Formulaire : Décomposition en éléments simples

Rappel du théorème

Théorème : Soit $F=\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ écrite sous forme irréductible, avec P non nul et Q non constant. Soit $Q=\prod_{k=1}^n (X-\alpha_k)^{\mu_k}$ la factorisation de Q en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Alors il existe un unique polynôme $E\in\mathbb{C}(X)$ et une unique famille de nombres complexes $(\lambda_{k,j})_{1\leq k\leq n, 1\leq j\leq \mu_k}$ tels que

$$F=E+\sum_{k=1}^n\left(\sum_{j=1}^{\mu_k}\frac{\lambda_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j}\right).$$

- E s'appelle la partie entière de la fraction rationnelle. Elle est le quotient de la division euclidienne de P par Q.
- $\sum_{j=1}^{\mu_k}\frac{\lambda_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j}$ s'appelle la partie polaire de F relativement au pôle α.

Calcul de la partie polaire relative à un pôle simple

Si α est un pôle simple de $F=P/Q$, alors F s'écrit

$$F=\frac{\lambda}{X-\alpha}+G$$

avec G une fraction rationnelle dont α n'est pas un pôle. Alors, pour obtenir λ, on peut

- factoriser Q en $Q(X)=(X-\lambda)Q_1(X)$. On obtient alors
$$\lambda=\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}.$$
- utiliser la formule suivante :
$$\lambda=\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

Calcul de la partie polaire relative à un pôle double

Si α est un pôle double de $F=P/Q$, alors F s'écrit

$$F=\frac{\lambda_1}{X-\alpha}+\frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2}+G$$

avec G une fraction rationnelle dont α n'est pas un pôle. Alors, on commence par obtenir λ_2 en factorisant Q en $Q(X)=(X-\alpha)^2Q_1(X)$. Multipliant la fraction rationnelle par $(X-\alpha)^2$, puis faisant $X=\alpha$, on obtient finalement

$$\lambda_2=\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}.$$

Pour obtenir λ_1, on considère alors la fraction rationnelle

$$F_1=F-\frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2},$$

dont α est un pôle de multiplicité au plus égal à 1. On applique alors à F_1 la méthode décrite plus haut.

Calcul de la partie polaire relative à un pôle de multiplicité supérieure ou égale à 3

La méthode décrite pour calculer la partie polaire relative à un pôle double se généralise facilement à un pôle de multiplicité quelconque. Précisément, si α est un pôle de multiplicité m, on peut écrire

$$F=\frac{\lambda_1}{X-\alpha}+\dots+\frac{\lambda_m}{(X-\alpha)^m}+G$$

avec G une fraction rationnelle dont α n'est pas un pôle. On commence par déterminer λ_m en factorisant Q en $Q(X)=(X-\alpha)^mQ_1(X)$ et en remarquant que

$$\lambda_m=\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}.$$

On considère ensuite la fraction rationnelle

$$F_1=F-\frac{\lambda_m}{(X-\alpha)^m},$$

dont α est un pôle de multiplicité au plus égal à $m-1$, puis on répète l'opération.