MA2651 - Ymchwil Weithrediadol

Llawllyfr

Dr Geraint Palmer-Liyu

Semester y Gwanwyn 2026

Cynnwys

Cyflwyniad

- Dr Geraint Palmer-Liyu
- Abacws M/2.54
- palmergi1@cardiff.ac.uk

Mae ymchwil weithrediadol yn ymwneud gyda defnyddio dulliau dadansoddol er mwyn helpu gwneud penderfyniadau yn well. Mae'r cwrs hon mewn dau hanner, modelu ac optimeiddio.

Modelu

Mae modelu yn ymwneud â datblygu cynrychioliad mathemategol o rhyw system er mwyn helpu gyda dealltwriaeth a rhagfynegi.

Byddwn yn ystyried pedwar pwnc:

1. **Dosraniadau Tebygolrwydd** - Canfod tebygolrwyddau ac ystadegau cryno o hapnewidynnau Poisson ac Esbonyddol. Deillio mynegiadau ar gyfer ei PDFau, CDFau, ac ystadegau cryno.

2. **Cadwyni Markov** - Modelu senarios fel set o gyflyrau arwahanol, gydag hap-throsglwyddiadau rhwng y gyflyrau. Byddwn yn ystyried cadwyni Markov amser-arwahanol ac amser-didor.

3. **Theori Ciwio** - Adtudio modelau o giwiau, lle mae cwsmeriaid yn cyrraedd ar hap, aros mewn llinell nes i weinwr dod yn rhydd, gwario rhyfaint o amser yn derbyn wasanaeth, ac yna gadael. Byddwn yn deillio formiwlâu ciwio gan ddefnyddio cadwyni Markov, ac ystyried dadansoddiad costau.

4. **Efelychiad Stocastig** - Deall systemau stocastig gan ddefnyddio cyfrifiadur er mwyn generadu hap-ddigwyddiadau a'u rhyngweithiadau. Yn gyntaf byddwn yn ystyried efelychiad Monte Carlo er mwyn generadu hap-ddigwyddiadau, ac yna efelychiad digwyddiad arwahanol o systemau ciwio.

Optimeiddio

Mae optimeiddio fan hyn yn ymwneud gydag uchafsymio neu leiafsymio rhyw ffwythiant yn amodol ar adnoddau cyfyngedig y mynegir fel cyfyngiadau. Mae optimeiddio pobman! Er enghraifft lleiafsymio costau cynhyrchu, uchafsymio gwerth rhyw ymgyrch hysbysebu, lleiafsymio pellter llwybrau teithio, uchafsymio elw, ac yn y blaen.

Byddwn yn ystyried pedwar pwnc:

1. **Rhaglennu Llinol** - Fformiwleiddio a datrys problemau bywyd go iawn y gellir eu mynegi yn nhermau ffwythiant amcan llinol i'w uchafsymio neu leiafsymio, a set o gyfyngiadau llinol.
2. **Problemau Cludiant** - Fformiwleiddio a datrys y broblem benodol o gludio eitemau o gyflenwyr i gwsmeriaid gyda'r gost leiaf. Gallwn fodelu problemau bywyd go iawn eraill fel problemau cludiant a'u datrys yn yr un ffordd.
3. **Rhaglennu Deinameg** - Y broblem o optimeiddio llwybrau trwy rwydweithiau, a fformiwleiddio problemau eraill fel problemau ar graffiau, efallai nad ydynt yn ymddangos yn cysylltiedig ar olwg gyntaf.
4. **Rheoli Prosiectau** - Y broblem o benderfynu hyd brosiect a pha dasgau sy'n gritigol er mwyn iddo orffen ar amser. Wedyn byddwn yn edrych ar sut i gyfrifo'r cynllun prosiect gorau posib os gallwn dalu i leihau hyd rai tasgau.

Pennod 1

Dosraniadau Tebygolrwydd

Deilliannau dysgu:

- Gallu deall a ddefnyddio'r dosraniad Poisson;
- Gallu deillio ystadegau cryno ar gyfer y dosraniad Poisson;
- Gall deall a ddefyddio'r dosraniad Esbonyddol;
- Gallu deillio ystadegau cryno ar gyfer y dosraniad Esbonyddol.

1.1 Cyflwyniad

Canlyniad haparbrawf yw *hapnewidyn*. Yn fwy ffurfiol, y mae'n ffwythiant sy'n mapio canlyniad haparbrawf i rif real. Gall hwn fod yn arwahanol neu'n di-dor. Mae dosraniad tebygolrwydd yn disgrifio sut mae hapnewidyn yn ymddwyn. Yn fwy ffurfiol y mae'n ffwythiant sy'n rhoi tebygolrwydd bod canlyniad rhyw haparbrawf yn digwydd. Cofiwch fod yna dau fath o ddosraniad:

- *ffwythiand dwysedd tebygolrwydd*. PDFau ar gyfer hapnewidynnau di-dor
  (neu *ffwythiant màs tebygolrwydd*, PMFau, ar gyfer hapnewidynnau arwahanol)
- *ffwythiannau dosraniad cronnus*, CDFau.

Fel arfer dynodwn PDFau a PMFau gan f, tra dynodwn CDFau gan F. Cofiwch hefyd ar gyfer hapnewidynnau di-dor, bod $f = F'$.

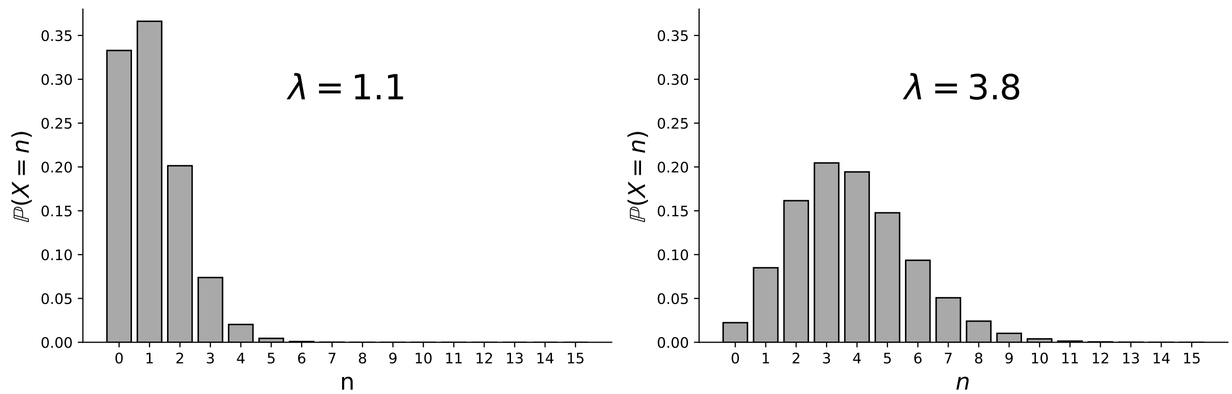
Dosraniad tebygolrwydd arwahanol defnyddiol ar gyfer y cwrs hon yw'r dosraniad Poisson, a dosraniad di-dor cysylltiedig, y dosraniad Esbonbyddol.

1.2 Y Dosraniad Poisson

Ystyriwch gyfres o ddigwyddiadau sy'n digwydd ar hap, gyda chyfradd cymedrig o λ pob uned amser. Ystyriwch fod pob ddigwyddiad yn annibynnol o'r lleill, hynny yw bod y ffaith bod un yn digwydd ddim yn effeithio ar y ffaith bod llall yn digwydd. Gadewch i X bod yr hapnewidyn sy'n cynrychioli y nifer o'r ddigwyddiadau hyn sy'n disgwydd mewn rhyw cyfwng amser. Yna mae X yn dilyn dosraniad Poisson gyda PMF:

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \tag{1.1}$$

Enghraifft gweledol o'r PMF hon ar gyfer $\lambda = 1.1$ ac $\lambda = 3.8$:



Gallwn deillo'r PMF yn Hafaliad 1.1 o'r tyniaethau am yr hapnewidyn. Rhoddir hwn isod, er ddiddordeb:

Deilliad Poisson

Yn gyntaf ystyriwch un cyfwng amser bach δt, sydd mor fach gallwn tybio fod y tebygolrwydd o mwy nag un ddigwyddiad yn digwydd ynddo yw $\mathcal{O}(\delta t)$. Gadewch i $\mathbb{P}(n, I)$ dynodi'r tebygolrwydd o gael n ddigwyddiant mewn cyfwng hyd I. Yna o ddiffiniad mae gennym:

- $\mathbb{P}(1, \delta t) = \lambda\delta t + \mathcal{O}(\delta t)$
- $\mathbb{P}(0, \delta t) = 1 - \lambda\delta t + \mathcal{O}(\delta t)$
- $\mathbb{P}(n, \delta t) = \mathcal{O}(\delta t)$ os yw $n > 1$

O hyn ymlaen anwybyddwn yr achosion $n > 1$ a'r termau $\mathcal{O}(\delta t)$. Gan ddefnyddio'r ffeithiau hyn gallwn profi trwy anwythiad bod $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ ar gyfer pob $n \in \mathbb{N}$.

Yr Achos Sylfaenol

Yn gyntaf dangoswch fod $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda t}$: Ystyriwch y cyfwng $(0, t + \delta t)$. Nodwch fod y cyfyngau $(0, t)$ a $(t, t + \delta t)$ yn annibynnol, a does dim ots lle dechreuwn y cyfwng, ond hyd y cyfwng sydd o ddiddordeb. Felly:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0, t+\delta t) &= \mathbb{P}(0,t)\mathbb{P}(0,\delta t)\\ &= \mathbb{P}(0,t)(1-\lambda\delta t)\end{aligned}$$

gan ail-drefni cawn:

$$\frac{\mathbb{P}(0,t+\delta t)-\mathbb{P}(0,t)}{\delta t} = -\lambda\mathbb{P}(0,t)$$

a thrwy cymryd y terfan wrth i $\delta t \to 0$ cawn:

$$\frac{d\mathbb{P}(0,t)}{dt} = -\lambda\mathbb{P}(0,t)$$

sy'n hafaliad differol. Gyda'r amod cychwynnol bod $\mathbb{P}(0,0)=0$, y mae'n rhaid iddo fod yn wir, mae gan hwnm datrysiad:

$$\mathbb{P}(0,t) = e^{-\lambda t}$$

Y Cam Anwythol

Nawr tybiwn fod $\mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ ar gyfer holl $n \leq k$. Beth am $\mathbb{P}(X=k+1)$?
Eto ystyriwch y cyfwng $t+\delta t$, ac eto nodwch fod y cyfyngau hyd t a δt yn annibynnol. Nawr mae gennym:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(n+1, t+\delta t) &= \mathbb{P}(n+1,t)\mathbb{P}(0,\delta t) + \mathbb{P}(n,t)\mathbb{P}(1,\delta t)\\ &= \mathbb{P}(n+1,t)(1-\lambda\delta t) + \mathbb{P}(n,t)\lambda\delta t\end{aligned}$$

gan ail-drefni cawn:

$$\frac{\mathbb{P}(n+1,t+\delta t)-\mathbb{P}(n+1,t)}{\delta t} + \lambda\mathbb{P}(n+1,t) = \lambda\mathbb{P}(n,t)$$

a thrwy cymryd y terfan wrth i $\delta t \to 0$ cawn:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{P}(n+1,t)}{dt} + \lambda\mathbb{P}(n+1,t) &= \lambda\mathbb{P}(n,t)\\ &= \frac{\lambda^{n+1}e^{-\lambda}}{n!}\end{aligned}$$

sy'n hafaliad differol trefn un. Mae datrys, gyda'r amod cychwynnol $\mathbb{P}(n+1,0)=0$, yn rhoi:

$$\mathbb{P}(n+1,t) = \frac{\lambda^{n+1}e^{-\lambda}}{(n+1)!}$$

sy'n cwblhau'r deilliad.

Mae gan y dosraniad Poisson cymedr ac amrywiant hafal. Gadew i $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, yna mae:

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \tag{1.2}$$
$$\text{Var}(X) = \lambda \tag{1.3}$$

Profion:

Cymedr Poisson

Theorem: Gadewch i $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Yna mae $\mathbb{E}[X] = \lambda$.
Prawf:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n)$$

Gallwn anwybyddu'r term cyntaf gan ei fod yn halaf i sero:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n)$$

Amnewidiwch y mynegiad PMF:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

Ffactorio lluoswm sgalar allan o'r swm:

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}\lambda^n$$

Symleiddio'r ffracsiwn:

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n$$

Ffactorio lluoswm sgalar allan o'r swm:

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\lambda^{n-1}$$

Adnabod yr ehangiad esbonyddol:

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

Symleiddio:

$$= \lambda$$

Amrwyiant Poisson

Theorem: Gadewch i $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Yna mae $\text{Var}(X) = \lambda$.
Proof: Mael dadl tebyg i'r uchod yn rhoi $\mathbb{E}[X^2] = \lambda(\lambda + 1)$ (gwiriwch hon!). Nawr

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ &= \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Nawr gallwn ateb rhai cwestiynnau am hapnewidynnau Poisson.

Enghraifft 1 *Mewn safle bws, gwyddon fod y ddigwyddiad o bws yn cyrraedd wedi'i dosrannu'n Poisson gyda chyfradd 4 yr awr.*

a) *Beth yw'r tebygolrwydd, ar ôl cyrraedd i'r safle bws, y bydd angen i mi aros mwy nag 20 munud ar gyfer bws?*
b) *Os eisteddaf am 30 munud, beth yw'r tebygolrwydd bydd mwy na dau bws yn cyrraedd?*

Datrysiad i Enghraifft 1 *Yn eu tro:*

a) *Gadewch i X cynrychioli'r nifer o fysiau sy'n cyrraedd mewn 20 munud. Yna mae $X \sim$ Poisson $\left(\frac{4}{3}\right)$. Felly:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\textit{dim bws mewn 20 munud}) &= \mathbb{P}(X = 0) \\ &= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^0 e^{-\frac{4}{3}}}{0!} \\ &= e^{-\frac{4}{3}} = 0.2636 \end{aligned}$$

b) *Gadewch i Y cynrychioli'r nifer o fysiau sy'n cyrraedd mewn 30 munud. Yna mae $Y \sim$ Poisson(2). Felly:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\textit{mwy na 2 bws mewn 30 munud}) &= \mathbb{P}(X > 2) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) \\ &= 1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 e^{-2}}{1!} - \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \\ &= 1 - 0.1353 - 0.2707 - 0.2707 \\ &= 0.3233 \end{aligned}$$

1.3 Y Dosraniad Esbonyddol

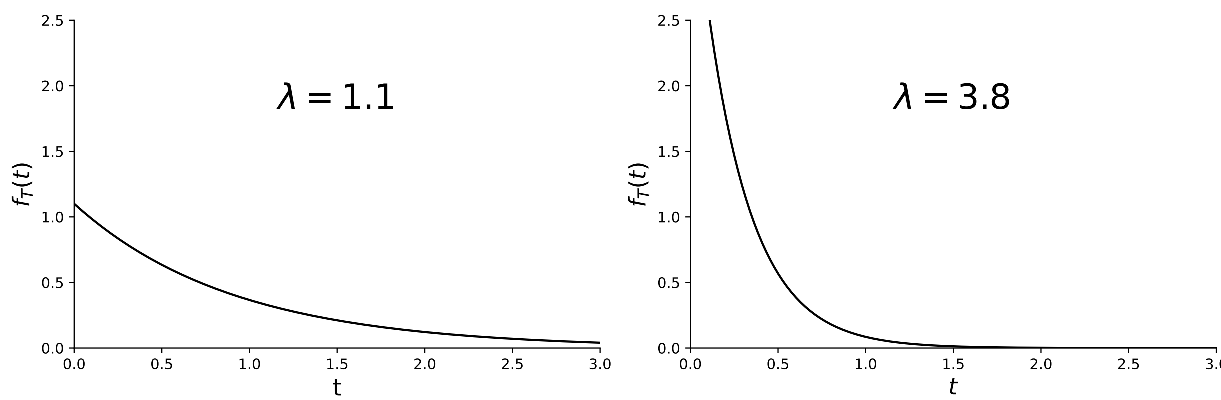
Mae'r dosraniad Poisson yn disgrifio'r nifer o hapddigwyddiadau mewn rhyw uned amser. Mae'r dosraniad Esbonyddol yn disgrifio'r amser rhwng hapddigwyddiadau. Gadewch i T fod hapnewidyn yn cynrychioli'r amser rhwng dau hapddigwyddiad Poisson olynol sy'n digwydd gyda chyfradd λ yr uned amser. Yna mae T yn dilyn dosraniad Esbonyddol gyda PDF a CDF:

The Poisson distribution describes the number of random events in a given time unit. The Exponential distribution describes the time between random events.

$$f_T(t) = \mathbb{P}(T = t) = \lambda e^{-\lambda t} \tag{1.4}$$

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{1.5}$$

Enghraifft gweledol o'r PDF hon ar gyfer $\lambda = 1.1$ ac $\lambda = 3.8$:



Gallwn deillio'r CDF a'r PDF o'r dosraniad Poisson:

Deilliad Esbonyddol

Gadewch i T fod hapnewidyn yn cynrychioli'r amser rhwng dau ddigwyddiad Poisson olynol. sy'n digwydd gyda chyfradd λ yr uned amser, a gadewch i X fod yr hapnewidyn sy'n cynrychioli'r nifer o'r ddigwyddiadau sy'n digwydd mewn rhyw cyfwng amser hyd t. Yna $X \sim$ Poisson(λt).

Ystyriwch CDF T:

$$
\begin{aligned}
F_T(t) = \mathbb{P}(T < t) &= 1 - \mathbb{P}(T \geq t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X = 0) \\
&= 1 - \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} \\
&= 1 - e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

Ar gyfer y PDF:

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= F_T'(t) \\
&= \frac{d}{dt}\left[1 - e^{-\lambda t}\right] \\
&= \lambda e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

MAe gan y dosraniad Esbonyddol cymedr ac amrywiant sy'n cysylltiedig a'i chyfradd gwrthdro. Gadewch i $T \sim$ Expon(λ), yna:

$$
\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda} \tag{1.6}
$$

$$
\text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} \tag{1.7}
$$

Profion:

Cymedr Esbonyddol

Theorem: Gadewch i $T \sim$ Expon(λ). Yna mae $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda}$.
Prawf:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= \int_0^\infty t f_t(t) dt = \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt \\
&= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} t e^{-\lambda t} + \int \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^\infty \\
&= \left[-t e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^\infty \\
&= 0 - 0 - 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

Amrywiant Esbonyddol

Theorem: Gadewch i $T \sim \text{Expon}(\lambda)$. Yna mae $\text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$.
Prawf: Mael dadl tebyg i'r uchod yn rhoi $\mathbb{E}[T^2] = \frac{2}{\lambda^2}$ (gwiriwch hon trwy defnyddio integru fesul rhan dwywaith!). Nawr

$$\begin{aligned}\text{Var}(T) &= \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

Digofiant

Priodwedd pwysig a syfrdanol o'r dosraniad Esbonyddol yw ei fod yn *ddi-gof*. Mae hwn yn golygu fod y tebygolrwydd o aros hyd t o amser yn ychwanegol ar gyfer rhyw ddigwyddiant, o ystyried ein bod wedi bod yn aros hyd a o amser, yr un poeth ag aros hyd t o amser. Hynny yw:

$$\mathbb{P}(T > t + a \mid T > a) = \mathbb{P}(T > t) \tag{1.8}$$

Hynny yw, does dim ots pa mor hir eich bod eisoes wedi aros am ddigwyddiad, mae'r tebygolrwydd ohono ddigwydd yn y t uned amser nesaf yr un peth.

Digofiant

Theorem: Mae'r dosraniad Esbonyddol yn ddi-gof. Hynny yw, gadewch i $T \sim \text{Expon}(\lambda)$. Yna mae $\mathbb{P}(T > t + a \mid T > a) = \mathbb{P}(T > t)$.
Prawf:

O ddiffiniad tebygolrwydd amodol:

$$\mathbb{P}(T > t + a \mid T > a) = \frac{\mathbb{P}(T > t + a \cap T > a)}{\mathbb{P}(T > a)}$$

Gan fod ail ddigwyddiant yn y rhifiadur wedi'i cynnwys yn yr un cyntaf:

$$= \frac{\mathbb{P}(T > t + a)}{\mathbb{P}(T > a)}$$

Amnewid i mewn y mynegiadau CDF:

$$= \frac{1 - F_T(t + a)}{1 - F_T(a)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda a}}$$

A symleiddio:

$$\begin{aligned} &= e^{-\lambda(t)} \\ &= \mathbb{P}(T > t) \end{aligned}$$

Nawr gallwn ateb rhai cwestiynnau am, hapnewidynnau Esbonyddol.

Enghraifft 2 *Gall yr amser nes i batri lithiwm rhedeg allan o ynni cael ei fodelu gan hapnewidyn Esbonyddol gyda chyfradd 0.3 yr wythnos.*

a) Beth yw'r hyd oes disgwyliedig ar gyfer batri lithiwm?

b) Gwyddon fy mod wedi bod yn defnyddio batri am 2 wythnos. Beth yw'r tebygolrwydd ei fod yn mynd i rhedeg allan o ynni o fewn yr wythnos nesaf?

c) Rydw i'n prynnu paced o 6 batri. Beth yw'r tebygolrwydd y bydd pob un yn rhedeg allan o ynni o fewn 3 wythnos?

Datrysiad i Enghraifft 2 *Gadewch i T cynrychioli hyd oes batri lithiwm. Yna mae $T \sim$ Expon(0.3) pan wythnosau yw ein unedau amser.*

a) Hyd oes disgwyliedig batri yw $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.3} = 3.333$ wythnos.

b) Defnyddiwn y priodwedd di-gof:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T < 3 \mid T > 2) &= \mathbb{P}(T < 1) \\ &= 1 - e^{-\lambda 1} \\ &= 1 - e^{-0.3} = 0.259 \end{aligned}$$

c) Gadewch i $T_i \sim$ Expon(0.3) cynrychioli hyd oes batri i. Now gan fod yr holl T_i yn annibynnol ac wedi'u dosrannu'n unfath:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \leq 6} (T_i < 3)\right) &= (\mathbb{P}(T < 3))^6 \\ &= \left(1 - e^{\lambda t}\right)^6 \\ &= \left(1 - e^{0.3 \times 3}\right)^6 = 0.044 \end{aligned}$$

1.4 Teneuo & Arosodiad

Rydym wedi gweld fod proses Poisson yn gysylltiedig gyda dau wahanol hapnewidyn, hapnewidyn Poisson sy'n cyfri'r nifer o hapddigwyddiadau mewn cyfwng amser; ac hapnewidyn Esbonyddol sy'n disgrifio'r amseroedd rhwng hapddigwyddiadau olynol. Gall prosesau Poisson cael eu cyfuno a'u dadelfennu, a fe'i elwir yn arosodiad a theneuo.

Arosodiad Poisson

Gadewch i $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ bod hapnewidynnau Poisson annibynnol gyda chyfraddau $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Gadewch i $Y = \sum_i^n Y_n$. Yna:

$$Y \sim \text{Poisson}\left(\sum_i^n \lambda_i\right) \tag{1.9}$$

Yn debyg, gadewch i $X_1, X_2, \dots, X_n$ bod hapnewidynnau Esbonyddol annibynnol gyda chyfraddau $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Gadewch i $X = \min_i X_n$. Yna:

$$X \sim \text{Expon}\left(\sum_i^n \lambda_i\right) \tag{1.10}$$

Teneuo Poisson

Ystyriwch proses Poisson gyda chyfradd λ, a gadewch i $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ bod yr hapnewidyn sy'n cynrychioli'r nifer o'r ddigwyddiadau mewn uned amser. Tybwich gall pob digwyddiau cael ei labelo fel un o N label posib, a bod y tebygolrwydd o ddigwyddiad cael label i yw p_i. Nawr ystyriwch Y_i, y nifer o ddigwyddiadau gyda'r label i mewn uned amser. Yna:

$$Y_i \sim \text{Poisson}(p_i\lambda) \tag{1.11}$$

Yn debyg, gadewch i X bod hapnewidyn Esbonyddol yn cynrychioli'r amser rhwng dau hapddigwyddiad olynol o'r proses Poisson. Yna $X \sim \text{Expon}(\lambda)$. Gadewch i X_i cynrychioli'r amserodd rhwng ddigwyddiadau gyda'r label i. Yna:

$$X_i \sim \text{Expon}(p_i\lambda) \tag{1.12}$$

Gallwch ddeillio'r profion trwy ystyried y CDFau ym mhob achos.

1.5 Y Dosraniad Erlang

Dosraniad cysylltiedig arall yw'r dosraniad Erlang, sydd â ddwy paramedr, y gyfradd λ, a'r paramedr siâp k, sef swm hapnewidynnau Esbonyddol annibynnol:

Dosraniad Erlang

Gadewch i $X_i \sim \text{Expon}(\lambda)$ bod hapnewidynnau annibynnol, yna:

$$Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \text{Erlang}(k, \lambda) \tag{1.13}$$

ac:

$$f_Y(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \tag{1.14}$$

Rhoddir y PDF heb ei ddeillio. Ond, gan fod Y yn swm k hapnewidyn Esbonyddol, gallwn deillo ei cymedr a'i amrywiant:

Cymedr Erlang

Theorem: Gadewch i $Y \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$. Yna mae $\mathbb{E}[Y] = \frac{k}{\lambda}$.
Prawf: Yn ddefnyddio'r ffaith ar gyfer unrhyw dau hapnewidyn annibynnol A a B mae gennym $\mathbb{E}[A + B] = \mathbb{E}[A] + \mathbb{E}[B]$, yna cawn:

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{\lambda}$$

Amrywiant Erlang

Theorem: Gadewch i $Y \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$. Yna mae $\text{Var}(Y) = \frac{k}{\lambda^2}$.
Prawf: Yn ddefnyddio'r ffaith ar gyfer unrhyw dau hapnewidyn annibynnol A a B mae gennym $\text{Var}(A + B) = \text{Var}(A) + \text{Var}(B)$, yna cawn:

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{k} \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2}$$

Yn wahanol i'r dosraniad Esbonyddol, nid yw'r dosraniad Erlang yn ddi-gof.

Pennod 2

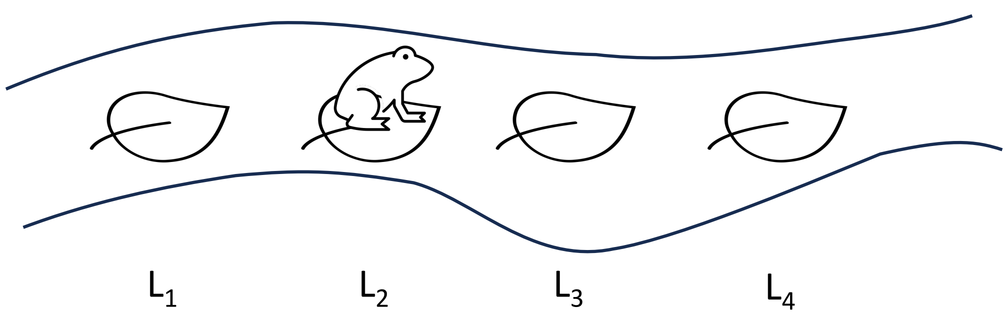
Cadwyni Markov

Deilliannau dysgu:

- Gallu modelu gyda chadwyni Markov amser-arwahanol;
- Gallu modelu gyda chadwyni Markov amser-di-dor;
- Gallu dosbarthu cyflyrau cadwyn Markov.

2.1 Cyflwyniad

Yn aml mae'n bosib i ddisgrifio ymddygiad rhyw system stocastig trwy disgrifio'r holl cyflyrau gwahanol y mae'n gallu bod ynddo, a sut mae'r system yn symud rhwng y cyflyrau hyn. Cymhellwn hwn gydag enghraifft - ystyriwch afon gyda phedwar deilen-lili, a broga sy'n neidio o un i'r llall ar hap pob uned amser, fel y dangosir yn y llun isod. Tybiwn fod y broga ond yn neidio i ddeilen-lili cyfagos, a bydd yn dewis rhwng ddail-lili gyda thebygolrwyddau hafal.



Gallwn ddisgrifio'r system fel ei bod yn un o bedwar cyflwr: naill ai mae'r broga ar y deilen-lilu cyntaf (L_1); mae'r broga ar yr ail deilen-lili (L_2); mae'r broga ar y trydydd deilen-lili (L_3); neu mae'r broga ar y pedwerydd deilen-lili (L_4). Me hwn yn tybio fod yr amser y mae'r broga yn neidio trwy'r awyr yn enydaidd. Gelwir y set $S = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ *gofod cyflwr* y system.

Rydym hefyd yn gwybod rhywbeth am y tebygolrwyddau o drosi o un cyflwr i'r llall pob cam amser. Gadewch i p_{ij} cynrychioli'r tebygolrwydd o gyrraedd cyflwr j os ydych yng nghyflwr i ar hyn o bryd, yna mae'r *matrics tebygolrwyddau trosi* yn gynrychioli holl tebygolrwyddau o drosi rhwng yr holl gyflyrau:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hynny yw p_{L_2,L_3}, yn dynodi'r tebygolrwydd o'r broga yn mynd i'r trydydd deilen-lili, o ystyried ei fod ar yr ail deilen-lili ar hyn o bryd, yw $1/2$.

Un gwireddiad o hwn all fod:

Amser	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cyflwr	L_1	L_2	L_1	L_2	L_3	L_4	L_3	L_2	L_3	L_2

Dyma enghraifft o *broses stocastig*. Yn arbennig, dyma enghraifft o fath penodol o broses stocastig o'r enw cadwyn Markov amser-arwahanol.

2.2 Cadwyni Markov Amser-Arwahanol

Mae cadwyni Markov amser-arwahanol yn fath penodol o broses stocastig amser-arwahanol.

Proses Stocastig Amser-Arwahanol

Hapfector yw broses stocastig amser-arwahanol, y mae ei cydrannau wedi'i indecsio gan amser. Gallwn hefyd meddwl amdanno fel teulu o hapnewidynnau:

$$\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Cadwyn Markov amser-arwahanol yw broses stocastig amser-arwahanol, lle canlyniad bob un X_n yw elfen o set rhifadwy o gyflyrau, y gelwir y *gofod cyflwr*, ac sy'n bodloni'r *priodwedd Markov*:

Priodwedd Markov (Amser-Arwahanol)

Mae'r priodwedd Markov yn nodi bod X_{n+1} yn dibynnu ar X_n yn unig, ac nid ar unrhyw cyflwr blaenorol. Hynny yw:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$$

Yn y modd hon gallwn diffinio ein enghraifft o froga'n neidio fel cadwyn Markov. Mae ond angen diffinio'r *gofod cyflwr* a'r *matrics tebygolrwyddau trosi*. Nodwch y gall y gofod cyflwr bod anfeidraidd.

- Y gofod cyflwr S yw set o gyflyrau. Mae'n ddefnyddiol trefnu'r cyflyrau $S = \{s_0, s_1, \dots\}$.
- Mae gan matrics tebygolrwyddau trosi dilys, P, cofnodion $p_{ij} = \mathbb{P}(X_n = s_j \,| X_{n-1} = s_i\ )$, lle mae $0 \leq p_{ij} \leq 1$ yn tebygolrwyddau dilys, ac mae'r rhesi yn symio i 1.

Gyda'r offerynnau hyn gallwn dadansoddi'r system. Er enghraifft, os yw'r broga ar yr ail deilen-lili ar hyn o bryd, yna mae'r system yng nghyflwr L_2:

- *beth yw'r tebygolrwydd bydd y broga ar y trydydd deilen-lily (L_3) mewn un cam amser?*

  Gallwn darllen hwn yn uniongyrchol o'r matrix tebygolrwyddau trosi:

  $$\mathbb{P}(X_1 = L_3 \mid X_0 = L_2) = {}^1\!/_2$$

- *beth yw'r tebygolrwydd bydd y broga ar y trydydd deilen-lily (L_3) mewn dau cam amser?*

  Mae angen i ni ystyried y tebygolrwydd o fod mewn cyflyrau penodol yn X_1. Mae dau cyflwr gall cyrraedd L_3: naill ai L_2 neu L_4:

  $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = L_3 \mid X_0 = L_2) &= \mathbb{P}(X_2 = L_3 \mid X_1 = L_2)\mathbb{P}(X_1 = L_2 \mid X_0 = L_2)\\ &\quad + \mathbb{P}(X_2 = L_3 \mid X_1 = L_4)\mathbb{P}(X_1 = L_4 \mid X_0 = L_2)\\ &= ({}^1\!/_2 \times 0) + ({}^1\!/_2 \times 0) = 0\end{aligned}$$

- *beth yw'r tebygolrwydd bydd y broga ar y trydydd deilen-lily (L_3) mewn tri cam amser?*

  nawr mae angen i ni ystyried yr holl llwybrau posib sy'n cyrraedd L_3 mewn tri cam amser:

  - $L_2 \to L_1 \to L_2 \to L_3$
  - $L_2 \to L_3 \to L_2 \to L_3$
  - $L_2 \to L_3 \to L_4 \to L_3$

  felly:

  $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3 = L_3 \mid X_0 = L_2) &= \mathbb{P}(X_3 = L_3 \mid X_2 = L_2)\mathbb{P}(X_2 = L_2 \mid X_1 = L_1)\mathbb{P}(X_1 = L_1 \mid X_0 = L_2)\\ &\quad + \mathbb{P}(X_3 = L_3 \mid X_2 = L_2)\mathbb{P}(X_2 = L_2 \mid X_1 = L_3)\mathbb{P}(X_1 = L_3 \mid X_0 = L_2)\\ &\quad + \mathbb{P}(X_3 = L_3 \mid X_2 = L_4)\mathbb{P}(X_2 = L_4 \mid X_1 = L_3)\mathbb{P}(X_1 = L_3 \mid X_0 = L_2)\\ &= ({}^1\!/_2 \times 1 \times {}^1\!/_2) + ({}^1\!/_2 \times {}^1\!/_2 \times {}^1\!/_2) + (1 \times {}^1\!/_2 \times {}^1\!/_2)\\ &= {}^5\!/_8\end{aligned}$$

Mae enw i'r cyfrifiadau a wneir fan hyn, yr hafaliadau Chapman-Kolmogorov, ac maent yn cyfateb i lluosi matricsau. Gadewch i $\underline{\pi}_n$ bod fector sy'n cynrychioli'r tebygolrwyddau o fod ym mhob cyflwr ar amser n, ac mae'r matrics tebygolrwyddau trosi wedi'i dynodi gan P, yna:

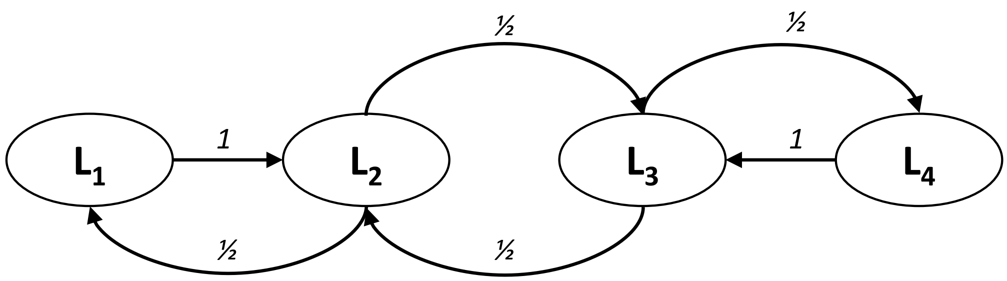
Cyflyrau Trosaidd DTMC

$$\underline{\pi}_{n+1} = \underline{\pi}_n P$$

ac trwy ail-adrodd cymhwyso'r hafaliad hwn:

$$\underline{\pi}_{n+1} = \underline{\pi}_0 P^n$$

Yn aml mae'n ddefnyddio gallu delweddu cadwyni Markov. Ffordd cyffredin o wneud hwn yw i cynrychioli cyflyrau gyda ffurfiau hirgrwn, a'r trosiadau fel saethau rhwng y cyflyrau, wedi'i labeli gan y tebygolrwyddau. Er enghraifft, ar gyfer yr enghraifft o'r broga'n neidio:

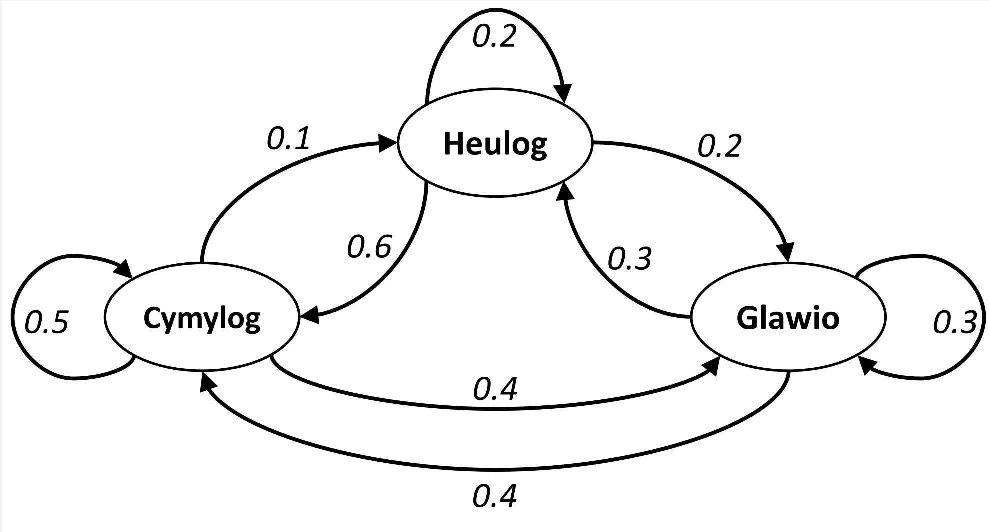


Enghraifft 3 *Gall tywydd yng Nghaerdydd fod naill ai'n Heulog, Cymylog, neu'n Glawio:*

- *Os yw'n Heulog, y tebygolrwydd bydd yn parhau i fod yn heulog yfory yw 0.2, o fod yn gymylog yw 0.6, ac o lawio yw 0.2;*
- *Os yw'n Gymylog, y tebygolrwydd bydd yn parhau i fod yn gymylog yfory yw 0.5, y tebygolrwydd o fod yn heulog yw 0.1, a'r tebygolrwydd o lawio yw 0.4;*
- *Os yw'n Glawio. y tebygolrwydd bydd yn parhau i lawio yfory yw 0.3, o'r fod yn heulog yw 0.3, ac o fod yn gymylog yw 0.4.*

Tynnwch lun y cadwyn Markov a rhowch y matrics tebygolrwyddau trosi.
Mae Mari yn priodi yng Nghaerdydd mewn tri diwrnod. Mae'r dyn tywydd yn dweud yfory bydd 50% siawns o haul, 50% siawns o gymylau, a 0% siawns o lawio. Beth fydd y tebygolrwydd y bydd yn lawio ar diwrnod priodas Mari?

Datrysiad i Enghraifft 3 *Mae tynnu llun o'r cadwyn Markov yn rhoi:*



Y matrics tebygolrwyddau trosi, yn trefnu'r cyflyrau fel Heulog, Cymylog, Glawio, yw:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Mae'r dyn tywydd wedi nodi fod $\underline{\pi}_1 = (0.5, 0.5, 0.0)$. *Mae Mari yn priodi yn* $n = 3$, *felly:*

$$\begin{aligned}
\underline{\pi}_3 &= \underline{\pi}_1 P^2 \\
&= (0.5, 0.5, 0.0) \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}^2 \\
&= (0.5, 0.5, 0.0) \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \\
&= (0.5, 0.5, 0.0) \begin{pmatrix} 0.16 & 0.5 & 0.34 \\ 0.19 & 0.47 & 0.34 \\ 0.19 & 0.5 & 0.31 \end{pmatrix} \\
&= (0.175, 0.485, 0.34)
\end{aligned}$$

Felly mae yna 34% siawns o law ar diwrnod priodas Mari.

Dadansoddiad Cyflwr-Sefydlog

Rydym wedi gweld fod rhesi P^n yn rhoi'r tebygolrwyddau o fod ym mhob cyflwr mewn n cam amser, o ystyried y tebygolrwydd o fod ym mhob cyflwyr ar hyn o bryd. Gallwn weld trwy arbrawf ar gyfer nifer[1] o fatricsau tebygolrwyddau trosi, os cymerwn n i fod yn fawr iawn, yna bennwn gyda matrics lle mae pob rhes yn unfath.

Er enghraifft, ystyriwch gadwyn Markov y tywydd o Enghraifft 3:

$$\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \\
P^2 &= \begin{pmatrix} 0.16 & 0.5 & 0.34 \\ 0.19 & 0.47 & 0.34 \\ 0.19 & 0.5 & 0.31 \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
P^{100} &= \begin{pmatrix} 0.18446602 & 0.48543689 & 0.33009709 \\ 0.18446602 & 0.48543689 & 0.33009709 \\ 0.18446602 & 0.48543689 & 0.33009709 \end{pmatrix} \\
P^{101} &= \begin{pmatrix} 0.18446602 & 0.48543689 & 0.33009709 \\ 0.18446602 & 0.48543689 & 0.33009709 \\ 0.18446602 & 0.48543689 & 0.33009709 \end{pmatrix} \qquad \vdots
\end{aligned}$$

O hon, gallwn sylwi ar ddwy beth:

- os yw pob rhes yn unfath, does dim ots pa cyflwr rydym yn dechrau ynddi;
- ar o rhyw nifer o gamau amser, mae $P^n = P^{n+1} = \lim_{n\to\infty} P^n$.

Pan mae'r sefyllfa hwn yn digwydd, dywedwn fod y system mewn *cyflwr-sefydlog*. Galwn ni'r rhesi o'r matrics $\lim_{n\to\infty} P^n$ y tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog o'r cadwyn Markov.

Cyflwr-Sefydlog DTMC

Gallwn ganfod tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog, π cadwyn Markov trwy ddatrys:

$$\underline{\pi} = \underline{\pi} P \tag{2.1}$$

ynghyd â'r cyfyngiad ychwanegol yn gorfodi $\underline{\pi}$ i fod fector tebygolrwyddau dilys:

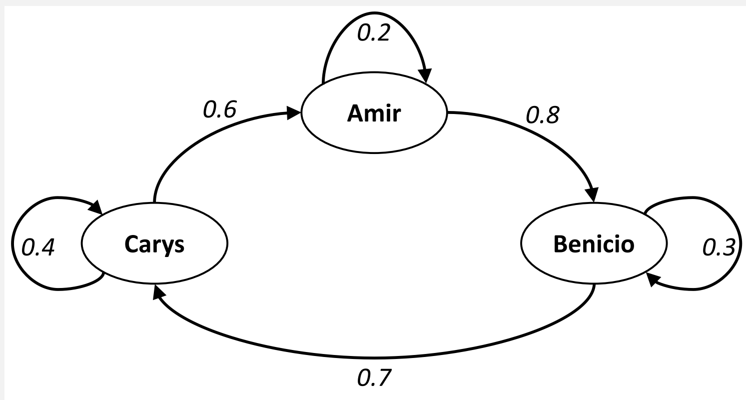
$$\sum \underline{\pi} = 1$$

[1] Trafonwn ni hwn ymhellach yn Adran 2.4

Gallwn ddatrys hon gan ddefnyddio dulliau algebra llinol.

Enghraifft 4 *Mae tri plentyn, Amir, Benicio, a Carys, yn chwarae pasio'r parcel. Mae nhw'n eistedd mewn trefn y Wyddor clocwedd. Gyda pob curiad y cerddoriaeth, bydd y plentyn yn pasio'r parsel i'w chwith yn glocwedd, neu'n cadw'r parsel am un curiad yn rhagor. Bydd Amir yn cadw'r parsel gyda thebygolrwydd 0.2, bydd Benicio yn cadw'r parsel gyda thebygolrwydd 0.3, a bydd Carys yn cadw'r parsel gyda thebygolrwydd 0.4.*
Ar ôl i ddigon o amser pasio er mwyn gallu tybio cyflwr-sefydlog, os ydym yn diffodd y cerddoriaeth ar hap, beth yw'r tebygolrwydd o bob plentyn yn dal y parsel?

Datrysiad i Enghraifft 4 *Bydd tynnu llun y cadwyn Markov yn helpu:*



Mae gennym:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

ac hoffwn ganfod $\underline{\pi}$ *trwy ddatrys:*

$$\begin{aligned} \underline{\pi} &= \underline{\pi} P \\ \sum \underline{\pi} &= 1 \end{aligned}$$

Yn rhoi

$$\begin{aligned} \pi_A &= 0.2\pi_A + 0.6\pi_C \\ \pi_B &= 0.8\pi_A + 0.3\pi_B \\ \pi_C &= 0.7\pi_B + 0.4\pi_C \\ 1 &= \pi_A + \pi_B + \pi_C \end{aligned}$$

Datrysiad i Enghraifft 4 (continuing from p. 20) *Mae'r dau hafaliad cyntaf yn rhoi'r holl cydrannau yn nhermau* π_C*:*

$$\begin{aligned}
\pi_A &= \frac{0.6}{1-0.2}\pi_C = \frac{3}{4}\pi_C \\
\pi_B &= \frac{0.8}{1-0.3}\pi_A = \frac{8}{7}\pi_A \\
&= \frac{8}{7}\left(\frac{3}{4}\pi_C\right) \\
&= \frac{6}{7}\pi_C
\end{aligned}$$

Mae amnewid i mewn i'r hafaliad olaf yn rhoi:

$$\begin{aligned}
\pi_A + \pi_B + \pi_C &= 1 \\
\frac{3}{4}\pi_C + \frac{6}{7}\pi_C + \pi_C &= 1 \\
\pi_C\left(\frac{3}{4} + \frac{6}{7} + 1\right) &= 1 \\
\frac{73}{28}\pi_C &= 1 \\
\pi_C &= \frac{28}{73}
\end{aligned}$$

Nawr mae gennym yr holl cydrannau yn nhermau π_C*:*

$$\begin{aligned}
\pi_C &= \frac{28}{73} \\
\pi_B &= \frac{6}{7}\pi_C = \frac{6}{7}\left(\frac{28}{73}\right) = \frac{24}{73} \\
\pi_A &= \frac{3}{4}\pi_C = \frac{3}{4}\left(\frac{28}{73}\right) = \frac{21}{73}
\end{aligned}$$

Ac felly'r tebygolrwyddau y bydd pob plentyn yn bennu'n dal y parsel yw $\underline{\pi} = ({}^{21}/_{73}, {}^{24}/_{73}, {}^{28}/_{72})$.

2.3 Cadwyni Markov Amser-Di-Dor

Fe elwir cadwyni Markov amser-arwahanol hwnnw gan fod y parth amser yw camau amser arwahanol, $n \in \mathbb{N}$. Gallwn hefyd diffinio cadwyni Markov, a phrosesau stocastig yn cyffredinol, pan mae'r parth amser yn di-dor, $t \in \mathbb{R}^+$.

Proses Stocastig Amser-Di-Dor

Hapfector yw broses stocastig amser-di-dor, y mae ei cydrannau wedi'i indecsio gan amser. Gallwn hefyd meddwl amdanno fel teulu o hapnewidynnau:

$$\{X_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$$

Cadwyn Markov amser-di-dor yw broses stocastig amser-di-dor, lle canlyniad bob un X_n yw elfen o set rhifadwy o gyflyrau, y gelwir y *gofod cyflwr*, ac sy'n bodloni'r *priodwedd Markov*. Mewn amser-di-dor, hwn yw:

Priodwedd Markov (Amser-Di-Dor)

Mae'r priodwedd Markov yn nodi bod $X_{t+\tau}$ yn dibynnu ar X_t yn unig, ac nid ar unrhyw cyflwr blaenorol X_s, $s < t$. Hynny yw:

$$\mathbb{P}(X_{t+\tau} = x_{t+\tau} \mid X_s = x_s \ \forall \ s \leq t) = \mathbb{P}(X_{t+\tau} = x_{t+\tau} \mid X_t = x_t)$$

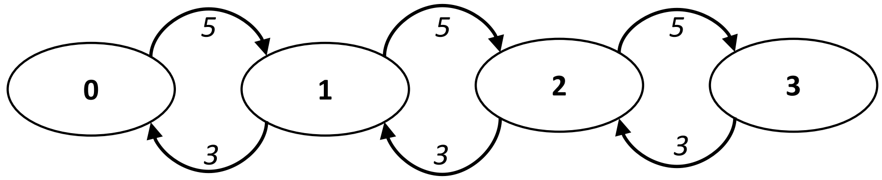
Ar gyfer cadwyn Markov amser-di-dor, diffinir y gofod cyflwr yn unfath i'r cadwyn Markov amser-arwahanol. Tybiwn fod y system yn newid cyflwr ar hap mewn amser, felly gadewch i $\underline{\pi}(t)$ dynodi'r fector tebygolrwydd o'r system ar amser t. Felly, yn lle matrics tebygolrwyddau trosi, nawr mae gennym *matrics cyfraddau trosi*, neu *matics generadu gorfychanion* Q, wedi'i diffinio fel bod:

$$\frac{d}{dt}\underline{\pi}(t) = \underline{\pi}(t)Q \tag{2.2}$$

lle:

- mae'r cofnod Q_{ij} yn dynodi'r cyfradd y mae'r system yn symud o gyflwr s_i i gyflwr s_j, os yw $i \neq j$, ac
- mae'r cofnod $-Q_{ii}$ yn cynrychioli'r cyfradd y mae'r system yn symud allan o gyflwr s_i.

Fel enghraifft, ystyriwch siop lyfrau elusennol, sy'n derbyn rhoddiad o The Da Vinci Code gan Dan Brown yn rheolaidd, ac hefyd yn gwerthu'r llyfr yn rheolaedd. Maent yn derbyn gymait fel mae ganddynt polisi ond i gadw tri copi ar y mwyaf mewn stoc ar unrhyw bwynt, a ni fydd yn derbyn mwy o rhoddiadau os oes gennyn nhw tri copi yn barod. Gadewch i n bod y nifer o gopïau o The Da Vinci Code yn y siop. Ar gyfartaledd maent yn derbyn 5 rhoddiad yr wythnos, ac yn gwerthu 3 copi yr wythnos. Mae'r cadwyn Markov wedi'i delweddu isod:



Y gofod cyflwr yw $S = \{0, 1, 2, 3\}$, ac fe rhoddir y matrics cyfraddau trosi gan:

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Yna o Hafaliad 2.2:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\pi_0(t) &= -5\pi_0(t) + 3\pi_1(t) \\ \frac{d}{dt}\pi_1(t) &= 5\pi_0(t) - 8\pi_1(t) + 3\pi_2(t) \\ \frac{d}{dt}\pi_2(t) &= 5\pi_1(t) - 8\pi_2(t) + 3\pi_3(t) \\ \frac{d}{dt}\pi_3(t) &= 5\pi_2(t) - 3\pi_3(t) \end{aligned}$$

Mae'r hafaiadau differol hyn yn rhoi dadansoddiad trosaidd y cadwyn Markov, ond, ni fydd hwn yn cael ei ystyried ymhellach yn y cwrs.

Amseroedd Oedi

Amser oedi yw faint o amser mae cadwyn Markov amser-di-dor yn aros mewn un cyflwr penodol cyn newid cyflwr. Mae'r amser mae'n cymryd i newid cyflwr yn hapnewidyn yn dibynnu ond ar y cyflwr presennol, a dim o'i hanes blaenorol. Felly, gall yr amseroedd rhwng newidiadau cyflwr cael eu disgrifio gan dosraniad Esbonyddol.

Yn penodol, gadewch i T_{ij} bod yr amser a gwarir yng nghyflwr s_i cyn newid i gyflwr s_j, yna mae $T_{ij} \sim$ Expon(Q_{ij}). Nawr ystyriwch yr amser y mae'n gwario yna cyn symud i unrhyw cyflwr arall, hynny yw yr amser oedi, $\widetilde{T}_i$:

Amseroedd Oedi CTMC

Theorem: Mae'r amser oedi yng nhyflwr i wedi dosrannu'n Esbonyddol gyda chyfradd $\sum_{i \neq j} Q_{ij}$. Hynny yw $\widetilde{T}_i \sim$ Expon $\left(\sum_{i \neq j} Q_{ij}\right)$.
Prawf: Gwyddon fod $\widetilde{T}_i = \min_{i \neq j} T_{ij}$. Ystyriwch CDF $\widetilde{T}_i$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\widetilde{T}_i > t) &= \mathbb{P}\left(\min_{i \neq j} T_{ij} > t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \neq j} T_{ij} > t\right) \\
&= \prod_{i \neq j} \mathbb{P}\left(T_{ij} > t\right) \\
&= \prod_{i \neq j} e^{-Q_{ij} t} \\
&= e^{-\sum_{i \neq j} Q_{ij} t}
\end{aligned}$$

felly

$$\widetilde{T}_i \sim \text{Expon}\left(\sum_{i \neq j} Q_{ij}\right).$$

Nawr gallwn dilysu a dehongli'r priodwedd Markov: mae'r tebygolrwydd o fod mewn rhyw cyflwr penodol ar amser $t + \tau$ yn dibynnu ond ar y cyflwr ar amser t, ac nid ar unrhyw cyflwr cyn amser t, na chwaith ar pa mor hir mae'r system eisoes wedi bod yn y cyflwr presennol. Mae hwn yn dod o briodwedd digofiant y dosraniad Esbonyddol.

Dadansoddiad Cyflwr-Sefydlog

Yn gyffredinol mae'r matrics cyfraddau trosi cadwyn Markov amser-di-dor yn rhoi'r cyfradd y mae'r cyflyrau yn newid, hynny yw $\frac{d}{dt}\pi(t) = \pi(t)Q$. Rydym wedi dweud nad ydym yn ystyried dadansoddiad trosaidd yn y cwrs hon. Ond, gallwn dweud rhywbeth am y system pan mae mewn cyflwr-sefydlog. Mewn cyflwr-sefydlog, gwyddon fod $\frac{d}{dt}\pi(t) = 0$, hynny yw, nad yw'r fector cyflwr $\pi(t)$ yn newid rhagor. Felly:

Cyflwr-Sefydlog CTMC

Gallwn ganfod tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog, π cadwyn Markov trwy ddatrys:

$$\underline{\pi} Q = \underline{0} \tag{2.3}$$

ynghyd â'r cyfyngiad ychwanegol yn gorfodi $\underline{\pi}$ i fod fector tebygolrwyddau dilys:

$$\sum \underline{\pi} = 1$$

Enghraifft 5 *Ystyriwch y cadwyn Markov y diffinir uchod sy'n modelu'r nifer o gopïau or The Da Vinci Code sydd gan sion elusen. Fan hyn $S = \{0, 1, 2, 3\}$ ac*

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Beth yw'r tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog rhediad hir o bod ym mhob cyflwr?

Datrysiad i Enghraifft 5 *Mae datrys $\underline{\pi} Q = \underline{0}$ ynghyd â $\sum \underline{\pi} = 1$ yn rhoi'r system canlynol o hafaliadau:*

$$-5\pi_0 + 3\pi_1 = 0 \tag{2.4}$$
$$5\pi_0 - 8\pi_1 + 3\pi_2 = 0 \tag{2.5}$$
$$5\pi_1 - 8\pi_2 + 3\pi_3 = 0 \tag{2.6}$$
$$5\pi_2 - 3\pi_3 = 0 \tag{2.7}$$
$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \tag{2.8}$$

Dyma system o bump hafaliad llinol gyda phedwar newidyn anhysbys. Gallwn defnyddio unrhyw dull a hoffwn i ddatrys rhain. Fan hyn gadewch i ni ddefnyddio'r pedwar hafaliad cyntaf i rhoi pob newidyn yn nhermau π_0, yna defnyddiwn yr hafaliad olaf i ganfod werth π_0:
Ar gyfer π_1 yn nhermau π_0 ystyriwch Hafaliad 2.4:

$$\begin{aligned} -5\pi_0 + 3\pi_1 &= 0 \\ 3\pi_1 &= 5\pi_0 \\ \pi_1 &= \frac{5}{3}\pi_0 \end{aligned}$$

Datrysiad i Enghraifft 5 (continuing from p. 25) *Ar gyfer π_2 yn nhermau π_0 ystyriwch Hafaliad 2.5 ac amnewidiwch $\pi_1 = \frac{5}{3}\pi_0$:*

$$\begin{aligned}
5\pi_0 - 8\pi_1 + 3\pi_2 = 0 \\
3\pi_2 &= -5\pi_0 + 8\pi_1 \\
3\pi_2 &= -5\pi_0 + 8\left(\frac{5}{3}\pi_0\right) \\
3\pi_2 &= -\frac{15}{3}\pi_0 + \frac{40}{3}\pi_0 \\
3\pi_2 &= \frac{25}{3}\pi_0 \\
\pi_2 &= \frac{25}{6}\pi_0
\end{aligned}$$

Ar gyfer π_3 yn nhermau π_0 ystyriwch Hafaliad 2.7 ac amnewidiwch $\pi_2 = \frac{25}{6}\pi_0$:

$$\begin{aligned}
5\pi_2 - 3\pi_3 = 0 \\
-3\pi_3 &= -5\pi_2 \\
-3\pi_3 &= -5\left(\frac{25}{6}\pi_0\right) \\
-3\pi_3 &= -\frac{125}{6}\pi_0 \\
\pi_3 &= \frac{125}{18}\pi_0
\end{aligned}$$

Yn olad, defnyddiwch Hafaliad 2.8 i ganfod werth π_0:

$$\begin{aligned}
\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \\
\pi_0 + \frac{5}{3}\pi_0 + \frac{25}{6}\pi_0 + \frac{125}{18}\pi_0 &= 1 \\
\left(1 + \frac{5}{3} + \frac{25}{6} + \frac{125}{18}\right)\pi_0 &= 1 \\
\left(\frac{18}{18} + \frac{30}{18} + \frac{75}{18} + \frac{125}{18}\right)\pi_0 &= 1 \\
\frac{248}{18}\pi_0 &= 1 \\
\frac{124}{9}\pi_0 &= 1 \\
\pi_0 &= \frac{9}{124}
\end{aligned}$$

Datrysiad i Enghraifft 5 (continuing from p. 26) *A thrwy amnewid y gwerth hon i mewn i'r mynegiadau eraill cawn:*

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{9}{124} \\
\pi_1 &= \frac{5}{3} \times \frac{9}{124} = \frac{15}{124} \\
\pi_2 &= \frac{25}{6} \times \frac{9}{124} = \frac{75}{248} \\
\pi_3 &= \frac{125}{18} \times \frac{9}{124} = \frac{125}{248}
\end{aligned}$$

Felly $\underline{\pi} = \left({}^{9}/_{124}, {}^{15}/_{124}, {}^{75}/_{248}, {}^{125}/_{248}\right)$.

Cadwyn Markov Mewnblanedig

Mae cadwyn Markov mewnblanedig o gadwyn Markov amser-di-dor yn cadwyn Markov amser-arwahanol sy'n disgrifio'r un system. Mae gennym:

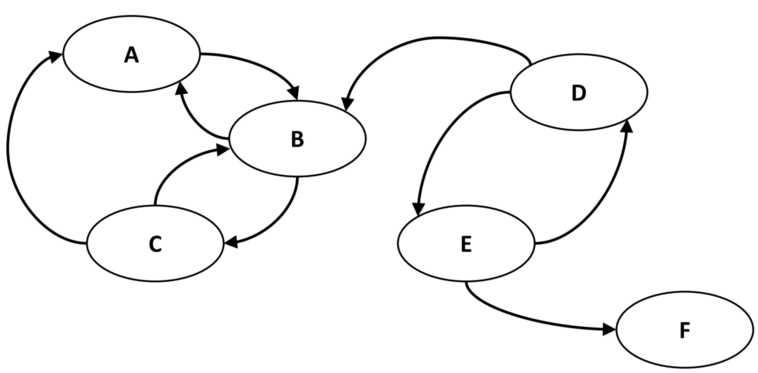
$$P = Q\Delta t + \mathbb{I}$$

lle $\mathbb{I}$ yw'r matrics unfathol o'r un main â Q, a Δt yw'r hyd amser caiff un cam amser ei ddiffinio fel yn y cadwyn mewnblanedig. Mae angen i ni gymryd Δt i fod digon bach, ac felly yn gyffredinol gallwn cymryd:

$$\Delta t = \frac{1}{\max_i |Q_{ii}|}$$

2.4 Dosbarthu Cyflyrau

Gallwn dosbarthu cyflyrau yn ôl eu cyrraeddadwyedd. Ystyriwch y cadwyn Markov isod:



Sylwadau:

- Unwaith bod y system yn cyflwr A, B, neu C, yna mae ond yn gallu cyrraedd cyflyrau A, B, neu C yn y dyfodol;
- Unwaith bod y system wedi cyrraedd cyflwr F, yna bydd yn aros yng nhyflwr F am byth;
- Os yw'r system mewn cyflwr D neu E, yn y pen draw bydd rhaid iddo mynd i gyflwr A, B, C, neu F, a ni fydd yn dychweled i gyflwr D neu E.

Mae gennym iaith gallwn defnyddio i ddisgrifio'r senarios hyn.

Cyflyrau Cyrraeddadwy a Chyfathrebu

Diffiniad: Dywedwn fod cyflwr s_j yn *gyrraeddadwy* o gyflwr s_i os, yn dechrau o gyflwr s_j, mae'n bosib trosi i gyflwr s_j ar rhyw adeg yn y dyfodol. Ysgrifennwn $s_i \rightsquigarrow s_j$.

Diffiniad: Dywedwn fod dwy gyflwr s_i ac s_j sy'n cyrraeddadwy o'i gilydd yn *cyfathrebu*. Ysgreifennwn $s_i \leftrightsquigarrow s_j$.

Nodwch fod y perthynas $\leftrightsquigarrow$ yn berthynas cywerthwedd, felly:

- $s_i \leftrightsquigarrow s_i$ ar gyfer pob s_i,
- os yw $s_i \leftrightsquigarrow s_j$ yna mae $s_j \leftrightsquigarrow s_i$,
- os yw $s_i \leftrightsquigarrow s_j$ ac $s_j \leftrightsquigarrow s_k$, yna mae $s_i \leftrightsquigarrow s_k$.

Gallwn ymrannu'r gofod cyflwr yn ddosbarthau cywerthedd, fel bod dau cyflwr s_i ac s_j yn perthyn i'r un dosbarth os ac yn unig os yw $s_i \leftrightsquigarrow s_j$. Fe elwir rhain yn **ddosbarthau anostyngadwy**.

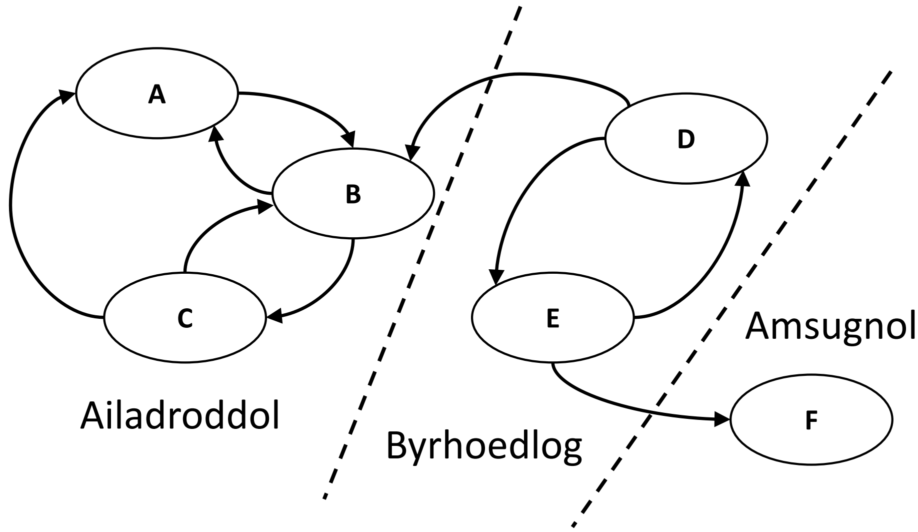
Yn yr enghraifft uchod, mae yna tri dosbarth: $\mathcal{C}_1 = \{A, B, C\}$, $\mathcal{C}_2 = \{D, E\}$ ac $\mathcal{C}_3 = \{F\}$. Mae gan pob un gwahanol priodweddau:

- Ond cyflyrau yn $\mathcal{C}_1$ sy'n gyrraeddadwy o gyflyrau yn $\mathcal{C}_1$. Yn debyg gyda $\mathcal{C}_3$. Fe elwir rhain yn dosbarthau *caeedig*.
- Mae cyflyrau tu allan i $\mathcal{C}_2$ yn gyrraeddadwy o gyflyrau o fewn $\mathcal{C}_2$. Fe elwir rhain yn dosbarthau *nad yw'n gaeedig*.

Cyflyrau Byrhoedlog, Ailadroddol, ac Amsugnol

Diffiniad:
- Gelwir cyflyrau sy'n perthyn i ddosbarth anostyngadwy nad yw'n caeedig yn *fyrhoedlog*.
- Gelwir cyflyrau sy'n perthyn i ddosbarth anostyngadwy caeedig yn *ailadroddol*.
- Gelwir cyflyrau ailadroddol sydd yn berthyn i ddosbarth ar ben eu hunain yn *amsugnol*.

Felly gallwn dosbarthu'r cyflyrau yn ein enghraifft:



Cyfnodedd

Ar gyfer cadwyni Markov amser-arwahanol mae yna ystyriaeth ychwanegol wrth ddosbarthu cyflyrau: cyfnodedd. Yn fyr, mae hwn yn golygu bod cyflwr yn gyfnodol os yw'r cadwyn ond yn gallu dychweled i'r cyflwr honno mewn camau amser sy'n lluosymiau o rhyw cyfanrif mwy nag 1.

Er enghraifft ystyriwch yr enghraifft o froga'n neidio: os yw'r broga yn dechrau or deilen-lili sy'n odrif, fe all ond cyrraedd deilen-lili sy'n eilrif yn y cam amser nesaf. Felly, mae gan bob cyflwr cyfnod-2.

Fe elwir cyflwr gyda chyfnod-1 yn *ddigyfnod*.

Bodolaeth Cyflyrau-Sefydlog

Cadwyni Markov Amser-Arwahanol: Os yw cadwyn Markov yn cynnwys ond un dosbarth anostyngadwy, ac mae pob cyflwr yn ddigyfnod, yna mae'n sicr o gael dosraniad cyflwr-sefydlog unigryw.

Cadwyni Markov Amser-Di-Dor: Mae cadwyn Markov amser-di-dor yn sicr o gael dosraniad cyflwr-sefydlog unigryw os oes gan ei cadwyn Markov mewnblanedig dosraniad cyflwr-sefydlog unigryw.

Pennod 3

Theori Ciwio

Deilliannau dysgu:

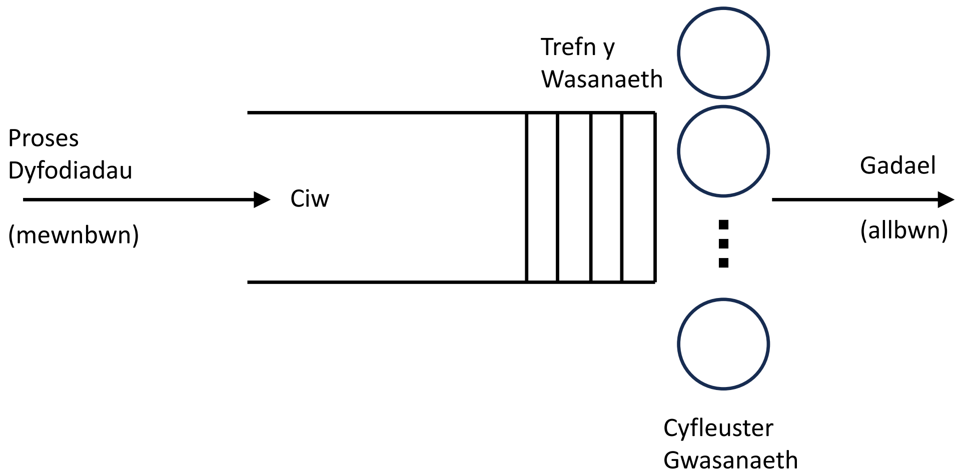
- Gallu deall iaith a nodiant theori ciwio;
- Gallu deillio dosraniadau cyflwr-sefydlog ar gyfer ciwiau capasiti meidraidd;
- Gallu deillio dosraniadau cyflwr-sefydlog ar gyfer ciwiau anfeidraidd;
- Gallu perfformio dadansoddiad cost a cymharu senarios ar gyfer systemau ciwio.

3.1 Cyflwyniad

Pan fod dilyniant o gwsmeriaid yn cyrraedd i gyfleuster gwasanaeth yn angne rhyw fath o wasanaeth i gael ei berfformio arnynt, yna dywedwn fod hwn yn system ciwio. Fel arfer bydd angen i'r cwsmeriaid sy'n cyrraedd i'r gyfleuster gwasanaeth aros i weinydd fod yn rhydd cyn derbyn eu gasanaeth eu hunain, hynny yw aros mewn ciw.

Mae enghreifftiau o systemau ciwio yn cynnwys cwsmeriaid yn cyrraedd i gownter siop; awyrennau yn aros i lanio ar redfa; neu galwadau yn aros i gael eu prosesu yn switsfwrdd. Ym mha bynnag sefyllfa byddwn yn modelu, defnyddiwn y term **cwsmer** i gyfeirio at yr endid sydd angen gwasanaeth; **gwasanaeth** i gyfeirio at yr amser y mae'r cwsmew yn defnyddio adnodd; a **gweinydd** i gyfeirio at yr adnodd ei hun.

Mae'r diagram isod yn dangos system ciwio:

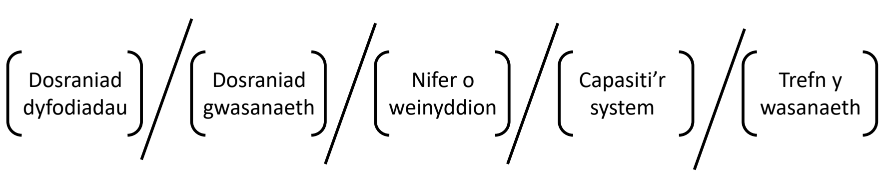


Caidd pump cydran ei labeli:

- **Proses dyfodiadau:** Mae hwn yn disgrifio'r modd y mae'r cwsmeriaid yn cyrraedd i'r system, neu ymuno â'r ciw. Mae'n gyffredin i'w ddisgrifio gan y dosraniad o'r *amseroedd rhwng-dyfodiad*, hynny yw yr amser rhwng dau dyfodiad olynol.
- **Ciw:** Mae hwn yn cyfeirio at yr ardal lle mae cwsmeriaid yn aros am eu gwasanaeth, weithiau fe'i helwir yn byffer. Fe all fod capasiti meidraidd neu anfeidraidd yn yr ardal ciwio. Gyda byffer meidraidd, unwaith y mae'n llawn, caiff cwsmeriaid newydd sy'n cyrraedd ei wrthod.
- **Cyfleuster Gwasanaeth:** Mae hwn yn cyfeirio at yr adnoddau sydd ar gael er mwyn darparu'r gwasanaeth, a'r amser caiff ei wario yn derbyn y gwasanaeth.
- **Trefn y Wasanaeth:** Mae hwn yn cyfeirio at y trefn y mae'r cwsmeriaid sy'n aros yn cael ei dewis er mwyn derbyn wasanaeth.
- **Gadael:** Mae hwn yn cyfeirio at sut mae cwsmeriaid yn gadael y system ar ôl derbyn gwasanaeth. Fel arfer bydd hwn syth ar ôl wasanaeth.

3.2 Nodiant Kendall

Cafodd ei datblygu gad D.G. Kendall yn 1953, a'i ehangu gan A.M. Lee yn 1966, mae'r nodiad yn ein galluogi i ddisgrifio prif priodweddau ciw yn llawfer. Mae'n safonol iawn ym maes ymchwil weithrediadol. Mae pump cydran i'w ystyried:



Er enghraifft: $M/G/3/\infty/LIFO$. Mae pob elfen rhwng y slaesys yn disgrifio'r cydran y mae'n ei gyfeirio at. Mae'r tabl isod yn crynhoi rhau o'r gwerthoedd fe allant cymryd:

Cydran	Elfen	Esboniad
Dosraniad dyfodiadau	M	*Markovaidd*. Amseroedd rhwng-dyfodiad Esbonyddol.
	M^x	*Markovaidd gyda swp-dyfodiadau*. Pan ddigwyddith ddyfodiad, mae x cwsmer yn cyrraedd ar yr un pryd.
	D	*Penderfyniaethol*. Mae gan yr amseroedd rhwng-dyfodiad gwerth cyson.
	E_k	*Erlang*. Mae gan yr amseroedd rhwng-dyfodiad dosraniad Erlang gyda pharamedr k. Hynny yw, swm k hapnewidyn Esbonyddol annibynnol.
	G	*Cyffredinol*. Mae gan yr amseroedd rhwng-dyfodiad unrhyw dosraniad tebygolrwydd cyffredinol.
Dosraniad gwasanaeth	M	*Markovaidd*. Amseroedd gwasanaeth Esbonyddol.
	D	*Penderfyniaethol*. Mae gan yr amseroedd gwasanaeth gwerth cyson.
	E_k	*Erlang*. Mae gan yr amseroedd gwasanaeth dosraniad Erlang gyda pharamedr k. Hynny yw, swm k hapnewidyn Esbonyddol annibynnol.
	G	*Cyffredinol*. Mae gan yr amseroedd gwasanaeth unrhyw dosraniad tebygolrwydd cyffredinol.
Nifer o weinyddion	$c = 1, 2, 3 \dots$	Nifer cyfanrifol o weinyddion.
	∞	Nifer anfeidraidd o weinyddion.
Capasiti'r system	$K = 1, 2, 3 \dots;\ K \geq c$	Capasity cyfanrifol yn fwy na'r nifer o weinyddion.
	∞	Capasity anfeidraidd.
Trefn y wasanaeth	$FIFO$	*Cyntaf-i-mewn-cyntaf-allan*.
	$LIFO$	*Olaf-i-mewn-cyntaf-allan*.
	$SIRO$	*Gwasanaethau-ar-hapddrefn*.
	PQ	*Ciwio â blaenoriaethau*. Mae gan rhai cwsmeriaid blaenoriaeth dros eraill a chaiff eu dewis i dderbyn gwasanaeth cyn eraill.
	PS	*Rhannu prosesyddion*. Mae pob cwsmer yn dechrau gwasanaeth yn syth heb aros, ac mae'r gyfradd gwasanaeth yn arafu po fwyaf o cwsmeriaid sy'n bresennol.

Rhai enghreifftiau:

- $M/D/3/\infty/$FIFO:
  Dyfodiadau Markovaidd, amserau gwasanaeth penderfyniaethol, 3 gweinydd, capasiti anfeidraidd, trefn gwasanaeth cyntaf-i-mewn-cyntaf-allan.
- $G/G/\infty/\infty/$PS:
  Dyfodiadau cyffredinol, amseroedd gwasanaeth cyffredinol, nifer anfeidraidd o weinyddion, capasity anfeidraidd, trefn gwasanaeth rhannu prosesyddion.
- $M/M/1/12/$SIRO:
  Dyfodiadau Markovaidd, amseroedd gwasanaeth Markovaidd, gweinydd sengl, capasity o 12, trefn gwasanaeth ar hapddrefn.

Yn gyffredinol, os ond rhoddir y tri cydran gyntaf, yna tybiwn capasiti anfeidraidd a trefn gwasanaeth FIFO:

- $D/E_4/2$:
  Dyfodiadau penderfyniaethol, amseroedd gwasanaeth wedi dosrannu â dosraniad Erlang paramadr 4, 2 gweinydd, capasity anfeidraidd, trefn gwasanaeth cyntaf-i-mewn-cyntaf-allan.
- $M/M/1$:
  Dyfodiadau Markovaidd, amseroedd gwasanaeth Markovaidd, gweinydd sengl, capasity anfeidraidd, trefn gwasanaeth cyntaf-i-mewn-cyntaf-allan.

3.3 Mesurau Sydd o Ddiddordeb

Wrth dadansoddi system ciwio, beth bynnag y proses cyrraedd, y dosraniad amser gwasanaeth, neu trefn y wasanaeth, mae rhai mesurau sydd o ddiddordeb ac sy'n defnyddiol i ni eu dadansoddi. Fan hyn byddwn yn trafod ciwiau capasity anfeidraidd.

Yn gyntaf, ystyriwch fod cwsmeriaid yn cyrraedd i'r ciw gyda chyfradd λ pob uned amser, a bod cwsmeriaid yn cael ei weini gyda chyfradd μ pob uned amser. Hynny yw, beth bynnag dosraniad sydd gan yr amseroedd rhwng-dyfodiad mae ganddo cymedr $1/\lambda$, a beth bynnag dosraniad sydd gan yr amseroedd gwasanaeth, mae ganddo cymedr $1/\mu$. Ystyriwch hefyd bod yna c o weinyddion paralel.

Yna:

Arddwysedd Traffig

Arddwysedd traffig ciw yw:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} \tag{3.1}$$

Mae'r arddwysedd traffig ρ yn fesur defnyddiol iawn o giw. Y rhifiadur λ yw'r cyfradd y mae cwsmeriaid yn ymuno â'r ciw, a'r enwadur $c\mu$ yw'r cyfradd effeithiol uchaf y bydd cwsmeriaid yn gadael y gyfleuster gwasanaeth (pan nad yw'r ciw yn brysur bydd y cyfradd effeithiol yn llai na hwn). Os yw'r rhifiadur yn fwy na'r enwadur, yna fe fydd mwy o gwsmeriaid yn ymuno â'r ciw na all cael eu gweini, a bydd maint y ciw yn tyfu a thyfu. Felly:

Amod Cyflwr-Sefydlog

- Os yw $\rho \geq 1$ yna disgwylir i'r ciw tyfu'n amhenodol;
- Os yw $\rho < 1$ yna mae'r system yn *sefydlog*, a nad yw maint y ciw yn tyfu'n amhenodol.

O hyn ymlaen byddwn ond yn ystyried systemau sefydlog, lle disgwylir i'r ciw cyrraedd rhyw fath o gyflwr-sefydlog, fel cadwyn Markov. Newidynnau eraill sydd mo ddiddordeb yw:

- L: nifer cymedrig o gwsmeriaid yn y system mewn cyflwr-sefydlog;
- L_q: nifer cymedrig o gwsmeriaid yn y ciw mewn cyflwr-sefydlog;
- W: yr amser cymedrig y mae cwsmeriaid yn gwario yn y system mewn cyflwr-sefydlog;
- W_q: yr amser cymedrig y mae cwsmeriaid yn gwario yn y ciw mewn cyflwr-sefydlog;
- P_n: y tebygolrwydd o gael n cwsmer yn y system mewn cyflwr-sefydlog.

Mae gennym canlyniad enwog gan J. Little yn 1954 (y profwyd yn hwyrach yn 1961) sy'n cysylltu dau o rhain ar gyfer ciw sefydlog, ar gyfer unrhyw trefn wasanaeth a unrhyw dosraniadau amser rhwng-dyfodiad ac amser gwasanaeth. Mae'n canlyniad rhyfeddol bod fformiwla mor syml yn gallu disgrifio amrywiaeth enfawr o ciwiau gwahanol:

Deddfau Little

$$L = \lambda W \tag{3.2}$$
$$L_q = \lambda W_q \tag{3.3}$$

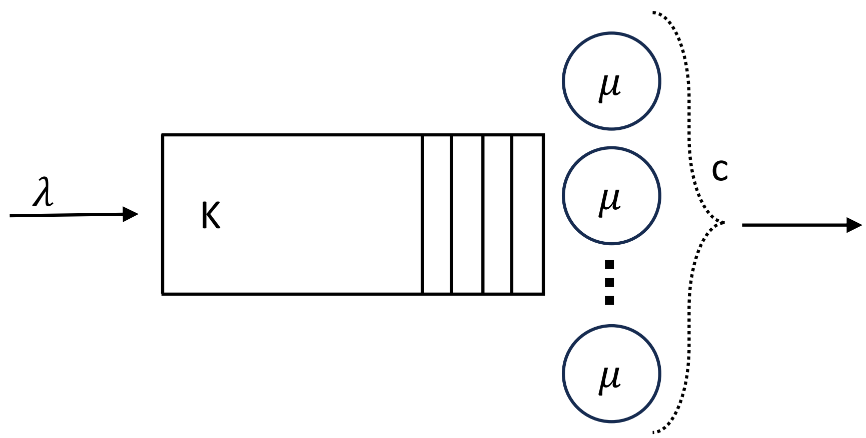
Gallwn ganfod canlyniadau eraill yn hewristig, er enghraifft::

- $W_q = W - {}^1\!/\!_\mu$, mae'r amser cymedrig a wariwyd yn y ciw yn hafal i'r amser cymedrig a wariwyd yn y system minws yr amser gwasanaeth cymedrig.
- mae'r arddwysedd traffig ρ hefyd prysurdeb cymedrig y gweinyddwyr mewn cyflwr-sefydlog, hynny yw'r cyfran o'r amsed y mae gwinydd yn brysur.
- $L_q = \lambda W_q = \lambda\left(W - {}^1\!/\!_\mu\right) = \lambda W - \rho$.
- $P_0 = 1 - \rho$, mae'r tebygolrwydd bod neb yn y system yn hafal i'r tebygolrwydd nad yw'r gweinydd yn brysur, hynny yw 1 minws y tebygolrwydd bod a gweinydd yn brysur.

Nawr byddwn yn deillio mynegiadau ar gyfer nifer o'r mesurau hyn ar gyfer ciwiau Markovaidd. Dechreuwn gyda system capasity meidraidd gan ei fod yn haws i'w ddelio gyda, ac yna ystyriwn system capasity anfeidraidd.

3.4 Ciw $M/M/c/K/$FIFO

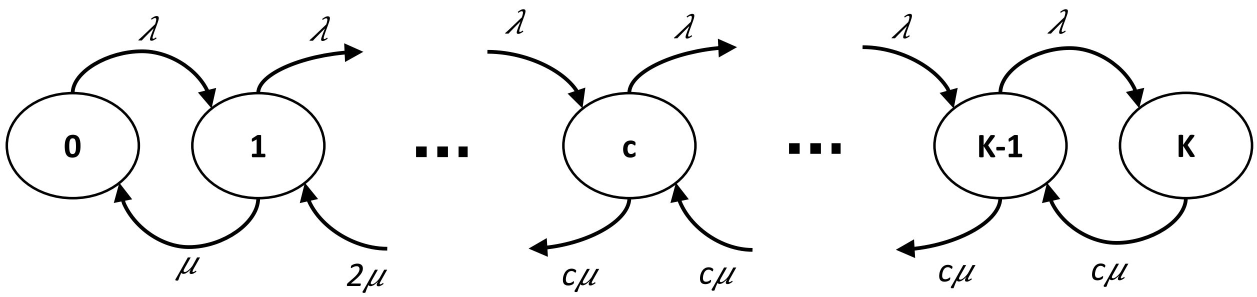
Yn gyntaf ystyriwch ciw $M/M/c/K/$FIFO gyda chyfradd dyfodiad λ a chyfradd gwasanaeth μ. Dangosir hwn isod:



Nodwch yn y diagram hon, mae yna llinell fertigol yn cau agoriad y ciw, mae hwn yn dynodi system gyda chapasiti meidraidd. Gallwn dadansoddi hwn fel cadwyn Markov amser-di-dor. Mae'r dyfodiadau a'r gwasanaethau Markovaidd yn cyfateb i amseroedd oedi Esbonyddol y cyflyrau Markov, lle mae'r priodwedd digofiant wedi bodloni. Nawr:

- Gadewch i $S = \{0, 1, 2, \dots, K-1, K\}$ bod y gofod cyflwr, yn dynodi'r nifer o gwsmeriaid yn y system.
    - dynodir 0 nad oes unrhyw gwsmeriaid yn y system;
    - dynodir $i \in \{1, \dots, c\}$ bod i cwsmer yn derbyn gwasanaeth, a does dim yn ciwio;
    - dynodir $i \in \{c+1, \dots K\}$ bod c cwsmer yn derbyn gwasanaeth, a $i - c$ yn ciwio.
- Gadewch i Q_{ij} bod y cyfradd y mae'r system yn symud o gyflwr i i gyflwr j. Felly:
    - mae mynd o gyflwr i i gyflwr $i+1$ yn golygu fod cwsmer wedi cyrraedd. Mae hwn yn digwydd gyda chyfradd λ.
    - mae mynd o gyflwr i i gyflwr $i-1$ yn golygu fod cwsmer yn gorffen wasanaeth. Pan fod $i \leq c$ cwsmer yn wasanaeth, maw hwn yn digwydd gyda chyfradd $i\mu$, oherwydd arosodiad prosesau Poisson. Pan fod $i > c$ cwsmer yn y system, mae hwn yn digwydd gyda chyfradd $c\mu$.

Isod mae delwedd o'r cadwyn Markov:



Enghraifft 6 *Ystyriwch ciw $M/M/2/3/$FIFO.*

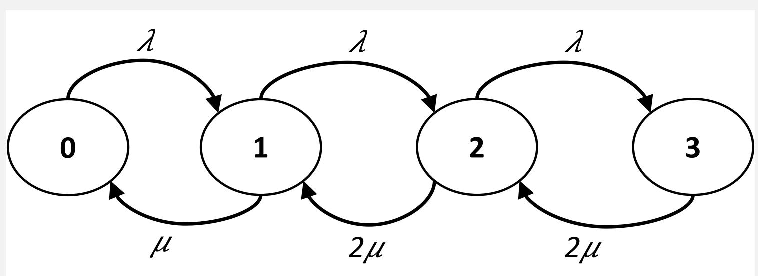
(a) Tynnwch lun y cadwyn Markov ac ysgrifennwch i lawr y matrics cyfraddau trosi.

(b) Canfyddwch y tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog.

(c) Os yw $\lambda = 3$ a $\mu = 5$, canfyddwch ρ, L, W, L_q, a W_q.

Datrysiad i Enghraifft 6 *Yn eu tro:*

(a) Cawn:



gyda $S = \{0, 1, 2, 3\}$ ac:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix}$$

(b) Trwy ddatrys $\underline{P}Q = 0$ ynghyd â $\sum \underline{P} = 1$ cawn:

$$\begin{aligned} \lambda P_0 &= \mu P_1 \\ (\lambda+\mu)P_1 &= \lambda P_0 + 2\mu P_2 \\ (\lambda+2\mu)P_2 &= \lambda P_1 + 2\mu P_3 \\ 2\mu P_3 &= \lambda P_2 \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 &= 1 \end{aligned}$$

Datrysiad i Enghraifft 6 (continuing from p. 36) *Nawr i ddatrys byddwn yn rhoi pob newidyn yn nhermau P_0, ac yna defnyddio'r hafaliad olaf i ganfod gwerth P_0. Yn gyntaf P_1:*

$$\begin{aligned}\lambda\mu P_1 &= P_0\\ P_1 &= \frac{\lambda}{\mu}P_0\end{aligned}$$

Nawr P_2:

$$\begin{aligned}\lambda P_0 + 2\mu P_2 &= (\lambda+\mu)P_1\\ \lambda P_0 + 2\mu P_2 &= (\lambda+\mu)\frac{\lambda}{\mu}P_0\\ 2\mu P_2 &= \left(\frac{\lambda^2}{\mu} + \lambda - \lambda\right)P_0\\ P_2 &= \frac{\lambda^2}{2\mu^2}P_0\end{aligned}$$

Nawr P_3:

$$\begin{aligned}2\mu P_3 &= \lambda P_2\\ P_3 &= \frac{\lambda}{2\mu}P_2\\ P_3 &= \frac{\lambda}{2\mu}\left(\frac{\lambda^2}{2\mu^2}\right)P_0\\ P_3 &= \frac{\lambda^3}{4\mu^3}P_0\end{aligned}$$

A nawr:

$$\begin{aligned}P_0 + P_1 + P_2 + P_3 &= 1\\ P_0\left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{4\mu^3}\right) &= 1\\ P_0 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{4\mu^3}\right)}\end{aligned}$$

Datrysiad i Enghraifft 6 (continuing from p. 37) *Felly:*

$$P_0 = \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}+\frac{\lambda^3}{4\mu^3}\right)}$$
$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu\left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}+\frac{\lambda^3}{4\mu^3}\right)}$$
$$P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2\left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}+\frac{\lambda^3}{4\mu^3}\right)}$$
$$P_3 = \frac{\lambda^3}{4\mu^3\left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}+\frac{\lambda^3}{4\mu^3}\right)}$$

(c) Mae amnewid $\lambda = 3$ *a* $\mu = 5$ *yn rhoi:* $P_0 = \frac{500}{917}$, $P_1 = \frac{300}{917}$, $P_2 = \frac{90}{917}$, *ac* $P_3 = \frac{27}{917}$. *Yna:*

$$L = \sum_{i=0}^{3} iP_i = \frac{300}{917} + \left(2 \times \frac{90}{917}\right) + \left(3 \times \frac{27}{917}\right) = \frac{561}{917}$$

$$W = \frac{1}{\lambda}L = \frac{1}{3} \times \frac{561}{917} = \frac{187}{917}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{187}{917} - \frac{1}{5} = \frac{18}{4585}$$

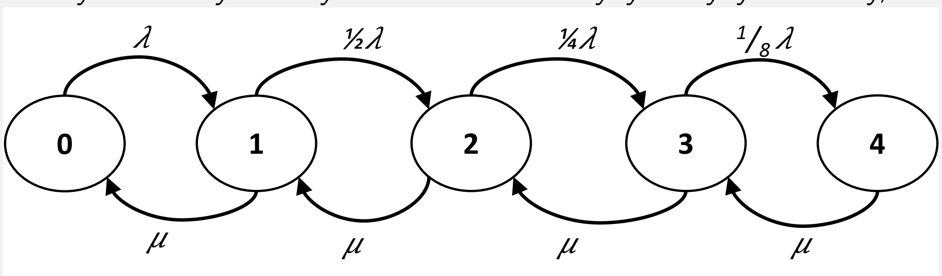
$$L_q = \lambda W_q = 3 \times \frac{18}{4585} = \frac{54}{4585}$$

Enghraifft arall:

Enghraifft 7 *Ystyriwch ciw* $M/M/1/4$, *lle mae cwsmeriaid yn ddiamynedd. Os yw cwsmer yn cyrraedd pan fod* n *cwsmer yn barod yn y system, yna byddant ond yn ymuno â'r ciw gyda thebygolrwydd* $\frac{1}{2^n}$. *Canfyddwch y tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog pan mae* $\lambda = 2$ *a* $\mu = 1$. *Beth yw'r cyfran o'r cwsmeriaid sy'n cyrraedd nad yw'n ymuno â'r ciw?*

Nodwch y gelwir y fath o ymddygiad hyn yn *balcio*.

Datrysiad i Enghraifft 7 *Oherwydd teneuo Poisson, mae hwn dal yn gadwyn Markov amser-di-dor, lle mae'r cyfraddau dyfodiad yn 'teneuo' wrth i'r cyflyrau cynyddu. Felly, cawn:*



mae datrys $\underline{P}Q = 0$ *yn rhoi:*

$$\begin{aligned}
\lambda P_0 &= \mu P_1 \\
\left(^1\!/_2\lambda + \mu\right) P_1 &= \lambda P_0 + \mu P_2 \\
\left(^1\!/_4\lambda + \mu\right) P_2 &= {}^1\!/_2\lambda P_1 + \mu P_3 \\
\left(^1\!/_8\lambda + \mu\right) P_3 &= {}^1\!/_4\lambda P_2 + \mu P_4 \\
\mu P_4 &= {}^1\!/_8\lambda P_3
\end{aligned}$$

Mae aildrefi mewn ffordd tebyg i sur gwnaethon o'r blaen yn rhoi:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \qquad P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0 \qquad P_3 = \frac{\lambda^3}{8\mu^3} P_0 \qquad P_4 = \frac{\lambda^4}{64\mu^4} P_0$$

yn rhoi:

$$\begin{aligned}
P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 &= 1 \\
P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{8\mu^3} + \frac{\lambda^4}{64\mu^4} \right) &= 1 \\
P_0 &= \frac{1}{\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{8\mu^3} + \frac{\lambda^4}{64\mu^4}}
\end{aligned}$$

Mae amnewid $\lambda = 2$ *a* $\mu = 1$ *yn rhoi:*

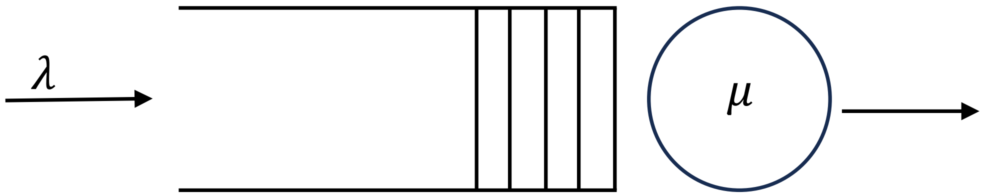
$$(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4) = \left(\frac{4}{29}, \frac{8}{29}, \frac{8}{29}, \frac{8}{29}, \frac{1}{29} \right)$$

Ym mhob cyflwr y tebygolrwydd o falcio yw: 0 *yng nghyflwr 0;* $^1\!/_2$ *yng nghyflwr 1;* $^3\!/_4$ *yn 2;* $^7\!/_8$ *yn 3; ac* 1 *yng nghyflwr 4 (h.y. caiff eu gwrthod achos capasiti llawn). Felly:*

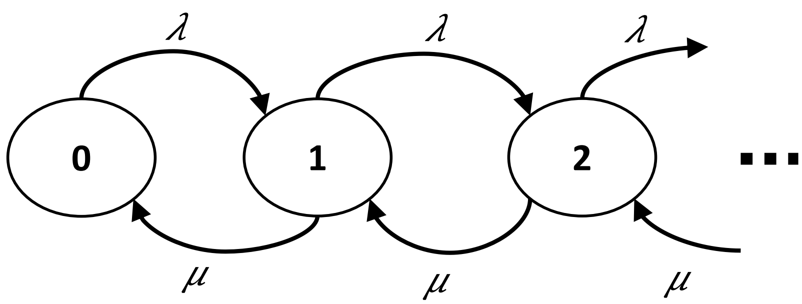
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\textit{cwsmer yn balcio}) &= \left(^1\!/_2 \times {}^8\!/_{29}\right) + \left(^3\!/_4 \times {}^8\!/_{29}\right) + \left(^7\!/_8 \times {}^8\!/_{29}\right) + \left(1 \times {}^1\!/_{29}\right) \\
&= {}^{18}\!/_{29}
\end{aligned}$$

3.5 Ciw $M/M/1$

Mee ciw $M/M/1$, neu ciw $M/M/1/\infty/$FIFO yn wahanol oherwydd nawr mae yna byffer anfeidr-aidd.



Mae hwn yn golygu fod gan y cadwyn Markov amser-di-dor cyfatebol gofod cyflwr anfeidraidd.



Hynny yw:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \mu & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \mu & \dots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Weithiau fe elwir y cadwyn Markov hon yn *broses genedigaeth-marwolaeth*. Gwyddon fod y cyflwr-sefydlog ond yn bodoli os yw'r system yn sefydlog, h.y. os yw $\rho = {}^{\lambda}/_{\mu} < 1$. Mae cyflwr-sefydlog fan hyn yn golygu bodoler rhyw cyfanrif N, fel bod ar gyfer $n > N$, mae $P_n < \epsilon$ ar gyfer rhyw ϵ mympwyol o fach. Yn hewristig, os yw $\rho < 1$, yna mae $\lambda < \mu$, ac mae'r cyfradd y mae'r system yn symud i fyny'r cadwyn yn llai na'r cyfradd y mae'r system yn symud i lawr y cadwyn, ac felly rydym yn disgwyl i'r P_i lleihau wrth i i cynyddu, ac felly bydd y gwerth N hwn yn bodoli.

Er mwyn dadansoddi hon bydd angen mynegiadau cyffredinol ar gyfer P_i are gyfer holl $i \in \mathbb{N}$.

Fel neilleb, byddwn yn defnyddio dau canlyniad safonol, pan fod $r < 1$:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \qquad\qquad Z = \sum_{k=0}^{\infty} k r^k = \frac{r}{(1-r)^2}$$

Trwy dybio ei cydgyfeiriad, gallwn ganfod gwerthoedd y terfannau hyn yn hewristig:

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + r + r^2 + r^3 + \dots \\
rS &= r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots \\
S - rS &= 1 \\
S(1-r) &= 1 \\
S &= \frac{1}{1-r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z &= r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \dots \\
rZ &= r^2 + 2r^3 + 3r^4 + 5r^4 + \dots \\
Z - rZ &= r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots \\
Z - rZ &= rS \\
Z(1-r) &= \frac{r}{1-r} \\
Z &= \frac{r}{(1-r)^2}
\end{aligned}
$$

Nawr, mae datrys $\underline{P}Q = 0$ yn rhoi:

$$
\begin{aligned}
\lambda P_0 &= \mu P_1 \\
(\lambda + \mu)P_1 &= \lambda P_0 + \mu P_2 \\
(\lambda + \mu)P_2 &= \lambda P_1 + \mu P_3 \\
&\vdots \\
(\lambda + \mu)P_k &= \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Yn dilyn esiampl o Enghraifft 6 rhoddwn pob un P_i yn nhermau P_0. Ar gyfer y cwpl o dermau cyntaf cawn:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho P_0 \\
P_2 &= \frac{\lambda_2}{\mu^2} P_0 = \rho^2 P_0 \\
P_3 &= \frac{\lambda_3}{\mu^3} P_0 = \rho^3 P_0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Felly efallai gallwn dyfalu bod $P_k = \rho^k P_0$. Os ydyw, yna gan fod $\rho < 1$, yna mae'r P_i yn lleihau wrth i i cynyddu, ac mae $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$, gan awgrymu sefydlogrwydd.

Tebygolrwyddau Cyflwr-Sefydlog $M/M/1$

Theorem: Mae gan ciw $M/M/1$ tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog $P_k = \rho^k P_0 \;\; \forall \;\; k \in \mathbb{N}$.
Prawf: Trwy anwythiad. Yr achos sylfaenol P_1:

$$\begin{aligned}
\mu P_1 &= \lambda P_0 \\
P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\
P_1 &= \rho P_0
\end{aligned}$$

Tybiwch fod $P_j = \rho^j P_0$ ar gyfer holl $j \leq k$, beth am P_{k+1}?

$$\begin{aligned}
\lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1} &= (\lambda + \mu) P_k \\
\lambda \rho^{k-1} P_0 + \mu P_{k+1} &= (\lambda + \mu) \rho^k P_0 \\
\mu P_{k+1} &= (\lambda + \mu) \rho^k P_0 - \lambda \rho^{k-1} P_0 \\
\mu P_{k+1} &= \lambda \rho^k P_0 + \mu \rho^k P_0 - \lambda \rho^{k-1} P_0 \\
P_{k+1} &= \frac{\lambda}{\mu} \rho^k P_0 + \rho^k P_0 - \frac{\lambda}{\mu} \rho^{k-1} P_0 \\
P_{k+1} &= \rho^{k+1} P_0 + \rho^k P_0 - \rho^k P_0 \\
P_{k+1} &= \rho^{k+1} P_0
\end{aligned}$$

sy'n cwblhau'r prawf.

Beth am y tebygolrwydd gwag P_0?

Tebygolrwydd Gwag $M/M/1$

Theorem: Mae gan ciw $M/M/1$ tebygolrwydd gwag $P_0 = 1 - \rho$.
Prawf: Gwyddon fod $P_k = \rho^k P_0$ ar gyfer holl $k \in \mathbb{N}$. Gwyddon hefyd fod y tebygolrwyddau cyflwr yn symio i un. Felly:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} P_k &= 1 \\
P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots &= 1 \\
P_0 \left(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots\right) &= 1 \\
P_0 \left(\frac{1}{1-\rho}\right) &= 1 \\
P_0 &= 1 - \rho
\end{aligned}$$

o cydgyfeiriad y gyfres geometreg, gan fod $\rho < 1$, sy'n cwblhau'r prawf.

A beth am y mesurau eraill, L, W, W_q ac L_q?

Measurau Perfformiad $M/M/1$

Theorem: Ar gyfer ciw $M/M/1$ mae gennym:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad W = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \qquad L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Prawf: Yn gyntaf ystyriwch L:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k \\ &= (1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} \end{aligned}$$

Nawr cawn W o Ddeddfau Little:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\lambda}L = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho} \\ &= \frac{{}^1\!/\!_\mu}{1-\rho} = \frac{1}{\mu-\lambda} \end{aligned}$$

A chawn W_q trwy dynnu'r amser gwasanaeth disgwyliedig:

$$\begin{aligned} W_q &= W - \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{\mu}{\mu(\mu-\lambda)} - \frac{\mu-\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \\ &= \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \end{aligned}$$

Ac yn olaf cawn L_q eto gan Ddeddfau Little:

$$\begin{aligned} L_q &= \lambda W_q \\ &= \lambda\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \\ &= \frac{\rho^2}{(1-\rho)} \end{aligned}$$

sy'n cwblhau'r prawf.

Enghraifft 8 *Ystyriwch ciw $M/M/1$ gyda $\lambda = 2$ a $\mu = 4$. Canfyddwch:*

(a) P_0

(b) P_3

(c) Y tebygolrwydd bod yna mwy na 2 person yn y system.

(d) L,L_q, W *a* W_q

Datrysiad i Enghraifft 8 *Gyda $\lambda = 2$ a $\mu = 4$ mae gennym $\rho = 1/2$. Nawr:*

(a) $P_0 = 1 - \rho = 1 - 1/2 = 1/2$

(b) $P_3 = \rho^3 P_0 = (1/2)^3\,(1/2) = 1/16$

(c) Y tebygolrwydd bod yna mwy na 2 person yn y system.

$$\begin{aligned} 1 - (P_0 + P_1 + P_2) &= 1 - \big((1-\rho) + \rho(1-\rho) + \rho^2(1-\rho)\big) \\ &= 1 - (1/2 + 1/4 + 1/8) = 1/8 \end{aligned}$$

(d)
- $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$
- $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(1/2)^2}{1=1/2} = 1/2$
- $W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{4-2} = 1/2$
- $W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{1/2}{4(1-1/2)} = 1/4$

Canlyneb o rhain yw fod y mesuriadau sy'n ymwneud gyda maint y ciw, L ac L_q, ond yn dibynnu ar yr arddwysedd traffig ρ, h.y. *cymhareb* y chyfraddau dyfodiad a gwasanaeth, ac nid y gwerthoedd ei hunain. Ond mae'r mesuriadau amser aros, W a W_q yn dibynnu ar meintiau λ a μ.

Enghraifft 9 *Ystyriwch dau ciw $M/M/1$, un gyda $\lambda_1 = 6$ a $\mu_1 = 8$, a'r llall gyda $\lambda_2 = 3$ a $\mu_2 = 4$. Ar gyfer pob ciw canfyddwch L a W.*

Datrysiad i Enghraifft 9 *Ar gyfer y ddau ciw mae $\rho_1 = \rho_2 = 3/4$. Ar gyfer y ciw cyntaf:*

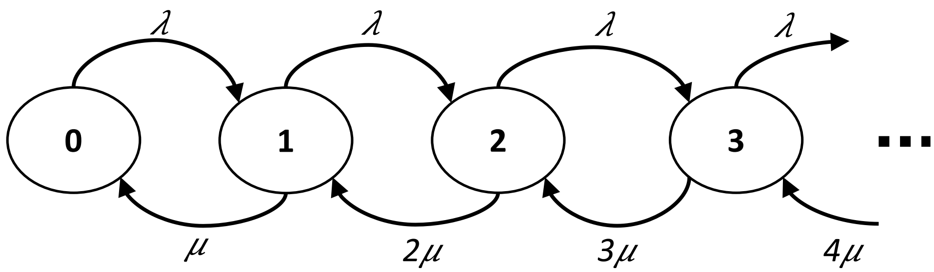
$$L = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{3/4}{1-3/4} = 3$$
$$W = \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{1}{8-6} = 1/2$$

Ar gyfer yr ail ciw:

$$L = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{3/4}{1-3/4} = 3$$
$$W = \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} = \frac{1}{4-3} = 1$$

3.6 Ciw $M/M/\infty$

Nawr ystyriwn yr achos lle mae nifer anfeidraidd o weinyddwyr paralel. Hynny yw, does dim ciw, mae pawb yn dechrau eu gwasanaeth ar unwaith. Y cadwyn Markov amser-di-dor yn yr achos hon yw:



Y gwahaniaeth nawr yw fod y cyfradd gwasanaeth pan yng nghyflwr k yw $k\mu$ ar gyfer holl $k \in \mathbb{N}$. Nid yw'n gwneud synnwyr siarad am arddwysedd traffig nawr, achos bydd $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ yn agosáu i 0 wrth i $c \to \infty$. Ond, bydd y gwerth $\theta = {}^{\lambda}/_{\mu}$ dal yn defnyddiol ar gyfer nodiant. Gallwn dadansoddi hwn yn yr un modd a wnaethon ni o'r blaen:

$$\begin{aligned}
\lambda P_0 &= \mu P_1 \\
(\lambda + \mu)P_1 &= \lambda P_0 + 2\mu P_2 \\
(\lambda + 2\mu)P_2 &= \lambda P_1 + 3\mu P_3 \\
&\vdots \\
(\lambda + k\mu)P_k &= \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Yn debyg i uchod, gallwn dyfalu bod $P_k = \frac{\theta^k}{k!}P_0$, a gallwn profi hwn trwy anwythiad:

Tebygolrwyddau Cyflwr-Sefydlog $M/M/\infty$

Theorem: Mae gan ciw $M/M/\infty$ tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog $P_k = \frac{\theta^k}{k!}P_0$ ar gyfer holl $k \in \mathbb{N}$.
Prawf: Trwy anwythiad. Yr achos sylfaenol P_1:

$$\begin{aligned}
\mu P_1 &= \lambda P_0 \\
P_1 &= \frac{\lambda}{\mu}P_0 \\
P_1 &= \theta P_0
\end{aligned}$$

Tybiwn fod $P_j = \frac{\theta^j}{j!}P_0$ ar gyfer holl $j \leq k$, beth am P_{k+1}?

$$\begin{aligned}
\lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} &= (\lambda + k\mu)P_k \\
(k+1)\mu P_{k+1} &= (\lambda + k\mu)P_k - \lambda P_{k-1} \\
(k+1)\mu P_{k+1} &= \lambda P_k + k\mu P_k - \lambda P_{k-1} \\
(k+1)\mu P_{k+1} &= \lambda \frac{\theta^k}{k!}P_0 + k\mu \frac{\theta^k}{k!}P_0 - \lambda \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!}P_0 \\
(k+1)\mu P_{k+1} &= P_0 \left(\lambda \frac{\theta^k}{k!} + k\mu \frac{\theta^k}{k!} - \lambda \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\
(k+1)\mu P_{k+1} &= P_0 \left(\lambda \frac{\theta^k}{k!} + \lambda \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\
(k+1)\mu P_{k+1} &= \lambda \frac{\theta^k}{k!}P_0 \\
P_{k+1} &= \frac{\lambda \theta^k}{k!(k+1)\mu}P_0 \\
P_{k+1} &= \frac{\theta^{k+1}}{(k+1)!}P_0
\end{aligned}$$

sy'n cwblhau'r prawf.

Beth am y tebygolrwydd gwag P_0?

Tebygolrwydd Gwag $M/M/\infty$

Theorem: Mae gan ciw $M/M/\infty$ tebygolrwydd gwag $P_0 = e^{-\theta}$.
Prawf: Gwyddon fod $P_k = \frac{\theta^k}{k!}P_0$ ar gyfer holl $k \in \mathbb{N}$. Gwyddon hefyd fod y tebygolrwyddau cyflwr yn symio i un. Felly:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} P_k &= 1 \\
P_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} &= 1 \\
P_0 e^{\theta} &= 1 \\
P_0 &= \frac{1}{e^{\theta}} = e^{-\theta}
\end{aligned}$$

gan adnabod yr ehangiad cyfred o'r ffwythiant esbonyddol, sy'n cwblhau'r prawf.

Mae'r mesurau perfformiad eraill lot mwy sythweledol ar gyfer ciw $M/M/\infty$: mae $L_q = W_q = 0$ gan fod neb yn aros am wasanaeth. $W = {}^1\!/\!_\mu$ achos yr holl amser mae cwsmer yn gwario yn y system fe fyddo yn derbyn gwasanaeth, a'r amser gwasanaeth cymedrig yw ${}^1\!/\!_\mu$. Felly, o deddf Little, mae $L = \lambda W = {}^\lambda\!/\!_\mu = \theta$. Gallwn hefyd canfod rhain trwy'r tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog uchod.

Nawr efallai gallwn cymharu ciwiau $M/M/1$ gyda chiwiau $M/M/\infty$:

Enghraifft 10 *Mae canolfan galwadau ffôn yn derbyn 7 galwad yr awr yn cyrraedd mewn modd Poisson; ac mae'n gallu prosesu galwadau ar gyfradd o 10 yr awr, lle mae amseroed gwasanaeth wedi'u dosrannu'n Esbonyddol. Mae'n costio 30¢ yr awr i cadw galwad ar y lein, os yw'n derbyn gwasanaeth neu'n aros. Mae'n costio 25¢ yr awr i gyflogi un gweinydd. Mae'n costio 75¢ yr awr i redeg robot AI sydd yn gallu prosesu pob galwad ar yr un pryd. Dylai'r ganolfan cyflogi un gweinydd, neu'r robot AI?*

Datrysiad i Enghraifft 10 *Os ydynt yn gyflogi'r gweinydd, dyma ciw $M/M/1$. Y cost pob awr C_1 bydd:*

$$\begin{aligned}
C_1 &= 30L + 25 \\
&= 30\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) + 25 \\
&= 30\left(\frac{{}^7\!/\!_{10}}{1-{}^7\!/\!_{10}}\right) + 25 \\
&= 30\left(\frac{7}{3}\right) + 25 \\
&= 95
\end{aligned}$$

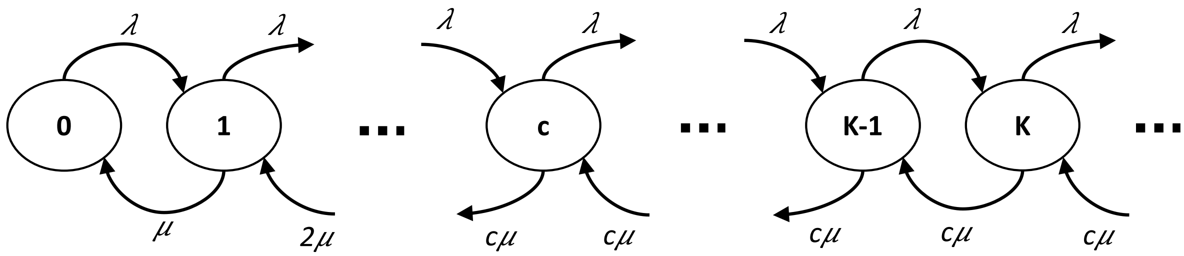
Os ydynt yn defnyddio'r robot AI, dyma ciw $M/M/\infty$. Y cost pob awr C_∞ bydd:

$$\begin{aligned}
C_\infty &= 30L + 75 \\
&= 30\theta + 75 \\
&= 30\left(\frac{7}{10}\right) + 75 \\
&= 21 + 75 \\
&= 96
\end{aligned}$$

Felly yn yr achos hon mae'n rhatach i gyflogi'r gweinydd na'r robot AI.

3.7 Ciw $M/M/c$

Yn olaf, ystyriwn ciw $M/M/c$ gyda byffer anfeidraidd. Ein arddwysedd traffig yw $\rho = {}^{\lambda}/_{c\mu}$, a bydd y cadwyn Markov amser-di-dor yn edrych fel:



Nawr fe allwn dadansoddi hwn fel o'r blaen. Ond gallwn hefyd meddwl bach mwy hewristig. Mae dau rhanbarth i'r cadwyn Markov y gallwn dadansoddi ar wahan:

- ar gyfer cyflyrau k lle mae $k < c$, yna does dim cwsmer yn ciwio. Mae'r rhanbarth hon yn ymddwyn yn debyg i'r achos $M/M/\infty$ case. Hynny yw:

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{\theta^k}{k!} P_0 \\ &= \frac{(c\rho)^k}{k!} P_0 \end{aligned}$$

- ar gyfer cyflyrau k lle mae $k \geq c$, yna mae cwsmeriaid newydd sy'n cyrraedd yn ymuno â'r ciw, a chawn cyfradd gwasanaeth effeithiol o $c\mu$. Hynny yw, mae'r enwadur $k!$ yn y mynegiad uchod yn troi'n $c!c^{k-c}$:

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{\theta^k}{c!c^{k-c}} P_0 \\ &= \frac{(c\rho)^k}{c!c^{k-c}} P_0 \\ &= \frac{c^k \rho^k}{c!c^{k-c}} P_0 \\ &= \frac{c^c \rho^k}{c!} P_0 \end{aligned}$$

- ac yn olaf:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} P_k &= 1 \\
\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}P_0 + \sum_{k=c}^{\infty}\frac{c^c\rho^k}{c!}P_0 &= 1 \\
P_0\left(\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!} + \sum_{k=c}^{\infty}\frac{c^c\rho^k}{c!}\right) &= 1 \\
P_0\left(\frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}\right) &= 1 \\
P_0 &= \frac{1}{\left(\frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}\right)}
\end{aligned}
$$

Maint Ciw Disgwyliedig $M/M/c$

Theorem: Ar gyfer ciw $M/M/c$ mae gennym:

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}c^c}{c!(1-\rho)^2}P_0$$

Prawf: Mae ond angen ystyried y cyflyrau lle nad oes cwsmer yn ciwio:

$$
\begin{aligned}
L_q &= \sum_{k=c}^{\infty}(k-c)P_k \\
&= \sum_{k=c}^{\infty}(k-c)\frac{c^c\rho^k}{c!}P_0 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}k\frac{c^c\rho^{k+c}}{c!}P_0 \\
&= \frac{c^c\rho^c}{c!}P_0\sum_{k=0}^{\infty}k\rho^k \\
&= \frac{c^c\rho^{c+1}}{c!(1-\rho)^2}P_0
\end{aligned}
$$

Ac fe allwn canfod yr holl mesurau eraill, L, W, ac W_q gan ddefnyddio deddf Little.

Pennod 4

Efelychiad Stocastig

Deilliannau dysgu:

- Gallu deall efelychiad stocastig a'r proses modelu;
- Gallu amcangyfrif integrynnau pendant a dosraniadau tebygolrwydd anhysbyd gan ddefnyddio efelychiad Monte Carlo;
- Gallu efelychi systemau ciwio gan ddefnyddio efelychiad digwyddiadau arwahanol;
- Gallu adnabod gwahanol meddalwedd efelychiad.

4.1 Cyflwyniad

Hyd yn hyn rydym wedi gweld nifer o wahanol senarios tebygoliaethol y gallwn dadansoddi yn fathemategol. Roedd gan y problemau hyn ffurf penodol a oedd yn addas i gael eu dadansoddi gyda'r offerynnau a dysgon, ond, nid yw pob problem yn hydrin. Mae efelychiad yn un ffordd o delio gyda hwn, trwy ystyried yr agwedd amlder tuag at tebygolrwydd. Hynny yw: os gall haparbrawf ei profi nifer anfeidraidd o weithiau, yna gallwn gweld y gwir canlyniadau heb angen dadansoddi'r system. H.y. os ydw i'n taflu ceinig nifer o weithiau, byddwn yn disgwyl i tua hanner y tafliadau dangos pen.

Ond gall perfformio haparbrawf nifer o weithiau bod yn gostus, yn nhermau gwerth ac amser, neu efallai y mae'n amhosib. Er enghraifft, os taw'r haparbrawf yw rhywbeth fel: beth yw'r tebygolrwydd o claf sy'n cyrraedd yr Uned Achosion Brys mawr cyn diwedd y dydd os oes ond 2 doctor yn gweithio? Mae'n costus yn nhermau nifer o bywydau, costus yn nhermau dyddiau, costus yn nhermau arian, ac fe all fod yn amhosib i rhedeg yr arbrawf oherwydd rheolau moeseg. Felly gallwn defnyddio efelychiad, sy'n ymwneud ag ail-greu hwn gan ddefnyddio cyfrifiadur mewn amgylchedd heb-risg.

4.2 Deddfau Niferoedd Mawr

Mae'r deddfau niferoedd mawr yn rhoi rheswm sythweledol ar gyfer pam a sut mae efelychiad yn gweithio. Ni fydd y deddfau hyn yn cael ei datgan yn ffurfiol fan hyn, na'i profi, ond bydd dealltwriaeth a dehongliad yn hanfodol.

- Gadewch i X bod hapnewidyn sydd â:
  - dosraniad tebygolrwydd F
  - cymedr μ
  - amrywiant σ^2
  - a thebygolrwydd o bod llai nag x o p_x.
- Gadewch i $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ bod hapsampl maint n o'r hapnewidyn X, gyda:
  - dosraniad tebygolrwydd empirig F_n
  - cymedr $\overline{X}_n$
  - amrywiant Var(X_n)
  - a nifer o arsylwadau llai nag x o N_x.

Nawr mae gennym tri canlyniad defnyddiol (sydd heb ei datagan fan hyn mewn modd trwyadl):

Deddf Niferoedd Mawr Cryf

$$\overline{X}_n \to \mu \quad \text{wrth i} \quad n \to \infty \tag{4.1}$$

$$\text{Var}(X_n) \to \sigma^2 \quad \text{wrth i} \quad n \to \infty \tag{4.2}$$

Deddf Niferoedd Mawr Borel

$$N_x \to p \quad \text{wrth i} \quad n \to \infty \tag{4.3}$$

Theorem Glivenko–Cantelli

$$F_n \to F \quad \text{wrth i} \quad n \to \infty \tag{4.4}$$

Hynny yw, wrth i maint y sampl cynyddu, mae'r cymedr sample yn agosái at y gwir cymedr; mae'r amrywiant sampl yn agosái at y gwir amrywiant; mae cyfrannau yn agosái at debygolrwyddau; ac mae dosraniadau empirig yn agosái at y gwir dosraniadau.

4.3 Samplu Ffug-Haprifau

Ni all cyfrifiadur creu gwir haprwydd, gan fod cyfrifiaduron yn penderfyniaethol. Yn lle, mae angen i gyfrifiaduron generadu *ffug-haprifau* wedi'i dosrannu'n Unffurf, h.y. rhifau sydd wedi'u generadu gan ffwythiant penderfyniaethol, ond heb gwybod y fwythiant hynny maent yn ymddwyn fel sampl o hapnewidyn Unffurf. Hynny yw, ar gyfer dilyniant digon fawr $X_0, X_1, \dots X_n$, maent yn dangos:

- **unffurfiaeth**: $\mathbb{P}(X_i < x) = x$ ar gyfer pob $x \in [0, 1]$.
- **annibyniaeth**: $\mathbb{P}(X_0 < x_0, X_1 < x_1, \dots X_n < x_n) = \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_i < x_i)$

Ar gyfer rhan fwyaf o defnyddiau mae hefyd angen **hafal-dosraniau dimensiwn-uwch**, hynny yw os crëwn pwyntiau dimensiwm-uwch o blygion olynnol o rhifau yn y dilyniant, mae'r dilyniant o pwyntiau dimensiwn-uwch yn llenwi cyfaint yr hyperciwb dimensiwn-uwch yn unffurf wrth i'r dilyniant datblygu.

Priodwedd arall o ddilyniannau o ffug-haprifau yw bod y ffwythiant y defnyddir er mwyn eu creu yn penderfyniaethol, a gallwn **gosod hedyn**. Hynny yw, gyda hedyn, neu gwerth cychwynnol, penodol, bydd trwy'r amser yn cynhyrchu'r union un dilyniant o ffug-haprifau, a bydd yn cynhyrchu dilyniant gwahanol o ffug-haprifau gyda hedyn wahanol. Mae hwn yn sicrhau bod unrhyw arbrofion a wneir gyda ffug-haprifau yn **ailgynhyrchiaday**.

Ffordd cynnar o gynhyrchu ffug-haprifau oedd generadur cyfathiant llinol (*linear congruential generator*). Caiff ei paramereiddio gan hedyn X_0, lluoswm A, cysonyn C, a modwlws M fel bod:

$$X_{n+1} = (AX_n + C) \mod M$$

a gall dewisiadau craff ar gyfer y paramedrau A, C ac M sicrhau unffurfiaeth ac annibyniaeth, e.e. os yw M yn pŵer mawr o 2, $M > A, C$, M ac C yn gyd-gysefin, ac os yw $A-1$ yn rhanadwy gan holl ffactorau cysefin o Yn gyffredinol bydd hwn yn rhoi dilyniant o hap-gyfanrifau rhwng 0 ac M, ac bydd rhannu gan M yn rhoi'r $X \sim U(0, 1)$ sydd angen.

Rhoddir enghraifft yn y tabl isod, gydag $M = 8$, $A = 5$, $C = 3$ ac $X_0 = 7$:

n	X_n	X_n/M
0	7	0.875
1	6	0.750
2	1	0.125
3	0	0.000
4	3	0.375
5	2	0.250
6	5	0.625
7	4	0.500
8	7	0.875
9	6	0.750
10	1	0.125
11	0	0.000
12	3	0.367
	$\vdots$	

Gwelwn fod pob cyfanrif rhwng 0 ac M yn ymddangos, mewn rhyw trefn penderfyniaethol ond anghanfyddadwy, ac yna mae'r dilyniant yn ailadrodd. Felly gall ddewis M yn digon fawr sicrhau llif digon hir o ffug-haprifau. E.e. $M = 2^{32}$.

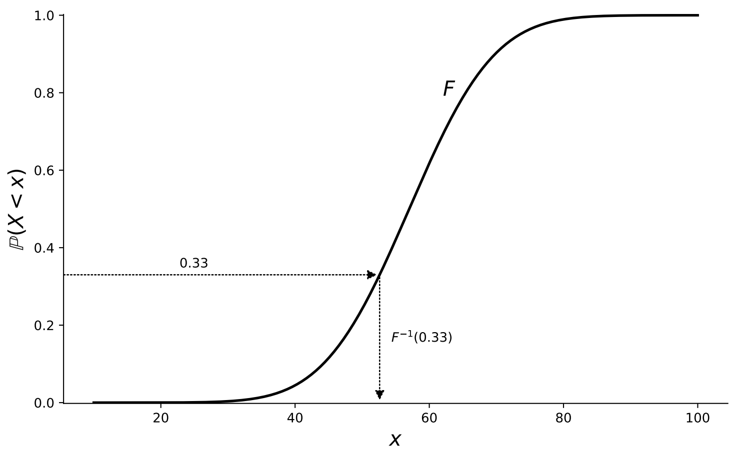
Mae ieithoedd rhaglennu modern yn dod gyda generaduron ffug-haprifau soffistigedig wedi'i osod yn barod. Er enghraifft mae Python yn defnyddio algorithm o'r enw y Mersenne Twister:

```
>>> import random
>>> random.seed(7777)
>>> random.random()
0.8170477907294282
>>> random.random()
0.5311536664127009

>>> random.seed(7777)
>>> random.random()
0.8170477907294282
>>> random.random()
0.5311536664127009
```

Dull Dosraniad Gwrthdro

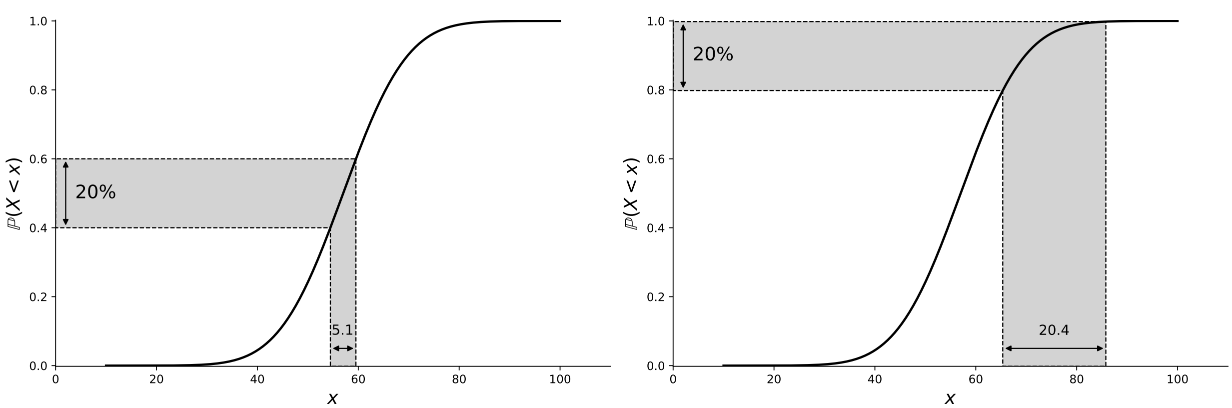
Rydym wedi gweld sut i "samplu" ffug-haprifau sydd wedi'u dosrannu'n Unffurf rhwng 0 ac 1. Mae'n ddefnyddiol gallu samplu ffug-haprifau o dosraniadau tebygolrwydd eraill. Un ffordd i wneud hwn yw i *drawsffurfio'r* newidyn Unffurf. Ystyriwch y CDF, F, isod:



Mae'r echelin-y, hynny yw y $\mathbb{P}(X < x)$, yn debygolrwydd, ac mae wedi'i ffinio gan 0 isod a gan 1 uchod. Mae'r priodwedd **unffurfiaeth** uchod yn awgrymmu fod samplu haprif llai nag $x \in [0, 1]$ yn digwydd gyda thebygolrwydd x, sy'n cyfateb yn union gyda'r echelin-y. H.y. mae samplu ffug-haprifau Unffurf rhwng 0 ac 1 yn cyfateb gyda samplu tebygolrwydd.

Hoffwn samplu o'r echelin-x, ac felly gallwn defnyddio'r CDF gwrthdro, F^{-1} i drawsffurfio'r tebygolrwydd y samplwyd i mewn i werth sampledig. E.e., os oeddwn ni wedi samplu'r tebygolrwydd 0.33, yna gallwn trawsffurfio hon i mewn i'r gwerth $F^{-1}(0.33)$.

Camargraff cyffredin yw oherwydd bod F yn ddeusaethol, a bod pob pwynt yn yr amrediad yr un mor tebygol, yn rhaid bod pob pwynt yn y parth yr un mor tebygol. Dydy hwn ddim yn wir, a gallwn dangos hwn yn weledol trwy ystyried samplu o gyfyngau. Mae'r llun isod yn dangos dau cyfwng maint hafal yn yr amrediad, and maent yn mapio i cyhfyngau maint wahanol yn y parth. Felly, mae'r tebygolrwydd o samplu rhif yn y ddau cyfwng yn hafal, 20%, ond mae lled y ddau cyfwng yn wahanol, yn dangos for rhai cyfyngau yn fwy tebygol o gael ei samplu nag eraill.



Enghraifft 11 *Mae generadur ffur-haprifau yn rhoi'r pump rhif Unffurf canlynol: (0.84442, 0.75795, 0.42057, 0.25892, 0.51127). Trawsffurfiwch rhain i mewn i bump rhif gyda dosraniad Esbonyddol gyda* $\lambda = {}^{1}\!/\!_{15}$.

Datrysiad i Enghraifft 11 *Ar gyfer y dosraniad Esbonyddol,* $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$*, ac mae angen* $F^{-1}(x)$ *arnom:*

$$\begin{aligned} y &= 1 - e^{-\lambda z} \\ e^{-\lambda z} &= 1 - y \\ -\lambda z &= \ln(1-y) \\ z &= -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y) \\ z &= \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{1-y}\right) \end{aligned}$$

Ac felly $F^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$.
Nawr gallwn cymhwyso hon i bob un o'r pump haprif Unffurf i gael pump haprif Esbonyddol gyda chyfradd ${}^{1}\!/\!_{15}$*:*

$$\begin{aligned} F^{-1}(0.84442) &= 27.90893 \\ F^{-1}(0.75795) &= 21.27916 \\ F^{-1}(0.42057) &= 8.18566 \\ F^{-1}(0.25892) &= 4.49470 \\ F^{-1}(0.51127) &= 10.73918 \end{aligned}$$

Gallwn gymhwyso hwn i unrhyw dosraniad tebygolrwydd gallwn meddwl amdanno:

Enghraifft 12 *Mae generadur ffur-haprifau yn rhoi'r pump rhif Unffurf canlynol: (0.84442, 0.75795, 0.42057, 0.25892, 0.51127). Trawsffurfiwch rhain i mewn i bump rhif a gafodd eu samplu o'r PDF sinwsoidaidd canlynol:* $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$.

Datrysiad i Enghraifft 12 *Yn gyntaf canfyddwch y CDF:*

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x f(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \sin(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\left[-\cos(t)\right]_0^x \\
&= \frac{1}{2}\left(-\cos(x) + \cos(0)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \cos(x)\right)
\end{aligned}$$

Yna canfyddwch y CDF gwrthdro:

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{2}\left(1 - \cos(z)\right) \\
2y &= 1 - \cos(z) \\
2y - 1 &= \cos(z) \\
\cos^{-1}(2y - 1) &= x
\end{aligned}$$

Ac felly $F^{-1}(x) = \cos^{-1}(2x - 1)$.
Nawr gallwn cymhwyso hon i bob un o'r pump haprif Unffurf i gael:

$$\begin{aligned}
F^{-1}(0.84442) &= 0.81091 \\
F^{-1}(0.75795) &= 1.02874 \\
F^{-1}(0.42057) &= 1.73033 \\
F^{-1}(0.25892) &= 2.07392 \\
F^{-1}(0.51127) &= 1.54825
\end{aligned}$$

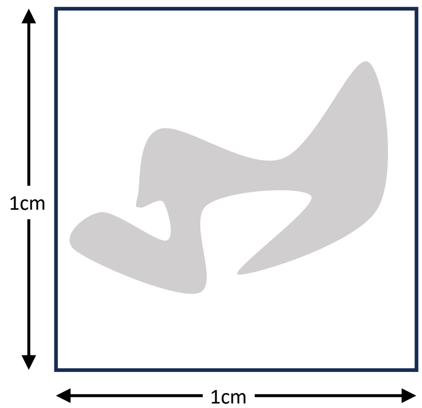
4.4 Efelychiad Monte Carlo

Term eang yw efelychiad Monte Carlo sy'n ymwneud â samplu o dosraniadau tebygolrwydd yn ailadroddol er mwyn cael canlyniadau rhifiadol. Gallwn datrys problemau penderfyniaethol a stocastig. Noder, yn yr adran hon, gan fod angen samplu nifer fawr o haprifau, bydd yr enghreifftiau yn defnyddio cod.

Problemau Penderfyniaethol

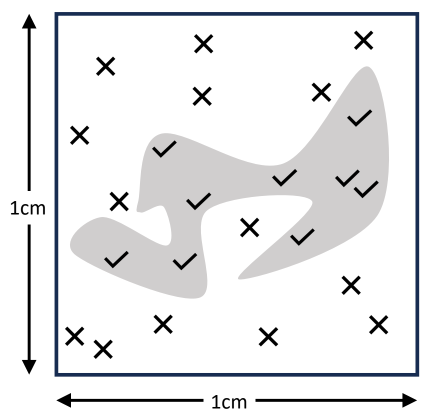
Efallai bod defnyddio haprwydd i ddatrys problemau penderfyniaethol i'w weld yn anreddfol, ond byddwn yn edrych ar dechneg sy'n cyfuno cysyniad tebygolrwydd gydag arwynebedd geometreg.

Ystyriwch y llun isod:



Mae gennym ffrâm 1cm gan 1cm, a blot yng nghanol y ffrâm. Beth yw arwynebedd y flot?

Nawr tybiwch eich bod yn gallu samplu pwyntiau o fewn y ffrâm, yn unffurf yn ofodol, ac ei fod yn hawdd gwirio os yw pwynt yn gorwedd o fewn y flot neu peidio:

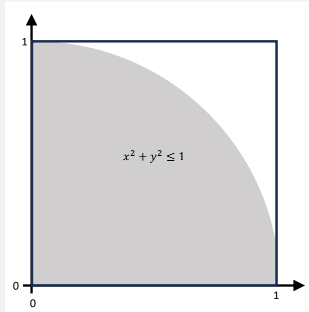


yna, wrth i'r nifer o bwyntiau y samplwyd cynyddu: bydd cyfran y pwyntiau o fewn y flot yn agosáu at cyfran yr arwynebedd y mae'r flot yn cymryd o fewn y ffrâm. Yna trwy wybod arwynebedd y ffrâm cawn arwynebedd y flot.

Mae'r tybiaeth y gallwn hapsamplu pwyntiau o fewn y ffrâm wedi'i fodloni gan briodweddau ffug-haprifau: Gadewch i (X, Y) bod hapbwynt yn ofodol, lle $X \sim U(0, 1)$ a $Y \sim U(0, 1)$. Mae'r tybiaeth y gallwn wirio'n hawdd os yw pwyn yn gorwedd o fewn yr arwynebedd o dan sylw yn dibynnu ar y problem ei hun.

Edrychwn ar ddau enghraifft, brasamcanu π, ac enrhifo integryn.

Enghraifft 13 *Ystyriwch y chwarter cylch y diffinnir yn y cwadrant cyntaf gan $x^2 + y^2 \leq 1$:*



Dyma chwarter cylch radiws 1, ac felly gwyddon y rhoddir ei arwynebedd gan $\frac{1}{4}\pi$. Canfyddwch brasamcan da ar gyfer gwerth π gan ddefnyddio efelychiad Monte Carlo, gan ddefnyddio $N = 10$, $N = 1,000$ ac $N = 100,000$ hapbwynt.

Datrysiad i Enghraifft 13 *Mae gennym:*

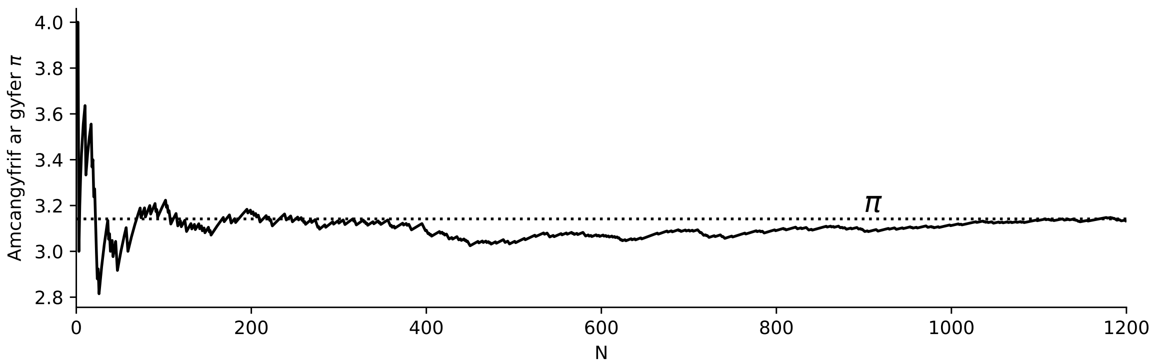
$$\frac{\textit{Arwynebedd chwarter cylch}}{\textit{Arwynebedd sgwâr uned}} = \frac{\textit{Nifer i bwyntiau o fewn y cylch}}{\textit{Nifer o bwyntiau o fewn y sgwâr}}$$

Mae'r ochr chwith yn hafal i $\frac{1}{4}\pi$, a gallwn ganfod yr ochr dde trwy defnyddio efelychiad Monte Carlo:

```
>>> import random
>>> random.seed(77)
>>> def brasamcanu_pi(N):
...     nifer_yn_y_cylch = 0
...     for pwynt in range(N):
...         x = random.random()
...         y = random.random()
...         if (x ** 2) + (y ** 2) <= 1:
...             nifer_yn_y_cylch += 1
...     pi = (nifer_yn_y_cylch / N) * 4
...     return pi

>>> brasamcanu_pi(10)
4.0
>>> brasamcanu_pi(1000)
3.288
>>> brasamcanu_pi(100000)
3.13692
```

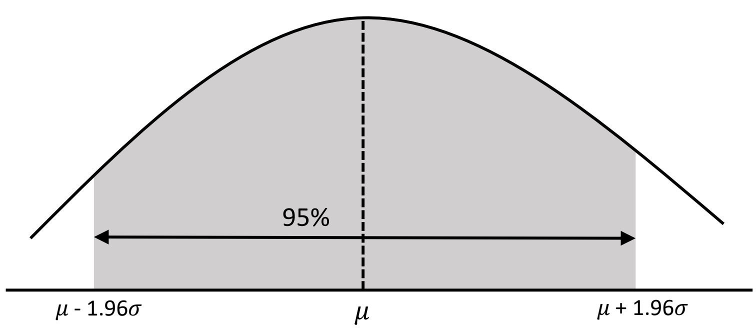
Yn yr enhraifft hon gallwn gweld sut gwnaeth cynyddu'r nifer o samplau gwella ein brasamcan o π. Caiff hwn ei weld yn weledol isod, wrth i'r maint sample N cynyddu, mae'r brasamcan yn mynd yn agosach ac yn agosach i'r gwir gwerth:



Manwl Gywirdeb yr Amcangyfrifion

Mewn efelychiad Monte Carlo mae gennym N treial ac rydym yn recordio'r nifer o lwyddiannau, n. Mae hwn yn rhoi $\hat{p} = {}^{n}/_{N}$, amcangyfrif ar gyfer rhyw gwir cyfran p. Rhoddir y tebygolrwydd o arsylwi n gan y dosraniad binomaidd. Pan fod $Np > 5$ ac $N(1-p) > 5$, hynny yw bod o leiaf pump llwyddiant ac o leiaf pump methiant, gallwn brasamcanu hwn gyda'r dosraniad Normal $n \sim N(\mu = Np, \sigma = \sqrt{Np(1-p)})$.

Cofiwch fod gan hapneiwdyn Normal gyda hymedr μ a gwiriad safonol σ siawns o 95% o fod yn y cyfwng $(\mu - 1.96\sigma, \mu + 1.96\sigma)$:



Felly gyda $\mu = Np$ a $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$:

Cyfwng Hyder Amcangyfrif Monte Carlo

Mewn efelychiad Monte Carlo sy'n amcangyfrif cyfran p gydag N treial ac n llwyddiant, yna mae $\hat{p} = {}^{n}/_{N}$ yn amcangyfrif o p gyda chyfwng hyder:

$$CI = \left(\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}},\ \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}\right)$$

hynny yw, os ailadroddwn yr arbrawf nifer o weithiau, yna bydd gwir gwerth p yn cwympo o fewn y cyfwng CI 95% o weithiau.

Gwelwn wrth i N cynyddu mae'r cyfwng hyder yn culhau, a byddwn yn fwyfwy hyderus o'n amcangyfrif. Nodwch fod hwn ond yn wir os gallwn defnyddio'r brasamcan Normal, hynny yw pan fod $Np > 5$ ac $N(1-p) > 5$. Yn gyffredinol, os allwen ni dylunio arbrawf fel bod $p \approx {}^{1}/_{2}$, yna bydd angen o leiaf 10 treial er mwyn i'r brasamcan Normal for yn un dda.

Nodwch fod y gwerth 1.96 yn dod o CDF gwrthdro y dosraniad Normal. Gallwn ddefnyddio gwerthoedd eraill, e.e. ar gyfer cywng hyder 90% defnyddiwch 1.64, ac ar gyfer cyfwng hyder 99% defnyddiwch 2.58.

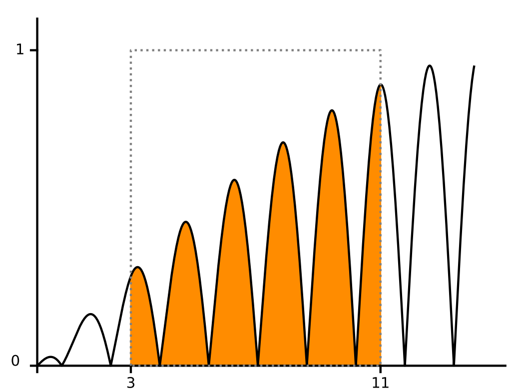
Gadewch i ni wneud enghraifft arall, amcangyfrif gwerth integryn pendant.

Enghraifft 14 *Amcangyfrifwch yr integryn canlynol gyda* 500 *treial efelychiad Monte Carlo:*

$$I = \int_{3}^{11} \left| \sin\left(\frac{x}{10}\right)\cos\left(2x\right) \right| dx$$

Rhowch cyfwng hyder 95% ar gyfer eich amcangyfrif.

Mae hwn yn integryn anodd i'w ddatrys yn analytig, felly bydd efelychiad Monte Carlo yn ddefnyddiol. Dangosir yr integrand isod, a hoffwn amcangyfrif yr arwynebedd oren o dan y gromlin:



Mae gwirio os yw pwynt (x, y) o dan y gromlin neu peidio yn hawdd, mae angen cymharu $y < f(x)$ lle f yw'r integrand. Nawr mae angen samplu pwyntiau yn y petryal arwynebedd 8 y dangosir.

Datrysiad i Enghraifft 14 *Yn gyntaf, yr integrand:*

```
>>> import math
>>> def integrand(x):
...     return abs(math.sin(x / 10) * math.cos(2 * x))
```

Nawr samplwch 500 pwynt:

```
>>> N = 500
>>> n = 0
>>> random.seed(0)
>>> for treial in range(N)
...     pwynt = (3 + (random.random() * 8), random.random())
...     if pwynt[1] <= integrand(pwynt[0]):
...         n += 1
>>> p = n / N
>>> amcangyfrif_yr_intergyn = p * 8
>>> amcangyfrif_yr_intergyn
3.44
```

Nawr ar gyfer cyfwng hyder:

```
>>> isaf = p - 1.96 * ((p * (1 - p) / N) ** 0.5)
>>> uchaf = p + 1.96 * ((p * (1 - p) / N) ** 0.5)
>>> (isaf * 8, uchaf * 8)
(3.0928375762269193, 3.7871624237730805)
```

ac felly gallwn bod 95% yn hyderus fod gwir gwerth yr integryn pendant I yn gorwedd o fewn y cyfwng $(3.093, 3.787)$.

Problemau Stocastig

Defnydd arall o efelychiad Monte Carlo yw'r gallu i ystyried senarios stocastig. Mae hwn yn ddefnyddio mewn achosion lle efallai nad ydym yn gallu dadansoddi'r hapnewidynau yn analytig. Gallwn dadelfennu'r hapnewidyn i mewn i gydran hapnewidynnau y gallwn eu samplu (er enghraifft trwy'r dull dosraniad gwrthdro), a'u cyfuno mewn ffordd addas.

Enghraifft 15 *Mae fy siwrne i gwaith yn cynnwys gyrru i lawr dau hewl, ac mae'n bosib bod angen stopio ac aros am draffig wrth y cyffordd:*

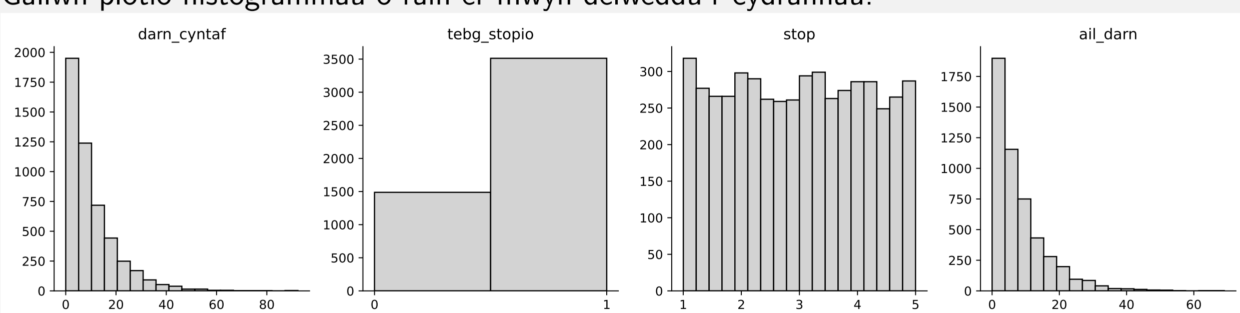
- *mae'r amser y cymerir i yrru'r darn cyntaf mewn munudau wedi'i dosrannu'n Esbonyddol gyda chyfradd* $^1/_{10}$*;*
- *y tebygolrwydd o angen stopio ar gyfer traffig wrth y cyffordd yw 0.7;*
- *os oes angen stopio, mae'r hyd amser aros am draffig wedi dosrannu'n Unffurf rhwng 1 a 5 minud;*
- *mae'r amser y cymerir i yrru'r ail darn mewn munudau wedi'i dosrannu'n Esbonyddol gyda chyfradd* $^1/_8$*.*

Beth y dosraniad yr amser siwrne cyfan? Beth yw'r amser siwrne cymedrig? Beth yw'r tebygolrwydd bod y siwrne yn cymryd mwy na 30 munud?

Datrysiad i Enghraifft 15 *Gallwn samplu pob cydran, dewisiwn* $N = 5000$ *treial:*

```
>>> import random
>>> random.seed(0)
>>> N = 5000
>>> darn_cyntaf = [random.expovariate(1/10) for _ in range(N)]
>>> tebg_stopio = [1 if random.random() < 0.7 else 0 for _ in range(N)]
>>> stop = [1 + (4 * random.random()) for _ in range(N)]
>>> ail_darn = [random.expovariate(1/8) for _ in range(N)]
```

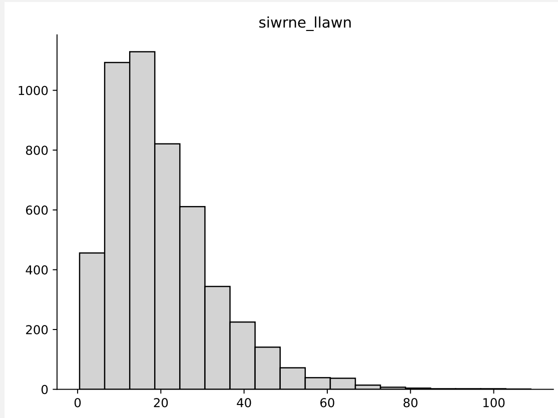
Gallwn plotio histogrammau o rain er mwyn delweddu'r cydrannau:



Gallwn eu cyfuno mewn ffordd priodol:

```
>>> siwrne_llawn = [
...     x1 + (p * s) + x2 for x1, p, s, x2 in zip(
...         darn_cyntaf, tebg_stopio, stop, ail_darn
...     )
... ]
```

Datrysiad i Enghraifft 15 (continuing from p. 62) *Mae'r dosraniau cyfunedig yn edrych fel:*



A gallwn canfod y cymedr, a'r tebygolrwydd o fod o dan 30 munud:

```
>>> cymedr = sum(siwrne_llawn) / N
>>> cymedr
20.35993088090077
>>> tebg_o_dan_30 = sum(x > 30 for x in siwrne_llawn) / N
>>> tebg_o_dan_30
0.1872
```

4.5 Efelychiad Digwyddiadau Arwahanol

Mae Efelychiad Digwyddiadau Arwahanol, new DES, yn efleychiant Monte Carlo cymhleth, fel arfer o system ciwio. Yn gyffredinol, wrth adeiladu a rhedeg DES, mae'r samplu'r cydran hapneidynnau a'u cyfuniadau rhesymegol yn digwydd yn awtomatig gan rhyw meddalwedd efelychiad. Mae'r cyfuniadau hyn yn gallu bod eithaf cymhleth, yn dibynnu ar y system sydd i'w efelechu.

Er enghraifft, ystyriwch ciw $M/M/1$, lle mae diddordeb gennym yn dosraniad amseroedd aros y cwsmeriaid. Yr hapnewidynnau i'w samplu yw amseroedd rhwng-dyfodiad y cwsmeriaid, a'u amseroedd gwasanaeth. Gallwch gweld y cyfuniadau sydd angen er mwyn canfod yr amseroedd aros yn y tabl isod:

Cwsmer i	Rhwng-dyfodiadau sampledig I_i	Dyddiad cyrraedd $A_i = \sum_{k=0}^{i} A_i$	Dyddiad dechrau gwasanaeth $S_i = \max(A_i, E_{i-1})$	Amser aros $W_i = S_i - A_i$	Amser gwasanaeth sampledig Z_i	Dyddiad diwedd gwasanaeth $E_i = S_i + Z_i$
1	1.657	1.657	1.657	0.000	0.807	2.463
2	2.745	4.402	4.402	0.000	0.979	5.381
3	0.280	4.682	5.381	0.699	0.261	5.642
4	2.721	7.403	7.403	0.000	2.012	9.415
5	0.146	7.549	9.415	1.866	0.596	10.011
6	0.075	7.624	10.011	2.387	1.358	11.369
7	1.243	8.867	11.369	2.502	2.329	13.698
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ceisiwch dychmygu beth fydd y cyfuniadau rhesymegol o'r hapnewidynnau yn edrych fel ar gyfer ciw $M/M/c$, new ar gyfer rhywbeth mwy cymhleth fel rhwydwaith o giwiau, lle ar ôl gorffen gwasanaeth mewn un ciw mae cwsmer yn ymuno ag un arall. Mae'n anodd! Felly, mae meddalwedd efelychiad yn ein galluogi i ganolbwyntio ar *adeiladu'r model* yn hytrach na'r gweithrediadau rhesymegol.

Mae nifer of wahanol meddalweddl ar gael ar gyfer DES, ac efelychiad yn fwy cyffredinol. Mae rhai o rain yn ffynhonell-agored, ac mae rhai yn feddalwedd masnacholl mae rhai wedi'i seilio ar cod, tra bod eraill yn delweddol a chaiff eu defnyddio trwy ryngwyneb defnyddiwr graffigol. Mae rhain yn cynnwys:

Ffynhonell-agored:

- Ciw (yn Python)
- SimPy (yn Python)
- Simmer (yn R)
- NetLogo

Masnachol:

- SIMUL8
- Anylogic
- Arena
- FlexSim

Y prif meddalwedd defnyddiwn ni fan hyn yw Ciw, llyfrgell Python er wmyn adeiladu a rhedef efelychiadau digwyddiadau arwahanol o rwydweithi o giwiau. Bydd angen ei osod ar eich cyfrifiadur trwy `pip install ciw`, ac mae ganddo dogfennaeth llawn, gan gynnwys tiwtorialau, yn `https://ciw.readthedocs.io`.

Y cod sy'n adeiladu efelychiad o giw $M/M/1$, gyda dyfodiadau $\lambda = 10$ yr awr, a gwasanaethau $\mu = 15$ yr awr, yw:

```
>>> import ciw
>>> N = ciw.create_network(
...     arrival_distributions=[ciw.dists.Exponential(rate=10)],
...     service_distributions=[ciw.dists.Exponential(rate=15)],
...     number_of_servers=[1]
... )
```

Nawr gallwn rhedeg yr efelychiad, dweud gyda 50 uned amser:

```
>>> ciw.seed(0)
>>> Q = ciw.Simulation(N)
>>> Q.simulate_until_max_time(50)
```

A gallwn casglu data sy'n disgrifio popeth gwnaeth digwydd yn ystod y rhediad o'r efelychiad. Gallwn wedyn arsylwi rhyw ystadegyn o dan sylw, er enghraifft yr amser aros cymedrig:

```
>>> recs = Q.get_all_records()
>>> waits = [r.waiting_time for r in recs]
>>> average_wait = sum(waits) / len(waits)
>>> average_wait
0.0957478641425804
```

Nid yw'r rhif hon, `0.0957478641425804`, yn amcangyfrif da o'r gwir amser aros. Cymharwch gyda'r fformiwla defnyddion ym Mhennod 3:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{^{10}/_{15}}{15 \times (1 - {^{10}/_{15}})} = \frac{2}{15} = 0.1\dot{3}$$

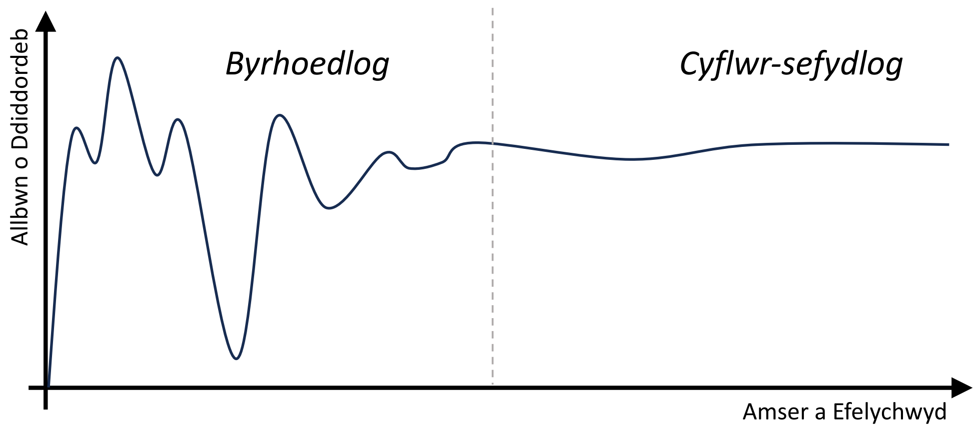
Mae'r anghysondeb fan hyn o achos dau rheswm: ymddygiad byrhoedlog, a nifer o iteriadau.

Ymddygiad Byrhoedlog

Yn gyffredinol mae yna ddau fath o fodel:

- **Terfynus**: lle mae amser agor a chau wedi'u diffinio, er enghraifft, efelychiad o banc. Mae'r banc yn agor pob dydd yn wag, ac mae'r cau yn y prynhawn, yn ail-osod ei gyflwr. Yn yr achosion hyn mae ymddygiad byrhoedlog yn bwysig, dyna sut mae'r system yn symud dros amser.
- **Cyflwr-sefydlog**: lle does dim amser dechrau a diwedd wedi'u diffinio, ac mae'r system yn rhedeg am gyfnod o amser hir iawn, er enghraifft efelychiad o linell cynhyrchu 24 awr. Yn yr achosion hyn fel arfer bydd cyflwr-sefydlog y system o ddiddordeb i ni.

Yn anffodus, heb wybod beth yw'r cyflwr-sefydlog, ni allwn dechrau'r system yn y cyflwr-sefydlog hon. Felly angen i efelychiadau dechrau mewn rhy cyflwr mympwyol, fel arfer cyflwr-gwag, hynny yw heb cwsmeriaid yn bresennol. Yn y cyflwr hon, ni fydd unrhyw cwsmer newydd sy'n cyrraedd yn aros, yn fiasu'r canlyniad. Mae hwn yn golygu rhwng y cyflwr dechreuol mympwyol a'r cyflwr-sefydlog, bydd y system yn bodoli mewn cyflyrau byrhoedlog:



I dod dros y bias hon, defnyddiwn **amser cynhesu**. Dyma cyfnod o amser ar ddechrau rhediad yr efelychiad lle ni gasglwn canlyniadau. Gallwn defnyddio amser cynhesu yn Ciw trwy hidlo'r canlyniadau:

```
>>> amser_cynhesu = 25
>>> amseroedd_aros = [
...     r.waiting_time for r in recs if r.arrival_date > amser_cynhesu
... ]
```

Rydym eisiau dewis hwn i fod digon fawr fel ni gesglir arsylwadau o'r cyflyrau byrhoedlog. Ffordd syml o ddewis hon yw trwy gyfrifo cyfartaledd newidiol ac edrych ar y plot.

Nifer o Iteriadau

Gwelwn yn Adran 4.4 ar efelychiad Monte Carlo wrth i'r nifer o arsylwadau cynyddu, cawn gwell amcangyfrif o'r ystadegyn rydym yn mesur. Mae hwn yn wir ar gyfer DES, ond beth yw nifer o arsylwadau yn golygu fan hyn?

- Ar gyfer modelau **terfynus** un rhediad o'r efelychiad yw un arsylwad. Felly mae angen ail-rhedeg yr efelychiad nifer o weithiau, gyda had wahanol. Fe elwir hon rhedeg *treialau*. Pan yn ddefnyddio Ciw, gallwn genwud hwn gyda lwpiau-for.
- Ar gyfer modelau **cyflwr-sefydlog**, gallwn hefyd rhedeg treialau, ond hefyd, yn syml gallwn rhedeg yr efelychiad am cyfnod o amser hir iawn, wrth i ni casglu mwy a mwy o arsylwadau.

Rhai enghreifftiau:

Enghraifft 16 *Amcangyfrifwch yr amser aros cymedrig ar gyfer ciw $G/G/3$ lle mae gan yr amseroedd rhwng-dyfodiad dosraniad Unffurf rhwng 4 a 12 munud, ac mae gan yr amseroedd gwasanaeth dosraniad Gamma gyda pharamedr siâp 2.5 a pharamedr graddfa 7.*

Datrysiad i Enghraifft 16 *Model cyflwr-sefydlog yw hon, felly rhedwn un efelychiad hir (saith diwrnod) gydag amser cynhesu (un diwrnod). Yr unedau amser yw munudau:*

```
>>> import ciw
>>> amser_efelychu_mwyaf = 60 * 24 * 8
>>> amser_cynhesu = 60 * 24
>>> N = ciw.create_network(
...     arrival_distributions=[ciw.dists.Uniform(lower=4, upper=12)],
...     service_distributions=[ciw.dists.Gamma(shape=2.5, scale=7)],
...     number_of_servers=[3]
... )
>>> ciw.seed(0)
>>> Q = ciw.Simulation(N)
>>> Q.simulate_until_max_time(amser_efelychu_mwyaf)
>>> recs = Q.get_all_records()
>>> amseroedd_aros = [
...     r.waiting_time for r in recs if r.arrival_date > amser_cynhesu
... ]
>>> sum(amseroedd_aros) / len(amseroedd_aros)
1.8018106484544456
```

Ac enehraifft terfynus:

Enghraifft 17 *Mae gweithdy trwsio beiciau ar agor am 9 awr y dydd:*

- *mae beiciau yn cyrraedd ar hap gyda chyfradd 15 yr awr,*
- *yn gyntaf maent yn ciwio am arolwg, sydd yn gallu cael ei chwblhau gyda chyfradd 20 yr awr,*
- *does dim angen trwsio ar 20% o'r beiciau, ac maent yn gadael y gweithdy,*
- *mae 80% o'r beiciau felly'n ymuno â chiw er mwyn cael eu trwsio, sydd yn gallu cwblhau gyda chyfradd 10 yr awr.*

Ar hyn o bryd mae gan y gweithdy un gweithiwr yn arolygu'r beiciau, ac un gweithiwr yn trwsio'r beiciau. Maent yn poenu am cyfran y beiciau sy'n gwario mwy na chyfanswm o 0.5 awr yn y gweithdy. Mae'n nhw eisiau cyflogi un gweithiwr yn ychwanegol er mwyn lleihau'r cyfran hon, a fydd mwy o fudd i'r gweithiwr newydd arolygu'r beiciau neu trwsio'r beiciau?

Datrysiad i Enghraifft 17 *Mae hwn yn fodel terfynus, felly mae angen ailadrodd yr arbrawf nifer o weithiau. Gallwn gwneud hwn gyda ffwythiant:*

```
>>> import ciw
>>> import pandas as pd
>>> def canfod_cyfran(n_arolygwyr, n_trwsiwyr):
...     N = ciw.create_network(
...         arrival_distributions=[
...             ciw.dists.Exponential(rate=15),
...             None
...         ],
...         service_distributions=[
...             ciw.dists.Exponential(rate=20),
...             ciw.dists.Exponential(rate=10)
...         ],
...         number_of_servers=[n_arolygwyr, n_trwsiwyr],
...         routing=[[0.0, 0.8], [0.0, 0.0]]
...     )
...     Q = ciw.Simulation(N)
...     Q.simulate_until_max_time(9)
...     recs = Q.get_all_records()
...     R = pd.DataFrame(recs).groupby('id_number')
...     amser_yn_system = R['exit_date'].max() - R['arrival_date'].min()
...     return (amser_yn_system > 0.5).mean()
```

Byddwn hefyd yn ysgrifennu ffwythiant i redeg nifer o dreialau o hwn:

```
>>> def rhedeg_treialau(n_arolygwyr, n_trwsiwyr, treialau):
...     ps = []
...     for treial in range(treialau):
...         ciw.seed(treial)
...         p = canfod_cyfran(n_arolygwyr, n_trwsiwyr)
...         ps.append(p)
...     return sum(ps) / treialau
```

Nawr gallwn redeg y senario gwreiddiol:

```
>>> rhedeg_treialau(n_arolygwyr=1, n_trwsiwyr=1, trials=20)
0.5339246569473143
```

Datrysiad i Enghraifft 17 (continuing from p. 68) *a'r dau senario newydd:*

```
>>> rhedeg_treialau(n_arolygwyr=2, n_trwsiwyr=1, trials=20)
0.44444581769225433
>>> rhedeg_treialau(n_arolygwyr=1, n_trwsiwyr=2, trials=20)
0.19943800806935968
```

Gwelwn fod y ddau senario yn gwella'r cyfran sy'n aros dros 0.5 awr, ond bydd cyflogi gweithiwr ychwanegol i drwsio'r beiciau lot gwell na gyflogi gweithiwr i arolygu'r beiciau.

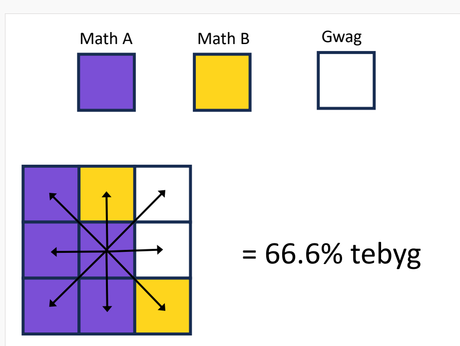
Nodwch dyma enghraifft o fodelu rhwydwaith o giwiau. Mae hwn yn safonol iawn wrth modelu gyda DES.

4.6 Modelu wedi Seilio ar Asiantau

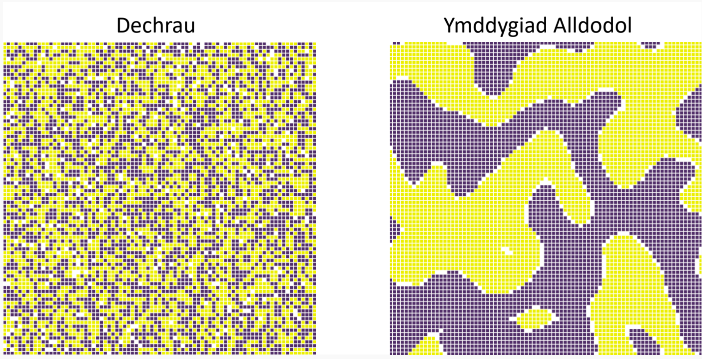
Rhoddir yr adran hon er ddiddordeb, fel syniad o fath o efelychiad o'r enw *modelu wedi seilio ar asiantau*. Yn gyffredinol mae gan y modelau hyn endidau neu asiantau sy'n dilyn rheolau, neu *meicrocymhellion* eu hunain, ac wrth i'r model rhedeg arsylwn ymddygiad allddodol y system cyfan, neu *macroymddygiad*. Fan hyn arddangoswn rhai modelau nodedig i ddangos y syniadau cyffredinol:

Model Arwahanu Schelling

Yn y model hon mae yna grid $N \times N$ o dai, yn gynrychioli ddinas. Teuluoedd yw'r asiantau sydd yn feddiannu'n unigol tŷ ar y grid. Fe all y teuluoedd hyn fod un o ddwy fath, A neu B. Mae llai o asiantau nag o dai, felly bydd yna rhyw canran o dai sy'n wag. Mae teulu yn "hapus" os yw'r canran o'i gymdogion uniongyrchol (rheini sydd uwchben, oddi tanddo, i'r dde, chwith, ac i'r groeslin yn uniongyrchol iddynt) sydd o'r un fath a'u hunain yn fwy na rhyw drothwy p.



Ar bob dic y cloc, bydd unrhyw teulu anhapus yn symud i dŷ gwag wedi dewis ar hap. Mae hwn yn parhau tan bod bob teulu yn hapus. Gwelwn fod teuluoedd yn arwahanu ei hunain yn naturiol:



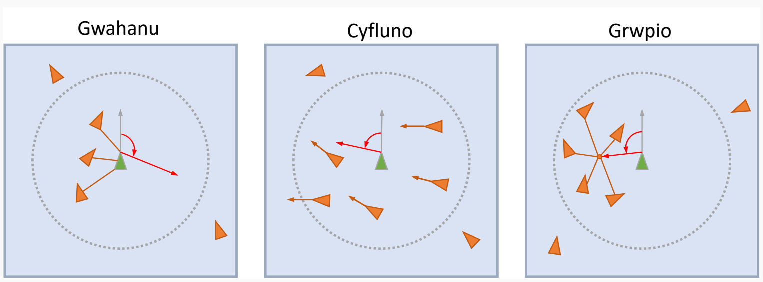
Yn yr enghraifft uchod y trothwy tebygrwydd oedd 50%, tra mae gan yr ymddygiad alldodol tebygrwydd cymydog cymedrig o 96%. Yn gyffredinol mae'r model yn dangos gall hyd yn oed ffafriath bach ar gyfer cymdogion tebyg yn gallu achosi cymdeithas hynod ar wahân.

BOIDS

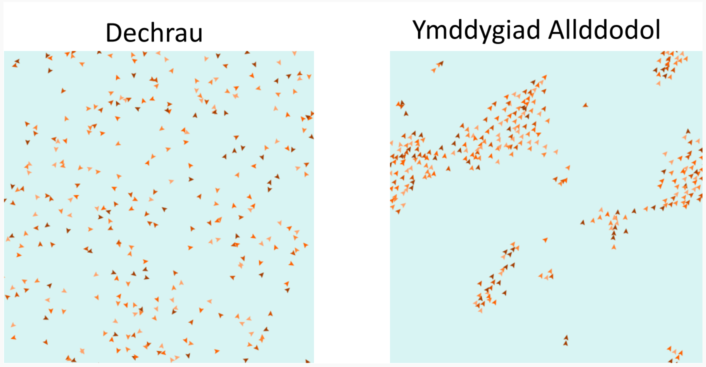
Yn y model hon mae'r byd wedi'i poblogi gan adar rhith, wedi'i gwasgaru ar hap i ddechrau, ac i gyd yn wynebu ar onglau ar hap. Ar bob dic y cloc, mae'r adar rhith yn camu ymlaen ffracsiwn o gam yn y cyfeiriad maent yn wynebu, ac yna maent yn troi ffracsiwn o ongl, yn ôl tair rheol:

i *gwahanu*: troi er mwyn osgoi gorlenwi adar gerllaw,
ii *cyfluno*: troi tuag at gyfeiriad cymedrig y mae'r adar gerllaw yn wynebu,
iii *grwpio*: troi tuag at safle cymedrig adar gerllaw.

Fan hyn mae 'adar gerllaw' yn golygu rheini o fewn rhyw radiws o safle's aderyn.



Gwelwn yn y pen draw fod ymdydgiad adar yn heidio'n naturiol yn allddodi:



Mae hwn yn awgrymu fod heidio adar go iawn wedi'i achosi gan rheolau syml, unigol yr adar, yn lle rhyw arweinydd canolog.

4.7 Y Proses Modelu

Mae efelychiad, a modelu mathemategol yn fwy cyffredinol, yn fwy nag ond y mathemateg tu ôl iddo. Mae yna proses llawn y mae modelwyr yn mynd trwyddo er mwyn sicrhau bod y modelau yn rhai dda. Bydd rhai cysyniadau yn cael eu cyflwyno fan hyn.

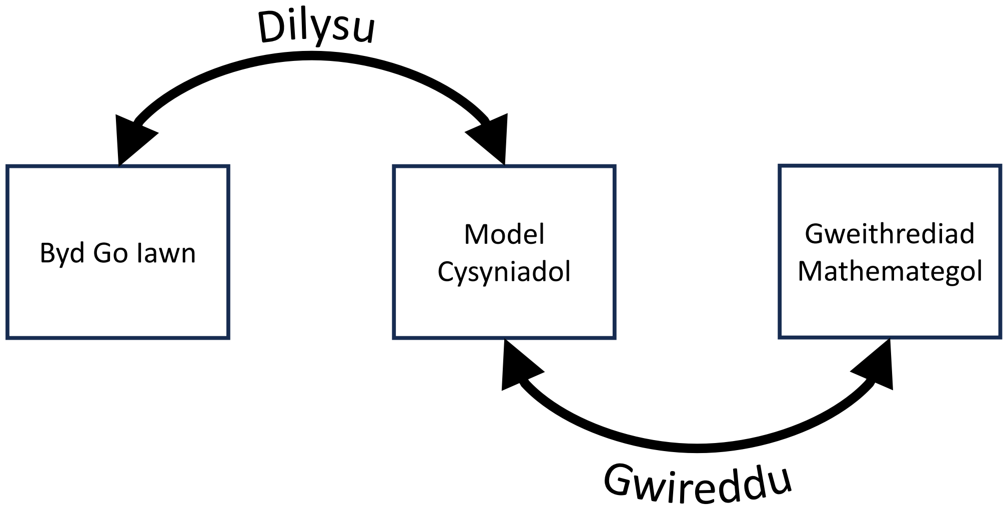
Cysyniadau Modelu

- **Model Cysyniadol**: Dyma cynrychiolaeth haniaethol, wedi symleiddio, o'r system byd-go-iawn sydd i'w fodelu. Mae'n cynnwys manylion pwyhsog sydd o ddiddordeb, ac yn anwybyddu manylion nad ydym yn credu sydd yn bwysig.

- **Dilysu**: Dyma'r proses o sicrhau bod y model cysyniadol wir yn cynrychiolu'r system byd-go-iawn caiff ei fodelu.

- **Gwireddu**: Dyma'r proses o sicrhau bod y methodoleg mathemategol a ddefnyddiwyd yn gweithredu'r model cysyniadol yn gywir.

Hynny yw, mae dilysu yn sicrhau eich bod yn datrys y problem cywir. Mae Gwireddu yn sicrhau eich bod yn datrys y problem yn gywir.



Mae yna nifer o dechnegau gallwn denfyddio i ddilysu a gwireddu ein modelau. Er enghraifft:

Dilysu

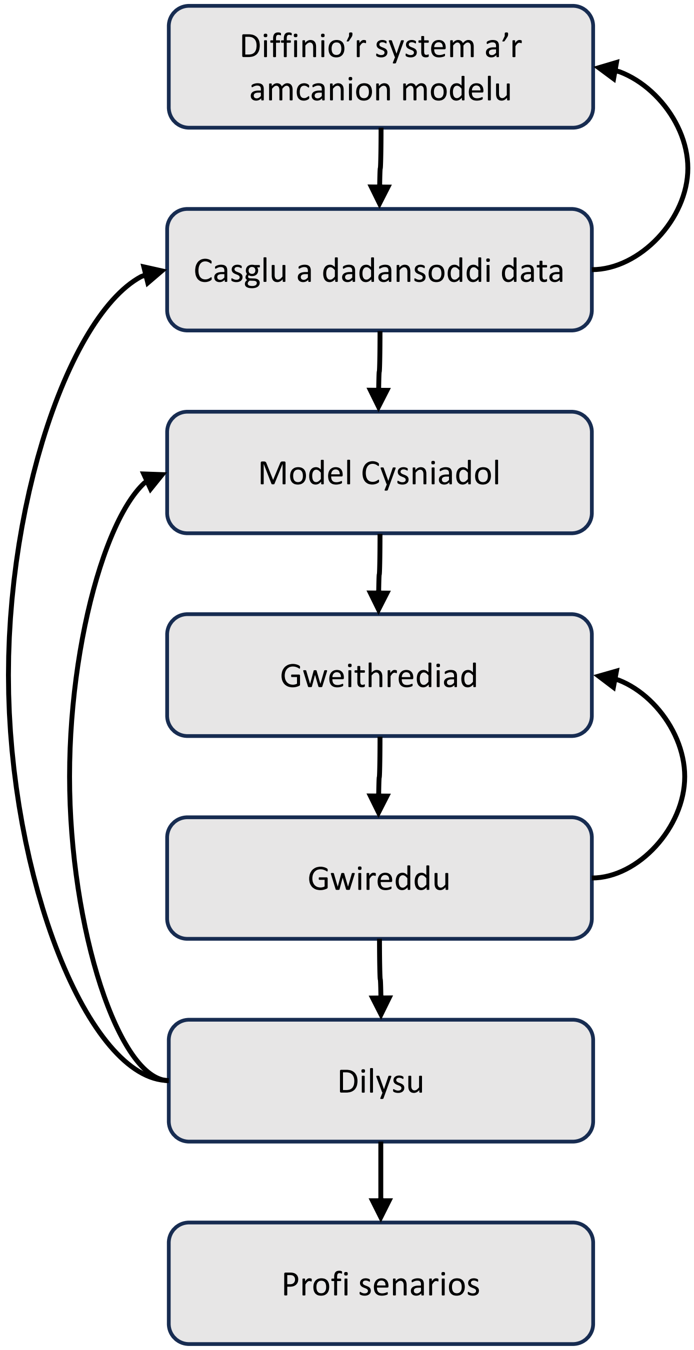
- dilysu arwynebol: gofyn i arbenigwyr o'r system real asesu manwil gywirdeb y model cysyniadol,
- ystyried tybiaethau'r model: rhestri a gwirio pob tybiaeth a gafodd ei wneud yn y model cysyniadol, e.e. tybiaethau am y dosraniadau tebygolrwyd a ddefnyddwyd,
- data allbwn: cymharu data allbwn y model mathemategol cywir gyda data a casglwyd yn y byd-go-iawn.

Gwireddu

- olrhain: dilyn endyd unigol trwy rhediad yr efelychiad i gwirio rhesymeg y fodel,
- cymharu gyda chanlyniadau analytig: os gall rhai cydranau o'r model cael eu modelu'n analytig (e.e. ciwiau Markovaidd), cymharwch allbwn efelychiad y cydran gyda'r model analytig,
- profion eithaf: newidiwch rhai paramedrau mewnbwn i werthoedd eithaf, a gweld os yw'r allbwn yn gwneud synnwyr, e.e. llenwi'r system gyda nifer eithafol o ddyfodiadau a fe ddylai'r amseroedd aros cynyddu.

Mae yna gorgyffyrddiad rhwng gwireddu modelau efelychiad ac profion awtomatig meddalwedd da, a defnyddir nifer o'r un camau a thechnegau.

Wrth adeiladu model, un cysyniadol a mathemategol, dydyn ni ddim yn neidio syth mewn. Mae yna camau i gymryd. Yn gyntaf diffiniwn yr amcanion, bydd hwn yn helpu gyda'r model cysyniadol, a phenderfynu pa symleiddiadau a thybieithau gallwn wneud. Caiff hwn ei iteru arno gyda dilysu a gwireddu. Unwaith bod y model wedi'i adeiladu, dim ond nawr gallwn profi'r senarios beth-os. Caiff hwn ei grynhoi yn y siart llif isod:


Diffinio'r system a'r amcanion modelu
Casglu a dadansoddi data
Model Cysniadol
Gweithrediad
Gwireddu
Dilysu
Profi senarios

Pennod 5

Rhaglennu Llinol

Deilliannau dysgu:

- Gallu fformiwleiddio problemau rhaglennu llinol;
- Gallu datrys problemau rhaglennu llinol gan ddefnyddio'r dull graffigol;
- Gallu datrys problemau rhaglennu llinol gan ddefnyddio'r dull tablo Simplecs.

5.1 Cyflwyniad

Mae problemau sy'n ymwneud gydag uchafsymio a lleiafsymio ffwythiannau wedi tynnu sylw mathemategwyr am ganrifoedd. Y symlaf o broblemau o'r fath yw optimeiddio ffwythiant gydag un newidyn gan ddefnyddio calcwlws elfennol, h.y., os yw

$$y = f(x)$$

yna rhoddir gwerthoedd uchaf / isaf y gan yr x sy'n bodloni

$$f'(x) = 0.$$

Gallwn optimeiddio ffwythiant gyda mwy nag un newidyn trwy osod ei deilliannau rhannol i sero. Efallai rydych wedi gweld hwn yn eich cwrs calcwlws yn yr ail flwyddyn.

Estyniad o'r broblem yw pan mae rhai i'r newidynnau wedi'u cyfyngu, a gallwn ddefnyddio'r dull lluoswm Lagrange fan hyn. H.y.

$$\begin{aligned} \text{uchafsymio / lleiafsymio } f(x,y,u,v) \\ \text{yn amodol ar} \\ g(x,y,u,v) = 0 \\ \text{ac } h(x,y,u,v) = 0. \end{aligned}$$

Yn ystod yr Ail Ryfel Byd daeth problem optimeiddio newydd i'r amlwg nad oedd yn bosib i'w datrys gyda dulliau clasurol. Y broblem oedd uchafsymio neu leiafsymio rhyw ffwythiant yn amodol ar rhai cyfyngiadau, ond gyda chymhlethdod ychwanegol bod angen i rai o'r newidynnau fod yn annegatif.

Felly rhoddwyd lot o ymdrech i'r broblem yn bennaf am ei fod yn defnyddio i ddatrys problemau ymarferol. Yn arbennig cafodd yr achos lle mae'r ffwythiant amcan a'r cyfyngiadau yn llinol lot o sylw. Gelwir y fath problem yn *broblemau rhaglennu llinol*. Fan hyn mae'r gair 'rhaglennu' yn cyfeirio at algorithm strwythedig, ac nid at raglen gyfrifiadurol.

Caiff problem rhaglennu linol (RhLl / LP) arferol ei ysgrifennu fel:

Uchafsymio (neu leiafsymio)

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

yn amodol ar

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{ar gyfer pob } i = 1, 2, \ldots, n$$

a'r amod annegatif

$$x_j \geq 0 \quad \text{ar gyfer pob } j = 1, 2, \ldots, n$$

Fan hyn gelwir yr a_{ij} y gwerthoedd matrics ochr chwith, gelwir y b_i y cysonion ochr dde, a'r c_j y cysonion ffwythiant cost.

Nodwch fod problemau LP yn llinol, ac felly ni ellir cynnwys termau aflinol megis x^3, $x_1 x_2$, $\sqrt{x}$, $\log(x_2)$, ac yn y blaen.

Byddwn yn ystyried dau ddull o ddatrys y broblem hon, yn graffigol, a gan ddefnyddio tablo Simplecs. Yn gyntaf, ystyriwn y dasg o fformiwleiddio problem.

5.2 Fformiwleiddio

Yn Ymchwil Weithrediadol mae gennym ddiddordeb mewn datrys problemau byd go iawn. Mae rhaglennu llinol yn dechneg gallwn gymhwyso i broblemau o'r fath er mwyn ganfod datrysiadau gorau posib. Ond, yn gyntaf mae angen dysgu sut allwn fformiwleiddio ein problem ymarferol i mewn i broblem fathemategol. Ystyriwch yr enghraifft ganlynol:

Enghraifft 18 *Ystyriwch:*

(a) Rydych mewn cystadleuaeth bwyta y bydd yn para un awr. Gallwch naill ai bwyta selsig sy'n cymryd 2 munud i fwyta, neu fyrgyrs sy'n cymryd 3 munud i fwyta. Byddwch yn ennill 4 pwynt am bob selsig a 5 pwynt am bob byrgyr. Faint o'r naill fath o fwyd dylech chi fwyta er mwyn uchafsymio eich nifer o bwyntiau?

(b) Beth os oes gofyn ychwanegol bod y nifer rydych yn bwyta o un fath o fwyd methu bod mwy na 5 yn fwy na'r nifer o'r fath arall o fwyd.

Camau er mwyn fformiwleiddio'r broblem:

1. Diffiniwch y newidynnau (yn glir)
2. Nodwch y ffwythiant amcan (angen iddo fod yn llinol)
3. Nodwch y cyfyngiadau (angen iddynt fod yn llinol)
4. Angen cynnwys y cyfyngiad annegatif
5. Penderfynwch os dylai'r newidynnau fod yn gyfanrifol, ddeuaidd, ayyb.[1]

Datrysiad i Enghraifft 18 *Gadewch i S bod y nifer o selsig i'w fwyta, a gadewch i B bod y nifer o fyrgyrs i'w fwyta. Yna'r broblem rhaglennu linol yw:*

Uchafsymio:

$$4S + 5B \tag{5.1}$$

yn amodol ar

$$2S + 3B \leq 60 \tag{5.2}$$

$$S \leq B + 5 \tag{5.3}$$

$$B \leq S + 5 \tag{5.4}$$

$$S, B \geq 0 \tag{5.5}$$

Fan hyn (5.1) yw'r ffwythiant amcan i'w uchafsymio, yn cynrychioli'r nifer o bwyntiau enillir; (5.2) yw'r cyfyngiad amser yn cynrychioli'r amser sydd angen er mwyn bwyta'r eitemau; (5.3) ac (5.5) yw'r cyfyngiadau yn sicrhâi nid yw nifer un eitem yn fwy na 5 yn fwy na'r llall; ac (5.5) yw'r cyfyngiad annegatif oherwydd ni allwn fwyta nifer negatif o selsig neu fyrgyrs.

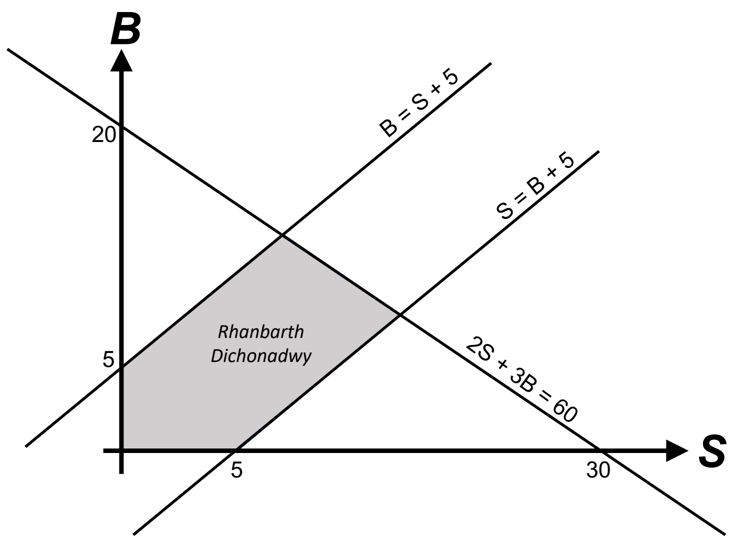
Nodwch - gallwn dybio bod angen i'r nifer o fyrgyrs a selsig fod yn gyfanrifol. Am bwrpas y cwrs hwn ni fyddwn yn ystyried cyfyngiadau cyfanrifol - caiff y rhain ystyriaeth yn y modiwl Optimisation blwyddyn nesaf.

[1] Nodwch nid yw newidynnau cyfanrifol a deuaidd yn cael eu hystyried yn y cwrs hwn, ond byddwch yn eu gweld ar y modiwl Optimisation ym mlwyddyn 3.

5.3 Dull Graffigol

Dyma ddull o ganfod gwerthoedd y newidynnau penderfynu trwy dynnu llun graffiau, er gallwn ond delio gyda phroblemau gyda dau newidyn yn y ffordd hon. Y dull yw tynnu'r cyfyngiadau llinol yn y plân Cartesaidd ac adnabod y *rhanbarth dichonadwy*. Dyma'r rhanbarth lle mae'r holl gyfyngiadau wedi'u bodloni. Yna cyfrifwn werth y ffwythiant amcan ym mhob cornel sy'n diffinio'r rhanbarth dichonadwy, ac yn canfod y fertig sy'n optimeiddio'r ffwythiant amcan.

Ystyriwch y broblem yn Enghraifft 18. Tynnwch lun y graff trwy dynnu llinellau sy'n cyfateb gyda'r cyfyngiadau:



Y rhanbarth dichonadwy yw'r set o bwyntiau (datrysiadau) sy'n bodloni'r holl gyfyngiadau.

Caiff y datrysiad gorau posib ei rhoi gan y pwynt sy'n gorwedd o fewn y rhanbarth dichonadwy sy'n uchafsymio'r ffwythiant amcan. Bydd pob amser ar fertig sy'n diffinio'r rhanbarth dichonadwy. Fan hyn y pwyntiau hyn yw: $(0, 0)$, $(0, 5)$, $(5, 0)$, y pwynt lle mae $B = S + 5$ yn cwrdd â $2S + 3B = 60$ h.y. $(9, 14)$, a'r pwynt lle mae $S = B + 5$ yn cwrdd â $2S + 3B = 60$ h.y. $(15, 10)$.

Os cyfrifwn werth y ffwythiant amcan ym mhob pwynt:

Pwynt	Ffwythiant amcan $= 4S + 5B$
$(0, 0)$	$4(0) + 5(0) = 0$
$(0, 5)$	$4(0) + 5(5) = 25$
$(5, 0)$	$4(5) + 5(0) = 20$
$(9, 14)$	$4(9) + 5(14) = 106$
$(15, 10)$	$4(15) + 5(10) = 110$

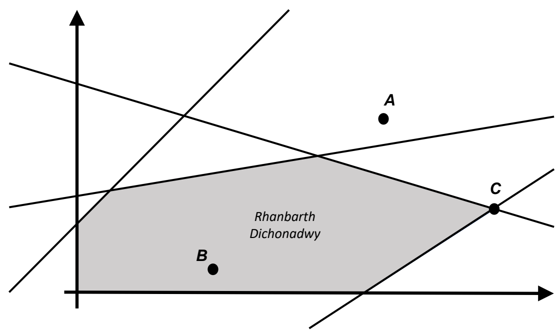
Felly'r datrysiad gorau posib yw ennill 110 pwynt gan bwyta 15 selsig a 10 byrgyr. Nodwch, wrth gyflwyno'r datrysiad gorau posib, angen ei gyflwyno mewn cyd-destun y cwestiwn gwreiddiol.

Archwilio'r Gofod Datrysiadau

Y gofod datrysiadau yw'r holl bwyntiau $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Mewn dau ddimensiwn rydym wedi dechrau darlunio'r gofod yn graffigol fel plân Cartesaidd. Gallwn gategoreiddio pwyntiau o fewn y gofod datrysiadau fel naill ai *sylfaenol* neu *ansylfaenol*, ac fel naill ai *dichonadwy* neu *annichonadwy*.

- Mae pwyntiau **dichonadwy** yn gorwedd o fewn y rhanbarth dichonadwy, hynny yw maent yn bodloni'r holl gyfyngiadau. Fel arall mae'r pwynt yn **annichonadwy**.
- Mae pwynt dichonadwy yn **sylfaenol** os yw'n fertig o'r polyhedron sy'n diffinio'r rhanbarth dichonadwy, h.y. os yw n o'r cyfyngiadau yn dynn. Fel arall mae'r pwynt yn **ansylfaenol**.

Ystyriwch y dehongliad graffigol o broblem rhaglennu linol isod:



Caiff y tri phwynt eu categoreiddio fel y ganlyn:

	Dichonadwy	Annichonadwy
Sylfaenol	C	
Ansylfaenol	B	A

Mae tynnu llun yn gallu fod yn ddefnyddiol wrth benderfynu os yw rhanbarth dichonadwy yn **ffinedig** neu'n **ddiarffin**. Roedd yr enghraifft flaenorol yn ffinedig. Nawr ystyriwch:

Uchafsymio:

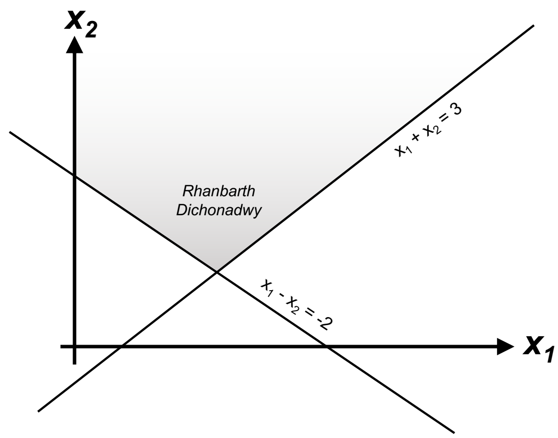
$$3x_1 + 5x_2$$

yn amodol ar

$$x_1 + x_2 \geq 3$$
$$-x_1 + x_2 \geq -2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Mae'r cyfyngiadau nawr yn rhoi rhanbarth diarffin, ac felly mae'r broblem yn ddiarffin. Yn yr achos hwn, gan ei fod yn broblem uchafsymio, gallwn ddewis x_1 ac x_2 i fod mor fawr ag sydd bosib, cyhyd a bod x_1 dau yn fwy nag x_2, a bydd y cyfyngiadau wedi'i bodloni, ac felly gallwn gynyddu gwerth y ffwythiant amcan yn anfeidrol.

Yn y cwrs hwn byddwn ond yn delio gyda phroblemau ffinedig.



Mae tynnu llun yn gallu bod yn ddefnyddiol wrth benderfynu os yw broblem yn ddichonadwy. Ystyriwch:

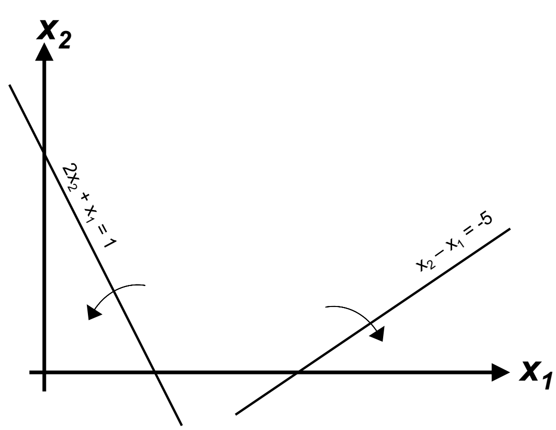
Uchafsymio:

$$3x_1 + 5x_2$$

yn amodol ar

$$x_2 - x_1 \leq -5$$
$$x_2 + \frac{1}{2}x_1 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Mae'r llun isod yn dangos nad oes rhanbarth dichonadwy (mae'r saethau yn nodi pa ochr y llinell sy'n bodloni'r cyfyngiadau). Felly mae'r broblem yn **annichonadwy**.



Enghraifft 19 *Mae tîm rheoli gorsaf pŵer trydanol glo angen cydymffurfio gyda deddfau llygredd aer diweddaraf o ran safonau allyriadau. Ar gyfer yr orsaf hon, y gyfradd allyriadau caniataol uchaf yw 12 kg/awr. Mae dau fath o glo ar gael, Gradd A sy'n glo caled, yn llosgi'n lân, ac wedi'i chynhyrchu'n lleol; a Gradd B sy'n glo rhad, meddal, myglyd, ac wedi'i mewnforio o dramor.*
Yn gyntaf mae'r glo yn dod i'r orsaf ar drên a chaiff ei chario i'r uned malurio trwy system cludo. Mae gan y system cludo capasiti uchaf o 20 tynnell o glo yr awr.
Yna caiff y glo ei malurio a'i bwydo i mewn i'r siambr amlosgi. Oherwydd caledwch y glo lleol capasiti mwyaf y glo hwn ar yr uned malurio yw 16 tynnell yr awr, tra ei fod 24 tynnell yr awr am y glo tramor.
Allyriadau gronynnol y glo yw:

- *Gradd A: 0.5 kg allyriadau / tynnell a losgwyd*
- *Gradd B: 1.0 kg allyriadau / tynnell a losgwyd*

Mae'r ager y cynhyrchwyd gan glo Gradd A yn rhoi £24,000 y tynnell, ac mae'r ager y cynhyrchwyd gan glo Gradd B yn rhoi £20,000 y tynnell.
Mae'r llywodraeth yn cyfyngu faint o glo tramor y gellir ei defnyddio. Y cyfyngiad yw ar gyfer pob tynnell o glo tramor y defnyddiwyd, angen i'r cwmni defnyddio o leiaf 1.5 tynnell o lo leol.
Mae'r tîm rheoli eisiau gwybod: "O gael y sefyllfa y disgrifir uchod, beth yw'r allbwn trydan mwyaf posib, a sut gallen nhw gyflawni hwnna?"

Datrysiad i Enghraifft 19 *Fformiwleiddio: Gadewch i x_1 bod y nifer o dynnellau o glo Gradd A y defnyddiwyd yr awr, a gadewch i x_2 bod y nifer o dynnellau o glo Gradd B y defnyddiwyd yr awr. Yna'r broblem rhaglennu linol yw:*

Uchafsymio:

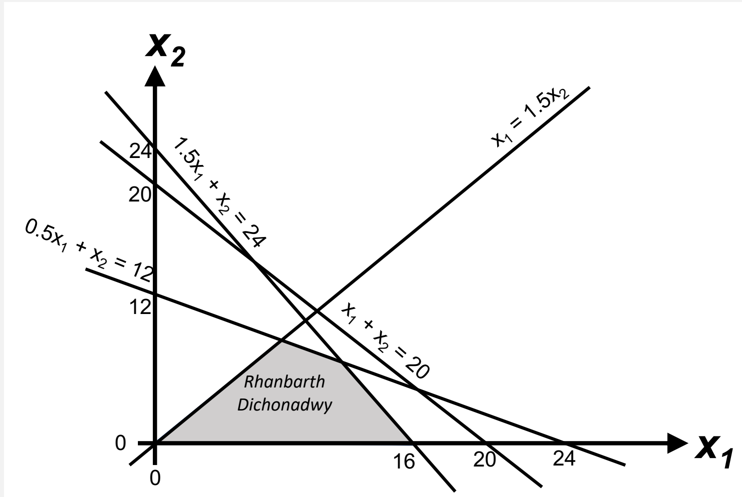
$$24000x_1 + 20000x_2 \tag{5.6}$$

yn amodol ar

$$x_1 + x_2 \leq 20 \tag{5.7}$$
$$0.5x_1 + x_2 \leq 12 \tag{5.8}$$
$$\frac{1}{16}x_1 + \frac{1}{24}x_2 \leq 1 \tag{5.9}$$
$$x_1 - 1.5x_2 \geq 0 \tag{5.10}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{5.11}$$

Fan hyn (5.6) yw'r ffwythiant amcan yn cynrychioli'r elw a enillir pob awr. Y cyfyngiadau: mae (5.7) yn cynrychioli'r capasiti system cludo; mae (5.8) yn sicrhau nad yw'r allyriadau pob awr yn rhagori'r safonau; (5.9) yw capasiti pob awr yr uned malurio; mae (5.10) yn gorfodi defnyddio o leiaf 1.5 gwaith mwy o lo lleol na glo tramor; ac mae (5.11) yn dynodi ni allwn ddefnyddio maint negatif o lo.

Datrysiad i Enghraifft 19 (continuing from p. 80) *Mae tynnu llun o hwn yn rhoi:*



Mae pedwar fertig i'r rhanbarth dichonadwy: $(0, 0)$, $(16, 0)$, *y pwynt lle mae* $\frac{3}{2}x_1 + x_2 = 24$ *yn cwrdd â* $0.5x_1 + x_2 = 12$ *h.y.* $(12, 6)$, *a'r pwynt lle mae* $0.5x_1 + x_2 = 12$ *yn cwrdd ag* $x_1 = 1.5x_2$ *h.y.* $\left(\frac{72}{7}, \frac{48}{7}\right)$.
Os cyfrifwn werth y ffwythiant amcan ym mhob pwynt:

Pwynt	*Ffwythiant amcan* $= 24000x_1 + 20000x_2$
$(0, 0)$	$24000(0) + 20000(0) = 0$
$(16, 0)$	$24000(16) + 20000(0) = 384000$
$(12, 6)$	$24000(12) + 20000(6) = 408000$
$\left(\frac{72}{7}, \frac{48}{7}\right)$	$24000\left(\frac{72}{7}\right) + 20000\left(\frac{48}{7}\right) = 384000$

Felly'r datrysiad gorau posib yw cynhyrchu 384000 *punt o ager gan ddefnyddio* 12 *tynnell o lo Gradd A yr awr a* 6 *tynnell o lo Gradd B yr awr.*

Ystyriwch enghraifft arall:

Enghraifft 20 *Mae adeiladwr eisiau datblygu safle deg erw trwy adeiladu dau fath o dŷ:*

- *Math A - yn costio £56,000, lle gellir gwneud elw o 10%. Mae'n defnyddio* $\frac{1}{10}$*fed erw.*
- *Math B - yn costio £80,000, lle gellir gwneud elw o 20%. Mae'n defnyddio* $\frac{1}{4}$ *erw.*

Mae'r cyngor yn gofyn bod caiff uchafswm o 8 tŷ yr erw eu hadeiladu.

(a) *Faint o bob math o dŷ dylai'r adeiladwr adeiladu er mwyn uchafsymio'r elw?*
(b) *Os yw'r elw o'r tŷ rhatach yn newid o 10% i 15%, beth yw'r datrysiad newydd?*

Datrysiad i Enghraifft 20 *Fformiwleiddio: Gadewch i x_1 bod y nifer o dai o Fath A yr adeiladir pob erw, a gadewch i x_2 bod y nifer o dai o Fath B yr adeiladir pob erw. Yna'r broblem rhaglennu linol gwreiddiol yw:*

Uchafsymio:

$$5600x_1 + 16000x_2 \tag{5.12}$$

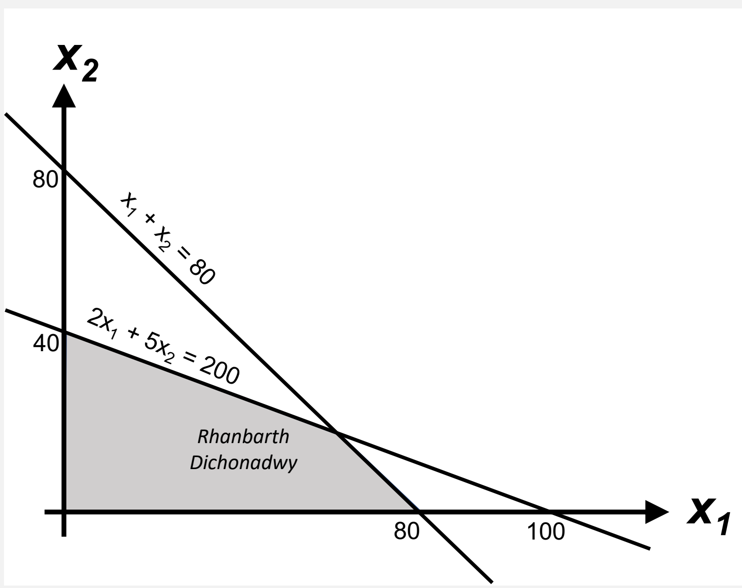
yn amodol ar

$$x_1 + x_2 \leq 80 \tag{5.13}$$

$$\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 10 \tag{5.14}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \ \text{ ac yn gyfanrifol.} \tag{5.15}$$

Fan hyn: (5.12) yw'r ffwythiant amcan i'w uchafsymio, yn cynrychioli'r elw cyfan. Y cyfyngiadau: mae (5.13) yn cynrychioli gofyn y cyngor ar y nifer o dai yr adeiladir pob erw; mae (5.14) yn sicrhau bod digon o le i adeiladu'r tai; ac (5.15) yw'r cyfyngiad annegatif a chyfanrifol, sy'n nodi ni allwn adeiladu nifer negatif neu nifer di-gyfanrifol o dai.
Ar gyfer rhan (b), y ffwythiant amcan yw $8400x_1 + 16000x_2$.
Nawr mae tynnu llun o hwn yn rhoi:



Datrysiad i Enghraifft 20 (continuing from p. 82) *Mae pedwar fertig i'r rhanbarth dichonadwy:* $(0,0)$, $(0,80)$, $(40,0)$, *a'r pwynt lle mae* $x_1 + x_2 = 80$ *yn cwrdd â* $2x_1 + 5x_2 = 200$ *h.y.* $\left(\frac{200}{3}, \frac{40}{3}\right)$.
Os cyfrifwn werth y ffwythiant amcan ym mhob pwynt, ar gyfer y ddau senario ffwythiant amcan:

Pwynt	*Amcan (a)* $5600x_1 + 16000_2$	*Amcan (b)* $8400x_1 + 16000x_2$
$(0,0)$	0	0
$(80,0)$	448000	672000
$(0,40)$	640000	640000
$\left(\frac{200}{3}, \frac{40}{3}\right)$	586666.67	773333.33

Yn senario (a) mae'r datrysiad gorau posib yn rhoi elw o £640,000 wrth adeiladu 0 *tai o Fath A a* 40 *tai o Fath B.*
Yn senario (b) mae'r datrysiad gorau posib yn rhoi elw o £733,333.33 wrth adeiladu $\frac{200}{3}$ *tai o Fath A a* $\frac{40}{3}$ *tai o Fath B.*

Nodwch ni allwch adeiladu $\frac{200}{3}$ tai o Fath A oherwydd ni allwn adeiladu nifer di-gyfanrifol o dai. Roedd hwn yn enghraifft o *broblem rhaglennu linol cyfanrifol*, a bodoler dulliau er mwyn datrys y rhain, megis planau torri a dulliau canghenu ac arffiniau, ond ni chaiff eu dysgu yn y modiwl hwn. Serch hynny, mae datrys hwn tra'n ymlacio'r cyfyngiad cyfanrifol dal yn gallu fod yn ddefnyddiol. Gelwir hwn y broblem *llaciad LP*, ac mae'n rhoi arffin uchaf i werth y gwir elw gorau posib. Hynny yw, gwyddon yn senario (b) ni allwn gael elw yn fwy na £733,333.33 os oes angen i ni adeiladu nifer cyfanrifol o dai.

5.4 Ffurf Safonol

Yn gyffredinol gallwn ysgrifennu problemau rhaglennu llinol mewn ffordd safonol, yr elwir ffurf safonol problem rhaglennu linol. Er mwyn ei ysgrifennu mewn ffurf safonol, mae angen i'r:

- Holl newidynnau cael eu cyfyngu i fod yn annegatif,
- Holl gyfyngiadau bod *hafaleddau*,
- Holl gyfyngiadau i gael ochr dde sy'n gysonyn annegatif.

Hyd yn hyn rydym wedi gweld cyfyngiadau sy'n *anhafaleddau*, ond gallwn eu hail-ysgrifennu fel hafaleddau, trwy gyflwyno *newidynnau llac* ychwanegol $s_i \geq 0$. Mae'r newidynnau hyn yn mesur y llac ym mhob cyfyngiad (pa mor bell i ffwrdd maent o'r hafaledd).

Ystyriwch y broblem rhaglennu linol canlynol sydd heb ei ysgrifennu mewn ffurf safonol:

Uchafsymio:

$$10A + 5B - C$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} A + B &\leq 6 \\ A - C &\geq -2 \\ A + B - C &\geq 3 \\ B &\leq C \\ A, B, C &\geq 0 \end{aligned}$$

Mewn ffurf safonol, mae angen i ni gyflwyno pedwar newidyn llac s_1, s_2, s_3, ac s_4, un ar gyfer pob cyfyngiad, a throsi'r anhafaleddau i mewn i hafaleddau. Gan wybod bod rhaid i'r newidynnau hyn fod yn bositif, rhaid i ni naill ai tynnu neu adio'r newidynnau llac. Mae hefyd angen i ni aildrefnu rhai o'r hafaliadau er mwyn cyrraedd ochr dde sy'n gysonyn annegatif:

Uchafsymio:

$$10A + 5B - C$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} A + B + s_1 &= 6 \\ -A + C + s_2 &= 2 \\ A + B - C - s_3 &= 3 \\ B - C + s_4 &= 0 \\ A, B, C &\geq 0 \end{aligned}$$

Nodiant Matrics

Weithiau mae'n ddefnyddiol ysgrifennu problem rhaglennu linol gan ddefnyddio nodiant matrics. Gadewch i $\mathbf{x}$ bod fector o newidynnau penderfynu, $\mathbf{c}$ bod fector o gyfeirnodau'r ffwythiant amcan, $\mathbf{A}$ bod matrics o gyfeirnodau'r cyfyngiadau (rhesi yn cyfateb i bob cyfyngiad, colofnau yn cyfateb i bod newidyn penderfynu), ac i $\mathbf{b}$ cyfateb i werthoedd ochrau de'r anhafaleddau'r cyfyngiadau, yna:

Uchafsymio:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Er enghraifft y broblem rhaglennu linol yn Enghraifft 19:

Uchafsymio:

$$24000x_1 + 20000x_2$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 20 \\
\frac{1}{2}x_1 + x_2 &\leq 12 \\
\frac{1}{16}x_1 + \frac{1}{24}x_2 &\leq 1 \\
-x_1 + \frac{3}{2}x_2 &\leq 0 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

mewn ffurf matrics, y fectorau yw:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{c} &= \begin{bmatrix} 24000 \\ 20000 \end{bmatrix} \\
\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \\ 1/16 & 1/24 \\ -1 & 3/2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5.5 Tablo Simplecs

Gallwn ond defnyddio dulliau graffigol i ddatrys problemau pan mae ganddynt dau newidyn penderfynu (mae'n anodd iawn tynnu llun mewn mwy na dau ddimensiwn!). Mae'r dull tablo Simplecs, weithiau fe'i helwir yr algorithm Simplecs, yn ddull sydd yn gallu datrys problemau rhaglennu llinol gyda nifer fawr o newidynnau. Ystyriwch y broblem rhaglennu linol y fformiwleiddiwn yn Enghraifft 18:

Uchafsymio:

$$4S + 5B$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} 2S + 3B &\leq 60 \\ S &\leq B + 5 \\ B &\leq S + 5 \\ S, B &\geq 0 \end{aligned}$$

Gallwn ail-ysgrifennu'r anhafaleddau fel hafaleddau, trwy gyflwyno newidynnau llac ychwanegol $s_1, s_2, s_3 \geq 0$. Felly ysgrifennwn y cyfyngiadau fel:

$$2S + 3B + s_1 = 60 \tag{5.16}$$
$$S - B + s_2 = 5 \tag{5.17}$$
$$-S + B + s_3 = +5 \tag{5.18}$$

Nawr gallwn ail-ysgrifennu'r holl broblem rhaglennu linol mewn tablo fel y ganlyn:

	S	B	s_1	s_2	s_3
60	2	3	1	0	0
5	1	-1	0	1	0
5	-1	1	0	0	1
0	-4	-5	0	0	0

Nodwch, wrth ddelio gyda phroblem uchafsymio, ysgrifennir y ffwythiant amcan yn y tablo fel negatif y gwir ffwythiant amcan, ac felly caiff cyfernod S ei ysgrifennu fel -4 yn hytrach na 4, a chaiff cyfernod B ei ysgrifennu fel -5 yn hytrach na 5.

- **Newidynnau sylfaenol** yw'r rheini sy'n cyfateb i golofn gydag un '1' sengl a'r gweddill yn '0'au. Mae ganddynt werthoedd $\geq$ 0 yn hafal i'r gwerth yn y golofn gyntaf a'r rhes sy'n cyfateb a safle'r '1'.
- **Newidynnau ansylfaenol** yw'r newidynnau eraill, ac maent yn hafal i 0.

Yn y tablo uchod, S a B yw'r newidynnau ansylfaenol, ac felly $S = B = 0$. Y newidynnau sylfaenol yw s_1, s_2 ac s_3, gyda gwerthoedd $s_1 = 60$, $s_2 = 5$ a $s_3 = 5$. Sylwch fod y gwerthoedd hyn yn bodloni Hafaliadau 5.16, 5.17 a 5.18; ac yn cyfateb gyda ffwythiant amcan gwerth 0, fel y gwelir yn rhes olaf y golofn gyntaf.

Nod yr algorithm Simplecs nawr yw cymhwyso gweithrediadau rhes er mwyn canfod y newidynnau sylfaenol a'u gwerthoedd sy'n uchafsymio gwerth y ffwythiant amcan. Mae hwn yn gyfatebol o deithio o amgylch fertigau'r rhanbarth dichonadwy.

Algorithm Simplecs

Camau:

1. Yn gyntaf rydym yn edrych yn y rhes amcan (y rhes olaf) am y golofn gyda'r **gwerth mwyaf negatif**. Os nad oes unrhyw werth negatif, y datrysiad hwn yw'r datrysiad gorau posib. Gelwir y golofn y ddewiswn y *golofn gwaith*.
2. Yna edrychwch at y cyfernodau **positif** yn y golofn hon a dewiswn y rhes gyda'r **gymhareb bositif leiaf** pan rannwn y golofn gysonion (gyntaf) gyda'r golofn waith. Yr elfen y dewisir yw'r *colyn*, ac rydym yn ei gylchu neu ei serennu.
3. Rhannwch res y colyn gan y colyn.
4. Dewiswch luosymiau o'r rhes newydd, a'u thynnu o'r rhesi eraill er mwyn gwneud pob elfen arall o'r golofn gwaith yn hafal i 0.
5. Ail-adroddwch y camau uchod nes bod dim gwerthoedd negatif yn y rhes amcan.

Ar gyfer y tablo a rhoddir gan y broblem yn Enghraifft 18 y 3ydd colofn yw'r golofn gwaith a'r 3ydd res yw'r rhes colyn: cylchwch y colyn a rhannwch y rhes gan y colyn:

	S	B	s_1	s_2	s_3
60	2	3	1	0	0
5	1	-1	0	1	0
5	-1	1	0	0	1
0	-4	-5	0	0	0

Nawr perfformiwch weithrediadau rhes er mwyn troi'r golofn gwaith i mewn i newidyn sylfaenol. Fan hyn $r_1 = r_1 - 3r_3$, $r_2 = r_2 + r_3$, ac $r_4 = r_4 + 5r_3$. Yna canfyddwn y colyn nesaf:

	S	B	s_1	s_2	s_3
45	5	0	1	0	-3
10	0	0	0	1	1
5	-1	1	0	0	1
25	-9	0	0	0	5

Nawr rhannwch y rhes colyn gan y colyn:

	S	B	s_1	s_2	s_3
9	1	0	$1/5$	0	$-3/5$
10	0	0	0	1	1
5	-1	1	0	0	1
25	-9	0	0	0	5

Perfformiwch $r_3 = r_3 + r_1$ ac $r_4 = r_4 + 9r_1$, a chanfyddwch y colyn nesaf:

	S	B	s_1	s_2	s_3
9	1	0	$^1/_5$	0	$-^3/_5$
10	0	0	0	1	1
14	0	1	$^1/_5$	0	$^2/_5$
106	0	0	$^9/_5$	0	$-^2/_5$

Perfformiwch $r_1 = r_1 + \frac{3}{5}r_2$, $r_3 = r_3 - \frac{2}{5}r_2$, ac $r_4 = r_4 + \frac{2}{5}r_2$:

	S	B	s_1	s_2	s_3
15	1	0	$^1/_5$	$^3/_5$	0
10	0	0	0	1	1
10	0	1	$^1/_5$	$-^2/_5$	0
110	0	0	$^9/_5$	$^2/_5$	0

Nawr does dim gwerthoedd negatif yn y rhes amcan, ac felly gallwn ddarllen off y datrysiad. Y newidynnau sylfaenol yw S, B ac s_3, gyda gwerthoedd $S = 15$, $B = 10$ ac $s_3 = 10$. Y newidynnau ansylfaenol yw s_1 ac s_2, yn awgrymu fod y cyfyngiadau 5.2 ac 5.3 nawr yn hafaleddau. Gwerth y ffwythiant amcan yw 110, wedi'i dangos gan y gell chwaith-gwaelod, a gallwn gadarnhau hwn trwy amnewid gwerthoedd y newidynnau sylfaenol i mewn i'r ffwythiant amcan: $(4 \times 15) + (5 \times 10) = 110$. Felly'r datrysiad gorau posib yw bwyta 15 selsig a 10 byrgyr.

Nodwch:

- Is yw unrhyw newidyn llac yn parhau i fod yn newidyn sylfaenol, yna ystyriwn ei gyfyngiad cyfatebol yn llac, ac mae gwerth y newidyn yn dynodi maint y llac yn y cyfyngiad hwnnw.
- Os yw unrhyw newidyn llac yn sero, yna mae'r cyfyngiad cyfatebol yn dynn.
- Gelwir cyfernodau unrhyw newidyn ansylfaenol yn y rhes amcan *pris cysgod* y cyfyngiadau cyfatebol. Hwn yw'r gwerth uchaf sydd werth ei dalu er mwyn cynyddu ochr dde'r cyfyngiad gan un uned.

Gadewch i ni ddatrys Enghraifft 20 uchod, y tro hwn gan ddefnyddio'r dull Simplecs:

Enghraifft 21 *Datryswch y broblem rhaglennu linol canlynol gan ddefnyddio'r dull tablo Simplecs:*

Uchafsymio:

$$5600x_1 + 16000x_2$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 200 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Datrysiad i Enghraifft 21 *Rhoddir y tablo cychwynnol a'r colyn gan:*

	x_1	x_2	s_1	s_2
80	1	1	1	0
200	2	5	0	1
0	-5600	-16000	0	0

Now perform $r_1 = r_1 - \frac{1}{5}r_2$, $r_2 = \frac{1}{5}r_2$, *and* $r_3 = 3200r_2$*: Nawr perfformiwch* $r_1 = r_1 - \frac{1}{5}r_2$, $r_2 = \frac{1}{5}r_2$, *ac* $r_3 = 3200r_2$*:*

	x_1	x_2	s_1	s_2
40	$^3/_5$	0	1	$^1/_5$
40	$^2/_5$	1	0	$^1/_5$
640000	800	0	0	3200

Ac rydym wedi gorffen. Rydym yn darllen off y datrysiad gorau posib fel: $x_1 = 0$, $x_2 = 40$, *a'r elw uchaf yw £640,000.*

Awgrymiadau:

- *Ni dyle byth fod unrhyw werthoedd negatif yn y golofn ochr chwith:* Mae gwerthoedd y golofn ochr chwith yn cynrychioli gwerthoedd presennol y newidynnau sylfaenol, gan gynnwys unrhyw newidynnau llac. Mae'r algorithm Simplecs yn teithio o gwmpas fertigau'r rhanbarth dichonadwy, felly bydd dim newidyn sylfaenol na llac yn negatif yn y rhanbarth hwn. Os gwelwch werth negatif yn y golofn ochr chwith, rydych wedi gwneud camgymeriad!
- *Gwerthoedd cyfartal:* Wrth ddewis colyn, os oes gwerthoedd cyfartal i'w ddewis rhyngddynt, gwnewch ryw ddewis mympwyol! Mae hwn yn cyfateb i fynd mewn un o ddau gyfeiriad wrth deithio o gwmpas fertigau'r rhanbarth dichonadwy, naill ffordd byddwch yn cyrraedd eich cyrchfan. Efallai bydd cymryd un gyfeiriad yn cymryd yn hirach (mwy o iteriadau) i gyrraedd y datrysiad gorau posib, ond does dim modd o wybod eto.
- *Seroau yn y golofn ochr chwith:* Os oes gennym seroau yn y golofn ochr chwith, yna bydd gennym newidynnau sylfaenol gyda gwerth o sero. Gelwir y sefyllfa hon *dirywiad*.

5.6 Problemau Lleiafsymio

Gallwn ddefnyddio'r algorithm Simplecs ar gyfer problemau lleiafsymio hefyd. Ystyriwch fod:

$$\text{Lleiafsymio} \quad f(\underline{\mathbf{x}})$$

yn gyfatebol i

$$\text{Uchafsymio} \quad -f(\underline{\mathbf{x}})$$

ac felly mae ond angen i ni ysgrifennu'r tablo Simplecs gyda chyfernodau'r rhes amcan gyda'u gwerthoedd positif.

Enghraifft 22 *Datryswch y broblem rhaglennu linol lleiafsymio gan ddefnyddio'r dull tablo Simplecs:*

Lleiafsymio:

$$4x_1 - 3x_2$$

yn amodol ar

$$x_1 - x_2 \leq 5$$
$$2x_1 - x_2 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Datrysiad i Enghraifft 22 *Rhoddir y tablo cychwynnol a'r colyn gan:*

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
5	1	-1	1	0	0
10	2	-1	0	1	0
10	1	1	0	0	1
0	4	-3	0	0	0

Sylwch fod y cyfernodau yn y rhes amcan nawr wedi'u hysgrifennu fel 4 *a* -3 *gan ei fod yn broblem lleiafsymio, yn hytrach na* -4 *a* 3.

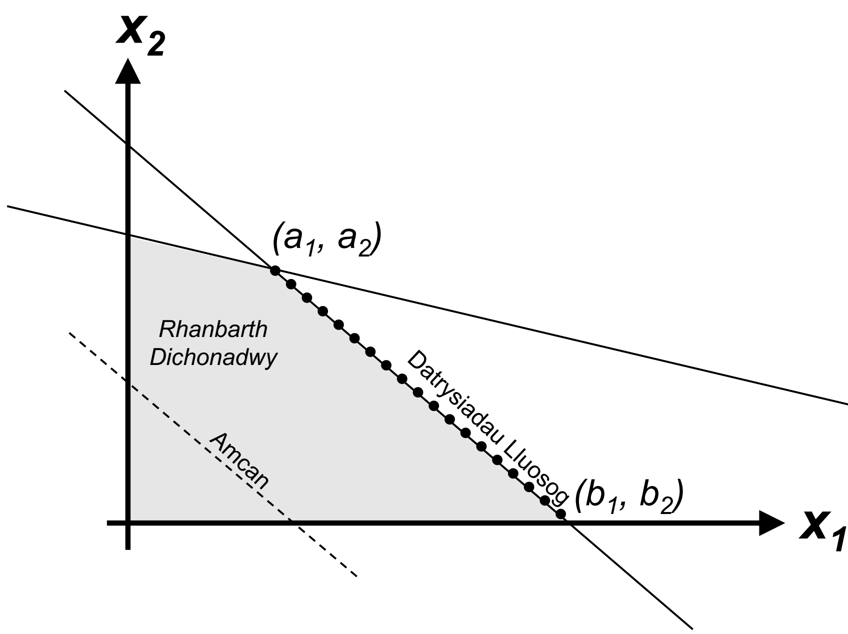
Nawr perfformiwch $r_1 = r_1 + r_3$, $r_2 = r_2 + r_3$, *ac* $r_4 = r_4 + 3r_3$ *i gael:*

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
15	2	0	1	0	1
20	3	0	0	1	1
10	1	1	0	0	1
30	7	0	0	0	3

Ac rydym wedi gorffen. Rydym yn darllen off y datrysiad gorau posib fel: $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, *a lleiafswm y ffwythiant amcan yw* 30.

5.7 Datrysiadau Anunigryw

Os yw'r ffwythiant amcan ac un o'r cyfyngiadau yn baralel i'w gilydd, yna mae posibilrwydd o gael datrysiadau gorau posib lluosog. Yn yr achosion hyn mae pob pwynt ar hyd ymyl y rhanbarth dichonadwy sy'n baralel i'r ffwythiant amcan yn ddatrysiadau gorau posib, a phob un yn rhoi'r un gwerth o'r ffwythiant amcan.



Os gallwn ganfod dau ddatrysiad gorau posib sy'n fertigau, $\underline{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ac $\underline{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ yna rhoddir y set o'r holl ddatrysiadau bosib gan $\{(1-t)\underline{\mathbf{a}} + t\underline{\mathbf{b}}$ ar gyfer pob $t \in [0,1]\}$.

Wrth wneud yr algorithm Simplecs, gallwn adnabod presenoldeb datrysiadau lluosog os oes gan y newidynnau ansylfaenol cyfernodau o sero yn y rhes amcan pan does dim cyfernod arall sydd yn negatif. Unwaith cyrhaeddwn ni'r sefyllfa hon, gallwn ganfod y fertig gorau posib nesaf trwy ddefnyddio'r newidyn ansylfaenol hwnnw fel colofn gwaith a cholynnu unwaith yn rhagor.

Enghraifft 23 *Canfyddwch bob datrysiad gorau posib posibl i'r broblem rhaglennu linol canlynol:*

Uchafsymio:

$$3x_1 + 3x_2$$

yn amodol ar

$$x_1 - x_2 \leq 5$$
$$2x_1 - x_2 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Datrysiad i Enghraifft 23 *Rhoddir y tablo cychwynnol a'r colyn gan:*

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
5	1	-1	1	0	0
10	2	-1	0	1	0
10	1	1	0	0	1
0	-3	-3	0	0	0

Nawr perfformiwch $r_1 = r_1 + r_3$, $r_2 = r_2 + r_3$, *ac* $r_4 = r_4 + 3r_3$ *i gael:*

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
15	2	0	1	0	1
20	3	0	0	1	1
10	1	1	0	0	1
30	0	0	0	0	3

Does dim cyfernodau negatif yn y rhes gwaelod, felly rydym wedi canfod o leiaf un datrysiad gorau posib. Gallwn ddarllen off y datrysiad fel: $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, *a'r uchafswm ar gyfer y ffwythiant amcan yw* 30.

Serch hynny, mae x_1 *yn newidyn ansylfaenol, a'i gyfernod yn y rhes amcan yw sero. Felly gwyddon fod yna datrysiad gorau posib arall. Defnyddiwn y golofn hon fel colofn gwaith, gan ddefnyddio'r elfen sydd wedi'i gylchu fel y colyn nesaf. Perfformiwn* $r_1 = r_1 - \frac{2}{3}r_2$, $r_2 = \frac{1}{3}r_2$, $r_3 = r_3 - \frac{1}{3}r_2$*:*

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$^5/_3$	0	0	1	$-^2/_3$	$^1/_3$
$^{20}/_3$	1	0	0	$^1/_3$	$^1/_3$
$^{10}/_3$	0	1	0	$-^1/_3$	$^2/_3$
30	0	0	0	0	3

Ac rydym wedi canfod datrysiad gorau posib arall: $x_1 = {}^{20}/_3$, $x_2 = {}^{10}/_3$, *ac mae uchafswm y ffwythiant amcan wrth gwrs yn aros yn* 30.

Felly'r set o ddatrysiadau gorau posib yw $\left\{(x_1, x_2) = \left(\frac{20}{3}t, 10 - \frac{20}{3}t\right) \text{ ar gyfer pob } t \in [0,1]\right\}$.

5.8 Cyfyngiadau Mwy Na ($\geq$)

Hyd yn hyn rydym ond wedi ystyried problemau rhaglennu llinol lle mae'r cyfyngiadau (heblaw am y cyfyngiadau annegatif) wedi cael eu hysgrifennu fel cyfyngiadau llai na neu'n hafal i ($\leq$). Mae hwn wedi ein galluogi i drosi anhafaleddau'r cyfyngiadau i mewn i hafaleddau trwy ychwanegu newidynnau llac positif. Nawr ystyriwch gyfyngiad mwy na neu'n hafal i, er enghraifft

$$x_1 + x_2 \geq 80$$
$$x_1 - 2x_2 \geq 10$$

nawr wrth ychwanegu'r newidyn llac bydd y rhain i ni ei dynnu, yn lle ei adio: $x_1 + x_2 - s_1 = 80$. Ond, bydd hwn nawr yn golygu byddwn ni'n dechrau gyda newidyn sylfaenol negatif $s_1 = -80$, a dydyn ni methu gwneud hwn gan ei fod yn torri'r amod annegatif. Hynny yw, bydd fertig cychwynnol y dull Simplecs $x_1 = x_2 = 0$ ddim yn ddichonadwy oherwydd bod $0 + 0 \not\geq 80$.

Mae angen i ni ganfod datrysiad cychwynnol dichonadwy cyn i ni ddechrau'r dull Simplecs. Ond gallwn ddefnyddio'r dull Simplecs ei hun i wneud hwn. Cyflwynwn *newidynnau artiffisial* fel y ganlyn:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 + a_1 &= 80 \\ x_1 - 2x_2 - s_2 + a_2 &= 10 \end{aligned}$$

a chanfyddwn ddatrysiad cychwynnol dichonadwy trwy leiafsymio swm y newidynnau artiffisial $a_1 + a_2$, a gallwn ni gwneud hwn trwy ddefnyddio'r dull Simplecs. Enw hwn yw'r **dull dwy-gam**:

Dull Dwy-Gam

1. Cam 1:
   - Ysgrifennwch y cyfyngiadau gyda'r newidynnau llac ac artiffisial.
   - Ysgrifennwch ffwythiant amcan newydd (swm y newidynnau artiffisial) yn nhermau'r newidynnau ansylfaenol.
   - Ysgrifennwch y tablo Simplecs gyda'r ddau ffwythiant amcan.
   - Datryswch y tablo Simplecs yn nhermau'r ffwythiant amcan newydd.
2. Cam 2:
   - Dilëwch y rhes ffwythiant amcan dros-dro a'r colofnau sy'n cyfateb i'r newidynnau artiffisial.
   - Datryswch y tablo Simplecs yn nhermau'r ffwythiant amcan gwreiddiol.

Gadewch i ni wneud enghraifft:

Enghraifft 24 *Datryswch:*

Lleiafsymio:

$$2x_1 + 5x_2$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Datrysiad i Enghraifft 24 *Cam 1: Yn gyntaf ail-ysgrifennwn y cyfyngiadau fel hafaleddau:*

$$3x_1 + 4x_2 - s_1 + a_1 = 12$$
$$5x_1 + 2x_2 - s_2 + a_2 = 8$$

Yna, trwy gyfuno ac ail-drefnu'r rhain gallwn ysgrifennu'r ffwythiant amcan newydd fel:

$$a_1 + a_2 = 20 - 8x_1 - 6x_2 + s_1 + s_2$$

Ac felly'r amcan newydd yw lleiafsymio $-8x_1 - 6x_2 + s_1 + s_2$*, sydd â gwerth presennol o* 20*. Ysgrifennwch i lawr y tablo cychwynnol gyda'r ddau ffwythiant amcan (ac ond datrys yn nhermau'r ffwythiant amcan newydd):*

	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2
12	3	4	-1	0	1	0
8	5	2	0	-1	0	1
-20	-8	-6	1	1	0	0
0	2	5	0	0	0	0

Perfformiwch $r_1 = r_1 - \frac{3}{5}r_2$*,* $r_2 = \frac{1}{5}r_2$*,* $r_3 = r_3 + \frac{8}{5}r_2$*, ac* $r_4 = r_4 - \frac{2}{5}r_2$*:*

	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2
$36/5$	0	$14/5$	-1	$3/5$	1	$-3/5$
$8/5$	1	$\frac{2}{5}$	0	$-1/5$	0	$1/5$
$-36/5$	0	$-14/5$	1	$-3/5$	0	$8/5$
$-16/5$	0	$21/5$	0	$2/5$	0	$-2/5$

Perfformiwch $r_1 = \frac{5}{14}r_1$*,* $r_2 = r_2 - \frac{1}{7}r_1$*,* $r_3 = r_3 + r_1$*, ac* $r_4 = r_4 - \frac{3}{2}r_1$*:*

	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2
$18/7$	0	1	$-5/14$	$3/14$	$5/14$	$-3/14$
$4/7$	1	0	$1/7$	$-2/7$	$-1/7$	$2/7$
0	0	0	0	0	1	1
-14	0	0	$3/2$	$-1/2$	$-3/2$	$-1/2$

Nawr does dim gwerthoedd negatif gan y rhes amcan cyntaf, ac felly rydym wedi gorffen Cam 1.

Datrysiad i Enghraifft 24 (continuing from p. 94) *Cam 2: Dilëwch y colofnau a rhesi priodol:*

	x_1	x_2	s_1	s_2	d_1	d_2
$18/7$	0	1	$-5/14$	$3/14$	$5/14$	$-3/14$
$4/7$	1	0	$1/7$	$-2/7$	$-1/7$	$2/7$
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~
-14	0	0	$3/2$	$-1/2$	$-3/2$	$-1/2$

sy'n rhoi:

	x_1	x_2	s_1	s_2
$18/7$	0	1	$-5/14$	$3/14$
$4/7$	1	0	$1/7$	$-2/7$
-14	0	0	$3/2$	$-1/2$

Perfformiwch $r_1 = \frac{14}{3}r_1$, $r_2 = r_2 + \frac{4}{3}r_1$, *ac* $r_3 = r_3 + \frac{7}{3}r_1$:

	x_1	x_2	s_1	s_2
12	0	$14/3$	$-5/3$	1
4	1	$4/3$	$-1/3$	0
-8	0	$7/3$	$2/3$	0

Ac rydym wedi gorffen, gallwn ddarllen off y datrysiad gorau posib fel $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, *gyda gwerth y ffwythiant amcan yn* 8.

5.9 Cyfyngiadau Hafaledd

Yn debyg i gyfyngiadau mwy na, mae hefyd angen newidynnau artiffisial wrth ddelio gyda chyfyngiadau hafaledd. Ystyriwch y cyfyngiad:

$$2x_1 + 5x_2 = 9$$

Mae hwn yn gyfatebol i'r *bâr* o gyfyngiadau canlynol:

$$2x_1 + 5x_2 \leq 9 \tag{5.19}$$
$$2x_1 + 5x_2 \geq 9 \tag{5.20}$$

A phan ychwanegwn y newidynnau llac ac artiffisial fel o'r blaen, cawn:

$$2x_1 + 5x_2 + s_1 = 9$$
$$2x_1 + 5x_2 - s_2 + a_1 = 9$$

Ond, nodwch yn yr achos hwn nid yw'r newidynnau llac yn gwneud synnwyr. Mae angen i Gyfyngiadau 5.19 a 5.19 bod yn dynn er mwyn bodloni'r cyfyngiad hafaledd. Felly o ddiffiniad mae $s_1 = s_2 = 0$, ac felly nid yw'n wirioneddol yn bodoli ar gyfer ein problem. Felly, ar gyfer cyfyngiadau hafaledd, nid oes angen newidynnau llac, ond y newidyn artiffisial sydd angen arnom er mwyn i'r dull Simplecs dechrau gyda digon o newidynnau sylfaenol. Hynny yw:

$$2x_1 + 5x_2 + a_1 = 9$$

Gadewch i ni wneud enghraifft:

Enghraifft 25 *Datryswch:*

Uchafsymio:

$$2x_1 + 5x_2$$

yn amodol ar

$$x_1 + x_2 = 4$$
$$2x_1 + x_2 \geq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Datrysiad i Enghraifft 25 *Cam 1: Yn gyntaf angen ail-ysgrifennu'r cyfyngiadau fel hafaleddau:*

$$x_1 + x_2 + a_1 = 4$$
$$2x_1 + x_2 - s_1 + a_2 = 5$$

Yna, trwy gyfuno ac ail-drefnu'r rhain gallwn ysgrifennu'r ffwythiant amcan newydd fel:

$$a_1 + a_2 = 9 - 3x_1 - 2x_2 + s_1$$

Ac felly'r amcan newydd yw lleiafsymio $-3x_1 - 2x_2 + s_1$*, sydd â gwerth presennol o* 9*. Ysgrifennwn y tablo cychwynnol gyda'r ddau ffwythiant amcan (ac ond datrys ar gyfer y ffwythiant amcan newydd hon):*

	x_1	x_2	s_1	a_1	a_2
4	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*
5	*2*	*1*	*-1*	*0*	*1*
-9	*-3*	*-2*	*1*	*0*	*0*
0	*-2*	*-5*	*0*	*0*	*0*

Datrysiad i Enghraifft 25 (continuing from p. 96) *Perfformiwch* $\bar{r}_2 = \frac{1}{2}r_2$, $r_1 = r_1 - \bar{r}_2$, $r_3 = r_3 + 3\bar{r}_2$, *ac* $r_4 = r_4 + r_2$*:*

	x_1	x_2	s_1	a_1	a_2
$3/2$	0	$1/2$	$1/2$	1	$-1/2$
$5/2$	1	$1/2$	$-1/2$	0	$1/2$
$-3/2$	0	$-1/2$	$-1/2$	0	3
5	0	-4	-1	0	1

Perfformiwch $\bar{r}_1 = 2r_1$, $r_2 = r_2 - r_1$, $r_3 = r_3 + 4\bar{r}_1$, *ac* $r_4 = r_4 + r_1$*:*

	x_1	x_2	s_1	a_1	a_2
3	0	1	1	1	-1
1	1	0	-1	-1	-1
0	0	0	0	1	$5/2$
17	0	0	3	3	-2

Nawr does dim gwerthoedd negatif gan y rhes amcan cyntaf, felly rydym wedi gorffen Cam 1.
Cam 2: Dilëwch y colofnau a rhesi priodol:

	x_1	x_2	s_1	~~a_1~~	~~a_2~~
3	0	1	1	~~1~~	~~-1~~
1	1	0	-1	~~-1~~	~~-1~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~$5/2$~~
17	0	0	3	~~3~~	~~-2~~

sy'n rhoi:

	x_1	x_2	s_1
3	0	1	1
1	1	0	-1
17	0	0	3

Does dim cyfernodau negatif yn y rhes amcan, felly rydym wedi gorffen. Gallwn ddarllen off y datrysiad gorau posib fel $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, *a gwerth y ffwythiant amcan yw* 17.

Gallwn hefydd meddwl am gyfyngiadau hafaledd mewn ffordd arall: fel lleihad dimensiwn. Er enghraifft os oes gennym N newidyn penderfynu, ac un cyfyngiad hafaledd, mae hwn yn golygu gallwn mynegu un o'r newidynnau penderfynu fel cyfuniad llinol o'r lleill. Ac felly mewn gwirionedd ond $N - 1$ newodyn penderfynu sydd gennym. E.e. ystyriwch:

Uchafsymio:

$$X_1 + X_2 + 8X_3$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} X_1 + 4X_2 &\leq 4 \\ 3X_1 - X_3 &\leq 5 \\ X_1 - X_2 - X_3 &= 0 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Mae'r cyfyngiad olaf yn awgrymmu fod $X_1 = X_2 + X_3$, ac felly gallwn defnyddio'r amnewidiad hwn er mwyn lleihau'r nifer o newidynnau penderfynu i gael:

Uchafsymio:

$$2X_2 + 9X_3$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} 5X_2 + X_3 &\leq 4 \\ 3X_2 + 2X_3 &\leq 5 \\ X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

5.10 Datrys gyda Python

Bodoler rhaglennu cyfrifiadurol arbenigol sydd wedi'u dylunio yn arbennig ar gyfer datrys problemau rhaglennu llinol. Mae rhai enghreifftiau yn cynnwys COIN-OR LP, CPLEX, Gurobi ac XPress. Mae rhai o'r rhain yn feddalwedd masnachol sydd angen trwyddedau costus. Mae `PuLP` yn llyfrgell Python sy'n rhyngwynebu gyda datryswyr fel rhain, mae'n rhad ac am ddim i'w ddefnyddio, yn ddarllenadwy, ac yn gadael ni datrys problemau rhaglennu llinol o fewn amgylchedd Python.

Ystyriwch yr enghraifft isod:

Enghraifft 26 *Defnyddiwch `PuLP` i ddatrys y broblem rhaglennu linol canlynol:*

Uchafsymio:

$$50A + 60B$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} 4A + 6B &\leq 24 \\ 5A + 4B &\leq 20 \\ A, B &\geq 0 \end{aligned}$$

Nawr addaswch y côd fel bod angen i A a B cymryd gwerthoedd cyfanrifol.

Datrysiad i Enghraifft 26 *Y côd bydd:*

```
>>> import pulp
>>> # Creu'r broblem
>>> prob = pulp.LpProblem("Paent", pulp.LpMaximize)
>>> # Creu'r newidynnau penderfynu
>>> paent = pulp.LpVariable.dicts("x", range(2))
>>> # Ffwythiant amcan
>>> ffwythiant_amcan = (5 * paent[0]) + (6 * paent[1])
>>> prob += ffwythiant_amcan
>>> # Cyfyngiadau
>>> prob += (4 * paent[0]) + (6 * paent[1]) <= 24
>>> prob += (5 * paent[0]) + (4 * paent[1]) <= 20
>>> # Datrys
>>> prob.solve()
>>> print(paent[0].value(), paent[1].value())
1.7142857, 2.8571429
```

Os oes angen newidynnau cyfanrifol, byddwn yn pennu hwn wrth greu'r newidynnau penderfynu:

```
>>> prob = pulp.LpProblem("Paent", pulp.LpMaximize)
>>> paent = pulp.LpVariable.dicts("x", range(2), cat="Integer")
>>> ffwythiant_amcan = (5 * paent[0]) + (6 * paent[1])
>>> prob += ffwythiant_amcan
>>> prob += (4 * paent[0]) + (6 * paent[1]) <= 24
>>> prob += (5 * paent[0]) + (4 * paent[1]) <= 20
>>> prob.solve()
>>> print(paent[0].value(), paent[1].value())
0.0, 4.0
```

5.11 Enghreifftiau Fformiwleiddio Pellach

Enghraifft 27 *Mae Pontypandy yn ystyried system bysiau newydd. Mae'r galw am nifer o fysiau yn wahanol trwy gydol y dydd, fel y dangosir yn y tabl canlynol:*

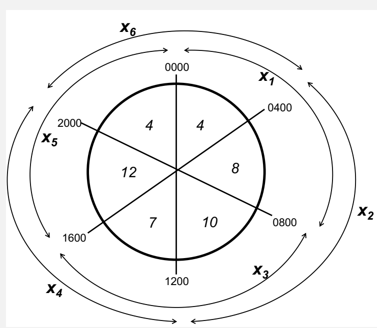
Amser	0000-0400	0400-0800	0800-1200	1200-1600	1600-2000	2000-0000
Nifer o fysiau sydd angen	4	8	10	7	12	4

Mae deddfwriaeth yn dweud bod pob bws ond yn gallu gyrru am 8 awr y dydd mewn sifftiau cyffiniol. Beth yw'r nifer lleiaf o fysiau y mae Pontypandy angen, a sut mae angen ei amserlenni?

Datrysiad i Enghraifft 27 *Gadewch i:*

- x_1 *bod y nifer o fysiau sydd ar sifft o 0000-0800,*
- x_2 *bod y nifer o fysiau sydd ar sifft o 0040-1200,*
- x_3 *bod y nifer o fysiau sydd ar sifft o 0080-1600,*
- x_4 *bod y nifer o fysiau sydd ar sifft o 1200-2000,*
- x_5 *bod y nifer o fysiau sydd ar sifft o 1600-0000, ac i*
- x_6 *bod y nifer o fysiau sydd ar sifft o 2000-0400.*

Caiff hwn ei dangos yn y diagram isod:



Yna'r broblem rhaglennu linol yw:

Lleiafsymio: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$
yn amodol ar

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x_1 & & & & & & & & & + & x_6 & \geq 4 \\
x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & \geq 8 \\
 & & x_2 & + & x_3 & & & & & & & \geq 10 \\
 & & & & x_3 & + & x_4 & & & & & \geq 7 \\
 & & & & & & x_4 & + & x_5 & & & \geq 12 \\
 & & & & & & & & x_5 & + & x_6 & \geq 4
\end{array}$$

ac $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$ *ac yn gyfanrifol.*

Enghraifft 28 *Mae gan ward ysbyty n nyrs. Mae gan y ward sifftiau bore a sifftiau prynhawn. Mae'n cau dros nos ac mae ar agor 7 diwrnod yr wythnos. Mae'r rheolwr ward eisiau creu amserlen gwaith fel bod:*

- *Mae'r nifer o nyrsys ar bob sifft o leiaf yn hafal i'r angen isaf,*
- *Mae nyrsys llawn amser yn gweithio 5 sifft yr wythnos, ac mae nyrsys rhan amser yn gweithio naill ai 3 neu 4 sifft yr wythnos,*
- *Does dim nyrs yn gweithio sifft fore a phrynhawn ar yr un diwrnod, a*
- *Gall nyrs gofyn am ddiwrnod penodol fel gwyliau.*

Fformiwleiddiwch y broblem rhaglennu linol. Faint o newidynnau penderfynu sydd? Faint o gyfyngiadau?

Datrysiad i Enghraifft 28 *Gadewch i:*

- m_j *bod y nifer lleiaf o nyrsys sydd angen ar sifft fore ar ddiwrnod* j,
- a_j *bod y nifer lleiaf o nyrsys sydd angen ar sifft prynhawn ar ddiwrnod* j,
- f_j *bod paramedr yn dynodi os yw nyrs* i *yn llawn amser (1 os ie, 0 os na),*
- x_{ij} *bod newidyn penderfynu yn dynodi os yw nyrs* i *yn gweithio sifft fore ar ddiwrnod* j,
- y_{ij} *bod newidyn penderfynu yn dynodi os yw nyrs* i *yn gweithio sifft prynhawn ar ddiwrnod* j.

Yna'r broblem rhaglennu linol yw:

Lleiafsymio:

$$\sum_i \sum_j (x_{ij} + y_{ij}) \tag{5.21}$$

yn amodol ar

$$\sum_i x_{ij} \leq m_j \text{ ar gyfer pob } j \tag{5.22}$$

$$\sum_i y_{ij} \leq a_j \text{ ar gyfer pob } j \tag{5.23}$$

$$y_{ij} + x_{ij} \leq 1 \text{ ar gyfer pob } i, j \tag{5.24}$$

$$\sum_j f_i (x_{ij} + y_{ij}) = 5 \text{ ar gyfer pob } i \tag{5.25}$$

$$\sum_j (1 - f_i)(x_{ij} + y_{ij}) \leq 4 \text{ ar gyfer pob } i \tag{5.26}$$

$$\sum_j (1 - f_i)(x_{ij} + y_{ij}) \geq 3 \text{ ar gyfer pob } i \tag{5.27}$$

$$x_{ij}, y_{ij} \text{ yn deuaidd ar gyfer pob } i, j \tag{5.28}$$

Datrysiad i Enghraifft 28 (continuing from p. 101) *Fan hyn (5.21) yw'r ffwythiant amcan i'w leiafsymio, yn sicrhau does dim mwy o nyrsys wedi'i amserlenni na sydd angen. Y cyfyngiadau: mae (5.22) yn sicrhau bod digon o nyrsys yn gweithio yn y bore; mae (5.23) yn sicrhau bod digon o nyrsys yn gweithio yn y prynhawn; mae (5.25) yn sicrhau bod gan nyrsys llawn amser 5 sifft; mae (5.26) ac (5.27) yn sicrhau bod nyrsys rhan amser naill ai yn gweithio 3 neu 4 sifft; mae (5.24) yn sicrhau does dim nyrs yn gweithio sifft fore a phrynhawn yn yr un diwrnod; a (5.28) yw'r cyfyngiad deuaidd.*

- *Mae n nyrs a 7 diwrnod yr wythnos, ac felly mae $7n$ sifft fore (x_{ij}) a $7n$ sifft prynhawn (y_{ij}). Felly yn gyfan gwbl mae $14n$ newidyn penderfynu.*
- *Mae 7 cyfyngiad 5.22 a 7 cyfyngiad 5.23. Mae n cyfyngiad ar gyfer pob un set 5.25, 5.26, ac 5.27. Felly yn gyfan gwbl mae $(2 \times 7) + (3 \times n) + (1 \times 7 \times n) = 10n + 14$ cyfyngiad, heb gyfri'r cyfyngiadau deuaidd.*

Triciau Llinoledd

Nid yw pob problem linol yn ymddangos yn llinol i ddechrau. Er enghraifft, mae'n bosib ysgrifennu cyfyngiadau gyda ffwythiannau $\min$ neu $\max$ fel cyfyngiadau llinol, trwy gyflwyno ffug newidynnau ychwanegol. Er enghraifft, cymerwch:

Lleiafsymio:

$$\max(x_1, x_2)$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Gallwn gyflwyno ffug newidyn y. I sicrhau bod y yn cynrychioli $\max(x_1, x_2)$, rydym yn ei gyfyngu i fod yn fwy na neu'n hafal i'r naill ohonynt, ac yn ei leiafsymio fel i fod yn cymryd gwerth y mwyaf o rain. Galwn ni hwn yn broblem *minimacs* (lleiafsymio'r uchafswm rhai newidynnau).

Lleiafsymio:

$$y$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} y &\geq x_1 \\ y &\geq x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

I'r gwrthwyneb, gallwn hefyd cael problem *macsimin*.

Pennod 6

Problemau Cludiant

Deilliannau dysgu:

- Gallu fformiwleiddio problemau cludiant fel problemau rhaglennu llinol;
- Gallu cynhyrchu datrysiadau sylfaenol dichonadwy, er nad yw'n gorau posib;
- Gallu cynhyrchu datrysiadau gorau posib gan ddefnyddio'r Algorithm Carreg-Lam;
- Gallu perfformio cyfrifiadau er mwyn diddwytho datrysiadau i gwestiynau beth-os wedi'u seilio ar ddatrysiad gorau posib.

6.1 Cyflwyniad

Mae problemau cludiant yn achos arbennig o broblemau rhaglennu llinol. Mae'r enw 'problemau cludiant' yn dod o'r ffaith roedd y cymwysiadau cynharaf yn ymwneud gyda sut i gludo nwyddau o un set o darddleoedd i set o gyrchfannau.

Er enghraifft, tybiwch fod gennym tri mwynglawdd, X, Y a Z yn cyflenwi glo i dair gorsaf pŵer A, B a C. Mae'r mwyngloddiau yn gallu cyflenwi'r symiau canlynol o glo y dydd: mae X yn cyflenwi 400 tynnell; mae Y yn cyflenwi 1200 tynnell; ac mae Z yn cyflenwi 800 tynnell. Mae'r gorsafoedd pŵer angen y symiau canlynol y dydd: mae A angen 1000 tynnell; mae B angen 900 tynnell; ac mae C angen 500 tynnell. Dangosir y costau cludo o fwynglawdd i orsaf pŵer isod:

	X	Y	Z
A	5	17	11
B	14	18	12
C	10	25	20

Y nod yw penderfynu faint o glo i gludo ar bob trywydd er mwyn rhoi'r gost leiaf, a bod yn gyson gyda'r amodau cyflenwi ac anghenion.

Rhoddir y fformwleiddiad rhaglennu llinol i'r broblem hon fel y ganlyn: gadewch i x_{ij} (ar gyfer pob $i = x, y, x$ a $j = a, b, c$) bod faint o lo caiff ei gludo o fwynglawdd i i orsaf pŵer j. Yna'r broblem rhaglennu linol yw:

Lleiafsymio: $5x_{xa} + 14x_{xb} + 10x_{xc} + 17x_{ya} + 18x_{yb} + 25x_{yc} + 11x_{za} + 12x_{zb} + 20x_{zc}$

yn amodol ar

$$
\begin{aligned}
x_{xa} + x_{xb} + x_{xc} &= 400 && (6.1)\\
x_{ya} + x_{yb} + x_{yc} &= 1200 && (6.2)\\
x_{za} + x_{zb} + x_{zc} &= 800 && (6.3)\\
x_{xa} + x_{ya} + x_{za} &= 1000 && (6.4)\\
x_{xb} + x_{yb} + x_{zb} &= 900 && (6.5)\\
x_{xc} + x_{yc} + x_{zc} &= 500 && (6.6)
\end{aligned}
$$

ac $x_{ij} \geq 0$ ar gyfer pob $i = x, y, z$ a $j = a, b, c$.

Fan hyn mae'r cyfyngiadau 6.1, 6.2, a 6.3 yn cyfateb i gyflenwad mwyngloddiau X, Y a Z yn ôl eu trefn; tra bod cyfyngiadau 6.4, 6.5, a 6.6 yn cyfateb i anghenion y gorsafoedd pŵer A, B a C yn ôl eu trefn. Mae'r ffwythiant amcan yn cyfateb i gyfanswm y costau cludo.

Fformwleiddiad Cyffredinol

Rhoddir y fformwleiddiad cyffredinol trwy adael i:

- a_i bod maint y cyflenwad yn nharddle i;
- b_j bod maint yr angen yng nghyrchfan j;
- c_{ij} bod y gost cludo rhwng tarddle i a chyrchfan j;
- x_{ij} bod y maint i'w cludo rhwng tarddle i a chyrchfan j.

Nawr:

Lleiafsymio:

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} \sum_j x_{ij} &= a_i \quad \text{ar gyfer pob } i \\ \sum_i x_{ij} &= b_j \quad \text{ar gyfer pob } j \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \text{ar gyfer pob } i, j \end{aligned}$$

Wrth gwrs gallwn ddatrys hwn gan ddefnyddio'r dull Simplecs. Ond, ar ôl ei ysgrifennu fel hwn gallwn arsylwi ar gwpl o bethau. Y peth cyntaf yw bod cyfernod pob newidyn penderfynu yn y cyfyngiadau yn hafal i 1. Yr ail beth yw bod pob cyfyngiad yn hafaledd. Y trydydd yw, mewn gwirionedd does dim angen un o'r cyfyngiadau: ystyriwch yr enghraifft gyda'r mwyngloddion glo a'r gorsafoedd pŵer, os yw cyfyngiadau 6.1 i 6.5 wedi'u bodloni, yna rhaid hefyd bod cyfyngiad 6.6 wedi'u bodloni, gan fod y cyflenwad yn hafal i'r anghenion. Felly, er bod gan y broblem hon 9 newidyn penderfynu a 6 cyfyngiad, ac fel arfer byddwn yn disgwyl 3 newidyn ansylfaenol a 6 newidyn sylfaenol, mewn gwirionedd mae gennym 4 newidyn ansylfaenol a 5 newidyn sylfaenol.

Mae'r ffeithiau hyn yn golygu gallwn ddefnyddio dulliau symlach na'r dull Simplecs er mwyn ei ddatrys. Yn gyntaf byddwn yn ystyried sut i ganfod datrysiad dichonadwy cychwynnol (ond sydd ddim o reidrwydd y gorau posib), ac yna edrychwn ar sut i addasu'r datrysiad er mwyn canfod datrysiadau gorau posib.

6.2 Canfod Datrysiadau Dichonadwy (nad yw'n gorau posib)

Er mwyn dechrau datrys problemau cludiant, byddwn yn arddangos y broblem fel y tabl canlynol:

	X	Y	Z	
A	x_{xa} 5	x_{ya} 17	x_{za} 11	10
B	x_{xb} 14	x_{yb} 18	x_{zb} 12	9
C	x_{xc} 10	x_{yc} 25	x_{zc} 20	5
	4	12	8	24

Mae'r golofn olaf yn rhoi anghenion y gorsafoedd pŵer, ac felly mae angen i'r newidynnau ym mhob rhes symio i'r rhifau hyn. Mae'r rhes olaf yn rhoi cyflenwad y mwyngloddion, ac felly mae angen i'r newidynnau ym mhob colofn symio i'r rhifau hyn. Rhoddir cost pob trywydd yng nghornel gwaelod-dde pob cell.

Ystyriwn dau ddull o aseinio gwerthoedd i'r newidynnau penderfynu a fydd yn rhoi datrysiad dichonadwy: y **dull cornel Gogledd-Orllewin**, a'r **dull cost leiaf**.

Y Dull Cornel Gogledd-Orllewin

Fan hyn rydym yn dyrannu cymaint ag sydd bosib i'r trywydd yng nghornel Gogledd-Orllewin y tabl. Yna, yn dibynnu os yw cyflenwad neu anghenion heb ei bodloni, symudwn naill ai i'r De neu i'r Dwyrain. Yna rydym yn parhau i ddyrannu gymaint ag sydd bosib yn y modd hwn, nes i'r holl anghenion cael eu bodloni.

Enghraifft 29 *Gan ddefnyddio'r dull cornel Gogledd-Orllewin, canfyddwch ddatrysiad cychwynnol i'r broblem cludiant gyda thri mwynglawdd,* X, Y *a* Z *yn cyflenwi glo i dair gorsaf pŵer* A, B *ac* C*. Pob dydd, mae'r mwyngloddion yn gallu cyflenwi: mae* X *yn cyflenwi 400 tynnell; mae* Y *yn cyflenwi 1200 tynnell; mae* Z *yn cyflenwi 800 tynnell. Mae'r gorsafoedd pŵer angen y meintiau canlynol o lo y dydd: mae* A *angen 1000 tynnell; mae* B *angen 900 tynnell; ac mae* C *angen 500 tynnell. Dangosir y costau cludo o bob mwynglawdd i bob gorsaf pŵer isod:*

	X	Y	Z
A	5	17	11
B	14	18	12
C	10	25	20

Datrysiad i Enghraifft 29 *Cawn:*

	X	Y	Z	
A	*4* *5*	*6* *17*	*11*	*10*
B	*14*	*6* *18*	*3* *12*	*9*
C	*10*	*25*	*5* *20*	*5*
	4	*12*	*8*	*24*

- *Dyrannwn gymaint ag sydd bosib i'r cornel Gogledd-Orllewin,* x_{xa}*: y mwyaf gall mae* x *cyflenwi yw 4, sy'n bodloni cyfanswm y golofn, ond nad yw'n bodloni cyfanswm y rhes.*
- *Felly symudwn i'r Dwyrain i* x_{ya}*: y mwyaf gallwn ddyrannu fan hyn yw 6 gan fod hwn yn bodloni cyfanswm y rhes, yn gadael cyfanswm y golofn heb ei fodloni.*
- *Felly symudwn i'r Dde i* x_{yb}*: y mwyaf gallwn ddyrannu fan hyn y 6 gan fod hwn yn bodloni cyfanswm y golofn, yn gadael cyfanswm y rhes heb ei fodloni.*
- *Felly symudwn i'r Dwyrain i* x_{zb}*: y mwyaf gallwn ddyrannu fan hyn yw 3 gan fod hwn yn bodloni cyfanswm y rhes, yn gadael cyfanswm y golofn heb ei fodloni.*
- *Felly symudwn i'r Dde i* x_{zc}*: y mwyaf gallwn ddyrannu fan hyn yw 5 ac mae hwn yn bodloni cyfanswm y golofn a chyfanswm y rhes. Felly rydym yn stopio.*

Mae hwn yn rhoi cost o: $(4 \times 5) + (6 \times 17) + (6 \times 18) + (3 \times 12) + (5 \times 20) = 366.$

Mae hwn yn rhoi datrysiad dichonadwy, ond efallai nid yw o'r ansawdd gorau. Roedd wedi'i phenderfynu yn gyfan gwbl gan drefn fympwyol y tabl.

Y Dull Cost Leiaf

Fan hyn dyrannwn gymaint ag sydd bosib i'r gell rataf yn y tabl. Yna rydym yn parhau i ddyrannu i'r gell rataf nesaf sydd ar gael nes i ni fodloni pob cyfyngiad cyflenwi ac angen.

Enghraifft 30 *Gan ddefnyddio'r dull cost leiaf, canfyddwch ddatrysiad cychwynnol i'r broblem cludiant a rhoddir yn Enghraifft 29.*

Datrysiad i Enghraifft 30 *Cawn*

	X	Y	Z	
A	4 $_{5}$	$_{17}$	6 $_{11}$	10
B	$_{14}$	7 $_{18}$	2 $_{12}$	9
C	$_{10}$	5 $_{25}$	$_{20}$	5
	4	12	8	24

- *Yn gyntaf dyrannwn gymaint ag sydd bosib i'r trywydd rhataf, hynny yw* x_{xa}*: y mwyaf mae* x *yn gallu cyflenwi yw 4 a bydd hwn yn bodloni cyfanswm y golofn, ond mae'n gadael cyfanswm y rhes heb ei fodloni.*
- *Felly symudwn i'r trywydd rhataf nesaf,* x_{xc}*: ond ni allwn ddyrannu unrhywbeth fan hyn gan fod cyfanswm y golofn yn barod wedi'i bodloni.*
- *Felly symudwn i'r trywydd rhataf nesaf,* x_{za}*: y mwyaf gallwn ddyrannu fan hyn yw 6 gan fod hwn yn bodloni cyfanswm y rhes, yn gadael cyfanswm y golofn heb ei fodloni.*
- *Felly symudwn i'r trywydd rhataf nesaf,* x_{zb}*: y mwyaf gallwn ddyrannu fan hyn yw 2 gan fod hwn yn bodloni cyfanswm y golofn, yn gadael cyfanswm y rhes heb ei fodloni.*
- *Felly symudwn i'r trywydd rhataf nesaf sydd ar gael (gan nad yw* x_{xb} *ar gael),* x_{yb}*: y mwyaf gallwn ddyrannu fan hyn yw 7 gan fod hwn yn bodloni cyfanswm y rhes, yn gadael cyfanswm y golofn heb ei fodloni.*
- *Felly symudwn i'r trywydd rhataf nesaf sydd ar gael,* x_{yc}*: y mwyaf gallwn ddyrannu fan hyn yw 5, ac mae hwn yn bodloni cyfanswm y golofn a chyfanswm y rhes. Felly stopiwn.*

Mae hwn yn rhoi cost o: $(4 \times 5) + (6 \times 11) + (7 \times 18) + (2 \times 12) + (5 \times 25) = 361.$

Ym mhob un o'r datrysiadau y crëwyd gan y dull cornel Gogledd-Orllewin a'r dull Cost Leiaf, mae 5 newidyn sylfaenol (pum trywydd yn cario meintiau di-sero o lo) a phedwar newidyn ansylfaenol (pedwar trywydd yn cario dim glo) fel y disgwylir.

6.3 Yr Algorithm Carreg-Lam

Mae'r Algorithm Carreg-Lam yn cymryd datrysiad dichonadwy cychwynnol (wedi'i chreu naill ai trwy'r dull cornel Gogledd-Orllewin neu'r dull cost leiaf) ac yn eu gwella er mwyn cynhyrchu datrysiad gorau posib. Mae'n gwneud hwn trwy ystyried pob un o'r newidynnau ansylfaenol ac ystyried beth fydd y gost o droi'r newidyn yn newidyn sylfaenol.

Ystyriwch y datrysiad dichonadwy a rhoddir yn Enghraifft 29:

	X	Y	Z	
A	4 5	6 17	11	10
B	14	6 18	3 12	9
C	10	25	5 20	5
	4	12	8	24

Mae pedwar newidyn ansylfaenol: x_{az}, x_{bx}, x_{cx}, ac x_{cy}. Beth fydd y gost o droi un o rain yn newidyn sylfaenol?

- Yn gyntaf ystyriwch x_{bx}: Os byddwn yn troi hwn yn sylfaenol yna fydd mwynglawdd X yn cyflenwi gormod o lo, felly bydd angen lleihau x_{ax}, sy'n golygu ni fydd orsaf pŵer A yn derbyn digon o lo, felly bydd angen cynyddu x_{ay}, sy'n golygu bydd mwynglawdd y yn cyflenwi gormod o lo, felly bydd angen lleihau x_{by}. Bydd hwn yn cydbwyso'r nifer o glo mae gorsaf pŵer B yn derbyn, yn cau'r lwp. Hynny yw:

	X	Y	Z	
A	4 -5	6 +17	 11	10
B	 +14	6 -18	3 12	9
C	 10	 25	5 20	5
	4	12	8	24

Felly i gynyddu x_{bx} gan un uned bydd yn costio: $+14-5+17-18=8$, ac felly ni fydd yn gwella'r datrysiad.

- Nawr ystyriwch x_{az}:

	X	Y	Z	
A	4 5	6 -17	 +11	10
B	 14	6 +18	3 -12	9
C	 10	 25	5 20	5
	4	12	8	24

Felly i gynyddu x_{az} gan un uned bydd yn costio: $+11-12+18-17=0$, ac felly ni fydd yn gwneud unrhyw wahaniaeth i'r datrysiad.

- Nawr ystyriwch x_{cx}:

	X	Y	Z	
A	4 (-5)	6 (+17)	(11)	10
B	(14)	6 (-18)	3 (+12)	9
C	(+10)	(25)	5 (-20)	5
	4	12	8	24

Felly i gynyddu x_{cx} gan un uned bydd yn costio: $+10 - 5 + 17 - 18 + 12 - 20 = -4$, ac felly bydd cynyddu x_{cx} yn gwella'r datrysiad.

Y mwyaf gallwn gynyddu x_{cx} yw gan 4, oherwydd dyna yw'r mwyaf gall x_{ax} lleihau ganddo. A chawn y datrysiad newydd trwy gynyddu x_{cx}, x_{ay}, x_{bz} gan 4, a lleihau x_{ax}, x_{by}, x_{cz} gan 4, yn rhoi gwelliant o $4 \times -4 = -16$:

	X	Y	Z	
A	(5)	10 (17)	(11)	10
B	(14)	2 (18)	7 (12)	9
C	4 (10)	(25)	1 (20)	5
	4	12	8	24

Mae'r Algorithm Carreg-Lam yn defnyddio'r rhesymeg hon i gynhyrchu datrysiad gorau posib newydd yn systematig.

Algorithm Carreg-Lam

Camau:

1. Canfyddwch ddatrysiad dichonadwy cychwynnol (e.e. gan ddefnyddio'r dull cornel Gogledd-Orllewin neu'r dull cost leiaf).
2. Ar gyfer pob newidyn ansylfaenol:
   (a) Tynnwch gylchlwybr, yn dechrau gyda'r newidyn ansylfaenol hwnnw yn mynd trwy'r newidynnau sylfaenol.
   (b) Ystyriwch y gost net pob uned o droi'r newidyn ansylfaenol hwnnw yn sylfaenol.
3. Os yw pob cost net yn fwy na neu'n hafal i sero, rydym wedi canfod datrysiad gorau posib. Diwedd yr algorithm.
4. Fel arall, dewiswch y newidyn ansylfaenol a fydd yn achosi'r gost net negatif mwyaf.
5. Ychwanegwch iddo'r nifer mwyaf o unedau ag sydd bosib, yn tynnu/adio yr un nifer o unedau i'r holl newidynnau ar hyd y lwp.
6. Ewch i 1).

Nodwch efallai bod yna mwy nag un datrysiad gorau posib, hynny yw dau ddatrysiad gwahanol sy'n rhoi'r un gost leiaf. E.e. wrth droi newidyn ansylfaenol yn sylfaenol mae ganddo gost net o sero.

Enghraifft 31 *Yn gyntaf defnyddiwch y dull cornel Gogledd-Orllewin, ac yna defnyddiwch yr algorithm carreg-lam i ganfod datrysiad i'r broblem cludiant canlynol:*

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	3	1	7	4	300
O_2	2	6	5	9	400
O_3	8	3	3	2	500
	250	350	400	200	1200

Datrysiad i Enghraifft 31 *Ar ôl y dull Gogledd-Orllewin cawn:*

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	250 3	50 1	 7	 4	300
O_2	 2	300 6	100 5	 9	400
O_3	 8	 3	300 3	200 2	500
	250	350	400	200	1200

Cam cyntaf yr algorithm carreg-lam:

Cylchlwybr	*Cost*
$O_2D_1 \to O_1D_1 \to O_1D_2 \to O_2D_2$	+ 2 - 3 + 1 - 6 = -6
$O_3D_1 \to O_1D_1 \to O_1D_2 \to O_2D_2 \to O_2D_3 \to O_3D_3$	+ 8 - 3 + 1 - 6 + 5 - 3 = 2
$O_3D_2 \to O_2D_2 \to O_2D_3 \to O_3D_3$	+ 3 - 6 + 5 - 3 = -1
$O_1D_3 \to O_2D_3 \to O_2D_2 \to O_1D_2$	+ 7 - 5 + 6 - 1 = 7
$O_1D_4 \to O_3D_4 \to O_3D_3 \to O_2D_3 \to O_2D_3 \to O_1D_2$	+ 4 - 2 + 3 - 5 + 6 - 1 = 5
$O_2D_4 \to O_3D_4 \to O_3D_3 \to O_2D_3$	+ 9 - 2 + 3 - 5 = 5

Felly cynyddwch O_2D_1 gymaint ag sydd bosib, hynny yw gan 250, yn rhoi:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	 3	300 1	 7	 4	300
O_2	250 2	50 6	100 5	 9	400
O_3	 8	 3	300 3	200 2	500
	250	350	400	200	1200

Datrysiad i Enghraifft 31 (continuing from p. 113) *Ail gam yr algorithm carreg-lam:*

Cylchlwybr	*Cost*
$O_1D_1 \to O_1D_2 \to O_2D_2 \to O_2D_1$	*+ 3 - 1 + 6 - 2 = 6*
$O_3D_1 \to O_2D_1 \to O_2D_3 \to O_3D_3$	*+ 8 - 2 + 5 - 3 = 8*
$O_3D_2 \to O_2D_2 \to O_2D_3 \to O_3D_3$	*+ 3 - 6 + 5 - 3 = -1*
$O_1D_3 \to O_2D_3 \to O_2D_2 \to O_1D_2$	*+ 7 - 5 + 6 - 1 = 7*
$O_1D_4 \to O_3D_4 \to O_3D_3 \to O_2D_3 \to O_2D_2 \to O_1D_2$	*+ 4 - 2 + 3 - 5 + 6 - 1 = 5*
$O_2D_4 \to O_3D_4 \to O_3D_3 \to O_2D_3$	*+ 9 - 2 + 3 - 5 = 5*

Felly cynyddwn O_3D_2 gymaint ag sydd bosib, hynny yw gan 50, yn rhoi:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	 3	300 1	 7	 4	300
O_2	250 2	 6	150 5	 9	400
O_3	 8	50 3	250 3	200 2	500
	250	350	400	200	1200

Trydydd cam yr algorithm carreg-lam:

Cylchlwybr	*Cost*
$O_1D_1 \to O_1D_2 \to O_3D_2 \to O_3D_3 \to O_2D_3 \to O_2D_1$	*+ 3 - 1 + 3 - 3 + 5 - 2 = 5*
$O_3D_1 \to O_2D_1 \to O_2D_3 \to O_3D_3$	*+ 8 - 2 + 5 - 3 = 8*
$O_2D_2 \to O_2D_3 \to O_3D_3 \to O_3D_2$	*+ 6 - 5 + 3 - 3 = 1*
$O_1D_3 \to O_3D_3 \to O_3D_2 \to O_1D_2$	*+ 7 - 3 + 3 - 1 = 6*
$O_1D_4 \to O_3D_4 \to O_3D_2 \to O_1D_2$	*+ 4 - 2 + 3 - 1 = 4*
$O_2D_4 \to O_3D_4 \to O_3D_3 \to O_2D_3$	*+ 9 - 2 + 3 - 5 = 5*

Felly does dim mwy o symudiadau sy'n lleihau'r gost, ac rydym wedi canfod y dyraniad gorau posib.

Problemau Uchafsymio

Nodwch fe all fod achosion lle bod gan broblemau yr un strwythur, ond hoffwn uchafsymio rhyw elw yn lle leiafsymio cost. Yn yr achosion hyn byddwn yn:

- Amnewidiwch y *dull cost leiaf* gyda *dull cost fwyaf* er mwyn canfod datrysiad dichonadwy sylfaenol (noder nid yw hwn yn angenrheidiol, bydd y dull cost leiaf hefyd yn canfod datrysiad dichonadwy sylfaenol, ond fe fydd yn bellach i ffwrdd o'r gorau posib).
- Wrth wneud yr algorithm carreg-lam, byddwn wedi canfod y datrysiad gorau posib os yw pob cost net yn llai na neu'n hafal i sero, a dewiswn y newidyn gyda'r gost net fwyaf.

6.4 Dirywiad mewn Problemau Cludiant

Wrth ddefnyddio'r dull Simplecs er mwyn datrys problemau rhaglennu llinol ym Mhennod 5, roedd yn bosib i broblem fod yn *ddirywiedig*. Mae hwn yn digwydd pan mae mwy na dau gyfyngiad yn cwrdd wrth y datrysiad gorau posib, a chaiff ei ddangos pan mae newidyn sylfaenol yn hafal i sero. Mae hwn yn digwydd yn aml iawn mewn problemau cludiant, a gallwn ei adnabod yn hawdd unwaith caiff datrysiad cychwynnol ei gynhyrchu.

Yn gyffredinol, os oes m tarddle ac n cyrchfan, yna bydd $m + n - 1$ newidyn sylfaenol. Unwaith caiff datrysiad sylfaenol cychwynnol ei ganfod (er enghraifft trwy'r dull cornel Gogledd-Orllewin neu'r dull cost leiaf), byddwn yn disgwyl gweld $m + n - 1$ cell wedi'u llenwi gyda gwerthoedd di-sero. Os oes llai o rain, yna mae'r broblem yn *ddirywiedig*.

Ystyriwch yr enghraifft ganlynol lle mae'r canfuwyd y datrysiad cychwynnol can y dull cost leiaf:

	W	X	Y	Z	
A	9	1 8	9 3	7	10
B	4 2	3 5	4	8	7
C	3	2	6	3 1	3
	4	4	9	3	20

Fan hyn byddwn yn disgwyl $m+n-1 = 4+3-1 = 6$ newidyn sylfaenol, ond dim ond 5 newidyn sylfaenol di-sero sydd, ac felly mae'r broblem yn ddirywiedig. Mae hwn yn achosi problemau, er enghraifft oherwydd ni allwn berfformio'r algorithm carreg-lam rhagor, oherwydd nid yw'n bosibl tynnu cylchlwybrau trwy'r newidynnau sylfaenol pob to. Ceisiwch hwn uchod!

Gallwn ddod dros hwn trwy adnabod pa un o'r newidynnau-sero yw'r newidyn sylfaenol, a'i labeli fel 0. Yna mae'r algorithm carreg-lam yn gallu defnyddio'r gell hon i greu cylchlwybrau. Ond, dydyn ni methu adnabod y gell hon nawr, mae angen gwneud hwn *tra* ein bod yn creu'r datrysiad sylfaenol cychwynnol:

- Dewiswch ddull i ganfod datrysiad dichonadwy;
- Wrth lenwi'r celloedd, os ydynt yn bodloni *naill ai'r* cyfanswm rhes *neu'r* cyfanswm colofn, ticiwch y rhes neu golofn honno;
- Wrth lenwi'r celloedd, os ydynt yn bodloni'r cyfansymiau rhes a cholofn **ar yr un pryd**, yna *ond* ticiwch naill y rhes neu'r golofn;
- Ar y diwedd, naill ai mae pob rhes a cholofn wedi'u ticio (does dim dirywiad), neu bydd *un rhes* ac *un golofn* heb ei dicio;
- Os oes unrhyw resi a cholofnau heb eu ticio, ond wedi'i bodloni, yna rhowch *un sero* yn y gell y bydd yn ticio'r rhain.

Ystyriwch yr enghraifft ganlynol:

Enghraifft 32 *Canfyddwch ddatrysiad dichonadwy cychwynnol i'r broblem ddirywiedig ganlynol gan ddefnyddio'r dull cornel Gogledd-Orllewin:*

	W	X	Y	Z	
A	9	8	3	7	10
B	2	5	4	8	7
C	3	2	6	1	3
	4	4	9	3	20

Defnyddiwch yr algorithm carreg-lam i ganfod y datrysiad gorau posib.

Datrysiad i Enghraifft 32 *Yn dilyn y dull cornel Gogledd-Orllewin cawn:*

- *Gosodwch* $x_{AW} = 4$ *- ticiwch off colofn W;*
- *Gosodwch* $x_{AX} = 4$ *- ticiwch off colofn X;*
- *Gosodwch* $x_{AY} = 2$ *- ticiwch off rhes A;*
- *Gosodwch* $x_{BY} = 7$ *- gallwn naill ai ticio off colofn Y neu res B - ticiwch off colofn Y;*
- *Gosodwch* $x_{CZ} = 3$ *- gallwn naill ai ticio off colofn Z neu res C - ticiwch off rhes C;*
- *Mae hwn yn bodloni'r holl gyfansymiau rhes a cholofn, ond mae dau heb eu ticio: rhes B a cholofn Z; felly rhown 0 yn gell BZ.*

Yn rhoi:

	W	X	Y	Z	
A	4 $_{9}$	4 $_{8}$	2 $_{3}$	$_{7}$	10
B	$_{2}$	$_{5}$	7 $_{4}$	0 $_{8}$	7
C	$_{3}$	$_{2}$	$_{6}$	3 $_{1}$	3
	4	4	9	3	20

Cam cyntaf yr algorithm carreg-lam:

Cylchlwybr	*Cost*
AZ $\to$ *BZ* $\to$ *BY* $\to$ *AY*	*Dim yn bosib.*
BW $\to$ *AW* $\to$ *AY* $\to$ *BY*	*+ 2 - 9 + 3 - 4 = -8*
BX $\to$ *AX* $\to$ *AY* $\to$ *BY*	*+ 5 - 8 + 3 - 4 = -4*
CW $\to$ *AW* $\to$ *AY* $\to$ *BY* $\to$ *BZ* $\to$ *CZ*	*+ 3 - 9 + 3 - 4 + 8 - 1 = 0*
CX $\to$ *AX* $\to$ *AY* $\to$ *BY* $\to$ *BZ* $\to$ *CZ*	*+ 2 - 8 + 3 - 4 + 8 - 1 = 0*
CY $\to$ *BY* $\to$ *BZ* $\to$ *CZ*	*+ 6 - 4 + 8 - 1 = 9*

Datrysiad i Enghraifft 32 (continuing from p. 117) *Felly cynyddu BW gymaint ag sydd bosib, yn rhoi:*

	W	X	Y	Z	
A	$_{9}$	4_{8}	6_{3}	$_{7}$	10
B	4_{2}	$_{5}$	3_{4}	0_{8}	7
C	$_{3}$	$_{2}$	$_{6}$	3_{1}	3
	4	4	9	3	20

Ail gam yr algorithm carreg-lam:

Cylchlwybr	*Cost*
AW $\rightarrow$ AY $\rightarrow$ BY $\rightarrow$ BW	*+ 9 - 3 + 4 - 2 = 8*
AZ $\rightarrow$ BZ $\rightarrow$ BY $\rightarrow$ AY	*Dim yn bosib.*
BX $\rightarrow$ AX $\rightarrow$ AY $\rightarrow$ BY	*+ 5 - 8 + 3 - 4 = -4*
CW $\rightarrow$ BW $\rightarrow$ BZ $\rightarrow$ CZ	*+ 3 - 2 + 8 - 1 = 8*
CX $\rightarrow$ AX $\rightarrow$ AY $\rightarrow$ BY $\rightarrow$ BZ $\rightarrow$ CZ	*+ 2 - 8 + 3 - 4 + 8 - 1 = 0*
CY $\rightarrow$ BY $\rightarrow$ BZ $\rightarrow$ CZ	*+ 6 - 4 + 8 - 1 = 9*

Felly cynyddu BX gymaint ag sydd bosib, yn rhoi:

	W	X	Y	Z	
A	$_{9}$	1_{8}	9_{3}	$_{7}$	10
B	4_{2}	3_{5}	$_{4}$	0_{8}	7
C	$_{3}$	$_{2}$	$_{6}$	3_{1}	3
	4	4	9	3	20

Datrysiad i Enghraifft 32 (continuing from p. 118) *Trydydd cam yr algorithm carreg-lam:*

Cylchlwybr	*Cost*
$AW \to AX \to BX \to BW$	$+ 9 - 8 + 5 - 2 = 4$
$AZ \to BZ \to BX \to AX$	*Dim yn bosib.*
$BY \to BX \to AX \to AY$	$+ 4 - 5 + 8 - 3 = 4$
$CW \to BW \to BZ \to CZ$	$+ 3 - 2 + 8 - 1 = 8$
$CX \to BX \to BZ \to CZ$	$+ 2 - 5 + 8 - 1 = 4$
$CY \to CZ \to BZ \to BX \to AX \to AY$	$+ 6 - 1 + 8 - 5 + 8 - 3 = 13$

Felly does dim rhagor o symudiadau sy'n lleihau'r gost, ac rydym wedi canfod y dyraniad gorau posib.

6.5 Cyflenwad ac Angen Anhafal

Yn yr holl achosion gwnaethon ni ystyried yn flaenorol, roedd cyflenwad ac angen yn hafal. Roedd hwn yn sicrhau bod ein halgorithm yn gweithio'n ddymunol a gallwn ddefnyddio dulliau syml megis y dull cornel Gogledd-Orllewin i ganfod datrysiadau dichonadwy sylfaenol yr oedd eu holl gyfyngiadau yn dynn. Ond, mewn rhan fwyaf o achosion ymarferon ni fydd hwn yn digwydd.

Gallwn ddelio gyda chyflenwad ac angen anhafal trwy greu ffug tarddle (os yw'r angen hwn fwy na'r cyflenwad), neu ffug cyrchfan (os yw'r cyflenwad yn fwy na'r angen). Byddwn yn gosod cost y ffug trywyddion i sero. Ond, ni ddylwn ystyried y rhain wrth greu datrysiad dichonadwy sylfaenol gan ddefnyddio'r dull cost leiaf, oherwydd yr effaith fydd i lenwi'r ffug rhesi a cholofnau yn gyntaf, sydd ddim yn ddefnyddiol iawn.

Gadewch i ni wneud enghraifft:

Enghraifft 33 *Canfyddwch ddatrysiad dichonadwy ar gyfer y broblem ganlynol gan ddefnyddio'r dull cost leiaf:*

	X	Y	Z	
A	1	5	5	7
B	4	2	2	4
C	3	6	1	3
	5	3	4	

Defnyddiwch yr algorithm carreg-lam er mwyn ganfod y datrysiad gorau posib.

Datrysiad i Enghraifft 33 *Yn yr achos hwn cyfanswm yr angen (colofnau) yw 12, ond cyfanswm y cyflenwad (rhesi) yw 14. Felly mae angen ychwanegu ffug golofn angen er mwyn derbyn y 2 uned ychwanegol:*

	X	Y	Z	Dummy	
A	1	5	5	0	7
B	4	2	2	0	4
C	3	6	1	0	3
	5	3	4	2	14

Yna gan ddefnyddio'r dull cost leiaf (nodwch fod hwn yn ddirywiedig, ac felly mae angen ychwanegu newidyn sylfaenol gwerth sero):

	X	Y	Z	Dummy	
A	5 (1)	(5)	(5)	2 (0)	7
B	(4)	3 (2)	1 (2)	0 (0)	4
C	(3)	(6)	3 (1)	(0)	3
	5	3	4	2	14

Cam cyntaf yr algorithm carreg-lam:

Cylchlwybr	*Cost*
AY → AD → BD → BY	+ 5 - 0 + 0 - 2 = 3
AZ → AD → BD → BZ	+ 5 - 0 + 0 - 2 = 3
BX → AX → AD → BD	Dim yn bosib.
CX → AX → AD → BD → BZ → CZ	Dim yn bosib.
CY → BY → BZ → CZ	+ 6 - 2 + 2 - 1 = 5
CD → CZ → BZ → BD → AX → AY	Dim yn bosib.

Felly does dim mwy o symudiadau sy'n lleihau cost, ac rydym wedi canfod y dyraniad gorau posib.

6.6 Trywyddion Nad Ydynt ar Gael Bellach

Ystyriwch ein bod wedi canfod datrysiad gorau posib am broblem cludiant. Nawr mae un o'r trywyddion yn newid a ddim ar gael bellach (er enghraifft oherwydd trychineb naturiol, neu helynt gwleidyddol). Sut allwch addasu'r datrysiad er mwyn delio a hwn?

Gallwn ddelio gyda'r sefyllfa hon trwy dybio fod y gost o gymryd y trywydd hwnnw yn uchel iawn. Fel arfer dynodwn y gost hon gan M. Yna rydym yn parhau gyda'r algorithm carreg-lam, yn edrych am symudiadau sy'n costio'r gwerthoedd mwyaf negatif yn nhermau M.

Enghraifft 34 *Tybiwch ein bod wedi canfod y dyraniad gorau posib canlynol ar gyfer broblem cludiant gyda pum tarddle a thri chyrchfan:*

	V	W	X	Y	Z	
A	$_{5}$	$_{7}$	$_{10}$	$1\ _{5}$	$4\ _{3}$	5
B	$3\ _{8}$	$3\ _{6}$	$4\ _{9}$	$_{12}$	$_{14}$	10
C	$_{10}$	$_{9}$	$6\ _{8}$	$4\ _{10}$	$_{15}$	10
	3	3	10	5	4	25

nid yw'r trywydd BX ddim ar gael bellach. Canfyddwch ddatrysiad gorau posib newydd.

Datrysiad i Enghraifft 34 *Rydym yn aseinio cost trywydd BX i fod rhyw gost uchel iawn amhenodol M:*

	V	W	X	Y	Z	
A	$_{5}$	$_{7}$	$_{10}$	$1\ _{5}$	$4\ _{3}$	5
B	$3\ _{8}$	$3\ _{6}$	$4\ _{M}$	$_{12}$	$_{14}$	10
C	$_{10}$	$_{9}$	$6\ _{8}$	$4\ _{10}$	$_{15}$	10
	3	3	10	5	4	25

Datrysiad i Enghraifft 34 (continuing from p. 121) *Rydym yn parhau gyda'r algorithm carreg-lam:*

Cylchlwybr	*Cost*
$AV \to AY \to CY \to CX \to BX \to BV$	+ 5 - 5 + 10 - 8 + M - 8 = M - 6
$AW \to AY \to CY \to CX \to BX \to BW$	+ 7 - 5 + 10 - 8 + M - 6 = M - 2
$AX \to AY \to CY \to CX$	+ 10 - 5 + 10 - 8 = 7
$BY \to CY \to CX \to BX$	+ 12 - 10 + 8 - M = 10 - M
$BZ \to BX \to CX \to CY \to AY \to AZ$	+ 14 - M + 8 - 10 + 5 - 3 = 14 - M
$CV \to BV \to BX \to CX$	+ 10 - 8 + M - 8 = 10 + M
$CW \to BW \to BX \to CX$	+ 9 - 6 + M - 8 = M - 5
$CZ \to CY \to AY \to AZ$	+ 15 - 10 + 5 - 3 = 7

Mae dau opsiwn i leihau'r llif yn BX, cynyddu BY gan 4, yn costio cyfanswm o $40 - 4M$, neu gynyddu BZ gan 4, yn costio cyfanswm o $56 - 4M$. Felly cynyddwn BY sydd a'r gost net leiaf:

	V	W	X	Y	Z	
A	$_{5}$	$_{7}$	$_{10}$	1 $_{5}$	4 $_{3}$	5
B	3 $_{8}$	3 $_{6}$	$_{M}$	4 $_{12}$	$_{14}$	10
C	$_{10}$	$_{9}$	10 $_{8}$	0 $_{10}$	$_{15}$	10
	3	3	10	5	4	25

Sylwch taw canlyniad hwn yw bod mwy nag un gell yn disgyn i sero, ond mae angen i ni gadw un sero er mwyn delio gyda'r dirywiant. Mae'n ddefnyddiol setio CY i'r newidyn sero sylfaenol, oherwydd ni fyddwn yn defnyddio BX rhagor. Nawr, rydym yn parhau gyda'r algorithm carreg-lam:

Cylchlwybr	*Cost*
$AV \to AY \to BY \to BV$	+ 5 - 1 + 12 - 8 = 8
$AW \to AY \to BY \to BW$	+ 7 - 1 + 12 - 6 = 12
$AX \to AY \to CY \to CX$	+ 10 - 1 + 10 - 8 = 11
BX	We do not want to increase this.
$BZ \to BY \to AY \to AZ$	+ 14 - 12 + 1 - 3 = 0
$CV \to BV \to BY \to CY$	Dim yn bosib.
$CW \to BW \to BY \to CY$	Dim yn bosib.
$CZ \to CY \to AY \to AZ$	Dim yn bosib.

A nawr gwyddon fod y dyraniad hwn yw'r gorau posib.

6.7 Dadansoddiad Hydeimledd

Mae dadansoddiad hydeimledd yn ffordd ymchwilio i mewn i'r effaith o newid rhai paramedrau ar y datrysiad gorau posib. Er enghraifft, efallai hoffwn wybod effaith newid rhai o'r costau cludo. Yn arbennig, gallwn ganfod amrediad o werthoedd gall cost rhyw drywydd fod cyn i'r datrysiad gorau posib newid.

Mae'r dechneg yn wahanol wrth ystyried newidynnau sylfaenol ac ansylfaenol:

- Ar gyfer **newidynnau ansylfaenol**:
  Gosodwch y gost i fod P. Tynnwch y cylchlwybr o'r newidyn hwn trwy'r newidynnau sylfaenol, ystyriwch gost net y cylchlwybr yn nhermau P, penderfynwch werthoedd P lle mae'r gost net yn aros yn bositif.

- Ar gyfer **newidynnau sylfaenol**:
  Gosodwch y gost i fod P. Ystyriwch *bob* newidyn ansylfaenol lle mae ei gylchlwybr yn cynnwys y newidyn sylfaenol hwn. Ystyriwch gost net y cylchlwybrau yn nhermau P, penderfynwch werthoedd P lle mae'r gost net yn aros yn bositif.

Enghraifft 35 *Ystyriwch y dyraniad gorau posib canlynol:*

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	3	300 1	7	4	300
O_2	250 2	6	150 5	9	400
O_3	8	50 3	250 3	200 2	500
	250	350	400	200	1200

(i) Pa amseriad o werthoedd gall y gost O_1D_3 fod cyn i'r dyraniad gorau posib newid?
(ii) Pa amseriad o werthoedd gall y gost O_2D_4 fod cyn i'r dyraniad gorau posib newid?
(iii) Pa amseriad o werthoedd gall y gost O_2D_3 fod cyn i'r dyraniad gorau posib newid?

Datrysiad i Enghraifft 35 *Yn eu tro:*

(i) *Mae* O_1D_3 *yn newidyn ansylfaenol. Gosodwch ei gost i* P. *Ystyriwn y cylchlwybr:*
$O_1D_3 \to O_3D_3 \to O_3D_2 \to O_1D_2$
gyda chost net: $P - 3 + 3 - 1 = P - 1$.
Mae'r dyraniad yn aros yn un gorau posib os yw'r gost yn bositif, felly $P - 1 > 0$, *ac felly* $P > 1$.

(ii) *Mae* O_2D_4 *yn newidyn ansylfaenol. Gosodwch ei gost i* P. *Ystyriwn y cylchlwybr:*
$O_2D_4 \to O_3D_4 \to O_3D_3 \to O_2D_3$
gyda chost net: $P - 2 + 3 - 5 = P - 4$.
Mae'r dyraniad yn aros yn un gorau posib os yw'r gost yn bositif, felly $P - 4 > 0$, *ac felly* $P > 4$.

(iii) *Mae* O_2D_3 *yn newidyn sylfaenol. Gosodwch ei gost i* P. *Ystyriwch bob newidyn ansylfaenol y mae eu cylchlwybrau yn cynnwys* O_2D_3:

- $O_1D_1 \to O_1D_2 \to O_3D_2 \to O_3D_3 \to O_2D_3 \to O_2D_1$
  gyda chost net: $3 - 1 + 3 - 3 + P - 2 = P$ *Er mwyn i'r dyraniad hwn aros yn un gorau posib angen i'r gost net fod yn bositif, felly* $P > 0$.
- $O_2D_2 \to O_2D_3 \to O_3D_3 \to O_3D_2$
  gyda chost net: $6 - P + 3 - 3 = 6 - P$ *Er mwyn i'r dyraniad hwn aros yn un gorau posib angen i'r gost net fod yn bositif, felly* $6 - P > 0$, *ac felly* $P < 6$.
- $O_2D_4 \to O_3D_4 \to O_3D_3 \to O_2D_3$
  gyda chost net: $9 - 2 + 3 - P = 10 - P$ *Er mwyn i'r dyraniad hwn aros yn un gorau posib angen i'r gost net fod yn bositif, felly* $10 - P > 0$, *ac felly* $P < 10$.
- $O_3D_1 \to O_2D_1 \to O_2D_3 \to O_3D_3$
  gyda chost net: $8 - 2 + P - 3 = 3 + P$ *Er mwyn i'r dyraniad hwn aros yn un gorau posib angen i'r gost net fod yn bositif, felly* $3 + P > 0$, *ac felly* $P > -3$.

Angen i bob un o'r pedwar anhafaledd cael eu bodloni er mwyn i'r dyraniad aros yn un gorau posib. Hynny yw $P > 0$ *ac* $P < 6$ *ac* $P < 10$ *ac* $P > -3$, *ac felly* $0 < P < 6$.

Pennod 7

Rhaglennu Deinameg

Deilliannau dysgu:

- Gallu fformiwleiddio problemau fel problemau lleiafsymio neu uchafsymio ar graffiau cyfeiriedig digylchlwybr;
- Gallu deall Egwyddor Optimeiddedd Bellman;
- Gallu datrys problemau ar graffiau cyfeiriedig digylchlwybr gan ddefnyddio iteru gwerthoedd.

7.1 Cyflwyniad

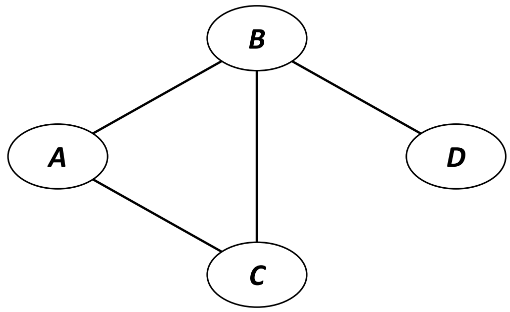
Mae rhaglennu deinameg yn dechneg ymchwil weithrediadol arall sy'n ceisio canfod datrysiad gorau, hynny yw'r datrysiad gorau posib allan o nifer fawr o ddatrysiadau posib. Mae'n arferol meddwl am y fath hon o broblem fel problemau ar rwydweithiau, er enghraifft problemau llwybr lleiaf. Serch hynny, fe all problemau eraill, ni fyddwn yn gweld fel problemau ar rwydweithiau ar yr edrychiad cyntaf, cael eu datrys yn yr un modd.

7.2 Graffiau Cyfeiriedig Digylchlwybr

Fe fydd yn defnyddiol cofio rhai cysyniadau am graffiau, ac i fedru adnabod graffiau cyfeiriedig dicylchlwybr (GCD/DAG) sydd yn hanfodol i astudio rhaglennu deinameg. Graff $G = (V, E)$ yw gwrthrych mathemategol sy'n cynnwys dau set:

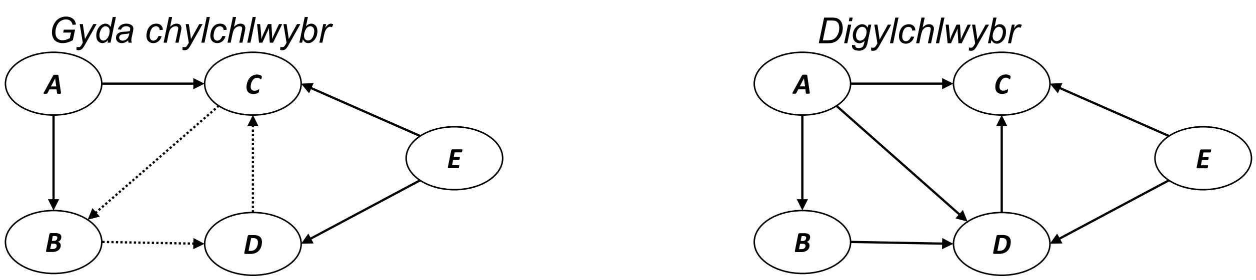
- V: set o fertigau, ac
- E: set o ymylon. Ymyl yw pâr o fertigau $e = (u, v) \in E$, fel bod $u, v \in V$.

Gallwn dynnu llun graff fel rhwydwaith. Maent yn defnyddiol ar gyfer storio gwybodaeth am berthnasau rhwng pethau. Er enghraifft goed deuluol neu rwydweithiau hewl. Fel enghraifft, gadewch i $G = (V, E)$ gyda $V = \{A, B, C, D\}$ ac $E = \{(A, B), (A, C), (B, C), (B, D)\}$. Llun hwn yw:



Os caiff yr ymylon eu diffinio fel *parau trefnedig*, yna galwn ni'r graff yn *gyfeiriedig*, a defnyddiwn saethau wrth dynnu ei lun. Hefyd gall pob ymyl cael *pwysolyn*, gwerth rhifiadol sydd yn gysylltiedig iddo, er enghraifft ei hyd, cost, gwobr, ayyb.

Llwybr yw set o ymylon cysylltiedig. Er enghraifft mae'r llwybr A-C-D yn bodoli os yw $\{(A, C), (C, D)\} \subseteq E$. *Cylchlwybr* yw lwybr sydd yn dechrau ac yn gorffen yn yr un fertig. Os **nad** yw'r graff yn cynnwys cylchlwybrau, yna fe'i helwir yn *ddigylchlwybr*. Ystyriwch y ddau graff cyfeiriedig isod, mae un yn cynnwys cylchlwybr (wedi'i uwcholeuo gan ymylon wedi dotio), ac mae'r llall yn ddigylchlwybr.



7.3 Egwyddor Optimeiddedd Bellman

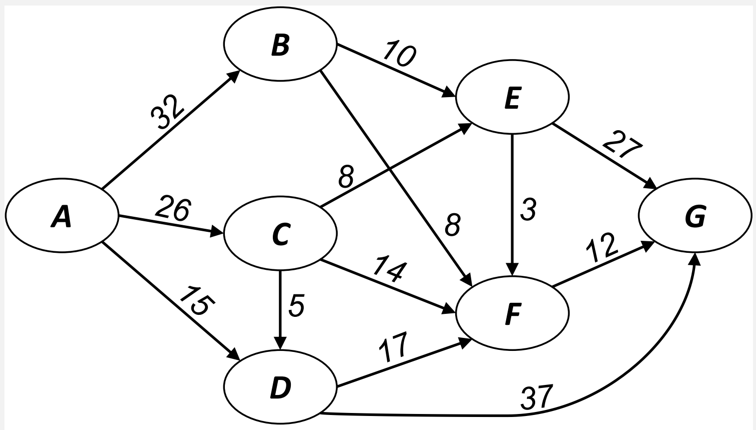
Mae rhaglennu llinol yn canolbwyntio ar Egwyddor Optimeiddedd Bellman:

> **Egwyddor Optimeiddedd Bellman**
>
> *Mae gan bolisi gorau posib y briodwedd bod, beth bynnag yw'r cyflwr cychwynnol a'r penderfyniad cychwynnol, rhaid i weddill y penderfyniadau hefyd bod yn bolisi gorau posib gyda golwg ar y cyflwr sy'n canlyni o'r penderfyniad cyntaf.*

Wrth feddwl am ddatrysiad fel set o gamau i'w dilyn, gallwn ddehongli'r egwyddor fel: os yw'r datrysiad gorau posib pan ddechreuwn gyda cham X yn cynnwys cam Y, yna mae'r camau sy'n dilyn o gam Y yr un peth os dechreuwn o gam Y. Felly mae'n ddefnyddiol gallu fformiwleiddio'r problemau hyn fel problemau llwybrau ar rwydwaith digylchlwybr, a meddwl am y camau hyn fel fertigau i'w ymweld ar hyd y llwybr hwnnw.

Gadewch i ni ddefnyddio problem llwybr lleiaf fel enghraifft:

Enghraifft 36 *Ystyriwch y rhwydwaith digylchlwybr canlynol:*



Beth yw'r llwybr lleiaf rhwng fertig A a fertig G?

Mae Egwyddor Optimeiddedd Bellman yn nodi, er enghraifft:

- *os* taw'r llwybr lleiaf o D i G yw D-E-G,
- *ac os* yw'r llwybr lleiaf o A i G yn cynnwys D,
- *yna* mae'r llwybr lleiaf o A i G yn cynnwys D-E-G.

7.4 Iteru Gwerthoedd

Mae iteru gwerthoedd yn dechneg sy'n ein galluogi ni i weithio ar yn ôl o G i A, yn canfod y llwybr lleiaf o bob fertig i G ym mhob achos, trwy gynnwys y llwybrau lleiaf rydym wedi canfod hyd yn hyn. Byddwn yn gwneud hwn yn systematig, yn diffinio'r canlynol, gadewch i:

- V bod y set of fertigau yn y graff,
- E bod y set o ymylon cyfeiriedig yn y graff,
- $A_v = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$, bod y set o'r holl fertigau u lle bodoler ymyl o v i u,

- r_{vu} bod y pellter ychwanegol cawn, neu'r gost, o ddewis yr ymyl (v, u),
- f_v bod y pellter lleiaf o v i'r cyrchfan.

Yna gallwn weithio am yn ôl trwy'r fertigau, yn llenwi'r rhain wrth i ni fynd, lle

$$f_v = \min_{u \in A_v} (r_{vu} + f_u)$$

Gosodwn $r_{vu} = \infty$ os nad yw'r llwybr yn bodoli, ond mewn gwirionedd gallwn anwybyddu'r rhain. Er mwyn gallu gweithio am yn ôl o'r cyrchfan i'r tarddle, mae angen i ni drefnu'r fertigau gan y nifer mwyaf posib o gamau i'r cyrchfan (gan fod y graff yn ddigylchlwybr, mae hwn yn sicrhau bod gan bob nod nifer mwyaf posib o gamau pendant a meidraidd).

Datrysiad i Enghraifft 36 *Yn gyntaf, trefnwch y fertigau gan y nifer mwyaf o gamau posib i'r cyrchfan:*

$$G - F - E - B - D - C - A$$

Nawr gallwn iteru trwy'r fertigau, yn canfod f_v pob tro:

v	u	r_{vu}	$r_{vu} + f_u$	f_v
G	-	0	0	0
F	G	12	12 + 0 = 12	12
E	G	27	27 + 0 = 27	
	F	3	3 + 12 = 15	15
B	E	10	10 + 15 = 25	
	F	8	8 + 12 = 20	20
D	F	17	17 + 12 = 29	
	G	37	37 + 0 = 37	29
C	E	8	8 + 15 = 23	
	F	14	14 + 12 = 26	
	D	5	5 + 29 = 34	23
A	B	32	32 + 20 = 52	
	C	26	26 + 23 = 49	
	D	15	15 + 29 = 44	44

Felly cost y llwybr lleiaf yw 44. Cawn hwn trwy:

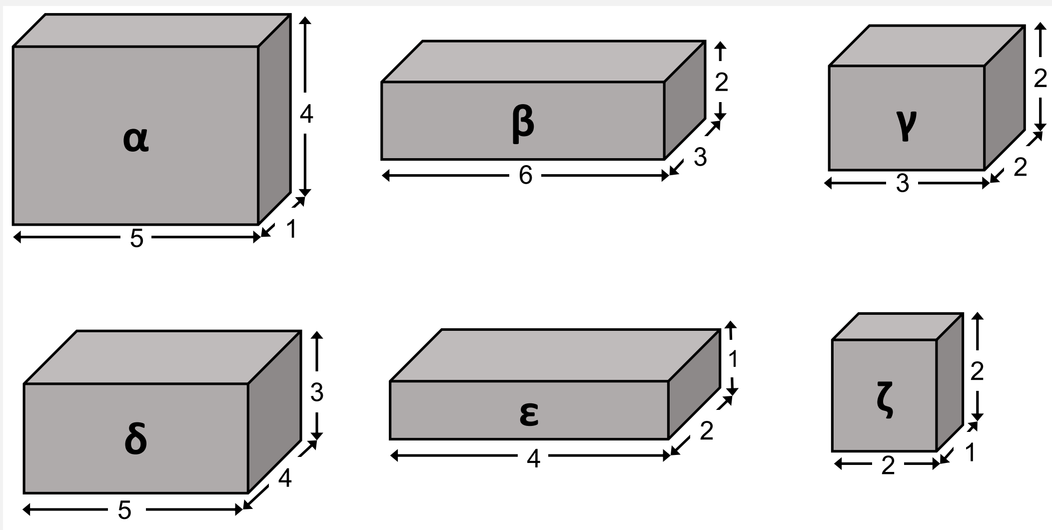
- $44 = 15 + 29$, *yn mynd o A i D,*
- $29 = 17 + 12$, *yn mynd o D i F,*
- $12 = 12 + 0$, *yn mynd o F i G.*

Felly'r llwybr lleiaf yw A-D-F-G gyda chost o 44.

Noder: efallai rydych wedi clywed am algorithm Dijkstra er mwyn datrys problemau llwybr lleiaf. Achos arbennig o raglennu deinameg yw hon, lle mae'r broblem yn gymesur, hynny yw rhaid i'r llwybr lleiaf o A i B bod y llwybr lleiaf o B i A. Nid yw hwn yn wir ar gyfer rhai problemau.

Mae rhai problemau lle yn gyntaf nid ydynt yn edrych fel problemau ar graffiau cyfeiriedig di-gylchlwybr hefyd yn gallu cael eu datrys yn y modd hwn. Ystyriwch y broblem uchafsymio isod:

Enghraifft 37 *Ystyriwch y chwe bocs isod:*



Rhoddir eu dimensiynau gan:

Bocs	*Hyd*	*Lled*	*Uchder*
α	*5*	*1*	*4*
β	*6*	*3*	*2*
γ	*3*	*2*	*2*
δ	*5*	*4*	*3*
ϵ	*4*	*2*	*1*
ζ	*2*	*1*	*2*

Mae cynnwys y bocsys yn fregus ac mae angen iddynt aros y ffordd gywir i fyny. Gallwn stacio bocs ar ben bocs arall os yw ei hyd yn llai na hyd y bocs oddi tanodd, ac os yw ei lled yn llai na lled y bocs oddi tanodd.
Beth yw'r stac mwyaf tal o focsys gallwn adeiladu?

Er eglurder, ystyriwch yr enghreifftiau o staciau isod. Ar y chwith mae ϵ-γ-ζ, yn creu stac uchder 5, ac ar y dde mae enghraifft o stac ni chaniateir, ζ-β, gan fod hyd β yn fwy na hyd ζ:

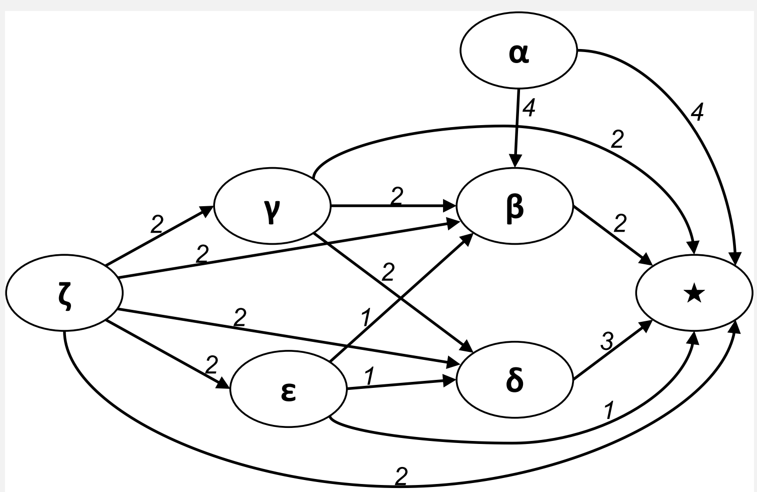
Er nad yw'n ymddangos fel problem ar rwydwaith, gallwn fodelu hwn fel graff cyfeiriedig digylchlwybr. Mae yna berthynas trefnedig clir rhwng pob pâr o focsys: os gall un cael ei stacio ar ben y llall. Defnyddiwn ni hwn yn ein datrysiad.

Nodwch nawr bod hwn yn broblem uchafsymio, ar felly ein hafaliad iteru gwerthoedd nawr yw

$$f_v = \max_{u \in A_v} (r_{vu} + f_u)$$

Ac rydym yn barod i ddatrys y broblem:

Datrysiad i Enghraifft 37 *Tynnwch lun o'r broblem fel graff cyfeiriedig digylchlwybr: mae yna ymyl cyfeiriedig o focs x i focs y os gallwn stacio x ar ben y. Mae gan yr ymylon (x, y) pwysolion yn hafal i uchder x. Mae hefyd angen i ni cynnwys ffug fertig er mwyn cynrychioli'r arwyneb byddent yn cael ei stacio ar ei ben:*



Datrysiad i Enghraifft 37 (continuing from p. 130) *Mae rhoi'r bocsys mewn trefn nifer o gamau i'r gyrchfan yn rhoi:*

$$\star - \beta - \delta - \gamma - \epsilon - \alpha - \zeta$$

A pherfformiwch iteru gwerthoedd:

v	u	r_{vu}	$r_{vu} + f_u$	f_v
$\star$	-	0	0	0
β	$\star$	2	$2 + 0 = 2$	2
δ	$\star$	3	$3 + 0 = 3$	3
γ	$\star$	2	$2 + 0 = 2$	
	β	2	$2 + 2 = 4$	
	δ	2	$2 + 3 = 5$	5
ϵ	β	1	$1 + 2 = 3$	
	δ	1	$1 + 3 = 4$	
	$\star$	1	$1 + 0 = 1$	4
α	$\star$	4	$4 + 0 = 4$	
	β	4	$4 + 2 = 6$	6
ζ	γ	2	$2 + 5 = 7$	
	β	2	$2 + 2 = 4$	
	δ	2	$2 + 3 = 5$	
	ϵ	2	$2 + 4 = 6$	
	$\star$	2	$2 + 0 = 2$	7

Felly uchder y stac mwyaf tal yw 7. Cawn hwn trwy:

- $7 = 2 + 5$, *stacio* ζ *ar ben* γ,
- $5 = 2 + 3$, *stacio* γ *ar ben* δ,
- $3 = 3 + 0$, *stacio* δ *ar ben yr arwyneb.*

Felly'r stac uchaf yw δ-γ-ζ *gydag uchder 7.*

Nodwch fan hyn nid oedd yn bosib cylchdroi'r bocsys. Meddyliwch sut allwch addasu'r broblem er mwyn galluogi cylchdroadau bocs. Un ffordd bydd i drin fersiynau o'r bocsys sydd wedi'u cylchdroi fel bocsys gwahanol (hynny yw, fertigau gwahanol yn y graff), a sicrhau does dim ymyl rhwng bocs a fersiwn wedi'i chylchdroi o'r un bocs.

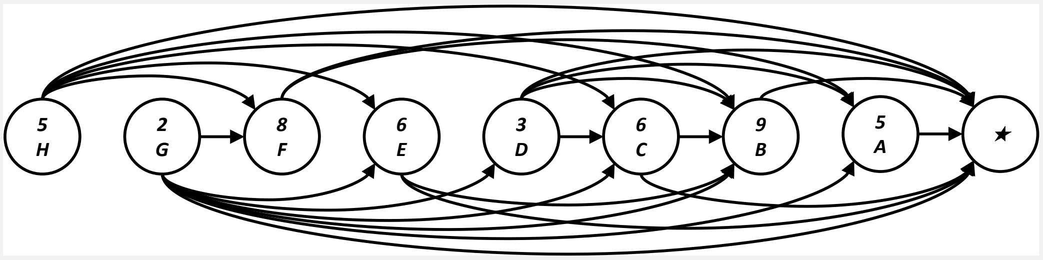
Enghraifft arall:

Enghraifft 38 *Ystyriwch y dilyniant o rifau canlynol:*

$$5 - 2 - 8 - 6 - 3 - 6 - 9 - 5$$

Beth yw ei is-ddilyniant hiraf o rifau sy'n cynyddu?

Datrysiad i Enghraifft 38 *Mae trefn yn bwysig yma: gallwn dynnu llun hwn fel graff cyfeiriedig digylchlwybr. Gadewch i bob rhif bod fertig, ac mae ymyl rhwng dau fertig os yw un rhif yn fwy na'r llall, a thu ôl y llall yn y dilyniant, gyda ffug fertig am ddiwedd y dilyniant. Y DAG yw:*



Pwysolyn pob ymyl yw 1, yn dynodi bod cynnwys y rhif hwnnw yn cynyddu hyd yr is-ddilyniant gan 1. Perfformiwn iteru gwerthoedd (gan ddefnyddio trefn naturiol y dilyniant):

v	u	r_{vu}	$r_{vu} + f_u$	f_v
$\star$	-	0	$0 + 0 = 0$	0
A5	$\star$	1	$1 + 0 = 1$	1
B9	$\star$	1	$1 + 0 = 1$	1
C6	$\star$	1	$1 + 0 = 1$	
	B9	1	$1 + 1 = 2$	2
D3	$\star$	1	$1 + 0 = 1$	
	A5	1	$1 + 1 = 2$	
	B9	1	$1 + 1 = 2$	
	C6	1	$1 + 2 = 3$	3
E6	$\star$	1	$1 + 0 = 1$	
	B9	1	$1 + 1 = 2$	2
F8	$\star$	1	$1 + 0 = 1$	
	B9	1	$1 + 1 = 2$	2
G2	$\star$	1	$1 + 0 = 1$	
	A5	1	$1 + 1 = 2$	
	B9	1	$1 + 1 = 2$	
	C6	1	$1 + 2 = 3$	
	D3	1	$1 + 3 = 4$	
	E6	1	$1 + 2 = 3$	
	F8	1	$1 + 2 = 3$	4
H6	$\star$	1	$1 + 0 = 1$	
	B9	1	$1 + 1 = 2$	
	C6	1	$1 + 2 = 3$	
	E6	1	$1 + 2 = 3$	
	F8	1	$1 + 2 = 3$	3

Felly hyd yr is-ddilyniant hiraf o rifau sy'n cynyddu yw 4, sef $2 - 3 - 6 - 9$.

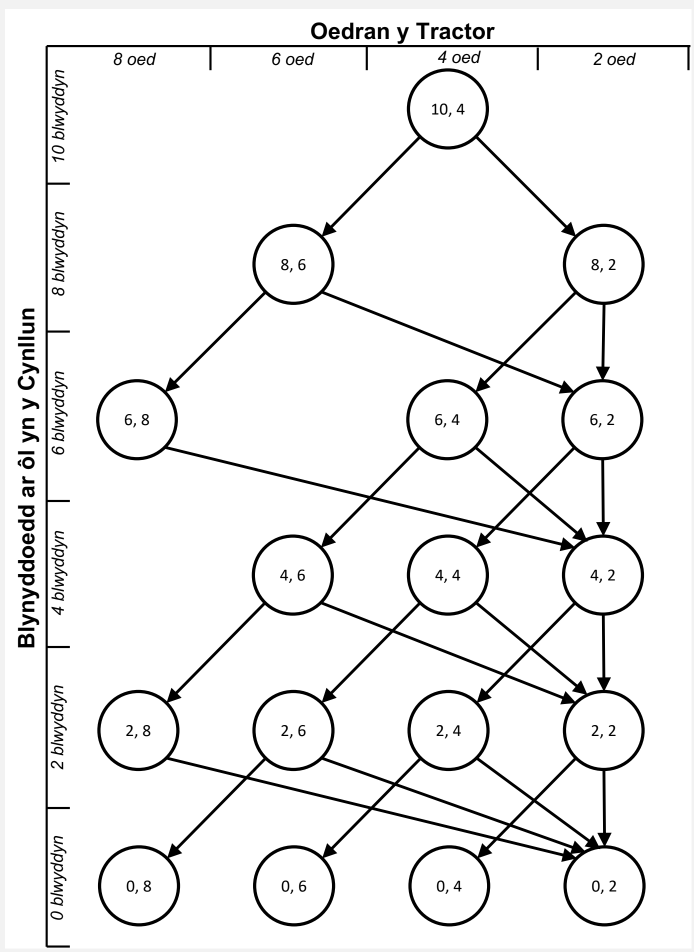
Rydym wedi gweld fod rhaglennu deinameg yn dda ar gyfer problemau gyda threfn naturiol. Felly maent yn gweithio'n dda gyda phroblemau yn amser, gan fod trefn i bwyntiau amser.

Enghraifft 39 *Mae gan fferm yng Ngheredigion un tractor. Rhaid amnewid y tractor pan fydd 8 mlwydd oed, yn costio £30k. Mae arolwg pob dwy flynedd, lle mae rhaid dewis rhwng trwsio'r tractor, neu'i gwerthu a'i amnewid. Mae'r gost o drwsio neu werthu yn dibynnu ar ei oedran:*

Oedran (blynyddoedd)	*2*	*4*	*6*	*8*
Cost trwsio	*£8k*	*£4k*	*£10k*	*-*
Elw o'i werthu	*£15k*	*£10k*	*£3k*	*£0*

Ar hyn mae'r tractor 4 blwydd oed. Dyfeisiwch gynllun ar gyfer y 10 blwyddyn nesaf.

Datrysiad i Enghraifft 39 *Y cam pwysig fan hyn yw adnabod beth yw'r cyflyrau gwahanol. Gadewch i n fod y nifer o flynyddoedd sydd gweddill yn y cynllun, a gadewch i i fod oedran y tractor. Felly'r cyflyrau yw'r parau (n, i), wedi'u tynnu'n systematig:*

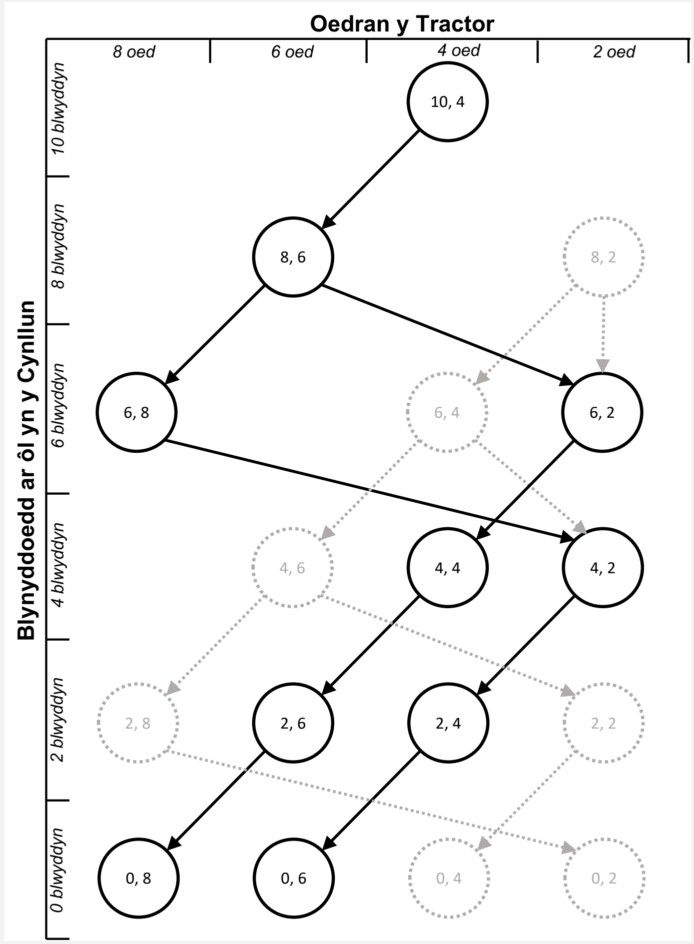


Datrysiad i Enghraifft 39 (continuing from p. 133) *Gan edrych ar y graff, mae pob saeth sy'n pwyntio i $i = 2$ yn cyfateb gydag amnewid y tractor (R), ac mae pob saeth arall yn cyfateb i drwsio'r tractor (F). Felly gallwn berfformio iteru gwerthoedd:*

v	Gweithred	u	r_{vu}	$r_{vu} + f_u$	f_v
(0, 2)	-	-	-15	-15 + 0 = -15	-15
(0, 4)	-	-	-10	-10 + 0 = -10	-10
(0, 6)	-	-	-3	-3 + 0 = -3	-3
(0, 8)	-	-	0	0 + 0 = 0	0
(2, 2)	R	(0, 2)	15	15 - 15 = 0	
	F	(0, 4)	8	8 - 10 = -2	-2
(2, 4)	R	(0, 2)	20	20 - 15 = 5	
	F	(0, 6)	4	4 - 3 = 1	1
(2, 6)	R	(0, 2)	27	27 - 15 = 12	
	F	(0, 8)	10	10 + 0 = 10	10
(2, 8)	R	(0, 2)	30	30 - 15 = 15	15
(4, 2)	R	(2, 2)	15	15 - 2 = 13	
	F	(2, 4)	8	8 + 1 = 9	9
(4, 4)	R	(2, 2)	20	20 - 2 = 18	
	F	(2, 6)	4	4 + 10 = 14	14
(4, 6)	R	(2, 2)	27	27 - 2 = 25	
	F	(2, 8)	10	10 + 15 = 25	25
(6, 2)	R	(4, 2)	15	15 + 9 = 24	
	F	(4, 4)	8	8 + 14 = 22	22
(6, 4)	R	(4, 2)	20	20 + 9 = 29	
	F	(4, 6)	4	4 + 25 = 29	29
(6, 8)	R	(4, 2)	30	30 + 9 = 39	39
(8, 2)	R	(6, 2)	15	15 + 22 = 37	
	F	(6, 4)	8	8 + 29 = 37	37
(8, 6)	R	(6, 2)	27	27 + 22 = 49	
	F	(6, 8)	10	10 + 39 = 49	49
(10, 4)	R	(8, 2)	20	20 + 37 = 57	
	F	(8, 6)	4	4 + 49 = 53	53

Mae'r canlyniadau fan hyn yn ddiddorol, gan fod nifer o gyflyrau lle mae'r ddau benderfyniad yn rhoi'r un gwerth f_v, yn golygu does dim ots pa weithred i wneud fan hyn. Mae dehongli hwn yn gallu fod yn anodd. Gall fod help i ail-dynnu'r graff cyfeiriedig digylchlwybr, ond ond gyda'r gweithredoedd gorau posib. Hefyd gallwn gysgodi unrhyw gyflyrau a gweithredoedd ni allwn gyrraedd trwy ddechrau o gyflwr (10, 4) a chymryd gweithredoedd gorau posib.

Datrysiad i Enghraifft 39 (continuing from p. 134) *Y graff hwn yw:*



Felly mae dau gynllun gorau posib:

- *(10, 6) - F - (8, 6) - R - (6, 2) - F - (4, 4) - F - (2, 6) - F - (0, 8)*
- *(10, 6) - F - (8, 6) - F - (6, 8) - R - (4, 2) - F - (2, 4) - F - (0, 6)*

Hynny yw, naill ai ei amnewid ar ôl 2 blwyddyn a'i drwsio pob tro arall, neu ei amnewid ar ôl 4 blwyddyn a'i drwsio pob tro arall.

Pennod 8

Rheoli Prosiectau

Deilliannau dysgu:

- Gallu tynnu diagramau llwybrau critigol ar gyfer problemau rheoli prosiectau;
- Gallu canfod llwybrau critigol ar gyfer prosiect;
- Gallu penderfynu oediadau derbyniol gan ddefnyddio fflotiau;
- Gallu canfod hydoedd lleiaf posib prosiect gyda'r gost leiaf.

8.1 Cyflwyniad

Mae llwybrau critigol yn dechneg ymchwil weithrediadol sy'n gallu penderfynu hyd lleiaf rhyw brosiect sy'n cynnwys is-dasgau. Gall rhai o'r is-dasgau hyn digwydd ym mharalel, ond mae angen i rai digwydd yn olynol. Ystyriwch reolwr prosiect sydd a'r wybodaeth ganlynol:

- Rhifau neu enwau pob **gweithgaredd**.
- **Hyd** pob gweithgaredd.
- Tabl o **ragofynion** neu flaenoriaethau, yn nodi pa weithgareddau sydd angen eu cyflawni cyn gall gweithgareddau eraill dechrau.

8.2 Diagramau Gweithrediadau ar Nodau

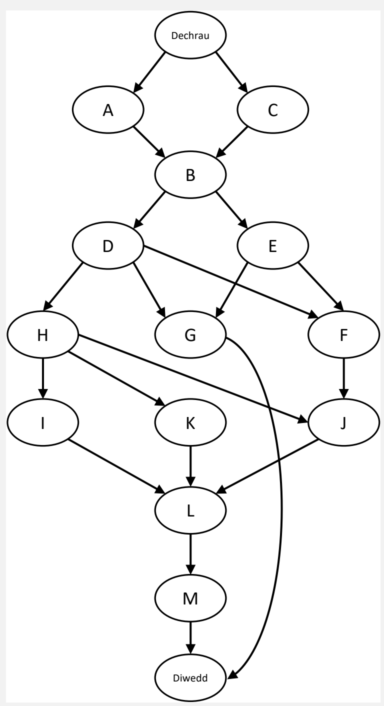
Gallwn arddangos y wybodaeth hon ar ddiagram **gweithrediadau ar nodau**, a gallwn ei dadansoddi. Ystyriwch enghraifft:

Enghraifft 40 *Ystyriwch y prosiect o ail-leoli ffatri bresennol i safle mwy cyfleus. Yn ogystal â'r cynlluniau ar gyfer y safle newydd, mae hwn hefyd yn cynnwys cload arfaethedig y ffatri bresennol, prynu peiriannau newydd, symud cyfarpar presennol, ayyb. Mae'r rheolwyr yn darparu'r tabl canlynol, lle mae'r hydoedd i gyd mewn wythnosau:*

Rhif	*Gweithgaredd*	*Hyd*	*Rhagofynion*
A	*Dewis safle newydd*	*12*	
B	*Cael y grant a'r caniatâd*	*26*	*A, C*
C	*Dewis pensaer*	*2*	
D	*Paratoi'r cynllun*	*4*	*B*
E	*Dewis adeiladwr*	*1*	*B*
F	*Adeiladu'r ffatri*	*50*	*D, E*
G	*Cau'r hen ffatri'n raddol*	*8*	*D, E*
H	*Cynllunio llunwedd y ffatri newydd*	*2*	*D*
I	*Prynu peiriannau newydd*	*45*	*H*
J	*Symud yr hen beiriannau*	*2*	*F, H*
K	*Cyflogi staff newydd*	*3*	*H*
L	*Hyfforddi'r staff newydd*	*6*	*I, J, K*
M	*Awdurdodi'r ffatri newydd*	*2*	*L*

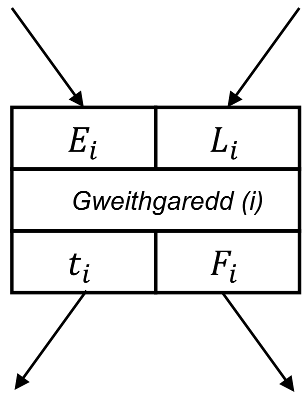
Tynnwch lun y prosiect hwn hel rhwydwaith o ragofynion.

Datrysiad i Enghraifft 40 *Y rhwydwaith fydd:*



Ond mae lot o wybodaeth allweddol yn absennol ar y rhwydwaith hwn, er enghraifft hydoedd y gweithgareddau. Gallwn hefyd canfod gwybodaeth megis yr amser dechrau cynharaf, yr amser dechrau hwyraf, a'r fflôt. Bydd diagram gwell yn cynnwys y wybodaeth hon, a galwn ni'r diagram hwn yn ddiagram gweithgareddau ar nodau.

Bydd pob nod yn edrych fel:



Fan hyn:

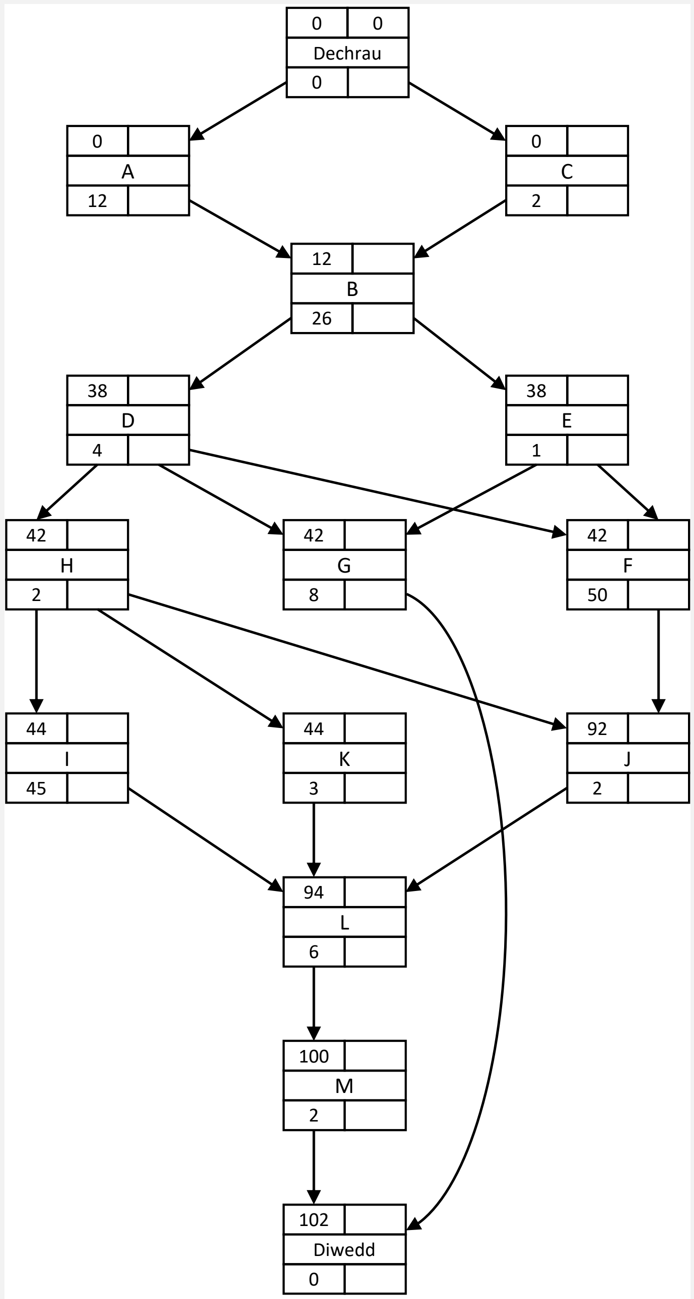
- i yw rhif y gweithgaredd.
  Dangosir rhif y gweithgaredd yng nghanol y nod.
- t_i yw **hyd** gweithgaredd i.
  Darparir y wybodaeth hon gan y rheolwyr prosiect.
- E_i yw **amser dechrau cynharaf** gweithgaredd i.
  Lle $E_i = \max_{k\in K_i}(E_k+t_k)$, a K_i yw'r set o weithgareddau sy'r rhagflaenu i yn uniongyrchol.
- L_i yw **amser dechrau hwyraf** gweithgaredd i.
  Lle $L_i = \min_{m\in M_i}(L_m - t_i)$, ac M_i yw'r set o weithgareddau sy'n dilyn i yn uniongyrchol.
- F_i yw **fflôt** gweithgaredd i. Dyma faint o amser llac sydd ar gyfer pob gweithgaredd, neu'r maint o amser mwyaf y gall y gweithgaredd oedi heb effeithio ar weithgareddau eraill. $F_i = L_i - E_i$.

Er mwyn cyfrifo'r holl E_i, L_i ac F_i, yn gyntaf mae angen i ni dynnu'r diagram gweithgareddau ar nodau a llenwi'r rhifau gweithgaredd a'r hydoedd yn unig, yn gadael gweddill y bocs yn wag. Mae gan y gweithgaredd *dechrau* hyd 0 ac $E_{\text{dechrau}} = L_{\text{dechrau}} = 0$, ac mae gan y gweithgaredd *diwedd* hyd o 0. Yna gwnawn **blaengrib**, yn dechrau i'r gweithgaredd *dechrau* a llenwi'r holl E_i nes cyrraedd y *diwedd*. Yna gosodwn $L_{\text{diwedd}} = E_{\text{diwedd}}$ a gwnawn **ôl-grib**, yn dechrau ar y gweithgaredd *diwedd* a llenwi'r holl L_i ac F_i nes cyrraedd y *dechrau*.

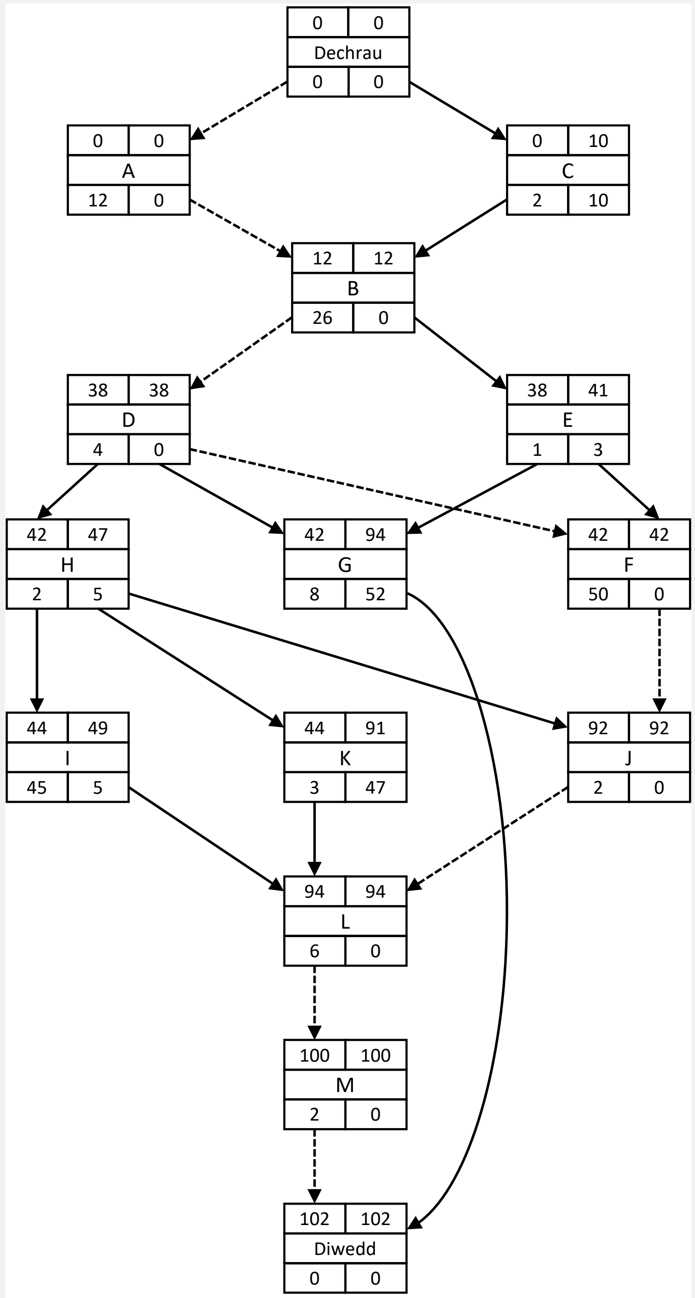
Byddwch yn gweld nifer o weithgareddau gyda fflôt o sero. Mae hwn yn golygu *rhaid* i'r gweithgareddau hyn dechrau a gorffen ar amser, ac os caiff y gweithrediadau hyn ei oedi bydd amser cyflawni'r prosiect yn cynyddu. Felly mae'r gweithrediadau hyn yn gritigol i'r prosiect. Byddant yn ffurfio llwybr o weithgareddau wedi'i cydgysylltu trwy'r rhwydwaith a elwir y **llwybr critigol**.

Enghraifft 41 *Tynnwch ddiagram gweithgareddau ar nodau ar gyfer problem rheoli prosiect yn Enghraifft 40. Perfformiwch blaengrib ac ôl-grib ar y nodau er mwyn canfod yr holl E_i, L_i ac F_i. Canfyddwch y llwybr critigol.*

Datrysiad i Enghraifft 41 *Ar ôl blaengrib mae'r diagram yn edrych fel:*



Datrysiad i Enghraifft 41 (continuing from p. 139) *Yna ar ôl ôl-grib mae'r diagram yn edrych fel:*



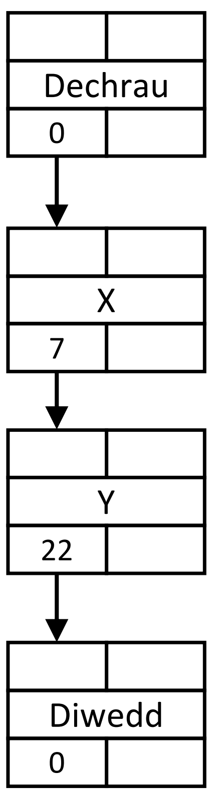
Mae hwn yn ucholeuo'r llwybr critigol fel A-B-D-F-J-L-M.

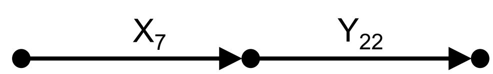
8.3 Diagramau Gweithgareddau ar Saethau

Ffordd amgen o gynrychioli gweithgareddau yw **diagram gweithgareddau ar saethau**. Fan hyn y gweithgareddau yw'r saethau wedi'i label gan rif y gweithgaredd a'i hyd. Dangosir rhagofynion gan saethau olynol. Er enghraifft ystyriwch y prosiect:

Rhif	Hyd	Rhagofynion
X	7	
Y	22	X

Cymharwch ei diagram gweithgareddau ar nodau gyda'i diagram gweithgareddau ar saethau:

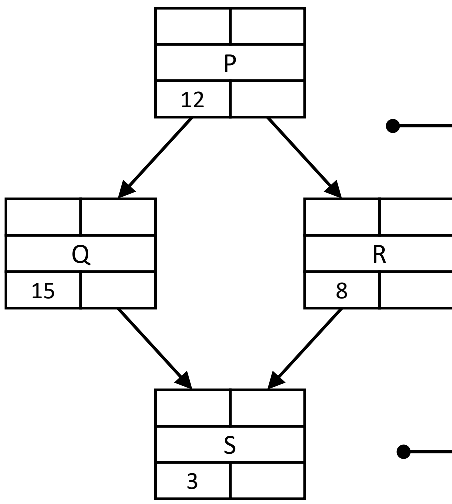


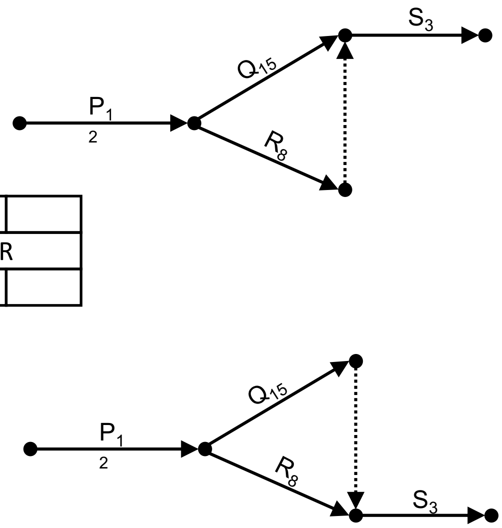


Pan fo gan weithgaredd mwy nag un rhagofyniad, rhaid i saeth bob rhagofyniad cwrdd ar ddechrau saeth y gweithgaredd hwnnw. Ond, ni all un saeth (gweithgaredd) diweddu yn dau leoliad gwahanol. Yn debyg, ni all ddwy saeth (gweithgaredd) dechrau a diweddu yn yr un lleoliad. Felly, weithiau mae angen ffug weithrediadau gyda hyd sero er mwyn i'r diagram gwneud synnwyr. Fel arfer tynnwn ni rhain gyda saeth wedi'i dotio. Er enghraifft, ystyriwch y prosiect canlynol:

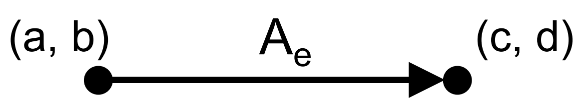
Rhif	Hyd	Rhagofynion
P	12	
Q	15	P
R	8	P
S	3	Q, R

Cymharwch ei diagram gweithgareddau ar nodau i'w diagram gweithgareddau ar saethau:





Gallwn hefyd perfformio blaengribau ac ôl-gribau ar y diagramau hyn, lle mae'r *amseroedd cyrraedd cynharaf* a'r *amseroedd cyrraedd olaf* nawr yn gysylltiedig gyda'r fertigau sy'n cysylltu'r saethau. E.e.

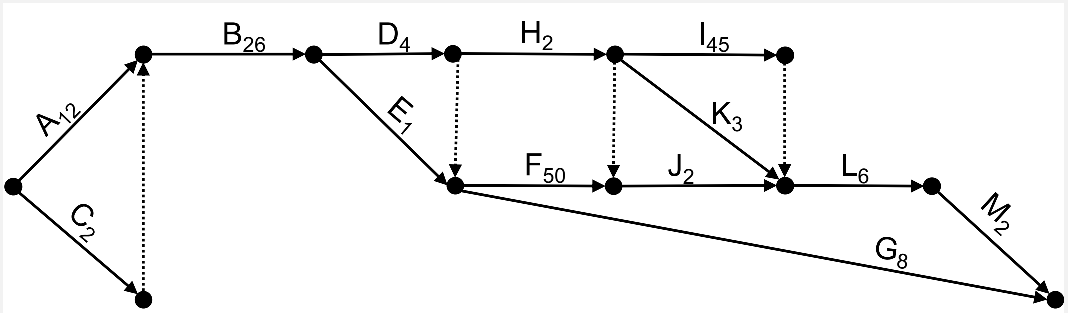


Mae gweithgaredd A ar y llwybr critigol os ac yn unig os yw $a = c$, $b = d$ ac $c - a = e$.

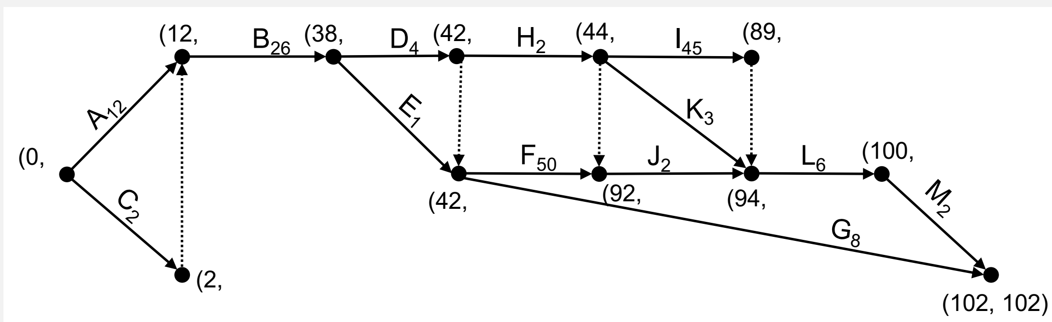
Activity A on the critical path if and only if $a = c$, $b = d$ and $c - a = e$.

Enghraifft 42 *Tynnwch ddiagram gweithgareddau ar saethau ar gyfer y broblem rheoli prosiectau yn Enghraifft 40. Perfformiwch flaengrib ac ôl-grib ar y fertigau er mwyn canfod yr holl E_i, L_i. Canfyddwch y llwybr critigol.*

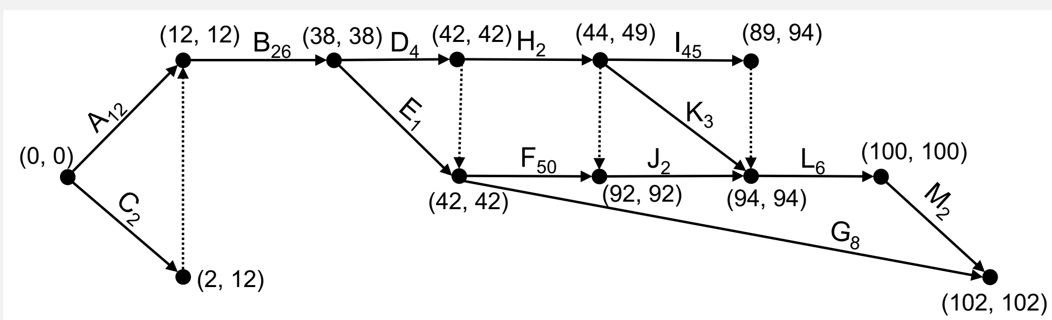
Datrysiad i Enghraifft 42 *Y diagram gweithgareddau ar saethau cychwynnol yw:*



Ar ôl blaengrib mae'r diagram yn edrych fel:



Yna ar ôl ôl-grib mae'r diagram yn edrych fel:



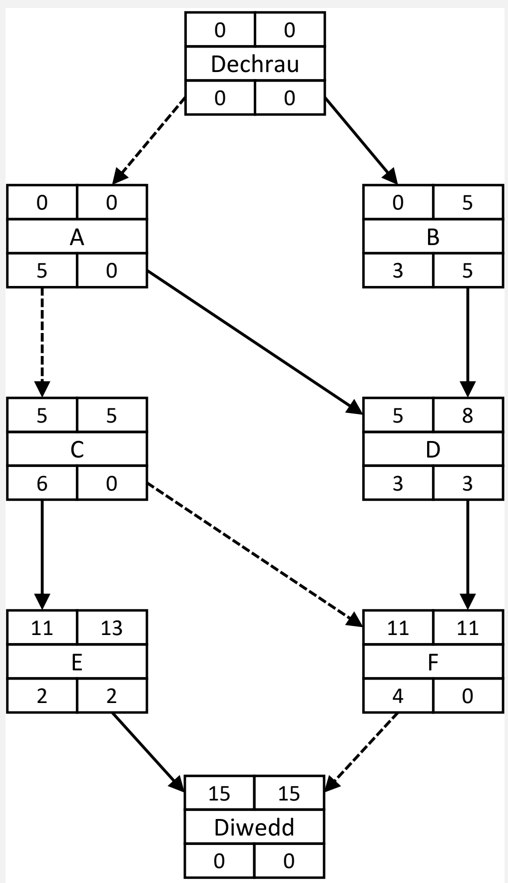
Mae hwn yn uwcholeuo'r llwybr critigol fel A-B-D-F-J-L-M.

Gadewch i ni weld enghraifft arall:

Enghraifft 43 *Tynnwch y diagramau gweithgareddau ar nodau a gweithgareddau ar saethau ar gyfer y prosiect canlynol o gael yn barod yn y bore, a chanfyddwch y llwybr critigol. Beth yw'r amser cyflymaf gall y person hwn cael yn barod?*

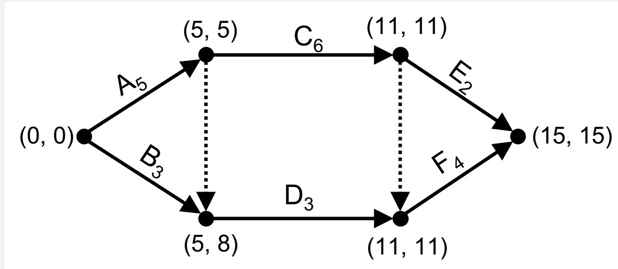
Rhif	*Gweithgaredd*	*Hyd*	*Rhagofynion*
A	*Cael cawod*	*5*	
B	*Brwsio dannedd*	*3*	
C	*Sychu gwallt*	*6*	*A*
D	*Coluro*	*3*	*A, B*
E	*Steilio gwallt*	*2*	*C*
F	*Gwisgo*	*4*	*C, D*

Datrysiad i Enghraifft 43 *Y diagram gweithgareddau ar nodau yw:*



gyda llwybr critigol A-C-F.

Datrysiad i Enghraifft 43 (continuing from p. 144) *Y diagram gweithgareddau ar saethau yw:*

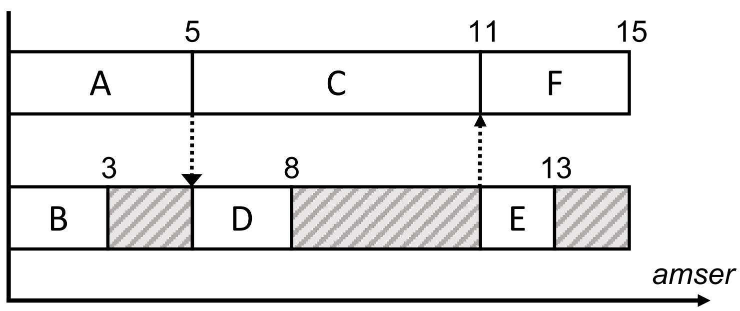


gyda llwybr critigol A-C-F.
Yr hyd byrraf i gwblhau'r prosiect yw 15 munud.

8.4 Siartiau Gantt

Mae siart Gantt yn gynrychiolaeth arall o brosiect. Mae ganddo echelin-x yn cynrychioli'r amser, ac yn defnyddio petryalau i ddangos hydoedd y gweithgareddau. Defnyddiwn saethau wedi'i dotio er mwyn dangos rhagofynion. Mae'r fath o ddiagram hwn, os yw wedi'i thynnu'n fanwl gywir ac at raddfa, yn gallu uwcholeuo'r amseroedd fflôt pob gweithgaredd nad yw'n gritigol.

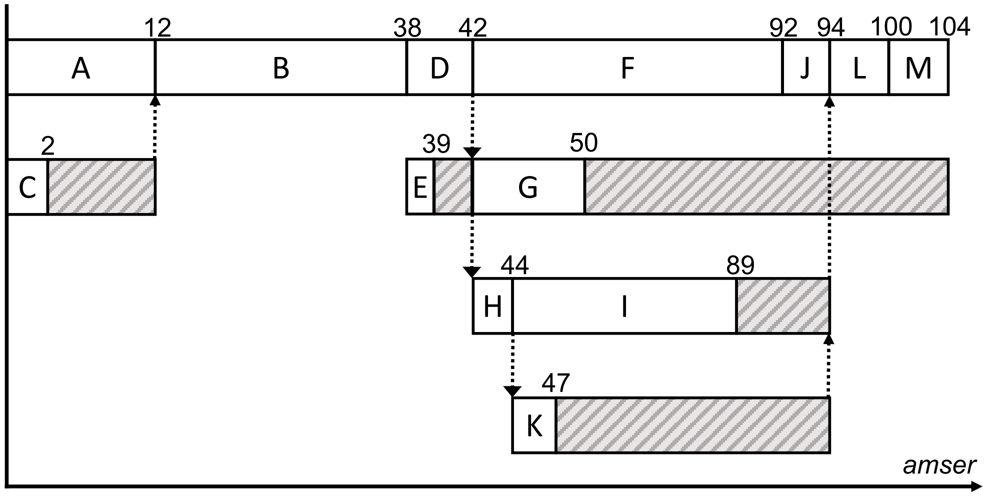
Dyma'r siart Gantt ar gyfer y prosiect a rhoddir yn Enghraifft 43:



Camau a all helpu:

1. Tynnwch y llwybr critigol yn gyntaf.
2. Bydd eu safleoedd yn penderfynu amseroedd dechrau a gorffen y gweithgareddau nad yw'n gritigol.
3. Mae gwagle yn y siart Gantt yn cynrychioli fflotau.
4. Weithiau mae amseroedd dechrau gweithgareddau nad yw'n gritigol wedi'u penderfynu gan weithgareddau eraill nad yw'n gritigol, ac felly bydd y fflotau yn gorgyffwrdd, a elwir fflôt a rennir.

Er enghraifft ystyriwch siart Gantt y prosiect a rhoddir yn Enghraifft 40:



Mae'r fflôt rhwng amser 89 a 94 yn fflôt a rennir, wedi'i rhannu rhwng gweithgareddau I a K, gan fod y ddau yn rhagofynion i L, ac hefyd y gweithgaredd critigol J.

Mae'r siart Gannt hon yn gallu ein helpu ateb rhai cwestiynau, ond mae hefyd yn uwcholeuo cwestiynau sydd angen mwy o ddadansoddi i'w hateb.

Enghraifft 44 *Gan ddefnyddio'r siart Gantt uchod, pa rai o'r cwestiynau canlynol gallwn ateb yn syth?*

1. *Beth ddigwyddith os yw hyd A yn cynyddu gan 2?*
2. *Beth ddigwyddith os yw hyd F yn lleihau gan 5?*
3. *Beth ddigwyddith os yw hyd C yn lleihau gan 1?*
4. *Beth ddigwyddith os yw hyd C yn cynyddu gan 3?*
5. *Beth ddigwyddith os yw hyd C yn cynyddu gan 12?*

Datrysiad i Enghraifft 44 *Cawn:*

1. *Beth ddigwyddith os yw hyd A yn cynyddu gan 2?*
   Gan fod A yn gritigol, bydd hyd y prosiect yn cynyddu gan 2.
2. *Beth ddigwyddith os yw hyd F yn lleihau gan 5?*
   Gan fod F yn gritigol, ni allwn wybod. Bydd angen canfod llwybr critigol newydd.
3. *Beth ddigwyddith os yw hyd C yn lleihau gan 1?*
   Gan nad yw C yn gritigol, ni fydd yn cael effaith ar hyd y prosiect.
4. *Beth ddigwyddith os yw hyd C yn cynyddu gan 3?*
   Oherwydd bod gan C fflôt o 10, ac mae $3 < 10$, yna ni fydd hwn yn newid y llwybr critigol a ni fydd yn cael effaith ar hyd y prosiect.
5. *Beth ddigwyddith os yw hyd C yn cynyddu gan 12?*
   Oherwydd bod gan C fflôt o 10, ac mae $12 > 10$, yna bydd hwn yn newid y llwybr critigol, a bydd angen canfod hwn.

8.5 Chwalu

Chwalu yw pan rydym yn lleihau hydoedd rhai gweithgareddau at gost. Er enghraifft efallai byddwn yn cyflogi mwy o adeiladwyr er mwyn adeiladu tŷ yn gyflymach. Mewn achosion fel hyn, rydym yn gwybod dau ddarn o wybodaeth ychwanegol am y gweithgaredd:

- **Amser chwalu**: yr amser lleiaf gallwn gyflawni gweithgaredd.

- **Cost y gostyngiad**: y gost ychwanegol sydd angen er mwyn cyflawni'r amser chwalu.

Ein tasg yw canfod y gostyngiadau a fydd yn arwain at yr hyd brosiect lleiaf gyda'r gost leiaf.

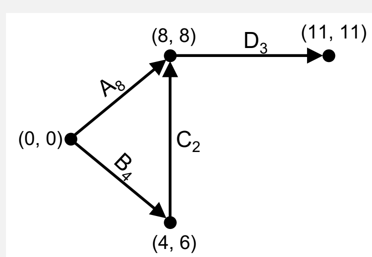
Er mwyn gwneud hwn bydd rhaid gweithio yn iterus: yn gostwng hyd weithgaredd ar y llwybr critigol sydd â'r gost leiaf gan 1 uned amser (heblaw na fydd gostwng gan fwy o unedau amser yn newid y llwybr critigol). Rhwng pob iteriad mae angen i ni ail-gyfrifo'r llwybr critigol. Os oes dau lwybr critigol yna bydd angen ystyried cyfuniadau o ostyngiadau.

Enghraifft 45 *Ystyriwch y prosiect canlynol gyda'r amseroedd chwalu a chostau gostyngiadau a rhoddir:*

Rhif	*Hyd*	*Rhagofynion*	*Amser Chwalu*	*Cost*
A	*8*		*4*	*£1200*
B	*4*		*2*	*£200*
C	*2*	*B*	*1*	*£400*
D	*3*	*A, C*	*2*	*£300*

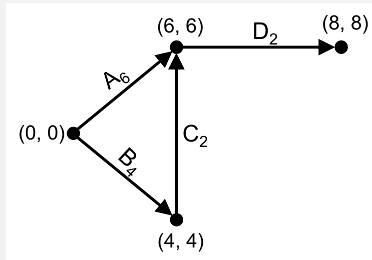
Sut allwn leihau hyd y prosiect cyfan gyda'r gost leiaf?

Datrysiad i Enghraifft 45 *Yn gyntaf, nodwch taw cost y gostyngiad yr uned ar gyfer A yw £300, ar gyfer B yw £100, ar gyfer C yw £400, ac ar gyfer D yw £300. Tynnwch y diagram gweithgareddau ar saethau cychwynnol a chanfyddwch y llwybr critigol:*

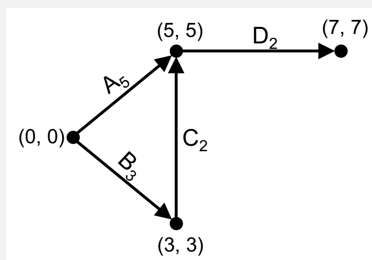


sy'n rhoi llwybr critigol o A-D. Gallwn ostwng D gan 1 ac A gan 2 cyn i'r llwybr critigol newid.

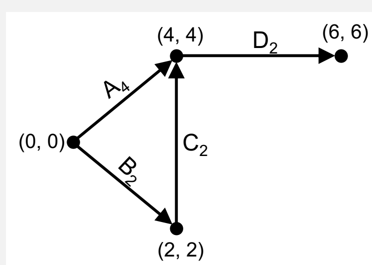
Datrysiad i Enghraifft 45 (continuing from p. 147) *Yn rhoi:*



nawr mae gennym dau lwybr critigol, A-D ac B-C-D. Ni all D gostwng rhagor, a ni fydd gostwng A, B neu C ar ben eu hunain yn cael effaith ar hyd y prosiect. Felly mae angen i ni ystyried cyfuniadau o ostyngiadau. Gallwn naill ai gostwng A a B gyda'i gilydd gyda chost o £300+£100=£400, neu gallwn ostwng A ac C gyda'i gilydd gyda chost o £300+£400=£700. Dewiswn ostwng A a B gan 1:



eto mae dau lwybr critigol, A-D ac B-C-D. Mae gennym yr un opsiynau eto: gostwng A a B gyda'i gilydd gyda chost o £300+£100-£400, neu gallwn ostwng A ac C gyda'i gilydd gyda chost o £300+£400=£700. Dewiswn ostwng A a B gan 1:



ac eto mae yna dau lwybr critigol. Ond mae'r ddau opsiwn yn cynnwys gostwng A, ond ni allwn ostwng hwn rhagor gan ein bod wedi cyrraedd yr amser chwalu, ac felly rydym wedi gorffen. Mae angen:

- *gostwng A gan 4 am* $4 \times$ *£300 = £1200,*
- *gostwng B gan 2 am* $2 \times$ *£100 = £200,*
- *gostwng D gan 1 am £200.*

Mae hwn yn golygu cyfanswm gostyngiad yn hyd y prosiect o 11 i 6, am gost o £1600.

Edrychwn ar un enghraifft olaf:

Enghraifft 46 *Ystyriwch y prosiect canlynol gyda'r amseroedd chwalu a chostau gostyngiadau a rhoddir:*

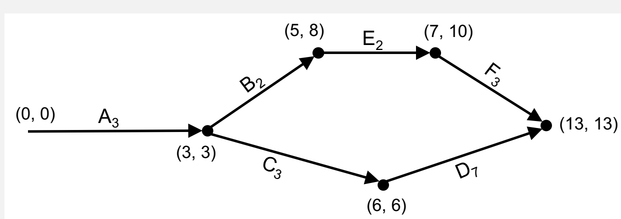
Rhif	Hyd	Rhagofynion	Amser Chwalu	Cost
A	3		1	£75
B	2	A	1	£5
C	3	A	1	£30
D	7	C	3	£40
E	2	B	1	£10
F	3	E	1	£25

Mae yna gyllideb o £50, beth yw'r amser lleiaf gallwn chwalu'r prosiect, a sut?

Datrysiad i Enghraifft 46 *Yn gyntaf nodwch y gost chwalu pob uned ar gyfer pob tasg:*

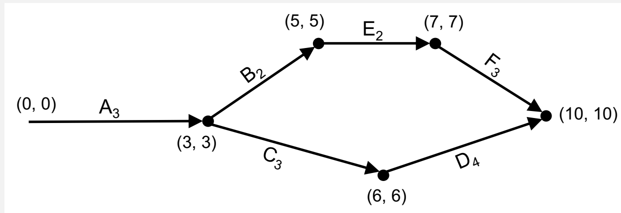
Rhif	Hyd	Rhagofynion	Amser Chwalu	Cost	Cost yr Uned
A	3		1	£75	£75
B	2	A	1	£5	£5
C	3	A	1	£30	£30
D	7	C	3	£40	£10
E	2	B	1	£10	£10
F	3	E	1	£25	£25

Nawr tynnwch y diagram gweithgareddau ar saethau a chanfyddwch y llwybr critigol:



sy'n rhoi llwybr critigol o A-C-D. Mae'n bosib chwalu pob un, a'r gweithgaredd rhataf i chwalu yw D. Yn edrych yn fanwl, gwelwn gallwn ostwng hwn gan 3 cyn i'r llwybr critigol newid, felly chwalwn hwn gan 3, at gost o £30.

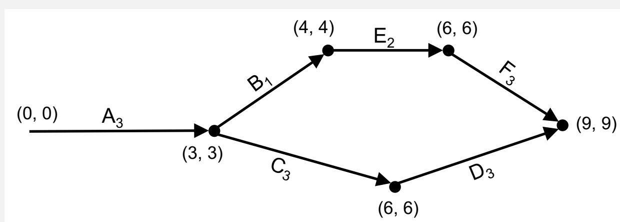
Datrysiad i Enghraifft 46 (continuing from p. 149) *Yn ail-dynnu'r diagram ar saethau:*



sy'n rhoi dau lwybr critigol: A-B-E-F ac A-C-D, gyda'r adrannau B-E-F ac C-D yn baralel i'w gilydd. Mae hwn yn rhoi saith opsiwn ar gyfer chwalu:

- *gostwng A gan 1 am £75*
- *gostwng B ac C gan 1 yr un am £5 + £30 = £35*
- *gostwng B ac D gan 1 yr un am £5 + £10 = £15*
- *gostwng E ac C gan 1 yr un am £10 + £30 = £40*
- *gostwng E ac D gan 1 yr un am £10 + £10 = £20*
- *gostwng F ac C gan 1 yr un am £25 + £30 = £55*
- *gostwng F ac D gan 1 yr un am £25 + £10 = £35*

Yw opsiwn rhataf yw gostwng B gan 1 a D gan 1, yn costio £15.
Cyfanswm cost wrth fynd = £45.



Bydd unrhyw gyfuniadau chwalu nawr yn costio yn fwy na £5, sef yr hyd sydd ar ôl yn y gyllideb. Felly angen i ni stopio. Gallwn gyflawni hyd brosiect o 9 uned amser, gan ostwng D gan 4 a B gan 1, am gost o £45.

Darllen Pellach

- "Probability, Markov Chains, Queues, and Simulation: The Mathematical Basis of Performance Modeling". **William J. Stewart**. `ISBN: 978-0-691-14062-9` (2009)
- "Simulation: The Practice of Model Development and Use". **Stewart Robinson**. `ISBN: 978-1-137-32802-1` (2014)
- "Operations Research: Applications and Algorithms". **Wayne L. Winston & Jeffrey B. Goldberg**. `ISBN: 978-0-534-38058-8`
- "Applied Mathematics with Open-Source Software: Operational Research Problems with Python and R". **Vincent Knight & Geraint Palmer**. `ISBN: 978-0-367-33998-2` (2022)
- "Ciw's Documentation": `https://ciw.readthedocs.io/`

Termiadur

Ar gyfer termiadur llawn: `https://termiadur.github.io/`.

Cymraeg	Saesneg
ailadroddol	recurrent
ailgynhyrchiaday	reproducible
algorithm carreg-lam	stepping-stone algorithm
amcangyfrif	estimate
amser chwalu	crash time
amser cynhesu	warm-up time
amser oedi	holding time
amserau rhwng-dyfodiad	inter-arrival times
amsugnol	absorbing
annegatif	non-negative
annichonadwy	infeasible
anunigryw	non-unique
arddwysedd traffig	traffic intensity
arosodiad	superposition
balcio	baulking
blaengrib	forward pass
byrhoedlog	transient
cadwyn Markov	Markov chain
cadwyn Markov amser-arwahanol	discrete-time Markov chain
cadwyn Markov amser-di-dor	continuous-time Markov chain
cadwyn Markov mewnblanedig	embedded Markov chain
chwalu	crashing
ciw	queue
ciwio	queueing
colofn gwaith	work column
colyn	pivot
colynnu	to pivot
cyfathrebu	communicating

Cymraeg	Saesneg
cyfernod	coefficient
cyflwr-sefydlog	steady-state
cyfnodedd	periodicity
cyfnodol	periodic
cyfwng hyder	confidence interval
cyfyngiad	constraint
cyrchfan	destination
cyrraeddadwy	accessible
cyrraeddadwyedd	reachability
dadansoddiad hydeimledd	sensitivity analysis
datrysiad gorau posib	optimal solution
deddf niferoedd mawr	law of large numbers
diagram gweithrediadau ar nodau	activities on nodes diagram
diagram gweithrediadau ar saethau	activities on arrows diagram
di-gof	memoryless
digofiant	memorylessness
digyfnod	aperiodic
digylchlwybr	acyclic
dilysu	validation
dirywiad	degeneration
dirywiedig	degenerate
dosbarth anostyngadwy	irreducible class
dull cornel Gogledd-Orllewin	North-West corner method
dull cost leiaf	minimum cost method
dull dosraniad gwrthdro	inverse distribution method
dull dwy-gam	two-phase approach
dull graffigol	graphical method
dyfodiad	arrival
efelychiad	simulation
efelychiad digwyddiadau arwahanol	discrete event simulation
Egwyddor Optimeiddedd Bellman	Bellman's Optimality Principle
fflôt	float
fflôt a rennir	shared float
ffug-haprif	pseudo-random number
ffug newidyn	dummy variable
ffurf safonol	standard form
ffwythiant amcan	objective function
ffwythiant dwysedd tebygolrwydd	probability density function
ffwythiant dosraniad cronnus	cumulative distribution function
ffwythiant màs tebygolrwydd	probability mass function
gofod cyflwr	state space

Cymraeg	Saesneg
gofod datrysiadau	solution space
graff cyfeiriedig digylchlwybr	directed acyclic graph
gweithrediad rhes	row operation
gwireddu	verification
haparbrawf	random experiment
hapfector	random vector
hapnewidyn	random variable
hedyn	seed
hyperciwb	hypercube
iteru gwerthoedd	value iteration
llaciad	relaxation
lleiafswm	minimum
lleiafsymio	minimise
llinoledd	linearity
llwybr critigol	critical path
llwybr lleiaf	shortest path
Markovaidd	Markovian
matrics cyfraddau trosi	transition rate matrix
matrics generadu gorfychanion	infinitesimal generator matrix
matrics tebygolrwyddau trosi	transition probability matrix
minimacs	minimax
model cysyniadol	conceptual model
modelu	modelling
newidyn ansylfaenol	non-basic variable
newidyn artiffisial	artificial variable
newidyn llac	slack variable
newidyn penderfynu	decision variable
newidyn sylfaenol	basic variable
ôl-grib	backward pass
olrhain	tracing
optimeiddio	optimisation
penderfyniaethol	deterministic
pris cysgod	shadow price
problem cludiant	transportation problem
proses stocastig	stochastic process
prysurdeb gweinyddwyr	server utilisation
pwysolyn	weight
rhaglennu deinameg	dynamic programming
rhaglennu llinol	linear programming
rhagofyniad	pre-requisite
rhanbarth dichonadwy	feasible region

Cymraeg	Saesneg
rhannu prosesyddion	processor sharing
rheoli prosiectau	project management
rhes amcan	objective row
rhifadwy	countable
siart Gantt	Gantt chart
swp-dyfodiadau	batch arrivals
tablo Simplecs	Simplex tableau
tarddle	source
teneuo	thinning
terfynus	terminating
trefn y wasanaeth	service discipline
trosaidd	transitive
uchafswm	maximum
uchafsymio	maximise
ymchwil weithrediadol	operational research
yn amodol ar	subject to