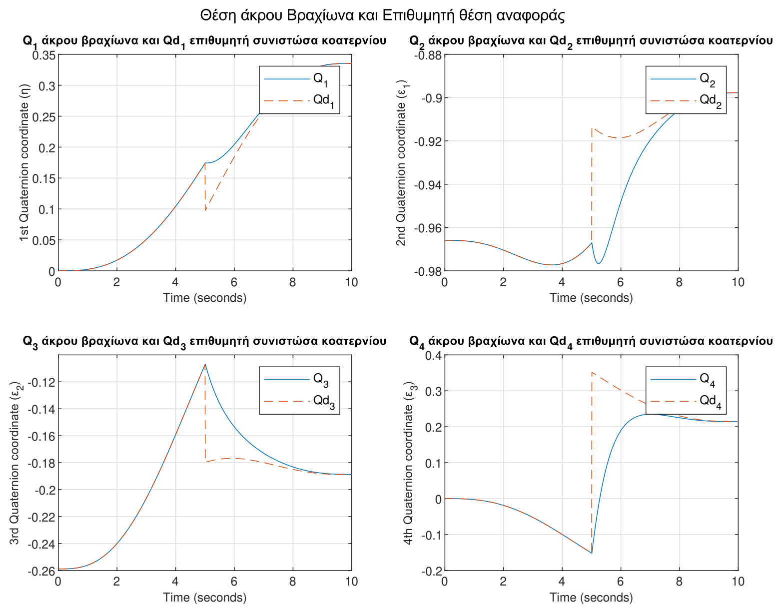
Ακολουθεί γραφική παράσταση της θέσης $p(t)$ του άκρου του βραχίωνα σε σύγκριση με την επιθυμητή θέσης $p_d(t)$ (θέσης αναφοράς) στο νόμο ελέγχου κίνησης :

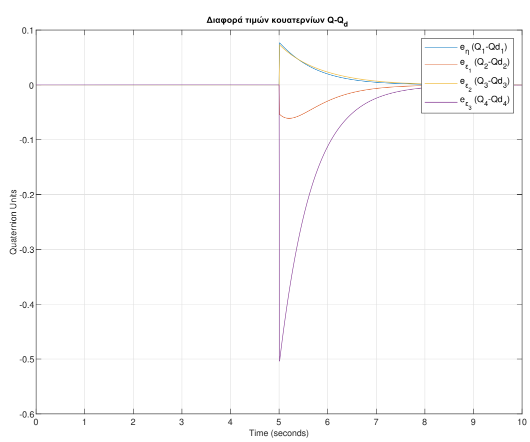


Για να φανεί καλύτερα η διαφορά ανάμεσα στη θέση και τη θέση αναφοράς αναπαριστούμε παρακάτω το σφάλμα παρακολούθησης θέσης στο χρόνο:



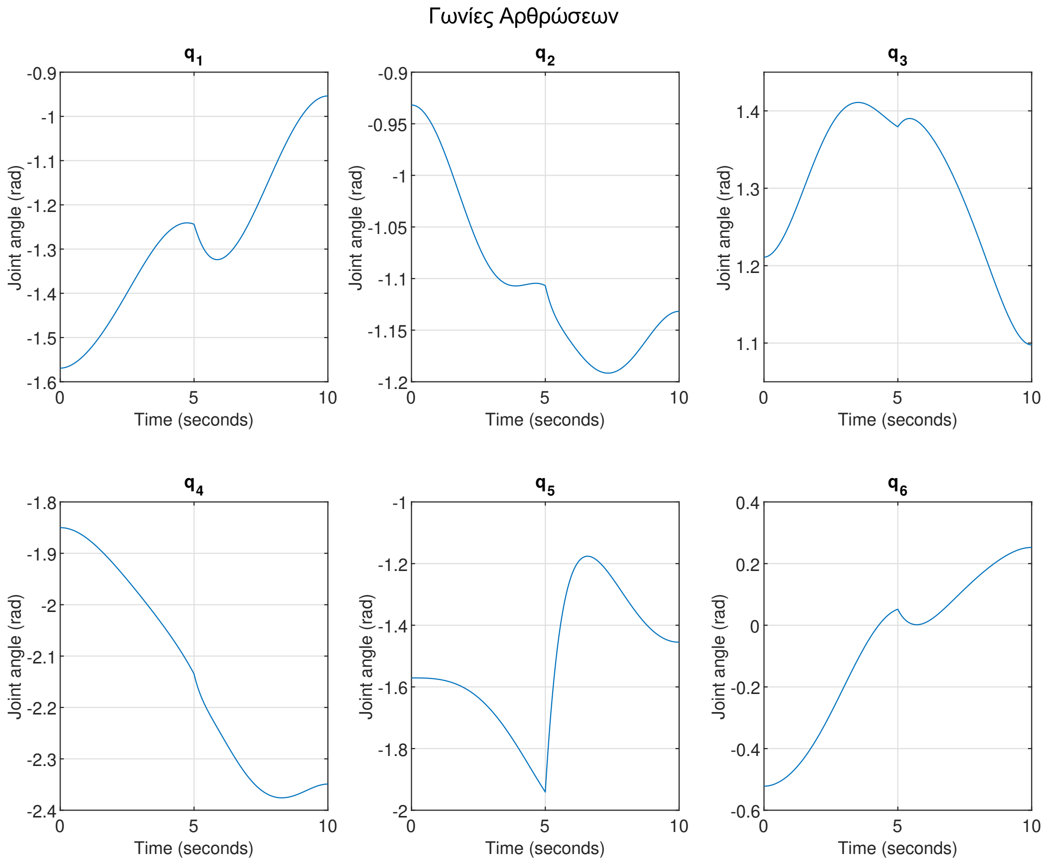
Παρατηρούμε από τα γραφήματα για την θέση του άκρου ότι έχουμε πάλι πάρα πολύ καλή παρακολούθηση της τροχιάς αναφοράς. Παρατηρούμε ότι στις στιγμές t=0,10 sec που είναι τα όρια των περιοχών κίνησης πήχη , μπράτσου , η ταχύτητα του άκρου του ρομποτικού βραχίωνα (η κλίση της γραφικής παράστασης) είναι μηδενική και άρα η κίνηση δεν ξεκινά ούτε τερματίζει απότομα με ασυνεχή ταχύτητα. Αντίστοιχα την t=5 sec οπού το άκρο είναι στον αγκώνα η ταχύτητα του είναι φαίνεται ξανά ομαλή/συνεχής . Αυτό αποτελεί σαφής βελτίωση από την προηγούμενη σχεδίαση . Ως προς το σφάλμα παρακολούθησης θέσης παρατηρούμε παρατηρούμε σχετικά παρόμοια συμπεριφορά με πριν με την διαφορά ότι τα σφάλματα ασυνέχειας είναι μικρότερα ενώ το σφάλμα παραμένει μικρότερο των 10^{-4}. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε την παρακολούθηση της θέσης αναφοράς από το άκρο του βραχίωνα ικανοποιητική. Ακολουθεί το γράφημα των συντεταγμένων του μοναδιαίου quaternion δηλαδή του προσανατολισμού του άκρου του βραχιώνα στο χρόνο έναντι του επιθυμητού προσανατολισμού αναφοράς: Απεικονίζουμε και την καθαρή διαφορά τους $Q - Q_d$ ανά συντεταγμένη:





Ο έλεγχος του προσανατολισμού είναι πανομοιότυπος με την περίπτωση 1 και συνεπώς τα διαγράμματα είναι πανομοιότυπα. Η παρακολούθηση της τροχιάς είναι πάλι πολύ καλή ενώ ξανά μετά τον αγκώνα που εμφανίζεται η απότομη αλλαγή του προσανατολισμού αναφοράς , ο ελεγκτής επαναφέρει το άκρο του βραχίωνα στην ικανοποιητική παρακολούθηση του επιθυμητού προσανατολισμού κατά την κίνηση του στο μπράτσο.

Τέλος , έχουμε και την χρονική απόκριση των γωνιών των αρθρώσεων κατά το διάστημα της κίνησης:



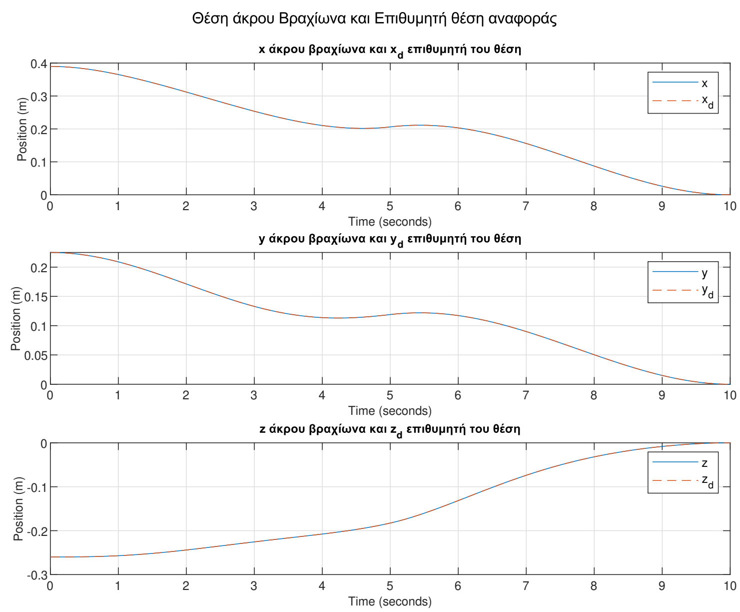
Η εικόνα των αρθρώσεων είναι παρόμοια με πριν . Βέβαια τώρα είναι αισθητή η βελτίωση στην ομαλότητα της μεταβολής των γωνιών των αρθρώσεων λόγω της μικρότερης ασυνέχειας στο σφάλμα θέσης. Παρατηρούμε ότι σε αρκετές αρθρώσεις και κυρίως στην άρθρωση 2 η ξαφνική μεταβολή στην κλίση την t=5 sec είναι μικρότερη σε σχέση με την πρώτη περίπτωση σχεδίασης. Βέβαια , οι γραφικές παραστάσεις δεν είναι τελείως ομαλές λόγω της ύπαρξης της ασυνέχειας στο σφάλμα παρακολούθησης του προσανατολισμού. Βέβαια δεν είδαν όλες οι αρθρώσεις την ίδια βελτίωση της συνέχειας του $\dot{q}$ τους. Για παράδειγμα η q5 είναι παρόμοια με πριν ενώ οι αρθρώσεις 3,4 εμφανίζουν μεγαλύτερη ασυνέχεια την κλίσης την t=5 sec στα γραφήματα τους σε σχέση με πριν. Ωστόσο, θα θεωρήσουμε την παρούσα σχεδίαση ως πιο αποτελεσματική για πραγματική υλοποίηση καθώς η συνολική εικόνα είναι καλύτερη (και μικρότερη η ασυνέχεια του σφάλματος παρακολούθησης).

4.3 Περίπτωση 3: Ομαλές Ταχύτητες και ομαλή μεταβολή προσανατολισμού αναφοράς μετά τον αγκώνα

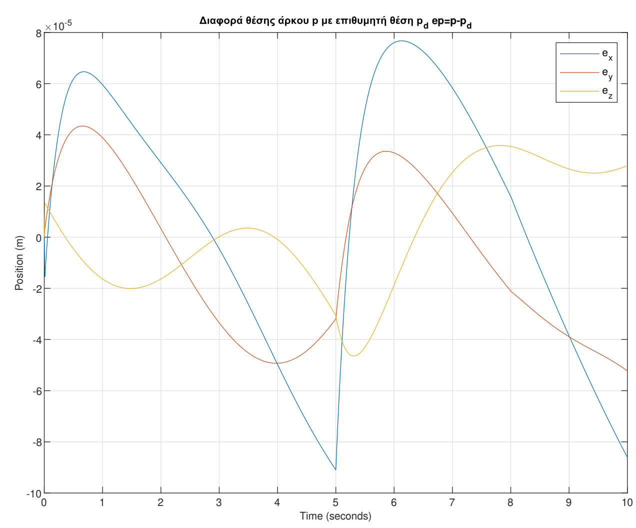
Η περίπτωση αυτή υλοποιείται ως κώδικας στο :

$$robot\_case3.m$$

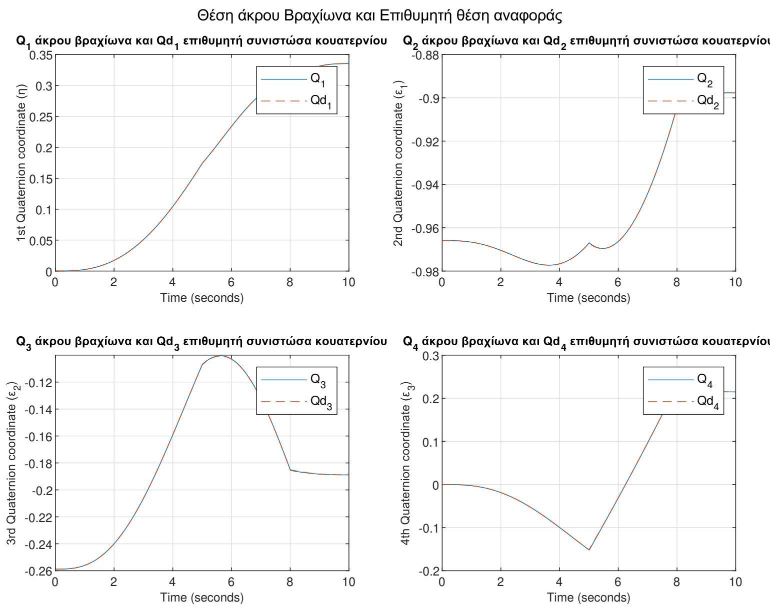
Ακολουθεί γραφική παράσταση της θέσης $p(t)$ του άκρου του βραχίωνα σε σύγκριση με την επιθυμητή θέσης $p_d(t)$ (θέσης αναφοράς) στο νόμο ελέγχου κίνησης :



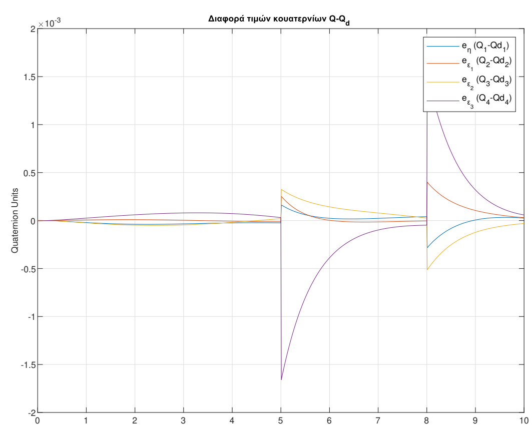
Για να φανεί καλύτερα η διαφορά ανάμεσα στη θέση και τη θέση αναφοράς αναπαριστούμε παρακάτω το σφάλμα παρακολούθησης θέσης στο χρόνο:



Τα διαγράμματα θέσης είναι πανομοιότυπα με της περίπτωσης 2. Δεν βλέπουμε καμία ουσιαστική διαφορά πέρα του ότι κάποιες χρονικές στιγμές έχουμε μικρότερα σφάλματα. Πάλι βέβαια, η παρακολούθηση θέσης είναι ικανοποιητική καθώς το σφάλμα παρακολούθησης θέσης είναι μικρότερο από 0.0001 m. Ακολουθεί το γράφημα των συντεταγμένων του μοναδιαίου quaternion δηλαδή του προσανατολισμού του άκρου του βραχίωνα στο χρόνο έναντι του επιθυμητού προσανατολισμού αναφοράς: Απεικονίζουμε και την καθαρή διαφορά τους

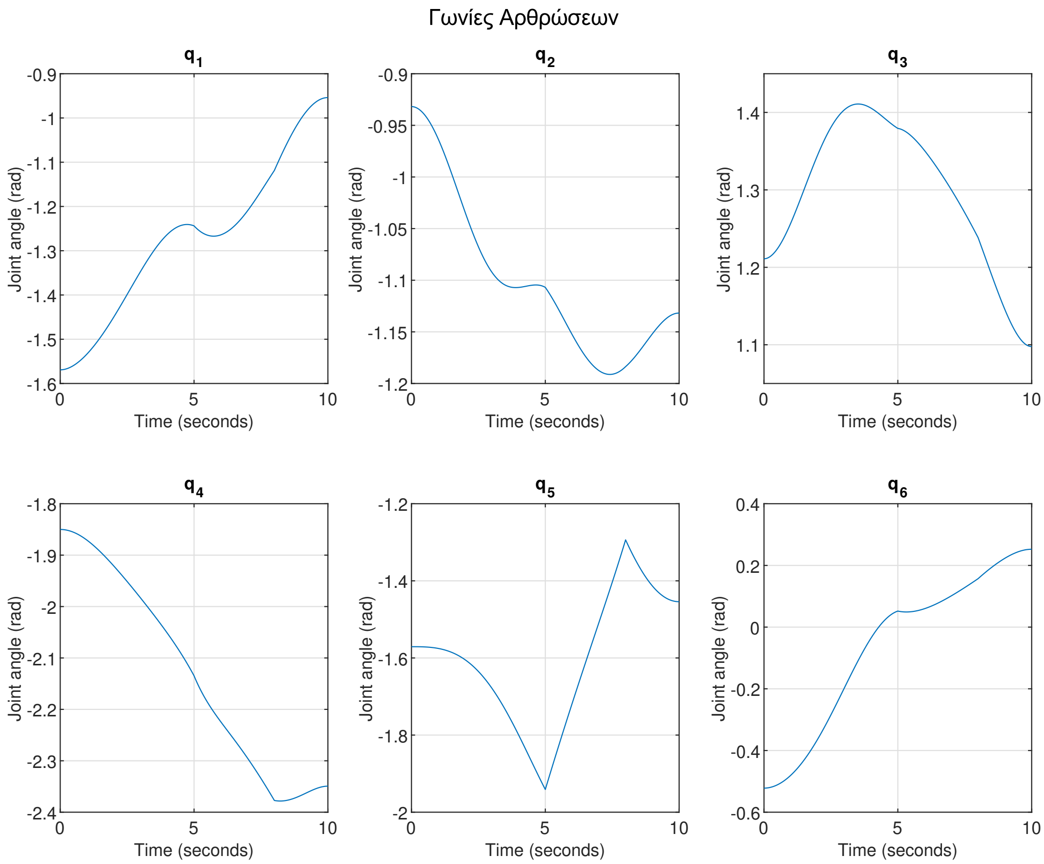


$Q - Q_d$ ανά συντεταγμένη:



Στη παρούσα σχεδίαση βλέπουμε ότι καταφέρνουμε γενικά ικανοποιητική παρακολούθηση του προσανατολισμού σε όλο το χρονικό διάστημα της κίνησης. Οι ασυνέχεια στο σφάλμα προσανατολισμού αναφοράς είναι τάξεις μικρότερη (10^{-3}) από ότι είχαμε στις δυο προηγούμενες σχεδιάσεις. Βέβαια και αυτή η σχεδίαση δεν είναι ιδανική καθώς παρατηρούμε ασυνέχειες των κλίσεων των γραφημάτων του προσανατολισμού του άκρου αλλά και της αναφοράς τις χρονικές στιγμές t=5 και t=8 sec. Ιδανικά θα θέλαμε ο ρυθμός μεταβολής του μοναδιαίου quaternion του άκρου του βραχίωνα να ήταν συνεχής. Ωστόσο, ο έλεγχος είναι ικανοποιητικός καθώς και στον πήχη και προς το πέρας της κίνησης στο μπράτσο έχουμε ικανοποιητική παρακολούθηση προσανατολισμού από το ρομποτικό άκρο.

Τέλος , έχουμε και την χρονική απόκριση των γωνιών των αρθρώσεων κατά το διάστημα της κίνησης:



Σε αυτή την σχεδίαση παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των αποκρίσεων των γωνιών στο χρόνο είναι ομαλότερες γενικά σε σχέση με πριν. Η άρθρωση 5 αποδεικνύεται η πιο ευαίσθητη ως προς τις ασυνέχειες στα σφάλματα παρακολούθησης (δηλαδή ασυνέχειες στις τροχιές αναφοράς) καθώς είναι ορατή και στις 3 σχεδιάσεις η ασυνέχεια ως προς την κλίση της. Οι άλλες 5 αρθρώσεις φαίνεται με τη παρούσα σχεδίαση να έχουν πιο ομαλές χρονικές αποκρίσεις και για αυτό θεωρούμε ότι αυτή η σχεδίαση είναι η βέλτιστη από τις 3 που παρουσιάσαμε σε αυτή την εργασία.

Πιθανώς, να υπάρχει σχεδίαση που να ομαλοποιεί καλύτερα τις χρονικές αποκρίσεις των γωνιών των αρθρώσεων (δηλαδή μας δίνουν πιο συνεχές $\dot{q}$. Ωστόσο, η απουσία γνώσης για την μεταβλητότητα της γωνίας ϑ δυσκολεύει πολύ τις προσεγγίσεις που θα μπορούσαμε να δώσουμε για να έχουμε το βέλτιστο αποτέλεσμα. Μια πιθανή προσέγγιση είναι όπως στην 3η σχεδίαση με την ομαλή μεταβολή του προσανατολισμού αναφοράς να εκλέξουμε $\theta_m(t)$ (η γωνία με την οποία μεταβαίνω απο το {w} ως προς το προσωρινό πλαίσιο του χρονικού διαστήματος 5-8 sec) τέτοιο που να παρουσιάζει μηδενική ταχύτητα στην αρχή και στο πέρας της εξαναγκασμένης σταδιακής μεταβολής (5-8 sec). Κάτι τέτοιο όμως απαιτεί την γνώση της συμπεριφοράς της γωνίας που σχηματίζει ο ϑ που σχηματίζει ο πήχης με το μπράτσο καθώς η μεταβολή της καθιστά αδύνατο να βγάλουμε κάποια πολυωνυμική σχέση σύμφωνα με το κεφαλαίο 6 του βιβλίου του μαθήματος. Και αυτό γιατί δεν γνωρίζουμε την αρχική ούτε την τελική τιμή της ϑ εκ των προτέρων (στην εργασία βέβαια παρέμενε σταθερή αλλά κάτι τέτοιο δεν θα το γνωρίζαμε σε μια real-time εφαρμογή). Άλλωστε η ταχύτητα της $\theta_m(t)$ εξαρτάται και από την ταχύτητα της γωνίας ϑ και επομένως αν αυτή είναι άγνωστη εκ των προτέρων είναι αδύνατον να εξάγουμε έναν νόμο σχεδίασης οπού $\dot{\theta}_m(5) = \dot{\theta}_m(8) = 0$.

5 Επίλογος

Οι αναπαραστάσεις των κινήσεων έγινε με την robot.animate.

Συνίσταται η προβολή των διαγραμάτων κάθε περίπτωσης να γίνει από το αντίστοιχο script και όχι απο το robot_main.m.