

Capítulo 12

FERRAMENTAS DE ANÁLISE: APLICAÇÕES DA FFT

DE QUE TRATA ESTE CAPÍTULO

Agora que você sabe como usar a ferramenta Análise de Fourier do EXCEL, vejamos como aplicá-la a cinco operações úteis com dados do mundo real. Este capítulo irá capacitá-lo a executar proezas de análise no computador com as quais poderia apenas sonhar antes da invenção da Transformada Rápida de Fourier (FFT).

Em primeiro lugar, vamos revisar de forma resumida alguns conceitos analíticos por trás dos métodos numéricos. As principais operações que iremos realizar com a FFT são:

- convolução (filtragem linear de dados);

- deconvolução (remoção de distorções de sistemas e restauração de um conjunto de dados para sua forma original, aproximadamente);
- correlação (medida de similaridade e de atraso no tempo, detecção da presença de sinais conhecidos no ruído);
- identificação de sistemas (medição de propriedades de um sistema desconhecido, como a quebra de códigos de segurança);
- funções coerência e SNR¹ (medida da faixa de frequência compartilhada pelos sinais e medida da relação sinal-ruído em função da frequência).

12.1 FUNÇÃO DEGRAU E RESPOSTA AO IMPULSO

Há uma variedade infinita de sinais que você pode usar para testar um sistema. Desse conjunto infinito alguns sinais são mais úteis que outros em virtude da capacidade de gerar aproximações de sinais específicos.

O sinal senoidal, o degrau unitário, o impulso (delta ou δ) e o ruído aleatório têm sido particularmente úteis. Os sinais senoidais são sinais de espectro muito estreito; o degrau, o impulso e o ruído são sinais de espectro amplo.

★ Resposta à Função Degrau

Antes de discutir convolução, vamos fazer uma revisão dos conceitos de resposta ao degrau e resposta ao impulso. Em breve, eles serão necessários para testar o processo de convolução. A função degrau é algumas vezes chamada de função de Heaviside, em homenagem a Oliver Heaviside, excêntrico gênio inglês. A resposta ao degrau caracteriza completamente um sistema linear.

Para ilustrar essas idéias de modo fácil examinemos um sistema com o qual estamos familiarizados. Considere um circuito RC em série, com entrada entre R e C e saída através de C, com o capacitor totalmente descarregado em $t = 0$. O produto RC é a *constante de tempo*.

Para os fins desejados no momento considere $V = V_0$ como uma tensão constante. Em $t = 0$ ponha a chave para cima e adicione as tensões:

$$V = IR + \frac{q}{C}. \quad (12-1)$$

Em $t = 0$, $q = 0$ e $V = V_0$. Podemos incluir condições iniciais por intermédio de uma função degrau, $u(t)$, que tem as seguintes propriedades: até $t = 0$ $u(t)$ é zero e depois $u(t) = 1$ para sempre. Você pode iniciar a função degrau em qualquer instante t_0 usando $u(t_0)$ e você pode formar um pulso de largura T usando $u(T - t_0)$. Como $I = dq/dt$, a Eq. (12-1) pode ser escrita como:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u(t)V_0 \quad (12-2)$$

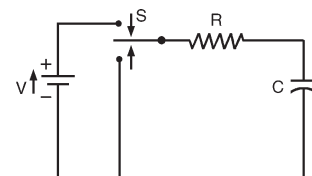


Fig. 12-1 Quando a chave S estiver comutada para cima o capacitor C se carrega através do resistor R . A bateria fornece a tensão V_0 ao circuito RC. Quando a chave S estiver para baixo o capacitor se descarrega através do resistor.

¹Do inglês Signal to Noise Ratio (literalmente, Relação Sinal-Ruído). (N.T.)

que tem uma solução particular $q(t) = u(t)CV_0$. A equação reduzida é

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt. \quad (12-3)$$

que tem como solução,

$$q(t) = u(t) CV_0 e^{-t/RC}. \quad (12-4)$$

Portanto, a solução completa é:

$$q(t) = u(t)CV_0 - u(t) CV_0 e^{-t/RC} \quad (12-5)$$

ou

$$q(t) = u(t)CV_0(1 - e^{-t/RC}). \quad (12-6)$$

É útil normalizar este resultado em relação à carga final do capacitor $q_n(t) = q(t)/CV_0$ e ao fazer isto obtemos a resposta normalizada a uma função degrau aplicada na entrada:

$$q_n(t) = u(t)(1 - e^{-t/RC}). \quad (12-7)$$

Um exemplo de função degrau e de resposta a uma função degrau pode ser visto na Fig. 12-2. Nessa figura, a função degrau e a resposta começam em $t = 0,55$.

Resposta ao Impulso

A derivada de $q_n(t)$ em relação ao tempo é a corrente normalizada $I_n(t)$:

$$I_n(t) = u(t) \frac{1}{RC} e^{-t/RC}. \quad (12-8)$$

Essa é a resposta normalizada ao impulso (a resposta a uma função delta na entrada).

A notação padrão da resposta ao impulso normalizada é $h(t)$ e vamos usá-la a partir de agora:

$$h(t) = u(t) \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \quad (12-9)$$

Incluimos $u(t)$ explicitamente para lembrar de que a resposta ao impulso é uma função causal: não há saída antes de ocorrer entrada. Como a função delta $\delta(t)$ é a derivada da função degrau unitário, a resposta ao impulso é a derivada da resposta a uma função degrau unitário. (Estamos omitindo aqui algumas questões matemáticas delicadas com respeito à derivada de uma função degrau.) Ambas as funções são sinais de teste padronizados ideais dotados da propriedade útil de descreverem completamente o sistema no domínio do tempo. Eles podem ser apenas aproximados utilizando equipamentos uma vez que não há possibilidade de se ter tempo de subida nulo e tampouco saída constante para sempre.

O circuito RC que estamos discutindo é usado como filtro passa-baixas (ou integrador) porque a entrada se dá através de R e C em série e a saída é obtida sobre C. A resposta desse circuito a um impulso unitário está mostrada na Fig. 12-3. O impulso é aplicado em $t = 0$.

Embora tenhamos discutido $u(t)$ e $h(t)$ para um circuito RC, tudo o que foi e será feito aplica-se aos sistemas mecânicos e acústicos devido às grandezas análogas mostradas na Tabela 12-1.



Dica

Como definida, a função degrau $u(t)$ começa em $t = 0$. Você pode iniciar a função degrau em qualquer instante t_0 usando $u(t - t_0)$. Por exemplo, para iniciar em $t = 63$ escolhemos a função degrau $u(t - 63)$.

$h(t)$ é algumas vezes chamada de função de Green. George Green é um dentre os membros de um grupo restrito de cientistas de Cambridge honrados com o sepultamento na Abadia de Westminster. O grupo inclui Dirac, Maxwell e Kelvin. A função de Green contém *toda* a informação a respeito do sistema. Veremos como utilizá-la mais adiante.

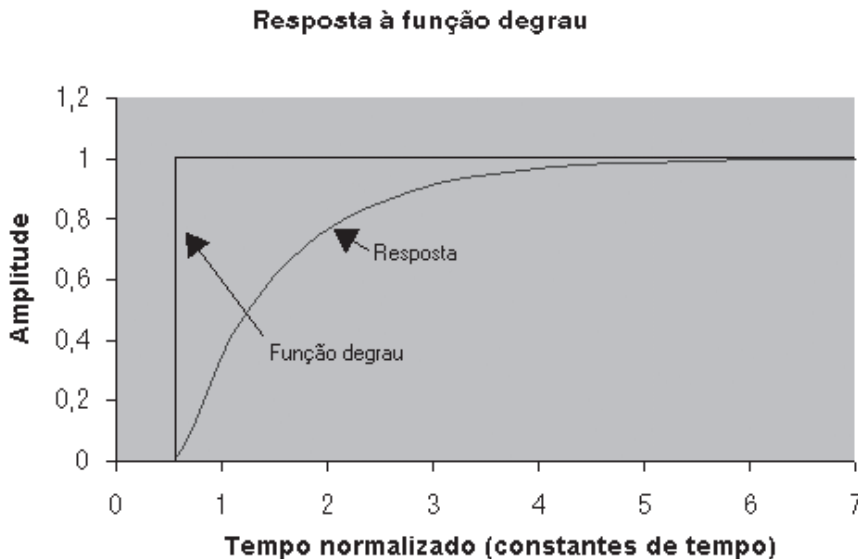


Fig. 12-2 Função degrau unitário e resposta à função degrau. A constante de tempo é RC segundos. A resposta cresce para $1 - 1/e = 0,632121$ no instante que corresponde a uma constante de tempo a contar da partida. (Nesse gráfico a função degrau começa em $t = 0,55$.)

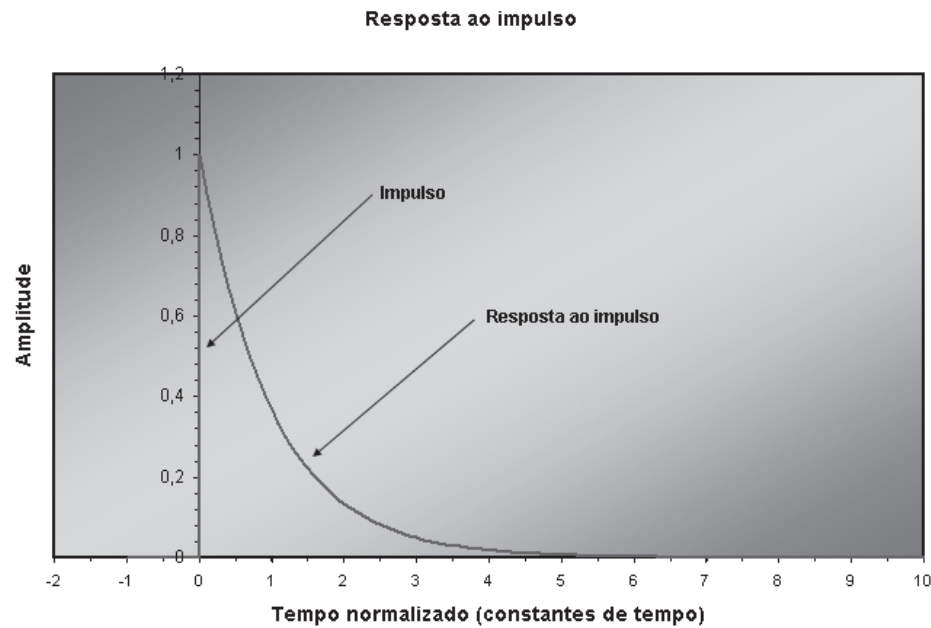


Fig. 12-3 Resposta ao impulso de um circuito RC em série. A resposta cai para $1/e = 0,367879$ quando $RC = 1$. Observe que a entrada começa em $t = 0$ nesse gráfico.

12.2 DOMÍNIO DE FREQUÊNCIA, FASORES

Agora que acabamos de tratar do domínio do tempo vamos examinar o domínio de frequência. Utilizaremos o método fasorial, chamado algumas vezes “transformada de Fourier dos pobres”. Começamos com uma entrada genérica V_{ent} e com a soma das tensões ao longo da malha depois de ter aplicado V_{ent} por um tempo muito maior que RC segundos:

$$V_{ent} - IR - \frac{q}{C} = 0 \tag{12-10}$$

assim

$$V_{ent} = IR + \frac{q}{C} \tag{12-11}$$

onde I é corrente, R é resistência, q é carga elétrica e C é capacitância. Seja $q(t) = q_0 e^{i\omega t}$, assim $I(t) = i\omega q(t)$ e temos:

$$V_{ent} = i\omega qR + \frac{q}{C} = (i\omega RC + 1)\frac{q}{C} \tag{12-12}$$

mas q/C é exatamente a tensão nos terminais do capacitor na Fig. 12-1, que é a tensão de saída $V_{saída}$ e assim podemos escrever:

$$\frac{V_{ent}}{V_{saída}} = 1 + i\omega RC \tag{12-13}$$

Inverta a Eq. (12-13) para obter a expressão habitual do Ganho, $G(i\omega)$:

$$\begin{aligned} G(i\omega) &= \frac{V_{saída}}{V_{ent}} = \frac{1}{1 + i\omega RC} = \\ &= \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} - i \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \end{aligned} \tag{12-14}$$

Esta é a resposta no domínio da frequência do sistema em coordenadas cartesianas ou retangulares, isto é, em termos das partes real e imaginária. De agora em diante iremos chamar a resposta no domínio de frequência de $H(\omega)$ que é a notação padrão da função de sistema ou função de transferência (veja a Fig. 12-4)

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} - i \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \tag{12-15}$$

$H(\omega)$ descreve totalmente o sistema no domínio da frequência do mesmo jeito que $h(t)$ ou a resposta ao degrau descrevem o

| TABELA 12-1 Grandezas Análogas em Sistemas Físicos | | |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------|
| Mecânicos | Elétricos | Acústicos |
| Força F | Diferença de potencial V | Pressão |
| Deslocamento x | Carga q | Deslocamento de volume |
| Velocidade v | Corrente I | Corrente de volume |
| Aceleração a | $\frac{dI}{dt}$ taxa de variação da corrente | Taxa de variação da corrente de volume |
| Massa m | Indutância L | Inertância |
| Constante de força de restauração k | Inverso da capacitância $1/C$ | Inverso da capacitância acústica |
| Constante de força resistente R | Resistência R | Resistência acústica |

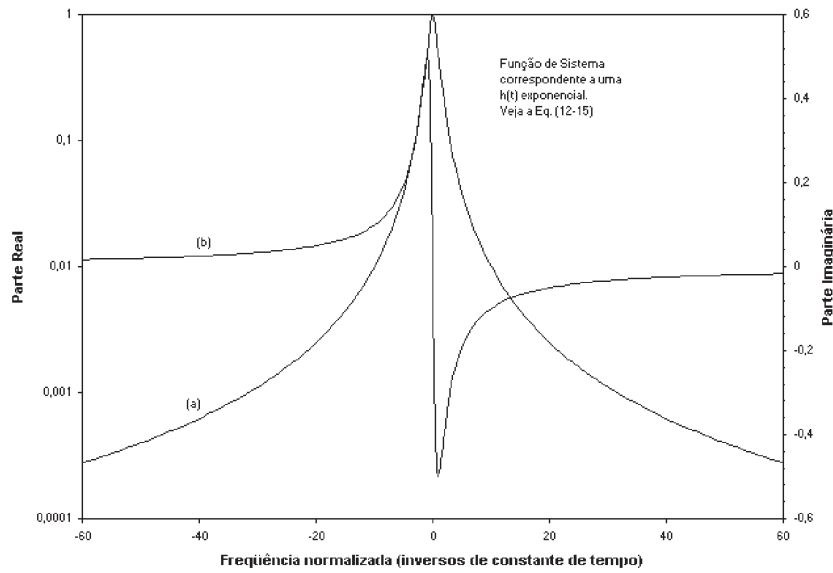


Fig. 12-4 Função de sistema: (a) parte real; (b) parte imaginária. Frequência normalizada em unidades de $1/RC$. (A constante de tempo é RC segundos.)

sistema no domínio do tempo. As mesmas informações estão contidas em ambas as funções.

Na Seção 12.3 veremos como usar a transformada de Fourier para determinar $H(\omega)$ a partir de $h(t)$ e de $h(t)$ a partir do conhecimento de $H(\omega)$. Em outras palavras, a resposta ao impulso e a função de sistema constituem um par da transformada de Fourier. Estes resultados analíticos exatos serão comparados com os resultados da FFT usando a planilha.

Muitas vezes é mais útil expressar a função de sistema em coordenadas polares, isto é, em termos da magnitude $|H(\omega)|$ e da fase $\theta(\omega)$:

$$|H(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \quad (12-16)$$

$$\theta(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) \quad (12-17)$$

Portanto, a resposta no domínio da frequência (mostrada na Fig. 12-5) se torna:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (12-18)$$

$$\theta(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (12-19)$$

Por causa da ampla faixa de valores da magnitude, é conveniente adotar uma escala em decibéis para ela. Em termos de volts, $\text{dB} = 20 \log(V_{\text{saída}}/V_{\text{ent}})$ assim:

$$\text{dB} = 20 \log[|H(\omega)|] = -10 \log[1 + (\omega RC)^2] \quad (12-20)$$

Observe na Fig. 12-6 e na Eq. (12-18) que, na assim designada *frequência de quebra* $1/RC$ rad/s, a magnitude se reduz a 0,707 e a fase se desloca para -45 graus. Em outras palavras, a fre-

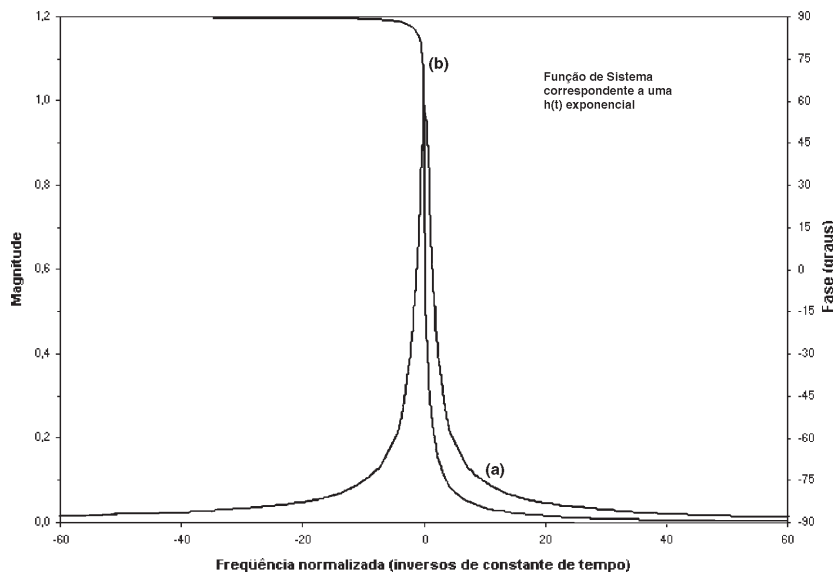


Fig. 12-5 Magnitude e fase de $H(\omega)$ do circuito RC : (a) curva de magnitude; (b) curva de fase. A frequência está normalizada em unidades de $1/RC$.

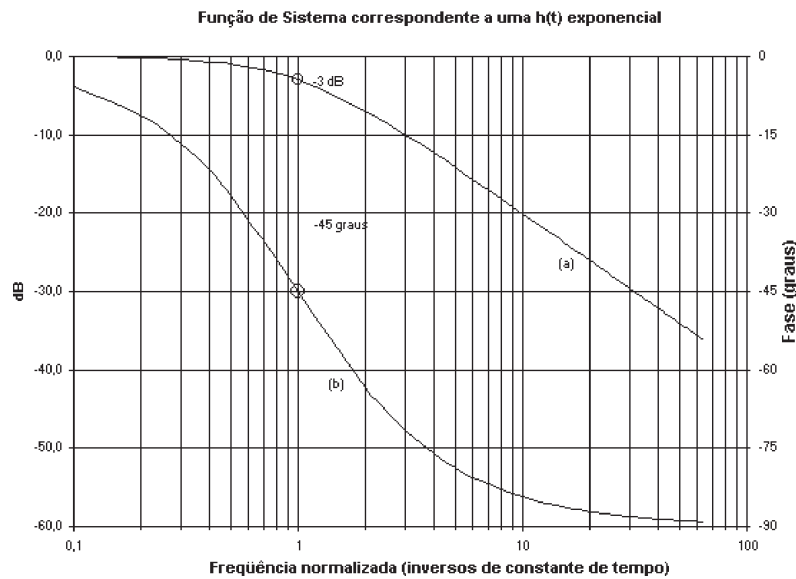


Fig. 12-6 Gráfico de Bode. Magnitude (a) e fase (b) de um sistema com decaimento exponencial $h(t)$. Observação: -3dB e -45 graus \Leftrightarrow frequência = 1.

quência de quebra é $\omega_c = 1/RC$. A magnitude cai a -3dB na frequência de quebra, de acordo com a Eq. (12-20), porque $-10 \log(2) = -3,01$.

A Fig. 12-6 é um formato padrão do diagrama de Bode com a magnitude em escala logarítmica, a fase em graus em escala linear e uma escala logarítmica de frequência. Para qualquer sistema físico com resposta exponencial ao impulso a magnitude cai -3dB (meia potência) e a fase é sempre -45 graus na frequência de valor igual ao inverso da constante de tempo. Em uma escala normalizada de frequência esse valor é igual a 1. A Fig. 12-7 mostra o gráfico polar.

Agora que temos $H(\omega)$ na forma polar, podemos exprimi-la convenientemente como

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{i\theta(\omega)}. \quad (12-21)$$

Isto nos dá imediatamente três ferramentas poderosas:

Filtragem Linear, Convolução

Se conhecermos $H(\omega)$ e o espectro do sinal de entrada $F_{ent}(\omega)$ podemos determinar o espectro de saída $F_{saída}(\omega)$. Esta é a *filtragem linear* no domínio de frequência.

Podemos obter a forma de onda de saída aplicando a transformada de Fourier inversa ao espectro. (Veja a Seção 12.5.) Isto também é chamado de *convolução* no domínio de frequência:

$$F_{saída}(\omega) = H(\omega) F_{ent}(\omega). \quad (12-22)$$

Filtragem Inversa, Deconvolução

Se conhecermos o espectro de saída $F_{saída}(\omega)$ e $H(\omega)$ podemos obter a entrada. (Veja a Seção 12.7.) Isto é chamado de *deconvolução* ou de *filtragem inversa*:

$$F_{ent}(\omega) = \frac{F_{saída}(\omega)}{H(\omega)}. \quad (12-23)$$

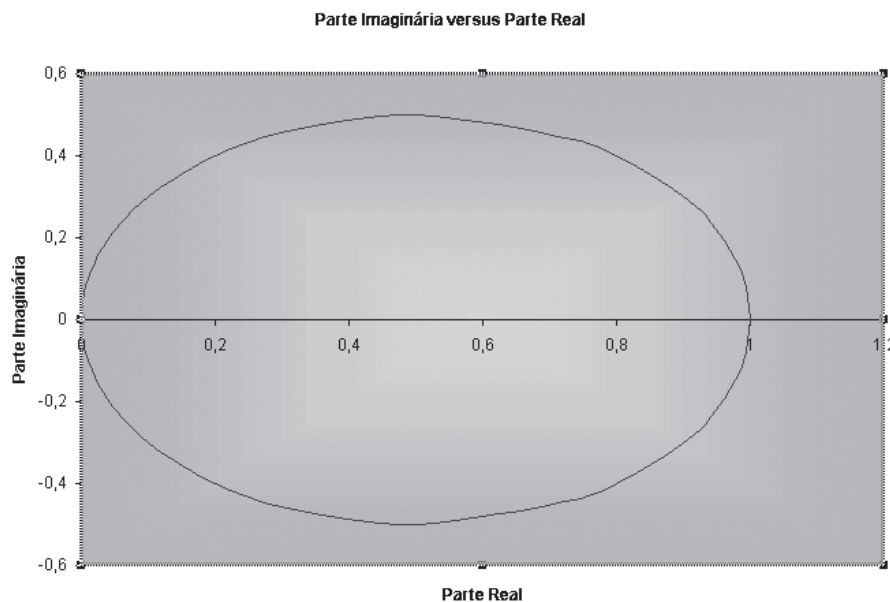


Fig. 12-7 Gráfico polar da Parte Imaginária em função da Parte Real da resposta ao impulso com decaimento exponencial.

Identificação de Sistemas

Podemos determinar a função de sistema enviando um sinal conhecido $F_{ent}(\omega)$ e medindo a saída $F_{saida}(\omega)$. Isto significa que podemos medir $H(\omega)$ utilizando qualquer sinal, até mesmo um ruído aleatório. (Veja a Seção 12.12.) A obtenção de $H(\omega)$ é chamada de *identificação do sistema*:

$$H(\omega) = \frac{F_{saida}(\omega)}{F_{ent}(\omega)}. \quad (12-24)$$

Mais adiante, mostraremos como calcular a convolução, a deconvolução, a identificação de sistemas e as funções coerência e relação sinal-ruído (SNR) usando a FFT.

12.3 FUNÇÃO DE SISTEMA VIA TRANSFORMADA DE FOURIER

Antes de usar a planilha façamos uma revisão da relação entre a resposta ao impulso e a função de sistema. Ambas as funções exprimem a mesma informação, uma no domínio do tempo e a outra, no domínio de frequência. Essas duas funções se relacionam através da transformada de Fourier.

Como um exemplo simples, vamos considerar a resposta ao impulso $h(t)$ do circuito RC, dada pela Eq. (12-9). Esse é um caso particular, porém é mais geral do que parece devido à propriedade de deslocamento do espectro de modulação complexa da transformada de Fourier. A transformada de Fourier da resposta ao impulso é dada por:

$$H(\omega) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-t/RC} e^{-i\omega t} dt \quad (12-25)$$

Simplifique as exponenciais e ajuste o limite inferior levando em conta os valores de $u(t)$,

$$H(\omega) = \frac{1}{RC} \int_0^{+\infty} e^{-(1/RC + i\omega)t} dt \quad (12-26)$$

e com a integral obtida facilmente tem-se

$$H(\omega) = \frac{1}{RC} \frac{e^{-(1/RC + i\omega)t} \Big|_0^{+\infty}}{-(1/RC + i\omega)} = \frac{1}{RC} \frac{0 - 1}{-(1/RC + i\omega)} \quad (12-27)$$

portanto,

$$H(\omega) = \frac{1}{RC} \left[\frac{1}{(1/RC) + i\omega} \right] = \frac{1}{1 + i\omega RC}. \quad (12-28)$$

Como de costume, vamos separar as partes real e imaginária e fazer a simplificação:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} - i \frac{\omega}{1 + (\omega RC)^2}. \quad (12-29)$$

Essa é exatamente a mesma expressão obtida para $H(\omega)$ na Eq. (12-15) usando fasores. Agora você sabe como obter a função de sistema medindo a resposta do sistema no domínio do tempo. É mais rápido fazer medições no domínio do tempo e então usar a FFT para obter a resposta de frequência. Este é o segredo da espectroscopia com transformada de Fourier na ressonância infravermelha e na ressonância magnética nuclear pulsada (NMR)². Contudo, em geral é mais preciso fazer a medida dos espectros lentamente na frequência.

✪ Resposta ao Impulso via Transformada de Fourier

A seguir, vamos ver como calcular a resposta ao impulso de um sistema medindo a função de sistema. (Isto requer a utilização de cálculo um pouco mais avançado do que o empregado até aqui.) Suponha que você mediu $H(\omega)$ e agora necessita de $h(t)$. Em geral, $h(t)$ é a transformada de Fourier inversa de $H(\omega)$:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (12-30)$$

assim para o caso particular do filtro RC temos

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + i\omega RC} d\omega \quad (12-31)$$

Essa integral parece complicada, mas não é. Há diversas maneiras de resolvê-la. Primeiramente poderíamos dar uma olhada em uma tabela de transformadas de Fourier. Em segundo lugar, se você escrever a exponencial em termos de $\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ e reescrever a integral em termos das partes real e imaginária, a integral da parte ímpar é igual a zero por se tratar de uma função ímpar e resulta a função par.

Se você não dispuser de tabelas poderá fazer a integração com variáveis complexas (Cap. 10). Considere $i\omega$ como uma variável complexa e reescreva a Eq. (12-31) como:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i RC} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(1/RC) + i\omega} d(i\omega) \quad (12-32)$$

Essa expressão pode ser calculada imediatamente com o teorema dos resíduos de Cauchy. (Se não souber do que se trata, não se preocupe sobre isso agora. Você aprenderá o teorema em outros cursos.) O integrando possui um pólo em $i\omega = -1/RC$ assim a integral é igual a $2\pi i$ vezes o valor do resíduo, $\exp(-t/RC)$, no pólo e a resposta ao impulso é:

$$h(t) = \frac{u(t) 2\pi i}{2\pi i} \frac{1}{RC} e^{-t/RC} = u(t) \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \quad (12-33)$$

Esse foi exatamente o resultado obtido anteriormente através da solução de uma equação diferencial. Agora você sabe calcular como obter $h(t)$ e $H(\omega)$ utilizando diversos métodos.

²Acrônimo de Nuclear Magnetic Resonance (literalmente, Ressonância Nuclear Magnética). (N.T.)

Muito tempo já foi gasto com esse estudo de caso, porque ele é simples e fácil de compreender. Além disso, poupa um bocadinho de tinta da impressão das equações. Este procedimento é mais

geral do que parece, porque foram deduzidos alguns resultados universais para um sistema qualquer que apresente a resposta ao impulso na forma de uma exponencial decrescente.

12.4 PROCESSAMENTO DE SINAL DO TIPO “CANIVETE SUÍÇO”

Como o canivete do exército suíço, a FFT do EXCEL é muito versátil. Ela pode ser usada de inúmeras maneiras e vamos demonstrar apenas algumas dentre as muitas aplicações desta poderosa ferramenta. As aplicações particulares que você verá serão úteis na análise de dados do mundo real bem como ao se examinar sistemas modelo. Vamos testar as funções de:

- convolução;
- deconvolução;
- função de correlação;
- identificação de sistemas;
- funções coerência e SNR.



12.5 CONVOLUÇÃO

O que É?

A convolução é a operação linear fundamental que produz a resposta a partir de um sistema. Comumente, um sistema físico modifica o sinal de entrada antes de produzir a saída. Faça uma busca na Internet sobre *convolução* e encontrará milhares de páginas sobre o tema. Muitos dos itens dizem respeito à convolução de imagens bidimensionais.

A convolução é uma forma particular de multiplicar duas seqüências de números; a operação básica no domínio original dos dados consiste em multiplicar, adicionar e deslocar. Ilustremos isso em uma pequena pasta de trabalho tutorial chamada CONVOLTEMPO e, em seguida, usaremos a FFT para ver como funciona no domínio da freqüência.

Como Funciona?

A convolução é fácil de ser executada no domínio original dos dados (em geral, o tempo) e a planilha facilita sua execução. Para efetuar a convolução de duas seqüências de dados calcule o *produto do recobrimento*. Este produto é obtido deslizando-se a seqüência invertida sobre a outra e adicionando-se todos os produtos de recobrimento. Por exemplo, considere:

6 5 4 3 2 1
7 8 9 10 11 12 13 14

onde o produto de recobrimento é $3 \times 7 + 2 \times 8 + 1 \times 9 = 46$.

Avance agora a sequência superior para a direita de modo que o valor 1 fique acima do valor 10 e calcule o novo produto de recobrimento. A convolução das duas sequências é a sequência dos produtos de recobrimento.

Aqui, estamos interessados na convolução da resposta ao impulso com uma seqüência de entrada. Para dados discretos, a convolução pode ser expressa como:

$$f_{saida}(t) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{N-1} f_{ent}(n) h(t-n) \quad (12-34)$$

onde N é o número de pontos de dados. Na Eq. (12-34) K é um fator de normalização dos valores da sequência de resposta ao impulso. Observe como isto é feito na pasta de trabalho CONVOLTEMPO. A Fig. 12-9 mostra a operação descrita numericamente na Fig. 12-8. Esta figura está na pasta de trabalho CONVOLTEMPO e pode ser visualizada melhor em seu monitor onde é possível girar o gráfico 3-D.

| I17 | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|------|-------------------------------------------------------------|-----|------|------|---|---|-----|------|---|---|---|-----|------|----|---|---|
| | =E\$10*I13+\$D\$10*H13+\$C\$10*G13+\$B\$10*F13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | CONVOLTEMPO.XLS | | | Microtutorial sobre Convolução no Domínio Original de Dados | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | Capítulo 12 | | | (Sem FFT) | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | Tempo | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | h(t) | 0 | 0 | | 0,5 | 0,33 | 0,17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | h(t)REV | 0 | 0,17 | 0,33 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | Entrada | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 14 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | Saída | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 0,83 | 1 | 1 | 1 | 0,5 | 0,17 | 0 | | |
| 18 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 19 | h(t)REV desliza através da entrada e o produto de "recobrimento" é calculado em cada ponto para se obter a saída. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | h(t)REV é h(-t) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | (Note como h(t) é normalizado) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Fig. 12-8 Tela inicial da pasta de trabalho CONVOLTEMPO. Mude as amplitudes de entrada na linha 13 e observe a nova saída. Clique nas guias dos gráficos na parte inferior da planilha para ver os resultados.

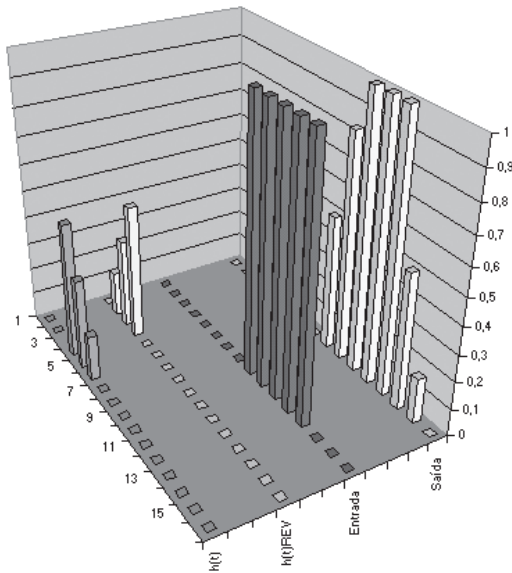


Fig. 12-9 Convolução discreta: $h(t)$, $h(t)$ REV, entrada e convolução de saída.

Convolução no Domínio de Frequência

Para conjuntos de dados muito grandes a operação é mais simples no domínio de frequência onde a convolução é a multiplicação com números complexos

$$F_{saída}(\omega) = H(\omega) F_{ent}(\omega). \quad (12-35)$$

Nessa equação $F_{saída}(\omega)$ é o espectro de saída, $H(\omega)$ é a função de sistema e $F_{ent}(\omega)$ é o espectro de entrada. A Eq. (12-35) baseia-se em uma propriedade fundamental da transformada de Fourier que você aprenderá em outras disciplinas.

Você pode interpretar a Eq. (12-35) de duas maneiras.

- Uma interpretação simples é de que a função de sistema é um *operador* que transforma o espectro de entrada no espectro de saída.
- O produto de dois espectros diferentes é chamado de *espectro-cruzado* ou *densidade espectral de potência cruzada*. Isto é semelhante à densidade espectral de potência (DEP), mas a DEP-cruzada é geralmente complexa e a DEP é real. Com base nesta perspectiva, o espectro de saída é simplesmente o espectro de potência cruzada da função de sistema e do espectro de entrada.

Como Funciona Essa Função?

O processo de convolução está em toda a parte. A fala humana envolve a convolução de pulsos das cordas vocais com cavidades ressonantes da garganta e da cabeça; o som sofre ainda uma convolução antes da recepção. A visão e a audição são processos onde há convolução com bandas passantes restritas, complicadas por não-linearidades. A transmissão de sinais eletromagnéticos através da atmosfera, da ionosfera, de fibras ópticas, de circuitos e outros meios com dispersão e absorção constitui exemplos de convoluções semelhantes. Ao se combinar duas densidades de probabilidades, isto deve ser feito através de convolução em vez de soma pura e simples. (Por quê? Uma resposta parcial é que adição não funcionaria uma vez que a probabilidade não pode ser maior do que 1.)

Vamos resumir alguns fatos que você aprenderá em outras disciplinas:

- a convolução no tempo é equivalente à multiplicação em frequência.
- a convolução em frequência é equivalente à multiplicação no tempo.
- a convolução, no tempo, de um sinal com resposta ao impulso invertida no tempo é equivalente à transformada de Fourier do produto do espectro do sinal com a função de sistema.

12.6 CONVOLUÇÃO, PASTA DE TRABALHO SOBRE CONVOLUÇÃO

A Fig. 12-10 mostra a tela inicial dessa pasta de trabalho que contém o método para efetuar a convolução discreta usando a FFT e a IFFT. Use o mouse para testar as fórmulas de modo a verificar como funcionam.

É possível adicionar ruído aleatório ao sinal de entrada e a pasta de trabalho relata as variâncias (desvio-padrão ao quadrado) de entrada e de saída. Observe a redução da variância de saída. Você pode modificar a resposta ao impulso na linha 9 e ajustar a constante de tempo ou mudar para uma outra resposta ao impulso. Substitua a força $F(t)$ por $F_0\delta(t)$ e observe o resultado.

Com ruído aleatório adicionado ao sinal de entrada, pressione a tecla de função F9 para mudar a amostra de ruído e recalcular. Essa tecla de função possui as mesmas estatísticas do ruído, mas utiliza uma amostra de ruído diferente. Altere as estatísticas do ruído usando a função ALEATÓRIO().

Não esqueça de aplicar a FFT ao sinal de entrada e a IFFT ao sinal resultante da convolução todas as vezes que o sinal mudar. Se você mudar a resposta ao impulso, deverá aplicar a FFT a esse sinal para gerar uma nova função de sistema. Observe que não se aplicou nenhuma defasagem de Nyquist ao sinal de entrada porque não estamos interessados nos espectros, somente nas formas de onda de entrada e de saída. Os gráficos de espectros descentralizados estão disponíveis ao clicar nas guias apropriadas na parte inferior como na Fig. 12-10.

Esta pasta de trabalho possui um sinal de teste embutido formado por dois pulsos retangulares de larguras diferentes e por um segmento de sinal senoidal (Fig. 12-11). Os pulsos têm diferentes larguras de espectro, mas os respectivos espectros são de faixa larga. A onda senoidal é um sinal de largura de espectro relativamente estreita.

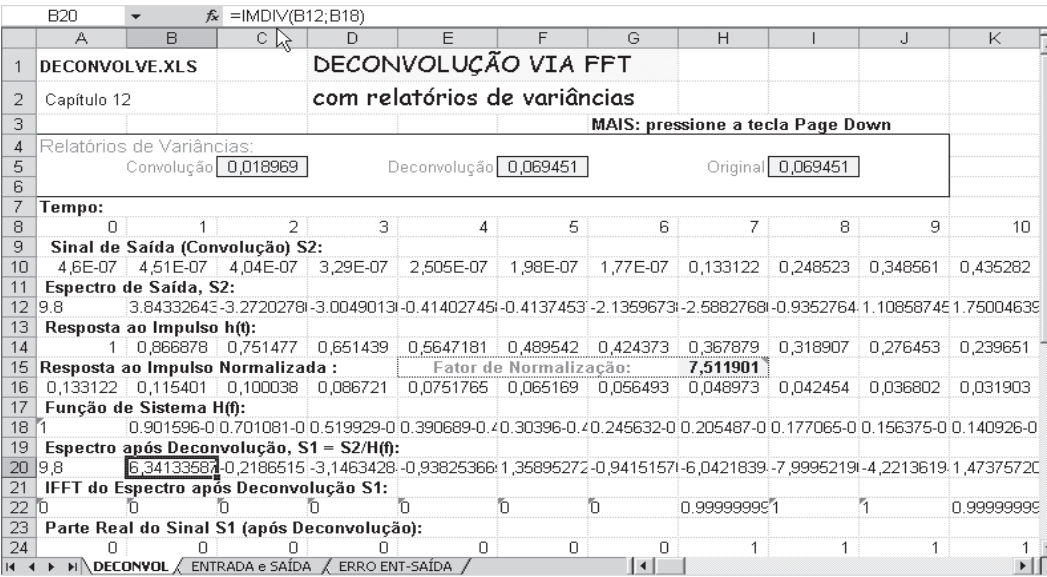


Fig. 12-10 Tela inicial da pasta de trabalho CONVOLVE. Observe a redução da variância.

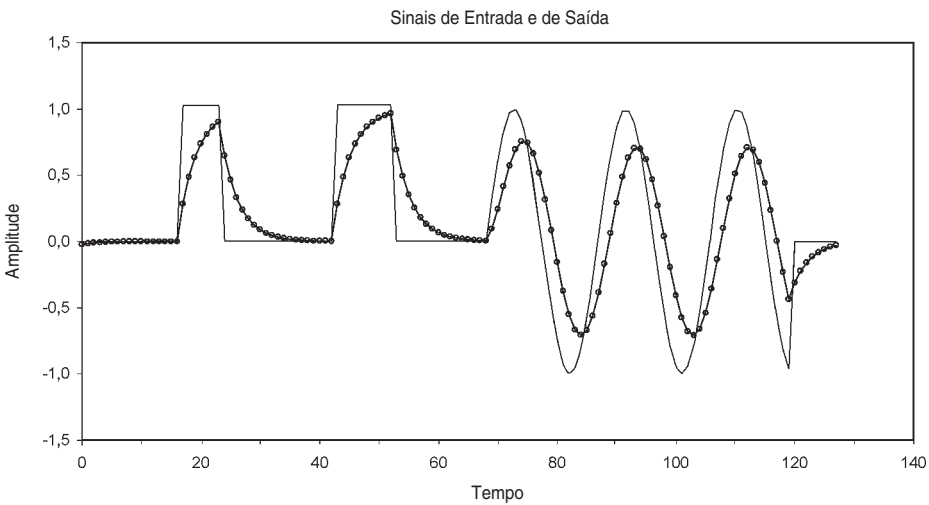


Fig. 12-11 Sinal de entrada sem ruído (linha cheia) e sinal de saída com convolução (curva com marcadores). Observe o borrado e o ajuste dos pulsos. Note também os deslocamentos de amplitude e fase no segmento senoidal do sinal. As variâncias dos sinais de entrada e de saída estão mostradas nas células D4 e G4.

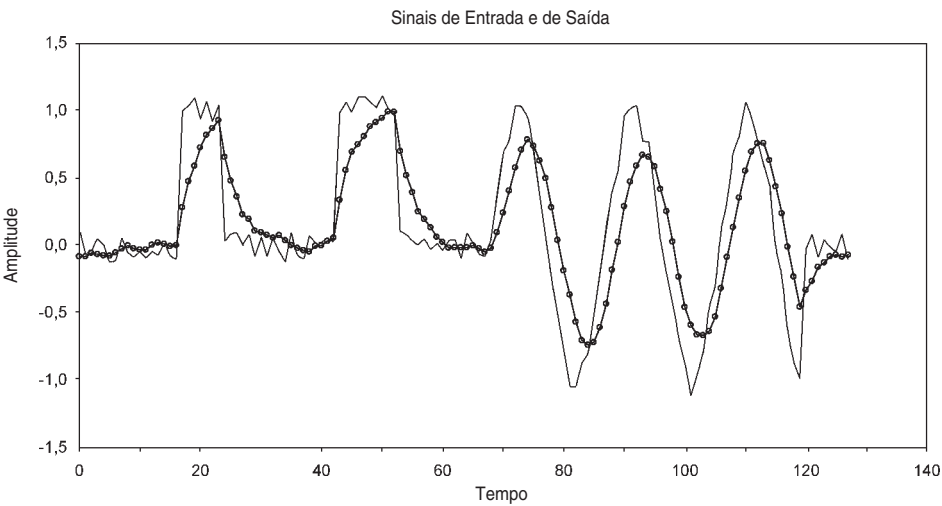


Fig. 12-12 Sinal de entrada com ruído (linha cheia) e sinal de saída com convolução (curva com marcadores). Aqui a amplitude do ruído é 0,25 e o ruído possui uma distribuição uniforme. Ao ver esta tela na pasta de trabalho CONVOLTEMPO, pressione a tecla de função F9 para um novo ruído.

Modifique a resposta ao impulso utilizando constantes de tempo mais longas e mais curtas. Observe os efeitos sobre as variâncias de entrada e de saída nas células D4 e G4. Constantes de tempo longas produzem mais suavização, porém, mais distorção.

A Fig. 12-12 mostra o efeito da filtragem de um sinal de entrada com ruído. Você pode mudar a amplitude do ruído na célula C34. Lembre-se de aplicar a FFT à linha 15 com saída na linha 17. Em seguida, aplique a FFT à linha 17 com saída na linha 19. Finalmente, aplique a IFFT na linha 19 com saída na linha 21. Você deve elaborar macros para manipular essas operações repetitivas.

Altere as larguras dos pulsos e o espaçamento entre eles. Consulte a Ajuda para ver os diferentes tipos de ruído que se pode adicionar, como o ruído uniforme ou o ruído gaussiano. Todos

os efeitos que você vê são consistentes com a resposta de frequência do tipo atenuação-defasagem (Fig. 12-6).



Dica

A *convolução linear* é o resultado da convolução de funções não-periódicas, mostrada na pasta de trabalho CONVOLTEMPO. A *convolução circular* é o resultado da convolução de funções periódicas. A utilização da FFT resulta em convolução circular porque a FFT impõe periodicidade. Se você aplicar a FFT a um conjunto de dados, a FFT supõe que o mesmo conjunto de dados ocorreu antes e o mesmo conjunto de dados ocorrerá depois.

12.7 DECONVOLUÇÃO

O que É?

A deconvolução é a operação de “desfazer” a convolução. Frequentemente essa operação é necessária e desejável para remover distorções não-intencionais impostas aos dados pelo sistema através do qual passaram os dados. Por exemplo, um espectrógrafo pode deformar ou borrar linhas espectrais ou um amplificador pode distorcer o som. Ao efetuar uma busca na Internet sobre *deconvolução*, encontrará milhares de ocorrências a respeito do termo.

A idéia básica da deconvolução consiste em usar uma função de sistema conhecida $H(\omega)$ e uma saída medida para determinar o sinal original. Esta técnica, que é análoga à decodificação de uma mensagem codificada, tem muitas aplicações. Você pode raciocinar com a saída medida como sendo a mensagem codificada e a função de sistema conhecida como a chave do código. Em outras palavras, a deconvolução capacita-o a reconstruir um

sinal distorcido. O exame de bancos de dados científicos e de engenharia mostra que centenas de artigos são publicados a cada ano.

A deconvolução é usada amplamente em astronomia (o telescópio espacial Hubble, por exemplo), geologia e exploração de petróleo. O processo também vem sendo usado para reconstruir registros fonográficos antigos de Enrico Caruso ou para restaurar fotos borradas devido a movimento ou foco inadequado da máquina fotográfica.

O que Ela Faz?

Em sistemas de telecomunicações a deconvolução é chamada de *equalização*, o que significa que as propriedades dispersivas do sistema são parcialmente canceladas em uma parte do espectro. Isso é importante em telecomunicações e em fibra óptica. A

| | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----------------------------------------------|------------|-------------|------------------------------|--------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|----------|
| B20 | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | |
| 1 | DECONVOLVE.XLS | | | DECONVOLUÇÃO VIA FFT | | | | | | | | |
| 2 | Capítulo 12 | | | com relatórios de variâncias | | | | | | | | |
| 3 | MAIS: pressione a tecla Page Down | | | | | | | | | | | |
| 4 | Relatórios de Variâncias: | | | | | | | | | | | |
| 5 | Convolução | | | 0,018969 | Deconvolução | | | 0,069451 | Original | | | 0,069451 |
| 6 | | | | | | | | | | | | |
| 7 | Tempo: | | | | | | | | | | | |
| 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| 9 | Sinal de Saída (Convolução) S2: | | | | | | | | | | | |
| 10 | 4,6E-07 | 4,51E-07 | 4,04E-07 | 3,29E-07 | 2,505E-07 | 1,98E-07 | 1,77E-07 | 0,133122 | 0,248523 | 0,348561 | 0,435282 | |
| 11 | Espectro de Saída, S2: | | | | | | | | | | | |
| 12 | 9,8 | 3,84332645 | -3,27202781 | -3,00490131 | -0,414027451 | -0,4137453 | -2,13596731 | -2,58827681 | -0,9352764 | 1,1085874E | 1,7500463E | |
| 13 | Resposta ao Impulso h(f): | | | | | | | | | | | |
| 14 | 1 | 0,866878 | 0,751477 | 0,651439 | 0,5647181 | 0,489542 | 0,424373 | 0,367879 | 0,318907 | 0,276453 | 0,239651 | |
| 15 | Resposta ao Impulso Normalizada : | | | | | | | | | | | |
| 16 | 0,133122 | 0,115401 | 0,100038 | 0,086721 | 0,0751765 | 0,065169 | 0,056493 | 0,048973 | 0,042454 | 0,036802 | 0,031903 | |
| 17 | Função de Sistema H(f): | | | | | | | | | | | |
| 18 | 1 | 0,901596 | -0,701081 | -0,519929 | -0,390689 | -0,4030396 | -0,40245632 | -0,205487 | -0,177065 | -0,156375 | -0,140926 | |
| 19 | Espectro após Deconvolução, S1 = S2/H(f): | | | | | | | | | | | |
| 20 | 9,8 | 6,3413358 | -0,2186515 | -3,1463428 | -0,93825366 | 1,35895272 | -0,94151571 | -6,0421839 | -7,99952191 | -4,22136191 | 1,4737572C | |
| 21 | IFFT do Espectro após Deconvolução S1: | | | | | | | | | | | |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,9999999E | 1 | 0,9999999E | 0,9999999E | |
| 23 | Parte Real do Sinal S1 (após Deconvolução): | | | | | | | | | | | |
| 24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 25 | DECONVOL / ENTRADA e SAÍDA / ERRO ENT-SAÍDA / | | | | | | | | | | | |

Fig. 12-13 Tela inicial da planilha DECONVOLVE da pasta de trabalho de mesmo nome. Esta planilha faz a convolução de um sinal de teste com uma resposta ao impulso definidos pelo usuário e em seguida faz a deconvolução do sinal resultante. Note o uso da função IMDIV na deconvolução espectral da linha 19. Clique duas vezes no ícone.

deconvolução é fácil de fazer no domínio da frequência usando a divisão de números complexos:

$$F_{ent}(\omega) = \frac{F_{saída}(\omega)}{H(\omega)}. \quad (12-36)$$

O único problema que pode ocorrer envolve os possíveis zeros de $H(\omega)$ os quais fariam o processo explodir. Aqui, um pequeno ruído seria útil. Isto tem a ver com o problema original tratado por Norbert Wiener. O *filtro inverso de Wiener* é:

$$F_{ent}(\omega) = \frac{F_{saída}(\omega)}{H(\omega) + N(\omega)} \quad (12-37)$$

Essa fórmula funciona melhor se $N(\omega)$ for o espectro de ruído real no sistema no instante em que a saída estiver sendo medida. Se este espectro de ruído for atualizado para cada medida, então a Eq. (12-37) se comporta como um filtro inverso adaptativo.

Quando $H(\omega) \gg N(\omega)$ é executada a deconvolução ordinária, mas quando $H(\omega) \ll N(\omega)$ a saída é uniformemente baixa para o ruído de faixa larga.

A tela inicial da pasta de trabalho DECONVOLVE é mostrada na Fig. 12-13. Observe os relatórios sobre variância nas células C4, F4 e F14. A Fig. 12-14 mostra o sinal de teste original e os sinais com e sem deconvolução. A Fig. 12-15 mostra os erros da Fig. 12-14. A exatidão da reconstrução é quase sempre impressionante.

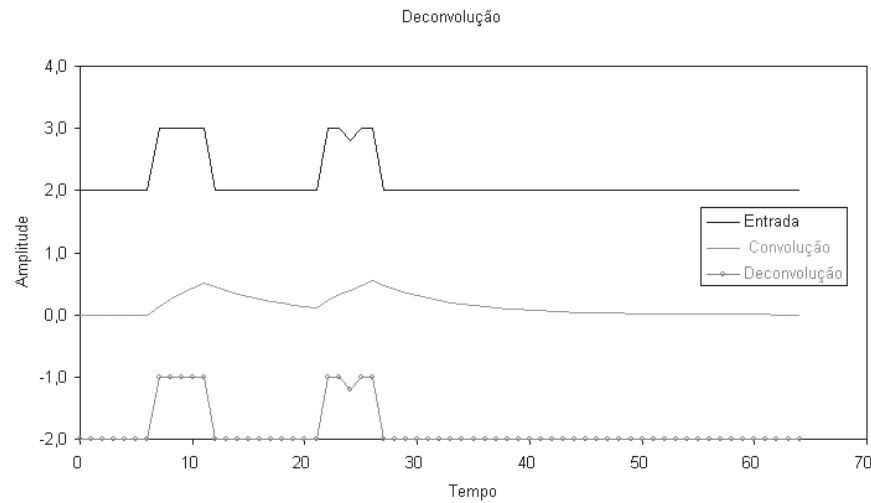


Fig. 12-14 Comparação do sinal de teste original (curva superior) com o sinal depois da convolução (curva do meio) e sinal depois da deconvolução (curva inferior). Observe o borrado dos pulsos após a convolução com perda de detalhes do segundo pulso. (As curvas foram separadas verticalmente para maior clareza.)

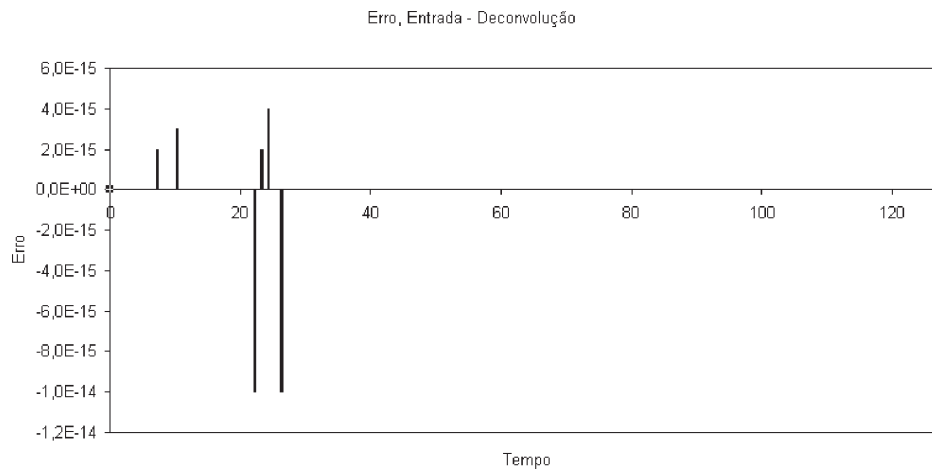


Fig. 12-15 Erros na deconvolução mostrada na Fig. 12-14. Esses erros extremamente pequenos são típicos desta operação usando a FFT.

12.8 FUNÇÃO CORRELAÇÃO

O que É?

A função correlação é uma função de dois conjuntos de dados (função correlação cruzada) ou de um conjunto de dados (função de autocorrelação). A função correlação cruzada e a densidade espectral de potência cruzada [veja Eq. (12-53)] formam um par de transformada de Fourier.

É importante distinguir a *função correlação*, que está sendo discutida aqui, do *coeficiente de correlação*, comum em Estatística (veja o Cap. 11). Lembre que o coeficiente de correlação é um *número simples* relacionado à covariância e desvios-padrão de dois conjuntos de dados. Diferentemente, a função correlação é uma *função* do tempo de deslocamento τ .

Correlatores analógicos foram usados durante muito tempo. O amplificador de sincronismo (lock-in amplifier) e o integrador de pacotes (box-car) são instrumentos típicos baseados em correlação usados em laboratório para medida quando a relação sinal-ruído é baixa.

O que Faz?

A função correlação é algumas vezes chamada de *detector de Elvis*. É utilizada habitualmente para detectar a presença de um sinal conhecido no ruído. Por exemplo, a função correlação pode ser usada para detectar a presença de um rosto (como o de Elvis) em uma multidão, para comparar impressões digitais ou padrões de vasos sanguíneos da retina para identificar pessoas e para determinar que arma disparou um projétil mesmo que ele esteja amassado ou parcialmente derretido. É usada também em radares, no sistema GPS (Global Positioning System) e na análise de DNA.

A função de correlação cruzada atinge seu valor máximo para um retardo que corresponde ao intervalo de tempo de chegada de um sinal que lembra a réplica armazenada. O valor máximo é uma medida da semelhança do sinal recebido e da réplica armazenada. O valor máximo é 1 quando há uma coincidência perfeita.

Qual a Comparação entre a Função Correlação e a Convolução?

A correlação se parece muito com a convolução exceto que:

- Não há inversão no tempo de uma das funções. Lembre-se de que na convolução o tempo é invertido na resposta ao impulso.
- A integral (ou somatório) independe do tempo porquanto a função correlação é uma função do *deslocamento de tempo* τ , não do tempo t . Lembre-se de que a convolução produz uma função da variável *original*, em geral t .

As mesmas considerações se aplicam quando a função correlação é calculada com outras variáveis, como o deslocamentos no espaço e a frequência. Em muitas situações há necessidade de efetuar a correlação de espectros; nesses casos a frequência é tratada como a variável original e a função correlação é uma função do deslocamento de frequência.

Como Funciona?

A correlação no domínio original dos dados é tão simples quanto a convolução: ambas as operações envolvem multiplicação, adição e deslocamento. No domínio original de dados a função correlação $R_{r,a}(\tau)$ pode ser calculada como:

$$R_{r,a}(\tau) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{N-1} f_r(n) f_s(\tau + n) \quad (12-38)$$

onde o índice r refere-se ao sinal recebido e o índice a refere-se à réplica armazenada. Aqui, K é o fator de normalização, igual à soma dos quadrados dos valores da réplica armazenada.

Compare a Eq. (12-38) com a Eq. (12-34). Além da mudança de símbolos, as únicas diferenças são o sinal $+$ e o fator de normalização. Na função correlação cruzada não há inversão de tempo em nenhuma das funções: há somente o deslizamento de uma sobre a outra. Isto pode ser visto de modo mais claro na pasta de trabalho CORRELCRUZ. A Eq. (12-38) pode ser ilustrada de maneira simples com as seqüências de dados:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

onde o produto de superposição é $4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 = 32$. Aqui não foi utilizado o fator de normalização K . Obviamente o maior valor do produto de superposição acontece quando uma seqüência está sobre a outra, isto é, possuem o mesmo deslocamento para a direita. É também evidente que a função de correlação cruzada de um pulso retangular é um triângulo isósceles. (Experimente isso com um pulso sem ruído, 1 1 1 1 1.)

À medida que a réplica se desloca pelo sinal recebido, o produto de superposição é calculado e plotado para cada deslocamento. Observe que o valor máximo da função de correlação cruzada ocorre no deslocamento de tempo que corresponde ao instante de chegada da borda precedente (*leading edge*) do sinal recebido. O valor máximo da função de correlação cruzada é uma medida da semelhança entre o sinal recebido e a réplica armazenada.

Essa réplica armazenada pode não ser realmente a do sinal original se você não dispuser dele; pode ser uma estimativa do que imagina que o sinal original seja, ou a réplica de um sinal que você está procurando. Talvez disponha de uma biblioteca de réplicas de sinais nos quais esteja interessado. É assim que operam astrônomos, peritos em criptografia e especialistas em supervisão eletrônica.

O conceito de correlação originou-se na antigüidade onde se comparavam padrões fazendo-os deslizar um padrão sobre o outro, que é exatamente o que o somatório ou a integral de correlação faz.

No domínio da frequência a função de correlação cruzada é baseada na densidade espectral de potência cruzada de dois sinais:

$$DEPX = F_1^*(\omega) F_2(\omega) \quad (12-39)$$

onde $F_1^*(\omega)$ é o conjugado complexo do sinal 1 e $F_2(\omega)$ é o espectro do sinal 2. Observe que nessa forma a densidade espectral de potência cruzada é completamente real, como a densidade espectral de potência. Como mencionado anteriormente, a função de correlação cruzada $R_{1,2}(\tau)$ e a densidade espectral de potência cruzada $DEPX$ formam um par de transformadas de Fourier:

$$DEPX = FT[R_{1,2}(\tau)] \quad (12-40)$$

$$R_{1,2}(\tau) = IFT[DEPX] \quad (12-41)$$

onde FT é a transformada de Fourier e IFT é a transformada de Fourier inversa. As Eqs. (12-40) e (12-41) exprimem sucintamente o teorema de Wiener-Khintchine.

12.9 APLICAÇÕES DA CORRELAÇÃO CRUZADA

A recuperação de sinais através da técnica de média geral (Seção 10.9) não é possível se o sinal não for repetitivo. Contudo, para um único evento, a correlação cruzada de um sinal mais ruído com a cópia armazenada de um sinal esperado produz resultados surpreendentemente bons para detectar a existência do sinal conhecido.

A função de correlação cruzada pode ser muito útil na investigação de características de atrasos no tempo e percursos de propagação de sinais em acústica, óptica e eletromagnetismo. A velocidade de correlação v_{corr} é definida como:

$$v_{corr} = \frac{d}{\tau_{m\acute{a}x}} \quad (12-42)$$

onde d é a distância de propagação entre a fonte, o detetor e o parâmetro de deslocamento no tempo $\tau_{m\acute{a}x}$ para o qual a função de correlação cruzada $R_{r,t}(\tau)$ atinge seu valor máximo. Uma alteração nas propriedades dispersivas do sistema pode ser detectada ao alterar o parâmetro de deslocamento no tempo τ e do valor máximo da função de correlação cruzada.

O teorema de Wiener-Khintchine mostra explicitamente que a informação veiculada pela função de correlação cruzada no domínio do tempo é a mesma informação veiculada pela $DEPX$ no domínio de frequência.

A propriedade de redução de ruído da correlação cruzada possui uma importância considerável. Considere um sinal recebido $f_r(t)$ adicionado a um ruído aleatório $f_{ruído}(t)$, de modo que, no detetor, se tenha o sinal composto $f_r(t) + f_{ruído}(t)$. Então a função de correlação cruzada do sinal com ruído recebido será dada por:

$$R_{r,n,o}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [F_r(\omega) + F_n(\omega)] F_o^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (12-43)$$

onde $F_r(\omega)$, $F_{ruído}(\omega)$ e $F_o(\omega)$ são, respectivamente, as transformadas de Fourier do sinal recebido, do ruído e do sinal original. A Eq. (12-43) é simplesmente,

$$R_{r,n,o}(\tau) = R_{r,o}(\tau) + R_{n,o}(\tau) \approx R_{r,o}(\tau). \quad (12-44)$$

A função de correlação cruzada do sinal original com o ruído aleatório, $R_{ruído,o}(\tau)$ será geralmente muito pequeno em comparação com $R_{r,o}(\tau)$, contanto que a função de correlação cruzada do sinal recebido com ruído seja muito próxima da correlação cruzada do sinal livre de ruído.

Essa rejeição de ruído, quando reforçada pela técnica de média geral em sinais codificados repetitivos, tem o potencial de realizar operações notáveis na detecção de sinais.

12.10 PASTA DE TRABALHO CORRELTEMPO

Abra a pasta de trabalho CORRELTEMPO e a Fig. 12-16 será exibida. Observe como a Eq. (12-38) é implementada na planilha. Clique no ícone à esquerda para ativar esta pasta de trabalho. Há aqui dois exemplos de correlação no domínio original dos dados. As linhas de 4 a 9 contêm um exemplo simples sem ruído e as linhas de 17 a 22 contêm um exemplo mais detalhado de pulsos com ruído complicados. O segundo exemplo mostra alguns truques de planilha que são aplicáveis a outros trabalhos.

- A célula E16 permite inserir a amplitude do ruído que é usada na linha 19.
- A célula D21 usa a função de planilha SOMAQUAD para obter o fator de normalização K .
- As linhas de 25 a 28 separam as curvas verticalmente para maior clareza.

O *detector de pico* nas linhas 31 e 32 requer uma pequena explicação.

- A célula H31 contém a fórmula =MÁXIMO(E22:BM22). Isso fornece o valor máximo dessa linha.
- A célula K31 contém a fórmula =MÁXIMO(E32: BM32). Isso fornece o instante de tempo em que o valor máximo ocorre.
- A célula E32 contém a fórmula =SE(E22=\$H\$31, E17,0). Isso é copiado nas células E23:BM32. Essa fórmula investiga o valor máximo obtido na célula H31 e escreve o instante de tempo no qual esse máximo ocorre.

A Fig. 12-17 mostra o gráfico 3-D da correlação de 3 pontos sem ruído. Observe que o pico da função correlação cruzada ocorre no instante da chegada do sinal recebido.

A Fig. 12-18 mostra uma função correlação cruzada sem ruído de um sinal mais complicado e a Fig. 12-19 mostra o mesmo sinal acrescido de ruído. Pressione a tecla de função F9 repetidamente e observe o sinal recebido e a função correlação cruzada. Mude o valor da amplitude do ruído na célula D21 e observe como o pico da correlação cruzada é um marcador está-

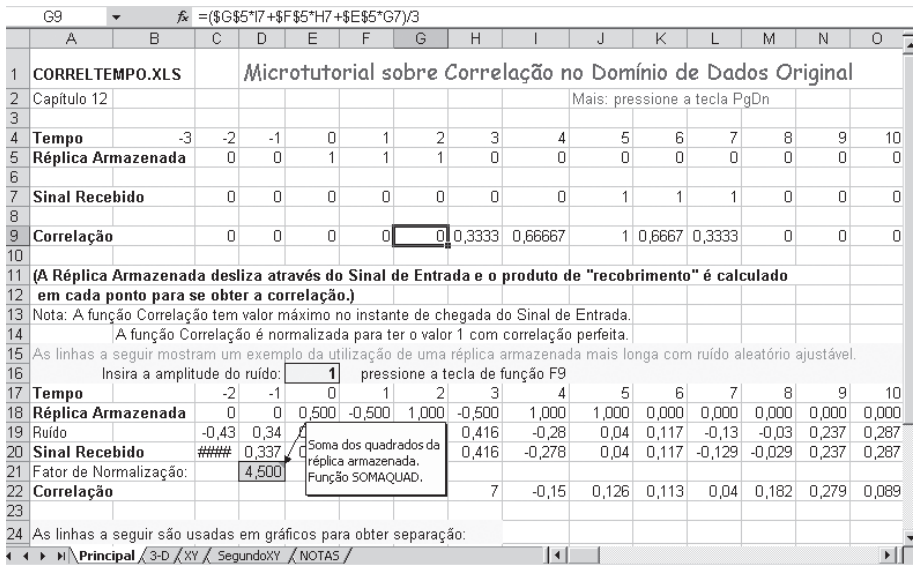


Fig. 12-16 Tela inicial da planilha Principal da pasta de trabalho CORRELTEMPO. Observe que a fórmula da correlação está normalizada com um fator 3 e a linha 9 contém o triângulo isósceles com seu valor de pico no instante de chegada do pulso na linha 7.

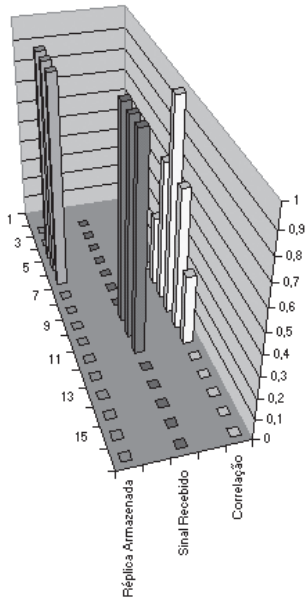


Fig. 12-17 Réplica armazenada, sinal recebido e função de correlação cruzada. Você pode girar esta figura para vê-la de diferentes ângulos e perspectivas ao abrir a pasta de trabalho CORRELTEMPO.

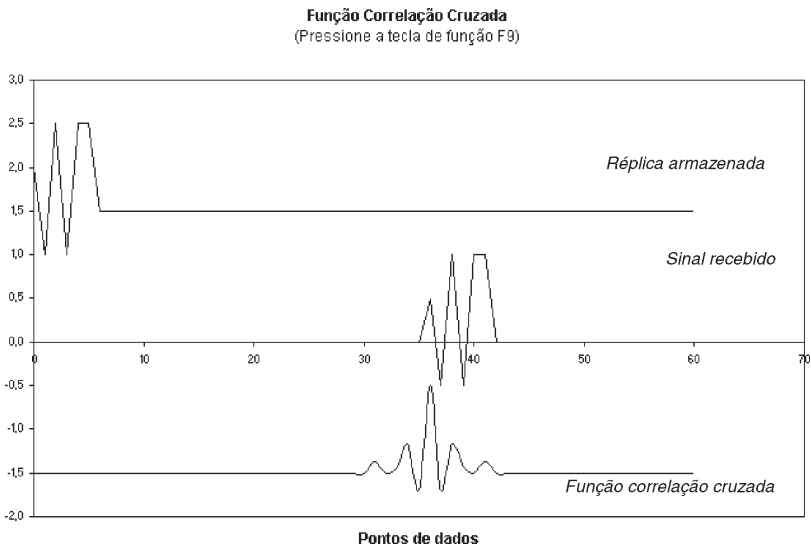


Fig. 12-18 Função de correlação cruzada de sinais sem ruído. Este cálculo é feito sem a FFT mas observe que a função de correlação cruzada tem uma aparência de uma transformada de Fourier.

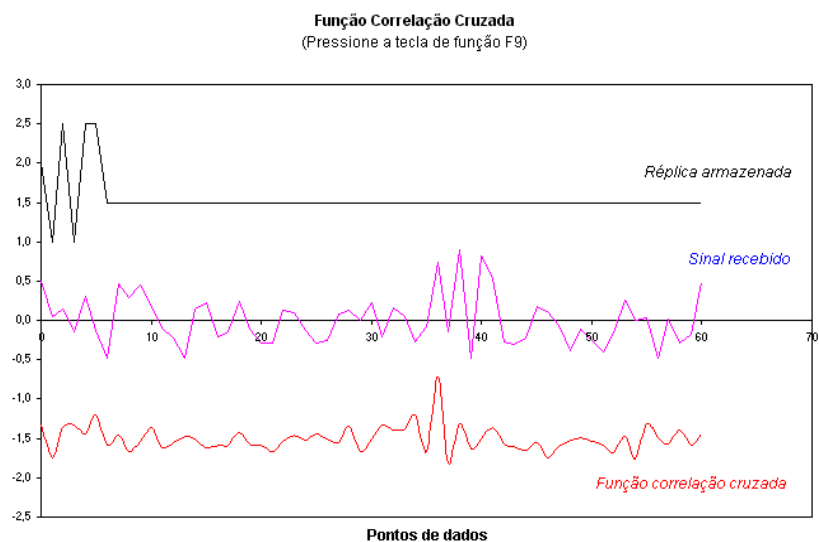


Fig. 12-19 Esta é a mesma função de correlação cruzada da Fig. 12-18 mas agora o sinal recebido possui ruído. A função de correlação cruzada vale 0,652 no ponto 36.

vel mesmo quando o sinal recebido está imerso no ruído. Mude a forma da réplica armazenada (isto mudará automaticamente o sinal recebido). Utilize valores positivos, negativos e nulos no sinal.

Na Fig. 12-19 é difícil, se não impossível, determinar a chegada ou até mesmo a existência do sinal recebido, mas a função de correlação cruzada alcança o valor de 0,652 no valor correto do deslocamento de tempo de 36.

12.11 PASTA DE TRABALHO CORRELCRUZ

A tela inicial desta pasta de trabalho e os resultados típicos são mostrados nas Figs. 12-20 e 12-21. A tela inicial mostra o método da FFT. Observe os relatórios do deslocamento no tempo para o valor máximo da função correlação cruzada, o valor de pico da função correlação cruzada, normalizado em relação a uma réplica armazenada sem ruído. Clique no ícone para ativá-la.

O valor de pico é determinado como anteriormente, utilizando a função de planilha MÁXIMO aplicada à função correlação cruzada. A determinação do deslocamento no tempo é mais elaborada. É utilizada a função de planilha SE, uma função lógica semelhan-

te à porta lógica ou-exclusivo empregada em eletrônica digital. Use o mouse e a Ajuda para aprender mais sobre a função SE.

Observe o uso da função de planilha IMREAL para extrair dados numéricos dos resultados da IFFT. A linha 18 está normalizada pela soma dos quadrados dos valores da réplica armazenada.

A Fig. 12-21 mostra a réplica armazenada, o sinal sem ruído recebido e sua função correlação cruzada correspondente para os dados apresentados na Fig. 12-20. A Fig. 12-22 exhibe o resultado para um sinal com ruído, com amplitude de ruído igual a um.

| | | | | | | | | | | | |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|--------------------------------------|--------------------------------|---------------|-------------|------------------------------|--------|---------|--------|-------|
| A19 | =IMPROD(IMCONJ(A11),A17) | | | | | | | | | | |
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
| 1 | CORRELCRUZ.XLS | | Correlação Cruzada via FFT e sem FFT | | | | | | | | |
| 2 | Capítulo 12 | | O CÁLCULO MANUAL ESTÁ ATIVADO | | | | | | | | |
| 3 | | Relatórios | Deslocamento: | 36 | Valor Máximo: | 1 | MAIS: pressione a tecla PgDn | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | |
| 5 | Insira a amplitude do ruído: | | 1 | Pressione a Tecla de Função F9 | | | | | | | |
| 6 | Tempo: | | | | | | | | | | |
| 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| 8 | Réplica Armazenada: | | | | | | | | | | |
| 9 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 10 | FFT da Réplica Armazenada: | | | | | | | | | | |
| 11 | 0.9604816 0.84476766246 0.6611372 0.4225953407265 0.14575863415 -0.1505 -0.446939 -0.724967 -0.968736 -1.1661 | | | | | | | | | | |
| 12 | Sinal Recebido sem Ruído: | | | | | | | | | | |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 14 | Sinal Recebido com Ruído: | | | | | | | | | | |
| 15 | -0,17871805 | -0,03559 | -0,333916541 | -0,183 | -0,292172259 | -0,21242526 | -0,02 | -0,277 | -0,0763 | 0,0892 | 0,199 |
| 16 | FFT do Sinal Recebido com Ruído: | | | | | | | | | | |
| 17 | -0,5210201 -0,5278663029 1,1497396 -0,526722768864 -0,85913152136 1,36694 -0,158639 -1,382683 1,1985794 0,5882 | | | | | | | | | | |
| 18 | =IMPROD(IMCONJ(linha11),linha 17): | | | | | | | | | | |
| 19 | 0,2025514 -1,0618357447 0,7348116 1,0900960733605 -1,48458960751 -0,7772 2,2120719 -2,437390 -2,511183 1,0001 | | | | | | | | | | |
| 20 | IFFT do IMPROD: | | | | | | | | | | |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 22 | Função Correlação Cruzada Normalizada =IMREAL de IFFT: | | | | | | | | | | |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 24 | Detector de Pico: | | | | | | | | | | |
| 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 26 | | | | | | | | | | | |
| 27 | As linhas a seguir são usadas para traçar gráficos: | | | | | | | | | | |
| 28 | Linha 7 + 5: | | | | | | | | | | |
| | CORRELACÃO CRUZADA / ESPECTRO CRUZADO / APLICAR CORRELACÃO | | | | | | | | | | |

Fig. 12-20 Tela inicial da planilha CORRELCRUZ da pasta de trabalho de mesmo nome. Note os relatórios nas células D3 e G3. O sinal sem ruído recebido tem uma função de correlação cruzada com o máximo de 1 no deslocamento de tempo 36. Observe o uso das funções de planilha IMPROD e IMCONJ para calcular a densidade espectral de potência cruzada (DEPX).

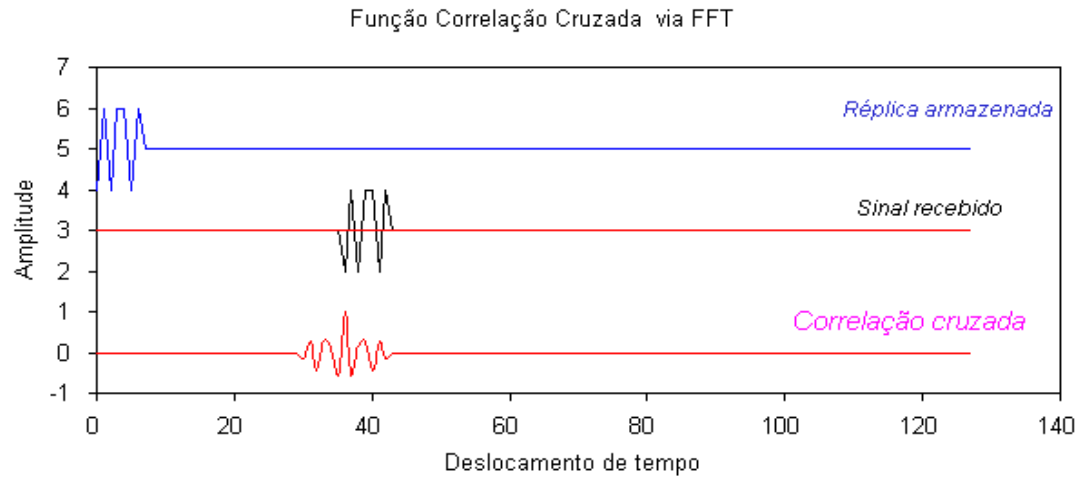


Fig. 12-21 Réplica armazenada, sinal recebido e função de correlação cruzada. Observe que o instante de chegada de sinal é assinalado pelo pico da função correlação-cruzada.

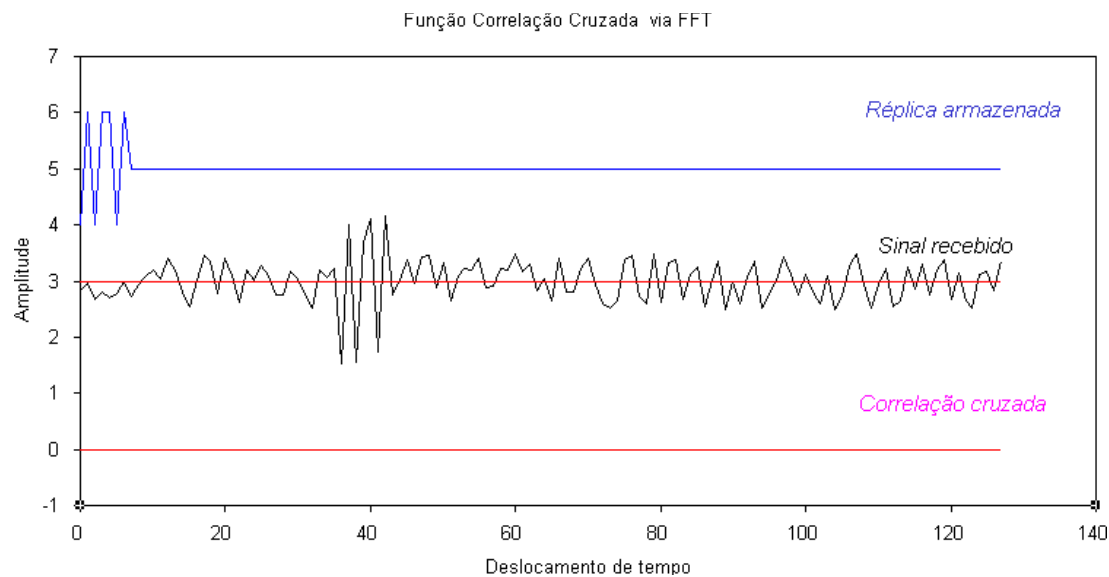


Fig. 12-22 Réplica armazenada, sinal recebido e função de correlação cruzada. Observe que o instante de chegada de sinal é assinalado por um valor de pico forte e estável da função correlação-cruzada mesmo quando o sinal real está mergulhado em ruído.

12.12 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

O que É?

Esta é uma maneira de determinar o coração e a alma de um sistema linear, isto é, sua função de sistema e a sua resposta ao impulso. Apresentamos anteriormente a identificação de sistemas na Eq. (12-25) e vamos reescrevê-la aqui por comodidade:

$$H(\omega) = \frac{F_{saída}(\omega)}{F_{ent}(\omega)}. \quad (12-45)$$

Vamos examiná-la mais detalhadamente. A Eq. (12-45) parece bastante simples e funciona em muitos casos. Aplique um sinal de teste de sua própria escolha, assim conhecerá o espectro

complexo de entrada $F_{ent}(\omega)$. Meça então o espectro complexo da resposta do sistema $F_{saída}(\omega)$ e efetue a divisão dos números complexos indicada para obter $H(\omega)$.

A identificação de sistemas é como a quebra do segredo de um cofre. O perito em fazer isso gira o dial aleatoriamente (sinal de teste) enquanto escuta e sente a resposta do sistema de travamento (saída do sistema). Use a identificação para o bem, não para o mal.

O que Ela Faz?

Há uma dificuldade potencial com esse procedimento simples, porque a existência de algum zero no espectro de entrada fará

com que o valor da Eq. (12-45) cresça sem limites. Isso parece eliminar o uso de pulsos como sinais de teste porque eles possuem muitos zeros. Apesar de a divisão indicada parecer perigosa, considerando sinais discretos e a inevitável presença de ruído a chance de atingir um zero perfeito no mundo real é muito pequena. Por motivos de segurança, você pode adicionar uma pequena dose de ruído com espectro $N(\omega)$ ao sinal de teste:

$$H(\omega) = \frac{F_{saída}(\omega)}{F_{ent}(\omega) + N(\omega)}. \quad (12-46)$$

Esta é basicamente a idéia do filtro inverso de Wiener, deduzido por Norbert Wiener como deconvolução ótima ou filtro inverso. Aqui a expressão *ótima* é usada no sentido do valor mínimo quadrado. A Eq. (12-46) parecer ser uma coisa razoável a ser feita, mas não há indicação aqui de que constitua um ótimo de alguma forma. É bom saber se tal idéia simples é realmente a melhor ao menos do ponto de vista de mínimos quadrados.

Ora, se a Eq. (12-46) é tão boa, porque há necessidade de $F_{ent}(\omega)$? Ele não se comportaria exatamente como um ruído não-

aleatório adicional? A resposta é: não precisamos de $F_{ent}(\omega)$ e podemos utilizar o ruído aleatório como um sinal de teste perfeitamente adequado. Constitui uma boa idéia utilizar muitas amostras de ruído, realizar muitas medidas e fazer a média dos conjuntos estatísticos. Se não houver outros erros presentes, então o erro em $H(\omega)$ será proporcional à raiz quadrada do número de medidas. O espectro do ruído deverá ter uma largura de faixa pelo menos tão grande quanto a largura de faixa da função de sistema.

Uma alternativa à Eq. (12-45) utiliza a densidade espectral de potência e a densidade espectral de potência cruzada. Multiplique numerador e denominador da Eq. (12-45) pelo conjugado complexo do espectro de saída e obterá:

$$H(\omega) = \frac{F_{saída}(\omega)}{F_{ent}(\omega)} \frac{F_{saída}^*(\omega)}{F_{saída}^*(\omega)} = \frac{|F_{saída}(\omega)|^2}{F_{ent}(\omega) F_{saída}^*(\omega)} \quad (12-47)$$

Pode-se adicionar um espectro de potência de ruído ao denominador, ou simplesmente o denominador poderia ser a densidade espectral cruzada do ruído de entrada e do ruído de saída. Lembre-se de que o numerador é real e o denominador é complexo.

12.13 PASTA DE TRABALHO IDENTIF-SISTEMA

A Fig. 12-23 mostra a tela inicial da pasta de trabalho IDENTIF-SISTEMA que lhe permite experimentar a identificação de sistemas usando a FFT. O sistema desconhecido da planilha tem uma resposta exponencial ao impulso, semelhante à do circuito RC (veja Seção

12.1). A função de sistema calculada com base na resposta ao impulso está mostrada na Fig. 12-24 e sua resposta ao impulso associada é exibida na Fig. 12-25. A diferença entre a resposta ao impulso real e a resposta ao impulso calculada está mostrada na Fig. 12-26.

| A18 =IMDIV(A16;A10) | | | | | | | | | | |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
| 1 | IDENTIF SISTEMAS.XLS IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS VIA FFT | | | | | | | | | |
| 2 | Capítulo 12 | MAIS: pressione a tecla PgDn | | | | | | | | |
| 3 | Tempo: | | | | | | | | | |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | Sinal de Entrada (Sinal 1): (Observação: a função Delta está atualmente na Linha 6) | | | | | | | | | |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | Sinal de Entrada com deslocamento de Nyquist (Sinal 1): | | | | | | | | | |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | FFT da linha 8, Espectro de Entrada S1: | | | | | | | | | |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | Sinal de Saída (Sinal 2): | | | | | | | | | |
| 12 | 1 | 0,904837418 | 0,818731 | 0,740818 | 0,67032 | 0,606531 | 0,548812 | 0,496585 | 0,449329 | 0,40657 |
| 13 | Sinal de Saída com deslocamento de Nyquist (Sinal 2): | | | | | | | | | |
| 14 | 1 | -0,904837418 | 0,818731 | -0,74082 | 0,67032 | -0,60653 | 0,548812 | -0,49659 | 0,449329 | -0,40657 |
| 15 | FFT da linha 14, Espectro de Saída S2: | | | | | | | | | |
| 16 | 0,52497773 | 0,52499275382 | 0,52503787 | 0,52511331 | 0,52521943 | 0,5253567E | 0,5255259E | 0,52572787 | 0,5259635C | 0,5262340E |
| 17 | Função de Sistema Recuperada H(f) = S2/S1: | | | | | | | | | |
| 18 | 0,52497773 | 0,52499275382 | 0,52503787 | 0,52511331 | 0,52521943 | 0,5253567E | 0,5255259E | 0,52572787 | 0,5259635C | 0,5262340E |
| 19 | Magnitude de H(f): | | | | | | | | | |
| 20 | 0,524978 | 0,525135504 | 0,525609 | 0,5264 | 0,527511 | 0,528946 | 0,530707 | 0,532802 | 0,535236 | 0,538017 |
| 21 | Fase (graus) de H(f): | | | | | | | | | |
| 22 | 0 | 1,33598196 | 2,671879 | 4,007607 | 5,34308 | 6,678211 | 8,01291 | 9,347088 | 10,68065 | 12,0135 |
| 23 | IFFT de H(f) Linha 18: | | | | | | | | | |
| 24 | 1 | -0,90483741803 | 0,81873075 | -0,7408182 | 0,67032004 | -0,6065306 | 0,54881163 | -0,4965853 | 0,4493289E | -0,4065696 |

Fig. 12-23 Tela inicial da planilha IDENTIF-SISTEMA da pasta de trabalho de mesmo nome. O sinal de teste de entrada na linha 6 é uma função delta (impulso). Note o uso da função de planilha IMDIV na linha 10 para calcular a função de sistema empregando o método expresso na Eq. (12-45). Clique no ícone para ativar este arquivo.

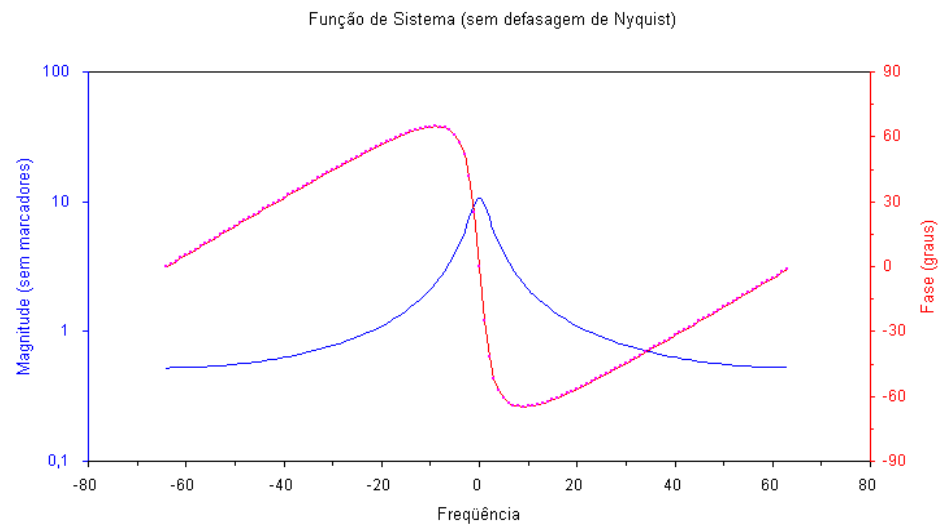


Fig. 12-24 $H(\omega)$ calculado usando dois pulsos aplicados ao sistema desconhecido. O resultado da utilização da FFT produz erros em ambas as extremidades do espectro por causa da periodicidade imposta pela FFT. Observe como a fase tende a zero nas extremidades.

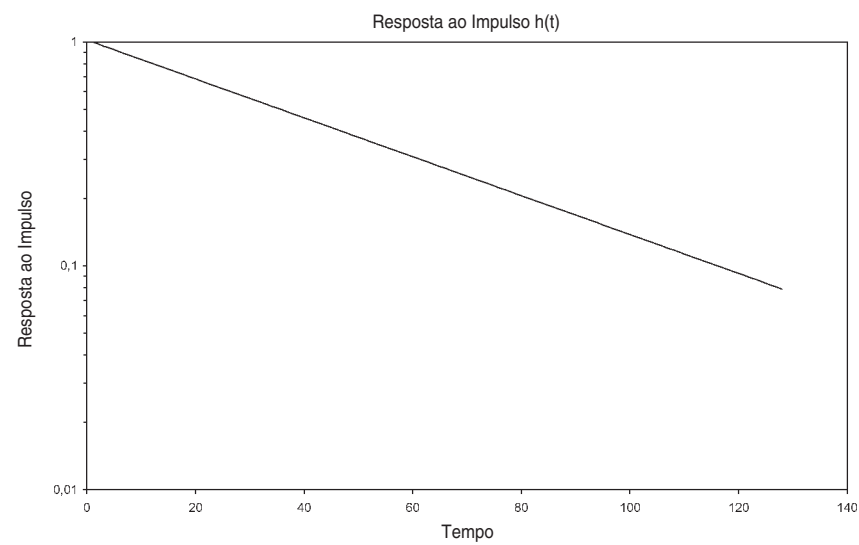


Fig. 12-25 $h(t)$ calculado usando a IFFT dos dados da Fig. 12-24; observe a excelente característica exponencial. Veja na Fig. 12-26 os erros deste cálculo.

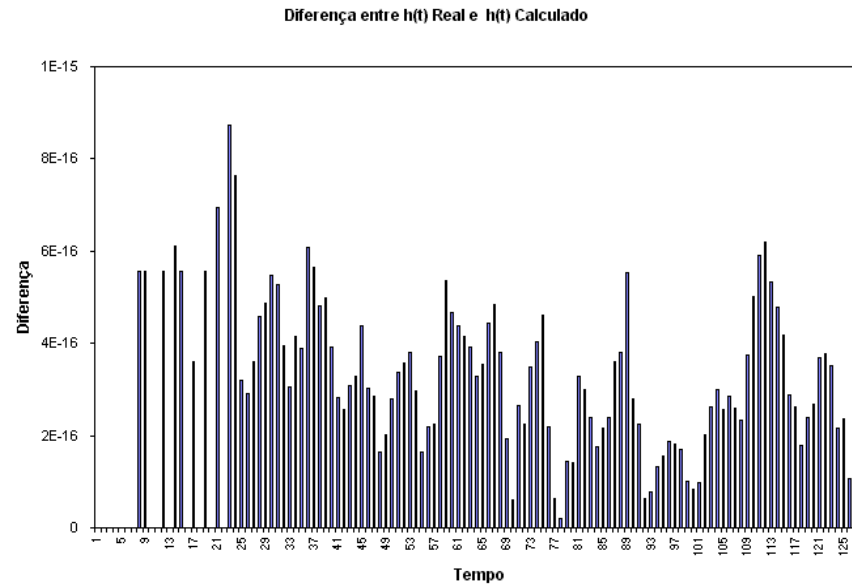


Fig. 12-26 Diferença entre as respostas ao impulso real e calculada. Com erros de algumas partes em 10^{15} , esses resultados são muito bons, considerando todo o procedimento envolvido.

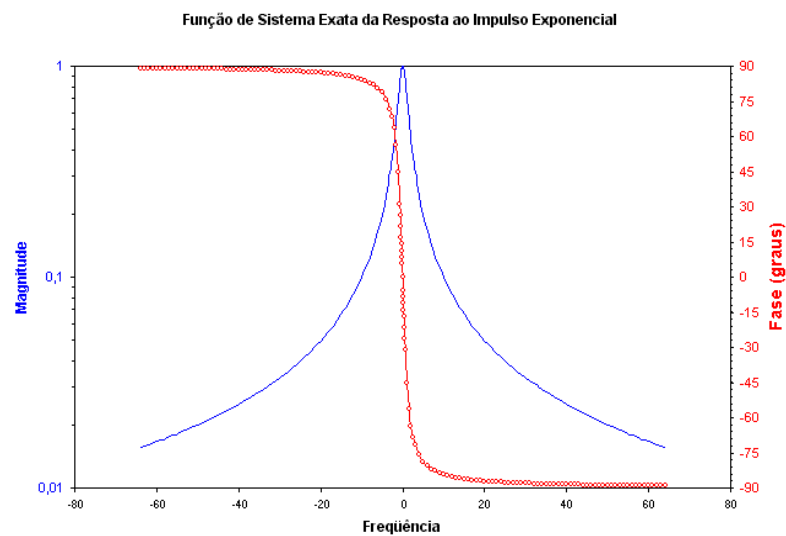


Fig. 12-27 Função de sistema exata. Compare as formas nas extremidades do espectro com os resultados da FFT da Fig. 12-24 (as fases obtidas com a FFT apresentam erros consideráveis nas extremidades do espectro).

12.14 FUNÇÃO COERÊNCIA

O que É?

A função coerência fornece uma medida quantitativa das faixas de frequência compartilhadas por dois sinais. Em outras palavras, a função coerência é grande quando os dois sinais têm potência na mesma frequência e é muito pequena quando somente um dos sinais tem potência nessa frequência. Isso soa familiar; a densidade espectral de potência cruzada e a função coerência possuem propriedades semelhantes. O quadrado da magnitude da função coerência é frequentemente a forma mais útil.

A função de coerência relaciona-se com a densidade espectral de potência (DEP) e com a densidade espectral de potência cruzada (veja Seção 11.17); a função coerência pode ser obtida como um subproduto natural de outros cálculos baseados em espectros. O quadrado da magnitude da função coerência $\gamma^2(\omega)$ é definida como:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|F_{1,2}(\omega)|^2}{F_{1,1}(\omega)F_{2,2}(\omega)} \quad (12-48)$$

onde $F_{1,2}(\omega)$ o espectro mútuo de potência de dois sinais e $F_{1,1}(\omega)$ e $F_{2,2}(\omega)$ são os espectros próprios de potência dos sinais 1 e 2. A função coerência é calculada facilmente junto com a função correlação cruzada. Observe que a Eq. (12-48) pode crescer sem limites nas frequências para as quais o denominador tenha valor nulo;

os ruídos dos sinais habitualmente evitam isso. Essas coisas se tornarão mais claras ao explorar a planilha COERÊNCIA-SNR.

A Eq. (12-48) é com frequência conhecida como QMC, *quadrado da magnitude da coerência*. Utilizaremos essa equação na pasta de trabalho COERÊNCIA (veja Seção 12.16).

O que Ela Faz?

A função QMC tem um valor na faixa de 0 a 1. Se a saída de um sistema linear for devida somente à entrada então $QMC = 1$. Se a saída do sistema não possuir relação causal com a entrada então $QMC = 0$. A função coerência com um valor maior que zero e menor que um indica uma das seguintes situações:

- está presente uma fonte de ruído desconhecida ou uma interferência.
- o sistema que liga a entrada à saída envolve não-linearidade.
- a saída é devida a uma ou mais entradas além da entrada conhecida. Isso é importante como medida do acoplamento mútuo.

Ocasionalmente, erros aleatórios podem produzir um valor maior que 1. A função QMC é usada no cálculo da função SNR (relação sinal-ruído), definida como $SNR(\omega) = \gamma^2(\omega)/[1 - \gamma^2(\omega)]$. Isso é usado na pasta de trabalho COERÊNCIA.

12.15 FUNÇÃO SNR

O que É?

A função SNR (relação sinal-ruído) é uma simples extensão da função QMC. A função SNR é uma função da frequência, *não* o valor usual S/N expresso por um único número. A função SNR é definida como:

$$SNR(\omega) = \frac{\gamma^2(\omega)}{1 - \gamma^2(\omega)} \quad (12-49)$$

Observe que a função SNR pode crescer sem limites quando γ^2 estiver próximo do valor 1. Geralmente isso não é um problema com sinais do mundo real em virtude de as medidas virem acompanhadas de ruído aleatório.

O que Ela Faz?

A função SNR fornece a relação de potência sinal/ruído em cada frequência. Isso pode ser um parâmetro muito útil.

12.16 PASTA DE TRABALHO COERÊNCIA

A Fig. 12-28 mostra a tela inicial da pasta de trabalho COERÊNCIA, que contém as funções QMC e SNR. Para simplificar esse exemplo não utiliza uma janela de dados. Você pode usar uma janela de dados (von Hann, por exemplo, veja a Seção 11.10) para reforçar a resolução de frequência. A planilha da Fig. 12-28 tem diversos truques que você poderá utilizar mais tarde nas planilhas que vier a elaborar. Insira as frequências dos sinais nas células E4 e E5. O sinal 1 é uma senóide de amplitude exponencialmente decrescente sem ruído e o sinal 2 é uma senóide com ruído. A amplitude do ruído do sinal 2 é inserida na célula E6; veja na barra de fórmulas a expressão do conteúdo da célula H12 para ver como isso é feito. Os relatórios são dados nas células J4:J7.

As Figs. 12-29 e 12-30 mostram as formas de onda e os espectros. Experimente usar sinais sem a janela de dados e compare a resolução de frequência com a da janela em uso. Recalcule

sempre a FFT e a IFFT usando a caixa de diálogo Análise de Fourier, ou escreva uma macro para efetuar isso. As Figs. 12-31 e 12-32 mostram as funções QMC e SNR correspondentes.



Dicas

Pressionando a tecla de função F9 você pode mudar a amostra de ruído, mantendo a mesma estatística. Se você quiser manter a *amostra de ruído idêntica* em todos os cálculos, converta as amostras de ruído aleatório da fórmula usando ALEATÓRIO() em Valores. Para fazer isso, use as funções [Copiar][Colar Especial][Valores] em toda a sequência.

Vamos examinar a pasta de trabalho COERÊNCIA mais detalhadamente. A Tabela 12-2 mostra a elaboração.

| | | | | | | | | | | | |
|-----|-----------------------------------------------------------------|-------------|--------------------------------------------|-------------|----------------|------------------------------|------------|-------------|-------------|-----------|-------------|
| A37 | =A33^2/(A14*A25)/1024 | | | | | | | | | | |
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
| 1 | COERÊNCIA.XLS | | Funções QMC e SNR | | | MAIS: pressione a tecla PgDn | | | | | |
| 2 | Capítulo 12 | | (QMC = Quadrado da Magnitude da Coerência) | | | | | | | | |
| 3 | RELATÓRIOS: | | SNR Máx: 2,136 | | QMC Máx: 0,681 | | | | | | |
| 4 | | | dB: 3,296 | | Na Freq: 16 | | (centrado) | | | | |
| 5 | Tempo: | | | | | | | | | | |
| 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 7 | Sinal 1: | | | | | | | | | | |
| 8 | 0 | 0,707107 | 1 | 0,707107 | 1,23E-16 | -0,70711 | -1 | -0,70711 | -2,5E-16 | 0,707107 | 1 |
| 9 | Janela de von Hann aplicada com Defasagem de Nyquist ao Sinal 1 | | | | | | | | | | |
| 10 | 0 | -0,00043 | 0,002408 | -0,00383 | 1,18E-18 | 0,010596 | -0,02153 | 0,020667 | -9,3E-18 | -0,03394 | 0,059039 |
| 11 | FFT of Sinal 1: | | | | | | | | | | |
| 12 | 2,70908E-0 | -2,88192E-5 | 2,552E-08 | -6,41348E-2 | 3,2307E-0 | -4,68066E-4 | -2,7941E-0 | -9,43732E-4 | -2,65884E-1 | 2,5989E-0 | -1,21684E-1 |
| 13 | Magnitude do Espectro, Sinal 1: | | | | | | | | | | |
| 14 | 2,71E-08 | 4,06E-08 | 9,46E-08 | 1,13E-07 | 8,15E-08 | 1,44E-07 | 3,27E-08 | 1,77E-07 | 4,75E-08 | 1,31E-07 | 1,32E-07 |
| 15 | Espectro, Sinal 1, dB | | | | | | | | | | |
| 16 | -151,344 | -147,82 | -140,482 | -138,922 | -141,772 | -136,835 | -149,712 | -135,026 | -146,469 | -137,662 | -137,578 |
| 17 | | | | | | | | | | | |
| 18 | Sinal #2: | | | | | | | | | | |
| 19 | -1,49962 | 1,940304 | -0,60188 | 3,118789 | -2,82607 | 1,551106 | -1,87048 | 1,845776 | -1,57975 | 3,42487 | 1,980089 |
| 20 | Janela de von Hann aplicada com Defasagem de Nyquist ao Sinal 2 | | | | | | | | | | |
| 21 | 0 | -0,00117 | -0,00145 | -0,01688 | -0,02715 | -0,02324 | -0,04027 | -0,05395 | -0,06013 | -0,16441 | 0,116903 |
| 22 | FFT do Sinal 2: | | | | | | | | | | |
| 23 | 10,1075 | -3,52203-3 | -4,75677+4 | 1,59893-0,7 | -1,06301+4 | 13,8195-4 | -15,1702-5 | 7,88202+10 | -10,9645-2 | 7,29791-6 | 3,19387+4 |
| 24 | Magnitude do Espectro, Sinal 2: | | | | | | | | | | |
| 25 | 10,1075 | 5,135538 | 6,861723 | 1,756913 | 4,776908 | 14,47881 | 16,19703 | 12,93054 | 11,31077 | 9,648511 | 5,925705 |
| 26 | Espectro, Sinal #2, dB | | | | | | | | | | |

Fig. 12-28 Tela inicial da planilha COERÊNCIA da pasta de trabalho de mesmo nome. Note os relatórios das funções SNR e QMC nas células D3:D4 e G3:G4. A fórmula mostrada na célula A37 calcula a função QMC na linha 37, usando a Eq. (12-48). O fator de normalização da função QMC, que aqui tem 128 pontos de dados, é 1024.

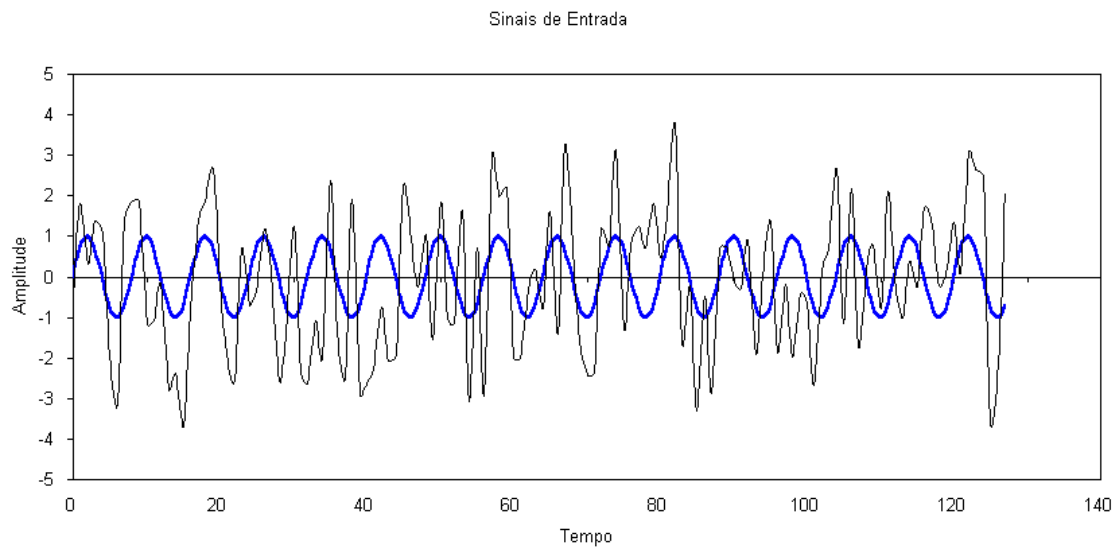


Fig. 12-29 Esses dois sinais aparentam ter pouca ou nenhuma coerência. *Linha espessa*: Sinal 1. *Linha fina*: Sinal 2, com ruído (veja a Fig. 12-28, linha 19).

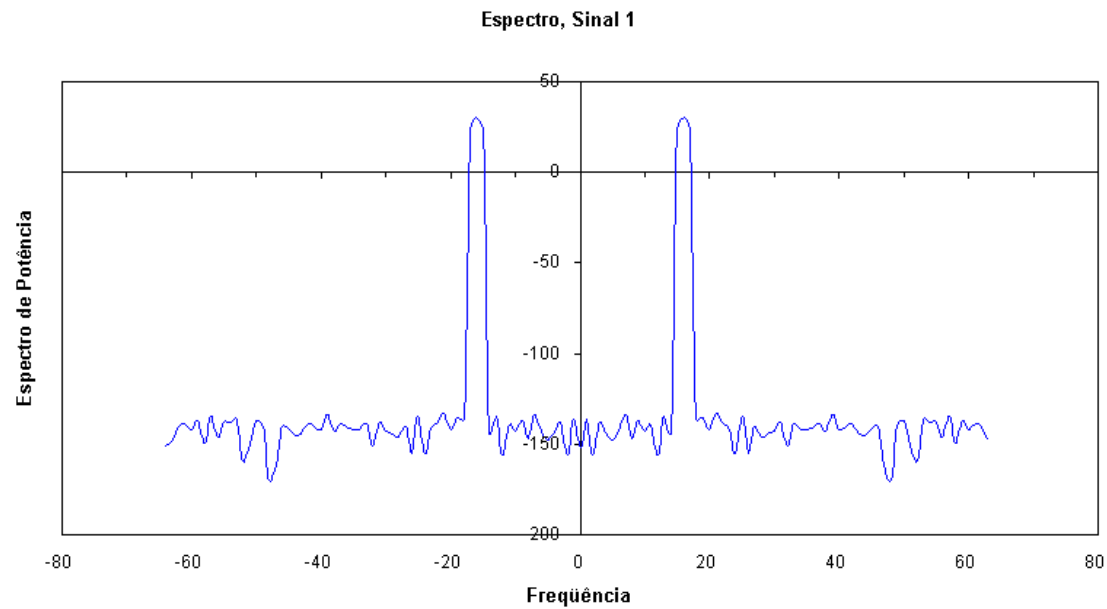


Fig. 12-30 Espectro do sinal 1 — onda senoidal. Note a largura de faixa estreita, como era de se esperar de um sinal senoidal. A janela de Von Hann reduziu o vazamento de espectro. Os parâmetros do sinal estão mostrados na linha 8 ao clicar no ícone da esquerda na Fig. 12-28.

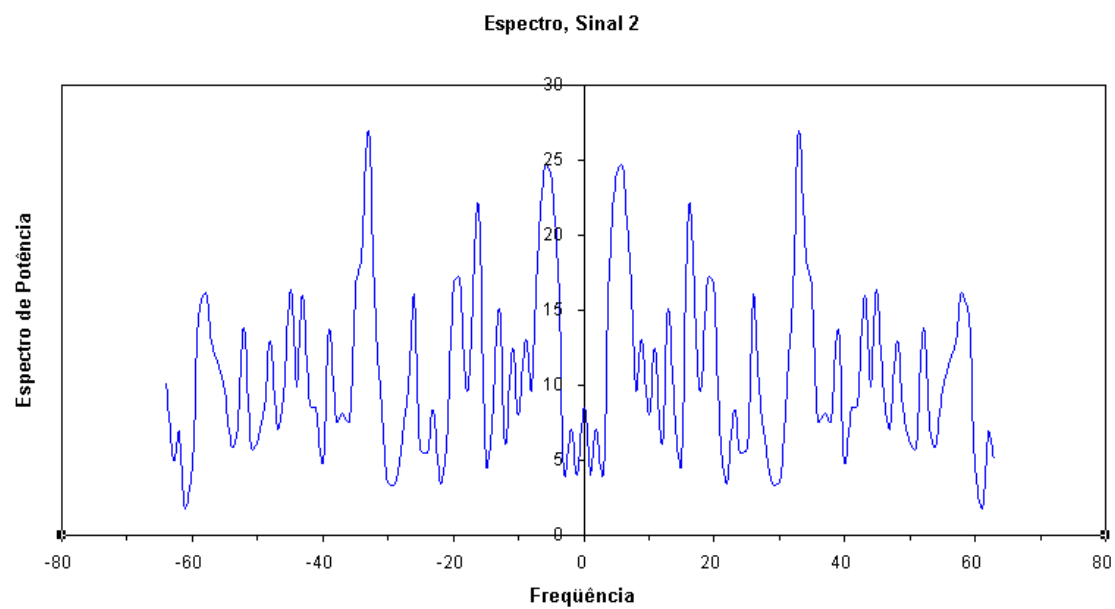


Fig. 12-31 Espectro do sinal 2 — onda senoidal com ruído. Esse sinal tem a mesma frequência do Sinal 1, mas está imerso em ruído e é não-observável. Este espectro muda para cada nova amostra de ruído. Os parâmetros do sinal estão mostrados na linha 8 ao clicar no ícone da esquerda na Fig. 12-28.

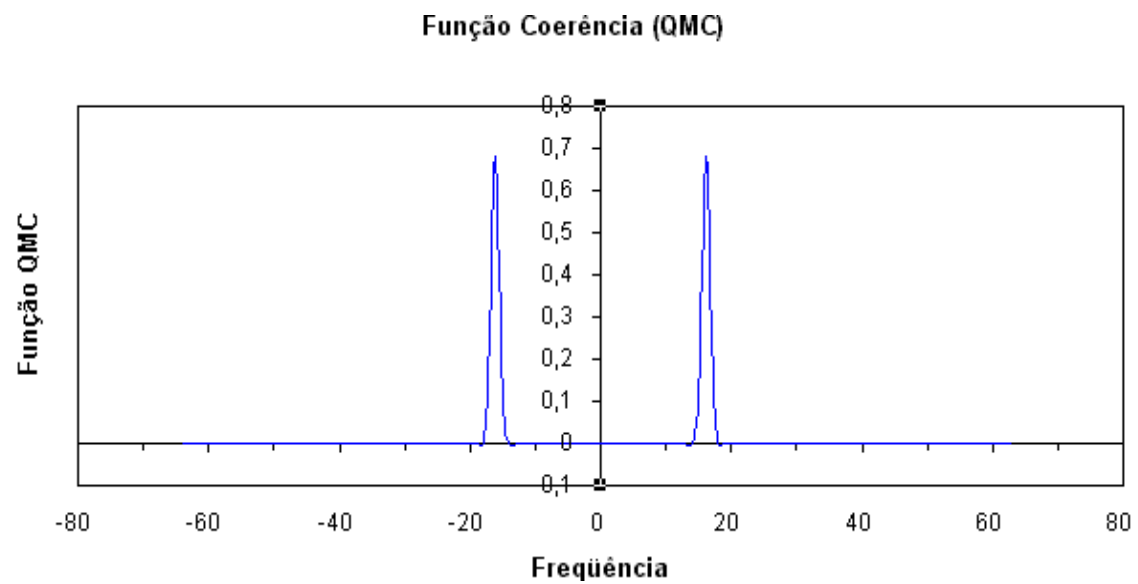


Fig. 12-32 Função QMC para os sinais das Figs. 12-30 e 12-31. Essa é uma boa evidência da existência de uma coerência de largura de faixa estreita.

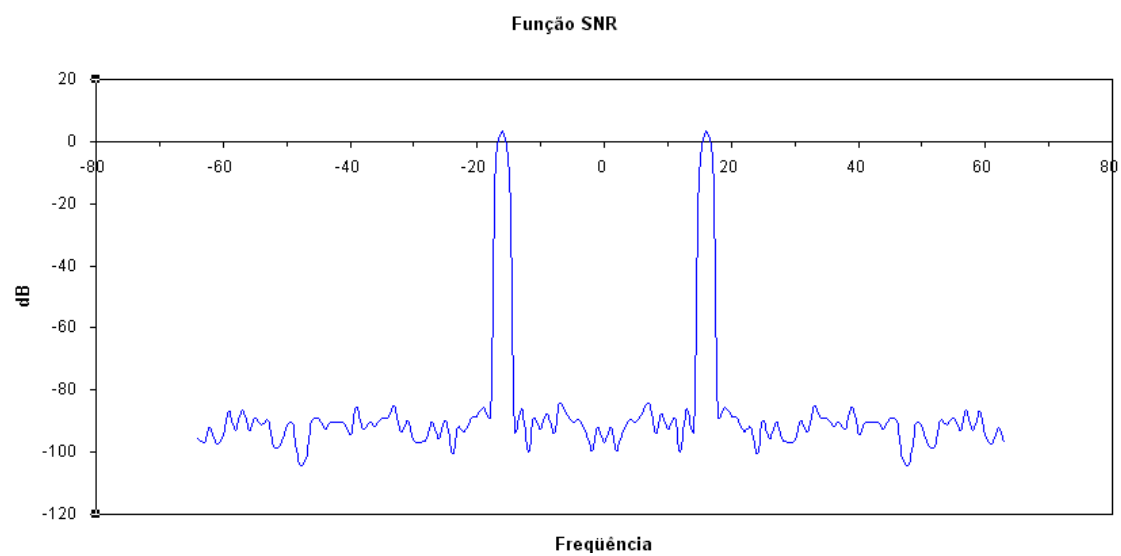


Fig. 12-33 Função SNR para os sinais das Figs. 12-30 e 12-31. A SNR é grande onde os sinais compartilham frequências. Note que a função SNR está acima de 0 dB nesta faixa estreita de frequências.

| TABELA 12-2 Pasta de Trabalho COERÊNCIA | | | |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| Célula | Fórmula | Finalidade | Instruções |
| D3 | =MÁXIMO(A39:DX39) | Relata o valor máximo de SNR | |
| D4 | =MÁXIMO(A41:DX41) | Relata o valor máximo de SNR em dB | |
| G3 | =MÁXIMO(A37:DX37) | Relata o valor máximo do QSC | |
| G4 | =MÁXIMO(A45:BL45) | Relata a frequência do valor máximo do QSC | |
| A6 | 0 | Primeiro ponto do eixo dos tempos | Preencher A6:DX6 |
| A8 | =SEN(2*PI()*A6/8) | Gera o sinal 1 | Copia A8:DX8 |
| A10 | =A8*(0,5-0,5*COS(A6*2*PI()/128))*COS(PI()*A6) | Janela de Von Hann | Copia A10:DX10 |
| A12 | FFT do sinal 1 | FFT de 128 pontos | Automático |
| A14 | =IMABS(A12) | Magnitude do sinal 1 | Copia A14:DX14 |
| A16 | =20*LOG(A14) | Magnitude do sinal 1 em dB | Copia A16:DX16 |
| A19 | =SEN(2*PI()*A6/8)+ALEATÓRIO()*6-3 | Gera o sinal 2 | Copia A19:DX19 |
| A21 | =A19*(0,5-0,5*COS(A6*2*PI()/128))*COS(PI()*A6) | Janela de Von Hann e filtro de Nyquist aplicados ao sinal 2 | Copia A21:DX21 |
| A23 | FFT da linha 22 | FFT do sinal 2 | Automático |
| A25 | =IMABS(A23) | Magnitude do espectro do sinal 2 | Copia A25:DX25 |
| A27 | =20*LOG(A25) | Espectro do sinal 2 em dB | Copia A27:DX27 |
| A31 | =IMPROD(IMCONJ(A12),A23) | Espectro de potência cruzado | Copia A31:DX31 |
| A33 | =IMABS(A31) | Magnitude do espectro de potência cruzado | Copia A33:DX33 |
| A37 | =A33^2/(A14*A25)/1024 | Função coerência | Copia A37:DX37 |
| A39 | =A37/(1-A37) | Função SNR | Copia A39:DX39 |
| A41 | =10*LOG(A39) | Função SNR em dB | Copia A41:DX41 |
| A43 | -64 | Extremidade esquerda do eixo de frequências centrado | Use [Editar][Preencher] até DX43 |
| A45 | =SE(BM39=\$D\$3;BM43;0) | Detector de pico | Copia A45:DX45 |

O QUE VEM EM SEGUIDA?

Agora que você domina os conhecimentos fundamentais, você pode usar o EXCEL em seus cursos de formação acadêmica e até mesmo em sua vida diária. O EXCEL é tão poderoso e tão versátil que há muito mais a ser aprendido, incluindo os recursos do

Solver, do Atingir Meta, da análise estatística de dados e do Visual Basic for Applications (VBA). Quem sabe o que estará contido nas futuras versões do EXCEL?

REFERÊNCIAS

R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications* (McGraw-Hill, New York, 1965).

E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, (Prentice-Hall 1988).

D. C. Champeney, *Fourier Transforms and Their Physical Applications* (Academic Press, New York, 1973).

P. R. Griffiths and G. Pariente, “Deconvolution,” *Trends in Analytical Chemistry* **5**, No. 8, (1986).

F. J. Harris, “On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform,” *Proc. IEEE* **66**, 51–83 (1978).

P. Jansson, *Deconvolution of Images and Spectra*, (Academic Press, New York 1997).

A. V. Oppenheim and R.W. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989).

A indústria de entretenimento é uma das forças propulsoras do processamento digital de sinais. Uma das empresas líderes é Pixar Animation Studios. Seu site na Web é: <http://www.pixar.com/>

A Industrial Light and Magic foi iniciada por George Lucas (*Guerra nas Estrelas*). O endereço na Web é: <http://www.lucasfilm.com/>

A Society of Motion Picture and Television Engineers (SMPTE) está na vanguarda de técnicas utilizadas neste capítulo, por conta de métodos digitais usados em filmes. O site é: <http://www.smppte.org/>

A indústria de áudio é uma grande usuária das técnicas de processamento digital de sinal. Acesse, por exemplo: <http://www.digido.com/homepage.html>

A Digital Domain criou os efeitos digitais do filme *Titanic*. Essa empresa foi fundada por James Cameron (diretor de *Titanic*), Scott Ross e Stan Winston. O endereço na Web é: <http://www.d2.com/>

A Manex Visual Effects produziu os efeitos surpreendentes especiais digitais do filme *Matrix* e de sua continuação: <http://www.mvfx.com/>

B. Schwarzschild, “Adaptive optics at the new 8-meter Gemini Telescope”, *Physics Today* **52** (9), 23 (1999) September. Este artigo trata da deconvolução usada para melhorar a nitidez de uma imagem da nebulosa planetária *BD +30 3639* obtida com aquele telescópio. A nebulosa com aproximadamente uma semana-luz de diâmetro está a cerca de 5000 anos-luz da Terra. Esse telescópio está instalado em Mauna Kea, no Havái. Um telescópio idêntico está instalado no Chile. São fornecidas referências adicionais.

TESTE SEUS CONHECIMENTOS

- 1. Modifique a pasta de trabalho CONVOLUÇÃO alterando a resposta ao impulso. (a) Use o decaimento exponencial com valores maiores e menores da constante de tempo. Observe os resultados utilizando um pulso retangular como sinal de entrada. Repita o trabalho com dois pulsos, um largo e um estreito.
- 2. Modifique a pasta de trabalho CONVOLTEMPO (Fig. 12-8) alterando o sinal de entrada. (a) Substitua o sinal de entrada por uma senóide. Observe os resultados de sinais senoidais de baixa e de alta frequência.
- 3. Modifique a pasta de trabalho CONVOLTEMPO (Fig. 12-8) alterando a resposta ao impulso para os valores mostrados a seguir:

| | | | | | | | | |
|----|--------|----|----|----|---|----|---|---|
| 5 | Tempo | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | $h(t)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | $h(t)$ | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

(Observação: esta resposta ao impulso produz uma saída que é a derivada da entrada. É um filtro passa-altas ou *detector de borda*.)

- 4. Teorema do Limite Central. Modifique as pastas de trabalho CONVOLUÇÃO e CONVOLTEMPO para executar cinco autoconvoluções consecutivas de um pulso retangular. A primeira convolução de um retângulo com um retângulo deve produzir um triângulo. Após isso, as convoluções se assemelham mais e mais a uma função gaussiana. (Para uma enorme classe de funções, o resultado de um número infinito de autoconvoluções é uma função gaussiana.)
- 5. Teorema do Limite Central, Parte II. Modifique a pasta de trabalho CONVOLUÇÃO para executar a autoconvolução de uma função “ $\text{sen}(x)/x$ ”. Você deve obter outra função “ $\text{sen}(x)/x$ ”. (Esta função não obedece ao Teorema do Limite Central.) Por quê? (Sugestão: considere a transformada de Fourier de “ $\text{sen}(x)/x$ ” que é uma função retangular. Como a convolução no domínio de frequência é simplesmente uma multiplicação, e a multiplicação de

- dois retângulos produz outro retângulo, logo a transformada de Fourier inversa é outra função “ $\text{sen}(x)/x$ ”.)
- 6. Modifique a pasta de trabalho DECONVOLVE para estudar os efeitos da deconvolução com erros na função de sistema. Use um pulso retangular como sinal. Altere a constante de tempo do decaimento exponencial para encurtar e alongar a verdadeira resposta ao impulso. Observe os erros na deconvolução identificados pela “inclinação” e pelo sentido da inclinação do pulso resultante da deconvolução.
- 7. Modifique a pasta de trabalho CORRELCRUZ usando uma réplica armazenada de sua escolha. Observe o seguinte: quanto maior a duração da réplica, tanto melhor o funcionamento da correlação cruzada em presença de ruído. Altere o instante de chegada do sinal e o nível de ruído.
- 8. Exercite a correlação cruzada de sinais sem ruído que não sejam *exatamente* iguais. Observe como a função correlação cruzada diminui à medida que a semelhança dos sinais diminui.
- 9. Modifique a pasta de trabalho IDENTIF-SISTEMA mudando o sinal de entrada. Por exemplo, substitua a função delta por um pulso retangular ou triangular. Quais os efeitos observados na função de sistema calculada?
- 10. Modifique a pasta de trabalho IDENTIF-SISTEMA substituindo o sinal de entrada por um ruído aleatório. Use a função de planilha ALEATÓRIO() para gerar o ruído de entrada. Para evitar que o ruído se altere a cada instante do cálculo, use as seguintes operações no sinal de ruído: aplique na sequência de ruído [Copiar][Colar Especial][Valores] e copie o ruído nas células originais. Isto manterá o ruído constante. Compare a função de sistema calculada com a obtida usando a função delta como sinal de entrada.
- 11. Modifique a pasta de trabalho COERÊNCIA para medir a coerência e a SNR de um sinal senoidal com um sinal senoidal exponencialmente amortecido de mesma frequência. O que você observa a respeito da largura de faixa da função coerência e da função SNR à medida que você altera o amortecimento do sinal senoidal?