

POTENCIAL ELÉCTRICO EN CAPACITORES CILÍNDRICOS NO CONCÉNTRICOS

Gerardo Pérez¹, Erick García², Diana Márquez³

¹ a329611@uach.mx, ²a329546@uach.mx, ³a334402@uach.mx

¹²³Universidad Autonoma de Chihuahua, Facultad de Ingenieria



Abstract

Obtención del potencial electrostático entre dos capacitores cilíndricos no concéntricos y simetricos en el eje z de diferentes radios resolviendo la ecuación de Laplace en dos dimensiones mediante métodos numéricos y aplicando una transformación conforme, es decir, modificando la geometría del sistema.

Introducción

El fin principal de la electrostática es obtener el campo eléctrico creado por una carga o un conjunto de ellas, para dicho propósito la ley de Gauss bastaría:

$$\mathbf{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r})}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dv \tag{1}$$

Sin embargo, obtener este tipo de integrales puede ser bastante complicado y por lo tanto, obtener primero el potencial resulta ser más sencillo en algunos casos.[2]

Obtener el potencial eléctrico es una técnica para conocer más del sistema que se está analizando. A través de él se puede determinar el campo eléctrico, esto se hace para reducir un problema vectorial a un problema escalar.

El campo eléctrico se relaciona con el potencial eléctrico en relación al gradiente y, a su vez, la divergencia del campo eléctrico se relaciona con la densidad de carga:

$$E = -\nabla V \tag{2}$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3}$$

Con estas dos ecuaciones podemos encontrar a lo que llamamos la ecuación de Poisson [2]:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4}$$

Cuando una región del espacio este libre de cargas, es decir, la densidad de carga (ρ) es cero, encontramos la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 V = 0 \tag{5}$$

Metodología Teórica

Aunque la solución a la ecuación de Laplace puede ser una herramienta útil, para ciertas simetrías su obtención es complicada y por ello existen técnicas que apoyan y facilitan ciertos problemas físicos, entre estas técnicas se encuentra la transformación conforme. Las transformaciones conformes son aquellas realizadas en el plano complejo, en donde la magnitud y el sentido del ángulo entre dos curvas se mantiene en un punto dado z_0 [1].

En esta técnica se busca una transformación en el plano complejo que nos ayude a transformar la geometría que queremos analizar, por otra mas sencilla donde resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones nos permita encontrar el potencial eléctrico.

La forma general de las transformaciones puede escribirse de la siguiente manera:

$$W = f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \tag{6}$$

Donde $z = x + i y$ [4]

Cuando una transformación conforme transfiere una solución de la ecuación de Laplace de un plano a otro, el resultado sigue siendo una solución a la ecuación de Laplace.[1]

La "Transformación de Möbius que es también conocida como transformación bilineal; la transformación está definida por:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{7}$$

Donde a,b,c,d son constantes complejas.

Esta transformación es de suma importancia ya que permite transformar rectas en círculos y viceversa.[1]

Metodología Experimental

Por las condiciones del problema, se hizo uso del caso particular de la transformación de Möbius que se puede apreciar en la ecuación (8).

$$w = \frac{1}{z} \tag{8}$$

De esta forma el problema queda resumido a un problema de placas, donde los valores de frontera del capacitor interno quedan representados en la placa más alejada del origen y los del capacitor externo quedan representados en la placa más cercana al origen. Los puntos dentro del capacitor interno son mapeados fuera de los límites establecidos por las placas, por lo que estos no son considerados en los siguientes cálculos.

Se creó una malla sobre las placas obtenidas para dividir el plano transformado y obtener el potencial en cada uno de los puntos malla.

Para obtener los valores dentro de las placas capacitadoras se hizo uso de la ecuación de Laplace en su forma discreta, como se puede apreciar en la ecuación (9).[3]

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \tag{9}$$

De esta forma, los valores obtenidos se guardan en una matriz que posteriormente es utilizada para generar el mapa de calor de la figura 1.

Obtenidos los valores, en cada punto malla se pretendió devolverlos al plano original aplicando la transformada inversa de la ecuación (10)

$$z = \frac{1}{w}, \tag{10}$$

donde cada valor dentro del plano w situado dentro de las dos placas debió ser mapeado en su posición original en el plano z .

Resultados

En la siguiente figura se observan los resultados del potencial entre dos placas, es decir, las dos líneas en las que se convirtieron los cilindros originales. Las condiciones de frontera se mantienen y como se estipuló previamente, una respuesta a la ecuación de Laplace en un espacio transformado será también válida en el plano original, además por el teorema de unicidad, esta respuesta debe ser única.

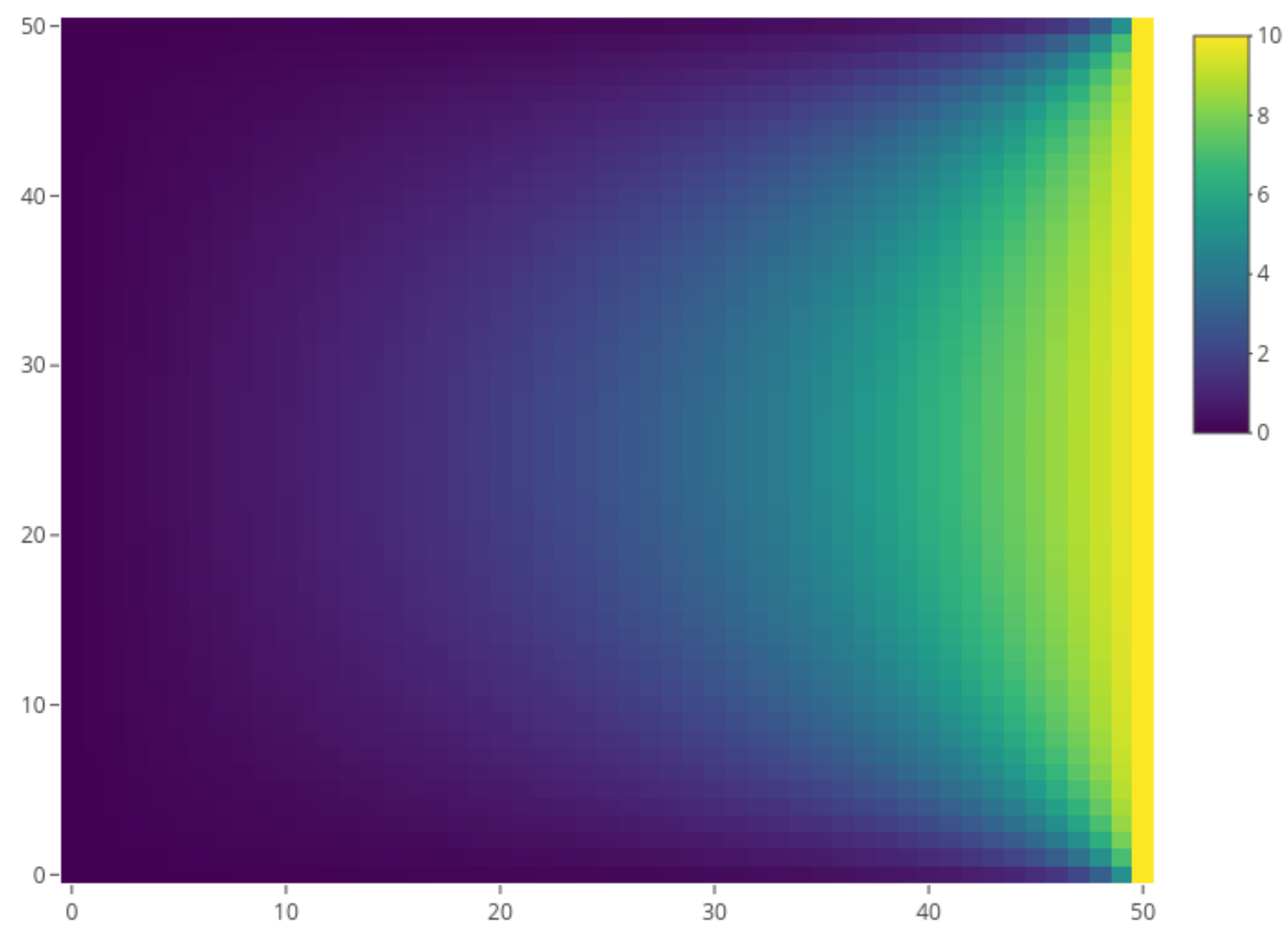


Figura 1. Mapa de potenciales en el plano w .

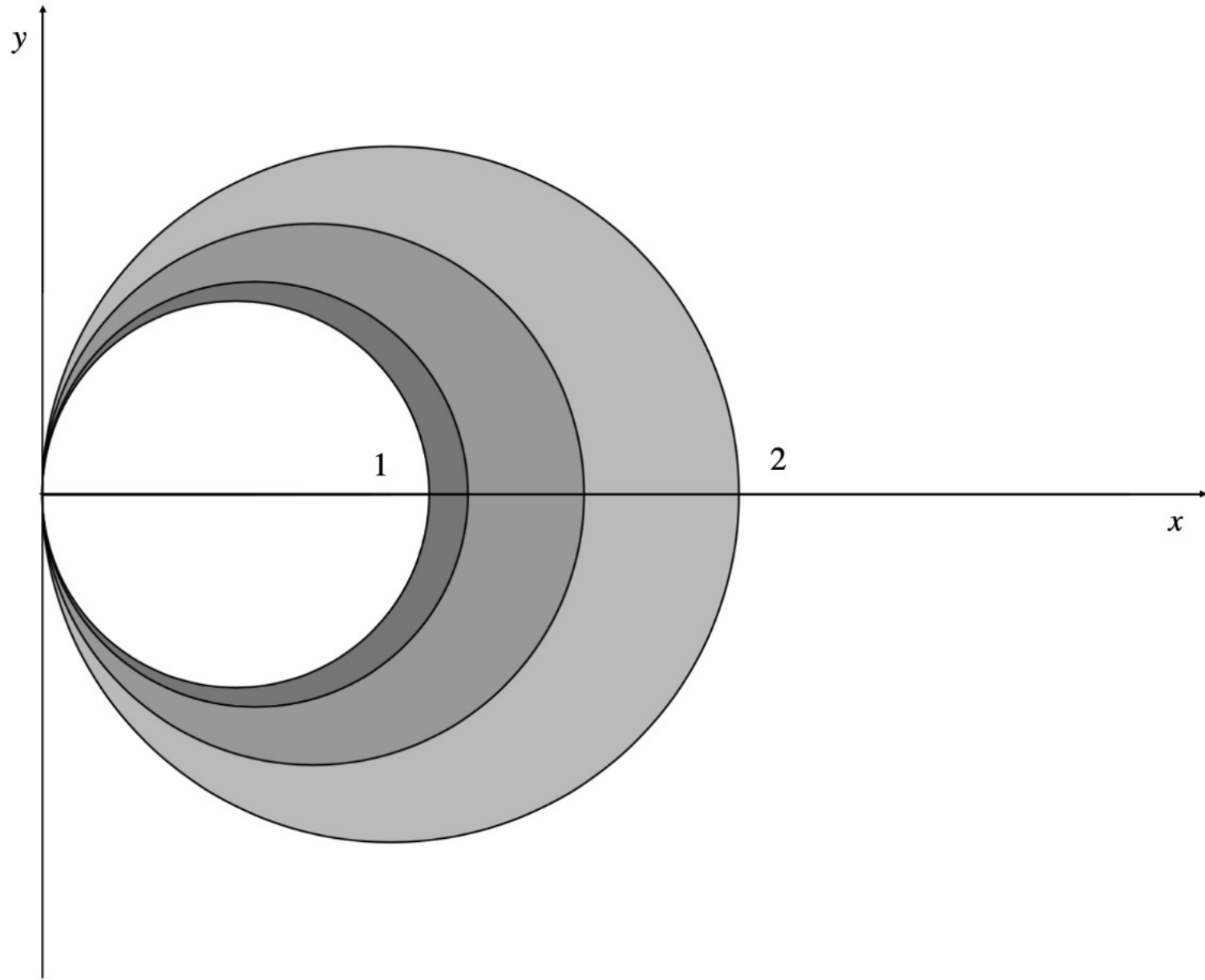


Figura 2. Distribución del potencial en el plano z .

Conclusión y Discusión

Gran parte de la metodología experimental fue desarrollada por medio de un programa de nuestra autoría [5], por lo que los valores del potencial obtenidos en el plano w , así como el mapa de calor observado en la figura 1, fueron obtenidos mediante el mismo.

Al tratar de programar la transformación conforme que mapea los valores obtenidos en el plano w al plano z surgieron inconvenientes que, debidos a la fecha límite no lograron ser resueltos de forma satisfactoria. Debido a lo anterior, se optó por mostrar, como se puede apreciar en la figura 2, un gráfico que muestra los resultados esperados.

En este caso, de manera teórica se conoce la forma adecuada de las líneas de equipotenciales en el capacitor. Dado que los puntos que se encuentran dentro del capacitor interno, así como los que se encuentran fuera de ambos cilindros, son mapeados fuera de los límites establecidos por las placas, el valor dentro de esta superficie es 0. Fuera de la misma el potencial va disminuyendo hasta llegar al límite de la superficie exterior donde la condición de frontera dada fue de 0.

Referencias

[1] Wunsch A. (1997). *La transformación conforme y alguna de sus aplicaciones*. En Variable compleja con aplicaciones(pp. 546-598). -: Pearson.
[2] Griffiths D. (1942). *Potentials*. En Introduction to electrodynamics (pp. 113-121). -: Pearson.
[3] Asmar, N. (2004). *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. (pp. 541-543). -: Pearson.
[4] Gómez J, Quesada F, Álvarez A, Vera P. (-). *La Transformación Conforme*. -, de Universidad Politécnica de Cartagena
[5] Pérez, G., García, E, Márquez, D. (2021). *eccentric_capacitors*. https://github.com/gera0220/eccentric_capacitors