UNISAT **Année 2019-2020**
L3 Maths

TD 2 de Programmation linéaire

Exercice 1

Résoudre les programmes ci-dessous par la méthode des deux phases de l'algorithme du simplexe.

a) $\min\ Z = 6x_1 + x_2 + 6x_3$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -2 \\ 2x_1 - x_3 \geq 3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

b) $\min\ Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ 2x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

c) $\max\ Z = 2x_1 + 3x_2$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 \\ 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

d) $\min\ Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 35$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ 2x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Résoudre par la méthode des deux phases du simplexe le programme linéaire ci-dessous

$$\begin{cases} \max Z = 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 3

Résoudre sans aucune transformation préalable, par la méthode des deux phases du simplexe, le programme linéaire ci-dessous.

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 4

On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{cases} \max Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 6x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que $I = \{x_1, x_2, x_3\}$ est une base réalisable de ce programme. Est-elle optimale ? Si oui donner la solution de base réalisable optimale associée. Sinon utiliser la méthode des tableaux du simplexe pour déterminer une solution optimale du programme linéaire (P) en partant de cette base.

Exercice 5
On considère le problème suivant

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 8 + \delta \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_4 \leq 12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

La solution associée à la base $\{x_2, x_3, x_7\}$ est optimale pour $\delta = 0$ (x_7 est la variable d'écart de la 3ème contrainte ; déterminer la solution correspondante. Pour quelles valeurs de δ la base reste-t-elle optimale ?

Exercice 6
Résoudre par la méthode du grand M les programmes linéaires suivants :

a) $\min\ Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

b) $\max\ Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

c) $\min\ Z = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

d) $\max\ Z = -5x_1 - 21x_3$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 7
Déterminer le programme dual de chacun des programmes linéaires ci-dessous :

1°) $\max\ Z = 3x_1 + 4x_2 + 10x_3$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 \leq 3 \\ x_2 + x_3 \leq 3 \\ -2 \leq x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2°) $\min\ Z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 8
Une entreprise de mécanique fabrique, dans son usine, 3 types de pièce a, b, c dans 3 ateliers : usinage, montage, finition. Le tableau ci-dessous résume.

	nombre d'heures machines nécessaires pour fabriquer une pièce			Prix de vente de la pièce
	usinage	montage	finition	
pièce a	0.10	0.15	0.15	35.50
pièce b	0.20	0.15	0.25	51.50
pièce c	0.40	0.45	0.15	92.50
coût variable de l'heure	60	80	50	
Capacité de l'atelier (en heures/mois)	2000	2400	2400	

1) Déterminer le programme de fabrication permettant à l'usine d'obtenir un bénéfice maximum (on suppose que la totalité des charges variables sont reparties par l'intermédiaire des trois centres d'analyse).

2) Déterminer le dual du programme linéaire obtenu dans la question 1).

Exercice 9

En utilisant les théorèmes des écarts complémentaires vérifier l'optimalité des solutions pour chacun des programmes linéaires ci-dessous :

$$\min Z = 8x_1 + 7x_2 + 3x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (P_1) \qquad x^* = (\tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{3}, 0) \text{ et } x^* = (2,\ \tfrac{1}{3}, 1)$$

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (P_2) \qquad x^* = (0,\ \tfrac{9}{2}) \text{ et } x^* = (\tfrac{1}{10},\ \tfrac{118}{40})$$

$$\min Z = 9x_1 + \tfrac{21}{2}x_2 + 4x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (P_3) \qquad \overline{x} = (\tfrac{5}{12},\ \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{4})$$

Exercice 10

On considère le programme linéaire ci-dessous :

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution $\widetilde{x} = (2,\ 1)$ est-elle réalisable, de base, optimale ?

Que pouvez-vous dire quant à l'ensemble des solutions optimales du dual ? Déterminez cet ensemble.

Exercice 11

Résoudre par la méthode duale simplexe les programmes linéaires suivants :

1°) $\min\ Z = 6x_1 + x_2 + 6x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -2 \\ 2x_1 - x_3 \geq 3 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2°) $\min\ Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ 2x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

3°) $\max\ Z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 \\ 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4°) $\min\ Z = -4x_1 + 5x_2 - 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ 2x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

5°) $\min\ Z = 6x_1 - x_2 - 6x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -2 \\ 2x_1 - x_3 \geq 3 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6°) $\min\ Z = -4x_1 + 5x_2 - 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ 2x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 12

La société Fourivoire fabrique deux types de fours F1 et F2 à partir de trois facteurs de production :

M (heures machines) ; O (heures ouvriers) ; T(heures techniciens).

Les combinaisons de facteurs de production pour chaque type de fours, le prix de vente de chaque four ; V,

le coût unitaire en francs : C de chaque facteur de production et les capacités hebdomadaires : Kde chaque atelier sont donnés dans le tableau suivant :

	M	O	T	V
F_1	5	7	4	2010
F_2	3	8	6	2400
C	20	30	50	
K	270	800	360	

1) On se propose de déterminer combien de fours de chaque type la societé Fourivoire doit fabriquer chaque semaine pour maximiser sa marge sur coût de production. Donner le programme linéaire (P) correspondant.

2) Déterminer le dual du programme linéaire obtenu dans la question 1). Résoudre (D) et en déduire une solution optimale de (P). Donner une interprétation économique de ce programme dual.