

Exercice 1. Vecteur Gaussien (*mercredi*)

Dans cet exercice $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$ désigne un vecteur gaussien de moyenne $(0, 0, 0, 0)^T$ et de matrice de variance-covariance identité.

1. Quelle est la loi de $(X_1 - X_2)^2/2 + (X_1 + X_2)^2/2$?

2. Quelle est la loi de $\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2}$?

3. Quel est le projeté orthogonal $P_E(X)$ de X sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1, 1, 0, 0)^T$ et $(0, 0, 1, 1)^T$?

4. Quelle est la loi de $\|P_E(X)\|^2$? Quelle est la loi de $\frac{\|P_E(X)\|^2}{\|X - P_E(X)\|^2}$?

Réponse

1. Puisque $\mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = 0$ et $\text{Var}(X_1 - X_2) = \text{Var}(X_1 + X_2) = 2$, on a $(X_1 - X_2)/\sqrt{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $(X_1 + X_2)/\sqrt{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

On a aussi $\mathbb{E}((X_1 - X_2)(X_1 + X_2)) = \mathbb{E}(X_1^2 - X_2^2) = 0$, ainsi $\text{Cov}((X_1 - X_2), (X_1 + X_2)) = \mathbb{E}((X_1 - X_2)(X_1 + X_2)) - \mathbb{E}(X_1 - X_2)\mathbb{E}(X_1 + X_2) = 0$. Comme il s'agit de variable aléatoire gaussienne et la covariance est nulle, donc $X_1 - X_2$ et $X_1 + X_2$ sont indépendantes.

D'après la définition de la loi du $\chi^2(n)$, $(X_1 - X_2)^2/2 + (X_1 + X_2)^2/2 \sim \chi^2(2)$.

2. On peut écrire $\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2} = \frac{(X_1 - X_2)^2/2}{(X_1 + X_2)^2/2}$ qui est le quotient de deux variable aléatoire de loi du $\chi^2(1)$. Donc sa loi est $F(1, 1)$.

3. Notons $e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$ et $e_2 = (0, 0, 1, 1)^T$. Comme $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$, l'espace E engendré par e_1 et e_2 est de dimension 2 et $P_E X = \langle e_1, X \rangle \cdot e_1 / \|e_1\|^2 + \langle e_2, X \rangle \cdot e_2 / \|e_2\|^2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2, X_1 + X_2, X_3 + X_4, X_3 + X_4)^T$.

4. D'après le théorème de Cochran et la question précédente, $\|P_E(X)\|^2 \sim \chi^2(2)$ et $\frac{\|P_E(X)\|^2}{\|X - P_E(X)\|^2} \sim F(2, 2)$.

Exercice 2. Vecteur Gaussien (*jeudi*)

Dans cet exercice X , Y et Z sont trois variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Quelle est la loi de $X^2 + Y^2$?

2. Quelle est la loi de $\sqrt{2} \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$?

3. Quelle est la loi de $2 \frac{Z^2}{X^2 + Y^2}$?

4. Quelle est la loi de $\frac{X - Y}{\sqrt{\frac{(X+Y)^2}{2} + Z^2}}$? (Cette question n'était pas faisable car c'était $X^2 + Y^2$

à la place de $(X + Y)^2$.)

Réponse

1. D'après la définition de la loi du $\chi^2(n)$, $X^2 + Y^2 \sim \chi^2(2)$.

2. D'après la définition de la loi de Student et la question précédente, $\sqrt{2} \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{Z}{\sqrt{(X^2 + Y^2)/2}} \sim T(2)$.

3. $2 \frac{Z^2}{X^2 + Y^2} = \frac{Z^2}{(X^2 + Y^2)/2} \sim F(1, 2)$.

4. Comme X , Y et Z sont indépendantes et $(X + Y)/\sqrt{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\frac{(X+Y)^2}{2} + Z^2 \sim \chi^2(2)$.

Les variables aléatoires $X - Y$ et $X + Y$ sont indépendantes, voir la question 1 du sujet de mercredi. On a donc $\frac{X - Y}{\sqrt{\frac{(X+Y)^2}{2} + Z^2}} = \frac{(X - Y)/\sqrt{2}}{\sqrt{(\frac{(X+Y)^2}{2} + Z^2)/2}} \sim T(2)$.