

Métrica Fractal Isomórfica κ_{Σ}^F

Extensión del Extractor K-Rate para Capacidades No Cuantificables

Proyecto TCDS – Motor de Formalización

1. Núcleo matemático

1.1 Capas fractales

Se definen cuatro niveles de análisis coherenciales $L = 0, 1, 2, 3$:

- L_0 : Físico-operativo ($R, LI, RMSE_{SL}, \phi, C_{cyc}, Q$)
- L_1 : Conductual-plan (hábitos, cumplimiento)
- L_2 : Cognitivo-semántico (claridad, contradicción, sentido)
- L_3 : Axiológico-teleológico (ética, legitimidad de fines)

1.2 Latentes por capa

Cada capa genera un escalar latente $Z_L \in [0, 1]$ a partir de señales ordinales y texto:

$$Z_L = C\left(\bar{x}_L, 1 - \Phi_L, 1 - \frac{S_L}{S_L^{\max}}\right)$$

donde:

- $C(\cdot)$: cópula de fusión.
- Φ_L : contradicción semántica = negaciones/afirmaciones.
- S_L : entropía semántica del texto; S_L^{\max} el valor máximo.

1.3 Canon de invariancia TCDS

El sistema cumple los siguientes axiomas: (C1) Monotonicidad, (C2) Idempotencia, (C3) Escala-libre, (C4) Separabilidad por capas, (C5) Comutatividad de fusiones, (C6) Borde nulo definido, (C7) Trazabilidad temporal.

2. Definición formal de la métrica

2.1 Métrica base de coherencia

$$\kappa_{\Sigma}^{(0)} = \sqrt{\frac{\bar{R} \cdot LI}{RMSE_{SL} + \phi}}$$

2.2 Factor no cuantificable

$$F_{\text{no-quant}} = \prod_{L=1}^3 \sigma(\alpha_L(Z_L - \beta_L))$$

donde: $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ es la función sigmoide, β_L son las anclas canónicas (0,7, 0,75, 0,8) y α_L la sensibilidad (6–10).

2.3 Métrica fractal isomórfica total

$$\boxed{\kappa_{\Sigma}^F = \kappa_{\Sigma}^{(0)} \cdot F_{\text{no-quant}}}$$

2.4 Robustez fractal

Para cada capa:

$$\mathcal{R}_L = \min\left(1, \frac{h_L}{h^*}\right) \quad \text{con} \quad Z_L \rightarrow Z_L \cdot \mathcal{R}_L$$

donde h_L es el exponente de Hölder derivado del multiescalamiento temporal y h^* su referencia de estabilidad.

3. Métricas añadidas canónicas

Símbolo	Descripción
Ψ	Potencial generativo (diversidad útil)
\mathcal{M}	Metacoh: coherencia metas–criterios de parada
Ω	Ética de medios–fines (consistencia axiológica)
ΔC	Curvatura causal (desviación narrativa–plan)
τ_{lock}	Tiempo a $LI \geq 0,9$ en días efectivos

4. Procedimiento auditable

1. **Instrumentación:** cuestionario de 24 ítems + 4 pares comparativos por capa (modelo Rasch o Bradley–Terry), y texto libre 100 palabras por bloque.
2. **Cálculo:**
 - L0 → calcular $R, LI, RMSE_{SL}, \phi, C_{cyc}, Q$.
 - L1–L3 → obtener $Z_L, \Phi_L, S_L, \mathcal{R}_L$.
3. **Fusión:** aplicar el producto sigmoidal y obtener κ_{Σ}^F .
4. **Semáforos:**
 - Verde: metas estándar y $F_{no-quant} \geq 0,9$
 - Ámbar: hasta 10 % por debajo.
 - Rojo: más de 10 % fuera o $\mathcal{R}_L < 0,6$

5. Salida estándar (JSON)

```
{
  "L0": {"R":0,"LI":0,"RMSE_SL":0,"phi":0,"C_cyc":0,"Q":0,"kappa0":0},
  "L1": {"Z1":0,"R_holder":0},
  "L2": {"Z2":0,"Phi2":0,"S2":0},
  "L3": {"Z3":0,"Omega":0},
  "F_nonquant": 0,
  "kappa_Sigma_F": 0,
  "tau_lock_days": 0,
  "flags": {"L0":"ok|amber|red","L1":"ok|amber|red",
            "L2":"ok|amber|red","L3":"ok|amber|red"},
  "notes": "contradicciones, anclas, decisiones"
}
```

6. Lenguas de Arnold personales

Se realiza un barrido de carga semanal vs. LI con $F_{\text{no-quant}}$ fijo para localizar zonas de captura conductual. Se reporta la ventana $p : q$ y τ_{lock} .

7. Autocrítica técnica

- **Fortaleza:** conserva la coherencia TCDS; amplía el rango a lo no cuantificable mediante $F_{\text{no-quant}}$ manteniendo el borde nulo y separabilidad.
- **Supuesto:** los modelos Rasch/BT describen juicios humanos con estructura logística; válidos para ordinales.
- **Riesgo:** sesgo lingüístico en Z_L ; mitigado por la penalización de contradicción Φ_L y robustez \mathcal{R}_L .
- **Verificación:** si $Z_L = \beta_L$ para todas las capas, $F_{\text{no-quant}} = 0,5^3$ reduce κ_Σ en proporción controlada, sin invertir ordenamientos; garantiza comutatividad y separabilidad.

8. Aplicación al estudio existente

Integrar en el cuestionario K-rate:

- Mantener el bloque original de 24 ítems (L0).
- Añadir 4 comparaciones pareadas por capa L1–L3 y los textos libres.
- Calcular $Z_L, \Phi_L, S_L, \mathcal{R}_L$ y producir salida JSON.
- Reportar conjuntamente κ_Σ y κ_Σ^F para medir divergencia cognitiva o axiológica.