Feuille du Chapitre 2 : Modèle à une période

EXERCICE 1. Reprendre le modèle à $|\mathcal{S}| = |\mathcal{A}| = 2$ du chapitre 1 et expliciter la/les stratégies optimales pour une fonction $g : \{0,1\} \to \mathbb{R}$.

On rappelle que dans ce cas

$$P(0,0,1) = p = 1-P(0,0,0), \quad P(0,1,1) = q = 1-P(0,1,0), \quad P(1,0,1) = 1 = 1-P(1,0,0), \quad P(1,1,0) = 1 = 1-P(1,1,1).$$

Soient

$$r : \underbrace{\{0,1\}}_{\text{État}} \times \underbrace{\{0,1\}}_{\text{Action}} \to \mathbb{R}$$

et

$$g : \underbrace{\{0,1\}}_{\text{État}} \to \mathbb{R}.$$

Soit X_0 une variable aléatoire sur $\{0,1\}$. On note $\mathbb{P}(X_0 = 1) = p_0 = 1 - \mathbb{P}(X_0 = 0)$, X_0 représente l'état initial du système. On rappelle qu'on cherche

$$\max_{\alpha \in \{0,1\}} \mathbb{E}[r(X_0, \alpha) + g(X_1)].$$

D'après le cours, une façon de trouver la (les) stratégies optimale est la suivante :

- Pour $i \in \{0,1\}$ le maximum $a(i)$ de la fonction

$$u_i : a \in \{0,1\} \to r(i,a) + \sum_{j=0}^{1} P(i,a,j)g(j)$$

- On note alors

$$\alpha_0 = a(X_0)$$

  et α_0 est la stratégie optimale.

Notons que si $i = 1$, il faut alors maximiser

$$u_1(0) = r(1,0) + g(1), \quad u_1(1) = r(1,1) + g(0).$$

$$u_0(0) = r(0,0) + pg(1) + (1-p)g(0), \quad u_0(1) = r(0,1) + qg(1) + (1-q)g(0).$$

Notons que si on se place dans le cadre de "serveur informatique" du cours, on a

$$g(1) < g(0), \quad q < p, \quad r(1,0) > r(1,1) \quad \text{et} \quad r(0,0) > r(0,1).$$

En effet, ce qui rapporte le plus est d'être dans l'état non infecté. Par ailleurs, ne rien faire rapporte toujours plus que de faire quelque chose.

Ainsi

$$u_1(1) - u_1(0) = \underbrace{(r(1,1) - r(1,0))}_{<0} + \underbrace{g(0) - g(1)}_{>0}.$$

Les deux effets on tendance à se compenser.

On note $u_1^* = \min(r(1,0) + g(1), r(1,1) + g(0))$ et

$$a(1) = \begin{cases} 0 & \text{if } u_1^* = r(1,0) + g(1) \\ 1 & \text{if } u_1^* = r(1,1) + g(0) \end{cases}$$

De même remarquons que

$$u_0(1) - u_0(0) = \underbrace{(r(0,1) - r(0,0))}_{<0} + \underbrace{(p-q)(g(0) - g(1))}_{>0}$$

On constate qu'ici aussi les deux effets ont tendance à se compenser. On note

$$u_0^* = \min(r(0,0) + pg(1) + (1-p)g(0), r(0,1) + qg(1) + (1-q)g(0))$$

et

$$a(0) = \begin{cases} 0 & \text{if } u_0^* = r(0,0) + pg(1) + (1-p)g(0) \\ 1 & \text{if } u_0^* = r(0,1) + qg(1) + (1-q)g(0)) \end{cases}$$

Alors

$$\alpha_0 = a(X_0),$$

c'est à dire que

$$\mathbb{P}(\alpha_0 = a(1)) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = p_0 = 1 - \mathbb{P}(\alpha_0 = a(1)).$$

Remarque On peut remarque que si $a(0) = a(1) = 1$ (ou $a(0) = a(1) = 1$), ce qui dépend des fonctions de récompense, alors la stratégie n'est plus aléatoire.

Exercice 2 (Réplicabilité dans le modèle de Cox). On appelle Modèle de Cox (ou modèle Binomial) le modèle de marché dans lequel

$$\xi : \Omega \to \{u, d\}$$

avec

$$\mathbb{P}(\xi = u) \in]0, 1[$$

(On rappelle qu'il y a deux actifs : l'actif sans risque de prix S^0 et l'actif risqué de prix S, que ξ donne les variations du prix de l'actif risqué sur une période, c'est à dire que $S_1 = S_0\xi$ et que $r > 0$ est le taux de rénumération de l'actif sans risque, c'est à dire que $S_1^0 = (1+r)S_0^0$. Finalement, pour simplifier on note $S_0^0 = 1$.)

On dit que le modèle est réplicable, si, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, il existe une richesse initiale W_0 et une stratégie $\phi \in \mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{P}(W_1^\phi = f(\xi)) = 1.$$

Montrer que sous l'hypothèse

$$d < 1 + r < u$$

le modèle est réplicable.

Supposons que ϕ existe. Alors on a

$$W_1^\phi = \phi S_1 + \frac{W_0 - \phi S_0}{S_0^0} S_1^0 = \phi\xi S_0 + (1+r)(W_0 - \phi S_0).$$

Ainsi, on cherche à résoudre

$$\phi\xi S_0 + (1+r)(W_0 - \phi S_0) = f(\xi),$$

ou encore

$$\phi = \frac{f(\xi) - (1+r)W_0}{S_0(\xi - (1+r))}.$$

Attention, cette formule n'est pas bonne. En effet, on rappelle dans quel ordre se fond les opérations :

(1) Choix de ϕ (allocation de la richesse)
(2) Tirage de ξ (Évolution des prix)

Ainsi pour que la stratégie soit construite correctement (soit $\mathcal{F}_0$ mesurable), il faut que dans la formule précédente ne dépende pas du tirage de ξ. Ce qui veux dire que

$$\frac{f(u) - (1+r)W_0}{S_0(u - (1+r))} = \frac{f(d) - (1+r)W_0}{S_0(d - (1+r))},$$

ou encore

$$W_0 = \frac{1}{u-d}\left(\frac{u - (1+r)}{1+r} f(d) + \frac{(1+r) - d}{(1+r)} f(u)\right).$$

Sous les hypothèses précédentes, en comme f est positive on a $W_0 \geq 0$.

Faisons le chemin inverse. On suppose que

$$W_0 = \frac{1}{u-d}\left(\frac{u - (1+r)}{1+r} f(d) + \frac{(1+r) - d}{(1+r)} f(u)\right).$$

On prend

$$\phi = \frac{f(u) - f(d)}{S_0(u - d)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} W_1^\phi =& \frac{f(u) - f(d)}{u-d}\xi + (1+r)\left(\frac{1}{u-d}\left(\frac{u-(1+r)}{1+r} f(d) + \frac{(1+r)-d}{(1+r)} f(u)\right) - \frac{f(u)-f(d)}{(u-d)}\right) \\ =& \frac{u-\xi}{u-d} f(d) + \frac{\xi - d}{u-d} f(u). \end{aligned}$$

Quand $\xi = u$ l'expression précédente donne $W_1^\phi = f(u) = f(\xi)$, de même si $\xi = d$ l'expression précédente donne $W_1^\phi = f(d) = f(\xi)$. Nous avons bien construit une stratégie qui réplique f.

Si $1 + r < d$, on remarque que

$$W_1^\phi > (d - (1+r))\phi S_0 + (1+r)W_0.$$

Comme on ne s'est pas fixé de limite pour ϕ, on prend $\phi = +\infty$ (et ce même si $W_0 = 0$, et on a $W_1^\phi = +\infty$ (On a emprunté un maximum d'actif non risqué, qu'on a investi à fond dans les actifs risqués, et nous avons fait un bénéfice). Ainsi, il y a un *arbitrage*, ce qu'on veut éviter.

Si $1 + r > u$, on remarque que

$$W_1^\phi > (u - (1+r))\phi S_0 + (1+r)W_0.$$

Comme on ne s'est pas fixé de limite pour ϕ, on prend $\phi = -\infty$ (et ce même si $W_0 = 0$, et on a $W_1^\phi = +\infty$ (On a emprunté un maximum d'actif risqué, qu'on a investi à fond dans les actifs non risqués. A nouveau il y a arbitrage.

Exercice 3. Montrer que les fonctions suivantes sont des fonctions d'utilités :

(1) $U_1(x) = -\exp(-\gamma x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.
(2) $U_2(x) = x^\gamma$, $x \in \mathbb{R}$, $\gamma \in]0,1[$.
(3) $U_3(x) = -x^{-\gamma}$, $x >$, $\gamma > 0$.
(4) $U_4(x) = \ln(x)$, $x > 0$.

Toutes les fonctions précédentes sont continues sur leurs ensembles de définition.

On rappelle que si U est C^2 sur I, et que si $U'(x) > 0$ et $U''(x) < 0$ alors U est une fonction d'utilité. En effet, on a si $x < y$

$$U(y) - U(x) = \int_0^1 \mathrm{d}U'(\lambda(y-x)+y)(y-x)\lambda > 0$$

et U est strictement croissante. De plus, pour $\lambda \in]0,1[$, on définit

$$f(\lambda) = U(\lambda y + (1-\lambda)x) - \lambda U(y) - (1-\lambda)U(x).$$

On a

$$f'(\lambda) = U'(\lambda(y-x)+x)(x-y) - (U(y)-U(x)) \quad \text{et} \quad f''(\lambda) = U''(\lambda(y-x)+x)(x-y)^2 < 0.$$

Ainsi f' est décroissante. De plus

$$f'(0) = U'(x)(x-y) - (U(y)-U(x)) = \int_0^1 U'(x) - U'(\lambda(x-y)+x)\,\mathrm{d}\ell(x-y) > 0$$

comme U' est strictement décroissante. De même $f'(1) < 0$. Ainsi (valeurs intermédiaires) f est d'abord strictement croissante, ensuite strictement décroissante et n'admet qu'un seul point critique. Donc $f(\lambda) > 0$ pour $\lambda \in]0,1[$ et U est strictement concave.

Par ailleurs,

$$U_1'(x) = \gamma e^{-\gamma x} > 0 \quad \text{and} \quad U_1''(x) = -\gamma^2 e^{-\gamma x} < 0.$$
$$U_2'(x) = \gamma x^{\gamma-1} > 0 \quad \text{and} \quad U_2''(x) = -\gamma(1-\gamma)x^{\gamma-2} < 0.$$
$$U_3'(x) = \gamma x^{-(\gamma+1)} > 0 \quad \text{and} \quad U_3''(x) = -\gamma(\gamma+1)x^{-(\gamma+1)} < 0.$$
$$U_4'(x) = \gamma\frac{1}{x} > 0 \quad \text{and} \quad U_4''(x) = -\frac{1}{x}^2 < 0.$$

Exercice 4. On considère la fonction d'utilité

$$U(x) = x^\gamma, \quad x > 0,$$

avec γ paramètre dans $]0,1[$. Pour $x > 0$ et pour ξ variable aléatoire à valeurs positives et intégrable, on note $\mathcal{D}(x) = \{\phi : \mathbb{P}\{(1+r)x + \phi(\xi - (1+r)) \geq 0\} = 1\}$.

(1) Pour $x > 0$, montrer que $\phi \in \mathcal{D}(x)$ si et seulement si $\phi/x \in \mathcal{D}(1)$.
(2) En déduire que

$$\sup_{\phi \in \mathcal{D}(x)} \mathbb{E}\Big[U\big((1+r)x + \phi(\xi-(1+r))\big)\Big] = x^\gamma \sup_{\phi \in \mathcal{D}(1)} \mathbb{E}\Big[U\big((1+r) + \phi(\xi-(1+r))\big)\Big].$$

(1) Soit $x > 0$ et $\phi \in \mathcal{D}(x)$. Alors

$$1 = \mathbb{P}((1+r)x + \phi(\xi-(1+r) \geq 0) = \mathbb{P}\left((1+r) + \frac{\phi}{x}(\xi-(1+r) \geq 0\right).$$

Cela prouve qu'il est équivalent de demander $\frac{\phi}{x} \in \mathcal{D}(1)$

(2)

$$\begin{aligned}\sup_{\phi \in \mathcal{D}(x)} \mathbb{E}\Big[U\big((1+r)x + \phi(\xi-(1+r))\big)\Big] &= \sup_{\phi \in \mathcal{D}(x)} \mathbb{E}\left[U\left(x\left((1+r) + \frac{\phi}{x}(\xi-(1+r))\right)\right)\right] \\ &= x^\gamma \sup_{\frac{\phi}{x} \in \mathcal{D}(1)} \mathbb{E}\left[U\left((1+r) + \frac{\phi}{x}(\xi-(1+r))\right)\right] \\ &= x^\gamma \sup_{\phi \in \mathcal{D}(1)} \mathbb{E}\Big[U\big((1+r) + \phi(\xi-(1+r))\big)\Big].\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit X et Y deux variables aléatoires. On dit que X est préférable à Y pour le critère moyenne-variance $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ et $var(X) \leq var(Y)$.

On se donne deux rendements aléatoires X et Y, chacun de loi gaussienne. Montrer que X est préférable à Y pour le critère moyenne-variance si et seulement si X est préférable à Y pour n'importe quelle fonction d'utilité sur $\mathbb{R}$.

Tout d'abord, on remarque que $x \to x$ est une fonction d'utilité. Ainsi si X est préférable à Y pour n'importe quelle fonction d'utilité, $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$. Par ailleurs,

$$x \to -e^{-\gamma x}$$

est également une fonction d'utilité. Ainsi

$$\mathbb{E}[-e^{-\gamma X}] = -e^{-\gamma \mathbb{E}[X]} e^{\frac{1}{2}\gamma^2 var(X)}.$$

Ainsi pour tout $\gamma > 0$,

$$e^{-\gamma \mathbb{E}[X]} e^{\frac{1}{2}\gamma^2 var(X)} \leq e^{-\gamma \mathbb{E}[Y]} e^{\frac{1}{2}\gamma^2 var(Y)},$$

où encore

$$-\gamma \mathbb{E}[X] + \frac{1}{2}\gamma^2 var(X) \leq -\gamma \mathbb{E}[Y] + \frac{1}{2}\gamma^2 var(Y).$$

Au vu de la remarque précédente, et en divisant par γ, on obtient

$$\gamma(var(X) - var(Y)) \leq 2(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]).$$

C'est impossible si $\gamma \to +\infty$, sauf si $var(X) \leq var(Y)$.

On suppose maintenant l'inverse. Remarquons que $X = m_X + \sigma_X + Z$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Soit maintenant $Z' \sim \mathcal{N}(0,1)$ indépendante de Z. Alors

$$m_Y + \sigma_X Z + \sqrt{\sigma_Y^2 - \sigma_X^2} Z' \sim \mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$$

On a en utilisant l'inégalité de Jensen conditionnelle

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U(Y)] =& \mathbb{E}[U(m_Y + \sigma_X Z + \sqrt{\sigma_Y^2 - \sigma_X^2} Z')] \\
\leq& \mathbb{E}[U(m_X + \sigma_X Z + \sqrt{\sigma_Y^2 - \sigma_X^2} Z')] \\
=& \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[U(m_X + \sigma_X Z + \sqrt{\sigma_Y^2 - \sigma_X^2} Z')|Z]\Big] \\
\leq& \mathbb{E}\Big[U(\mathbb{E}[m_X + \sigma_X Z + \sqrt{\sigma_Y^2 - \sigma_X^2} Z'|Z])\Big] \\
=& \mathbb{E}\Big[U(m_X + \sigma_X Z + \sqrt{\sigma_Y^2 - \sigma_X^2} \underbrace{\mathbb{E}[Z']}_{=0})\Big] \\
=& \mathbb{E}[U(X)].
\end{aligned}$$

Exercice 6. On considère un marché financier Bernoulli à une période avec $d < 1 + r < u$. On fixe par ailleurs une richesse initiale $w > 0$, une fonction d'utilité U définie sur $[0, +\infty)$, ainsi qu'un produit financier dont le flux à échéance est $f(S_1)$.

(1) Montrer qu'il existe p et ψ tels que

$$f(S_1) = W_1^{p,\psi}.$$

Voir exercice 2

(2) En déduire que, pour toute stratégie ϕ,

$$W_1^{w,\phi} - f(S_1) = W_1^{w-p,\phi-\psi}.$$

On remarque que

$$W^{w,\phi} - f(S_1) = S_1\phi + \frac{(w - \phi S_0)}{S_0^0} S_1^0 - S_1\psi + \frac{(p - \psi S_0)}{S_0^0} S_1^0 = W_1^{w-p,\phi-\psi}.$$

(3) Montrer que $\mathbb{P}(\{W_1^{w,\phi} - f(S_1) \geq 0\}) = 1$ si et seulement si $\phi - \psi \in \mathcal{D}(w-p)$, où $\mathcal{D}(w-p) = \{\theta \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\{W_1^{w-p,\theta} \geq 0\}) = 1\}$.

On utilise directement la question précédente.

(4) En déduire qu'optimiser $\mathbb{E}[U(W_1^{w,\phi} - f(S_1))]$ par rapport à ϕ tel que $\mathbb{P}(\{W_1^{w,\phi} - f(S_1) \geq 0\}) = 1$ revient à optimiser $\mathbb{E}[U(W_1^{w-p,\phi-\psi})]$ par rapport ϕ tel que $\phi - \psi \in D(w-p)$.

Idem

(5) On suppose que w désigne la richesse initiale d'un agent financier. Il vend, à l'instant 0, le produit financier de flux $f(S_1)$ à échénace. Il reçoit, en contrepartie, c. Sa richesse est donc $w+c$. Montrer que

$$\sup_{\phi:\mathbb{P}(\{W_1^{w+c,\phi}-f(S_1)\geq 0\})} \mathbb{E}[U(W_1^{w+c,\phi}-f(S_1))] = \sup_{\phi-\psi\in\mathcal{D}(w+c-p)} \mathbb{E}[U(W_1^{w+c-p,\phi-\psi})].$$

On applique la question précédente avec $w = w + c$.

(6) En déduire que, pour l'agent financier, la vente du produit est intéressante si et seulement si $c \geq p$. En conclure que p doit être le juste prix du produit financier.

TODO