Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)

Лабораторная работа по общему курсу физики

Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.4.1 Изучение экспериментальных погрешностей на примере физического маятника

Засимов Георгий Алексеевич
Группа Б01-109

Долгопрудный
2021

1. Аннотация

В работе исследуются свободные колебания физического маятника. Определяются периоды колебаний маятника в зависимости от расстояния между точкой подвеса и центром масс. По результатам измерений определяется ускорение свободного падения. Сравниваются значения, полученные как среднее по результатам пробных измерений и серии измерений, а также при помощи метода наименьших квадартов.

2. Теоретические сведения и методика измерений

Физический маятник - это любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси (острое ребро опорной призмы - ось качания маятника); другими словами, это совокупность жестко связанных точечных масс.

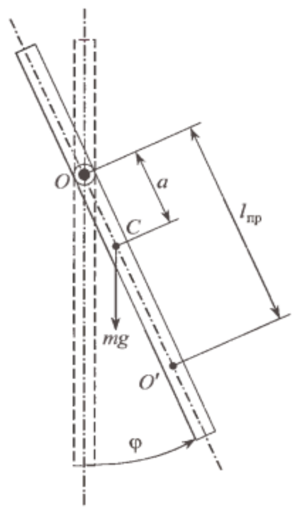

Рис 1. Физический маятник

В данной работе в качестве физического маятника (рис. 1) используется однородный стальной стержень длиной l. На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призма не перемещается, а дополнительный груз, закрепленный на стержне перемещается вдоль него, меняя таким образом центр масс системы. Момент инерции маятника будет зависеть от положения груза относиттельно оси каачания (см рис 2).

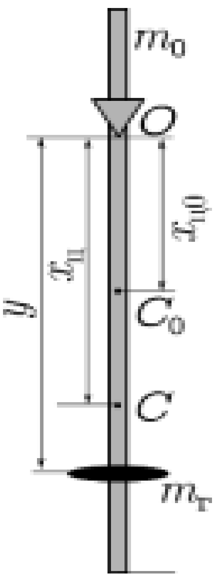

Рис 2. Физический маятник с грузом

Положение центра масс маятника вычисляется по формуле:

$$x_c = \frac{m_0 x_{c_0} + m_r y}{M} \tag{1}$$

Момент инерции стержня массой m, длины l, если ось вращения проходит на расстоянии a от центра масс по теореме Гюйгенса-Штейнера вычисляется по формуле:

$$J = \frac{ml^2}{12} + ma^2 \tag{2}$$

Период колебаний произвольного физического маятника находим по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} \tag{3}$$

А период колебаний произвольного физического маятника со стержнем длины l, аодвешенного на расстоянии a от центра:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{ga}} \tag{4}$$

Вычислить положение центра масс груза можно по формуле:

$$y = \frac{Mx_c - m_0 x_{c0}}{m_r} \tag{5}$$

Период колебаний для маятника с грузом:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + m_r y^2}{gMx_c}} \tag{6}$$

3. Оборудование и экспериментальные погрешности

Погрешности приборов: δ линейки $= 0.5$ мм
δ секундомера $= 0.1$ с (погрешность округления прибора)
δ округления электронных весов $= 0.05$ г

4. Результаты измерений и обработка данных

4.1. Оценка погрешностей

Относительная погрешность измерения длин:

$$\varepsilon_{max} = \frac{0,5}{500} = 0,1\%$$

Используемые в работе инструменты позволяют вести измерения длин с точностью вплоть до 0,1%. Для получения конечного результата с данной точностью период колебаний следует измерять с той же относительной погрешностью: не хуже, чем $\varepsilon \sim 0,1\%$.

Результаты измерений масс сотавляющих маятника (m_1, m_2, m_3 - стержня, призмы, груза) и длины стержня (l) с погрешностями:

$$m_1 = 1019,20 \pm 0,05g \quad (\varepsilon_1 = 0,005\%)$$
$$m_2 = 72,30 \pm 0,05g \quad (\varepsilon_2 = 0,07\%)$$
$$m_3 = 372,50 \pm 0,05g \quad (\varepsilon_3 = 0,013\%)$$
$$l = 50 \pm 0,005mm \quad (\varepsilon_l = 0,01\%)$$

Измерим расстояние от опорной призмы до центра масс стержня $x_{c_0} =$ 30,5 см. ($\varepsilon_{c_0} = 0,016\%$).

Проведём пробные колебания (без груза, n = 20 колебаний, расстояние от центра масс стержня до опорной призмы a = 30,5 см, см результаты в таблице 1) для определения предварительного хначения ускорения свободного падения, а также для вычислени необходимого и достаточного количества измеряемых периодов колебаний для получения необходимой погрешности. Так как мы будем строить график зависимости u от v, где u = T^2x, v = a^2. Чтобы погрешность измерения периода T не влияла на итоговую погрешность, необходимо, чтобы погрешность T^2 не превышала $0,1\%$ - погрешность измерения центра масс стержня. Для этого найдём относительную погрешность округления счетчика периодов $\delta\frac{0,01}{1,525} \approx 0,7\%$. Где $T_1 = T_2 = T_3 = 1,525$ с - период пробных колебаний, $0,01$ - погрешность округления счетчика. Вычислим необходимое количество измерений периодов в последующих измерениях. Погрешность $T^2 \approx 0,05\%$: $n = 26$ шт.

№	1	2	3
t, c	30,5	30,5	30,5
T, c	1,525	1,525	1,525

Таблица 1. Результаты пробных измерений.

Рассчитаем погрешность измерения времени, так как все 3 измеренные величины совпадают, то полная погрешность измерения времени равна её систематической составляющей $\delta = 0,01c$. $\varepsilon_t = 0,003\%$.

Полученное предварительное значение g из формулы (4) $g \approx 9,81$ м/c^2. Полученное значение совпадает с табличным значением.

4.2. Обработка результатов

Представим полученные результаты основных измерений в Таблице 2. Рассчитаем среднее занчение ускорения свободного падения $g = 9,6 \pm 0,5$ м/c^2. Погрешности при нахождении J:

$$\varepsilon_J = \sqrt{4\frac{\sigma_{lin}^2}{x_c^2}} = 0,3\%$$

Найдем среднее значение $g = 9,72$ м/c^2. Найдем погрешность измерения g:

$$\varepsilon_g = \sqrt{\varepsilon_J^2 + \varepsilon_t^2 + \varepsilon_{lin}^2 + 4\varepsilon_c^2} = 1,3\%$$

№	y, м	xц, м	t1, c	t2, c	t3, c	T, c	g
1	0,47	0,350	39,24	39,23	39,23	1,5090	9,356
2	0,18	0,272	36,97	36,97	36,97	1,4219	9,895
3	0,17	0,269	37,06	37,05	37,06	1,4253	9,882
4	0,31	0,306	37,36	37,36	36,36	1,4241	9,828
5	0,31	0,305	37,03	37,02	37,02	1,4240	9,823
6	0,42	0,335	38,5	38,5	38,49	1,4806	9,435
7	0,39	0,329	38,26	38,26	38,26	1,4715	9,4570
8	0,59	0,380	38,05	38,09	38,07	1,4642	10,6888
9	0,36	0,320	37,88	37,88	37,88	1,4569	9,524
10	0,49	0,355	39,5	39,5	39,5	1,5192	9,332

Таблица 3. Результаты основной измерений эксперимента.

Построим график завимости периода колебаний T от смещения груза a (погрешность измерения периода мала, её мы не учитываем при построении графика).

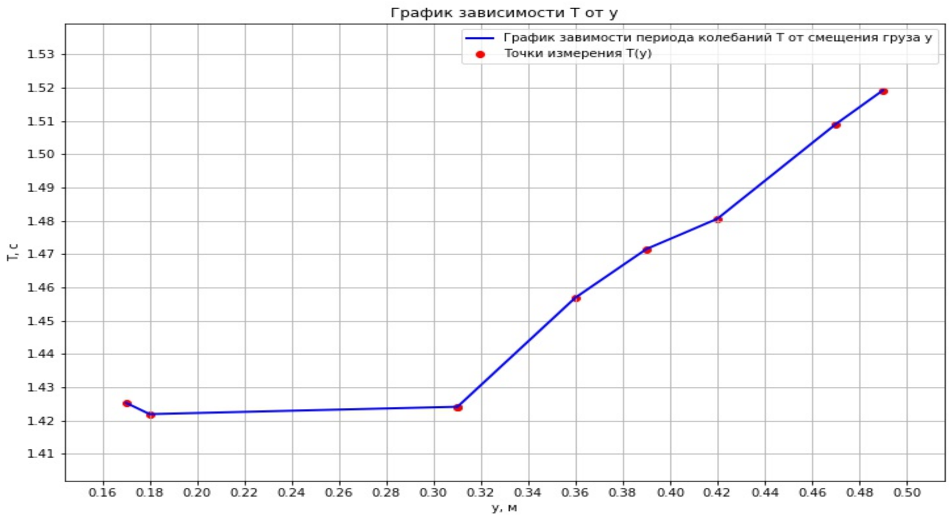

Рис 3. График зависимости периода колебаний от расстояния между точкой подвеса и центром масс маятника.

Убедимся, что полученная зависимость имеет минимум - T = 1,4241 с при значении y = 0,309 м.

Посторим график зависимости v от u, где $v = y^2$, $u = T^2 x_c$.

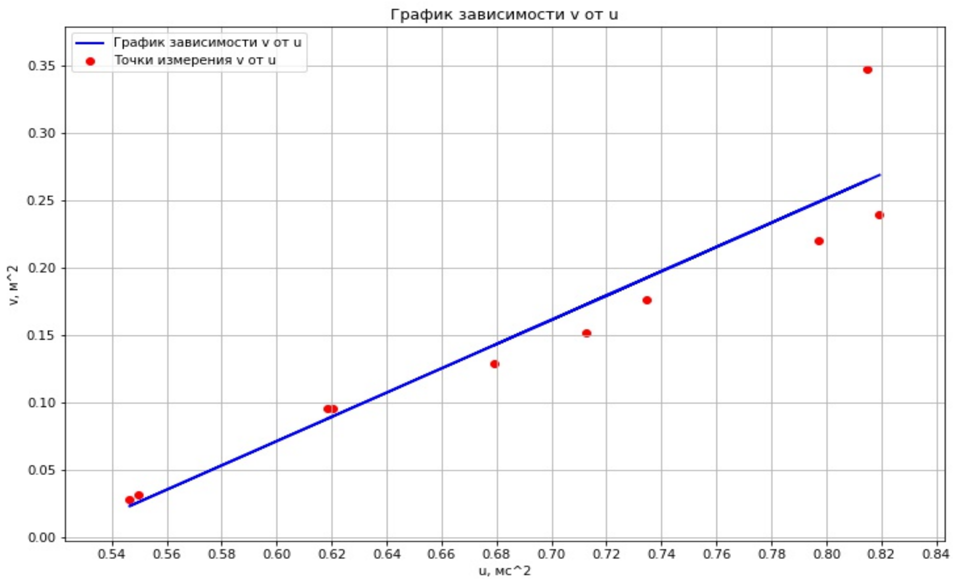

Рис 4. График зависимости квадрата расстояния между точкой подвеса и ценром масс маятника от $T^2 x_c$ (T - период колебаний маятника, x_c - расстояние от точки подвеса до центра масс стержня.

Погрешность измерения x_c:

$$\sigma_{x_c} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x_c}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2} = 0,2m/c^2$$

Значение g по формуле (6):

$$g = 9,72 \pm 0,13 m/c^2$$

Построим аппроксимирующую прямую. Найдём хначение k по методу наименьших квадратов для линейной зависимости.

$$k = \frac{< xy > - < y >< x >}{< x^2 > - < x >^2} = 0,9$$

Погрешность определения значения k:

$$\sigma_k^{oc} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left(\frac{< y^2 > - < y >^2}{< x^2 > - < x >^2} - k^2\right)} = 0,32$$

Итоговая погрешность вычисления g при помощи k:

$$\sigma_{ov} = \sqrt{\sigma_{xc}^2 + \sigma_k^2} = 0,38 m/c^2$$

Ускорение свободного падения по значению k:

$$g_{mnk} = 11,7 \pm 0,4 m/c^2$$

$$\varepsilon_{g_{mnk}} = 3,4\%$$

5. Обсуждение результатов и выводы

В ходе проведения работы были получены значения ускорения свободного падения, в пробном эксперименте:

$g = 9,81 \pm 0,01$ м/c^2 $\varepsilon_g = 0,1\%$

и в ходе основной серии измерений по формуле для периода колебаний физического маятника с грузом:

$\overline{g} = 9,72 \pm 0,13$ м/c^2 $\varepsilon_g = 1,3\%$

Сравним полученные значения со значением g, полученным при помощи метода наименьших квадратов:

$g = 11,7 \pm 0,4$ м/c^2 $\varepsilon_g = 3,4\%$

Значение g, полученное при помощи метода наименьших квадратов сильнее отличается от табличного значения (в пределах 4σ). Данное отклонение связано с учетом погрешности нахождения коэффициента угла наклона аппроксимирующей прямой графика зависимости v от u.

Данные значения отличаются от табличного ($g = 9,81 m/c^2$) в пределах 2σ. Имеющиеся расхождения можно объяснить тем,что при расчетах не учитывалась масса опорной призмы, которая влияет на положение центра масс маятника и как следствие на значение момента инерции и результат.