

Statistique Mathématique

Examen — 28 avril 2023

Durée : 3 heures. L'examen est composé d'un exercice et d'un problème, indépendants. Documents et calculatrices interdits. Détaillez et justifiez chaque réponse. Les questions marquées d'un astérisque () sont plus difficiles, il est normal qu'elles prennent plus de temps. Bonne chance !*

Exercice

On s'intéresse à la production d'un anticorps par les individus en fonction de la couleur de leurs yeux. Après étude, on constate que 10% des Français produisent naturellement cet anticorps. On recrute 50 personnes aux yeux bruns et on constate que 10 d'entre eux le produisent. Peut-on dire que la couleur des yeux a un impact significatif, avec un niveau 5%, sur la production de cet anticorps ?

1. Formuler la question comme un test d'hypothèse. De quel type de test s'agit-il ?
2. Proposer une statistique de test et préciser sa loi sous l'hypothèse nulle.
3. Fixer un seuil de rejet à partir de la table des quantiles donnée à la page suivante.
4. Conclure et commenter. On pourra utiliser sans justification le fait que $10/9 \approx 1.11$.

Problème : estimation avec décote

Dans cet exercice, nous nous intéressons à l'estimation de la moyenne d'une variable aléatoire positive X . On se donne X_1, \dots, X_n un n -échantillon i.i.d. de X . On notera $\mu := \mathbb{E}[X]$ et $\sigma^2 := \text{Var}(X)$, que l'on supposera finie. Au lieu de considérer \bar{X}_n , l'estimateur naturel de μ , qu'on obtient par exemple par la méthode des moments, nous allons dans un premier temps nous intéresser à $\hat{\theta}_n(a) := a\bar{X}_n$, avec $a \in [0, 1]$.

1. Rappeler, sans redémontrer le résultat, la décomposition biais-variance de l'erreur quadratique moyenne d'un estimateur.
2. Calculer le biais de $\hat{\theta}_n(a)$.
3. Calculer la variance de $\hat{\theta}_n(a)$.
4. À l'aide des questions précédentes, écrire l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_n(a)$ comme un polynôme du second degré en a .
5. Représenter sur un même graphique la variance, le carré du biais, et l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_n(a)$ en fonction de a .
6. Montrer qu'il existe $a^* \in [0, 1]$ qui minimise l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_n(a)$. On prendra soin d'écrire a^* en fonction de μ, σ^2 , et n . Commenter.
7. En supposant σ connu, justifier le choix de

$$\hat{\theta}_n^{(1)} := \bar{X}_n \left(1 - \frac{\sigma^2}{n\bar{X}_n^2} \right)$$

comme estimateur de μ .

8. Montrer que le biais de $\hat{\theta}_n^{(1)}$ est égal à

$$-\sigma^2 \mathbb{E} \left[\frac{1}{X_1 + \dots + X_n} \right].$$

- (*) 9. Montrer que

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{X_1 + \dots + X_n} \right] = \int_0^{+\infty} \mathbb{E} [\exp(-tX)]^n dt.$$

10. Dans cette question et la suivante, on suppose que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Que vaut $\mathbb{E}[\exp(-tX)]$? En déduire le biais de $\hat{\theta}_n^{(1)}$. Que constatez-vous ?
- (★) 11. Calculer la variance de $\hat{\theta}_n^{(1)}$. *Indice* : on pourra s'inspirer de la question 9. Commenter.

Table 1: Loi du khi-deux à k degrés de liberté, quantiles d'ordre $1 - \gamma$. On peut faire une interpolation linéaire ou utiliser le quantile le plus proche lorsque k n'est pas un multiple de 10.

| k | γ | | | | | | | | | | |
|-----|----------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0.995 | 0.990 | 0.975 | 0.950 | 0.900 | 0.500 | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 | 0.005 |
| 1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.45 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.10 | 0.21 | 1.39 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 |
| 3 | 0.07 | 0.11 | 0.22 | 0.35 | 0.58 | 2.37 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.34 | 12.84 |
| 4 | 0.21 | 0.30 | 0.48 | 0.71 | 1.06 | 3.36 | 7.78 | 9.94 | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5 | 0.41 | 0.55 | 0.83 | 1.15 | 1.61 | 4.35 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6 | 0.68 | 0.87 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 5.35 | 10.65 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7 | 0.99 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 6.35 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 7.34 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.96 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 8.34 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 9.34 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 10.34 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.76 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 11.34 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 12.34 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 13.34 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.27 | 7.26 | 8.55 | 14.34 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 15.34 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.09 | 16.34 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.87 | 17.34 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.81 | 10.12 | 11.65 | 18.34 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 19.34 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.28 | 11.59 | 13.24 | 20.34 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 21.34 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 |
| 23 | 9.26 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 14.85 | 22.34 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 |
| 24 | 9.89 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 23.34 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 16.47 | 24.34 | 34.28 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 |
| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 17.29 | 25.34 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 |
| 27 | 11.81 | 12.88 | 14.57 | 16.15 | 18.11 | 26.34 | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.65 |
| 28 | 12.46 | 13.57 | 15.31 | 16.93 | 18.94 | 27.34 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 |
| 29 | 13.12 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 19.77 | 28.34 | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 29.34 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 |
| 40 | 20.71 | 22.16 | 24.43 | 26.51 | 29.05 | 39.34 | 51.81 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 |
| 50 | 27.99 | 29.71 | 32.36 | 34.76 | 37.69 | 49.33 | 63.17 | 67.50 | 71.42 | 76.15 | 79.49 |
| 60 | 35.53 | 37.48 | 40.48 | 43.19 | 46.46 | 59.33 | 74.40 | 79.08 | 83.30 | 88.38 | 91.95 |
| 70 | 43.28 | 45.44 | 48.76 | 51.74 | 55.33 | 69.33 | 85.53 | 90.53 | 95.02 | 100.42 | 104.22 |
| 80 | 51.17 | 53.54 | 57.15 | 60.39 | 64.28 | 79.33 | 96.58 | 101.88 | 106.63 | 112.33 | 116.32 |
| 90 | 59.20 | 61.75 | 65.65 | 69.13 | 73.29 | 89.33 | 107.57 | 113.14 | 118.14 | 124.12 | 128.30 |
| 100 | 67.33 | 70.06 | 74.22 | 77.93 | 82.36 | 99.33 | 118.50 | 124.34 | 129.56 | 135.81 | 140.17 |