Datrysiadau i Daflen Problemau 1

1. Gellir ddisgrifio afalau yn cwympo o goeden ar hap mewn amser fel proses Poisson gyda chyfradd $\lambda = 2$ afal y diwrnod.
   (a) Beth yw'r tebygolrwydd bod llai na 3 afal yn cwympo mewn diwrnod?
   (b) Beth yw'r tebygolrwydd bod llai na 3 afal yn cwympo mewn wythnos?
   (c) Beth yw'r amser cymedrig rhwng dau afal olynnol yn cwympo?
   (d) Beth yw'r tebygolrwydd fy mod yn aros yn fwy na 12 awr i afal gwmpo?

Datrysiad 1 *Mae tri hapnewidyn o ddiddordeb i ni, $X_d \sim$ Poisson(2) yw'r nifer o afalau sy'n cwympo mewn diwrnod, $X_w \sim$ Poisson(14) yw'r nifer o afalau sy'n cwympo mewn wythnos, a $T \sim$ Expon(2) yw'r amser rhwng dau afal olynnol yn cwympo. Yna:*

(a) Y tebygolrwydd bod llai na 3 afal yn cwympo mewn diwrnod:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_d < 3) &= \mathbb{P}(X_d = 0) + \mathbb{P}(X_d = 2) + \mathbb{P}(X_d = 2) \\
&= \left(\frac{2^0 e^{-2}}{0!}\right) + \left(\frac{2^1 e^{-2}}{1!}\right) + \left(\frac{2^2 e^{-2}}{2!}\right) \\
&= e^{-2} + 2e^{-2} + 2e^{-2} \\
&= 0.67667
\end{aligned}$$

(b) Y tebygolrwydd bod llai na 3 afal yn cwympo mewn wythnos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_w < 3) &= \mathbb{P}(X_w = 0) + \mathbb{P}(X_w = 2) + \mathbb{P}(X_w = 2) \\
&= \left(\frac{14^0 e^{-14}}{0!}\right) + \left(\frac{14^1 e^{-14}}{1!}\right) + \left(\frac{14^2 e^{-14}}{2!}\right) \\
&= e^{-14} + 14e^{-14} + 196e^{-14} \\
&= 0.00018
\end{aligned}$$

(c) Yr amser cymedrig rhwng dau afal olynnol yn cwympo:

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{2}$$

(d) Y tebygolrwydd fy mod yn aros yn fwy na 12 awr i afal gwmpo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > 1/2) &= 1 - \mathbb{P}(T < 1/2) \\
&= 1 - \left(1 - e^{-2\times 1/2}\right) \\
&= e^{-1} = 0.36788
\end{aligned}$$

2. Yn ystod tymor yr etholiad caiff hysbyslenni gwleidyddol eu osod ar hap ar hyd yr A470, ac fe ellir ei ddisgrifio fel proses Poisson mewn gofod gyda chyfradd $\lambda = {}^3/_8$ pob milltir. Mae 25% o'r hysbyslenni o'r blaid Coch, mae 40% o'r blaid Melyn, ac mae 35% o'r blaid Glas.

   (a) Rydw i'n gyrru 55 milltir, faint o hysbyslenni Melyn sydd disgwyl i mi weld?

   (b) Beth yw'r tebygolrwydd o ddim gweld dim un hysbyslen Glas am 20 milltir?

   (c) Pa mor hir sydd anegn i mi gyrru cyn i'r tebygolrwydd o weld hysbyslen coch bod yn fwy na 90%?

Datrysiad 2 *Gadewch i $X \sim$ Poisson$({}^3/_8)$ bod y nifer o hysbyslenni pob milltir, a gadewch i $T \sim$ Expon$({}^3/_8)$ bod y pellter rhwng day hysbyslen olynnol. Oherwydd teneuo prosesau Poisson, mae hefyd gennym:*

- $X_C \sim$ *Poisson*$({}^3/_{32})$ *sef nifer o hysbyslenni o'r blaid Coch pob milltir;*
- $T_C \sim$ *Expon*$({}^3/_{32})$ *sef y pellter rhwng dau hysbyslen olynnol o'r blaid Coch;*
- $X_M \sim$ *Poisson*$({}^3/_{20})$ *sef nifer o hysbyslenni o'r blaid Melyn pob milltir;*
- $T_M \sim$ *Expon*$({}^3/_{20})$ *sef y pellter rhwng dau hysbyslen olynnol o'r blaid Melyn;*
- $X_G \sim$ *Poisson*$({}^{21}/_{160})$ *sef nifer o hysbyslenni o'r blaid Glas pob milltir;*
- $T_G \sim$ *Expon*$({}^{21}/_{160})$ *sef y pellter rhwng dau hysbyslen olynnol o'r blaid Glas;*

Felly:

(a) Y nifer o hysbyslenni Melyn mewn 55 milltir yw:

$$\mathbb{E}[X_M] = 55 \times {}^3/_{20} = {}^{33}/_4$$

(b) Y tebygolrwydd o ddim gweld unrhyw hysbyslen o'r blaid Glas mewn 20 milltir yw:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_G > 20) &= 1 - \mathbb{P}(T_G < 20) \\ &= 1 - \left(1 - e^{20 \times {}^{21}/_{160}}\right) \\ &= 0.07244\end{aligned}$$

(c) Y pellter t fel bod $0.9 = \mathbb{P}(T_C < t)$ yw:

$$\begin{aligned}0.9 &= \mathbb{P}(T_C < t) \\ 0.9 &= 1 - e^{{}^3/_{32}t} \\ e^{{}^3/_{32}t} &= 1 - 0.9 \\ \frac{3}{32}t &= \ln(0.1) \\ t &= \frac{32}{3}\ln(0.1) \\ t &= 24.5609\end{aligned}$$