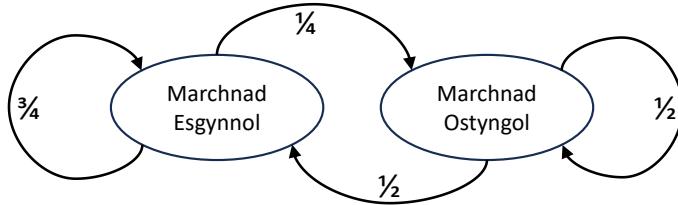


Datrysiadau i Daflen Problemau 2

1. Fe ellir disgrifio economi gwlad fel naill ai marchnad esgynol (lle mae prisiau stoc yn cynyddu ac mae pethau'n mynd yn dda), neu fel marchnad ostyngol (lle mae prisiau stoc yn cwympo a nad yw petha'n mynd yn dda). Caiff yr economi ei categoriiddio pob chwarter. Fe ellir disgrifio'r proses fel cadwyn Markov amser-arwahanol, gyda thebygolrwyddau o bod ym mhob cyflwr yn y chwarter nesaf:



Os yw'r wlad mewn marchnad esgynnol, beth yw'r tebygolrwydd o bod naill ai mewn marchnad esgynnol neu ostyngol mewn tri chwartewr o nawr?

Datrysiad 1 Mae gennym: $\pi_0 = (1, 0)$, ac:

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ac hoffwn canfod $\pi_3 = \pi_0 P^3$, felly:

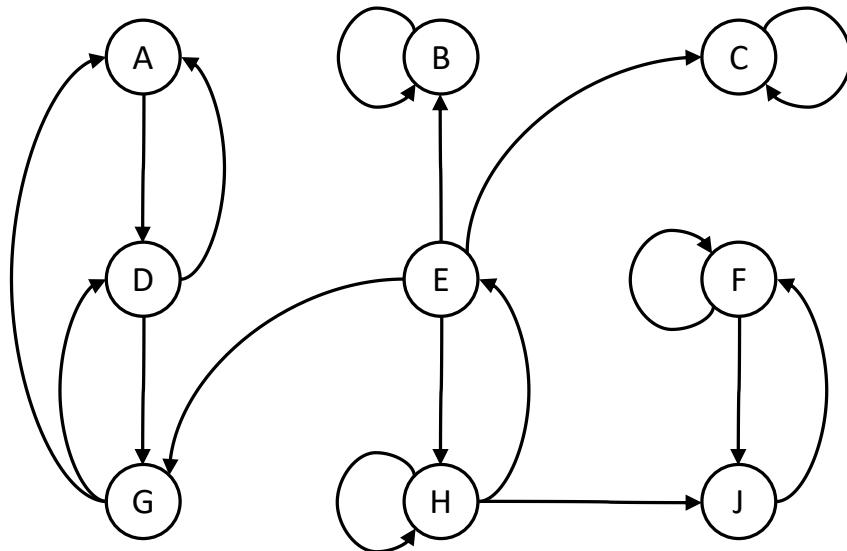
$$\begin{aligned} P^3 &= \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9/16 + 1/8 & 3/16 + 1/8 \\ 3/8 + 1/4 & 1/8 + 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11/16 & 5/16 \\ 5/8 & 3/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 33/64 + 5/32 & 11/64 + 5/32 \\ 15/32 + 3/16 & 5/32 + 3/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43/64 & 21/64 \\ 21/32 & 11/32 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ac felly:

$$\pi_3 = (1, 0) \begin{pmatrix} 43/64 & 21/64 \\ 21/32 & 11/32 \end{pmatrix} = (43/64, 21/64)$$

2. Ystyriwch y cadwyn Markov amser-arwahanol isod gyda naw cyflwr. Mae saeth yn dynodi fod y tebygolrwydd o drosi o un cyflwr i'r llall yn fwy na sero.

- (a) Canfyddwch holl dosbarthau anostyngadwy a nodwch os ydynt yn gaeedig neu peidio.
- (b) Dosbarthwch pob cyflwr fel naill ai yn Ailadroddol, Byrhoedlog, neu'n Amsugnol.



Datrysiaid 2 Y dosbarthau anostyngadwy yw::

- $\{A, D, G\}$ sydd yn gaeedig,
- $\{B\}$ sydd yn gaeedig,
- $\{C\}$ sydd yn gaeedig,
- $\{E, H\}$ nad yw'n gaeedig,
- $\{F, J\}$ sydd yn gaeedig.

Felly:

- y cyflyrau Ailadroddol yw: A, D, G, F, J ;
- y cyflyrau Byrhoedlog yw: E, H ;
- y cyflyrau Amsugnol yw: B, C .

3. Mae doctor iechyd meddwl yn ceisio deall cyflwr meddyliol claf. Mae'n gofyn i'r claf i recordio yn ddyddiol os ydynt yn teimlo'n Llonydd, Pryderus, neu'n Godbryderus. Wrth dadansoddi'r data mae'r doctor yn gweld:

- Ar ddiwrnod llonydd, $\frac{1}{3}$ o'r amser byddant yn aros yn llonydd yfory, a $\frac{2}{3}$ o'r amser byddant yn bryderus yfory;
- Ar ddiwrnod pryderus, $\frac{1}{4}$ o'r amser byddant yn lonydd yfory, $\frac{1}{2}$ yr amser byddant yn aros yn bryderus yfory, tra $\frac{1}{4}$ o'r amser byddant yn gorbryderus yfory;

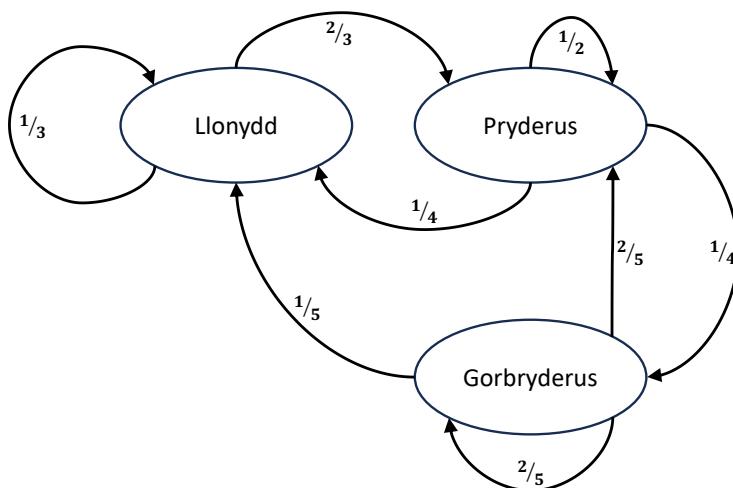
- Ar ddiwrnod gorbryderus, ond $\frac{1}{5}$ o'r amser byddant yn llonydd yfory, $\frac{2}{5}$ o'r amser byddant yn bryderus, a $\frac{2}{5}$ o'r amser byddant yn gorbryderus yfory.

- Tynnwch lun y cadwyn Markov amser-arwahanol o gyflwr meddyliol y claf.
- Canfyddwch y tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog.
- Mae'r doctor yn dyfeisio cynllun meddyginaeth: ar ddiwrnodau llondydd ni fydd y claf yn cymryd moddion; ar ddiwrnodau pryderus dylen nhw cymryd tabled A, yn costio $1c$ y tabled; ac ar ddiwrnodau gorbryderus dylen nhw cymryd tablen B, yn costio $23c$ y tabled. Beth yw'r cost blynnyddol disgwyliedig ar gyfer y cynllun meddyginaeth hon?

Datrysiaid 3 Gan drefni'r cyflyrau 1-Llonydd, 2-Pryderus, ac yna 3-Gorbryderus, cawn:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

(a) Delweddu'r cadwyn Markov:



(b) I ganfod y cyflwr sefydlog datrysian $\underline{\pi} = \underline{\pi}P$ ac $\sum \underline{\pi} = 1$:

$$\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{5}\pi_3 \quad (1)$$

$$\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{2}{5}\pi_3 \quad (2)$$

$$\pi_3 = \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{2}{5}\pi_3 \quad (3)$$

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \quad (4)$$

Datrysiaid 3 (continuing from p. 3) Gallwn datrys ar gyfer π_3 yn Hafaliad 3:

$$\begin{aligned}\pi_3 &= \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{2}{5}\pi_3 \\ \frac{3}{5}\pi_3 &= \frac{1}{4}\pi_2 \\ \pi_3 &= \frac{5}{12}\pi_2\end{aligned}$$

A datrys ar gyfer π_2 yn Hafaliad 2:

$$\begin{aligned}\pi_2 &= \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{2}{5}\pi_3 \\ \pi_2 &= \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{2}{5}\left(\frac{5}{12}\pi_2\right) \\ \pi_2 &= \frac{2}{3}\pi_1 + \pi_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) \\ \frac{1}{3}\pi_2 &= \frac{2}{3}\pi_1 \\ \pi_2 &= 2\pi_1\end{aligned}$$

Ac yn olaf datrys ar gyfer π_1 yn Hafaliad 4:

$$\begin{aligned}\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \\ \pi_1 \left(1 + 2 + \left(2 \times \frac{5}{12}\right)\right) &= 1 \\ \frac{23}{6}\pi_1 &= 1 \\ \pi_1 &= \frac{6}{23}\end{aligned}$$

Yn awgrymu fod $\underline{\pi} = (6/23, 12/23, 5/23)$.

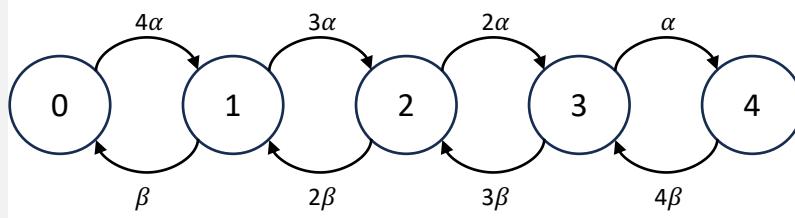
- (c) Bydd yn costio 1c y tabled pob diwrnod ei bod yn cyflwr 2, a 23c pob tabled ei bod yn cyflwr 3. Hynny yw, y cost blynnyddol C yw:

$$\begin{aligned}C &= 365(1\pi_2 + 23\pi_3)c \\ &= 365(12/23 + 23^5/23)c \\ &= 365(127/23)c \\ &= 2015.43c \\ &= £20.15\end{aligned}$$

4. Mae gan siop argraffu pedwar argraffydd. Mae pob argraffydd yn torri i lawr ar gyfradd β . Unwaith mae un yn torri lawr, caiff ei anfon i'w trwsio. Y cyfradd caiff argraffyddion eu trwsio yw α .

Gan adael i i bod y cyflwr bod yna i argraffydd yn gweithio, tynnwch lun y cadwyn Markov ar gyfer y system, a chanfyddwch y tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog ar gyfer α a β cyffredinol, ac ar gyfer yr achos pan fod $\alpha = \beta$.

Datrysiaid 4 Pan fod yna i argraffydd yn gweithio, mae yna $4 - i$ argraffydd yn cael ei drwsio, felly:



gyda:

$$Q = \begin{pmatrix} -4\alpha & 4\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & -(\beta + 3\alpha) & 3\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta & -(2\beta + 2\alpha) & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 3\beta & -(3\beta + \alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 4\beta & -4\beta \end{pmatrix}$$

I ganfod y tebygolrwyddau cyflwr-sefydlog, datryswn $Q\pi = 0$ a $\sum \pi = 1$:

$$\begin{aligned} 4\alpha\pi_0 &= \beta\pi_1 \\ (\beta + 3\alpha)\pi_1 &= 4\alpha\pi_0 + 2\beta\pi_2 \\ (2\beta + 2\alpha)\pi_2 &= 3\alpha\pi_1 + 3\beta\pi_3 \\ (3\beta + \alpha)\pi_3 &= 2\alpha\pi_2 + 4\beta\pi_4 \\ 4\beta\pi_4 &= \alpha\pi_3 \end{aligned}$$

Mae rhoi popeth yn nhermau π_0 yn rhoi, ar gyfer π_1 :

$$\pi_1 = \frac{4\alpha}{\beta}\pi_0$$

Ar gyfer π_2 :

$$\begin{aligned} (\beta + 3\alpha)\pi_1 &= 4\alpha\pi_0 + 2\beta\pi_2 \\ (\beta + 3\alpha)\left(\frac{4\alpha}{\beta}\right)\pi_0 &= 4\alpha\pi_0 + 2\beta\pi_2 \\ \frac{12\alpha^2}{\beta}\pi_0 &= 2\beta\pi_2 \\ \pi_2 &= \frac{6\alpha^2}{\beta^2}\pi_0 \end{aligned}$$

Datrysiaid 4 (continuing from p. 5) Ar gyfer π_3 :

$$\begin{aligned} (2\beta + 2\alpha)\pi_2 &= 3\alpha\pi_1 + 3\beta\pi_3 \\ (2\beta + 2\alpha) \left(\frac{6\alpha^2}{\beta^2} \right) \pi_0 &= 3\alpha \left(\frac{4\alpha}{\beta} \right) \pi_0 + 3\beta\pi_3 \\ \frac{12\alpha^3}{\beta^2} \pi_0 &= 3\beta\pi_3 \\ \pi_3 &= \frac{4\alpha^3}{\beta^3} \pi_0 \end{aligned}$$

Ac yn olaf ar gyfer π_4 :

$$\begin{aligned} 4\beta\pi_4 &= \alpha\pi_3 \\ \pi_4 &= \frac{\alpha}{4\beta}\pi_3 \\ \pi_4 &= \frac{\alpha^4}{\beta^4}\pi_0 \end{aligned}$$

A chawn gwerth π_0 gyda:

$$\begin{aligned} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 &= 1 \\ \pi_0 \left(1 + \frac{4\alpha}{\beta} + \frac{6\alpha^2}{\beta^2} + \frac{4\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\alpha^4}{\beta^4} \right) &= 1 \\ \pi_0 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{4\alpha}{\beta} + \frac{6\alpha^2}{\beta^2} + \frac{4\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\alpha^4}{\beta^4} \right)} \end{aligned}$$

Nawr pan mae $\alpha = \beta$:

$$\underline{\pi} = (1/16, 1/4, 3/8, 1/4, 1/16)$$