

M1 IM/MPA : TP Optimisation et Éléments Finis

Feuille 2 : Algorithmes de gradient et moindres carrés

1 Méthodes de gradients

Ex 1 Méthode de gradient à pas constant

Pour chaque test, on pourra tracer l'évolution des itérées au fur et à mesure des itérations.

1) Programmer la méthode du gradient à pas constant.

2) Le tester sur la fonction $x \mapsto x^2 + \sin(x)$ définie sur \mathbb{R} .

3) Le tester également sur les fonctions $\mathcal{J} : (x, y) \rightarrow (x - 1)^2 + 10(y - 1)^2$ et $\mathcal{J} : (x, y) \mapsto (x - 1)^2 + 10(x^2 - y)^2$ définies sur \mathbb{R}^2 .

4) Le tester sur le problème de minimisation suivant : *Trouver le minimum de la fonction $\mathcal{J} : x \rightarrow \sum_{i=1}^N \|x - A_i\|$ définie sur \mathbb{R}^2 , où les A_i , $1 \leq i \leq N$ sont des points donnés de \mathbb{R}^2 .*

On pourra par exemple tester avec $N = 4$.

5) Tester l'algorithme sur la fonction J de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie par l'expression suivante : Pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$J(x) = \sum_{i=1}^n ix_i^2.$$

Ex 2 Cas d'une fonctionnelle quadratique

1. Programmer la méthode de gradient à pas constant et la méthode de gradient à pas optimal pour le problème de minimisation de la fonctionnelle $\mathcal{J} : x \rightarrow \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ à partir d'un vecteur initial x_0 avec A une matrice symétrique définie positive. Pour l'algorithme du gradient à optimal, on utilisera une expression explicite du pas optimal.

Tester votre programme. Que dire de la vitesse de convergence ?

2. Programmer et tester l'algorithme de gradient conjugué.

3. Comparer les deux approches. Qu'en pensez-vous ?

2 Problèmes aux moindres carrés.

Ex 3 Quelques exemples de calcul

1) On se donne n points de \mathbb{R}^2 , $(x_i, y_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Construire un programme qui donne la droite d'équation $y = ax + b$ qui minimise $\sum_{i=1}^n |y_i - (ax_i + b)|^2$, en utilisant la décomposition QR (on utilisera une fonction toute faite pour la décomposition QR). Prendre ensuite un exemple et faire une représentation graphique.

2) Recommencer avec une fonction quadratique à la place d'une fonction affine.