

Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)

Лабораторная работа по общему курсу физики

**Отчёт о выполнении лабораторной работы**  
**1.3.2**

**Определение модуля сдвига при помощи  
крутильных колебаний.**

Засимов Георгий Алексеевич  
Группа Б01-109

Долгопрудный  
2021

## 1. Аннотация

В данной работе находим модули кручения и сдвига по крутильным колебаниям проволоки с грузами. Исследуем зависимость расстояния от оси вращения до грузов от периода колебаний. Сравниваем полученное значение с табличным и определяем материал проволоки.

## 2. Теоретические сведения и методика измерений

При закручивании цилиндрических стержней круглого сечения распределение деформаций и напряжений одинаково по длине стержня только вдали от мест где прикладываются закручивающие моменты. Для этих областей можно считать, что каждое поперечное сечение поворачивается как жесткое. Возникающее при этом напряженное состояние - чистое кручение. Рассматриваем тонкие кольца части цилиндра бесконечно малой длины  $dl$ , образующая которого наклоняется на малый угол  $\alpha$ , а верхнее сечение смещается на  $d\phi$  относительно нижнего. Касательное напряжение  $\tau = G\alpha$  зависит от модуля сдвига  $G$ .

Связь приложенного момента сил  $M$  и угла поворота поперечных сечений цилиндра  $\phi$ , находящихся на расстоянии  $l$  имеет вид:

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2l} \phi = f \phi \quad (1)$$

где  $f$  - модуль кручения:

$$f = \frac{\pi R^4 G}{2l} \quad (2)$$

### 3. Оборудование и экспериментальные погрешности

#### 3.1. Экспериментальная установка и методика измерений

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. (П - проволока, С - стержень, Г - груз).

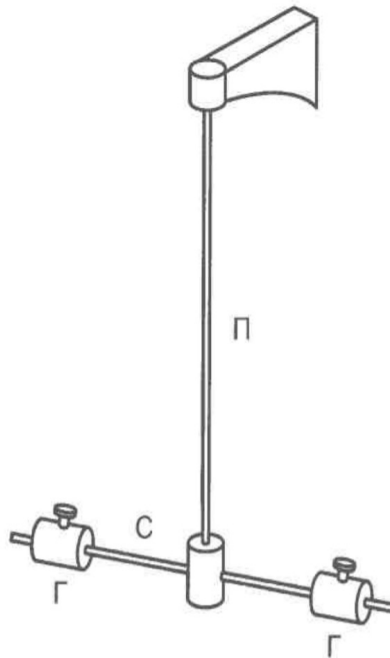


Рис. 1. Экспериментальная установка.

Вращение стержня с грузами описывается уравнением ( $I$  - момент инерции стержня с грузами,  $\phi$  - угол поворота стержня от положения равновесия,  $M$  - момент сил):

$$I \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -M \quad (3)$$

Получим уравнение гармонических колебаний из (??) (??) (обозначим  $\omega^2 = \frac{f}{I}$ ):

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega^2\phi = 0 \quad (4)$$

Его решение имеет вид:

$$\phi = \phi_0 \sin(+\theta) \quad (5)$$

где амплитуда  $\phi$  и фаза  $\theta$  определяются начальными условиями.

Период колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}} \quad (6)$$

Данные формулы верны для незатухающих колебаний.

### 3.2. Погрешности измерений

В данной работе используем линейку для нахождения длины проволоки ( $\sigma_L = 10 \text{ mm}$ ) и расстояния от стержня до грузов ( $\sigma_l = 0,5 \text{ mm}$ ), штангенциркулем для длин и диаметров цилиндров ( $\sigma_{sh} = 0,1 \text{ mm}$ ), микрометром для диаметра проволоки ( $\sigma_{mk} = 0,01 \text{ mm}$ ), весами для определения масс грузов ( $\sigma_m = 0,1 \text{ g}$ ) и секундомером для определения времени колебаний ( $\sigma_t = 0,1 \text{ c}$ ).

Полученные значения с соответствующими погрешностями:

$$m_1 = 377,6 \pm 0,1 \text{ g} (\varepsilon = 0,03\%)$$

$$m_2 = 373,4 \pm 0,1 \text{ g} (\varepsilon = 0,03\%)$$

$$l_1 = 48 \pm 0,5mm(\varepsilon = 1\%)$$

$$l_2 = 49 \pm 0,5mm(\varepsilon = 1\%)$$

$$L = 173,8 \pm 1cm(\varepsilon = 0,6\%)$$

$$d = 2,44 \pm 0,01mm(\varepsilon = 0,4\%)$$

=>

$$R = 1,22 \pm 0,01mm(\varepsilon = 0,8\%)$$

#### **4. Результаты измерений и обработка данных**

Результаты измерений времени колебаний стержня с грузами в зависимости от положения грузов относительно стержня с соответствующими значениями периода колебаний приведены в таблице 1.

l, см	N, шт	t, с	T, с
12,83	15	64,47	4,2980
12,83	15	63,84	4,2560
12,83	15	63,94	4,2627
10,33	17	62,1	3,6529
10,33	17	62,22	3,6600
10,33	17	62,56	3,6800
8,33	20	63,16	3,1580
8,33	20	62,69	3,1345
7,33	21	60,81	2,8957
7,33	21	60,56	2,8838
5,43	26	62,34	2,3977
5,43	26	62,25	2,3942
4,03	30	62,78	2,0927
4,03	30	62,71	2,0903

Таблица 1. Результаты измерений.

Построим график зависимости квадрата расстояния от стержня до центра масс грузов от квадрата периода колебаний (см Рис. 2).

Момент инерции для пустого стержня:

$$I_0 = \frac{\langle T_0 \rangle^2}{4\pi^2} f$$

для стержня с грузами (на расстоянии  $r$  от стержня):

$$I = I_1 + I_0 = (m_1 + m_2)r^2 + I_0$$

Период колебаний системы:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 I}{f} = \frac{4\pi^2}{f} (I_0 + (m_1 + m_2)L^2)$$

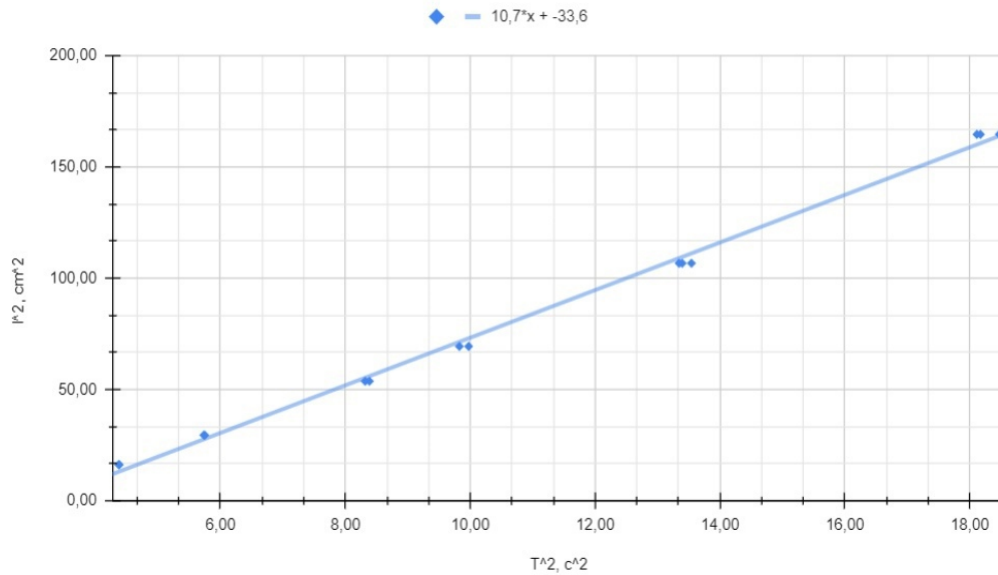
График зависимости  $l^2$  от  $T^2$ 

Рис. 2. График зависимости квадрата расстояния от стержня до грузов  $l^2$  от квадрата периода колебаний  $T^2$ .

Видим, что зависимость линейна, график - прямая, не проходящая через начало координат, поскольку колебания расстояния  $l$  - не нулевые. По найденному по методу наименьших квадратов коэффициенту наклона прямой  $k = \frac{4\pi^2(m_1+m_2)}{f}$  найдем модуль кручения  $f$  по формуле из (??):

$$f = \frac{4\pi^2(m_1 + m_2)}{k}$$

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle y \rangle \langle x \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

Погрешность определения значения  $k$ :

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left( \frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2 \right)} = 14,54 c^2/m^2$$

$$k = 933 \pm 15 \frac{cm^2}{c^2}$$

$$\varepsilon_k = 1,6\%$$

$$\varepsilon_f = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \varepsilon_l^2 + \varepsilon_m^2} = 7,18\%$$

$$f = 0,032 \pm 0,002 \frac{m}{c^2}$$

Найдем модуль сдвига  $G$  из формулы (??):

$$G = \frac{2Lf}{\pi R^4}$$

$$\varepsilon_G = \sqrt{\varepsilon_f^2 + \varepsilon_L^2 + 16\varepsilon_R^2} = 7,9\%$$

$$G = 36 \pm 3 GPa$$

## 5. Выводы

В данной работе мы нашли модуль сдвига исследуемого материала проволоки:  $G = 36 \pm 3$  ГПа. Основной вклад в погрешность определения модуля сдвига вносит погрешность измерения времени, расстояний от грузов до оси и нахождения радиуса проволоки. Ближе всего по табличным значениям исследуемый материал к меди (35 - 49 ГПа). Можно предположить, что проволока изготовлена из сплава меди.