Datrysiadau i Daflen Problemau 3

- 1. Disgrifiwch mewn geiriau y systemau ciwio canlynol:
 - (a) M/M/5
 - (b) D/M/1/5/SIRO
 - (c) $G/G/\infty$
 - (d) $M^3/D/\infty/\infty/\mathsf{PS}$
 - (e) $M/E_2/1/\infty/\mathsf{FIFO}$

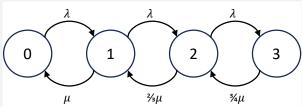
Datrysiad 1 *Mae gennym:*

- (a) M/M/5: Dyfodiadau Markovaidd, gwasanaethau Markovaidd, 5 gweinydd, capasity anfeidraidd, cyntaf-i-mewn-cyntaf-allan.
- (b) D/M/1/5/SIRO: Dyfodiadau penderfyniaethol, gwasanaethau Markovaidd, un gweinydd sengl, capasiti system o 5, gwasanaethau ar hapdrefn.
- (c) $G/G/\infty$: Dosraniad amser rhwng-dyfodiad cyffredinol, dosraniad amser gwasanaeth cyffredinol, nifer anfeidraidd o weinyddion, capasiti anfeidraidd, cyntaf-i-mewn-cyntaf-allan.
- (d) $M^3/D/\infty/\infty/PS$: Dyfodiadau Markovaidd gyda swp-dyfodiadau maint 3, amseroedd gwasanaeth penderfyniaethol, nifer anfeidraidd o weinyddion, capasiti anfeidraidd, rhannuprosesyddion.
- (e) $M/E_2/1/\infty/FIFO$: Dyfodiadau Markovaidd, gwasanaethau gyda dosraniad Erlang paramedr 2, un gweinydd sengl, capasiti anfeidraidd, cyntaf-i-mewn-cyntaf-allan.
- 2. Mewn siop cyw iâr fe ellir disgrifio'r ffrïwr-saim-dwfn fel ciw Markovaidd. Rhoddir darnau o gyw iâr i mewn i'r ffrïwr ar gyfradd λ pob uned amser. Mae ond lle ar gyfer 3 darn o gyw iâr yn y ffrïwr, a ni cymerir archebion bwyd newydd tra bod y ffrïwr yn llawn. Pan mae darn cyw iâr yn y ffrïwr ar ben ei hun mae'r gorffen coginio ar gyfradd μ . Pan fod dau darn cyw iâr yn y ffrïr mae'n nhw'n coginio ar gyfradd $\mu/3$, a phan fod tri darn cyw iâr yn y ffrïwr mae'n nhw'n coginio ar gyfradd $\mu/4$.

Canfyddwch y tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog yn nhermau λ a μ .

Canfyddwch y nifer disgwyliedig o darnau cyw iâr yn y ffriwr pan fod $\lambda=5$ a $\mu=9$.

Datrysiad 2 *Mae gennym:*



Datrysiad 2 (continuing from p. 1) Gan ddatrys ar gyfer cyflwr-sefydlog mae gennym:

$$\lambda \pi_0 = \mu \pi_1$$

$$(\lambda + \mu) \, \pi_1 = \lambda \pi_0 + \frac{2}{3} \mu \pi_2$$

$$\left(\lambda + \frac{2}{3} \mu\right) \pi_2 = \lambda \pi_1 + \frac{3}{4} \mu \pi_3$$

$$\frac{3}{4} \mu \pi_3 = \lambda \pi_2$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Datrys π_1 yn nhermau π_0 :

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0$$

Datrys π_2 yn nhermau π_0 :

$$(\lambda + \mu)\pi_1 = \lambda \pi_0 + \frac{2}{3}\mu \pi_2$$
$$(\lambda + \mu)\frac{\lambda}{\mu}\pi_0 = \lambda \pi_0 + \frac{2}{3}\mu \pi_2$$
$$\frac{\lambda^2}{\mu}\pi_0 = \frac{2}{3}\mu \pi_2$$
$$\pi_2 = \frac{3\lambda^2}{2\mu_2}\pi_0$$

Datrys π_3 yn nhermau π_0 :

$$\pi_3 = \frac{4\lambda}{3\mu}\pi_2 = \frac{4\lambda}{3\mu} \left(\frac{3\lambda^2}{2\mu_2}\pi_0\right)$$
$$\pi_3 = \frac{2\lambda^3}{\mu^3}\pi_0$$

Ac yn olaf, ar gyfer π_0 :

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$\pi_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{3\lambda^2}{2\mu_2} + \frac{2\lambda^3}{\mu^3} \right) = 1$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{3\lambda^2}{2\mu_2} + \frac{2\lambda^3}{\mu^3} \right)}$$

Datrysiad 2 (continuing from p. 2) Pan mae $\lambda = 5$ a $\mu = 9$ mae gennym:

$$\pi_0 = \frac{1458}{3443}$$
 $\pi_1 = \frac{810}{3443}$ $\pi_2 = \frac{675}{3443}$ $\pi_3 = \frac{500}{3443}$

Ac felly y nifer disgwyliedig o darnau cyw iâr yn y ffrïwr yw:

$$L = \left(0 \times \frac{1458}{3443}\right) + \left(1 \times \frac{810}{3443}\right) + \left(2 \times \frac{675}{3443}\right) + \left(3 \times \frac{500}{3443}\right)$$
$$= \frac{3660}{3443} = 1.063$$

3. Ystyriwch ciw M/M/1 gyda chyfradd dyfodi $\lambda=10$ a $\mu=15$. Canfyddwch ρ , P_0 , L, W, W_q , a L_q .

Datrysiad 3 Gallwn defnyddio'r fformiwlâu:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2$$

$$W = \frac{1}{\lambda}L = \frac{1}{10} \times 2 = \frac{1}{5}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$$

$$L_q = \lambda W_q = 10 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{3}$$

4. Ystyriwch ciw $M/M/\infty$ gyda chyfradd dyfodi $\lambda=6$ a $\mu=8$. Canfyddwch P_0 , L, W, W_q , a L_q .

Datrysiad 4 Gallwn ddefnyddio fformiwlâu a bach o meddwl hewristig:

$$P_0=e^{- heta}=e^{-6/8}=0.47237$$
 $W=rac{1}{\mu}=rac{1}{8}$ $W_q=L_q=0$ gan fod neb yn ciwio $L=\lambda W=6 imesrac{1}{8}=rac{3}{4}$

5. Ar gyfer ciw $M/M/\infty$ gyda chyfradd dyfodi λ a chyfradd gwasanaeth μ , deilliwch y ffaith fod $L=^{\lambda}/_{\mu}$ heb ddefnyddio deddfau Little.

Datrysiad 5 *Gwyddon os yw* $\theta = \lambda/\mu$, *yna mae:*

$$P_k = \frac{\theta^k}{k!} P_0 \qquad \qquad P_0 = e^{-\theta}$$

Nawr ystyriwch L:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k P_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\theta^k}{n!} e^{-\theta}$$

$$= e^{-\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{(k-1)!}$$

$$= \theta e^{-\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \theta e^{-\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}$$

$$= \theta e^{-\theta} e^{\theta}$$

$$= \theta = \frac{\lambda}{\mu}$$

gan adnabod yr ehangiad cyfres ar gyfer y ffwythiant esbonyddol.

6. Fe ellir disgrifio canolfan diagnostig gwaed fel ciw M/M/1. Mae samplau gwaed yn cyrraedd ar gyfradd λ pob uned amser. Unwaith maent yn y ganolfan, os ydynt yn cael ei prosesu neu yn aros i'w brosesu, mae angen cadw'r samplau yn oed, ar gost o C_h pob uned amser. Mae peiriant diagnostig awtomatig yn gallu prosesu'r samplau gwaed un ar y tro, ar gyfradd μ pob uned amser, sydd yn gallu cael ei reoli. Mae'n costio μC_s pob uned amser i rhedeg y peiriant ar gyfradd μ . Beth dyle cyfradd gwasanaeth y peiriant fod er mwyn lleiafsymio cyfanswm y cost?

Datrysiad 6 Cyfanswm y cost pob uned amser bydd:

$$C = C_h L + \mu C_s$$

$$= C_h \frac{\rho}{1 - \rho} + \mu C_s$$

$$= \frac{C_h \lambda}{\mu - \lambda} + \mu C_s$$

$$= C_h \lambda (\mu - \lambda)^{-1} + \mu C_s$$

Er mwyn lleiafsymio hon, mae angen i ni ganfod gwerth μ lle mae $\frac{dC}{d\mu}=0$:

$$\frac{dC}{d\mu} = -\lambda C_h (\mu - \lambda)^{-2} + C_s$$

$$0 = -\lambda C_h (\mu - \lambda)^{-2} + C_s$$

$$\frac{\lambda C_h}{(\mu - \lambda)^2} = C_s$$

$$\frac{\lambda C_h}{C_s} = (\mu - \lambda)^2$$

$$\sqrt{\frac{\lambda C_h}{C_s}} = \mu - \lambda$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\lambda C_h}{C_s}} + \lambda$$

lle cymeron ni'r gwraidd positif oherwydd gwyddon fod $\mu > \lambda$ pherwydd sefydlogrwydd. I wirio fod hwn yn lleiafswm a nid uchafswm, defnyddiwn y prawf ail deilliad:

$$\frac{d^2C}{d\mu^2} = 2\lambda C_h (\mu - \lambda)^{-3}$$
$$= 2\lambda C_h \left(\sqrt{\frac{\lambda C_h}{C_s}}\right)^{-3}$$
$$> 0$$

felly mae $\mu = \sqrt{\frac{\lambda C_h}{C_s}} + \lambda$ yn leiafswm.