FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS n° 5
MARTINGALES

Dans tous les exercices, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne l'espace de probabilité sous-jacent. Les exercices plus difficiles ou faisant intervenir des notions avancées de théorie de la mesure sont indiqués par un astérisque.

1. Généralités sur les martingales

Exercice 1. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également une martingale pour sa filtration naturelle $\left(\mathcal{F}_n^M\right)_{n\in\mathbb{N}} = (\sigma(M_0, M_1, \ldots, M_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. On considère $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale et T un temps d'arrêt associés à cette filtration. Montrer que le processus arrêté $(M_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une martingale pour cette filtration.
On pourra remarquer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $1 = \mathbf{1}_{T\geq n} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{T=k}$ (avec la convention que $\sum_{k=0}^{-1} \cdots = 0$).

Exercice 3. *Martingale et inégalité de Jensen conditionnelle.*

(1) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On se donne une martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose que $\phi(M_n) \in \mathbb{L}^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\phi(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Remarque : Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, $(|M_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une sous-martingale, de même que $\left(M_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ si $M_n \in \mathbb{L}^2$.

(2) On suppose maintenant que ϕ est croissante et convexe. Montrer que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale et $\phi(M_n) \in \mathbb{L}^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(\phi(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.

Exercice 4. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. intégrables positives de moyenne $m > 0$. On définit le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \prod_{i=0}^{n} Y_i \ .$$

Dire, selon la valeur de m, si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale, une sous-martingale, une martingale par rapport à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^Y\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

*** Exercice 5.** *Décomposition de Doob.*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Montrer qu'il existe un unique couple de processus $(M_n, A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :
   (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n^2 = M_n + A_n$
   (ii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus croissant et prévisible (i.e. A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$)
   (iii) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $M_0 = X_0^2$

et que, de plus,

$$A_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[(X_{k+1} - X_k)^2 \ \middle|\ \mathcal{F}_k\right]$$

(2) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. telles que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = \sigma^2 < \infty$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que $(S_n^2 - n\sigma^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une martingale pour sa filtration naturelle.

2. Convergence de martingales

Exercice 6. On considère la marche aléatoire simple symétrique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{Z}$ partant de 1 : $S_0 = 1$ et il existe une suite de v.a.i.i.d. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. On note $T = \inf\{n \geq 0,\ S_n = 0\}$.

(1) Montrer que T est un $\mathcal{F}^S$-temps d'arrêt.

(2) Montrer que le processus $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

(3) Montrer que $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi, mais que la convergence n'a pas lieu au sens $\mathbb{L}^1$. *On pourra admettre (ou se référer à un exercice de la feuille de TD précédente) que le temps d'arrêt T est fini p.s.*

* **Exercice 7.** *Il existe des martingales convergentes non U.B. dans $\mathbb{L}^1$*
Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Z_n = 2^n) = \mathbb{P}(Z_n = -2^n) = \frac{1}{2n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - 1/n^2.$$

(1) Montrer que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ défini par

$$M_n = \sum_{i=1}^n Z_i$$

est une $\left(\mathcal{F}_n^Z\right)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale.

(2) Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers une v.a. M_∞.

(3) Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas uniformément bornée dans $\mathbb{L}^1$.

Exercice 8. *Urne de Polya.*

(1) Une urne contient 1 boule noire et 1 boule blanche. On tire une boule au hasard, selon la loi uniforme, dans l'urne. On remet alors cette boule dans l'urne accompagnée d'une autre boule de la même couleur et on itère la procédure. On note N_n le nombre de boules noires et M_n la proportion de boules noires après le $n^{\text{ème}}$ tirage ($N_0 = 1$ et $M_0 = 1/2$).

  (a) Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}^N$-martingale.

  (b) Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

  (c) Calculer la loi de N_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de $M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$.

*(2) On suppose maintenant que l'urne contient initialement a boules noires et b boules blanches, $a, b \in \mathbb{N}^*$. On considère toujours N_n le nombre de boules noires et M_n la proportion de boules noires après le $n^{\text{ème}}$ tirage, mais les conditions initiales sont donc $N_0 = a$ et $M_0 = a/(a+b)$.

  (a) Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours une $\mathcal{F}^N$-martingale qui converge vers une variable aléatoire M_∞ p.s. et dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$.

(b) On appelle loi $Beta(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, la loi continue de densité définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

Montrer que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\mathbb{R}} f_{\alpha+1,\beta}(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{\mathbb{R}} f_{\alpha,\beta+1}(x)\,\mathrm{d}\,x$. En déduire que $f_{\alpha,\beta}$ est bien une densité de probabilité.

(c) Montrer que, si M suit la loi $Beta(\alpha, \beta)$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}\left[M^k\right] = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+\beta+i)}.$$

(d) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, le processus $\left(Z_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Z_n^{(k)} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(N_n+i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(a+b+n+i)}.$$

est une martingale. En déduire la valeur de $\mathbb{E}\left[M_\infty^k\right]$.

(e) Montrer que la fonction caractéristique de M_∞ s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi_{M_\infty}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[M_\infty^k\right] \frac{(it)^k}{k!}.$$

En déduire la loi de M_∞.

Exercice 9. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$ et α un réel dans $]0,1[$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires vérifiant $X_0 = x_0 \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \alpha X_n + (1-\alpha)\mathbf{1}_{U_{n+1}\leq X_n}.$$

(1) Montrer que, p.s., $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \in [0,1]$.

(2) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

(3) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite X_∞ $\mathbb{P}$-p.s. et dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$.

(4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_n)^2\right] = (1-\alpha)^2\mathbb{E}\left[X_n(1-X_n)\right]$.

(5) Montrer que $\mathbb{E}\left[X_\infty(1-X_\infty)\right] = 0$. En déduire la loi de X_∞.

*** Exercice 10.** *Théorème des trois séries de Kolmogorov.*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :
Si il existe $a > 0$ tel que les trois séries suivantes convergent :

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\left(|X_k| > a\right), \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[X_k \mathbf{1}_{|X_k|\leq a}\right] \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{V}\left[X_k \mathbf{1}_{|X_k|\leq a}\right]$$

alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}$-p.s.

(1) Pour tout entier $k > 0$, on définit $Y_k = X_k\mathbf{1}_{|X_k|\leq a} - \mathbb{E}\left[X_k\mathbf{1}_{|X_k|\leq a}\right]$. Montrer que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, défini par $M_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, est une martingale pour la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$, puis que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge $\mathbb{P}$-p.s.

(2) Montrer que la série de terme général $X_k\mathbf{1}_{|X_k|>a}$ est convergente.

(3) Conclure.

Remarque : on peut montrer que cette condition suffisante pour la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également une condition nécessaire.

3. Théorème d'arrêt

Exercice 11. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de v.a. uniformément bornée dans $\mathbb{L}^p$, $p\in]1,+\infty]$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable. Montrer par un contre exemple que ce n'est pas vrai si $p=1$.

Exercice 12. *Marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$.*
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(X_1=-1)=1/2$ et trois entiers $a<x<b$. On pose alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$S_n = x + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

avec la convention usuelle que $\sum_{k=1}^{0}=0$. On note alors $T_a=\inf\{n\geq 0,\ S_n=a\}$ le temps d'atteinte de a, T_b le temps d'atteinte de b par le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $T_{a,b}=T_a\wedge T_b$ le temps d'atteinte de l'ensemble $\{a,b\}$.

(1) Soit $t>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$M_n = S_n^2 - n \quad \text{et} \quad Z^t = e^{tS_n}/(\cosh t)^n.$$

Montrer que les processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(Z_n^t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des martingales pour la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) On admet dans cette question que $\mathbb{P}(T_{a,b}<\infty)=1$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(T_a<T_b)$. (*On pourra remarquer que le processus $\left(S_{T_{a,b}\wedge n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale bornée.*)
   (b) En utilisant la martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\mathbb{E}[T_a\wedge T_b]=(b-x)(x-a)$. Que pouvez-vous dire de $\mathbb{E}[T_a]$?

*(3) Montrer que, pour tout $t>0$ la martingale $\left(Z_{T_b\wedge n}^t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable. En déduire que $\mathbb{E}\left[(\cosh t)^{-T_b}\mathbf{1}_{T_b<\infty}\right]=e^{-t(b-x)}$ puis que $\mathbb{P}(T_b<\infty)=1$.

Exercice 13. *Marche aléatoire simple non symétrique sur $\mathbb{Z}$.*
On fixe un nombre $p\in]0,1[\setminus\{1/2\}$ et on note $q=1-p$. On considère alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. telles que $\mathbb{P}(U_1=1)=p$ et $\mathbb{P}(U_1=-1)=q$ et on pose pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$S_n = x + \sum_{k=1}^{n} U_k \text{ et } X_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$$

avec la convention usuelle que $\sum_{k=1}^{0}=0$.

(1) Montrer que $\sigma(X_1,\dots,X_n)=\sigma(U_1,\dots,U_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

(2) Montrer que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour sa filtration naturelle.

(3) Soit $a<x<b$. On note T_a le temps d'atteinte de a, T_b le temps d'atteinte de b par le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $T_{a,b}=T_a\wedge T_b$. Montrer que $\mathbb{P}$-p.s. $\lim_{n\to\infty}|S_n|=+\infty$. En déduire que $\mathbb{P}(T_{a,b}<\infty)=1$.

(4) En utilisant la martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer $\mathbb{P}(T_a<T_b)$.

(5) Montrer que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$\forall n\in\mathbb{N},\ M_n = S_n - n(p-q)$$

est une martingale. Utiliser ensuite le corollaire du théorème d'arrêt avec cette martingale pour calculer $\mathbb{E}[T_{a,b}]$ puis $\mathbb{E}[T_b]$.

Exercice 14. *Modèle de Wright-Fisher.*
On souhaite modéliser l'évolution d'une population de N gènes (N étant un entier fixé). On suppose qu'il y a deux types de gènes différents : A et B. On passe de la génération n à la génération $n+1$ de la façon suivante : pour chaque gène de la génération $n+1$, on choisit de manière équiprobable son parent dans la génération n, ceci indépendamment des autres gènes. Le gène fils a alors le même type que le gène père. Finalement, on note X_n le nombre de gènes du type A à la génération n. Ainsi, on peut construire formellement la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : on se donne une collection de v.a.i.i.d. $(U_{n,k})_{n\in\mathbb{N}^*,k\in\{1,\dots,N\}}$ de même loi uniforme sur $\{1,\dots,N\}$ et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_{\{U_{n,k} \leq X_n\}}. \tag{1}$$

Finalement, pour $x \in \{0,\dots,N\}$, on note $\mathbb{P}_x$ la probabilité $\mathbb{P}\big(\,\cdot\,\big|X_0 = x\big)$.

(1) Expliquer pourquoi la relation (1) modélise bien la situation présentée dans l'énoncé.

(2) Montrer que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une chaîne de Markov sur l'espace d'état $E = \{0,\dots,N\}$ dont les probabilités de transition sont :

$$\forall (i,j) \in E^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) = \binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}.$$

(3) Donner les différentes classes de communication de la chaîne de Markov et la nature de celles-ci.

(4) On note $T_0 = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n = 0\}$ et $T_N = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n = N\}$. Montrer que T_0, T_N et $T_0 \wedge T_N$ sont des temps d'arrêt et expliquer pourquoi $T_0 \wedge T_N < \infty$, $\mathbb{P}_x$-p.s. quel que soit $x \in \{0,\dots,N\}$.

(5) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour sa filtration naturelle.

(6) Montrer qu'il existe une variable X_∞ telle que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}-$p.s. vers X_∞.

(7) Utiliser le théorème d'arrêt pour montrer que $\mathbb{P}_x(T_N < T_0) = \frac{x}{N}$. En déduire la loi de X_∞.

(8) On introduit pour $n \in \mathbb{N}$, *l'hétérozygotie* à l'instant n : $H_n = \frac{2X_n(N-X_n)}{N(N-1)}$. Cela correspond à la probabilité qu'un couple de gènes choisi uniformément dans la poulation totale à l'instant n présente deux allèles différents.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left[X_{n+1}(N - X_{n+1})|\mathcal{F}_n^X\right] = \frac{N-1}{N}X_n(N-X_n)$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}_x\left[H_n\right] = \frac{2x(N-x)}{N(N-1)}\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$.