

Project

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης πολλών μεταβλητών – Γενετικοί αλγόριθμοι

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Το παρόν πρόβλημα αφορά τη **βελτιστοποίηση της κυκλοφορίας** σε ένα οδικό δίκτυο με χρήση **γενετικών αλγορίθμων**. Το δίκτυο αποτελείται από διασταυρώσεις (κόμβους) και οδικές αρτηρίες (ακμές), με συγκεκριμένη **ικανότητα διέλευσης** και **χρόνους κίνησης**.

Όταν η κυκλοφορία στο δίκτυο είναι χαμηλή, ο χρόνος μετακίνησης από κόμβο σε κόμβο είναι σταθερός. Ωστόσο, καθώς αυξάνεται η ροή οχημάτων, ο χρόνος μετακίνησης **αυξάνεται μη γραμμικά**, λόγω του κορεσμού των δρόμων.

Για κάθε δρόμο i , ο χρόνος κίνησης $T_i(x)$ συναρτήσει του αριθμού των οχημάτων x δίνεται από τη σχέση:

$$T_i(x) = t_i + \frac{a_i x}{1 - \frac{x}{c_i}}$$

όπου:

- t_i είναι ο σταθερός χρόνος μετακίνησης όταν η κυκλοφορία είναι χαμηλή.
- x είναι ο ρυθμός διέλευσης οχημάτων στο δρόμο i .
- c_i είναι η **μέγιστη χωρητικότητα** του δρόμου i .
- a_i είναι ένας συντελεστής συμφόρησης που διαφέρει ανάλογα με την οδική αρτηρία.

Ο στόχος είναι η **ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου μετακίνησης στο δίκτυο** για έναν δεδομένο ρυθμό εισερχόμενων οχημάτων V .

Περιορισμοί

- **Διατήρηση ροής στα σημεία διασταύρωσης:** Ο αριθμός των οχημάτων που εισέρχονται σε κάθε κόμβο πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των οχημάτων που εξέρχονται.
- **Μέγιστη χωρητικότητα δρόμων:** Η τιμή x δεν μπορεί να υπερβεί την τιμή c_i , καθώς αυτό θα οδηγούσε σε ακραία συμφόρηση.
- **Μεταβλητότητα της ροής εισόδου:** Το πρόβλημα θα λυθεί όχι μόνο για μια σταθερή τιμή $V = 100$, αλλά και για τιμές μεταβαλλόμενες κατά $\pm 15\%$ (δηλαδή στο εύρος 85 έως 115).

Προσέγγιση επίλυσης

Η βελτιστοποίηση του προβλήματος θα γίνει μέσω **γενετικών αλγορίθμων**, οι οποίοι προσομοιώνουν τη φυσική εξέλιξη χρησιμοποιώντας μηχανισμούς επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης.

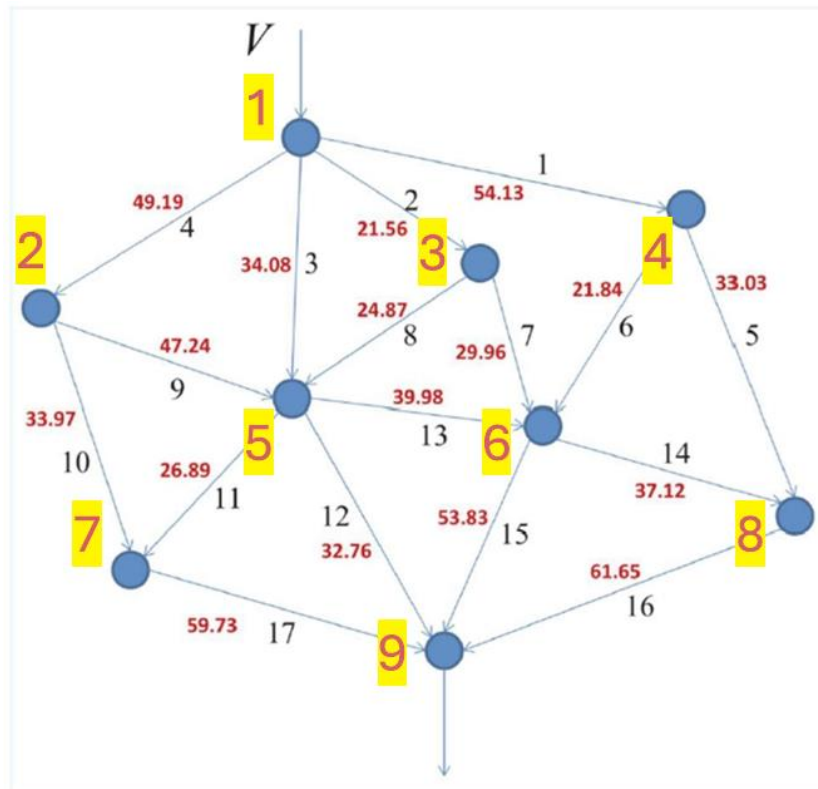
Ο γενετικός αλγόριθμος θα:

1. Αναπαραστήσει κάθε πιθανή λύση ως ένα **διάνυσμα ροών** x στα διάφορα τμήματα του δικτύου.
2. Χρησιμοποιήσει μια **συνάρτηση κόστους**, η οποία υπολογίζει τον συνολικό χρόνο μετακίνησης στο δίκτυο.
3. Τηρήσει τους περιορισμούς μέσω της σωστής προσαρμογής των λύσεων κατά τη διάρκεια της εξέλιξης.
4. Επαναληφθεί για διαφορετικές τιμές του V , προκειμένου να αναλυθεί η ευαισθησία του συστήματος στην αύξηση ή μείωση της κυκλοφορίας.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων θα περιλαμβάνει σύγκριση των βέλτιστων λύσεων για διαφορετικές τιμές του V και αξιολόγηση της αποδοτικότητας του αλγορίθμου.

ΘΕΜΑ 1

Το πρόβλημα που εξετάζουμε είναι η **ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου μετακίνησης** σε ένα **κατευθυνόμενο οδικό δίκτυο**, με δεδομένο έναν ρυθμό εισερχόμενων οχημάτων V . Με σκοπό να διατυπωθούν καλύτερα οι περιορισμοί στην παρακάτω εικόνα φαίνεται σε κίτρινο φόντο η αρίθμηση που δόθηκε στους κόμβους του οδικού δικτύου:



Σχήμα 1. Το οδικό δίκτυο.

1.1. Μεταβλητές Απόφασης

Ορίζουμε:

- x_i : Ο ρυθμός διέλευσης οχημάτων στον δρόμο i [οχ./min].
- c_i : Η μέγιστη χωρητικότητα του δρόμου i [οχ./min].

1.2. Συνάρτηση Αντικειμενικού Στόχου

Ο συνολικός χρόνος μετακίνησης στο δίκτυο είναι το **άθροισμα των χρόνων διέλευσης** από κάθε δρόμο, το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{17} T_i(x_i) = \sum_{i=1}^{17} \left(t_i + \frac{a_i x_i}{1 - \frac{x_i}{c_i}} \right)$$

όπου:

- t_i είναι ο σταθερός χρόνος μετακίνησης όταν η κυκλοφορία είναι χαμηλή.
- a_i είναι ένας συντελεστής που εξαρτάται από τον δρόμο και επηρεάζει τη συμφόρηση.
- x_i είναι ο αριθμός οχημάτων που διέρχονται από τον δρόμο i .
- c_i είναι η μέγιστη χωρητικότητα του δρόμου i .

Ο **στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε** τη συνολική τιμή της συνάρτησης $T(x)$, δηλαδή:

$$\underbrace{\min}_x \sum_{i=1}^{17} \left(t_i + \frac{a_i x_i}{1 - \frac{x_i}{c_i}} \right)$$

1.3. Περιορισμοί

Ι. Διατήρηση ροής στους κόμβους

Για κάθε κόμβο του δικτύου, ο αριθμός των οχημάτων που εισέρχονται πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των οχημάτων που εξέρχονται. Αυτό εκφράζεται ως **σύστημα γραμμικών εξισώσεων** της μορφής:

$$Aeq \cdot x = beq$$

όπου:

- Aeq είναι ο πίνακας των συντελεστών ροής.
- x είναι το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης.

- ο beq είναι το διάνυσμα που εκφράζει τον εισερχόμενο ρυθμό V και τις μηδενικές διαφορές ροής στους κόμβους.

Αναλυτικότερα, για την αποφυγή του συνωστισμού σε κόμβους, σύμφωνα και με την αρίθμηση τους στο Σχήμα 1 προκύπτουν οι παρακάτω περιορισμοί της μορφής $h_i(x)$:

- $h_1(x) = V - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0$
- $h_2(x) = x_4 - (x_9 + x_{10}) = 0$
- $h_3(x) = x_2 - (x_7 + x_8) = 0$
- $h_4(x) = x_1 - (x_5 + x_6) = 0$
- $h_5(x) = (x_{10} + x_8 + x_9) - (x_{11} + x_{12} + x_{13}) = 0$
- $h_6(x) = (x_6 + x_7 + x_{13}) - (x_{14} + x_{15}) = 0$
- $h_7(x) = (x_{10} + x_{11}) - x_{17} = 0$
- $h_8(x) = (x_5 + x_{14}) - x_{16} = 0$
- $h_9(x) = (x_{12} + x_{15} + x_{16} + x_{17}) - V = 0$

II. Περιορισμοί χωρητικότητας των δρόμων

Για κάθε δρόμο i , η ροή x_i δεν μπορεί να υπερβαίνει τη χωρητικότητα c_i και προφανώς δεν μπορεί να είναι αρνητική:

$$0 \leq x_i \leq c_i - 0.001, \forall i = 1, \dots, 17$$

(η μικρή αφαίρεση 0.001 γίνεται για να αποφευχθούν αριθμητικά σφάλματα).

ΘΕΜΑ 2

Στο παρόν θέμα, περιγράφεται η **υλοποίηση και λειτουργία του γενετικού αλγορίθμου** στο MATLAB, καθώς και τα **αποτελέσματα και οι παρατηρήσεις** από την εφαρμογή του στο πρόβλημα βελτιστοποίησης της κυκλοφορίας στο οδικό δίκτυο για **σταθερή ροή εισόδου**.

2.1. Περιγραφή λειτουργίας

Η βελτιστοποίηση του προβλήματος πραγματοποιήθηκε μέσω της συνάρτησης **"ga"** (**Genetic Algorithm**) του **MATLAB**, η οποία χρησιμοποιείται για **παγκόσμια βελτιστοποίηση μη γραμμικών προβλημάτων**.

Η αντικειμενική συνάρτηση **"TexnBelt_Project_Fun1"** υλοποιεί τον υπολογισμό του **συνολικού χρόνου μετακίνησης** στο δίκτυο. Η συνάρτηση αυτή δέχεται ως είσοδο το διάνυσμα ροών x και επιστρέφει το συνολικό χρόνο κίνησης, τον οποίο επιδιώκουμε να **ελαχιστοποιήσουμε**, με το αρχείο **"TexnBelt_Project_Prog1"** να επιλύει το πρόβλημα.

$$T(x) = \sum_{i=1}^{17} \left(t_i + \frac{a_i x_i}{1 - \frac{x_i}{c_i}} \right)$$

Ο αλγόριθμος λαμβάνει υπόψιν του, τους περιορισμούς που προαναφέρθηκαν στο 1.3., με Aeq και beq πίνακες, τους ισοτικούς περιορισμούς $h(x)$ με τη μορφή πινάκων και τους ανισοτικούς περιορισμούς x με την μορφή άνω (c_i) και κάτω (0) ορίων, ενώ παράλληλα έχουμε $V = 100$ για την σταθερή ροή εισόδου σύμφωνα με την εκφώνηση.

Επιπρόσθετα, όσον αφορά την ρύθμιση των παραμέτρων του, ο γενετικός αλγόριθμος διαμορφώθηκε μέσω της **"optimoptions"**, με τις ακόλουθες ρυθμίσεις:

- $PopulationSize = 200$: Ορίζει πόσα υποψήφια σύνολα λύσεων (άτομα) θα υπάρχουν σε κάθε γενιά του αλγορίθμου.
- $ConstraintTolerance = 1e - 6$: Ορίζει την ακρίβεια με την οποία τηρούνται οι περιορισμοί.
- $PlotFcn = @gaplotbestf$: Προσθήκη διαγράμματος για την παρακολούθηση της βέλτιστης λύσης ανά γενιά.

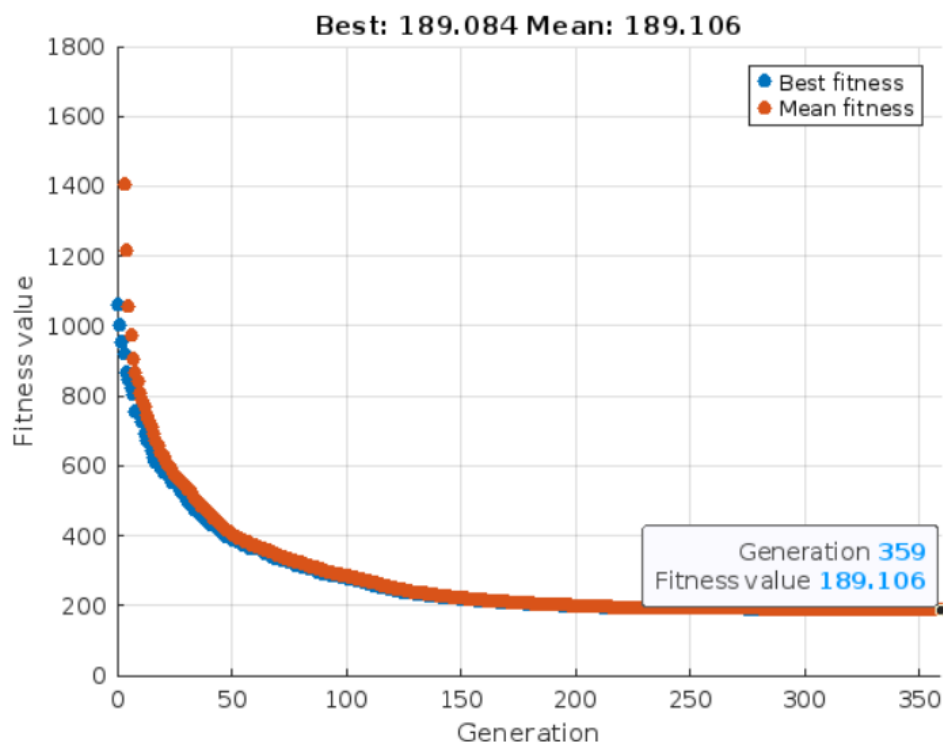
Ο αλγόριθμος εκτελείται με **17 μεταβλητές απόφασης** (μία για κάθε δρόμο), προσπαθώντας να βρει το **βέλτιστο διάνυσμα ροών x^*** που ελαχιστοποιεί τον συνολικό χρόνο μετακίνησης.

2.2. Ανάλυση αποτελεσμάτων

Μετά την εκτέλεση του γενετικού αλγορίθμου, τα αποτελέσματα που εξάγονται περιλαμβάνουν:

- **Βέλτιστο διάνυσμα ροών x^* .**
- **Τελικός χρόνος μετακίνησης $T(x^*)$ (τιμή $fval$).**
- **Αριθμός γενεών** μέχρι τη σύγκλιση (*output.generations*).

Το διάγραμμα "**gaplotbestf**" δείχνει τη μείωση της τιμής του κόστους ανά γενιά. Παρατηρήθηκε ότι ο αλγόριθμος **συγκλίνει σε σταθερή λύση** μετά από συγκεκριμένο αριθμό γενεών και τελική λύση τηρεί τους περιορισμούς ισότητας και χωρητικότητας. Για διάφορες δοκιμές ο χρόνος κυμαίνονταν με μικρές αλλαγές στο τρίτο δεκαδικό ψηφίου της τιμής του χρόνου και στον αριθμό των γενεών. Ένα παράδειγμα είναι 189.084 λεπτά, σε 359 γενιές με πολύ μικρή αλλαγή στη συνάρτηση μέσης ικανότητας (189.106). Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται ο **χρόνος του καλύτερου** και του **μέσου ατόμου κάθε πληθυσμού**, ενώ παραλείπονται κάποιες αρχικοί πληθυσμοί των οποίων οι τιμές ήταν για παράδειγμα 10000 – 50000 ("*yylim([0 1800])*"):



2.3. Παρατηρήσεις

Η επιλογή των **παραμέτρων του γενετικού αλγορίθμου** μπορεί να επηρεάσει τη σύγκλιση αν και όχι σε μεγάλο βαθμό (π.χ., πληθυσμός, γενιές). Τελικά, είναι φανερό ότι ο γενετικός αλγόριθμος κατάφερε να βρει λύση στο προς επίλυση πρόβλημα.

ΘΕΜΑ 3

Στο παρόν θέμα, χρησιμοποιήθηκε ακριβώς η ίδια μεθοδολογία με το **ΘΕΜΑ 2** με τη διαφορά ότι ο ρυθμός των εισερχόμενων οχημάτων V μπορεί να μεταβάλλεται μέχρι $\pm 15\%$ της αρχικής του τιμής ($V = 100$). Συνεπώς, το V μπορεί να πάρει ακέραιες τιμές από 85 έως 115 [οχ./min]. Σκοπός είναι να εξεταστεί η συμπεριφορά του δικτύου σε αυξημένη ή μειωμένη κυκλοφορία. Ο βέλτιστος χρόνος σε [min] για όλες τις πιθανές τιμές του V παρουσιάζονται παρακάτω:

85	137.2439
86	140.1285
87	143.0881
88	146.1090
89	149.2084
90	152.3855
91	155.6402
92	158.9763
93	162.4008
94	165.9105
95	169.5142
96	173.2158
97	177.0230
98	180.9307
99	184.9486
100	189.0884
101	193.3449
102	197.7240
103	202.2418
104	206.9036
105	211.7038
106	216.6570
107	221.7750
108	227.0775
109	232.5460
110	238.1967
111	244.0636
112	250.1462
113	256.4450
114	262.9722
115	269.7726

Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι ο συνολικός χρόνος μετακίνησης αυξάνεται όσο αυξάνεται ο ρυθμός εισερχόμενων οχημάτων V . Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς η μεγαλύτερη κυκλοφορία οδηγεί σε αυξημένη συμφόρηση στο δίκτυο, με αποτέλεσμα την επιμήκυνση των χρόνων διαδρομής.

Παρατηρούμε ότι η σχέση μεταξύ V και του συνολικού χρόνου μετακίνησης δεν είναι γραμμική. Καθώς ο ρυθμός εισόδου πλησιάζει τις υψηλότερες τιμές (115

οχήματα/λεπτό), η αύξηση του χρόνου μετακίνησης γίνεται όλο και πιο απότομη, γεγονός που υποδηλώνει ότι το δίκτυο πλησιάζει τα όρια της χωρητικότητάς του.

Ειδικότερα:

- Για χαμηλές τιμές V (85 – 95), η αύξηση του χρόνου μετακίνησης είναι σχετικά ήπια.
- Για μεσαίες τιμές V (96 – 105), η αύξηση είναι σταδιακά εντονότερη.
- Για υψηλές τιμές V (106 – 115), η αύξηση γίνεται εκθετική, δείχνοντας ότι το σύστημα αρχίζει να υπερφορτώνεται.

Το συγκεκριμένο εύρημα επιβεβαιώνει ότι το οδικό δίκτυο έχει πεπερασμένη ικανότητα διαχείρισης κυκλοφορίας, και όταν η ζήτηση υπερβεί ένα κρίσιμο όριο, η συμφόρηση γίνεται σημαντική.

Αυτή η ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη βελτίωση της διαχείρισης της κυκλοφορίας, προτείνοντας μέτρα όπως:

- Έλεγχος κυκλοφορίας σε ώρες αιχμής για την αποφυγή συμφόρησης.
- Προσαρμογή σηματοδοτών για καλύτερη κατανομή των οχημάτων στο δίκτυο.
- Υπολογισμός κρίσιμου σημείου κορεσμού, ώστε να λαμβάνονται προληπτικά μέτρα πριν η κυκλοφορία φτάσει σε ανεξέλεγκτα επίπεδα.

Συνολικά, ο γενετικός αλγόριθμος έδειξε ότι μπορεί να προσαρμοστεί σε διαφορετικές συνθήκες κυκλοφορίας και να παρέχει χρήσιμες πληροφορίες για τη βελτιστοποίηση του οδικού δικτύου.