MAT0122 ALGEBRA LINEAR I

FOLHA DE SOLUÇÃO

Nome: Gabriel Geraldino de Souza **Número USP: 12543885**

Solução

(1) — mostre que a família de polinômios x^3, $(1-x)x^2$, $(1-x)^2x$ e $(1-x)^3$ é uma base de P_4 (essa é a Base de Bernstein, usada para curvas de Bezier.)

Seja $P_4 = a + bx + cx^2 + dx^3$. Pela definição de base [Álgebra Linear - Um Livro Colaborativo, 2020], há de se mostrar que $B = \{x^3, (1-x)x^2, (1-x)^2x, (1-x)^3\}$ gera P_4 e que B é linearmente independente.

$a + bx + cx^2 + dx^3 = i(x^3) + j(x^2 - x^3) + k(x - 2x^2 + x^3) + l(1 - 3x + 3x^2 - x^3)$
$a + bx + cx^2 + dx^3 = (l)(1) + (k - 3l)(x) + (j - 2k + 3l)(x^2) + (i - j + k - l)(x^3)$
Assim, é trivial observar as relações entre as bases:
$a = l$, $b = k - 3l$, $c = j - 2k + 3l$, $d = i - j + k - l$
Analogamente, pode-se chegar a:
$l = a$, $k = b + 3a$, $j = c + 2b + 3a$, $i = a + b + c + d$
Assim, fica claro que B gera P_4.

Uma forma fácil de observar se os vetores são L.I. é montar uma matriz com os componentes de B na base canônica e ver se o determinante é não-nulo:
$(1,0,0,0)_B = x^3 = (0,0,0,1)_C$
$(0,1,0,0)_B = (1-x)x^2 = x^2 - x^3 = (0,0,1,-1)_C$
$(0,0,1,0)_B = (1-x)^2x = x - 2x^2 + x^3 = (0,1,-2,1)_C$
$(0,0,0,1)_B = (1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = (1,-3,3,-1)_C$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$
Conclui-se, pois, que $B = \{x^3, (1-x)x^2, (1-x)^2x, (1-x)^3\}$ é uma base de P_4.

(2) — a base C mais popular para P_4 é $\{1, x, x^2, x^3\}$ (chamada Base Canônica). Encontre a matriz de mudança de base da Base Canônica para a base de Bernstein e a matriz de mudança de base da Base de Bernstein para a base canônica.

Seja $C = \{1, x, x^2, x^3\}$ a Base Canônica e $B = \{x^3, (1-x)x^2, (1-x)^2x, (1-x)^3\} = \{x^3, x^2 - x^3, x - 2x^2 + x^3, 1 - 3x + 3x^2 - x^3\}$ a Base de Bernstein.

Para a matriz de mudança da Base Canônica para Base de Bernstein:
$(1,0,0,0)_C = 1 = x^3 + 3((1-x)x^2) + 3((1-x)^2x) + (1-x)^3 = (1,3,3,1)_B$
$(0,1,0,0)_C = x = x^3 + 2((1-x)x^2) + (1-x)^2x = (1,2,1,0)_B$
$(0,0,1,0)_C = x^2 = x^3 + (1-x)x^2 = (1,1,0,0)_B$
$(0,0,0,1)_C = x^3 = (1,0,0,0)_B$
Assim, a matriz de mudança da Base Canônica para Base de Bernstein pode ser descrita como:

$$M_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para a matriz de mudança da Base Bernstein para Base de Canônica pode-se usar o valor dos componentes dos vetores calculados no item anterior e a matriz pode ser descrita como:

$$M_{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3 — mostre que a transformação T que leva o polinômio p em sua integral $(Tp)(x) = \int_0^x p(s)ds$ é uma transformação linear de P_n para P_{n+1}.

A integral de um polinômio faz seu grau aumentar em 1, o que leva a transformação mudar o espaço vetorial de P_n para P_{n+1}. Por definição [Álgebra Linear - Um Livro Colaborativo, 2020], essa transformação linear será válida se satisfazer a seguinte condição:

$T(\alpha a + b)(x) = \alpha T(a)(x) + T(b)(x)$
$T(\alpha a + b)(x) = \int_0^x (\alpha a(s) + b(s))ds = \alpha \int_0^x a(s)ds + \int_0^x b(s)ds = \alpha T(a)(x) + T(b)(x)$

A condição é válida por propriedades elementares do Integral de Riemman. Dessa forma, pode-se ver que essa é uma transformação linear de P_n para P_{n+1}.

4 — mostre que a transformação T que leva o polinômio p em sua derivada $(Tp)(x) = p'(x)$ é uma transformação linear de P_n para P_{n-1}.

Pode-se mostrar isso de forma similar ao item anterior. A derivada de um polinômio faz seu grau diminuir em 1. Assim, se a linearidade for válida, essa será uma transformação linear de P_n para P_{n-1}.

É fácil visualizar por propriedades elementares da derivada que essa propriedade será válida:
$T(\alpha a + b)(x) = \alpha T(a)(x) + T(b)(x)$
$T(a + b)(x) = (\alpha a(x) + b(x))' = \alpha a'(x) + b'(x) = \alpha T(a)(x) + T(b)(x)$

Dessa forma, pode-se ver que essa é uma transformação linear de P_n para P_{n-1}.

5 — mostre que a translação, que transforma o polinômio p no polinômio Tp tal que

$(Tp)(x) = p(x+1)$ **é uma transformação linear de P_4 para P_4 e calcule seus autovalores e autovetores.**

É fácil observar que a operação não altera o grau do polinômio. Sendo assim, para verificar se essa é uma transformação linear de P_4 para P_4, basta ver se a linearidade vale:
$T(\alpha a + b)(x) = T(a)(x) + T(b)(x)$
$T(\alpha a + b)(x) = \alpha a(x+1) + b(x+1) = \alpha T(a)(x) + T(b)(x)$

Como os espaços vetoriais são iguais, a transformação é um operador linear e a seguinte matriz M_T representa o resultado da transformação sobre cada vetor na base canônica:
$(Tp)(1) = 1 = (1,0,0,0)_C$
$(Tp)(x) = x+1 = (1,1,0,0)_C$
$(Tp)(x^2) = (x+1)^2 = 1 + 2x + x^2 = (1,2,1,0)_C$
$(Tp)(x^3) = (x+1)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1,3,3,1)_C$

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para o determinar os autovalores de M_T, basta resolver $det(M_T - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$
$(\lambda - 1)(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)^3 = (\lambda - 1)^4 = 0$
Pode-se concluir que o único autovalor possível para M_T é 1.

Como o único autovalor possível é $\lambda = 1$, o autovetor X pode ser calculado resolvendo $(M_T - I)X = 0$:

$$M_T - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo $X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

$$(M_T - I)(X) = \begin{bmatrix} b+c+d \\ 2c+3d \\ 3d \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema tem solução com $a \in \mathbb{R}$ e $b = c = d = 0$. Dessa forma, qualquer vetor $(a,0,0,0)$ é um autovetor para essa matriz com o autovalor 1.

6 — implemente um algoritmo que encontra o polinômio $p(x)$ de grau n que melhor se ajusta a um conjunto de k pontos $\{(x_i, y_i), i = 1, ..., k\}$ segundo o critério de quadrados mínimos, ou seja, o polinômio de grau n para o qual a soma $\sum_{i=1}^{k}(p(x_i) - y_i)^2$ é a menor possível.

Foi implementado um algoritmo baseado no artigo de Andrew Chamberlain presente neste *link*.
O algoritmo está em `main.py` e a ideia principal está centrada na função `polynomial_approximation`.

Bibliografia

Álgebra Linear - Um Livro Colaborativo, 2020. Livro colaborativo organizado por docentes da UFRGS. Disponível em: `https://www.ufrgs.br/reamat/AlgebraLinear/livro/livro.pdf`. Acesso em 07/01/2022.