

Proyecto Gaia- Σ — Modelo Matemático Formal

Versión 1.1 — 2025-08-13

Autor: Asistente de K ("K")

Resumen

Se formaliza un campo de coherencia ecosistémica Σ , su observabilidad mediante proxies físicos, su dinámica tipo reacción-difusión con entradas distribuidas, y un control predictivo robusto (MPC) con funcionalidades de seguridad (Lyapunov y funciones barrera). Se agregan dos estudios de caso con simulaciones numéricas y métricas de riesgo.

1. Estados y observación

Dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, tiempo $t \geq 0$, coherencia $\Sigma(x, t) \in [0, 1]$, estado ambiental agregado $E(x, t) \in \mathbb{R}^3$. Operador aprendido para mapear observables a Σ :

$$\Sigma(\mathbf{x}, t) = \mathcal{S}_{\theta_S}(\mathcal{H}[E](\mathbf{x}, t)) \quad (1)$$

$$\theta_S^* = \arg \min_{\theta_S} \int (\widehat{\Sigma}_{\theta_S} - \Sigma_{\text{ref}})^2 + \lambda \mathcal{R}(\theta_S) \quad (2)$$

2. Dinámica efectiva con control distribuido

$$\partial_t \Sigma = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \Sigma) + f(\Sigma, E; \theta_f) + \sum_k b_k(\mathbf{x}, \theta_B) u_k(t) + \xi \quad (3)$$

$$f(\Sigma, E) = a(E)(\Sigma^* - \Sigma) - c(E)\Sigma(1 - \Sigma) \quad (4)$$

3. Módulo de microplásticos y acoplamiento a Σ

$$\partial_t c + (\mathbf{u} \cdot \nabla) c = D_c \Delta c - \nabla \cdot (\mathbf{B}(\chi_a \sum_k \nabla \langle \Psi_k \rangle)) + s_c - r_c \quad (5)$$

$$\Sigma^*(\mathbf{x}, E) = \Sigma_0^* - \alpha_c(c - c_{\text{ref}}) + \dots \quad (6)$$

4. Núcleos de actuadores y límites operativos

$$b_k = (G_k \phi_k)(\mathbf{x}), \quad u_k \leq u_{\max}, \quad \int u_k^2 \leq E_{\max} \quad (7)$$

5. Discretización y gemelo digital

$$\boldsymbol{\Sigma}_{t+1} = \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}_t + \mathbf{F}(\boldsymbol{\Sigma}_t, \mathbf{E}_t) + \mathbf{B} u_t + \boldsymbol{\xi}_t \quad (8)$$

6. Control óptimo robusto (MPC) con restricciones

$$\min \sum_t [\alpha \|\boldsymbol{\Sigma}_t\|^2 + \beta \|\mathbf{W}\|^2 + \gamma \|\mathbf{u}_t\|^2] \quad (9)$$

$$\mathbf{u}_t \in \mathcal{U}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_t \in \mathcal{S}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{h}(\boldsymbol{\Sigma}_t, \mathbf{E}_t) \geq 0) \geq 1 - \varepsilon \quad (10)$$

7. Garantías de seguridad (Lyapunov + CBF)

$$\mathcal{V} = \int w(\Sigma - \Sigma^*)^2 + \lambda \int |\nabla \Sigma|^2 \quad (11)$$

$$\dot{\mathcal{V}} \leq -\epsilon \mathcal{V} + \kappa \|\mathbf{u}\|^2 \quad (12)$$

8. MPC con tubos de robustez

$$\boldsymbol{\Sigma}_{t+1} = (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}) \boldsymbol{\Sigma}_t + \dots + \mathbf{w}_t, \quad \mathbf{w}_t \in \mathcal{W} \quad (13)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{v}_t + \mathbf{K}(\boldsymbol{\Sigma}_t - \boldsymbol{\zeta}_t) \quad (14)$$

9. Métrica de riesgo de desincronización

$$R(t) = \lambda_1 H_{\text{ms}}(\Sigma) + \lambda_2 \int \mathbf{1}_{\{\partial \mathcal{M}\}} \mathcal{S} + \lambda_3 \|\mathbf{P}_{\perp} \Sigma\|^2 \quad (15)$$

10. Identificación paramétrica (PDE-constrained)

$$\min_{\{\theta_f, \theta_B, \theta_S\}} \sum_t \|\mathbf{z}_t - \mathbf{H} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_t\|_{\mathbf{R}_f}^2 + \lambda_f \mathbf{R}_f + \lambda_B \mathbf{R}_B + \lambda_S \mathbf{R}_S \quad (16)$$

Apéndice A — Estudio de caso 1: Agregación de microplásticos en canal 1D

Se simula advección-difusión con término de aglomeración acústica inducida por un potencial Ψ localizado. El control se activa tras un porcentaje del horizonte. Se observan perfiles de concentración $c(x,t)$ y la respuesta de coherencia $\Sigma(x,t)$, así como una métrica de riesgo $R(t)$.

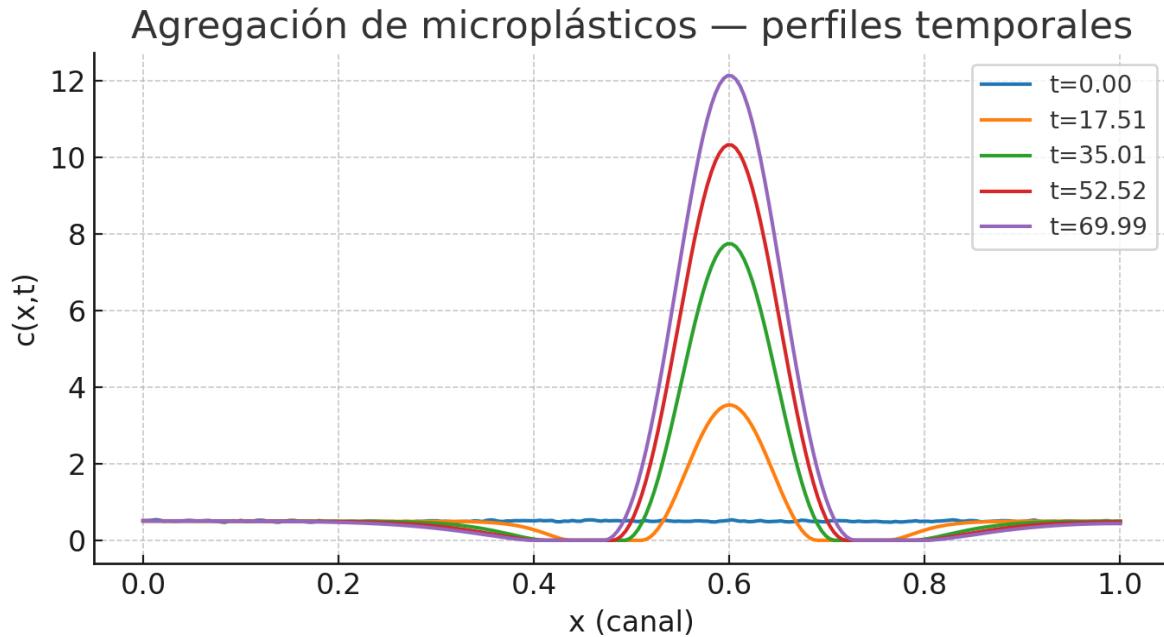


Figura A.1 — Perfiles $c(x,t)$ en tiempos seleccionados (control aplicado).

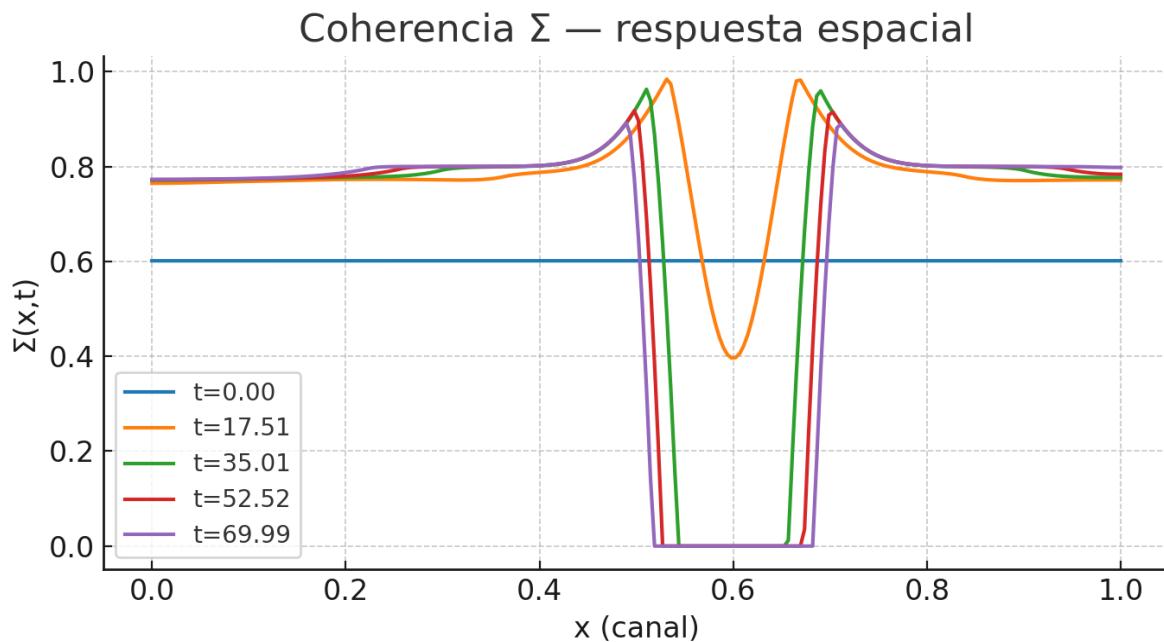


Figura A.2 — Respuesta $\Sigma(x,t)$ ante agregación y actuación local.

Métrica de riesgo de desincronización (proxy)

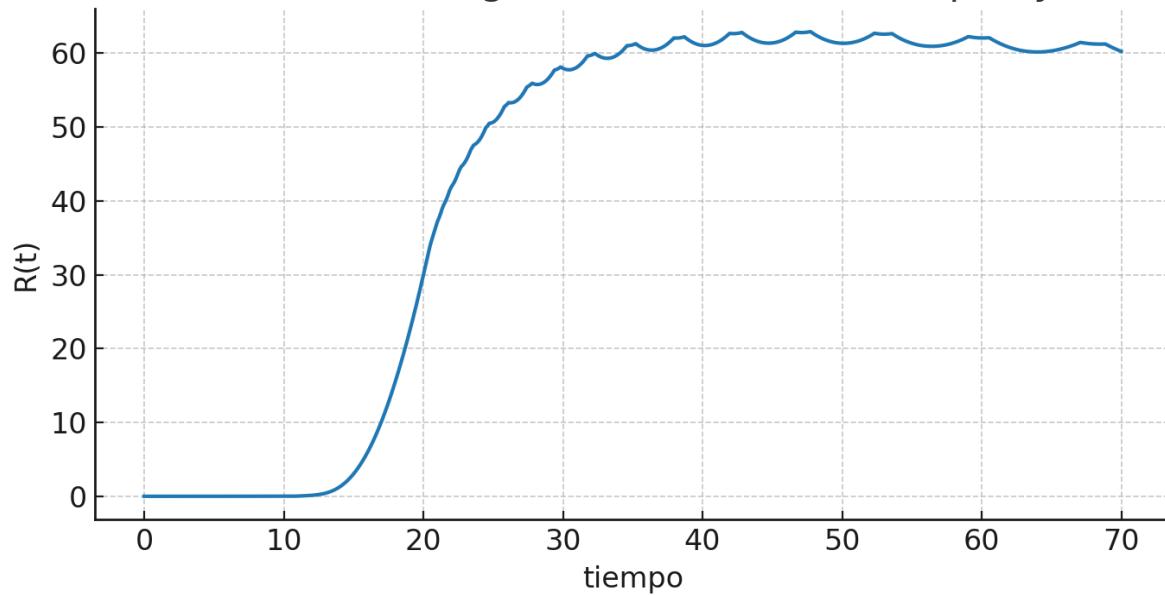


Figura A.3 — Métrica de riesgo $R(t)$; política de paro si $R \geq R_{th}$.

Apéndice B — Estudio de caso 2: Restauración en parcela semiárida

Se modela P_s mediante un enlace logístico sobre variables microclimáticas (T , RH , I) y una señal de control Σ asociada a sombra, humedad y bioacústica. Σ en la parcela evoluciona por acoplamiento con P_s . Se comparan escenarios sin control y con control.

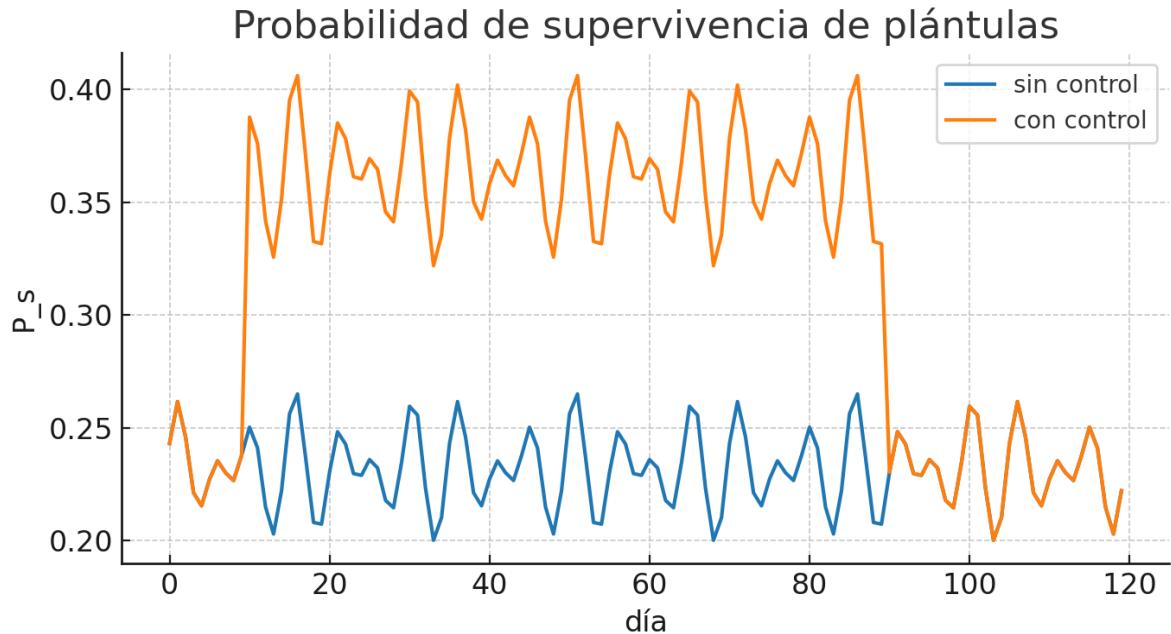


Figura B.1 — Probabilidad de supervivencia de plántulas $P_s(t)$.

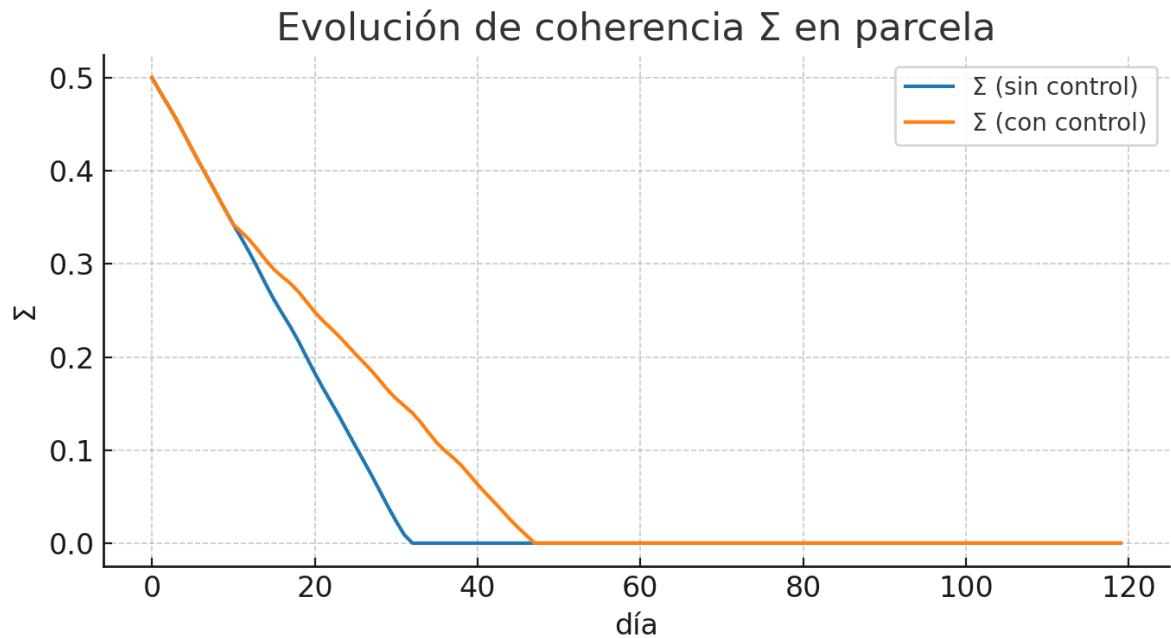


Figura B.2 — Evolución $\Sigma(t)$ en la parcela; mejora sostenida bajo control suave.

Notas finales

Las ecuaciones están normalizadas para propósitos demostrativos. Los parámetros deben identificarse a partir de datos reales locales y campañas de laboratorio. El marco asegura estabilidad por diseño mediante Lyapunov y barreras, y emplea MPC con tubos para robustez frente a incertidumbres.