Τσαντίκης Γεώργιος
AEM: 10722

1η Εργαστηριακή Άσκηση

Ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης μιας μεταβλητής σε δοσμένο διάστημα

Το πρόβλημα που ζητείται να επιλυθεί είναι δοσμένου του **αρχικού διαστήματος [−1,3]**, με χρήση των **μεθόδων 1)** της **Διχοτόμου, 2)** του **Χρυσού Τομέα, 3)** του **Fibonacci** και **4)** της **Διχοτόμου** με χρήση **παραγώγου,** να ελαχιστοποιηθούν οι παρακάτω κυρτές συναρτήσεις :

- $f1(x)$=$(x−2)$^2 + $x·ln(x$+3)

    → Στο διάστημα [-1, 3] παρουσιάζει ελάχιστο στο 1.14991

- $f2(x)$=e ^(-2x) + (x−2) ^2

    → Στο διάστημα [-1, 3] παρουσιάζει ελάχιστο στο 2.01768

- $f3(x)$=e ^x ·(x^3 −1) + (x−1)·sin(x)

    → Στο διάστημα [-1, 3] παρουσιάζει ελάχιστο στο 0.52009

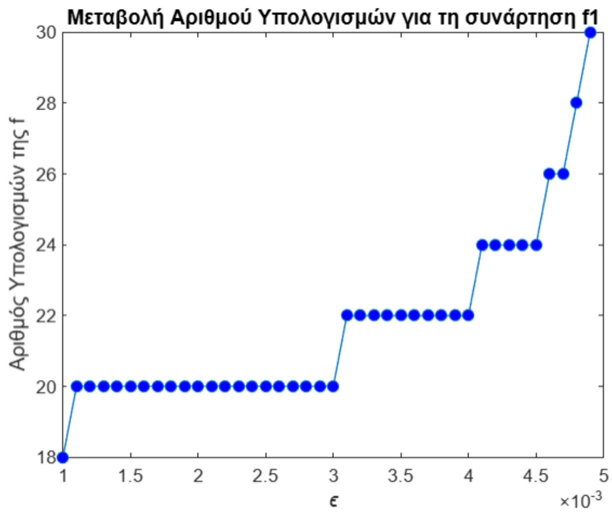
Σε όλες τις μεθόδους που προαναφέρθηκαν ξεκινάμε από ένα αρχικό διάστημα $[a,b]$ μέσα στο οποίο βρίσκεται το ελάχιστο $x*$ της $f(x)$. Με τη χρήση ενός ακολουθιακού αλγορίθμου καταλήγουμε σε ένα διάστημα $[a ,b]$ με προδιαγεγραμμένη ακρίβεια l > 0 (επιθυμητό τελικό εύρος του διαστήματος), δηλαδή $b - \alpha \leq l$. Αυτή είναι η βασική ιδέα όλων των μεθόδων, συνεπώς παρακάτω, στον τρόπο λειτουργίας τους αναφέρεται μόνο οτιδήποτε τις διαφοροποιεί από τις υπόλοιπες. Έτσι, έχοντας μελετήσει προσεκτικά την **παράγραφο 5.1 του βιβλίου,** καταλήξαμε στα παρακάτω αποτελέσματα :

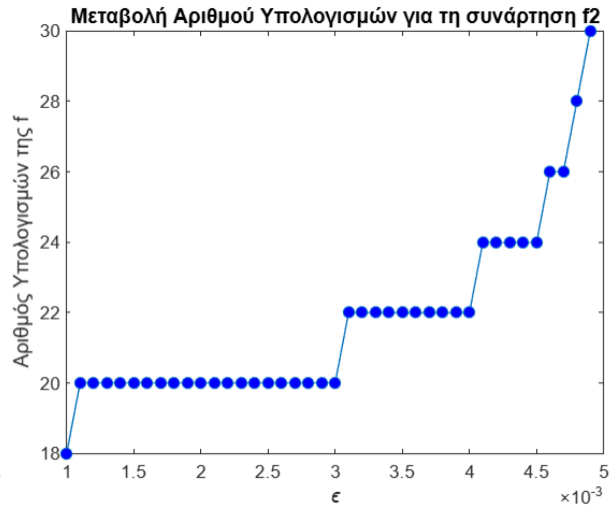
<u>ΘΕΜΑ 1</u>

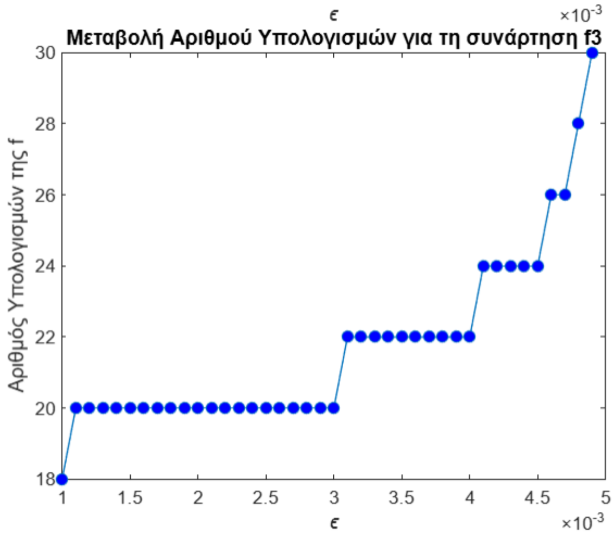
Στο παρόν θέμα υλοποιήθηκε στο MATLAB η **μέθοδος της Διχοτόμου**, όπως παρουσιάζεται στον **αλγόριθμο 5.1.1** του βιβλίου στη σελίδα 109. Η διαφοροποίηση της συγκεκριμένης μεθόδου από τις υπόλοιπες είναι στον τρόπο υπολογισμού των δύο σημείων, που απέχουν απόσταση ε (πολύ μικρή θετική σταθερά) από το μέσο του διαστήματος στην τρέχουσα επανάληψη, ενώ ως επακόλουθο σε κάθε επανάληψη υπολογίζει δύο φορές την τιμή της συνάρτησης, το οποίο δαπανηρό υπολογιστικά και συνεπώς μειονέκτημα της. Στη συνέχεια, αναλόγως του αποτελέσματος κρατάμε το αριστερό ή το δεξί υποδιάστημα και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία. Η αναζήτηση του διαστήματος σταματάει αν ισχύει ότι $b - \alpha < l$, το οποίο ελέγχουμε πριν προχωρήσουμε στην επόμενη επανάληψη. Επιπρόσθετα μειονεκτήματα της μεθόδου είναι ο σχετικά αργός ρυθμός σύγκλισης (γραμμικός), η απαίτηση της συνέχειας της συνάρτησης στο διάστημα αναζήτησης για το οποίο πρέπει να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι περιέχει το ελάχιστο και ο περιορισμός εφαρμογής της σε μονοδιάστατα προβλήματα. Αντίθετα, στα πλεονεκτήματα της μεθόδου περιλαμβάνονται η απλότητα υλοποίησης καθώς δεν απαιτεί σύνθετους υπολογισμούς ή παραγώγους και η ανεξαρτησία της από ιδιότητες της συνάρτησης όπως το αν είναι παραγωγίσιμη .

- Το πρώτο ζητούμενο είναι κρατώντας σταθερό το τελικό εύρος αναζήτησης l = 0.01 να μελετήσουμε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$, i = 1,2,3 (δηλαδή τον συνολικό αριθμό που χρειάστηκε να υπολογιστεί η $f(x)$, για τις δεδομένες τιμές των l και ε, μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος), καθώς μεταβάλλουμε τη σταθερά $\varepsilon > 0$ (απόσταση από τη διχοτόμο). Επιπλέον, να δημιουργήσουμε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις από τις τιμές που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις.

  Οι τιμές που χρησιμοποίησα για τη σταθερά ***ε*** είναι από **0.001** μέχρι **0.0049** με βήμα αύξησης **0.0001** επειδή πρέπει να ισχύει η ανισότητα $l > 2$**ε.** Αρχικά παρατηρώ ότι ο αριθμός των υπολογισμών ταυτίζεται και για τις τρείς συναρτήσεις το οποίο είναι λογικό καθώς η μέθοδος της διχοτόμησης μειώνει το διάστημα κάθε φορά στο μισό, ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη συνάρτηση. Συνεπώς, ο αριθμός των υπολογισμών της συνάρτησης καθώς και το πλήθος των επαναλήψεων εξαρτάται μόνο από το αρχικό διάστημα **[a, b]** , το l και την **ε**. Ουσιαστικά, ο αριθμός των επαναλήψεων καθορίζεται από το πόσες φορές πρέπει να μειωθεί το διάστημα μέχρι να φτάσει σε μήκος μικρότερο του l, όχι από τη μορφή της συνάρτησης. Συμπληρωματικά, είναι εμφανές ότι ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνεται κάθε φορά που η σταθερά **ε** ξεπερνάει κάποια τιμή και αυτό συμβαίνει διότι όσο μεγαλύτερη είναι η **ε,** τόσο μεγαλύτερο είναι το διάστημα που θα κρατήσω για να επαναλάβω τη διαδικασία που περιεγράφηκε στην αρχή. Παρακάτω φαίνονται οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις:

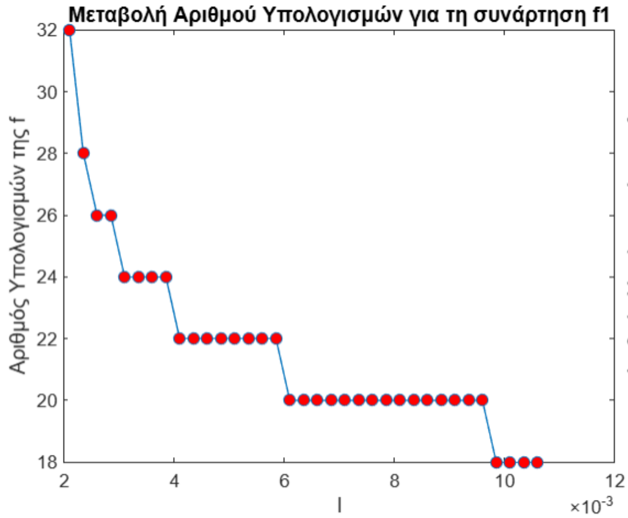


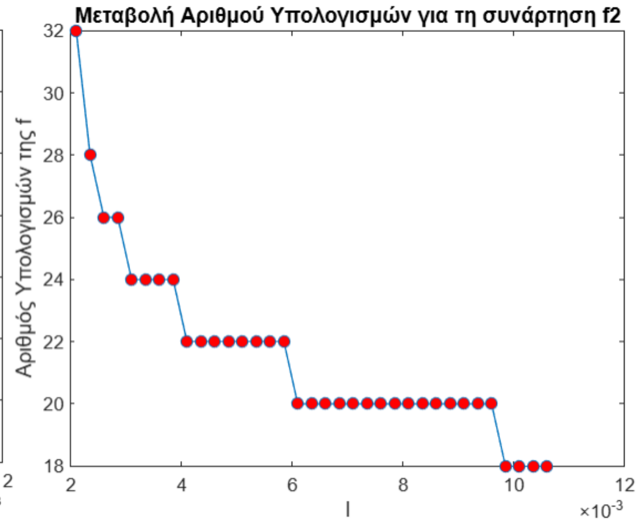


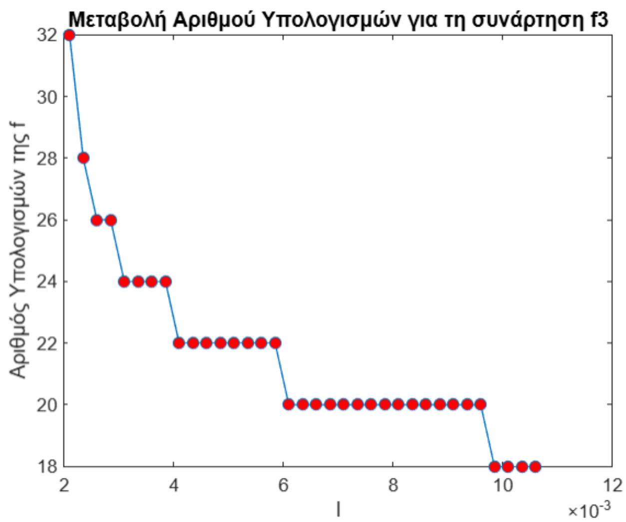


- Το δεύτερο ζητούμενο είναι κρατώντας σταθερό το $\boldsymbol{\varepsilon}$ **= 0.001** να μελετήσουμε τη μεταβολή των υπολογισμών της $f(x)$, i = 1,2,3, καθώς μεταβάλλουμε το l και να δημιουργήσουμε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις από τις τιμές που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις.

  Οι τιμές που χρησιμοποίησα για το τελικό εύρος αναζήτησης $\boldsymbol{l}$, είναι από **0.0021** μέχρι **0.0106** με βήμα αύξησης **0.00025.** Όπως προηγουμένως, για τον ίδιο λόγο, ο αριθμός των υπολογισμών ταυτίζεται και για τις τρείς συναρτήσεις. Ωστόσο, εδώ παρατηρώ ότι ο αριθμός των υπολογισμών μειώνεται κάθε φορά που το l ξεπερνάει κάποια τιμή και αυτό συμβαίνει διότι όσο μεγαλύτερο είναι το l, τόσο μικρότερη είναι η απαιτούμενη ακρίβεια για τον τερματισμό του αλγορίθμου, άρα θα φτάσω στο επιθυμητό διάστημα σε λιγότερες επαναλήψεις, άρα με λιγότερους υπολογισμούς. Παρακάτω φαίνονται οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις:



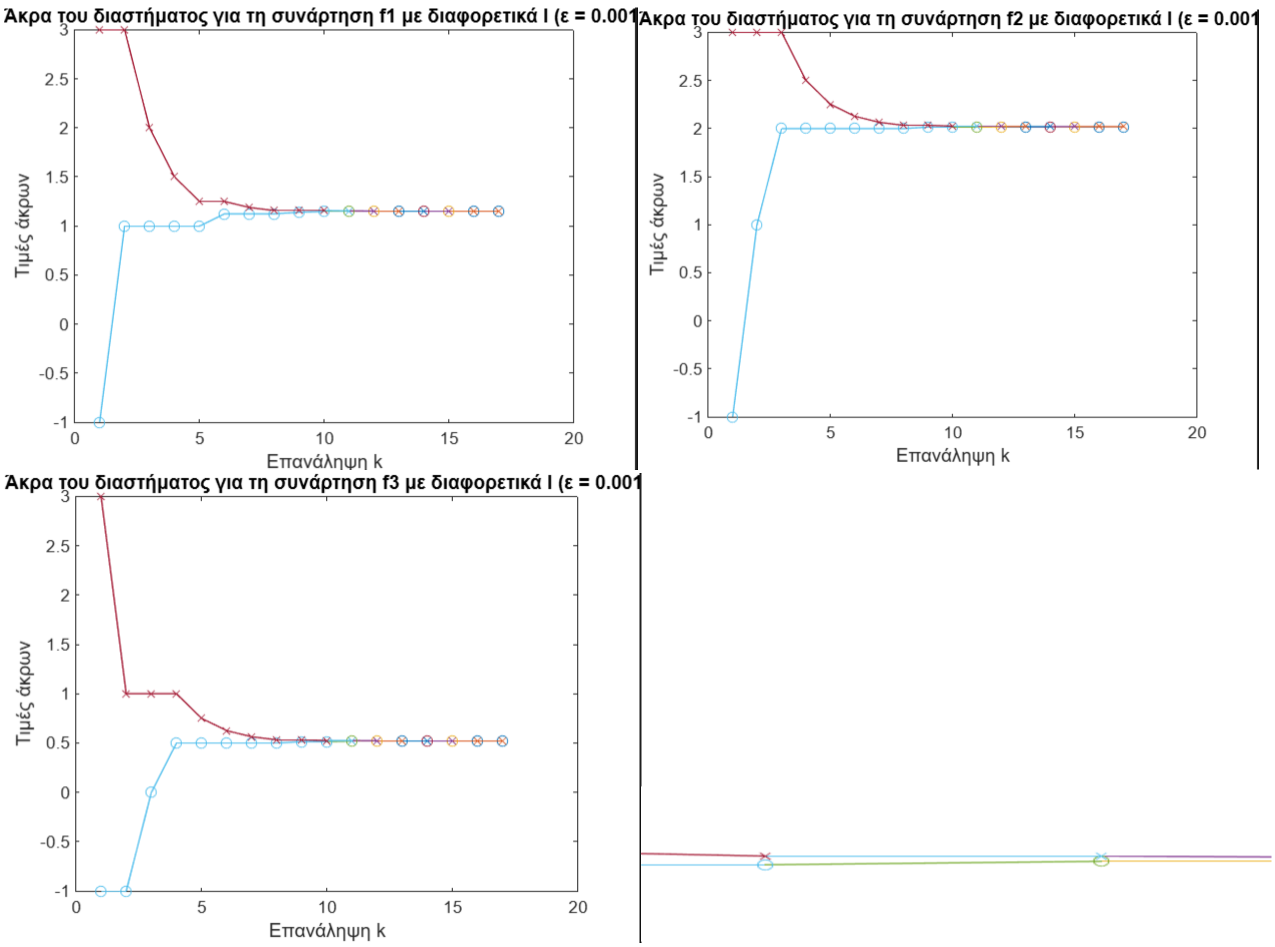




- Το τρίτο ζητούμενο είναι σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a\ ,b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, δηλαδή (k, a) και (k,b), για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.

Οι τιμές που χρησιμοποίησα για το τελικό εύρος αναζήτησης $\boldsymbol{l}$, είναι από **0.0021** μέχρι **0.0106** με βήμα αύξησης **0.00025.** Ο αριθμός των υπολογισμών των συναρτήσεων διαφοροποιείται για εφτά επίπεδα τιμών του $\boldsymbol{l}$, όπως φαίνεται από το δεύτερο ζητούμενο, συνεπώς αναμένω εφτά γραφικές παραστάσεις οι οποίες, για σταθερή ε, ταυτίζονται όσο έχουν τις ίδιες επαναλήψεις, ενώ όσο μειώνεται το $\boldsymbol{l}$, οι επαναλήψεις αυξάνονται οπότε μειώνεται και ο αριθμός των γραφικών παραστάσεων που ΄΄πέφτουν΄΄ η μία πάνω στην άλλη μέχρι να φτάσω σε μοναδική γραφική παράσταση που καταλήγει σε τελικό εύρος **[1.14889, 1.15095]** για την $\boldsymbol{f1(x)}$, **[2.01662, 2.01868]** για την $\boldsymbol{f2(x)}$ και **[0.519077, 0.521138]** για την $\boldsymbol{f3(x)}$ για **17 επαναλήψεις** (στην $4^{η}$

εικόνα που υπάρχει σε μεγέθυνση, προσπάθησα να δείξω την αλλαγή στα χρώματα που έχει να κάνει με την αλλαγή του επιπέδου των τιμών του l). Η μείωση των άκρων του διαστήματος στη μέθοδο της διχοτόμησης είναι συνήθως ομαλή και οδηγεί σχετικά άμεσα στο ελάχιστο, ενώ δεν επηρεάζεται από τη μορφή της συνάρτησης, καθώς η μέθοδος εξετάζει αποκλειστικά τα σημεία του διαστήματος και όχι τις ιδιότητες της συνάρτησης. Παρακάτω φαίνονται οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις:

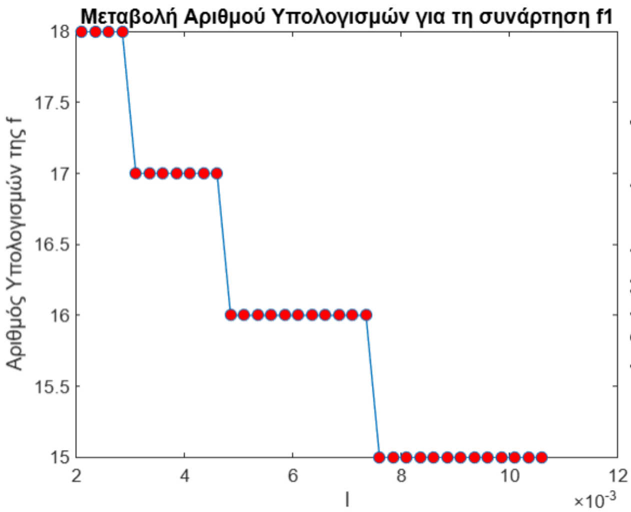


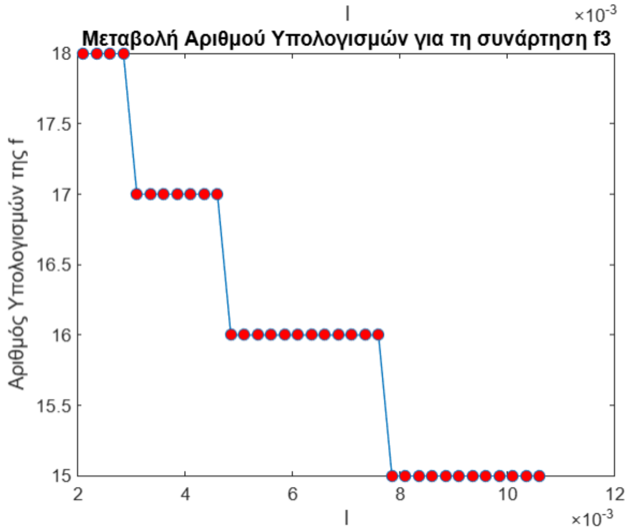
<u>ΘΕΜΑ 2</u>

Στο παρόν θέμα υλοποιήθηκε στο MATLAB η **μέθοδος του Χρυσού Τομέα**, όπως παρουσιάζεται στον **αλγόριθμο 5.1.2** του βιβλίου στη σελίδα 111. Η διαφοροποίηση της συγκεκριμένης μεθόδου από τις υπόλοιπες είναι στον τρόπο υπολογισμού των σημείων που ακολουθούν τους κανόνες που παρουσιάζονται στον **5.1.2** με χρήση της **χρυσής τομής γ=0.618** [πχ x1=α+(1-γ)*(β-α)]**.** Επίσης, πέρα από την πρώτη επανάληψη που υπολογίζει δύο φορές την τιμή της συνάρτησης, σε κάθε άλλη επανάληψη την υπολογίζει μόνο μία φορά, γιατί μεταφέρουμε ένα από τα προηγούμενα εσωτερικά σημεία στο νέο διάστημα (αντιστρέφονται τα **x1**, **x2**). Για παράδειγμα αν f(x2) > f(x1) με x1<x2, τότε το παλιό x2 θα γίνει το νέο όριο β, το παλιό x1 θα γίνει το νέο x2, άρα γλιτώνω τον υπολογισμό του νέου x2 και μένει μόνο να υπολογίσω το νέο x1. Αυτό αποτελεί πλεονέκτημα της μεθόδου υπολογιστικά. Στη συνέχεια, συγκρίνουμε τις τιμές της συνάρτησης και αναλόγως του αποτελέσματος κρατάμε ένα υποδιάστημα και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία. Η αναζήτηση του διαστήματος σταματάει αν ισχύει ότι $b - \alpha < l$, το οποίο σύμφωνα με τον 5.1.2 ελέγχουμε αφού προχωρήσουμε στην επόμενη επανάληψη και υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης για το σημείο που αλλάζει. Αν και σύμφωνα με την ανισότητα που υπάρχει στις **Τελικές Παρατηρήσεις** στη **σελίδα 114** αυτός ο επιπλέον υπολογισμός δεν υφίσταται. Η μέθοδος του χρυσού τομέα είναι μια απλή, αποδοτική και αξιόπιστη μέθοδος για την εύρεση ελαχίστων σε μονοδιάστατα προβλήματα βελτιστοποίησης. Αν και δεν είναι η ταχύτερη μέθοδος και δεν εφαρμόζεται σε πολυδιάστατα προβλήματα, έχει σταθερότητά και είναι ανεξάρτητη από τη μορφή της συνάρτησης, ενώ παράλληλα δεν απαιτεί γνώση των παραγώγων της συνάρτησης.

- Το πρώτο ζητούμενο είναι κρατώντας σταθερό το ***ε* = 0.001** να μελετήσουμε τη μεταβολή των υπολογισμών της $f(x)$, i = 1,2,3, καθώς μεταβάλλουμε το l και να δημιουργήσουμε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις από τις τιμές που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις.

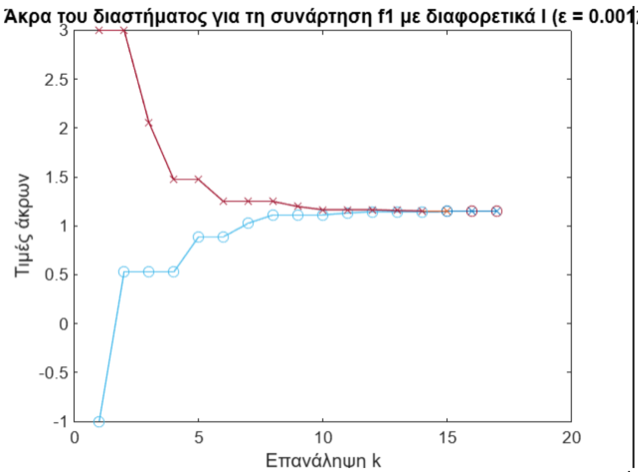
  Οι τιμές που χρησιμοποίησα για το τελικό εύρος αναζήτησης $\boldsymbol{l}$, είναι από **0.0021** μέχρι **0.0106** με βήμα αύξησης **0.00025.** Η μέθοδος του χρυσού τομέα είναι ανεξάρτητη από τη μορφή της συνάρτησης, καθώς βασίζεται στη γεωμετρική μείωση του διαστήματος αναζήτησης [a, b] με χρήση της χρυσής τομής. Ο αριθμός των υπολογισμών καθορίζεται από το πόσες επαναλήψεις χρειάζονται για να μειωθεί το μήκος του διαστήματος κάτω από το προκαθορισμένο l, οπότε ταυτίζεται και για τις τρείς συναρτήσεις (υπάρχει μία πολύ μικρή διαφοροποίηση για την f1 καθώς έχει μία παραπάνω τιμή για το l στον αριθμό υπολογισμών που ισούται με 16). Παρατηρώ ότι ο αριθμός των επαναλήψεων μειώνεται κάθε φορά που το l ξεπερνάει κάποια τιμή και αυτό συμβαίνει διότι όσο μεγαλύτερο είναι το l, τόσο μικρότερη είναι η απαιτούμενη ακρίβεια για τον τερματισμό του αλγορίθμου, άρα θα φτάσω στο επιθυμητό διάστημα σε λιγότερες επαναλήψεις, άρα με λιγότερους υπολογισμούς. Παρακάτω φαίνονται οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις:

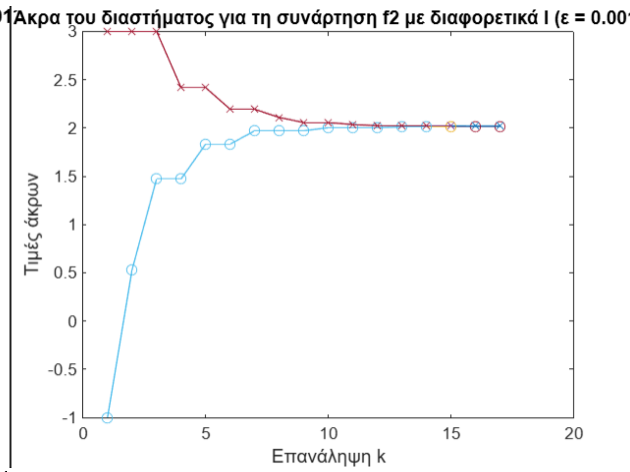


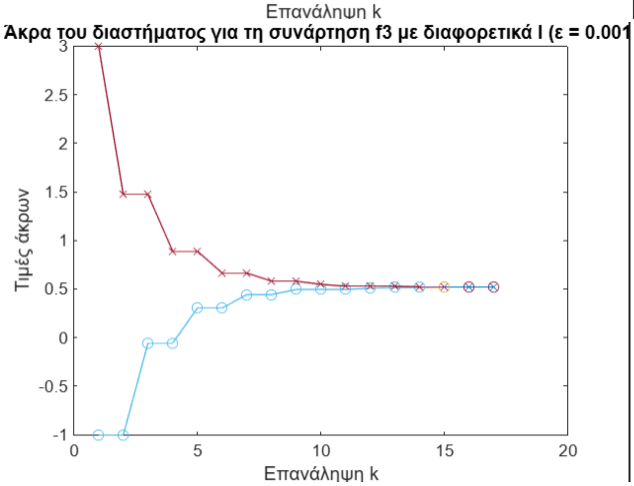


- Το δεύτερο ζητούμενο είναι σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a\ ,b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, δηλαδή $(k,\ a)$ και (k,b), για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.
  Οι τιμές που χρησιμοποίησα για το τελικό εύρος αναζήτησης $\boldsymbol{l}$, είναι από **0.0021** μέχρι **0.0106** με βήμα αύξησης **0.00025.** Ο αριθμός των υπολογισμών της συνάρτησης που καθορίζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων, διαφοροποιείται για τέσσερα επίπεδα τιμών του $\boldsymbol{l}$, όπως φαίνεται από το πρώτο ζητούμενο, συνεπώς αναμένω τέσσερις γραφικές παραστάσεις οι

οποίες, για σταθερή ε, ταυτίζονται όσο έχουν τις ίδιες επαναλήψεις, ενώ όσο μειώνεται το l, οι επαναλήψεις αυξάνονται οπότε μειώνεται και ο αριθμός των γραφικών παραστάσεων που ΄΄πέφτουν΄΄ η μία πάνω στην άλλη μέχρι να φτάσω σε μοναδική γραφική παράσταση που καταλήγει σε τελικό εύρος **[1.14887, 1.15055]** για την $f1(x)$, **[2.01658, 2.01837]** για την $f2(x)$ και **[0.519509, 0.521347]** για την $f3(x)$ για **17 επαναλήψεις.** Στη μέθοδο του χρυσού τομέα, ο τρόπος με τον οποίο μειώνονται τα άκρα του διαστήματος [a, b] ακολουθεί μία συμμετρία ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη συνάρτηση που χρησιμοποιείται, αφού στηρίζεται στη σταθερή αναλογία της χρυσής τομής (γ≈0.618). Παρακάτω φαίνονται οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις:





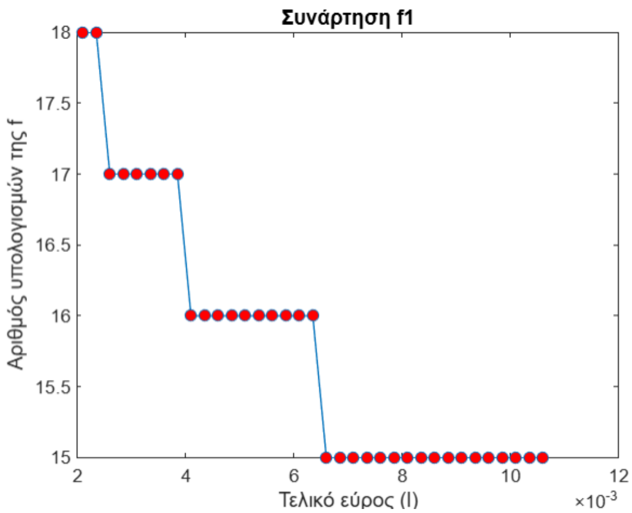


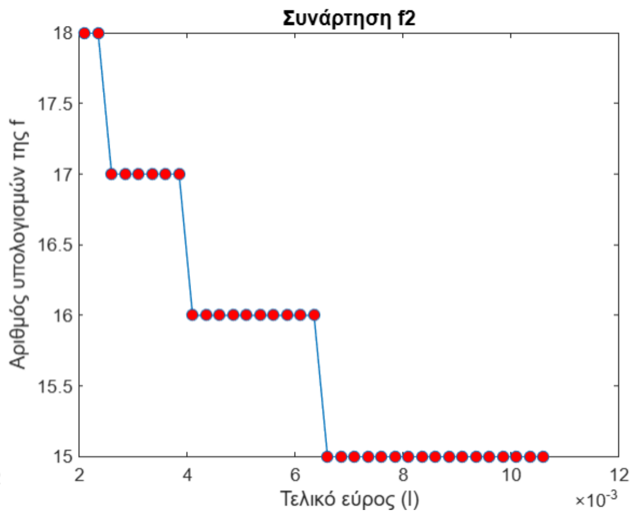
<u>ΘΕΜΑ 3</u>

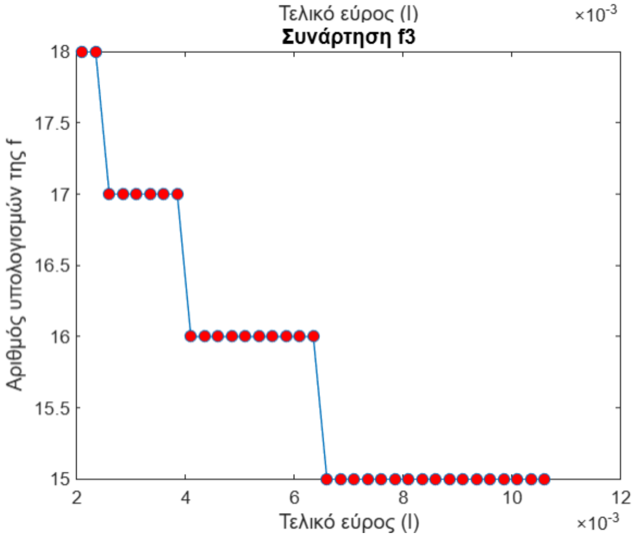
Στο παρόν θέμα υλοποιήθηκε στο MATLAB η **μέθοδος του Fibonacci**, όπως παρουσιάζεται στον **αλγόριθμο 5.1.3** του βιβλίου στη σελίδα 113. Η κυριότερη διαφοροποίηση της συγκεκριμένης μεθόδου από τις υπόλοιπες είναι ότι οι επαναλήψεις που χρειάζονται μέχρι να καταλήξουμε στο τελικό εύρος είναι εκ των προτέρων αποφασισμένες, η τιμή των οποίων προκύπτει από την ανισότητα που υπάρχει στις **Γενικές Παρατηρήσεις** στη **σελίδα 114**. Αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι παρέχει σημαντικά πλεονεκτήματα όπως προβλεψιμότητα σε υπολογιστικούς πόρους, χρόνο εκτέλεσης και απαιτήσεις μνήμης, βελτιώνοντας έτσι την αποδοτικότητα του συστήματος, αν και την καθιστά μη ευέλικτη σε δυναμικές προσαρμογές. Εδώ, όπως στη μέθοδο του χρυσού τομέα πέρα από την πρώτη επανάληψη που υπολογίζει δύο φορές την τιμή της συνάρτησης, σε κάθε άλλη επανάληψη την υπολογίζει μόνο μία φορά, γιατί μεταφέρουμε ένα από τα προηγούμενα εσωτερικά σημεία στο νέο διάστημα. Επιπλέον, διαφέρει από αυτήν στην τελευταία επανάληψη όπου μου φέρνει τα x1, x2 να συμπίπτουν και προσθέτει μία αυθαίρετα μικρή σταθερά (συνήθως $l/10$) για να υπολογίσει το δεύτερο σημείο, ενώ ο γενικότερος τρόπος υπολογισμού των σημείων που την διαφοροποιεί και από τις υπόλοιπες μεθόδους ακολουθεί τους κανόνες που παρουσιάζονται στον **5.1.3**, με χρήση των αριθμών Fibonacci [πχ x1=α+(F_n-2/F_n)*(β-α)]**.** Τέλος, θα μπορούσαμε να συμπεριλάβουμε στα μειονεκτήματα της μεθόδου την περίπλοκη υλοποίηση λόγω του υπολογισμού των όρων Fibonacci και την μειωμένη ακρίβεια στα πολύ μικρά διαστήματα που οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο περιορίζει το διάστημα αναζήτησης.

- Το πρώτο ζητούμενο είναι κρατώντας σταθερό το ***ε* = 0.001** να μελετήσουμε τη μεταβολή των υπολογισμών της $f(x)$, i = 1,2,3, καθώς μεταβάλλουμε το l και να δημιουργήσουμε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις από τις τιμές που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις.

  Οι τιμές που χρησιμοποίησα για το τελικό εύρος αναζήτησης l, είναι από **0.0021** μέχρι **0.0106** με βήμα αύξησης **0.00025.** Η μέθοδος Fibonacci προσδιορίζει εκ των προτέρων τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για να επιτευχθεί το τελικό εύρος αναζήτησης l. Ο αριθμός των επαναλήψεων εξαρτάται μόνο από το αρχικό διάστημα [a, b] και την τιμή του l, ανεξάρτητα από τη μορφή της ίδιας της συνάρτησης, οπότε και ο αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης ταυτίζεται και για τις τρείς συναρτήσεις. Παρατηρώ ότι ο αριθμός των υπολογισμών μειώνεται κάθε φορά που το l ξεπερνάει κάποια τιμή και αυτό συμβαίνει διότι όσο μεγαλύτερο είναι το l, τόσο μικρότερη είναι η απαιτούμενη ακρίβεια για τον τερματισμό του αλγορίθμου, άρα θα φτάσω στο επιθυμητό διάστημα σε λιγότερες επαναλήψεις, άρα με λιγότερους υπολογισμούς. Παρακάτω φαίνονται οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις:

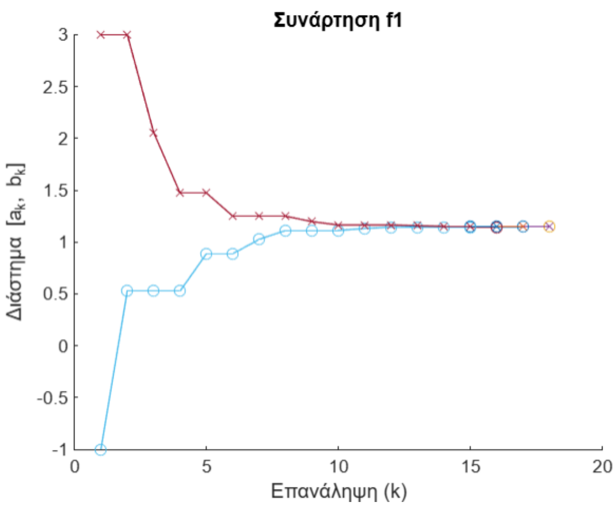


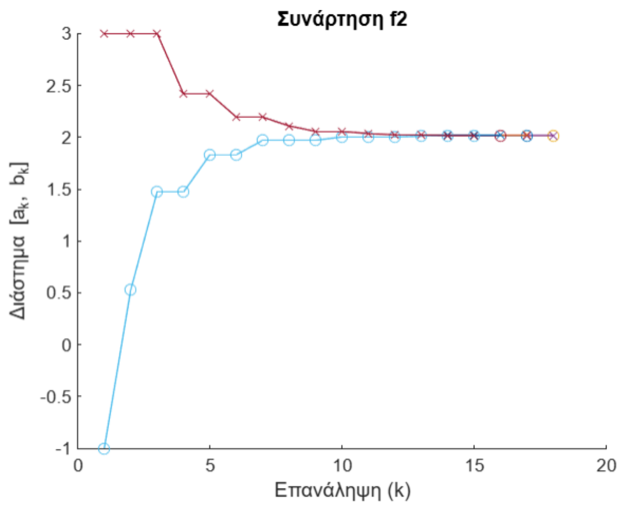


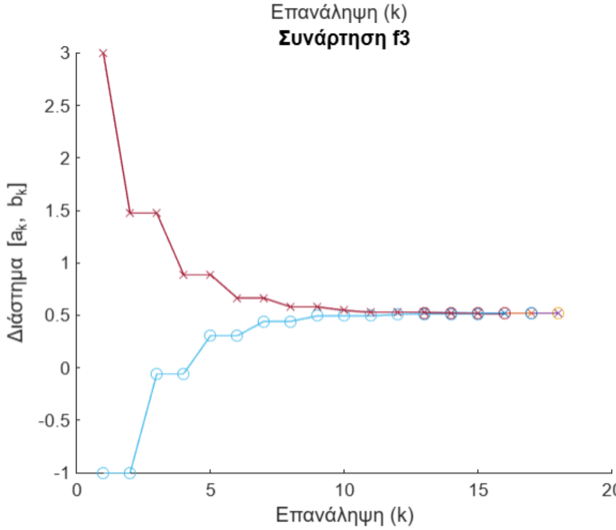


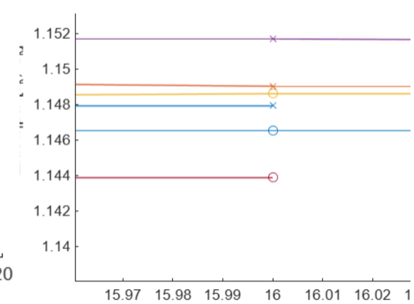
- Το δεύτερο ζητούμενο είναι σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a\ ,b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, δηλαδή $(k,\ a)$ και (k,b), για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.
  Οι τιμές που χρησιμοποίησα για το τελικό εύρος αναζήτησης $\boldsymbol{l}$, είναι από **0.0021** μέχρι **0.0106** με βήμα αύξησης **0.00025.** Ο αριθμός των υπολογισμών της συνάρτησης που καθορίζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων, διαφοροποιείται για τέσσερα επίπεδα τιμών του $\boldsymbol{l}$, όπως φαίνεται από το πρώτο ζητούμενο, συνεπώς αναμένω τέσσερις γραφικές παραστάσεις οι οποίες, για σταθερή ε, οριακά ταυτίζονται όσο έχουν τις ίδιες επαναλήψεις, ενώ όσο μειώνεται το $\boldsymbol{l}$, οι επαναλήψεις αυξάνονται οπότε μειώνεται και ο αριθμός των γραφικών παραστάσεων που ΄΄ οριακά πέφτουν΄΄ η μία πάνω στην άλλη μέχρι να φτάσω σε μοναδική γραφική παράσταση που καταλήγει σε τελικό εύρος **[1.14861, 1.15015]** για την $\boldsymbol{f1(x)}$**,**

[2.01548, 2.01703] για την $f2(x)$ και **[0.520124, 0.520334]** για την $f3(x)$ για **18 επαναλήψεις** (στην 4^{η} εικόνα που υπάρχει σε μεγέθυνση, προσπάθησα να δείξω την αλλαγή στα χρώματα που έχει να κάνει με την αλλαγή του επιπέδου των τιμών του l και την οριακή ταύτιση η οποία οφείλεται στην διαφοροποίηση υπολογισμού του δεύτερου σημείου στην τελευταία επανάληψη)**.** Συνολικά, η μέθοδος Fibonacci εξασφαλίζει ότι το διάστημα μειώνεται με συγκεκριμένο τρόπο ανεξάρτητα από τις ιδιότητες της συνάρτησης, γεγονός που εξηγεί γιατί τα άκρα [a, b] συρρικνώνονται με τον ίδιο τρόπο για διαφορετικές συναρτήσεις**.** Παρακάτω φαίνονται οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις:







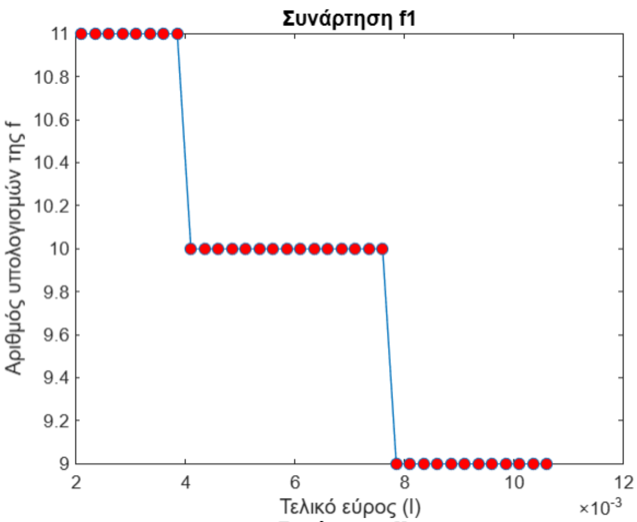


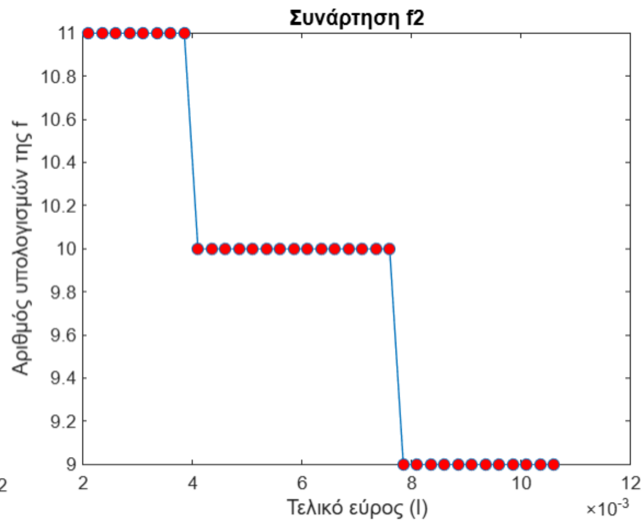
<u>ΘΕΜΑ 4</u>

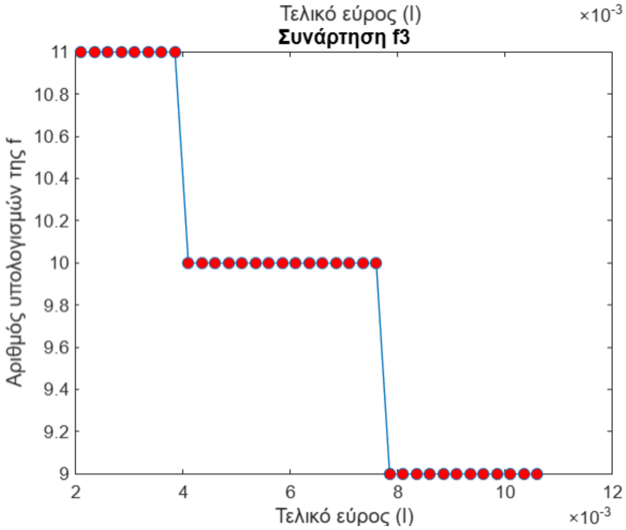
Στο παρόν θέμα υλοποιήθηκε στο MATLAB **η μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου**, όπως παρουσιάζεται στον **αλγόριθμο 5.1.4** του βιβλίου στη σελίδα 116. Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι μια παραλλαγή της κλασικής μεθόδου της διχοτόμου που παρουσιάστηκε στο ΘΕΜΑ 1, όπου γίνεται χρήση της παραγώγου της συνάρτησης στο μέσο του διαστήματος αναζήτησης για να καθοριστεί η κατεύθυνση του διαστήματος που θα κρατηθεί σε κάθε βήμα. Εδώ, όπως και στη μέθοδο Fibonacci και σε διαφοροποίηση με τις υπόλοιπες δύο, γνωρίζω εκ των προτέρων τον απαιτούμενο αριθμό επαναλήψεων μέχρι να καταλήξω στο τελικό εύρος αναζήτησης, η τιμή των οποίων προκύπτει από την ανισότητα που υπάρχει στον **5.1.4**. Αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι παρέχει σημαντικά πλεονεκτήματα όπως προβλεψιμότητα σε υπολογιστικούς πόρους, χρόνο εκτέλεσης και απαιτήσεις μνήμης, βελτιώνοντας έτσι την αποδοτικότητα του συστήματος, αν και την καθιστά μη ευέλικτη σε δυναμικές προσαρμογές. Επιπλέον, διαφοροποιείται στο γεγονός ότι χρησιμοποιεί την πληροφορία της παραγώγου για να συγκλίνει πιο στοχευμένα προς το σημείο ελαχίστου, επιτρέποντας την παράλληλα να συγκλίνει γρήγορα και αποδοτικά προς την κατεύθυνση ελαχιστοποίησης. Συνεπώς, απαιτεί και μικρότερο αριθμό υπολογισμών. Όσον αφορά τα μειονεκτήματα της μεθόδου, έχουμε την προϋπόθεση ύπαρξης της παραγώγου της συνάρτησης και της συνέχειας της, καθώς και την ανάγκη υπολογισμού της ο οποίος μπορεί να είναι ιδιαίτερα δαπανηρός.

- Το πρώτο ζητούμενο είναι κρατώντας σταθερό το ***ε* = 0.001** να μελετήσουμε τη μεταβολή των υπολογισμών της $f(x)$, i = 1,2,3, καθώς μεταβάλλουμε το l και να δημιουργήσουμε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις από τις τιμές που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις.

  Οι τιμές που χρησιμοποίησα για το τελικό εύρος αναζήτησης $\boldsymbol{l}$, είναι από **0.0021** μέχρι **0.0106** με βήμα αύξησης **0.00025.** Η μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου προσδιορίζει εκ των προτέρων τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για να επιτευχθεί το τελικό εύρος αναζήτησης $\boldsymbol{l}$**,** σύμφωνα με την ανισότητα. Ο αριθμός των επαναλήψεων εξαρτάται μόνο από το αρχικό διάστημα [a, b] και την τιμή του $\boldsymbol{l}$, ανεξάρτητα από τη μορφή της ίδιας της συνάρτησης, οπότε και ο αριθμός υπολογισμών της συνάρτησης ταυτίζεται και για τις τρείς συναρτήσεις. Παρατηρώ ότι ο αριθμός των υπολογισμών μειώνεται κάθε φορά που το l ξεπερνάει κάποια τιμή και αυτό συμβαίνει διότι όσο μεγαλύτερο είναι το l, τόσο μικρότερη είναι η απαιτούμενη ακρίβεια για τον τερματισμό του αλγορίθμου, άρα θα φτάσω στο επιθυμητό διάστημα σε λιγότερες επαναλήψεις, άρα με λιγότερους υπολογισμούς. Παρακάτω φαίνονται οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις:



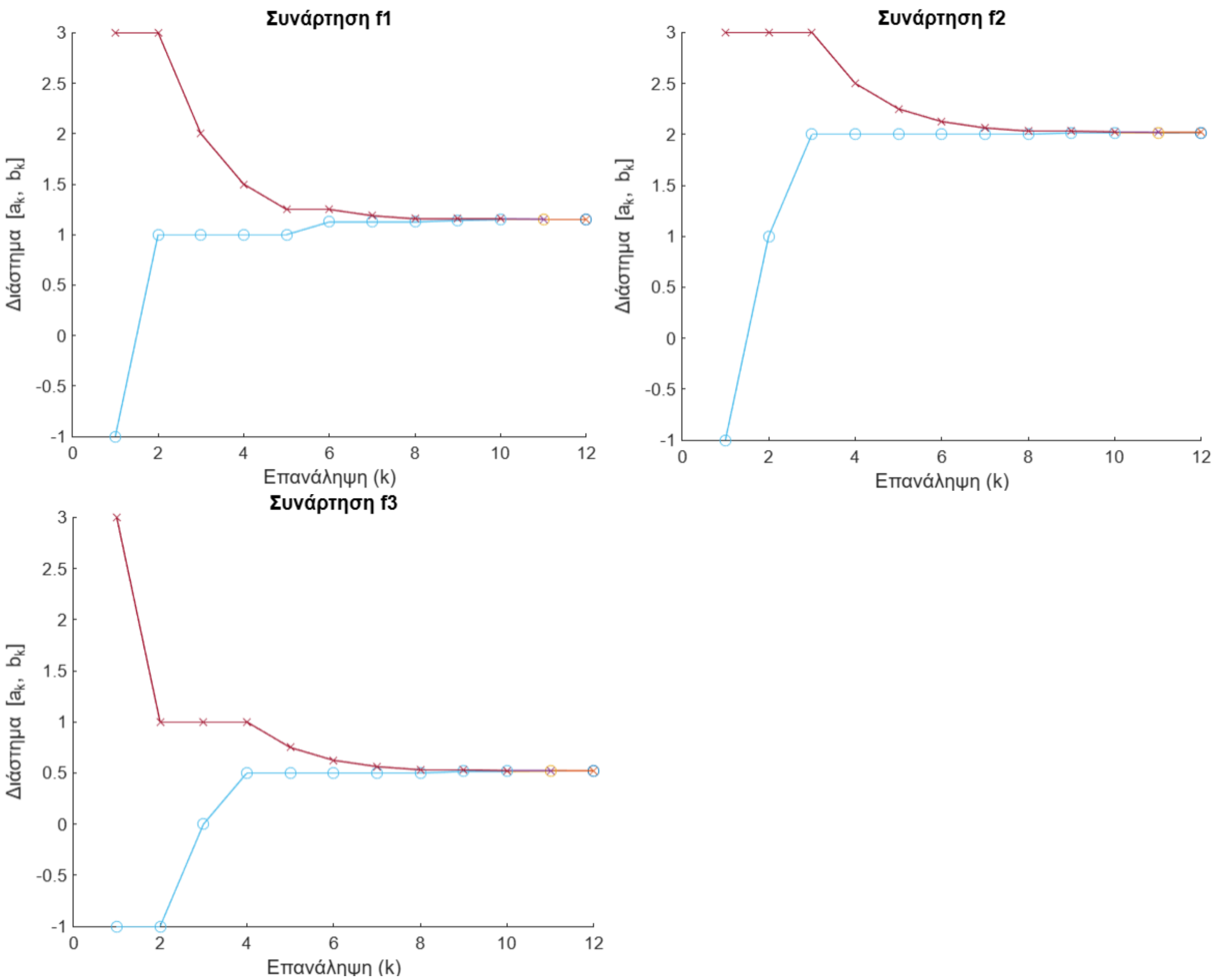




- Το δεύτερο ζητούμενο είναι σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, δηλαδή (k, a) και (k, b), για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.

  Οι τιμές που χρησιμοποίησα για το τελικό εύρος αναζήτησης $\boldsymbol{l}$, είναι από **0.0021** μέχρι **0.0106** με βήμα αύξησης **0.00025.** Ο αριθμός των υπολογισμών της συνάρτησης που καθορίζεται από τον αριθμό των επαναλήψεων, διαφοροποιείται για τρία επίπεδα τιμών του $\boldsymbol{l}$, όπως φαίνεται από το πρώτο ζητούμενο, συνεπώς αναμένω τρείς γραφικές παραστάσεις οι οποίες, για σταθερή ε, ταυτίζονται όσο έχουν τις ίδιες επαναλήψεις (δηλαδή μέχρι τις 10), ενώ όσο μειώνεται το $\boldsymbol{l}$, οι επαναλήψεις κάποια στιγμή αυξάνονται (όταν περάσω στο δεύτερο επίπεδο τιμών) οπότε μειώνεται και ο αριθμός των γραφικών παραστάσεων που ΄΄πέφτουν΄΄ η μία πάνω στην άλλη (δηλαδή για 11 επαναλήψεις έχω 2 γραφικές που ταυτίζονται) μέχρι να φτάσω σε μοναδική γραφική παράσταση που καταλήγει σε τελικό εύρος **[1.14844,**

1.15039] για την $f1(x)$, **[2.01758, 2.01953]** για την $f2(x)$ και **[0.519931, 0.521484]** για την $f3(x)$ για **12 επαναλήψεις.** Συνολικά, η μέθοδος διχοτόμησης με χρήση παραγώγου εξαρτάται μόνο από το πρόσημο της παραγώγου και όχι από την τιμή της, επομένως η μείωση των άκρων του διαστήματος [a, b] παραμένει ίδια και για τις τρεις συναρτήσεις, ανεξαρτήτως της μορφής ή πολυπλοκότητας της συνάρτησης. Είναι σταθερά γρήγορη και ακολουθεί μια προβλέψιμη γεωμετρική σύγκλιση**.** Παρακάτω φαίνονται οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις:



ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΟΣ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΥΠΟ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΡΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Λαμβάνοντας υπόψη κατά κύριο λόγο τον αριθμό υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης, όπως επίσης λεπτομέρειες που αναλύθηκαν ενδελεχώς στα παραπάνω θέματα καθώς και την ιδιότητα της κυρτότητας των δοσμένων συναρτήσεων στο διάστημα [-1, 3] προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Μέθοδος	Αποδοτικότητα	Ακρίβεια
Διχοτόμου	Μέτρια	Καλή
Χρυσού Τομέα	Υψηλή	Πολύ υψηλή
Fibonacci	Υψηλότερη από Χρυσό Τομέα	Εξαιρετική
Διχοτόμου με χρήση παραγώγου	Εξαιρετική (όταν υπάρχει παράγωγος, ιδανική σε κυρτές)	Πολύ καλή

Όλες οι υπό μελέτη μέθοδοι αποδίδουν πολύ καλά σε κυρτές συναρτήσεις, καθώς η μοναδικότητα του ακροτάτου μειώνει τον αριθμό των υπολογισμών που απαιτούνται. Ειδικά οι μέθοδοι Fibonacci και Χρυσού Τομέα επωφελούνται από την κυρτότητα, προσφέροντας αποδοτική και γρήγορη σύγκλιση χωρίς να απαιτούν πληροφορία παραγώγου. Από την άλλη, η διχοτόμηση με παράγωγο είναι η βέλτιστη όταν η παράγωγος είναι διαθέσιμη, καθώς παρέχει τη μέγιστη αποδοτικότητα. Η μέθοδος Διχοτόμου παραμένει αποδοτική για κυρτές συναρτήσεις, αλλά συγκριτικά πιο αργή από τις άλλες τρεις λόγω του μεγαλύτερου αριθμού επαναλήψεων που απαιτεί.