Datrysiadau i Daflen Problemau 3

1. Disgrifiwch mewn geiriau y systemau ciwio canlynol:
   (a) $M/M/5$
   (b) $D/M/1/5/$SIRO
   (c) $G/G/\infty$
   (d) $M^3/D/\infty/\infty/$PS
   (e) $M/E_2/1/\infty/$FIFO

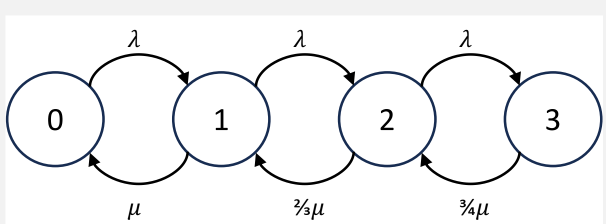
Datrysiad 1 *Mae gennym:*
(a) $M/M/5$*: Dyfodiadau Markovaidd, gwasanaethau Markovaidd, 5 gweinydd, capasity anfeidraidd, cyntaf-i-mewn-cyntaf-allan.*
(b) $D/M/1/5/$*SIRO: Dyfodiadau penderfyniaethol, gwasanaethau Markovaidd, un gweinydd sengl, capasiti system o 5, gwasanaethau ar hapdrefn.*
(c) $G/G/\infty$*: Dosraniad amser rhwng-dyfodiad cyffredinol, dosraniad amser gwasanaeth cyffredinol, nifer anfeidraidd o weinyddion, capasiti anfeidraidd, cyntaf-i-mewn-cyntaf-allan.*
(d) $M^3/D/\infty/\infty/$*PS: Dyfodiadau Markovaidd gyda swp-dyfodiadau maint 3, amseroedd gwasanaeth penderfyniaethol, nifer anfeidraidd o weinyddion, capasiti anfeidraidd, rhannu-prosesyddion.*
(e) $M/E_2/1/\infty/$*FIFO: Dyfodiadau Markovaidd, gwasanaethau gyda dosraniad Erlang paramedr 2, un gweinydd sengl, capasiti anfeidraidd, cyntaf-i-mewn-cyntaf-allan.*

2. Mewn siop cyw iâr fe ellir disgrifio'r ffrïwr-saim-dwfn fel ciw Markovaidd. Rhoddir darnau o gyw iâr i mewn i'r ffrïwr ar gyfradd λ pob uned amser. Mae ond lle ar gyfer 3 darn o gyw iâr yn y ffrïwr, a ni cymerir archebion bwyd newydd tra bod y ffrïwr yn llawn. Pan mae darn cyw iâr yn y ffrïwr ar ben ei hun mae'r gorffen coginio ar gyfradd μ. Pan fod dau darn cyw iâr yn y ffrïr mae'n nhw'n coginio ar gyfradd $^{\mu}/_{3}$, a phan fod tri darn cyw iâr yn y ffrïwr mae'n nhw'n coginio ar gyfradd $^{\mu}/_{4}$.

   Canfyddwch y tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog yn nhermau λ a μ.

   Canfyddwch y nifer disgwyliedig o darnau cyw iâr yn y ffrïwr pan fod $\lambda = 5$ a $\mu = 9$.

Datrysiad 2 *Mae gennym:*



Datrysiad 2 (continuing from p. 1) *Gan ddatrys ar gyfer cyflwr-sefydlog mae gennym:*

$$\begin{aligned}\lambda\pi_0 &= \mu\pi_1\\ (\lambda+\mu)\,\pi_1 &= \lambda\pi_0 + \frac{2}{3}\mu\pi_2\\ \left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)\pi_2 &= \lambda\pi_1 + \frac{3}{4}\mu\pi_3\\ \frac{3}{4}\mu\pi_3 &= \lambda\pi_2\\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3 &= 1\end{aligned}$$

Datrys π_1 yn nhermau π_0:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0$$

Datrys π_2 yn nhermau π_0:

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\pi_1 &= \lambda\pi_0 + \frac{2}{3}\mu\pi_2\\ (\lambda+\mu)\frac{\lambda}{\mu}\pi_0 &= \lambda\pi_0 + \frac{2}{3}\mu\pi_2\\ \frac{\lambda^2}{\mu}\pi_0 &= \frac{2}{3}\mu\pi_2\\ \pi_2 &= \frac{3\lambda^2}{2\mu^2}\pi_0\end{aligned}$$

Datrys π_3 yn nhermau π_0:

$$\begin{aligned}\pi_3 &= \frac{4\lambda}{3\mu}\pi_2 = \frac{4\lambda}{3\mu}\left(\frac{3\lambda^2}{2\mu^2}\pi_0\right)\\ \pi_3 &= \frac{2\lambda^3}{\mu^3}\pi_0\end{aligned}$$

Ac yn olaf, ar gyfer π_0:

$$\begin{aligned}\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3 &= 1\\ \pi_0\left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{3\lambda^2}{2\mu^2}+\frac{2\lambda^3}{\mu^3}\right) &= 1\\ \pi_0 &= \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{3\lambda^2}{2\mu^2}+\frac{2\lambda^3}{\mu^3}\right)}\end{aligned}$$

Datrysiad 2 (continuing from p. 2) *Pan mae $\lambda = 5$ a $\mu = 9$ mae gennym:*

$$\pi_0 = \frac{1458}{3443} \qquad \pi_1 = \frac{810}{3443} \qquad \pi_2 = \frac{675}{3443} \qquad \pi_3 = \frac{500}{3443}$$

Ac felly y nifer disgwyliedig o darnau cyw iâr yn y ffriwr yw:

$$\begin{aligned} L &= \left(0 \times \frac{1458}{3443}\right) + \left(1 \times \frac{810}{3443}\right) + \left(2 \times \frac{675}{3443}\right) + \left(3 \times \frac{500}{3443}\right) \\ &= \frac{3660}{3443} = 1.063 \end{aligned}$$

3. Ystyriwch ciw $M/M/1$ gyda chyfradd dyfodi $\lambda = 10$ a $\mu = 15$. Canfyddwch ρ, P_0, L, W, W_q, a L_q.

Datrysiad 3 *Gallwn defnyddio'r fformiwlâu:*

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \\ P_0 &= 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ L &= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{2/3}{1 - 2/3} = 2 \\ W &= \frac{1}{\lambda} L = \frac{1}{10} \times 2 = \frac{1}{5} \\ W_q &= W - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{2}{15} \\ L_q &= \lambda W_q = 10 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

4. Ystyriwch ciw $M/M/\infty$ gyda chyfradd dyfodi $\lambda = 6$ a $\mu = 8$. Canfyddwch P_0, L, W, W_q, a L_q.

Datrysiad 4 *Gallwn ddefnyddio fformiwlâu a bach o meddwl hewristig:*

$$\begin{aligned} P_0 &= e^{-\theta} = e^{-6/8} = 0.47237 \\ W &= \frac{1}{\mu} = \frac{1}{8} \\ W_q &= L_q = 0 \quad \textit{gan fod neb yn ciwio} \\ L &= \lambda W = 6 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

5. Ar gyfer ciw $M/M/\infty$ gyda chyfradd dyfodi λ a chyfradd gwasanaeth μ, deilliwch y ffaith fod $L = {}^{\lambda}/_{\mu}$ heb ddefnyddio deddfau Little.

Datrysiad 5 *Gwyddon os yw $\theta = {}^{\lambda}/_{\mu}$, yna mae:*

$$P_k = \frac{\theta^k}{k!}P_0 \qquad\qquad P_0 = e^{-\theta}$$

Nawr ystyriwch L:

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{k=0}^{\infty} kP_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} kP_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\theta^k}{n!}e^{-\theta} \\
&= e^{-\theta}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{(k-1)!} \\
&= \theta e^{-\theta}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \theta e^{-\theta}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \\
&= \theta e^{-\theta}e^{\theta} \\
&= \theta = {}^{\lambda}/_{\mu}
\end{aligned}$$

gan adnabod yr ehangiad cyfres ar gyfer y ffwythiant esbonyddol.

6. Fe ellir disgrifio canolfan diagnostig gwaed fel ciw $M/M/1$. Mae samplau gwaed yn cyrraedd ar gyfradd λ pob uned amser. Unwaith maent yn y ganolfan, os ydynt yn cael ei prosesu neu yn aros i'w brosesu, mae angen cadw'r samplau yn oed, ar gost o C_h pob uned amser. Mae peiriant diagnostig awtomatig yn gallu prosesu'r samplau gwaed un ar y tro, ar gyfradd μ pob uned amser, sydd yn gallu cael ei reoli. Mae'n costio μC_s pob uned amser i rhedeg y peiriant ar gyfradd μ. Beth dyle cyfradd gwasanaeth y peiriant fod er mwyn lleiafsymio cyfanswm y cost?

Datrysiad 6 *Cyfanswm y cost pob uned amser bydd:*

$$\begin{aligned} C &= C_h L + \mu C_s \\ &= C_h \frac{\rho}{1-\rho} + \mu C_s \\ &= \frac{C_h \lambda}{\mu - \lambda} + \mu C_s \\ &= C_h \lambda (\mu - \lambda)^{-1} + \mu C_s \end{aligned}$$

Er mwyn lleiafsymio hon, mae angen i ni ganfod gwerth μ *lle mae* $\frac{dC}{d\mu} = 0$*:*

$$\begin{aligned} \frac{dC}{d\mu} &= -\lambda C_h (\mu - \lambda)^{-2} + C_s \\ 0 &= -\lambda C_h (\mu - \lambda)^{-2} + C_s \\ \frac{\lambda C_h}{(\mu - \lambda)^2} &= C_s \\ \frac{\lambda C_h}{C_s} &= (\mu - \lambda)^2 \\ \sqrt{\frac{\lambda C_h}{C_s}} &= \mu - \lambda \\ \mu &= \sqrt{\frac{\lambda C_h}{C_s}} + \lambda \end{aligned}$$

lle cymeron ni'r gwraidd positif oherwydd gwyddon fod $\mu > \lambda$ *pherwydd sefydlogrwydd.*
I wirio fod hwn yn lleiafswm a nid uchafswm, defnyddiwn y prawf ail deilliad:

$$\begin{aligned} \frac{d^2C}{d\mu^2} &= 2\lambda C_h \left(\mu - \lambda\right)^{-3} \\ &= 2\lambda C_h \left(\sqrt{\frac{\lambda C_h}{C_s}}\right)^{-3} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

felly mae $\mu = \sqrt{\frac{\lambda C_h}{C_s}} + \lambda$ *yn leiafswm.*