Calcul différentiel L3

année 2016-2017

Gijs M. Tuynman

Table des matières

Avertissement au lecteur — guide de lecture

Introduction

Apprendre les mathématiques ressemble en grande partie à apprendre une langue. Pour apprendre une langue il faut apprendre des mots, la grammaire et savoir former des phrases dans la nouvelle langue. Pour les mathématiques, la grammaire, c'est la logique, les mots, ce sont les théorèmes (lemmes, proposition ou autres noms qu'on peut donner aux résultats) et les phrases deviennent les justifications des calculs et les preuves. Par contre, il y a aussi une différence importante : les mots d'une nouvelle langue appris dans les premières leçons seront toujours utilisés, tandis que les résultats appris dans les premières leçons de mathématiques ne sont quasiment plus utilisés explicitement. Voici ce qui se passe. En primaire on apprend à faire des multiplications et dans les exercices il faut par exemple calculer 271×843. Pour le faire il faut donner plus ou moins le calcul suivant :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 2 & 7 & 1 \\
 & & & \underline{8} & \underline{4} & \underline{3} \\
 & & & 8 & 1 & 3 \\
 & 1 & 0 & 8 & 4 & 0 \\
\underline{2} & \underline{1} & \underline{6} & \underline{8} & \underline{0} & \underline{0} \\
2 & 2 & 8 & 4 & 5 & 3
\end{array} \; +$$

Par contre, une fois arrivé au lycée, un enseignant dira directement qu'on a $271 \times 843 = 228453$ et tous les élèves seront d'accord qu'ils savent le faire si on leur demande. La justification ci-dessus ne sera plus évoquée.

Dans la même veine, au lycée on commence à apprendre à résoudre des systèmes d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss, une technique qui sera perfectionnée en première année de l'enseignement supérieur. Un étudiant de première année est donc amené à fournir le raisonnement suivant pour la solution du système d'équations :

$$\begin{aligned} x+2y-z&=6 \\ 2x-y+z&=7 \\ -x+y+2z&=11 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} x+2y-z&=6 \\ -5y+3z&=-5 \\ 3y+z&=17 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} x+2y-z&=6 \\ -14y\qquad&=-56 \\ 3y+z&=17 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} x+2\cdot4-z&=6 \\ y&=4 \\ 3\cdot4+z&=17 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} x-5&=-2 \\ y&=4 \\ z&=5 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} x&=3 \\ y&=4 \\ z&=5 \end{aligned}$$

Par contre, une fois arrivé en troisième année, un enseignant dira simplement que le système initial a comme solution unique le triplet $(3, 4, 5)$, éventuellement murmurant que le déterminant n'est pas nul. Et il ne demandera plus la justification donnée ci-dessus.

Bien sûr, dans les deux cas évoqués, l'élève/étudiant est supposé pouvoir fournir ce calcul quand on le demande (et il pourrait être amené à le faire sur un brouillon pour une interrogation), mais ces détails ne seront plus demandés explicitement. Ainsi se glisse dans le jargon mathématique des bout de phrases comme "il est évident que," "un calcul élémentaire montre que" ou "on montre facilement que." Des mauvaises langues disent que ces phrases cachent que l'auteur est, soit trop paresseux pour l'écrire, soit qu'il n'en est pas trop sûr et qu'il espère que le lecteur veut bien le croire. Dans la réalité ces phrases ont pour but de "simplifier" l'exposition mathématiques en enlevant les parties dont "tout le monde" est d'accord que c'est vrai (ou que rien ne s'oppose à croire que c'est vrai) et qu'on peut le faire/montrer/calculer quand on le demande. Et c'est là où les problèmes commencent, car tout dépend de ce qu'on entend par "tout le monde." L'élève au lycée n'a pas suffisamment d'expérience/connaissances pour pouvoir trouver sans difficulté la solution d'un système d'équations linéaires. Et l'élève en primaire (au moins au début) aura des difficultés pour faire des "grandes" multiplications. D'autre part, si l'enseignant au lycée affirme qu'on a $385 \times 229 = 88165$, alors tous les élèves voudront bien le croire. Mais s'il affirme que ça vaut 88164 ou que ça vaut 855, tous les élèves devraient être sûr qu'il se trompe.

Quand on écrit un texte mathématique, l'auteur doit donc bien choisir son public. Et il faut qu'il détermine les connaissances **et** l'expérience de ses lecteurs. Le texte de l'ouvrage que vous êtes en train de lire concerne le calcul différentiel destiné aux étudiants de troisième année de l'université. En écrivant ce texte j'ai donc supposé un certain niveau de connaissances. Mais je n'ai pas supposé beaucoup d'expérience, car il s'avère que c'est justement l'expérience qui manque actuellement à nos étudiants.[1] J'ai donc essayé d'être le plus rigoureux possible dans l'exposition. À certains endroits ce rigueur nuit à la compréhension, car on noie (on est presque obligé de noyer) les grandes lignes dans un formalisme presque stérile. J'ai donc essayé en même temps d'adoucir cette rigueur en indiquant comment on écrit les choses habituellement et comment il faut l'interpréter rigoureusement. Je pense en particulier aux différentielles supérieures. La définition naturelle (par récurrence) dit que la $k+1$-ième différentielle est la différentielle de la k-ième différentielle. Mais ensuite on traite la $n^{\text{ième}}$ différentielle comme une application n-linéaire. Et cet usage n'est pas compatible avec la définition ! Sous-jacente est une identification entre deux espaces vectoriels qu'on n'écrit jamais (ou presque). Le dilemme dont on est confronté est que, si, pour rester cohérent avec la définition, on écrit systématiquement cette identification, alors les formules deviennent lourdes, voire illisibles. Mais si on ne l'écrit pas, les formules seront "fausses." Il faut donc apprendre (et ça demande du temps !) à avoir en tête ces deux aspects : savoir fournir cette identification quand c'est (absolument) nécessaire, et savoir l'ignorer autrement. Je pense aussi à l'identification qu'on fait habituellement entre la différentielle (d'une application entre deux espaces de dimension finie) et sa matrice formée par les dérivées partielles. Tout le monde (en troisième année de l'enseignement supérieur !) sait bien qu'il y a une différence entre une application linéaire et sa matrice et que cette matrice dépend d'un choix de base. Mais en calcul différentiel on ne change (presque) jamais la base (de $\mathbf{R}^n$) ; on prend la base canonique et l'identification se fait naturellement. Par contre, quand on commence à étudier les variétés différentiables, là on change la base (avec les changement de coordonnées et de cartes). Et l'influence de ces changements sur le comportement des dérivées partielles (les vecteurs tangents !) est une difficulté majeure pour le débutant.

1. Écrit en 2017.

Dans le même état d'esprit j'ai fourni dans les preuves un certain nombre de détails qui sont superflus pour les lecteurs avec suffisamment d'expérience, mais qui (j'espère) sont utiles pour les lecteurs qui sont en train d'acquérir cette expérience. Certains de ces détails sont écrits en caractères plus petits, plus facilement repérable, d'autre font parti du texte courant. La même chose est vrai pour les quelques solutions d'exercices que j'ai rédigé. Dans ces solutions j'ai donné probablement trop de détails pour la plupart des lecteurs. Et il est sûr que la rédaction qu'on demandera d'un étudiant peut être (beaucoup) plus court en général. Idéalement j'aurais aimé écrire ce texte en deux (voire trois) niveaux : d'abord le niveau "intuitif" qui exprime les idées et le fond des choses. Ensuite le niveau pratique, avec un nombre (minimal/optimal) d'arguments pour montrer les résultats. [2] Et finalement le niveau rigoureux quand on veut vraiment mettre les points sur les i. Malheureusement le format d'un polycopié ou un livre ne permet pas une telle écriture. À ma connaissance le format pdf ne le permet pas non plus (pour l'instant), bien qu'avec les renvois on peut déjà faire des choses. Sur internet une telle écriture est possible, avec des fenêtres surgissantes, mais mes connaissances concernant l'écriture sur le web sont insuffisantes pour le faire.

Avertissement - guide

Ce texte est une version élaborée d'un support de cours que j'avais écrit en 2016 pour mon cours de calcul différentiel destiné aux étudiants de troisième année d'un licence de mathématique. La première section sur les espaces vectoriels normés ne faisait pas parti de ce cours (cela faisait parti du cours de topologie), mais je l'ai rajouté comme rappel, surtout pour la notion de norme d'opérateur (d'un application linéaire continue) qui est un ingrédient essentiel du calcul différentiel (en dimension quelconque). Par contre, ce qui manque cruellement, c'est des dessins. Ce manque s'explique, pas par un manque de volonté (je sais où je veux et peux mettre des dessins), mais par un manque de temps et de courage, car faire des dessins "corrects" en LaTeX demande du temps.

La version actuelle a séparé les énoncés des preuves, dans le sens que je présente d'abord la théorie avec explications mais sans preuves et que le lecteur trouvera les preuves regroupé à la fin. Je suis persuadé que cette ordre est à recommander aux étudiants : lire et comprendre la théorie, faire des exercices et seulement après lire les preuves. Pour une version papier, le numéro de page où se trouve la preuve est indiqué dans la marge ; pour la version pdf il suffit de cliquer sur le symbole Ⓟ pour se retrouver à la bonne page. D'autre part, une version au format "classique" théorème-preuve peut être obtenu sur simple demande par le lecteur qui le préfère. [3]

À chaque relecture je trouve des erreurs d'une gravité variable que je corrige au fur et à mesure, mais je suis certain qu'il en reste encore. Je remercie d'avance tout lecteur qui aura la gentillesse de me faire parvenir ses remarques, critiques et corrections (y compris les oublis dans l'index).

2. C'est à ce niveau que la plupart des textes mathématiques sont écrits.

3. Pour ceux qui possèdent un grand écran capable d'afficher deux pages côte-à-côte, il existe même une version en double : deux documents pdf qui se renvoient mutuellement. Ainsi on peut lire sur le premier document une preuve et, en cliquant sur les références en rouge, visualiser les références dans le deuxième document sans pour autant "perdre de vu" le texte de la preuve en question (le premier document ne change pas de page). Pour des raisons techniques que je ne maîtrise pas, ceci ne fonctionne (pour l'instant) que sous les systèmes d'exploitation MacOSX (avec Aperçu) et linux (avec evince), mais pas sous Windows.

Survol

Les sections 1, 4 et 6 ne font pas, à proprement parler, parti du calcul différentiel. Le contenu de §1 est un "résumé" de ce qui fait normalement parti d'un cours de topologie sur des espaces vectoriels normés. En particulier on y définit la notion de norme d'une application linéaire continue et quelques conséquences nécessaires pour le calcul différentiel. Dans §4 on fournit quelques détails d'algèbre linéaire en général, concernant des applications linéaires entre des produits d'espaces vectoriels. Ces "détails" sont d'une côté assez naturel et "donc" quasiment jamais enseigné. De l'autre côté, si on veut être précis, on doit connaître ces détails. Il y a ici un lien très direct avec l'identification qu'on fait habituellement entre une matrice (à p lignes et n colonnes) et une application linéaire entre $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$: on confond les deux (éventuellement en disant qu'on utilise les bases canoniques). Et dans §6 on définit la notion d'application multilinéaire et la norme d'une application multilinéaire continue. Ces résultats généralisent les résultats de §1 pour les applications linéaires continues.

Le calcul différentiel proprement dit est exposé dans les sections 2, 3, 5, 7 et 8. Dans §2 on donne la définition d'une différentielle, le lien avec la dérivée (essentiellement le même que le lien entre une application linéaire et sa matrice) et on montre que la classe des applications différentiables est stable pour l'addition, multiplication et composée. À partir de fonctions connues on peut donc construire beaucoup de nouvelles applications différentiables. Comme son titre indique, on trouve dans §3 le théorème des accroissements finis, ou plutôt les théorèmes, car on présentera trois versions : égalité, inégalité primitive et inégalité classique. Ces résultats sont utiles dans beaucoup de preuves et applications. Dans §5 on introduit les notions de dérivée partielle et différentielle partielle. Ces notions permettent de découper le calcul d'une différentielle en plus petits morceaux plus abordables. Le résultat crucial de cette section est le fait qu'on a besoin de savoir — quand on connaît ces morceaux mais quand on ne sait pas si la différentielle existe ! — que ces morceaux soient continues pour pouvoir reconstituer la différentielle à partir de ces morceaux. Les sections 7 et 8 forment un ensemble. Dans §7 on donne la définition d'une différentielle d'ordre plus grand que 1, on explique l'abus de notation/langage entre la définition et l'écriture habituelle et on montre que la classe des applications n fois différentiable est stable pour l'addition, multiplication et composée (une généralisation directe du même résultat pour les applications différentiables). Dans §8 on montre le théorème de Schwarz qui justifie, encore plus, l'amalgame qu'on fait entre différentielle d'ordre n vues comme des différentielles successives ou comme des applications n-linéaires, en montrant que la différentielle d'ordre n "est" une application n-linéaire **symétrique**. Et on termine §8 par la définition d'un développement limité d'ordre n pour une application "arbitraire" et on montre les différentes estimations (selon les hypothèses) de la différence entre l'application et son développement limité : les formules de Taylor-Young, Taylor-Lagrange et Taylor-Laplace.

La section 9 présente une première application du calcul différentiel, à savoir la classification (partielle) des points singuliers d'une fonction à valeurs réelles. C'est la nature de la différentielle seconde qui déterminera (partiellement) si un point critique est un extremum local et si c'est le cas, de quelle nature (maximum ou minimum). On profite de l'occasion pour donner quelques résultats annexes (critère de Sylvester et la règle des signes de Descartes) qui facilitent cette classification.

Dans les sections 10, 11 et 12 on établit les deux résultats (qui sont par ailleurs équivalents) les plus importants du calcul différentiel : le théorème de l'inversion locale et le théorème des fonctions implicites. Dans §10 on prépare le terrain avec entre autres la preuve que l'opération de prendre la réciproque (dans l'espace des isomorphismes d'un espace vectoriel normé) est une application de classe C^∞. §11 est dédié au théorème de l'inversion locale et quelques de ses conséquences, tandis que §12 s'occupe du théorème des fonctions implicites.

On termine ce texte avec deux applications qui sont indépendantes mais liées : les sous-variétés de $\mathbf{R}^n$ dans §13 et la classification des extrema liés dans §14. La notion de sous-variété de $\mathbf{R}^n$ peut être vu comme le tout début d'un cours sur les variétés différentiables ; c'est une application directe du théorème des fonctions implicites — on pourrait presque dire que la définition d'une sous-variété est une reformulation de ce théorème. Un extremum lié est un extremum de la restriction d'une fonction à un sous-ensemble. Les conditions dans lesquelles on peut les classifier reposent sur le théorème des fonctions implicites ; c'est donc une application de ce théorème en combinaison avec la classification des extrema expliquée en §9.

Chapitre I

La différentielle

1. Espaces vectoriels normés et applications linéaires

1.1 Conventions et (abus de) notation. Dans tout le texte qui suivra, on réserve les lettres minuscules i, j, k et n pour des entiers. On réserve aussi les lettres majuscules E, F et G, éventuellement muni d'un indice (comme par exemple E_i), pour des espaces vectoriels normés. En général on ne considérera qu'une seule norme sur chaque espace vectoriel normé, donc il ne peut pas y avoir confusion quand on note toutes ces normes par le même symbole $\|\cdot\|$. Et ceci s'applique aussi aux espaces vectoriels normés qu'on construit à partir d'autres espaces vectoriels normés (comme par exemple l'espace des applications linéaires continues). L'exception est formée par les espaces produits, y compris les espaces $\mathbf{R}^n$, où on a plusieurs choix (équivalentes) pour une norme. On choisira la norme $\|\cdot\|_\infty$ (voir [1.13]) et on gardera cette notation.

Définition/Notation. Si V est un espace vectoriel, alors on indique par une étoile * en exposant le fait qu'on enlève le vecteur nul :

$$V^* = V \setminus \{0\} \equiv \{\, v \in V \mid v \neq 0 \,\} \ .$$

1.2 Définitions. • Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbf{R}$). Alors une application $N : E \to \mathbf{R}$ est appelé *une norme* si elle vérifie les quatre conditions

(i) $\forall x \in E : N(x) \geqslant 0$ (on aurait pu dire $N : E \to [0, \infty[\,$),

(ii) $N(x) = 0 \ \Rightarrow x = 0$,

(iii) $\forall x \in E\ \forall \lambda \in \mathbf{R} : N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$ et

(iv) $\forall x, y \in E : N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (appelé *l'inégalité triangulaire*).

Il est d'habitude de noter une norme, pas par une lettre (ici la lettre N), mais par des doubles barres, c'est-à-dire qu'on écrit $\|x\|$ au lieu de $N(x)$.

• Un *espace vectoriel normé* est un couple $(E, \|\cdot\|\,)$, où E est un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E.

• Soit $(E, \|\cdot\|\,)$ un espace vectoriel normé. La *boule ouverte de rayon r et de centre x (pour la norme $\|\cdot\|$ sur E)*, notée $B_r(x)$, est le sous-ensemble de E défini par

$$B_r(x) = \{\, y \in E \mid \|y - x\| < r \,\} \ .$$

Ⓟ **1.3 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|\,)$ un espace vectoriel normé et soit $x, y \in E$ arbitraire. Alors on a l'inégalité*

$$\|x - y\| \geqslant \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \ .$$

P **1.4 Lemme.** *Soit $N : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une norme sur $\mathbf{R}$, alors $\exists r > 0\ \forall x \in \mathbf{R} : N(x) = r \cdot |x|$.*

Nota Bene. Dans la suite on choisira *toujours* la valeur absolue comme norme sur $\mathbf{R}$, c'est-à-dire qu'on prend la valeur $r = 1$ dans [1.4].

Définitions. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$. On dit que *A est ouvert (pour la norme $\|\cdot\|$ sur E)* si $\forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$. Un *voisinage ouvert de $x \in E$* est un ouvert $A \subset E$ contenant x.

P **1.5 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$ la boule (dite ouverte) $B_r(x)$ est un ouvert pour la norme $\|\cdot\|$ et la collection*

$$\mathcal{T} = \{\, A \subset E \mid A \text{ est un ouvert pour la norme } \|\cdot\| \,\}$$

est une topologie séparée sur E.

1.6 Définition. Soit $U \subset E$ un sous-ensemble et soit $f : U \to F$ une application. On dit que *f est k-lipschitzienne* ou que *f est lipschitzienne de rapport k* avec $k \geqslant 0$ si

$$\forall x, y \in U \quad : \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k \cdot \|x - y\| \quad .$$

On dit que *f est lipschitzienne* s'il existe $k \geqslant 0$ tel que f est k-lipschitzienne. Et on dit que *f est contractante* si f est k-lipschitzienne pour un $k < 1$ (auquel cas on dit que k est le *coefficient de contraction* de f).

P **1.7 Lemme.** *Soit $f : U \to F$ une application lipschitzienne. Alors f est continue.*

P **1.8 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbf{R}$ est Lipschitzienne, donc continue.*

P **1.9 Lemme.** *Soit $A : E \to F$ une application linéaire. Alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est continue ;*

(ii) *A est continue en 0 ;*

(iii) *il existe $C \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in E$ on a $\|A(x)\| \leqslant C \cdot \|x\|$;*

(iv) *f est lipschitzienne.*

1.10 Définition. Soit N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On dit que *N_1 et N_2 sont des normes équivalentes* si elles induisent la même topologie sur E [1.5].

Ⓟ **1.11 Lemme.** *Soit E un espace vectoriel et $N_1, N_2 : E \to \mathbf{R}$ deux normes sur E. Alors N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement s'il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que*

$$\forall x \in E : N_1(x) \leqslant C_1 \cdot N_2(x) \qquad et \qquad \forall x \in E : N_2(x) \leqslant C_2 \cdot N_1(x) \ .$$

Remarque pour les curieux. La définition de l'équivalence de deux normes qu'on trouve dans la littérature est (presque) toujours la propriété (équivalente) donnée dans [1.11], pas la définition qu'on a donné dans [1.10]. Par contre, la définition [1.10] est plus naturelle, car cela relie l'équivalence de deux norme à l'égalité des topologies induites, impliquant directement que les classes d'équivalences associées sont les topologies sur E (mais seulement les topologies induites par une norme, car il existe des topologies qui ne sont pas induite par une norme).

Ⓟ **1.12 Proposition.** *Soit $(E_i, \|\cdot\|)$, $i = 1, \ldots, n$ des espaces vectoriels normés et $p \in [1, \infty]$.*

(i) *Les applications $\|\cdot\|_p : E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbf{R}$ définies par*

$$v = (v_1, \ldots, v_n) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \|v\|_p = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n \|v_i\|^p \Big)^{1/p} & si\ p < \infty, \\ \|v\|_\infty = \displaystyle\max_{i=1,\ldots,n} \|v_i\| \end{cases}$$

sont des normes sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.

(ii) *Pour $1 \leqslant p < q < \infty$, on a les inégalités*

$$\|v\|_\infty \ \leqslant\ \|v\|_q \ \leqslant\ \|v\|_p \ \leqslant\ n^{1/p} \cdot \|v\|_\infty \ .$$

(iii) $\displaystyle\lim_{p \to \infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$.

(iv) *Toutes les normes $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$ sont équivalentes.*

1.13 Convention. Dans la suite on munira un produit fini d'espaces vectoriels normés toujours de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (sauf bien sûr quand on précise une autre norme explicitement). Ceci s'applique en particulier à l'espace $\mathbf{R}^n$ qu'on voit comme le produit de n facteurs de l'espace vectoriel normé $\mathbf{R}$ muni de la norme donnée par la valeur absolue. Ce choix a l'avantage que, pour $r > 0$ et $(v_1, \ldots, v_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, on a l'égalité

$$B_r\big((v_1, \ldots, v_n)\big) = B_r(v_1) \times \cdots \times B_r(v_n) \ ,$$

où $B_r(v_i)$ est la boule (de rayon r et de centre v_i) dans E_i.

1.14 Définitions. • Soit E un espace vectoriel. Un *produit scalaire* sur E est une application $B : E \times E \to \mathbf{R}$ vérifiant les conditions suivantes.

PS1 $\forall x, y, z \in E\ \forall \lambda \in \mathbf{R} : B(x + \lambda y, z) = B(x, z) + \lambda \cdot B(y, z)$ (*linéarité de B dans la première variable*) ;

PS2 $\forall x, y, z \in E\ \forall \lambda \in \mathbf{R} : B(x, y + \lambda z) = B(x, y) + \lambda \cdot B(x, z)$ (*linéarité de B dans la deuxième variable*) ;

PS3 $\forall x, y \in E : B(x, y) = B(y, x)$ (*symétrie de B*) ;

PS4 $\forall x \in E^* : B(x,x) > 0$ (*B est définie positive*).

Une application $B : E \times E \to \mathbf{R}$ vérifiant les deux conditions (PS1) et (PS2) est appelée *bilinéaire*. On dit aussi qu'un produit scalaire est *une application bilinéaire symétrique définie positive*. Voir aussi [6.1] et [9.2].

• Il est d'habitude de noter un produit scalaire, pas par une lettre (ici la lettre B), mais par des crochets, c'est-à-dire qu'on écrit $\langle x, y\rangle$ au lieu de $B(x,y)$.

• Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ est (aussi) appelé *un espace préhilbertien*.

Ⓟ **1.15 Lemme (projection orthogonale).** *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et soit $x, y \in E$ avec $x \neq 0$. Alors on peut décomposer y d'une façon unique en un vecteur orthogonal à x et un vecteur colinéaire à x. Plus précisément, il existe des vecteurs uniques $y_\perp, y_\| \in E$ tels que*

$$y = y_\perp + y_\| \qquad , \qquad \langle x, y_\perp\rangle = 0 \qquad , \qquad \exists \lambda \in \mathbf{R} : y_\| = \lambda \cdot x \ .$$

En plus on a $\lambda = \langle x,y\rangle / \langle x,x\rangle$.

Ⓟ **1.16 Corollaire (l'inégalité de Cauchy-Schwarz).** *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et soit $x, y \in E$. Alors on a l'inégalité*

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle \ .$$

En plus, on a égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

Ⓟ **1.17 Lemme.** *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Alors l'application $\|\ \| : E \to \mathbf{R}$ définie par*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

est une norme sur E, appelée la norme associée au produit scalaire.

Remarque pour les curieux. Dans le cas d'un espace vectoriel complexe, la définition d'un produit scalaire change légèrement par rapport au cas réel. Dans ce cas le produit scalaire prend ses valeurs dans $\mathbf{C}$ et on remplace la linéarité dans la première variable (PS1) par l'anti-linéarité [1] :

$$\forall x, y, z \in E\ \forall \lambda \in \mathbf{C} : B(x + \lambda y, z) = B(x,z) + \overline{\lambda} \cdot B(y,z) \ .$$

Dans ce cas on ne parle plus d'une application bilinéaire, mais d'une application *sesquilinéaire*. L'anti-linéarité dans la première variable couplée avec la linéarité dans la deuxième variable "oblige" de changer la condition de symétrie (PS3) en

$$\forall x, y \in E : B(y,x) = \overline{B(x,y)} \ .$$

1. Pour la définition d'un produit scalaire sur un espace vectoriel complexe il existe deux conventions : ou bien on exige la linéarité dans la deuxième variable et l'anti-linéarité dans la première comme ci-dessus, ou bien on exige la linéarité dans la première variable et l'anti-linéarité dans la deuxième. Le choix pour l'une ou l'autre convention est une affaire de goût. Dans la littérature mathématique on trouve surtout la deuxième convention, dans la littérature physique on trouve surtout la première. Ici on suit donc la convention des physiciens.

Ce changement a le bénéfice supplémentaire de donner un sens à la condition que B doit être définie positive, car avec cette condition de symétrie on est sûr d'avoir $B(x,x) \in \mathbf{R}$. Un produit scalaire sur un espace vectoriel complexe est "donc" une application sesquilinéaire symétrique définie positive.

Les résultats qu'on a montré dans le cas réel (la projection orthogonale, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la norme associée) restent valables. Même les preuves ne changent guère ; il suffit de rajouter aux bons endroits des complexes conjugués et utiliser l'égalité $\lambda \cdot \overline{\lambda} = |\lambda|^2$ (ce qui explique en même temps l'utilisation de la valeur absolue dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, inutile dans le cas réel).

Ⓟ **1.18 Proposition.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Ⓟ **1.19 Lemme.** *Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E \to F$ est continue.*

Définitions. On note $\mathcal{L}(E;F)$ l'ensemble des application linéaires *continues* de E dans F. C'est un espace vectoriel avec l'addition usuelle d'applications et la multiplication usuelle d'une application linéaire par un réel. On rappelle qu'une application linéaire à valeurs dans $\mathbf{R}$ est appelé une *forme linéaire* et donc que l'espace $\mathcal{L}(E;\mathbf{R})$ est l'espace des formes linéaires continues (sur E). L'espace $\mathcal{L}(E;\mathbf{R})$ est aussi appelé le *dual topologique de E*.

Ⓟ **1.20 Lemme.** *L'application $N : \mathcal{L}(E;F) \to \mathbf{R}$ définie par*

$$N(A) = \sup_{x \in E^*} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}$$

est une norme.

1.21 Définition/convention. On muni l'espace $\mathcal{L}(E;F)$ toujours de la norme N définie en [1.20] et dans la suite on la notera comme $\|\cdot\|$, voir [1.1]. Cette norme sur $\mathcal{L}(E;F)$ est souvent appelée *la norme d'opérateur*.

Ⓟ **1.22 Lemma.** *Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $A \in \mathcal{L}(E;F)$. Alors on a les égalités*

$$\begin{aligned} \|A\| &\overset{\text{déf.}}{=} \sup_{x \in E^*} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in E\,, \|x\| \leqslant 1} \|A(x)\| = \sup_{x \in E\,, \|x\| = 1} \|A(x)\| \\ &= \inf \{\, C \in \mathbf{R}_+ \mid \forall x \in E : \|A(x)\| \leqslant C \cdot \|x\| \,\} \ . \end{aligned}$$

Ⓟ **1.23 Lemme.** *Soit $A : E \to F$ une application linéaire et soit $C \geqslant 0$. Si pour tout $x \in E$ on a l'inégalité $\|A(x)\| \leqslant C \cdot \|x\|$, alors A est continue et $\|A\| \leqslant C$.*

Ⓟ **1.24 Lemme.** *Pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}; E)$ on a l'égalité $\|A\| = \|A(1)\|$, où à gauche on utilise la norme d'opérateur et à droite la norme dans E.*

Ⓟ **1.25 Lemme.** *Soit L_1, L_2 deux normes équivalentes sur E et soit M_1, M_2 deux normes équivalentes sur F. Alors les normes d'opérateurs N_1, N_2 définies sur $\mathcal{L}(E; F)$ par*

$$N_i(A) = \sup_{x \in E^*} \frac{M_i\big(A(x)\big)}{L_i(x)}$$

sont équivalentes.

Ⓟ **1.26 Lemme.** *Soit $x \in E$, $A \in \mathcal{L}(E; F)$ et $B \in \mathcal{L}(F; G)$. Alors on a les majorations*

$$\|A(x)\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \qquad \textit{et} \qquad \|B \circ A\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \ .$$

Ⓟ **1.27 Corollaire.** *Soit $v \in E$. Alors l'application $\mathcal{E}_v : \mathcal{L}(E; F) \to F$ définie par*

$$\mathcal{E}_v(A) = A(v)$$

est une application linéaire continue vérifiant $\|\mathcal{E}_v\| \leqslant \|v\|$.

Ⓟ **1.28 Lemme.** *Soit $U \subset G$ un ouvert et $\varphi : U \to \mathcal{L}(E; F)$ une application. Si E est de dimension finie, si $e_1, \dots, e_n$ est une base de E et si toutes les applications $\varphi_i : U \to F$, $i = 1, \dots, n$ définies par*

$$\varphi_i = \mathcal{E}_{e_i} \circ \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_i(x) = \big(\varphi(x)\big)(e_i)$$

sont continues au point $a \in U$, alors φ est continue au point a. Voir aussi [16.10].

Ⓟ **1.29 Lemme.** *Soit $A : E \to F$ une application linéaire vérifiant $\|A(v)\| = \|v\|$ pour tout $v \in E$. Alors A est injective et continue avec $\|A\| = 1$. Si en plus A est surjective, alors $A^{-1} : F \to E$ est aussi continue.*

1.30 Définitions. Soit $A \in \mathcal{L}(E; F)$. On dit que A *est un isomorphisme entre E et F* si A est bijective et si $A^{-1} : F \to E$ est continue. On dit aussi qu'un isomorphisme entre deux espaces vectoriels normés est une application linéaire bijective et *bicontinue*. On note par $\mathrm{Isom}(E; F)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E; F)$ des isomorphismes entre E et F :

$$\mathrm{Isom}(E; F) = \{\, A \in \mathcal{L}(E; F) \mid A \text{ bijective et } A^{-1} \in \mathcal{L}(F; E) \,\} \ .$$

Une *isométrie* entre E et F est une application linéaire $A : E \to F$ vérifiant la condition

$$\forall v \in E \quad : \quad \|A(v)\| = \|v\| \ .$$

Selon [1.29] une isométrie appartient donc automatiquement à $\mathcal{L}(E; F)$. Par le même résultat, une isométrie surjective appartient à $\mathrm{Isom}(E; F)$, auquel cas on dit que A est un *isomorphisme isométrique*.

Remarque pour les curieux. Si $A : E \to F$ est un isomorphisme, alors l'application $N : E \to \mathbf{R}$ définie par

$$N(e) = \|A(v)\|_F$$

est une norme sur E qui est équivalente à la norme $\|\cdot\|_E$ d'origine sur E. Il s'ensuit que l'application $A : (E, N) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est un isomorphisme isométrique. Autrement dit, en remplaçant la norme sur E par une norme équivalente (mutatis mutandis en remplaçant la norme sur F par une norme équivalente), on peut transformer tout isomorphisme en un isomorphisme isométrique. Étant donné que pour la plupart des applications le choix d'une norme à l'intérieur d'une classe d'équivalence n'a pas d'importance, on peut se poser la question si la notion d'un isomorphisme isométrique à un intérêt quelconque. La réponse est oui avec conviction. D'abord parce que dans la plupart des cas l'espace E vient avec une norme "naturel" et que la norme qui rend un isomorphisme isométrique dépend de l'isomorphisme. Pour chaque isomorphisme on devrait donc changer la norme sur E pour le rendre isométrique (et détruire la propriété d'isométrie pour un autre). Et ensuite (mais c'est un autre aspect du même argument) parce que, avec un choix naturel d'une norme sur E, on en déduit que certains isomorphismes sont plus naturels que d'autres.

Discussion. En général il n'y a pas un choix préféré pour une base dans un espace vectoriel. Mais pour certains espaces vectoriels il y a des choix qui sont plus préférables que d'autres. C'est le cas notamment pour l'espace $\mathbf{R}^n$, produit de n copies de la droite réelle. Dans cet espace le choix de la base canonique est plus naturel que d'autres. D'autre part, le choix de la base canonique pour $\mathbf{R}^n$ ne se justifie pas par un critère intrinsèque lié à l'espace $\mathbf{R}^n$. Ce choix est plutôt lié au fait qu'on le voit comme le produit de n copies de $\mathbf{R}$. Une autre choix de base nous donne une autre écriture de $\mathbf{R}^n$ comme produit de n copies de $\mathbf{R}$: les coefficients par rapport à cette nouvelle base.

Par contre, dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}$ lui même (mais pas dans n'importe quel espace vectoriel de dimension 1) le choix de la base canonique, c'est-à-dire l'élément 1, se justifie par un critère intrinsèque. Car l'espace $\mathbf{R}$ est aussi muni d'une structure de corps et la base canonique est en même temps l'élément neutre pour la multiplication.

Ⓟ **1.31 Lemme.** *L'application $\Phi : \mathcal{L}(\mathbf{R}; F) \to F$ définie par $\Phi(A) = A(1)$ est un isomorphisme isométrique. Si on note $v = A(1) \equiv \Phi(A) \in F$, alors on a*

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \quad : \quad A(\lambda) = \lambda v \quad .$$

1.32 Discussion. Il est d'habitude d'écrire la multiplication d'un élément v d'un espace vectoriel par un réel λ par λv, c'est-à-dire qu'on écrit le réel *à gauche* du vecteur. Mais rien ne s'oppose à écrire le réel *à droite* du vecteur, avec bien sûr le même résultat :

$$v\lambda \stackrel{\text{déf.}}{=} \lambda v \quad .$$

Pour $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}; F)$ et $v = A(1) \in F$ on obtient donc l'écriture

$$A(\lambda) = v\lambda \quad . \tag{1.33}$$

En vu de cette écriture, il devient donc très tentant d'identifier l'application A avec le vecteur v et d'écrire

$$A = v$$

comme abréviation de (1.33), au lieu de la formule correcte $A(1) = v$. Étant donné que l'application $A \mapsto A(1) = v$ est un isomorphisme isométrique, il n'est pas seulement tentant d'identifier l'application A avec le vecteur $v = A(1)$, mais c'est même autorisé ! Dans la suite on fera régulièrement appel à cette identification, mais on gardera la différence de notation pour ne pas trop embrouiller les pistes.

Définitions. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans E. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *une suite de Cauchy* si elle vérifie la condition

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n, m \in \mathbf{N} \quad : \quad n, m \geqslant N \ \Rightarrow \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon \ .$$

On dit que E *est complet* si toute suite de Cauchy converge dans E. Un espace vectoriel normé complet est aussi appelé *un espace de Banach*.

Si E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et si E est complet pour la norme associée au produit scalaire, on dit que E est *un espace de Hilbert*. Un espace de Hilbert est donc en particulier un espace de Banach.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans E et $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, $n \in \mathbf{N}$ la suite des sommes partielles associée. Alors on dit que *la série de terme général x_n converge* si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans E. Et on dit que *la série de terme général x_n converge abslolument* si la série, à valeurs réelles, de terme général $\|x_n\|$, converge.

Ⓟ **1.34 Lemme.** *Soit E un espace vectoriel normé et soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes équivalentes. Alors $(E, \|\cdot\|_1)$ est complet si et seulement si $(E, \|\cdot\|_2)$ est complet.*

Ⓟ **1.35 Lemme.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite absolument convergente dans E, alors c'est une suite convergente vérifiant*

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \Big\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| \ .$$

Ⓟ **1.36 Lemme.** *Si F est complet (i.e., un espace de Banach), alors $\mathcal{L}(E;F)$ est complet (i.e., un espace de Banach).*

Ⓟ **1.37 Lemme.** *Soit $(E_i, \|\cdot\|)$, $i = 1, \ldots, n$ des espaces de Banach et $p \in [1, \infty]$. Si on muni le produit $E_1 \times \cdots E_n$ d'une des normes $\|\cdot\|_p$ [1.12], alors c'est aussi un espace de Banach.*

Ⓟ **1.38 Théorème du point fixe.** *Soit E un espace de Banach, soit $B \subset E$ un sous-ensemble fermé et soit $f : B \to B$ une application contractante. Alors il existe un unique $x_o \in B$ tel que $f(x_o) = x_o$.*

Remarque pour les comparateurs. La version du théorème du point fixe telle qu'on l'a énoncé ici est adaptée à nos besoins et n'est nullement la version standard. Le cadre naturel de ce théorème est un espace métrique complet (X, d) et une application contractante $f : X \to X$. Même la preuve n'est pas plus compliquée dans ce cadre naturel. Qu'on ne l'a pas donné nous a simplement évité d'introduire la notion d'espace métrique (complet).

Ⓟ **1.39 Lemme/Exemple.** *Soit X un ensemble, F un espace vectoriel normé complet (i.e., de Banach) et $C_b(X;F)$ l'espace vectoriel des applications bornées de X à valeurs dans F :*

$$C_b(X;F) = \{\, f : X \to F \mid \exists M \in \mathbf{R}\ \forall x \in X : \|f(x)\| \leqslant M \,\} \ .$$

Alors l'application $\|\cdot\|_\infty : C_b(X;F) \to \mathbf{R}$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$$

est une norme sur $C_b(X;F)$, qu'on appelle la norme de la convergence uniforme *et, muni de cette norme, $C_b(X;F)$ est un espace de Banach.*

Ⓟ **1.40 Lemme/Exemple.** *Soit X un espace topologique, F un espace vectoriel normé complet (i.e., de Banach) et $C_b^0(X;F)$ l'espace vectoriel des applications continues et bornées de X à valeurs dans F :*

$$C_b^0(X;F) = \{\, f \in C_b(X;F) \mid f \text{ continue} \,\} \ .$$

Alors $C_b^0(X;F)$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ est un sous-espace fermé de $C_b(X;F)$, donc complet. Autrement dit, $\big(C_b^0(X;F), \|\cdot\|_\infty\big)$ est un espace de Banach.

1.41 Définition. Soit X un espace topologique et F un espace vectoriel normé. Alors $C^0(X;F)$ désigne l'espace vectoriel des applications continues $f : X \to F$:

$$C^0(X;F) = \{\, f : X \to F \mid f \text{ continue} \,\} \ .$$

Ⓟ **1.42 Lemme.** *Soit X un espace topologique compact et F un espace vectoriel normé. Alors on a l'égalité $C^0(X;F) = C_b^0(X;F)$.*

Ⓟ **1.43 Lemme/Définition.** *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in [1,\infty]$. Alors l'espace $\mathbf{R}^n$, vu comme produit de n copies de l'espace $\mathbf{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_p$ [1.12] est un espace de Banach. Dans le cas $p = 2$ on parle de* la norme euclidienne.

Ⓟ **1.44 Corollaire/Définition.** *La norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbf{R}^n$ est la norme associée au* produit scalaire usuel $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathbf{R}^n$ *défini par*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i \ .$$

Ⓟ **1.45 Lemme/Définition.** *Pour* $p \in [1,\infty[$ *on définit l'espace* ℓ^p *comme*

$$\ell^p = \Big\{\, x : \mathbf{N} \to \mathbf{R} \;\Big|\; \sum_{n\in\mathbf{N}} |x(n)|^p < \infty \,\Big\} \ .$$

Alors ℓ^p *est un espace vectoriel, l'application* $\|\cdot\|_p : \ell^p \to \mathbf{R}$ *définie par*

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbf{N}} |x(n)|^p\Big)^{1/p}$$

est une norme sur ℓ^p *et, muni de cette norme,* ℓ^p *est un espace de Banach.*

Définition. À part les espaces ℓ^p avec $p \in [1,\infty[$, il existe aussi l'espace ℓ^∞, mais celui-ci est un exemple particulier d'un espace $C_b(X,\mathbf{R})$:

$$\ell^\infty = C_b(\mathbf{N};\mathbf{R}) = \{\, x : \mathbf{N} \to \mathbf{R} \mid x \text{ est bornée} \,\} \ .$$

Muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|$$

l'espace ℓ^∞ devient donc, comme ses frères les espaces ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$, un espace de Banach.

Ⓟ **1.46 Lemme.** *Si* $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ *et* $x \in \ell^p$, *alors*

$$x \in \ell^q \qquad , \qquad \|x\|_q \leqslant \|x\|_p \qquad \textit{et} \qquad \lim_{q\to\infty} \|x\|_q = \|x\|_\infty \ .$$

De plus, l'inclusion $\ell^p \subset \ell^q$ *est stricte :* $\ell^p \neq \ell^q$.

Ⓟ **1.47 Lemme/Définition.** *Pour tout* $x, y \in \ell^2$ *la série* $\sum_{i=0}^\infty x_i\, y_i$ *est absolument convergente. En plus, l'application* $\langle\cdot,\cdot\rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbf{R}$ *définie par*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^\infty x_i\, y_i$$

est un produit scalaire sur ℓ^2 *(appelé le produit scalaire usuel sur* ℓ^2*) qui induit la norme* $\|\cdot\|_2$.

Remarque pour les curieux. Il est parfois utile d'élargir l'ensemble $[0,\infty[$ avec l'élément ∞ et de considérer une norme comme une application à valeurs dans $[0,\infty]$. Si on fait cela, on peut considérer l'espace $E = \{\, x : \mathbf{N} \to \mathbf{R} \,\}$ de toutes les fonctions définies sur $\mathbf{N}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ et sur E on peut définir les "normes" $\|\cdot\|_p$ pour tout $p \in [1,\infty]$. Ainsi on peut définir les espaces ℓ^p comme des sous-espaces de E par

$$\ell^p = \{\, x \in E \mid \|x\|_p < \infty \,\} \ .$$

Ceci évite d'avoir à montrer d'abord que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^p$ est convergente, avant qu'on puisse parler de sa norme. Cela simplifie donc le discours, mais nullement le travail, car il faut quand même montrer que ces sous-ensembles sont des sous-espaces vectoriels !

2. La différentielle

Il y a (au moins) deux façons de comprendre l'idée derrière la définition de la différentielle d'une fonction ou la définition de la différentiabilité d'une fonction en un point. La première idée est de zoomer le graphe de la fonction. Au début on a le graphe G_f d'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$, qui est un sous-ensemble du produit $I \times \mathbf{R}$ donné par

$$G_f = \{\, \big(x, f(x)\big) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in I \,\} \ .$$

On visualise ce graphe comme une image sur notre écran d'ordinateur et on place le point $\big(a, f(a)\big)$ au milieu de l'écran. Initialement (avant de zoomer) on suppose que l'écran représente le carré $[a-1, a+1] \times [f(a)-1, f(a)+1] \subset \mathbf{R}^2$. Commençons à exprimer la continuité de f au point a. Pour cela on fait des zooms horizontales : après un zoom, l'écran (qui n'a pas changé de taille) représente le rectangle $[a-h, a+h] \times [f(a)-1, f(a)+1] \subset \mathbf{R}^2$; la valeur de h est donc une mesure du zoom : plus que h est petit, plus que le zoom sera puissant. Et la fonction f sera continue au point a si ce morceau de graphe qu'on voit à l'écran devient de plus en plus horizontal/plat quand on prend des zooms de plus en plus puissants. Autrement dit, si on se fixe une (petite) bande horizontale autour la valeur $f(a)$, on peut trouver un zoom (une valeur de h) tel que le morceau de graphe visible à l'écran reste dans cette bande. Et bien sûr, plus que la bande sera étroite, plus qu'on devrait zoomer. Et il n'est même pas nécessaire de regarde tout le morceau du graphe visible à l'écran, il suffit de regarde ce qui se passe au bord dans le sens suivant. La fonction f est continue au point a si pour tout bande horizontale de taille $\varepsilon > 0$ on peut trouver un zoom minimale $\delta > 0$ tel que pour tout zoom plus puissant $|h| < \delta$ la valeur $f(a+h)$ de f au bord de l'écran reste dans la bande, c'est-à-dire $|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon$. Ainsi on retrouve donc la définition habituelle de la continuité.

Pour la dérivabilité de f au point $a \in U$ on peut utiliser la même idée de zoomer, sauf qu'il faut zoomer en même temps l'axe vertical ! Il faut donc décider quel zoom utiliser verticalement pour un zoom horizontal. Pour la dérivée on prend le même zoom : après un zoom l'écran ne représente que le carré $[a-h, a+h] \times [f(a)-h, f(a)+h]$. Si on fait cela avec des zooms de plus en plus puissants, alors le morceau de graphe qu'on voit à l'écran sera de plus en plus plat (non-courbe), mais par forcément horizontal. Ce qu'on verra ressemblera de plus en plus au graphe d'une application linéaire (affine). Et la pente A de cette application linéaire sera la dérivée. L'idée est donc que f sera dérivable en a si le morceau de graphe visible à l'écran ressemble de plus en plus à une droite quand on prend des zooms de plus en plus puissants. Notons maintenant qu'une droite de pente A qui passe par le point $\big(a, f(a)\big)$ ne change pas à l'écran sous l'effet de nos zooms. Et on applique maintenant la même idée que pour la continuité : f sera dérivable au point a si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un zoom minimale $\delta > 0$ tel que pour tout zoom plus puissant $|h| < \delta$ la valeur $f(a+h)$ de f au bord de l'écran reste proche (dans le sens plus petit que ε) de la droite d'équation $y = f(a) + A(x-a)$. Mais il ne faut pas oublier que la taille verticale de l'écran a aussi changé ! Et donc, quand on veut que, à l'écran, la différence entre $f(a+h)$ et la valeur de la droite $y = f(a) + Ah$ soit petite (plus petite que ε), alors il faut la relater à la taille $|h|$ de l'écran ! On obtient donc la formule pour que f soit dérivable au point a :

$$\exists A \in \mathbf{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall |h| < \delta : \big| f(a+h) - \big(f(a) + Ah\big)\big| < \varepsilon |h| \ . \tag{2.1}$$

Notons ici une petite différence entre la définition de la continuité et la dérivabilité : pour la continuité de f au point a, on connaît la valeur de f au point a. Par contre, pour la dérivabilité de f au point a, on ne connaît pas (encore) la valeur éventuelle de la dérivée. Il faut donc rajouter au début de la définition l'hypothèse de l'existence d'un $A \in \mathbf{R}$ qui va être la dérivée de f au point a.

Bien sûr, en effectuant quelques petites équivalences on arrive facilement à la définition habituelle de la dérivée de f au point a. En utilisant le fait qu'une limite d'une fonction (à valeurs réelles) est nulle si et seulement si la limite de sa valeur absolue est nulle, on obtient les équivalences

$$\begin{aligned}
& \exists A \in \mathbf{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall |h| < \delta : \big|f(a+h) - \big(f(a) + Ah\big)\big| < \varepsilon |h| \\
\iff\ & \exists A \in \mathbf{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall |h| < \delta : \frac{|f(a+h) - f(a) - Ah|}{|h|} < \varepsilon \\
\iff\ & \exists A \in \mathbf{R} : \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{h} \right| = 0 \\
\iff\ & \exists A \in \mathbf{R} : \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{h} = 0 \\
\iff\ & \exists A \in \mathbf{R} : \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A \quad . \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

L'avantage de la formulation (2.1) sur la définition classique (2.2) est que (2.1) est plus facilement généralisable à des fonctions de plusieurs variables. Si on regarde d'abord la définition (classique) de la continuité de f au point a, on s'aperçoit vite que la généralisation à des fonctions de plusieurs variables, c'est-à-dire à des fonctions $f : U \subset E \to F$ avec E et F des espaces vectoriels quelconques, se fait simplement en remplaçant les valeurs absolues par les normes dans ces espaces.

Si on veut généraliser la définition classique de la dérivée de f au point a, on rencontre directement un problème : on ne peut pas diviser par un vecteur ! Par contre, il est très simple de remplacer les valeurs absolues dans (2.1) par les normes dans les espaces concernés. Le seul problème qui reste est de décider par quel genre d'objet il faut remplacer la valeur $A \in \mathbf{R}$. Et là encore notre idée de zoomer peut nous aider. Si on pense à l'hémisphère nord de la terre, on peut le voir comme le graphe de la fonction $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Vu de l'espace, on voit bien que c'est courbe. Mais pour les personnes sur terre, la terre apparaît bien comme plat. Autrement dit, en zoomant le graphe devient de plus en plus plat dans le sens que cela ressemble de plus en plus à un plan dans l'espace $\mathbf{R}^3$. Et un plan dans l'espace est le graphe d'une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, comme une droite est le graphe d'une application linéaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (on déplace le point $\big(a, f(a)\big)$ vers l'origine). Ainsi on arrive à l'idée qu'une fonction $f : U \subset E \to F$ est différentiable en un point $a \in U$ s'il existe une application linéaire $A : E \to F$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \|h\| < \delta : \|f(a+h) - f(a) - A(h)\| < \varepsilon \|h\| \quad .$$

En réécrivant ceci sous forme d'une limite, on arrive presque à la définition officielle de la notion de différentiabilité de f au point a :

$$f \text{ est différentiable en } a \quad \overset{\text{presque}}{\iff} \quad \exists A : E \to F \text{ linéaire } : \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - A(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad .$$

La seule différence avec la définition officielle est que la définition officielle demande (en plus) que l'application $A : E \to F$ soit continue. Cette condition est automatiquement vérifiée quand la dimension de E est finie [1.19], mais impose une restriction pour des espaces E de dimension infinie. Une des raisons pour exiger que l'application A soit continue est que sans cette condition on ne peut pas assurer qu'une fonction qui est différentiable en a est automatiquement continue en a (pire, on peut donner des exemples où ce n'est pas le cas). Étant donné qu'on tient vraiment à ce résultat, on rajoute donc l'exigence que A doit être continue.

Une deuxième idée pour comprendre la définition de la différentielle est plutôt formelle et est, de facto, déjà donnée dans les calculs ci-dessus. Cela commence avec le constat que la définition de la dérivée ne se généralise pas à des situations où l'espace de départ n'est plus $\mathbf{R}$ mais de dimension supérieur à 1, pour la simple raison qu'on ne peut pas diviser par un vecteur. On cherche donc une reformulation de la définition d'une dérivée qui ne fait pas intervenir la division par un vecteur. Et on tombe facilement sur les équivalences données dans (2.2), mais lu dans l'autre sens. Une fois qu'on a cette reformulation, on remplace les valeurs absolues par des normes et on a la définition de la différentielle, avec la même question sur la nature de l'objet A.

Reste un seul point à discuter : l'unicité de A. Dans le cas d'une fonction d'une seule variable réelle, on peut réécrire la définition de la différentiabilité sous la forme classique (2.2). Et dans ce cas on peut invoquer l'unicité de la limite pour conclure que si la fonction est dérivable, alors cette limite est unique. On peut donc l'appeler $f'(a)$. Par contre, cette écriture n'est plus valable si la dimension de E est plus grande que 1 et on ne peut plus invoquer l'unicité de la limite pour dire que si l'application $A : E \to F$ existe, alors elle est unique. Il faut donc le montrer séparément. Un autre petit point d'interrogation, mais d'une importance nettement moindre, est la question de la dépendance ou indépendance de l'existence de l'application $A : E \to F$ du choix des normes sur les deux espaces E et F.

Convention locale. Dans toute cette section (sauf quand on écrit explicitement autre chose) E et F désignent deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ désigne un ouvert, $f : U \to F$ une application et $a \in U$ un élément.

Ⓟ **2.3 Lemme.** *Soit $A \in \mathcal{L}(E;F)$, soit $N_E, N'_E : E \to \mathbf{R}$ deux normes équivalentes sur E et $N_F, N'_F : F \to \mathbf{R}$ deux normes équivalentes sur F. Alors on a l'implication*

$$\lim_{h\to 0} \frac{N_F\big(f(a+h) - f(a) - Ah\big)}{N_E(h)} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{h\to 0} \frac{N'_F\big(f(a+h) - f(a) - Ah\big)}{N'_E(h)} = 0 \quad .$$

Ⓟ **2.4 Lemme.** *Soit $A, B \in \mathcal{L}(E;F)$. Si on a les deux égalités*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Bh\|}{\|h\|} \quad ,$$

alors $A = B$.

2.5 Définition. On dit que f *est différentiable en* $a \in U$ s'il existe $A \in \mathcal{L}(E;F)$ telle que

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x) - f(a) - A(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0 \quad ,$$

ce qu'on écrit aussi comme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0 \quad .$$

Selon [2.4], si f est différentiable en a, alors l'application $A \in \mathcal{L}(E;F)$ est unique. Dans ce cas on dit que l'application linéaire *continue* A est *la différentielle de* f *en* a et on écrit $A = (Df)(a)$. On trouve aussi les notations $A = f'(a)$, $A = df_a$ ou $A = T_a f$.

On dit que f *est différentiable (sur* U*)* si elle est différentiable en chaque point $a \in U$. On dit que f *est de classe* C^1 si elle est différentiable (sur U) et si l'application $Df : U \to \mathcal{L}(E;F)$, $a \mapsto (Df)(a)$ est continue.

Remarque pour les comparateurs. Dans le cas particulier $F = \mathbf{R}$, c'est-à-dire une fonction réelle définie sur U, la différentielle est un élément du dual topologique : $(Df)(a) \in \mathcal{L}(E;\mathbf{R})$. Dans ce cas on remplace parfois le mot *différentielle* par le mot *gradient* et la notation $(Df)(a)$ par $\mathrm{grad}(f)(a)$ ou $(\nabla f)(a)$. On a donc les égalités (par définition/notation)

$$(\mathrm{grad}\, f)(a) \equiv (\nabla f)(a) \equiv (Df)(a) \quad .$$

Définition. Soit $I \subset \mathbf{R}$ un ouvert, $a \in I$ et $f : I \to F$ une application. On dit que f est *dérivable en* a si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe. Si c'est le cas, on dit que cette limite, notée $f'(a)$, est la *dérivée de* f *au point* a, c'est-à-dire qu'on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad .$$

Et on dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en chaque point $a \in I$.

Ⓟ **2.6 Lemme.** *Soit* $I \subset \mathbf{R}$ *un ouvert et* $f : I \to F$ *un application. Alors* f *est dérivable en* $a \in I$ *si et seulement si* f *est différentiable en* a*. Si c'est le cas, on a les égalités* $f'(a) = \big((Df)(a)\big)(1)$ *et* $\big((Df)(a)\big)(h) = f'(a) \cdot h$*.*

2.7 Nota Bene. Le lecteur attentif aura remarqué qu'il y a une différence entre les mots "dérivable/dérivée" d'un côté et les mots "différentiable/différentielle" de l'autre, bien qu'on a tendance à les confondre. D'abord : la notion de "dérivable/dérivée" n'est définie que pour des fonctions d'une seule variable réelle, tandis que la notion de "différentiable/différentielle" s'applique plus largement. Et ensuite : la dérivée en a est un élément de l'espace d'arrivé, tandis que la différentielle en a est une application linéaire (continue) de l'espace source vers l'espace d'arrivé. Mais comme le montre [2.6], il y a un lien étroit entre ces deux notions ; en paraphrasant

[1.31] on peut dire que le lien entre différentielle et dérivée est donné par l'évaluation de l'application linéaire sur le "vecteur" 1 qui forme (à lui tout seul) la base canonique de $\mathbf{R}$. La distinction entre dérivée et différentielle est donc de la même nature que la distinction entre une application linéaire (entre espaces vectoriels de dimension finie) et sa matrice par rapport à des bases.

Ⓟ **2.8 Lemme.** *Soit $f : U \to F$ une application constante. Alors f est de classe C^1 avec $Df = 0$.*

Ⓟ **2.9 Lemme.** *Soit $A : E \to F$ une application linéaire continue. Alors A est de classe C^1 avec*

$$\big((DA)(x)\big)(h) = A(h) \quad .$$

L'application $DA : E \to \mathcal{L}(E; F)$ est "donc" l'application constante $(DA)(x) = A$.

Ⓟ **2.10 Lemme.** *Si $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$, alors f est continue en a.*

Ⓟ **2.11 Lemme.** *Soit $f, g : U \to F$ deux fonctions. Si f et g sont différentiables en $a \in U$, alors $f + g$ est différentiable en a avec $\big(D(f + g)\big)(a) = (Df)(a) + (Dg)(a)$.*

Ⓟ **2.12 Lemme.** *Soit $f : U \to F$ et $g : U \to \mathbf{R}$ deux applications. Si f et g sont différentiables en $a \in U$, alors $g \cdot f$ est différentiable en a avec*

$$\Big(\big(D(gf)\big)(a)\Big)(v) = g(a) \cdot \big((Df)(a)\big)(v) + \big((Dg)(a)\big)(v) \cdot f(a) \quad . \tag{2.13}$$

Remarque. Il est d'usage d'écrire le résultat de [2.12] sous la forme

$$\big(D(gf)\big)(a) = g(a) \cdot (Df)(a) + f(a) \cdot (Dg)(a) \quad ,$$

ce qui est très suggestif mais qui n'a, pour l'instant, pas de sens : le deuxième terme est un produit d'un vecteur $f(a) \in F$ avec une application linéaire $(Dg)(a) \in \mathcal{L}(E; \mathbf{R})$, et on n'a pas encore défini un tel produit. Si on l'écrit quand même, il faut donc l'interpréter comme en (2.13). Par contre, une telle écriture s'insère dans un cadre plus large de produits tensoriels, où on l'écrit sous la forme $f(a) \otimes (Dg)(a)$, le symbole "$\otimes$" remplaçant le symbole "$\cdot$" d'un produit ordinaire. Un début d'explication de cette écriture se trouve dans [16.62].

Ⓟ **2.14 Lemme.** *Soit $V \subset F$ un ouvert, soit $f : U \to F$ et $g : V \to G$ deux applications telles que $f(U) \subset V$, et soit $a \in U$ et $b = f(a) \in f(U) \subset V$. Si f est différentiable en a et g différentiable en b, alors $g \circ f : U \to G$ est différentiable en a et on a*

$$\big(D(g \circ f)\big)(a) = (Dg)(b) \circ (Df)(a) \equiv (Dg)\big(f(a)\big) \circ (Df)(a) \quad ,$$

ce qui veut dire qu'on a, pour tout $h \in E$,

$$\Big(\big(D(g \circ f)\big)(a)\Big)(h) = \Big((Dg)\big(f(a)\big)\Big)\Big(\big((Df)(a)\big)(h)\Big) \quad .$$

Nota Bene. Dans l'égalité $\big(D(g \circ f)\big)(a) = (Dg)(b) \circ (Df)(a)$ le symbole de composition "$\circ$" apparaît deux fois. Mais il faut bien distinguer ces deux apparitions, car il ne s'agit pas de la composition de mêmes objets ! La première concerne la composée de deux applications différentiables, une comosée qu'on peut appliquer au point $a \in U$. Par contre, la deuxième concerne la composition de deux applications linéaires, dont la "première" (celle écrite à droite !) ne s'applique pas à un point de U (le point a est déjà écrit), mais à un élément arbitraire de E (qui n'est pas encore écrit, ni à gauche de l'égalité, ni à droite ; il apparaît dans la deuxième formule sous la forme d'un $h \in E$). Quand on pense au cas de la dérivée d'une composée de deux fonctions réelles d'une seule variable réelle, cette formule s'écrit comme

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a) \quad ,$$

dans laquelle on ne voit qu'une seule fois le symbole de composition ; la deuxième fois c'est devenu une simple multiplication.

2.15 Nota Bene. On peut résumer les trois résultats [2.11], [2.12] et [2.14] en disant que la classe des applications différentiable (en un point) est stable sous les opérations d'addition, multiplication et composition. Étant donné que la classe des fonctions continues est également stable sous ces opérations, il s'ensuit que la classe des applications de classe C^1 (sur leur domaine de définition) est également stable sous ces opérations. Mais on a plus. Étant donné que dans $\mathbf{R}$ on a deux autres opérations — soustraction et division — on pourrait croire qu'on n'a pas (encore) montré la stabilité sous ces deux opérations. Mais cette impression est erronée : la soustraction peut être vu comme l'enchaînement de la multiplication par -1 suivi de l'addition, donc on a stabilité sous l'opération de soustraction. Et l'opération de division peut être vu comme la composition de l'application du dénominateur avec l'opération dérivable $I : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$ définie comme $I(x) = x^{-1} \equiv 1/x$ (avec dérivée $I'(x) = -1/x^2 \equiv -x^{-2}$). Et parce qu'on a stabilité sous composition, on a aussi stabilité sous l'opération de division. Étant donné que la quasi totalité des applications qu'on écrit sont construites à partir d'applications/fonctions élémentaires (l'exponentielle, sinus, logaritme, etc.) à l'aide de ces cinq opérations — addition, soustraction, multiplication, division et composition — ces trois résultats nous permettent donc d'établir la différentiabilité de ces applications.

Remarque pour les curieux. Ci-dessus on a déduit la stabilité sous division de la classe des applications différentiables de la stabilité sous composition, en combinaison avec l'opération I de division dans $\mathbf{R}^*$. Mais on peut faire la même chose pour les autres opérations, à condition d'avoir un résultat supplémentaire qu'on fournira en §5 : stabilité sous composantes. Plus précisément, on montrera qu'un application à valeurs dans un produit (et donc en particulier à valeurs dans $\mathbf{R}^p$) est différentiable/ de classe C^1 si et seulement si ses composantes le sont (ce qui est vrai également pour la notion de continuité). Avec ce résultat et la stabilité sous composition, on en déduit la stabilité sous les opérations d'addition, multiplication, soustraction et division comme on l'a fait pour la division.

Prenons par exemple l'addition. On montre que (pour tout espace vectoriel normé E) l'application $A : E \times E \to E$ définie par $A(e, f) = e + f$ est de classe C^1 (c'est même de classe C^∞, voir [7.2]). Ensuite, pour deux applications $f, g : U \to F$ on définit l'application $P : U \to F \times F$ par $P(x) = \big(f(x), g(x)\big)$. Ainsi l'application

$f+g : U \to F$ sera la composée $A \circ P$. L'application P sera différentiable/de classe C^1 si et seulement si ses deux composantes f et g le sont, en par composée $f+g$ le sera si P et A le sont. Ainsi on retrouve le résultat que si f et g sont différentiables/ de classe C^1, alors $f+g$ l'est.

Ⓟ **2.16 Lemme.** *Soit $I \subset \mathbf{R}$ et $U \subset E$ des ouverts et soit $\gamma : I \to U$ et $f : U \to F$ deux applications. Si γ est dérivable/différentiable [2.6] en $t \in I$ et si f est différentiable en $a = \gamma(t)$, alors $g = f \circ \gamma$ est dérivable/différentiable en t on a l'égalité*

$$g'(t) = \big((Df)\big(\gamma(t)\big)\big)\big(\gamma'(t)\big) \quad .$$

3. Accroissements finis

La définition de la différentielle $(Df)(x)$ d'une application f dans un point x (si elle existe) nous donne une approximation pour la différence $f(x+h)-f(x)$. L'argument est la suivante : on note

$$R(h)=\frac{f(x+h)-f(x)-\big((Df)(x)\big)(h)}{\|h\|}$$

et on constate que la définition nous dit qu'on a $\lim_{h\to 0}R(h)=0$. On aura donc pour un h qui est “petit” l'égalité

$$f(x+h)-f(x)-\big((Df)(x)\big)(h)=\|h\|\cdot R(h)\quad ,$$

dans laquelle aussi bien $\|h\|$ **et** R_h sont petit. Leur produit sera donc encore plus petit, presque négligeable ! On a donc l'approximation

$$f(x+h)-f(x)\approx\big((Df)(x)\big)(h)\quad . \tag{3.1}$$

Mais ... ce n'est qu'une approximation. Le but des théorèmes des accroissements finis est de donner des énoncés plus précis sur la différence $f(x)-f(y)$, et cela même dans des cas où x et y ne sont pas “proche” (ce qu'on exprimait ci-dessus en disant que $h=x-y$ est petit).

Les théorèmes des accroissements finis existent en deux types : égalité et inégalité. L'égalité des AF donne une formule du type

$$f(x)-f(y)=\big((Df)(z)\big)(x-y)\quad ,$$

c'est-à-dire qu'on une formule qui ressemble beaucoup à notre approximation (3.1), mais avec une égalité au lieu d'une approximation et la dérivée en un point autre que les deux points x et y. [2] Par contre, cette égalité n'est vraie que pour des applications/ fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$ et est généralement (très) fausse pour des applications à valeurs dans un espace vectoriel avec une dimension réelle plus grand que 1 (voir [16.30]).

D'autre part, l'inégalité des AF donne la formule

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant\sup_{z\in\,]x,y[}\|(Df)(z)\|\cdot\|x-y\|\quad ,$$

où on obtient une majoration pour la norme de la différence $f(x)-f(y)$ en termes de la différentielle (sur le segment ouvert $]x,y[$) et la distance entre x et y. Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, cette majoration se déduit immédiatement de l'égalité des AF. Mais tandis que l'égalité n'est plus vrai pour des applications “vectorielles,” l'inégalité reste vraie pour de telles applications. L'utilité de ce résultat n'est pas à sous-estimer, car il permet d'extraire des informations sur $\|f(x)-f(y)\|$ à partir d'informations sur la différentielle. C'est un ingrédient essentiel dans les preuves de [5.12] et le théorème de Schwarz [8.1].

Convention locale. Dans toute cette section (sauf quand on écrit explicitement autre chose) E et F désignent deux espaces vectoriels normés et $U\subset E$ un ouvert.

2. Ce résultat est dans le fond une simple réécriture du théorème de Rolle.

3.2 Définition. Soit E un espace vectoriel. Pour tout $x, y \in E$ on définit les ensembles $[x, y]$ et $]x, y[$ par

$$]x,y[\, = \{\, tx + (1-t)y \mid t \in \,]0,1[\, \} \qquad \text{et} \qquad [x,y] =]x,y[\cup \{x,y\} \ .$$

L'ensemble $]x, y[$ s'appelle le *segment ouvert (de droite) entre x et y* et $[x, y]$ le *segment fermé*.

Définition/Rappel. Soit $U \subset \mathbf{R}$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \to F$ une application. On dit que *f est dérivable à droite avec dérivée à droite $f'_d(a)$* si

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h) - f(t)}{h} = f'_d(a) \ .$$

De la même façon on dit que *f est dérivable à gauche avec dérivée à gauche $f'_g(a)$* si

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(a+h) - f(t)}{h} = f'_d(a) \ .$$

Si f est dérivable en a, alors elle sera dérivable à droite et à gauche avec $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$. Et si f est dérivable à droite et à gauche, alors elle sera dérivable seulement si $f'_d(a) = f'_g(a)$, auquel cas on aura $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Ⓟ **3.3 Lemme (égalité des accroissements finis).** *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une application et soit $a, b \in U$ tels que le segment $[a, b]$ est contenu dans U. Si f est continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$, alors il existe $\theta \in \,]0, 1[$ tel qu'on a l'égalité*

$$f(b) - f(a) = \Big((Df)\big(a + \theta(b-a)\big)\Big)(b-a) \ .$$

3.4 Nota Bene. La condition que le segment $[a, b]$ est inclu dans l'ouvert $U \subset E$ est primordial dans l'égalité des accroissements finis (comme par ailleurs dans l'inégalité des accroissements finis ci-dessous). Un exemple "simple" pour s'en convaincre est l'ouvert $U \subset \mathbf{R}^2$ défini comme

$$U = \mathbf{R}^2 \setminus \{\, (x, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leqslant 0 \,\} \ ,$$

c'est-à-dire le plan privé du demi-axe négatif des abscisses. Sur cet ouvert on définit la fonction $f : U \to \mathbf{R}$ par (voir aussi [16.94])

$$f(x, y) = 2 \ \arctan\Big(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \Big) \ .$$

C'est l'angle (dans $]-\pi, \pi[$) que fait le vecteur (x, y) avec le demi-axe positif des abscisses. Maintenant on prend $\varepsilon > 0$ petit et on considère les points $a = (-1, \varepsilon)$ et $b = (-1, -\varepsilon)$. Il est évident que le segment $[a, b]$ n'est pas contenu dans U (car contenant le point $(-1, 0)$). Si on regarde la différence $b - a$, alors ça tend vers 0 quand ε tend vers 0. Par contre, la différence $f(a) - f(b)$ tend vers 2π quand ε tend vers 0. Un calcul simple montre qu'on a

$$(Df)(x, y) = \Big(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \Big)$$

et donc pour un point $(-1, y)$ sur le segment $[a, b]$ on aura

$$(Df)(-1, y) = \left(\frac{-y}{y^2+1}, \frac{-1}{y^2+1} \right) \ .$$

Ses coefficients étant bornés, il ne sera pas possible que l'évaluation de $(Df)(-1, y)$ sur le vecteur $b - a = (0, 2\varepsilon)$ tendra vers 2π quand ε tend vers 0.

Ⓟ **3.5 Théorème (inégalité des accroissements finis - version primitive).** *Soit $g : [0, 1] \to F$ une application, continue sur $[0, 1]$ et dérivable à droite sur $]0, 1[$. Soit $h : [0, 1] \to \mathbf{R}$ une fonction, continue sur $[0, 1]$ et dérivable à droite sur $]0, 1[$. Si pour tout $0 < t < 1$ on a l'inégalité*

$$\|g'_d(t)\| \leqslant h'_d(t) \ ,$$

alors on a l'inégalité

$$\|g(1) - g(0)\| \leqslant h(1) - h(0) \ .$$

Remarque pour les curieux. On a bien évidemment un résultat analogue en remplaçant la condition de dérivabilité à droite par la condition de dérivabilité à gauche. Il suffit de remplacer les fonctions g et h par les fonction $\hat{g}$ et $\hat{h}$ définie par $\hat{g}(t) = g(1 - t)$ et $\hat{h}(t) = -h(1 - t)$.

Ⓟ **3.6 Théorème (inégalité des accroissements finis - version classique).** *Soit $f : U \to F$ une application différentiable et soit $a, b \in U$ tels que le segment $[a, b]$ est contenu dans U. Alors on a l'inégalité*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{x \in \,]a,b[} \|(Df)(x)\| \cdot \|b - a\| \ .$$

Nota Bene. On a vu dans [2.3] que la définition de la dérivabilité d'une fonction ne dépend pas du choix d'une norme sur l'espace de départ ni de celle de l'arrivée, à condition qu'on prenne des normes équivalentes. Ceci n'est pas vrai pour l'inégalité des accroissements finis [3.6], où il est impératif d'utiliser la norme d'opérateur (associée aux normes sur les espaces E et F) pour $\|(Df)(x)\|$.

Ⓟ **3.7 Corollaire.** *Soit $U \subset E$ un ouvert connexe et $f : U \to F$ une application différentiable. Alors f est constante si et seulement si $(Df)(x) = 0$ pour tout $x \in U$.*

4. Algèbre linéaire sur des produits finis

Une matrice n'est rien d'autre qu'un tableau de nombres. Et certains de ces tableaux de nombres peuvent être multipliés, donnant lieu à un nouveau tableau de nombres (le produit). Par exemple, on peut multiplier les deux matrices A et B données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} ,$$

auquel cas on aura

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ -10 & 14 & 0 \end{pmatrix} .$$

Mais rien nous interdit de "découper" de tels tableaux de nombres en un certain nombre de sous-tableaux de nombres. Si on le fait un peu au hasard, on pourrait écrire par exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 0 \\ \hline -4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 9 & -2 \\ \hline -1 & -4 & -3 \\ \hline -10 & 14 & 0 \end{array}\right) .$$

Mais dans cette situation il n'y a rien de particulier à remarquer. Par contre, si on le fait un petit peu plus intelligemment, on pourrait écrire par exemple

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 9 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ \hline -10 & 14 & 0 \end{array}\right) .$$

Et dans ce cas on peut faire l'observation suivante. On commence à noter le découpage de A, de B et de $C = A \cdot B$ comme

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & A_{12} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & A_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} ,$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} B_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} & B_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ B_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} & B_{22} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} C_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} & C_{12} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ C_{21} = \begin{pmatrix} -10 & 14 \end{pmatrix} & C_{22} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Et avec ces notations on a l'égalité

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \end{pmatrix} \quad ,$$

c'est-à-dire, exactement comme si les A_{ij} et les B_{jk} étaient des éléments de matrice et les C_{ik} les éléments de la matrice produit ! Par exemple, pour C_{21} on a bien

$$\begin{pmatrix} -10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Et on voit aussi le côté "intelligent" du découpage : le découpage "horizontal" de A (en deux bandes de largeur 2) doit correspondre au découpage "vertical" de B (également en deux bandes de hauteur 2). Car sinon les produits des (sous-)matrices A_{ij} et B_{jk} n'ont pas de sens.

Si on commence à réfléchir ce que représente un tel découpage, on arrive facilement à la conclusion suivante. La matrice B représente une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^4$, ce qu'on pourrait écrire comme

$$B : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1, y_2, y_3, y_4) \quad .$$

Et le découpage de la matrice B correspond à un regroupement des coordonnées x_i et y_j sous la forme

$$(x_1, x_2, x_3) \cong \big((x_1, x_2), (x_3)\big) \qquad \text{et} \qquad (y_1, y_2, y_3, y_4) \cong \big((y_1, y_2), (y_3, y_4)\big) \quad .$$

D'autre part, la matrice A représente une application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$, qu'on pourrait noter comme

$$A : (y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (z_1, z_2, z_3) \quad .$$

Et le découpage "intelligent" de A correspond à un regroupement des coordonnées y_j et z_k comme

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) \cong \big((y_1, y_2), (y_3, y_4)\big) \qquad \text{et} \qquad (z_1, z_2, z_3) \cong \big((z_1, z_2), (z_3)\big) \quad .$$

Bien évidemment, le côté intelligent est que le découpage des coordonnées y_j est le même pour B et A. Une autre façon de voir ce découpage est de considérer l'espace de départ pour l'application linéaire B, pas comme $\mathbf{R}^3$, mais comme $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$. Et son espace d'arrivé comme $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, pas comme $\mathbf{R}^4$. Et dans ce cas on prendra pour l'espace de départ pour A bien sûr ce même espace $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ et comme espace d'arrivé $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$. On aura donc la composée

$$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \xrightarrow{B} \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \xrightarrow{A} \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \quad .$$

Mais ce découpage n'est pas le seul possible. On pourrait aussi écrire

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ \hline -4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ \hline -1 & 3 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 9 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ \hline -10 & 14 & 0 \end{array}\right) \quad ,$$

auquel cas on envisage les applications B et A comme étant entre les espaces $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \xrightarrow{B} \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \xrightarrow{A} \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \quad .$$

Et dans ce cas on aurait écrit pour C_{21} le calcul

$$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 14 \end{pmatrix} \quad .$$

Le but de cette section est de formaliser cette procédure de découpage et de donner un sens à une matrice d'applications.

Convention locale. Dans toute cette section (sauf quand on écrit explicitement autre chose) $E_1, \ldots, E_n$, $F_1, \ldots, F_p$, E et F désignent des espaces vectoriels normés.

4.1 Définitions. Soit $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F_1 \times \cdots \times F_p$ une application linéaire définie entre deux produits d'espaces vectoriels normés. On lui associe une famille de np applications $A_{ij} : E_j \to F_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, par la procédure suivante. On détermine d'abord les p composantes $(A_1, \ldots, A_p)$ de A sous la forme

$$A(v_1, \ldots, v_n) = \big(A_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, A_p(v_1, \ldots, v_n)\big) \in F_1 \times \cdots \times F_p \quad ,$$

avec $A_i : E_1 \times \cdots \times E_n \to F_i$. Et ensuite on définit les applications $A_{ij} : E_j \to F_i$ par

$$\forall v \in E_j \quad : \quad A_{ij}(v) = A_i(\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1 \text{ facteurs}}, v, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-j \text{ facteurs}}) \quad .$$

Parfois on donne la définition de la famille A_{ij} à l'aide d'autres applications. On introduit les *projections canoniques* d'un produit sur un de ses facteurs comme les applications $\pi_i : F_1 \times \cdots \times F_p \to F_i$ définies par

$$\pi_i(w_1, \ldots, w_p) = w_i \tag{4.2}$$

et on introduit les *injections canoniques* d'un espace vectoriel dans un produit comme les applications $\iota_j : E_j \to E_1 \times \cdots \times E_n$ définies par

$$\iota_j(v) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1 \text{ facteurs}}, v, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-j \text{ facteurs}}) \quad . \tag{4.3}$$

Avec ces applications canoniques, la définition des applications A_i et de la famille A_{ij} s'écrit simplement comme

$$A_i = \pi_i \circ A \qquad \text{et} \qquad A_{ij} = \pi_i \circ A \circ \iota_j \quad .$$

Ⓟ **4.4 Lemme.** *Soit $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F_1 \times \cdots \times F_p$ une application linéaire et soit $A_{ij} : E_j \to F_i$ la famille d'applications associée [4.1].*

(i) *Les projections canoniques π_i et les injections canoniques ι_j sont linéaires et continues (de norme 1).*

(ii) *Tous les A_{ij} sont linéaires et si A est continue, les A_{ij} sont continues également.*

(iii) *Pour tout $(v_1, \ldots, v_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ on a l'égalité*

$$A_i(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(v_j) \quad , \tag{4.5}$$

Réciproquement, si on a une famille d'applications linéaires $A_{ij} : E_j \to F_i$, alors l'application $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F_1 \times \cdots \times F_p$ définie par

$$A(v_1, \ldots, v_n) = \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{1j}(v_j), \ldots, \sum_{j=1}^{n} A_{pj}(v_j) \Big) \tag{4.6}$$

est linéaire. De plus, si tous les A_{ij} sont continues, alors A est continue.

4.7 Discussion et (abus de) notation. Il est immédiat que pour une application linéaire A comme dans [4.1] on a

$$A(v_1, \ldots, v_n) = \big(A_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, A_p(v_1, \ldots, v_n)\big) \ .$$

Si on combine ce résultat avec (4.5) et si on écrit les éléments dans un produit en colonne, on obtient l'égalité

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}(v_1) + \cdots + A_{1n}(v_n) \\ \vdots \\ A_{p1}(v_1) + \cdots + A_{pn}(v_n) \end{pmatrix} \ . \tag{4.8}$$

Cette formule ressemble beaucoup à une multiplication matricielle : si on considère les A_{ij}, pas comme applications, mais comme nombres, alors on pourrait écrire ceci comme

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \overset{\text{notation}}{=} \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & \ldots & A_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \ , \tag{4.9}$$

ce qui pourrait être écrit comme l'égalité

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & \ldots & A_{pn} \end{pmatrix} \ . \tag{4.10}$$

Il va de soi que l'écriture d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels sous cette forme n'est pas une vraie égalité mais seulement une façon d'écrire le résultat (4.8), un résultat qui dépend de la façon dont on écrit source et but sous forme d'un produit. Dans ce cas on dit que la famille A_{ij} est *la matrice d'applications linéaire de A par rapport aux décompositions $E_1 \times \cdots E_n$ et $F_1 \times \ldots F_p$ de l'espace source et l'espace but respectivement*. Écrire l'égalité (4.10) est donc aussi vrai ou faux que de dire qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie est *égale* à sa matrice (par rapport aux choix de bases).

Pour bien voir que [4.4] (autrement dit, la notion de "matrice d'applications linéaires") est une généralisation directe de la matrice d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, on se place dans la cadre où tous les espaces E_j et tous les espaces F_i sont égaux à $\mathbf{R}$. On considère donc une application linéaire $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ (forcément continue [1.19]). Selon [4.4] on obtient une matrice d'applications linéaires $A_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}; \mathbf{R})$. Ensuite on invoque [1.31], [1.32] pour identifier chaque application linéaire $A_{ij} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ avec le nombre réel $a_{ij} = A_{ij}(1)$. Ainsi on obtient une matrice "ordinaire" $(a_{ij}) \in \mathrm{M}(p \times n; \mathbf{R})$. Pour $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$

on peut donc faire le calcul

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \overset{(4.8)}{=} \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n A_{1j}(x_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n A_{pj}(x_j)\end{pmatrix} \overset{\text{linéarité}}{=} \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n x_j\, A_{1j}(1)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n x_j\, A_{pj}(1)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1j}\, x_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n a_{pj}\, x_j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{p1} & \dots & a_{pn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \quad , \tag{4.11}$$

où dans le dernier membre à droite on utilise le produit "ordinaire" entre une matrice et un vecteur. Cette formule montre directement que la matrice (a_{ij}) est la matrice de l'application linéaire A par rapport aux bases canoniques de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$ respectivement. D'autre part, si on compare cette formule avec (4.9), on voit une analogie parfaite. La seule différence est que les applications linéaires A_{ij} sont remplacées par les nombres a_{ij}, un changement réversible selon [1.31].

Comme pour (4.10) on a envie de résumer (4.11) sous la forme de l'égalité

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{p1} & \dots & a_{pn}\end{pmatrix} \quad ,$$

bien qu'on sait que l'application A n'est pas la même chose que sa matrice. Mais il n'y a (presque) aucun mathématicien qui sera choqué par cette égalité. D'abord parce qu'il s'agit de la matrice par rapport aux *bases canoniques*, c'est-à-dire les bases qui reposent sur l'écriture de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$ comme produit directe $\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}$ (n et p fois). Et ensuite parce que dans l'écriture (4.11) il est difficile de voir la différence : à gauche on évalue l'application A dans le point/vecteur $(x_1,\dots,x_n)$ et à droite on multiplie la matrice (a_{ij}) par ce même vecteur. Bien sûr, le fait qu'il s'agit du même vecteur est une conséquence du fait qu'on utilise la base canonique : les deux arguments sont deux aspects du même phénomène. Et c'est dans le même état d'esprit qu'on accepte l'égalité (4.10) (qui n'en est pas une) comme étant liée directement aux produits directs $E_1\times\cdots\times E_n$ et $F_1\times\cdots\times F_p$.

L'écriture de l'espace source ou arrivé comme produit direct est souvent donnée d'office, mais rien nous oblige de les voir comme tel. Avant de se lancer dans cette discussion, commençons avec quelque cas particuliers. Si $n=1$ on n'écrit pas la deuxième indice et on parle (donc) de la famille $A_1,\dots,A_p$ (ce qui n'est rien d'autre que la famille des p composantes de l'application A) et on écrit

$$A = \begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_p\end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad A(v) = \begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_p\end{pmatrix}(v) = \begin{pmatrix}A_1(v)\\ \vdots\\ A_p(v)\end{pmatrix} \quad .$$

Et si $p=1$ on n'écrit pas la première indice et on parle de la famille $A_1,\dots,A_n$. Mais contrairement au cas $n=1$, ces applications ne représentent pas les composantes de A qui n'en a qu'une, mais des applications partielles définies sur des sous-ensembles du produit des E_i. Ceci se reflète dans l'écriture matricielle, car on écrit (doit écrire)

$$A = \begin{pmatrix}A_1 & \dots & A_n\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A\Big(\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix}A_1 & \dots & A_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n A_j(v_j) \quad .$$

Dans le cas général où on a une application linéaire $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F_1 \times \cdots \times F_p$, rien nous interdit de prétendre que l'espace source n'est pas un produit et d'écrire $A : E \to F_1 \times \cdots \times F_p$ avec bien entendu $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. Dans cette optique on obtient donc une matrice d'applications $A_i^E : E \to F_i$ qui représentent les composantes de A :

$$A = \begin{pmatrix} A_1^E \\ \vdots \\ A_p^E \end{pmatrix} \quad . \tag{4.12}$$

On a rajouté l'exposant ^{E} pour distinguer ces applications d'autres qui vont venir. Car si au contraire on garde le fait que la source est un produit, mais qu'on considère que l'espace but ne l'est pas, alors on écrit $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ (avec $F = F_1 \times \cdots \times F_p$). Dans ce cas on obtient une matrice d'applications $A_j^F : E_j \to F$ avec l'écriture matricielle

$$A = \begin{pmatrix} A_1^F & \ldots & A_n^F \end{pmatrix} \quad . \tag{4.13}$$

Pour obtenir le lien entre les applications A_i^E et A_j^F, il faut se rappeler que E respectivement F sont des produits. Dans le cas de l'application $A_i^E : E \to F_i$ on obtient une famille d'applications $(A_i^E)_j : E_j \to F_i$ avec l'écriture

$$A_i^E = \begin{pmatrix} (A_i^E)_1 & \ldots & (A_i^E)_n \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qu'on peut substituer dans (4.12) pour obtenir

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (A_1^E)_1 & \ldots & (A_1^E)_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} (A_p^E)_1 & \ldots & (A_p^E)_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad . \tag{4.14}$$

Et dans le cas de l'application $A_j^F : E_j \to F$ on obtient une famille d'applications $(A_j^F)_i : E_j \to F_i$ avec l'écriture

$$A_j^F = \begin{pmatrix} (A_j^F)_1 \\ \vdots \\ (A_j^F)_p \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qu'on peut substituer dans (4.13) pour obtenir

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (A_1^F)_1 \\ \vdots \\ (A_1^F)_p \end{pmatrix} & \ldots & \begin{pmatrix} (A_n^F)_1 \\ \vdots \\ (A_n^F)_p \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad . \tag{4.15}$$

Si on épluche bien les définitions des applications A_{ij}, $(A_i^E)_j$ et $(A_j^F)_i$, on voit rapidement qu'on a les égalités

$$A_{ij} = (A_i^E)_j = (A_j^F)_i \quad ,$$

et donc que les formules (4.14) et (4.15) représentent bien l'application A, car on a les "égalités"

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & \ldots & A_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (A_1^E)_1 & \ldots & (A_1^E)_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} (A_p^E)_1 & \ldots & (A_p^E)_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (A_1^F)_1 \\ \vdots \\ (A_1^F)_p \end{pmatrix} & \ldots & \begin{pmatrix} (A_n^F)_1 \\ \vdots \\ (A_n^F)_p \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad .$$

Sachant que l'écriture (4.10) est une généralisation de la notion de matrice (associée aux choix de bases), le lecteur ne devrait pas être surpris d'apprendre que la règle de la multiplication matricielle s'applique aussi dans ce cadre plus général.

Ⓟ **4.16 Lemme.** *Soit*

$$A \quad : \quad E_1 \times \cdots \times E_n \to F_1 \times \cdots \times F_p \quad \text{et}$$

$$B \quad : \quad F_1 \times \cdots \times F_p \to G_1 \times \cdots \times G_q$$

deux applications linéaires et soit $A_{jk} : E_k \to F_j$ et $B_{ij} : F_j \to G_i$ les matrices d'applications linéaires associées [4.1]. Alors la matrice d'applications linéaires $(B \circ A)_{ik} : E_k \to G_i$ associée à l'application linéaire $B \circ A$ est donnée par

$$(B \circ A)_{ik} = \sum_{j=1}^{p} B_{ij} \circ A_{jk} \quad .$$

Remarque. Bien sûr, on peut définir la famille d'applications A_{ij} associé à une application $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F_1 \times \cdots \times F_p$ même si ce A n'est pas linéaire. Mais l'intérêt est très faible, car on ne dispose pas d'une formule qui permet de reconstruire A à partir de la famille A_{ij} comme pour une application linéaire.

4.17 Nota Bene. Dans [4.7] on a discuté l'abus de notation (4.10) qui consiste à écrire une égalité entre une application linéaire et une matrice d'applications linéaires associée à des décompositions des espaces source et arrivé en produits directs. Cet abus ne pose aucun problème lorsqu'on utilise cette application pour calculer des images de vecteurs dans l'espace source : dès qu'on évalue sur un vecteur, on (re)tombe sur (4.8), ce qui est une vraie égalité. Par contre, quand l'application elle-même devient l'objet principal, cet abus de notation devient gênant. Et ce phénomène se produit dans les preuves de [5.12] et [7.5]. Plus précisément, pour une application linéaire (continue) $A : E \to F_1 \times \cdots \times F_p$ on a p applications linéaires (continues) $A_i : E \to F_i$ telles qu'on a, pour tout $v \in E$, la vraie égalité

$$A(v) = \begin{pmatrix} A_1(v) \\ \vdots \\ A_p(v) \end{pmatrix} \quad .$$

Notre abus de notation consiste à écrire qu'on a "donc" l'égalité

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qui ne peut pas être vrai, car une application (linéaire) n'est pas la même chose qu'un p-uplet d'applications (linéaires). Pour en faire une vraie égalité qui relie A avec le p-uplet $A_1, \ldots, A_p$, on introduit, dans [4.18], l'application $\mathcal{J}$ (un isomorphisme isométrique) qui nous permet d'écrire la vraie égalité

$$A = \mathcal{J}(A_1, \ldots, A_p) \quad .$$

De la même façon, pour une application linéaire (continue) $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ on a n applications linéaires (continues) $A_j : E_j \to F$ telles qu'on a, pour tout $v_j \in E_j$, la vraie égalité

$$A(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{j=1}^{n} A_j(v_j) \quad .$$

Notre abus de notation consiste à écrire qu'on a “donc” l'égalité

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qui ne peut pas être vrai pour les mêmes raisons. Pour en faire une vraie égalité qui relie A avec le n-uplet $A_1, \ldots, A_n$, on introduit, dans [4.19], l'application $\mathcal{J}$ (un isomorphisme) qui nous permet d'écrire la vraie égalité

$$A = \mathcal{J}(A_1, \ldots, A_n) \quad .$$

On peut combiner les deux résultats [4.18] et [4.19] en un (voir [16.42]), mais formulé ainsi convient pour l'usage qu'on en fera.

Ⓟ **4.18 Lemme.** *L'application* $\mathcal{J} : \mathcal{L}(E; F_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E; F_p) \to \mathcal{L}(E; F_1 \times \cdots \times F_p)$ *définie par*

$$\big(\mathcal{J}(A_1, \ldots, A_p)\big)(v) = \big(\, A_1(v), \ldots, A_p(v)\,\big)$$

est un isomorphisme isométrique.

Ⓟ **4.19 Lemme.** *L'application* $\mathcal{J} : \mathcal{L}(E_1; F) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_n; F) \to \mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_n; F)$ *définie par*

$$\big(\mathcal{J}(A_1, \ldots, A_n)\big)(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{j=1}^{n} A_j(v_j)$$

est un isomorphisme.

5. Dérivées partielles et autres variantes

Le but de ce chapitre est de donner des outils pour “simplifier” le calcul d'une différentielle par une méthode de découpage-assemblage. L'idée (et même la méthode) est la même que la détermination de la matrice d'une application linéaire $A : E \to F$ entre deux espaces vectoriels de dimension finie : on détermine les éléments de matrice un par un et après on les met ensemble dans la matrice. Et pour déterminer les éléments de la matrice un par un, on se base sur les observations suivantes : les colonnes de la matrices sont les images des vecteurs de base de l'espace source E et les coefficients dans chaque colonne sont les coordonnées de ces vecteurs par rapport à la base de l'espace d'arrivé F. Comme on a argumenté dans [4.7], le choix d'une base dans un espace vectoriel (de dimension q) correspond à l'identification de cet espace avec le produit $\mathbf{R}^q = \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$.

Pour les différentielles on se place “donc” dans le cadre où soit l'espace source E est un produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ de n espaces vectoriels normés, soit l'espace d'arrivé F est un produit $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ de p espaces vectoriels normés, soit les deux. Le deuxième cas (F un produit) est le plus simple : si on écrit les composantes d'une application $f : U \subset E \to F_1 \times \cdots \times F_p$ comme

$$f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$$

avec $f_i : U \to F_i$, alors on a sans surprise le résultat que f est différentiable en $a \in U$ si et seulement si toutes les $f_i : U \to F_i$ sont différentiables en a. C'est l'équivalent direct des affirmations qu'une application vectorielle est continue si et seulement si ses composantes sont continues, ou que la limite d'une application vectorielle est le vecteur des limites de ses composantes. Pour une application à valeurs dans un produit, ces notions se calculent composante par composante ; et ça reste vrai pour les différentielles.

Pour bien comprendre ce qui se passe dans le cas où E est un produit, il faut prendre des œillères. On choisit un point $(v_1, \ldots, v_n)$ dans ce produit (donc $v_i \in E_i$) et on oublie que ce sont des variables qui peuvent changer, sauf pour un seul argument, disons pour v_j. Autrement dit, on fixe les vecteurs $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n$ et on prétend que notre application ne dépend que de la variable v_j. On parlera de l'application partielle (dans la direction du j-ème vecteur). L'idée est que la diminution du nombre de variables (de n vecteurs à un seul vecteur) simplifie le calcul de la différentielle. En plus, on espère que la différentielle de la fonction complète se reconstitue à partir des différentielles de ces applications partielles, un peu comme on peut reconstruire l'application linéaire à partir des images des vecteurs de bases. Et ça marche presque ! Bien sûr, si on connaît la différentielle de l'application, on connaît les différentielles des applications partielles, qu'on appelle des différentielles partielles. Mais il est potentiellement possible que toutes les différentielles partielles, c'est-à-dire les différentielles de toutes les applications partielles, existent sans que l'application elle-même est différentiable. Par contre, si les différentielles de toutes les applications partielles existent dans un voisinage d'un point et qu'elles sont continues en ce point, alors ça marche : l'application est différentiable au point et on reconstruit sa différentielle à partir des différentielles de ces applications partielles. Et la procédure d'assemblage de ces différentielles partielles pour obtenir la différentielle est exactement la procédure décrite en [4.4] et [4.7] du découpage-assemblage d'une application linéaire entre des espaces vectoriels qui sont des produits.

L'analogie avec le calcul des éléments d'une matrice devient plus étroite dans le cas particulier où tous les espaces E_j sont égaux à $\mathbf{R}$, c'est-à-dire quand l'espace source E est l'espace $\mathbf{R}^n$ vu comme produit de n copies de la droite réelle. Dans ce cas une application partielle sera une application à valeurs dans l'espace F définie sur un ouvert de $\mathbf{R}$ et la notion de dérivée s'applique, donnant naissance à la notion de dérivée partielle $\partial_j f$: la dérivée de l'application partielle, ce qui sera un élément de l'espace d'arrivé F. Dans un tel cas on aura donc n dérivées partielles qui forment n éléments de l'espace d'arrivé F. D'autre part, la différentielle est une application linéaire définie sur l'espace $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans F et un tel application est déterminée complètement par les images des n vecteurs de la base canonique $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbf{R}^n$: la matrice de cette différentielle est formée de ces n vecteurs images. Le "miracle" est que pour la différentielle $(Df)(a)$ de f au point a ces vecteurs images de la base canonique de $\mathbf{R}^n$ sont exactement les n dérivées partielles :

$$
\begin{aligned}
(Df)(a) \cong \big((\partial_1 f)(a) \ \dots \ \partial_n f)(a) \big) \qquad & \iff \\
\big((Df)(a)\big) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \big(\ (\partial_1 f)(a) \quad \dots \quad \partial_n f)(a) \ \big) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(a) \cdot x_j \quad .
\end{aligned}
$$

Et l'analogie devient "parfaite" dans le cas où tous les espaces F_i sont également $\mathbf{R}$, c'est-à-dire le cas où on a $E = \mathbf{R}^n$ et $F = \mathbf{R}^p$. Car dans ce cas les composantes des applications partielles sont des fonctions réelles définies sur des ouverts de $\mathbf{R}$, c'est-à-dire des fonctions comme on les étudie au lycée et en première année à la fac. Et dans ce cas c'est vraiment la matrice de la différentielle (par rapport aux bases canoniques de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$ respectivement) qui est donnée par les dérivées (ordinaires, donc des nombres) de ces composantes des applications partielles.

Dans la pratique c'est donc toujours comme ça qu'on calcule la différentielle d'une application $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$: on calcule sa matrice en calculant des dérivées "ordinaires" de fonctions réelles. Mais attention : il y a un petit "hic" ! C'est bien comme ça qu'on **calcule** la différentielle d'une application ; pour justifier que la matrice qu'on obtient est bien la matrice de la différentielle (et en passant que la différentielle existe), il faut des arguments supplémentaires ! Deux approches sont classiques pour le faire : ou bien on invoque les résultat cité ci-dessus qui dit que si ces éléments de matrice sont des fonctions continues sur un voisinage ouvert du point a, alors la différentielle existe et on a bien sa matrice. Ou bien on prend la matrice obtenue et on montre à l'aide de la définition d'une différentielle que c'est bien elle qui est la différentielle. Le point crucial dans ce dernier argument est que si cela ne marche pas, alors forcément f ne sera pas différentiable au point a, car si elle l'était, sa différentielle serait forcément donné par la matrice calculée.

Convention locale. Dans toute cette section (sauf quand on écrit explicitement autre chose) $E_1, \dots, E_n$, $F_1, \dots, F_p$, E et F désignent des espaces vectoriels normés et $U \subset E$ un ouvert.

5.1 Définition. Soit $f : U \to F$ une application. Alors *la dérivée directionnelle de f au point $a \in U$ dans la direction $v \in E$*, notée $(D_v f)(a)$ est le vecteur (s'il existe !) dans F définie comme

$$(D_v f)(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \quad .$$

Ⓟ **5.2 Lemme.** *Soit $f : U \to F$ une application. Si f est différentiable en $a \in U$, alors la dérivée directionnelle en a dans la direction $v \in E$ existe et est donnée par*

$$(D_v f)(a) = \big((Df)(a)\big)(v) \quad .$$

Nota Bene. Selon [5.2], si f est différentiable en $a \in U$, alors toutes les dérivées directionnelles existent et sont données par $(D_v f)(a) = \big((Df)(a)\big)(v)$. Il s'ensuit que l'application $A : E \to F$ définie par

$$A(v) = (D_v f)(a) \tag{5.3}$$

est une application linéaire continue : c'est la différentielle de f en a : $A = (Df)(a)$. Mais attention : ce résultat est en sens unique ! Il est bien possible que toutes les dérivées directionnelles existent et que l'application A définie par (5.3) est une application linéaire continue **sans** que l'application f soit différentiable en a (voir [16.43]). Pire : il est possible que toutes les dérivées directionnelles existent **sans** que l'application A définie par (5.3) soit linéaire (voir [16.44]).

Ⓟ **5.4 Lemme.** *Soit $f : U \to F_1 \times \cdots \times F_p$ une application et soit $f_i = \pi_i \circ f : U \to F_i$ (4.2), c'est-à-dire $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$. Alors f est différentiable en $a \in U$ si et seulement si toutes les fonctions f_i, $i = 1, \ldots, p$ sont différentiables en a. De plus, si c'est le cas, on a, pour tout $v \in E$, l'égalité*

$$\big((Df)(a)\big)(v) = \begin{pmatrix} \big((Df_1)(a)\big)(v) \\ \vdots \\ \big((Df_p)(a)\big)(v) \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qu'on résume selon la situation soit par une vraie égalité, soit par une égalité qui n'en est pas une mais qu'on utilise couramment (voir [4.1], [4.7], [4.17] et [4.18])

$$(Df)(a) \overset{vrai}{=} \mathcal{J}\Big(\begin{pmatrix} (Df_1)(a) \\ \vdots \\ (Df_p)(a) \end{pmatrix}\Big) \qquad ou \qquad (Df)(a) \overset{courant}{=} \begin{pmatrix} (Df_1)(a) \\ \vdots \\ (Df_p)(a) \end{pmatrix} \quad .$$

Ⓟ **5.5 Corollaire.** *Soit $f : U \to F_1 \times \cdots \times F_p$ une application et soit $f_i = \pi_i \circ f : U \to F_i$ (4.2), c'est-à-dire $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$. Alors f est de classe C^1 si et seulement si toutes les fonctions f_i, $i = 1, \ldots, p$ sont de classe C^1.*

5.6 Définitions. Soit $U \subset E_1 \times \cdots \times E_n$ un ouvert, soit $f : U \to F$ une application et soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$ on définit l'ouvert $U_{a,j} \subset E_j$ par

$$U_{a,j} = \{\, x \in E_j \mid (a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in U \,\} \quad ,$$

et on définit l'application $f_{a,j} : U_{a,j} \to F$ par

$$f_{a,j}(x) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n) \ .$$

Ces applications $f_{a,j}$ s'appellent des *applications partielles*. Si la fonction $f_{a,j}$ est différentiable au point $a_j \in U_{a,j}$, on dit que *la différentielle partielle de f dans la direction E_j au point $a \in U$, notée $(D_j f)(a)$, existe* et est définie comme

$$(D_j f)(a) = (D f_{a,j})(a_j) \in \mathcal{L}(E_j; F) \ .$$

Considérons maintenant le cas particulier où tous les espaces E_j sont égaux à $\mathbf{R}$, ce qui veut dire qu'on a $E = \mathbf{R}^n$. Une fonction partielle $f_{a,j}$ est donc définie sur un ouvert $U_{a,j}$ de $\mathbf{R}$ et on définit (si elle existe) *la dérivée partielle de f au point a dans la j-ème direction*, notée $(\partial_j f)(a)$, comme la dérivée (ordinaire) de $f_{a,j}$ au point a_j :

$$(\partial_j f)(a) \stackrel{\text{déf.}}{=} f'_{a,j}(a_j) \ .$$

Dans les deux cas une différentielle/dérivée partielle de f au point $a \in U$ est donc une différentielle/dérivée "ordinaire" d'une application partielle.

Ⓟ **5.7 Lemme.** *Soit $U \subset E_1 \times \cdots \times E_n$ un ouvert, soit $f : U \to F$ une application et soit $a \in U$. Alors la différentielle partielle $(D_j f)(a)$ existe si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{L}(E_j; F)$ tel que*

$$\lim_{h \in E_j,\, h \to 0} \frac{\big\| f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a) - A(h) \big\|}{\|h\|} = 0 \ .$$

Si c'est le cas, on a l'égalité $(D_j f)(a) = A$.

Ⓟ **5.8 Lemme.** *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, soit $f : U \to F$ une application, soit $a \in U$ et soit $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *La dérivée partielle $(\partial_j f)(a)$ existe.*

(ii) *La limite* $\displaystyle\lim_{h \in \mathbf{R},\, h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a)}{h}$ *existe.*

(iii) *La dérivée directionnelle $(D_{e_j} f)(a)$ de f au point a dans la direction de e_j (le j-ème élément de la base canonique) existe.*

(iv) *La différentielle partielle $(D_j f)(a)$ de f au point a dans la direction du j-ème composante $\mathbf{R}$ du produit $\mathbf{R}^n$ existe.*

Si l'une de ces conditions est vérifiée, alors on a les égalités

$$(\partial_j f)(a) = \lim_{h \in \mathbf{R},\, h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a)}{h}$$
$$= (D_{e_j} f)(a) = \big((D_j f)(a)\big)(1) \ .$$

Discussion. On peut interpréter les résultats [5.7] et [5.8] comme des définitions alternatives pour les notions de différentielle partielle et dérivée partielle. Il n'est donc pas rare de trouver la condition équivalente donnée dans [5.7] comme définition de la différentielle partielle. Et pour la dérivée partielle on trouve souvent soit la propriété [5.8.ii], soit la propriété [5.8.iii] comme définition.

Nota Bene. Si on combine [5.2] et [5.8], on voit que si une application f définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ est différentiable en a, alors toutes les dérivées partielles existent et sont données par

$$(\partial_i f)(a) = \big((Df)(a)\big)(e_i) \ .$$

Mais comme pour les dérivées directionnelles, ce résultat est en sens unique. Car il est bien possible que toutes les dérivées partielles existent **sans** que f soit différentiable en a (voir [16.43] ou [16.44]). Et il est même possible que toutes les dérivées partielles existent sans que toutes les dérivées directionnelles existent (et donc *a fortiori* f ne peut pas être différentiable en a, voir [16.45]).

Ⓟ **5.9 Lemme.** *Soit $U \subset E_1 \times \cdots \times E_n$ un ouvert et soit $f : U \to F$ une application. Si f est différentiable en $a \in U$, alors les différentielles partielles $(D_j f)(a)$ existent et sont données par*

$$\big((D_j f)(a)\big)(h_j) = \big((Df)(a)\big)(0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0) \ .$$

En plus on a, pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, l'égalité

$$\big((Df)(a)\big)(h) = \sum_{j=1}^{n} \big((D_j f)(a)\big)(h_j) \ ,$$

ce qu'on résume selon la situation soit par une vraie égalité, soit par une égalité qui n'en est pas une mais qu'on utilise couramment (voir [4.1], [4.7], [4.17] et [4.19])

$$(Df)(a) \overset{vrai}{=} \mathcal{J}\big(\,(Df_1)(a)\ (Df_2)(a)\ \dots\ (Df_n)(a)\,\big)$$
$$ou \qquad (Df)(a) \overset{courant}{=} \big(\,(D_1 f)(a)\ (D_2 f)(a)\ \dots\ (D_n f)(a)\,\big) \ .$$

Nota Bene. Les résultats [5.4] et [5.9] concernent tous les deux la situation où on voit un espace vectoriel comme un produit : dans le premier c'est l'espace d'arrivé qu'on voit comme produit et dans le deuxième c'est l'espace source. Mais il y a une différence importante entre ces deux résultats : dans le premier on a un résultat du type "si et seulement si," tandis que dans le deuxième cas on a seulement un résultat du type "si…alors." Pour avoir la réciproque du résultat [5.9] on a besoin d'une hypothèse supplémentaire : la continuité des différentielles partielles, comme énoncé dans [5.12].

Ⓟ **5.10 Corollaire.** *Soit $U \subset E_1 \times \cdots \times E_n$ un ouvert, soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$, soit $f : U \to F_1 \times \cdots \times F_p$ une application et soit $f_i = \pi_i \circ f : U \to F_i$ (4.2), c'est-à-dire $f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big)$. Si f est différentiable en a, alors les différentielles partielles $(D_j f_i)(a)$ existent et on a, pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, l'égalité*

$$\big((Df)(a)\big)(h) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \big((D_j f_1)(a)\big)(h_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \big((D_j f_p)(a)\big)(h_j) \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} (D_1 f_1)(a) & \dots & (D_n f_1)(a) \\ \vdots & & \vdots \\ (D_1 f_p)(a) & \dots & (D_n f_p)(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qu'on résume par "l'égalité" (voir [4.1] et [4.7], voir aussi [5.4])

$$(Df)(a) = \begin{pmatrix} (D_1 f_1)(a) & \dots & (D_n f_1)(a) \\ \vdots & & \vdots \\ (D_1 f_p)(a) & \dots & (D_n f_p)(a) \end{pmatrix} \quad .$$

Ⓟ **5.11 Corollaire.** *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to F$ une application différentiable en $a \in U$ et soit $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n$. Alors on a l'égalité*

$$\big((Df)(a)\big)(h) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(a) \cdot h_j \quad .$$

Si en plus l'espace F est $\mathbf{R}^p$, on note $f_i = \pi_i \circ f : U \to \mathbf{R}$ (4.2) la i-ème composante de f, c'est-à-dire $f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big)$. Et dans ce cas on a l'égalité

$$w = \big((Df)(a)\big)(h) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i = 1, \dots, p \ : \ w_i = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f_i)(a) \cdot h_j \quad .$$

Autrement dit : la matrice de l'application linéaire $(Df)(a)$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$ respectivement est donnée par

$$\forall i = 1, \dots, p \ \forall j = 1, \dots, n \quad : \quad \mathrm{matrice}\big((Df)(a)\big)_{ij} = (\partial_j f_i)(a) \quad .$$

Ⓟ **5.12 Proposition.** *Soit $U \subset E_1 \times \dots \times E_n$ un ouvert, soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ et soit $f : U \to F$ une application.*

(i) *S'il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de a sur lequel toutes les différentielles partielles $D_j f$ existent et sont continues au point a, alors f est différentiable en a et on a, pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, l'égalité (voir aussi [5.9])*

$$\big((Df)(a)\big)(h) = \sum_{j=1}^{n} \big((D_j f)(a)\big)(h_j) \quad .$$

(ii) *L'application f est de classe C^1 si et seulement si toutes les différentielles partielles $D_j f$ existent sur U et y sont continues.*

Remarque pour les curieux. Dans la preuve de [5.12] on n'a pas utilisé, dans le cas $n = 2$, le fait que $D_2 f$ est continue au point $a = (a_1, a_2)$, seulement la continuité de $D_1 f$. Dans le cas général ceci se traduit dans le constat qu'il suffit que $n - 1$ différentielles partielles parmi les n sont continues au point a et que le n-ième existe au point a.

Nota Bene. Il ne faut pas confondre la notion de continuité de Df requise dans [5.12] avec la continuité de la différentielle $(Df)(x)$ en un point x (une application linéaire continue). Si $f : U \to F$ est une application différentiable, on a l'application

$Df : U \to \mathcal{L}(E;F)$. Et pour tout $x \in U$ on peut évaluer la différentielle $(Df)(x)$ en un vecteur $v \in E$ pour obtenir un élément

$$\big((Df)(x)\big)(v) \tag{5.13}$$

de F. La condition que la différentielle doit être une application linéaire continue dit que l'expression (5.13) doit être continue en v. Par contre, la condition donnée en [5.12] demande en particulier que l'expression (5.13) est continue en x (au point a). Notons en passant que la condition requise en [5.12] est plus forte que la simple condition que l'expression (5.13) est continue en x au point a, car on demande que l'application Df est continue au point a en tant qu'application à valeurs dans $\mathcal{L}(E;F)$. Mais la confusion qui pourrait exister concerne la confusion entre la continuité en v avec la continuité en x.

Si on pense au cas de la dimension finie, on sait que toute application linéaire est automatiquement continue. Et une telle application linéaire est représentée par sa matrice (par rapport à une base). Dans ce cas, la continuité requise en [5.12] est la continuité des éléments de cette matrice en fonction de $x \in U$.

Ⓟ **5.14 Corollaire.** *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, soit $a \in U$ et soit $f : U \to F$ une application.*

(i) *S'il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de a sur lequel toutes les dérivées partielles $\partial_j f$ existent et sont continues au point a, alors f est différentiable en a et on a, pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n$, l'égalité (voir aussi [5.11])*

$$\big((Df)(a)\big)(h) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(a) \cdot h_j \quad .$$

(ii) *L'application f est de classe C^1 si et seulement si toutes les dérivées partielles $\partial_j f$ existent sur U et y sont continues.*

Chapitre II

Différentielles d'ordre supérieur

6. Algèbre multilinéaire

Convention locale. Dans toute cette section (sauf quand on écrit explicitement autre chose) $E_1, \ldots, E_n$, E, F et G désignent des espaces vectoriels normés.

6.1 Définitions. Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application. On dit que f *est n-linéaire* si pour tout $v_i \in E_i$, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, pour tout $w, u \in E_j$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}$ on a l'égalité

$$f(v_1, \ldots, v_{j-1}, w + \lambda u, v_{j+1}, \ldots, v_n) = \\ f(v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_n) + \lambda \cdot f(v_1, \ldots, v_{j-1}, u, v_{j+1}, \ldots, v_n) \ .$$

Autrement dit, f est n-linéaire si, quand on fixe $n-1$ variables, la fonction est linéaire dans la variable restante. Il est évident qu'une application 1-linéaire est une application linéaire ; au lieu de 2-linéaire et 3-linéaire on parle le plus souvent de *bilinéaire* et *trilinéaire*.

On note par $\mathcal{L}^{(n)}(E_1 \times \cdots \times E_n; F)$ l'espace vectoriel de toutes les applications n-linéaires *continues* $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$.

Dans le cas où on a $E_i = E$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, on dit qu'une application n-linéaire $f : E^n \to F$ est *symétrique* si elle vérifie (en plus) la condition que pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ et pour tout $v_i \in E$ on a l'égalité

$$f(v_1, \ldots, v_n) = f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) \ .$$

Nota Bene. Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des espaces vectoriels normés, alors le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ est aussi un espace vectoriel normé. Il est donc important de distinguer les deux espaces $\mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_n; F)$ et $\mathcal{L}^{(n)}(E_1 \times \cdots \times E_n; F)$. Par exemple, si tous les espaces sont de dimension finie, alors on a

$$\dim\big(\mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_n; F)\big) = \dim(F) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)\Big)$$

et

$$\dim\big(\mathcal{L}^{(n)}(E_1 \times \cdots \times E_n; F)\big) = \dim(F) \cdot \prod_{i=1}^{n} \dim(E_i) \ .$$

Ⓟ **6.2 Lemme.** *Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application n-linéaire. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue ;*

(ii) *f est continue en $(0,\dots,0)\in E_1\times\cdots\times E_n$;*

(iii) *il existe $C\geqslant 0$ tel que pour tout $v_i\in E_i$, $i=1,\dots,n$ on a*

$$\|f(v_1,\dots,v_n)\|\leqslant C\cdot\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\| \quad .$$

Ⓟ **6.3 Lemme.** *L'application $N:\mathcal{L}^{(n)}(E_1\times\cdots\times E_n;F)\to\mathbf{R}$ définie par*

$$N(f)=\sup_{v_i\in E_i^*}\frac{\|f(v_1,\dots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|}$$

est une norme.

6.4 Définition/convention. On muni l'espace $\mathcal{L}^{(n)}(E_1\times\cdots\times E_n;F)$ toujours de la norme N définie en [6.3] et dans la suite on la notera comme $\|\cdot\|$ (voir [1.1]).

Ⓟ **6.5 Lemme.** *Soit $f\in\mathcal{L}^{(n)}(E_1\times\cdots E_n;F)$ et soit $v_i\in E_i$. Alors on a la majoration*

$$\|f(v_1,\dots,v_n)\|\leqslant\|f\|\cdot\|v_1\|\cdots\|v_n\| \quad .$$

Ⓟ **6.6 Lemme.** *Soit $f:E_1\times\cdots\times E_n\to F$ une application n-linéaire et soit $C\geqslant 0$. Si pour tout $v_i\in E_i$ on a l'inégalité $\|f(v_1,\dots,v_n)\|\leqslant C\cdot\|v_1\|\cdots\|v_n\|$, alors f est continue et $\|f\|\leqslant C$.*

Ⓟ **6.7 Lemme.** *Soit $f:E_1\times\cdots\times E_n\to F$ une application n-linéaire. Si tous les espaces E_i sont de dimension finie, alors f est continue.*

Ⓟ **6.8 Lemme.** *L'application $\mathcal{M}:\mathbf{R}\times E\to E$, $\mathcal{M}(\lambda,x)=\lambda x$ est une application bilinéaire continue.*

Ⓟ **6.9 Lemme.** *Les applications (d'évaluation) $\mathcal{E}:\mathcal{L}(E;F)\times E\to F$ et (de composition) $\mathcal{C}:\mathcal{L}(F;G)\times\mathcal{L}(E;F)\to\mathcal{L}(E;G)$ définies par*

$$\mathcal{E}(A,v)=A(v) \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{C}(A,B)=A\circ B$$

sont des applications bilinéaires continues vérifiant $\|\mathcal{E}\|,\|\mathcal{C}\|\leqslant 1$ (voir aussi [16.63]).

7. Différentielles d'ordre supérieur

L'idée des différentielles d'ordre supérieur est à la fois très simple et difficile à comprendre. Côté simple, si $f : U \to F$ est différentiable, sa différentielle est une application $Df : U \to \mathcal{L}(E; F)$. Si on change, pour simplifier l'écriture, le nom de l'epace vectoriel normé $\mathcal{L}(E; F)$ en F_1 : $F_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{L}(E; F)$, alors on a obtenu une application $Df : U \to F_1$ et on peut se poser la question si cette application est différentiable. Si oui, on obtiendra une application $D(Df) : U \to \mathcal{L}(E; F_1)$. Et cette application $D(Df)$, qu'on note D^2f, est appelée la deuxième différentielle de f. Il est simple de poursuivre cette démarche pour obtenir les différentielles d'ordre supérieur de f : la $k+1$-ième différentielle de f, notée $D^{k+1}f$, est la différentielle de sa k-ième différentielle : $D^{k+1}f = D(D^kf)$.

D'autre part, l'interprétation de ces différentielles d'ordre supérieur présente des difficultés et une image qui peut aider est l'idée de poupées russes. Commençons avec la différentielle seconde décrite ci-dessus. C'est une application D^2f à valeurs dans $\mathcal{L}(E; F_1)$. Pour $a \in U$ on a donc $(D^2f)(a) \in \mathcal{L}(E; F_1)$, c'est-à-dire

$$(D^2f)(a) : E \to F_1 \qquad \text{une application linéaire continue.}$$

On peut donc l'évaluer en un point $v_1 \in E$ pour obtenir un élément de F_1 :

$$\Big(\big(D(Df)\big)(a)\Big)(v_1) \in F_1 \ .$$

Mais $F_1 = \mathcal{L}(E; F)$, c'est-à-dire

$$\big((D^2f)(a)\big)(v_1) : E \to F \qquad \text{une application linéaire continue.}$$

On peut donc évaluer cette application en un point $v_2 \in E$ pour obtenir un élément de F :

$$\Big(\big((D^2f)(a)\big)(v_1)\Big)(v_2) \in F \ .$$

Le "déballage" de la différentielle seconde $D(Df)$ s'arrête ici, car on n'a pas d'autres informations sur l'espace F.

Mais on peut rajouter une couche (une poupée) en passant à la troisième différentielle. De nouveau pour simplifier l'écriture on change le nom de l'espace $\mathcal{L}(E; F_1)$ en F_2 : $F_2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathcal{L}(E; F_1)$. La différentielle seconde est donc une application $D^2f : U \to F_2$. Si cette application est différentiable, on obtiendra une application $D^3f \equiv D(D^2f)$: $U \to \mathcal{L}(E; F_2)$. Et là, on peut commencer le déballage comme pour la différentielle seconde. Ainsi on obtient schématiquement les étapes suivantes :

$$\begin{array}{l}
\text{choix de} \quad a \in U \\
\quad (D^3f)(a) \in \mathcal{L}(E; F_2) \\
\qquad (D^3f)(a) : E \to F_2 \\
\qquad\quad \text{choix de} \quad v_1 \in E \\
\qquad\qquad \big((D^3f)(a)\big)(v_1) \in F_2 = \mathcal{L}(E; F_1) \\
\qquad\qquad\quad \big((D^3f)(a)\big)(v_1) : E \to F_1 \\
\qquad\qquad\qquad \text{choix de} \quad v_2 \in E \\
\qquad\qquad\qquad\quad \Big(\big((D^3f)(a)\big)(v_1)\Big)(v_2) \in F_1 = \mathcal{L}(E; F) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \Big(\big((D^3f)(a)\big)(v_1)\Big)(v_2) : E \to F
\end{array}$$

$$\text{choix de} \quad v_3 \in E$$

$$\Bigg(\Big(\big((D^3f)(a)\big)(v_1)\Big)(v_2)\Bigg)(v_3) \in F \quad .$$

On voit que $(D^3f)(a)$, la différentielle “triple” au point $a \in U$, est un objet qu'on peut évaluer successivement en trois éléments arbitraire de E pour obtenir à la fin un élement de F, l'espace d'arrivé de l'application f.

Si on résume ce qu'on a vu, on voit que $(D^2f)(a)$, la différentielle seconde en un point $a \in U$, est un objet qu'on peut évaluer successivement en deux éléments arbitraire de E et que $(D^3f)(a)$, la différentielle troisième de f en a, est un object qu'on peut évaluer successivement en trois éléments arbitraire de E ; et dans ces deux cas on obtient un élément de F. Par “récurrence” on en déduit que la k-ième différentielle de f en $a \in U$, qu'on note $(D^kf)(a)$, est un object qu'on peut évaluer successivement en k éléments de E pour obtenir un élément de F.

Une fois qu'on a compris cette notion, on commence à changer le discours en enlevant le mot “successif” et de dire que “la différentielle k-ième est un objet qu'on peut évaluer en k éléments de E.” Et on écrira

$$\big((D^k)(a)\big)(v_1, \dots, v_k)$$

pour le résultat de l'évaluation successive des vecteurs v_i, au lieu d'écrire correctement

$$\Bigg(\dots\Big(\big((D^kf)(a)\big)(v_1)\Big)(v_2)\dots\Bigg)(v_k) \quad .$$

Convention locale. Dans toute cette section (sauf quand on écrit explicitement autre chose) $F_1, \dots, F_p$, E, F et G désignent des espaces vectoriels normés et $U \subset E$ un ouvert.

7.1 Définitions. On définit (par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$) les espaces $\mathcal{L}^{\uparrow k}(E;F)$ par [1]

$$\mathcal{L}^{\uparrow 0}(E;F) = F \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}^{\uparrow k+1}(E;F) = \mathcal{L}\big(E;\mathcal{L}^{\uparrow k}(E;F)\big) \quad .$$

Ainsi on a

$$\mathcal{L}^{\uparrow 1}(E;F) = \mathcal{L}(E;F) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}^{\uparrow k}(E;F) = \mathcal{L}\Big(\underbrace{E;\mathcal{L}\big(E;\dots\mathcal{L}(E}_{k \text{ fois l'espace } E};F)\big)\Big) \quad .$$

Soit $f : U \to F$ une application. Pour homogénéiser les définitions et notations à venir, on dit que f est 0 fois différentiable en $a \in E$ si $f(a)$ existe (étant donné que f est définie sur $U \subset E$, f est 0 fois différentiable en a si et seulement si $a \in U$) et on introduit $(D^0f)(a)$, la 0ᵉ différentielle de f en a comme une notation alternative pour $f(a)$: $(D^0f)(a) = f(a)$. Et si f est différentiable en a, on écrit $(D^1f)(a)$ comme alternative pour $(Df)(a)$. On a donc :

$$D^0f \equiv f : U \to \mathcal{L}^{\uparrow 0}(E;F) \equiv F$$

et si f est différentiable sur U :

$$D^1f : U \to \mathcal{L}^{\uparrow 1}(E;F) \equiv \mathcal{L}(E;F) \quad .$$

Ensuite on dit (par récurrence sur $k \geqslant 2$) que f *est k fois différentiable en $a \in U$* si f est $k-1$ fois différentiable sur U et tel que la différentielle $(k-1)$-ième est

1. Attention : cette notation n'est absolument pas standard et n'existe que dans ce texte.

différentiable au point a. Si c'est le cas, on définit la différentielle k-ième de f au point a, notée $(D^k f)(a)$ par

$$(D^k f)(a) = \big(D(D^{k-1} f)\big)(a) \in \mathcal{L}\big(E; \mathcal{L}^{\uparrow k-1}(E;F)\big) \equiv \mathcal{L}^{\uparrow k}(E;F) \ .$$

On dit que f *est k fois différentiable sur U* si f est k fois différentiable en chaque point $a \in U$. Si c'est le cas, la différentielle k-ième est une application

$$D^k f : U \to \mathcal{L}^{\uparrow k}(E;F) \ .$$

Pour $k \in \mathbf{N}$ on dit que f *est de classe C^k (sur U)* si f est k fois différentiable sur U et que la différentielle k-ième $D^k f : U \to \mathcal{L}^{\uparrow k}(E;F)$ est une application continue. En particulier une fonction de classe C^0 est (simplement) une fonction continue [1.41]. Et on dit que f *est de classe C^∞ (sur U)* si f est de classe C^k sur U pour tout $k \in \mathbf{N}$. Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ on note $C^k(U;F)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k définies sur $U \subset E$ et à valeurs dans F.

Remarque pour les curieux. Si f est une fonction définie sur $U \subset E$, on a dit que f est deux fois différentiable au point $a \in U$ si (et seulement si) f est différentiable sur U et que $Df : U \to \mathcal{L}(E;F)$ est différentiable au point a. Strictement parlant on n'a pas besoin que Df existe sur tout U pour pouvoir parler de sa différentielle au point a ; il suffit que Df soit définie sur un voisinage ouvert $V \subset U$ de a. Et une même remarque s'applique sur les différentielle d'ordre supérieure. Théoriquement il est donc possible que la différentielle Df est définie sur un ouvert $U_1 \subset U$ et que la différentielle seconde n'est définie que sur un ouvert $U_2 \subset U_1$. D'autre part, bien qu'il est facile de trouver des exemples de fonctions qui ne sont pas différentiables sur tout le domaine de définition, je ne connais pas d'exemples “naturels” de telles fonctions pour lesquelles le domaine de définition de la différentielle seconde se rétrécit encore. Si on rajoute à cela l'observation que dans la quasi totalité des applications on ne s'intéresse qu'aux fonctions de classe C^k sur un ouvert, on voit que la définition d'une différentielle d'ordre supérieure qu'on a donné est amplement suffisante.

Ⓟ **7.2 Lemme.** *Toute application constante et toute application linéaire continue [2.9] est de classe C^∞.*

Ⓟ **7.3 Lemme.** *Soit $A : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue. Alors A est de classe C^∞ avec*

$$\big((DA)(x,y)\big)(h,k) = A(x,k) + A(h,y)$$

et

$$\Big(\big((D^2A)(x,y)\big)(h,k)\Big)(h',k') = A(h,k') + A(h',k) \ ,$$

avec

$$\|(DA)(x,y)\| \leqslant 2\,\|A\| \cdot \|(x,y)\|_\infty \qquad et \qquad \|(D^2A)(x,y)\| \leqslant 2\,\|A\| \ .$$

En particulier $DA : E \times F \to \mathcal{L}(E \times F; G)$ est une application linéaire continue et $D^2A : E \times F \to \mathcal{L}\big(E \times F; \mathcal{L}(E \times F; G)\big)$ est l'application constante DA.

Ⓟ **7.4 Lemme.** *Soit $f : U \to F$ une application et $k \in \mathbf{N}$.*

(i) $\mathcal{L}^{\uparrow k+1}(E;F) = \mathcal{L}^{\uparrow k}\big(E;\mathcal{L}(E;F)\big)$.

(ii) *f est $k+1$ fois différentiable en $a \in U$ si et seulement si $Df : U \to \mathcal{L}(E;F)$ est k fois différentiable en $a \in U$. Si c'est le cas, on a l'égalité*

$$\big(D(D^k f)\big)(a) \overset{\text{déf.}}{=} (D^{k+1} f)(a) = \big(D^k(Df)\big)(a) \quad .$$

(iii) *$f : U \to F$ est de classe C^{k+1} si et seulement si $Df : U \to \mathcal{L}(E;F)$ est de classe C^k.*

(iv) *f est de classe C^∞ si et seulement si f est k fois différentiable sur U pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.*

Remarque pour les curieux. Il n'est pas très difficile de généraliser [7.4.i-ii] pour $k, \ell \in \mathbf{N}$ comme suit :

(i) $\mathcal{L}^{\uparrow k+\ell}(E;F) = \mathcal{L}^{\uparrow k}\big(E;\mathcal{L}^{\uparrow \ell}(E;F)\big)$;

(ii) f est $k+\ell$ fois différentiable en $a \in U$ si et seulement si $D^\ell f : U \to \mathcal{L}^{\uparrow \ell}(E;F)$ est k fois différentiable en $a \in U$. Si c'est le cas, on a l'égalité

$$(D^{k+\ell} f)(a) = \big(D^k(D^\ell f)\big)(a) \quad .$$

Nota Bene. [7.4] est le résultat préliminaire nécessaire pour montrer que la propriété d'être k fois différentiable/de classe C^k est préservée par les notions de somme, produit, et composée de deux fonctions, ainsi que par la notion de composante. Ce qui est légèrement surprenant est que les preuves pour les composantes [7.5] et pour la composée [7.6] ci-dessous ne sont pas indépendantes, bien que dans l'énoncé de l'un on ne parle pas du tout de l'autre. Dans les deux cas on procède par récurrence sur k, mais pour montrer le cas $k+1$ on a besoin des cas k des deux résultats ! Les preuves se renvoient donc mutuellement, mais pas de façon circulaire.

Ⓟ **7.5 Proposition.** *Soit $f : U \to F_1 \times \cdots \times F_p$ une application, soit $f_i = \pi_i \circ f : U \to F_i$ (4.2), c'est-à-dire $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$ et soit $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 1$. Alors f est k fois différentiable en $a \in U$ (respectivement de classe C^k sur U) si et seulement si toutes les fonctions f_i, $i = 1, \ldots, p$ sont k fois différentiables en a (respectivement de classe C^k sur U).*

Ⓟ **7.6 Proposition.** *Soit $V \subset F$ un ouvert, soit $f : U \to F$ et $g : V \to G$ deux applications telles que $f(U) \subset V$, soit $a \in U$ et $b = f(a) \in f(U) \subset V$, et soit $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 1$. Si f est k fois différentiable en a (respectivement de classse C^k sur U) et g k fois différentiable en b (respectivement de classe C^k sur V), alors $g \circ f : U \to G$ est k fois différentiable en a (respectivement de classe C^k sur U).*

Ⓟ **7.7 Corollaire.** *Soit $f, g : U \to F$ deux applications et $k \geqslant 1$. Si f et g sont k fois différentiables en $a \in U$ (respectivement de classe C^k sur U), alors $f+g$ est k fois différentiable en a (respectivement de classe C^k sur U) avec*

$$\big(D^k(f+g)\big)(a) = (D^k f)(a) + (D^k g)(a) \quad .$$

Ⓟ **7.8 Corollaire.** *Soit $f : U \to F$ et $g : U \to \mathbf{R}$ deux applications et $k \geqslant 1$. Si f et g sont k fois différentiables en $a \in U$ (respectivement de classe C^k sur U), alors $g \cdot f$ est k fois différentiable en a (respectivement de classe C^k sur U).*

7.9 Nota Bene. On peut résumer les trois résultats [7.6], [7.7] et [7.8] en disant que la classe des applications qui sont k fois différentiable en un point ou qui sont de classe C^k sur leur domaine est stable sous les opérations de composition, addition et multiplication. C'est la généralisation pour $k \in \mathbf{N}^*$ quelconque du cas $k = 1$ montré en §2 (voir [2.15]). Comme l'opération d'inversion $I : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$, $I(x) = x^{-1} \equiv 1/x$ est de classe C^∞, il s'ensuit que cette classe de fonctions est aussi stable sous les opérations de soustraction et division. La conséquence de tout cela est que ces trois résultats cités ci-dessus permettent de montrer que la quasi totalité des applications qu'on écrit sont des applications de classe C^∞ ! Car ces applications sont construites à l'aide de fonctions élémentaires (qui sont de classe C^∞) et ces cinq opérations. Les "problèmes" commencent quand on veut étendre le domaine de définition d'une telle expression à des points où l'expression "naturelle" n'a plus de sens, par exemple parce qu'on divise par 0, qu'on prend la racine carrée d'un nombre inférieur ou égal à 0 (la racine carrée n'est différentiable/dérivable en 0 !), etc.

Ⓟ **7.10 Lemme.** *Soit $f : U \to F$ une application, $v \in E$ et $\mathcal{E}_v : \mathcal{L}(E; F) \to F$ l'application définie en [1.27].*

(i) *On a l'égalité $D_v f = \mathcal{E}_v \circ (Df)$ en tout point où f est différentiable.*

(ii) *Pour $k \in \mathbf{N}$, si f est $k+1$ fois différentiable en $a \in U$ ou de classe C^{k+1} sur U, alors $D_v f$ est k fois différentiable en a, respectivement de classe C^k sur U.*

Ⓟ **7.11 Lemme.** *Soit $f : U \to F$ une application, soit $A : F \to G$ une application linéaire continue et soit $v \in E$. Alors on a l'égalité*

$$D_v(A \circ f) = A \circ (D_v f)$$

en tout point où f est différentiable.

Ⓟ **7.12 Proposition.** *Soit $f : U \to F$ une application $k \geqslant 1$ fois différentiable au point $a \in U$ et soit $v_i \in E$, $i = 1, \ldots, k$.*

(i) *L'expression $\Big(D_{v_1}\big(D_{v_2} \ldots (D_{v_k} f) \ldots\big)\Big)(a)$ est bien définie et on a l'égalité*

$$\Big(D_{v_1}\big(D_{v_2} \ldots (D_{v_k} f) \ldots\big)\Big)(a) = \bigg(\ldots \Big(\big((D^k f)(a)\big)(v_1)\Big)(v_2) \ldots\bigg)(v_k) \quad .$$

(ii) *L'application $A : E^k \to F$ définie par*

$$A(v_1, \ldots, v_k) = \bigg(\ldots \Big(\big((D^k f)(a)\big)(v_1)\Big)(v_2) \ldots\bigg)(v_k)$$

est une application k-linéaire continue.

7.13 Abus de langage et de notation. Il est tentant de dire que l'application k-linéaire A définie par [7.12] **est** la différentielle k-ième $(D^k f)(a)$ au point a, mais ce n'est pas le cas : A appartient à l'espace $\mathcal{L}^{(k)}(E^k;F)$ et $(D^kf)(a)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}^{\uparrow k}(E;F)$. Dans [7.17] on montrera que ces espaces, bien que pas identiques, sont isométriquement isomorphes. Ceci nous donnera une justification pour l'abus de langage (comme si on devrait justifier un abus) qui consiste à dire que $(D^kf)(a)$ est une application k-linéaire, définie sur E^k et à valeurs dans F. Il faut donc toujours interpréter cette affirmation comme étant appliquée à l'application A définie par [7.12]. Associé à cet abus de langage on ajoute un abus de notation en prétendant qu'on peut évaluer $(D^kf)(a)$ sur k vecteurs comme si c'était l'application k-linéaire A. L'expression $\big((D^kf)(a)\big)(v_1,\dots,v_k)$ désigne donc (par définition/abus de notation) l'élément

$$\tag{7.14} \begin{aligned}\big((D^kf)(a)\big)(v_1,\dots,v_k) &\overset{\text{déf.}}{=} \Big(\dots\Big(\big((D^kf)(a)\big)(v_1)\Big)(v_2)\dots\Big)(v_k)\\ &\overset{[7.12]}{=} \Big(D_{v_1}\big(D_{v_2}(\dots D_{v_k}f)\big)\Big)(a) \ .\end{aligned}$$

Ⓟ **7.15 Proposition.** *Soit $I\subset\mathbf{R}$ un ouvert, $f:I\to F$ un application et $k\in\mathbf{N}^*$. Alors f est k fois dérivable en $a\in I$ (respectivement $f^{(k)}$ est continue sur I) si et seulement si f est k fois différentiable en a (respectivement f est de classe C^k sur I). Si c'est le cas, on a les égalités*

$$f^{(k)}(a) = \big((D^kf)(a)\big)(\overbrace{1,\dots,1}^{k\ \textit{fois}})$$

$$\big((D^kf)(a)\big)(h_1,\dots,h_k) = f^{(k)}(a)\cdot h_1\cdots h_k \ .$$

Ⓟ **7.16 Lemme.** *Soit $\Phi\in\mathcal{L}(F;G)$ et soit $\Phi^\circ:\mathcal{L}(E;F)\to\mathcal{L}(E;G)$ définie par*

$$\Phi^\circ(A)=\Phi\circ A \ .$$

Si Φ est un isomorphisme ou une isométrie, alors Φ° est également un isomorphisme ou une isométrie.

Ⓟ **7.17 Proposition.** *Pour tout $k\geqslant 1$ l'application $\Phi_k:\mathcal{L}^{\uparrow k}(E;F)\to\mathcal{L}^{(k)}(E^k;F)$ définie par*

$$\big(\Phi_k(A)\big)(v_1,\dots,v_k)=\Big(\dots\big(A(v_1)\big)(v_2)\dots\Big)(v_k)$$

est une isomorphisme isométrique.

7.18 Abus de langage et de notation - suite. Une fois qu'on connaît l'existence de l'isomorphisme isométrique Φ_k défini en [7.17], on peut constater que la définition de l'application A dans [7.12.ii] est exactement la même chose que la définition de l'application $\Phi_k\big((D^kf)(a)\big)$. L'abus de langage et de notation introduit dans [7.13] consiste donc à **oublier** l'isomorphisme Φ_k : au lieu de dire que $\Phi_k\big((D^kf)(a)\big)$ est une application k-linéaire sur E, on oublie Φ_k et on dit que $(D^kf)(a)$ est k-linéaire ; et au lieu d'écrire $\Big(\Phi_k\big((D^kf)(a)\big)\Big)(v_1,\dots,v_k)$ on écrit $\big((D^kf)(a)\big)(v_1,\dots,v_k)$. Dans des calculs où intervient la norme de $(D^kf)(a)$, l'oublie de l'isomorphisme isométrique

Φ_k ne pose pas un problème, justement parce que c'est une isométrie. Malgré l'abus de notation, l'inégalité

$$\|\big((D^k f)(a)\big)(v_1,\ldots,v_k)\| \leqslant \|(D^k f)(a)\| \cdot \|v_1\| \cdots \|v_k\|$$

est vraie avec à droite la norme de l'élément $(D^k f)(a) \in \mathcal{L}^{\uparrow k}(E;F)$.

Remarque pour les curieux. On peut voir l'isomorphisme isométrique

$$\Psi : \mathcal{L}\big(E;\mathcal{L}^{(k)}(E^k;F)\big) \to \mathcal{L}^{(k+1)}(E^{k+1};F)$$

utilisé dans la preuve de [7.17] comme un cas particulier d'un résultat plus général : si $E_1,\ldots,E_{p+q}$ et F sont des espaces vectoriels normés et si

$$\Phi : \mathcal{L}^{(p)}\big(E_1\times\cdots\times E_p;\mathcal{L}^{(q)}(E_{p+1}\times\cdots\times E_{p+q};F)\big) \to \mathcal{L}^{(p+q)}(E_1\times\cdots\times E_{p+q};F)$$

est l'application définie par

$$\big(\Phi(A)\big)(e_1,\ldots,e_{p+q}) = \big(A(e_1,\ldots,e_p)\big)(e_{p+1},\ldots,e_{p+q}) \quad ,$$

alors Φ est un isomorphisme isométrique (voir aussi [16.61]). La preuve de ce résultat est un peu longue, uniquement parce qu'il faut vérifier un tas de choses. Mais dans le fond c'est assez simple, car la définition de Φ n'est rien d'autre qu'un (dé)placement des parenthèses : on enlève les parenthèses qui séparent les premiers p vecteurs $e_1,\ldots,e_p$ des q derniers.

Ⓟ **7.19 Lemme.** *Soit $f : U \to F_1\times\cdots\times F_p$ une application et soit $f_i = \pi_i\circ f : U \to F_i$ (4.2), c'est-à-dire $f(x) = \big(f_1(x),\ldots,f_p(x)\big)$. Si f est $k \geqslant 1$ fois différentiable en $a\in U$ (voir [7.5]), alors on a, pour tout $v_1,\ldots,v_k \in E$, l'égalité*

$$\big((D^k f)(a)\big)(v_1,\ldots,v_k) = \begin{pmatrix} \big((D^k f_1)(a)\big)(v_1,\ldots,v_k) \\ \vdots \\ \big((D^k f_p)(a)\big)(v_1,\ldots,v_k) \end{pmatrix} \quad .$$

Ⓟ **7.20 Corollaire.** *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, $f : U \to F$ une application k fois différentiable au point $a \in U$ est soit $v^{(1)},\ldots,v^{(k)} \in \mathbf{R}^n$ des vecteurs. Alors on a l'égalité*

$$\big((D^k f)(a)\big)(v^{(1)},\ldots,v^{(k)}) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (\partial_{j_1}\,\partial_{j_2}\cdots\partial_{j_k} f)(a)\, v^{(1)}_{j_1}\, v^{(2)}_{j_2}\cdots v^{(k)}_{j_k} \quad .$$

Si en plus l'espace F est $\mathbf{R}^p$, et avec $f_i = \pi_i\circ f : U \to \mathbf{R}$ la i-ème composante de f (4.2), c'est-à-dire $f(x) = \big(f_1(x),\ldots,f_p(x)\big)$, alors dans ce cas on a l'égalité

$$w = \big((D^k f)(a)\big)(v^{(1)},\ldots,v^{(k)}) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\forall i = 1,\ldots,p \quad : \quad w_i = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} (\partial_{j_1}\,\partial_{j_2}\cdots\partial_{j_k} f_i)(a)\, v^{(1)}_{j_1}\, v^{(2)}_{j_2}\cdots v^{(k)}_{j_k} \quad .$$

7.21 Nota Bene/Définition. Il est d'usage d'exprimer une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ par sa matrice par rapport aux bases canoniques des ces espaces. De même il est d'usage d'exprimer la différentielle d'une application différentiable

$f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ par sa matrice, c'est-à-dire par la matrice des dérivées partielles, et donc d'écrire

$$(Df)(a) \cong \big((\partial_j f_i)(a)\big)_{i=1}^{p}\,{}_{j=1}^{n} \equiv \begin{pmatrix} (\partial_1 f_1)(a) & \cdots & (\partial_n f_1)(a) \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial_1 f_p(a) & \cdots & (\partial_n f_p)(a) \end{pmatrix} .$$

Évidemment on peut faire la même chose pour les différentielles d'ordre supérieur et écrire

$$(D^k f)(a) \cong \big((\partial_{j_1}\,\partial_{j_2} \cdots \partial_{j_k} f_i)(a)\big)_{i=1}^{n}\,{}_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} .$$

Par contre, un tel "tableau" de nombres (avec $k+1$ indices indépendantes) ne s'écrit plus facilement sur une feuille. La seule exception est le cas $p = 1$ et $k = 2$, auquel cas on obtient une matrice de nombres qu'on peut écrire "facilement" sur une feuille :

$$(D^2 f)(a) \cong \big((\partial_{j_1}\,\partial_{j_2} f)(a)\big)_{j_1,j_2=1}^{n} \cong \begin{pmatrix} (\partial_1\partial_1 f)(a) & \cdots & (\partial_1\partial_n f)(a) \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial_n\partial_1 f)(a) & \cdots & (\partial_n\partial_n f)(a) \end{pmatrix} . \tag{7.22}$$

Écrite sous cette forme, la différentielle seconde $\big((D^2 f)(a)\big)(v, w)$ est donnée par la formule

$$\big((D^2 f)(a)\big)(v, w) = \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\partial_1\partial_1 f)(a) & \cdots & (\partial_1\partial_n f)(a) \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial_n\partial_1 f)(a) & \cdots & (\partial_n\partial_n f)(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} .$$

Dans ce cas la matrice écrite en (7.22) est appelée *la matrice Hessienne de f au point a* (voir aussi [9.2] et [9.4]). Dans [8.1] on montrera (sous l'hypothèse que $(D^2 f)(a)$ existe !) que la matrice Hessienne est toujours une matrice symétrique.

8. Le théorème de Schwarz et développements limités

Si $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction réelle d'une variable réelle, on apprend en première année de l'enseignement supérieur la définition d'un développement limité d'ordre n de f au point $a \in I$: c'est un polynôme $P_a(X)$ à coefficients réelles (c'est-à-dire $P_a \in \mathbf{R}[X]$) de degré au plus n qui vérifie la condition

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - P_a(h)}{h^n} = 0 \ .$$

Si on définit la fonction $\varepsilon_a : I_a \to \mathbf{R}$ par

$$\varepsilon_a(x) = \frac{f(x) - P_a(x-a)}{(x-a)^n} \quad \text{si } x \neq a \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_a(a) = 0 \ ,$$

alors on retrouve la formulation "standard" d'un développement limité :

$$f(x) = P_a(x-a) + (x-a)^n \, \varepsilon_a(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to a} \varepsilon_a(x) = 0 \ .$$

Si on veut généraliser la notion d'un développement limité à des fonctions de plusieurs variables, il semble naturel de remplacer le polynôme P par un polynôme en plusieurs variables, genre $P(X,Y) = 2 + 3X - 7Y + X^2 - 2XY - Y^3$. Mais dans ce cas il faut bien définir la notion de degré d'un tel polynôme. Par contre, cette "solution" ne marche plus quand le domaine de f est un (ouvert d'un) espace vectoriel de dimension infinie : on aura du mal à définir la notion d'un polynôme en un infinité de variables.

Pour trouver un moyen de généraliser la notion d'un développement limité à des fonctions définies sur des ouverts d'un espace vectoriel arbitraire, on regarde le polynôme P (de degré au plus n) sous un autre angle. On écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, x^k \qquad \text{avec} \qquad a_k \in \mathbf{R} \ ,$$

et on constate que c'est une somme de monômes $h_k(x) = a_k \, x^k$. Chaque monôme h_k est une fonction de classe C^∞ qui a la propriété

$$\forall x, \lambda \in \mathbf{R} \quad : \quad h_k(\lambda x) = \lambda^k \cdot h_k(x) \ .$$

Cette propriété de h_k porte un nom : on dit que h_k est *homogène de degré* k. Inversement, si une fonction $h_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est homogène de degré k, alors on a

$$h_k(x) = x^k \cdot h_k(1) \ ,$$

c'est-à-dire que c'est un monôme de la forme $h_k(x) = a_k \, x^k$. En résumant, on peut donc dire qu'un développement limité d'ordre n de f en a est une suite d'applications h_k, homogène de degré k pour $0 \leqslant k \leqslant n$ telle que la fonction $P(x) = \sum_{k=0}^{n} h_k(x)$ vérifie la condition

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} h_k(h)}{h^n} = 0 \ .$$

Si on passe maintenant à des fonctions définies sur un ouvert d'un espace vectoriel normé E et à valeurs dans un espace (vectoriel normé) F, on peut donner la même définition d'une application homogène de degré k : une application $h_k : E \to F$ est homogène de degré k si elle vérifie la condition

$$\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad : \quad h_k(\lambda x) = \lambda^k \cdot h_k(x) \ .$$

Par contre, il semble qu'on n'a plus une expression simple pour une telle fonction, n'ayant pas d'élément préféré dans E (comme le 1 dans $\mathbf{R}$ précédemment). Mais on n'est pas complètement démuni : on peut montrer (voir [16.77]) que si $h_k : E \to F$ est une fonction homogène de degré k qui est k fois différentiable en $0 \in E$, alors il existe une unique application k-linéaire continue symétrique $H_k : E^k \to F$ tel qu'on a

$$h_k(x) = H_k(\underbrace{x, \ldots, x}_{k \text{ fois}}) \quad .$$

Dans le cas $E = F = \mathbf{R}$ cette application k-linéaire continue symétrique unique $H_k : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ est (évidemment) donnée par

$$H_k(x_1, \ldots, x_k) = h(1) \cdot x_1 \cdots x_k \quad .$$

Réciproquement on montre facilement que si $H_k : E^k \to F$ est une application k-linéaire continue symétrique, alors l'application $h_k : E \to F$ définie comme $h_k(x) = H_k(x, \ldots, x)$ est une application homogène de degré k. Il y a "donc" une bijection entre les fonctions homogènes de degré k (qui sont k fois différentiable en 0) et les applications k-linéaires continues symétriques (et les deux seront automatiquement de classe C^∞).

Avec cette discussion, il semble naturel de définir le développement limité d'une application $f : U \subset E \to F$ d'ordre n en $a \in U$ comme une suite d'applications $H_k : E^k \to F$, $0 \leqslant k \leqslant n$ qui sont k-linéaires continues symétriques et qui vérifient la condition

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - \sum_{k=0}^n H_k(\overbrace{h, \ldots, h}^{k \text{ fois}}) \|}{\|h\|^n} = 0 \quad .$$

L'ajout des normes est naturel : on ne peut pas diviser par un vecteur et dans le cas $E = F = \mathbf{R}$, on a bien l'équivalence

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - P(h)}{h^n} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - P(h)|}{|h|^n} = 0 \quad .$$

Pour des raison qu'on expliquera ci-dessous, on préfère d'exprimer les fonctions h_k homogènes de degré k qui figurent naturellement dans le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^n h_k(x)$ d'un développement limité d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par sa formulation en termes d'une application k-linéaire continue symétrique.

Une fois qu'on a défini la notion de développement limité, vient naturellement la question de l'existence. Dans le cas "classique" d'une fonction réelle d'une variable réelle on a le résultat que si f est n fois dérivable en a, alors le développement limité de f d'ordre n en a existe et est donné par le polynôme de Taylor

$$P(h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k \quad .$$

Mais pour une fonction générale entre espaces vectoriels la notion de dérivée (d'ordre supérieure) n'existe pas. Donc pour pouvoir comparer avec le cas général, on devrait remplacer ces dérivées $k^{\text{ièmes}}$ $f^{(k)}(a)$ par les différentielles $k^{\text{ièmes}}$ $(D^k f)(a)$. Selon [7.15] on a l'égalité

$$f^{(k)}(a) \cdot h_1 \cdots h_k = \big((D^k f)(a)\big)(h_1, \ldots, h_k) \quad ,$$

ce qui permet l'écriture

$$P(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\big((D^k f)(a)\big)(\overbrace{h, \dots, h}^{k \text{ fois}})}{k!} \quad .$$

Écrite sous cette forme, l'expression pour le polynôme de Taylor a un sens même pour une fonction entre deux espaces vectoriels quelconques. Et si on compare cette écriture avec la définition d'un développement limité dans le cadre général, on obtient la suggestion qu'un développement limité sera déterminé par les applications k-linéaires H_k définies comme

$$H_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{\big((D^k f)(a)\big)(x_1, \dots, x_k)}{k!} \quad .$$

On voit ici l'avantage d'avoir pris des applications k-linéaires plutôt que des applications homogènes de degré k : on aurait de toute façon dû passer par l'application k-linéaire $(D^k f)(a)$ pour pouvoir écrire les monômes figurant dans le polynôme de Taylor à l'aide des différentielles d'ordre supérieur. Mais il y a un petit problème : on a défini un développement limité comme une suite d'applications k-linéaires continues **symétriques** (pour avoir une bijection avec les applications homogènes de degré k) et ici la suggestion nous donne bien des applications k-linéaires continues, mais *a priori* pas symétriques. Il se trouve que ce problème est un faux problème, car le théorème de Schwarz [8.1] (ou plutôt son corollaire [8.2]) dit que si f est k fois différentiable en a, alors sa k-ième différentielle est bien une application k-linéaire symétrique (quand on identifie la k-ième différentielle avec une application k-linéaire continue, voir [7.13] et [7.18]). Et ce qui est jusqu'à maintenant seulement une suggestion devient une proposition [8.9] : si f est k fois différentiable en a, alors il existe un développement limité de f d'ordre n en a et ce développement limité est donné par la suite des applications k-linéaires continues symétriques $H_k = (D^k f)(a)/k!$.

Convention locale. Dans toute cette section (sauf quand on écrit explicitement autre chose) E et F sont des espaces vectoriels normés, $U \subset E$ est un ouvert et $f : U \to F$ est une application.

Ⓟ **8.1 Théorème de Schwarz** [2]**.** *Si f est deux fois différentiable en $a \in U$, alors pour tout $v, w \in E$ on a l'égalité*

$$\big(D_v(D_w f)\big)(a) = \big(D_w(D_v f)\big)(a) \quad .$$

Ⓟ **8.2 Corollaire.** *Si f est k fois différentiable au point $a \in U$, $k \geqslant 2$, alors $(D^k f)(a)$, vue comme application k-linéaire continue [7.12], [7.13], est symétrique.*

Ⓟ **8.3 Lemme.** *Soit $n \geqslant 1$ et $H : E^n \to F$ une application n-linéaire continue symétrique et soit $f : E \to F$ l'application définie par $f(v) = H(v, \dots, v)$. Alors f est de*

2. (Karl) Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), le même de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du lemme de Schwarz en analyse complexe (entre autres) ; à ne pas confondre avec Laurent Schwartz (1915–2002).

classe C^∞ et pour $1 \leqslant k \leqslant n$ on a

$$\big((D^k f)(v)\big)(h_1, \dots, h_k) = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot H(\underbrace{v, \dots, v}_{n-k \text{ fois}}, h_1, \dots, h_k) \ ,$$

tandis que $D^k f = 0$ pour $k > n$.

Remarque pour les curieux. Si H est une application n-linéaire continue symétrique sur E et f l'application associée $f(v) = H(v, \dots, v)$, il est évident que f ne contient pas plus d'information que H. Mais selon [8.3] on peut récupérer H à partir de f par la formule

$$H = \frac{1}{n!} \cdot (D^n f)(0) \ ,$$

et donc f ne contient pas non plus moins d'information que H. Il est évident que f a la propriété

$$\forall v \in E \ \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad : \quad f(\lambda v) = \lambda^n \cdot f(v) \ .$$

Ce qui est remarquable est que cette propriété suffit (voir [16.77]) pour déduire de l'existence de $(D^n f)(0)$ qu'on a l'égalité

$$f(v) = \frac{1}{n!} \cdot \big((D^n f)(0)\big)(v, \dots, v) \ .$$

Ⓟ **8.4 Proposition.** *Soit $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application n-linéaire continue. Alors A est de classe C^∞, pour $k > n$ sa différentielle $D^k A$ est identiquement nulle et pour $1 \leqslant k \leqslant n$ on a*

$$\big((D^k A)(v)\big)\big(h^{[1]}, \dots, h^{[k]}\big) = \frac{1}{(n-k)!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} A\big(h_1^{[\sigma(1)]}, \dots, h_n^{[\sigma(n)]}\big) \ ,$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, \dots, n\}$ et où $v, h^{[i]} \in E_1 \times \cdots \times E_n$ avec $h^{[i]} = v$ pour $i > k$ et pour chaque $h^{[i]}$

$$h^{[i]} = \big(h_1^{[i]}, \dots, h_n^{[i]}\big) \in E_1 \times \cdots \times E_n$$

avec donc $h_j^{[i]} \in E_j$.

Remarque. Étant donné que l'argument v apparaît $n-k$ fois dans le membre de droite de la formule pour $D^k A$ donnée dans [8.4], le facteur $1/(n-k)!$ disparaîtra quand on écrit la formule pour $D^k A$ explicitement. À titre d'exemple, pour $k = 1$ on trouve

$$\big((DA)(v)\big)(h) = \sum_{i=1}^n A(v_1, \dots, v_{i-1}, h_i, v_{i+1}, \dots, v_n) \ . \tag{8.5}$$

Et pour $k = 2$ on trouve

$$\begin{aligned}\big((D^2 A)(v)\big)\big(h^{[1]}, h^{[2]}\big) &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} A(v_1, \dots, v_{i-1}, h_i^{[1]}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, h_j^{[2]}, v_{j+1}, \dots, v_n) \\ &\quad + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} A(v_1, \dots, v_{i-1}, h_i^{[2]}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, h_j^{[1]}, v_{j+1}, \dots, v_n) \ .\end{aligned}$$

Si dans cette formule on prend le cas particulier $n = 2$ on trouve

$$\big((D^2A)(v_1, v_2)\big)\big((h_1, h_2), (k_1, k_2)\big) = A(h_1, k_2) + A(k_1, h_2) \quad ,$$

ce qui est conforme au résultat de [7.3].

8.6 Définition. Un *développement limité de f en $a \in U$ d'ordre $n \in \mathbf{N}$* est une suite d'applications $H_k : E^k \to F$ k-linéaire continue symétrique, $k = 0, \ldots, n$ (avec $E^0 = \{0\}$ et donc H_0, qui est une application à zéro arguments, équivaut un élément de F) telle qu'on ait

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left\| f(a+h) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} H_k(h, \ldots, h) \right\|}{\|h\|^n} = 0 \quad .$$

Ⓟ **8.7 Lemme.** *Si $H_0, \ldots, H_n$ est un développement limité de f en $a \in U$ d'ordre n et si $0 \leqslant m < n$, alors $H_0, \ldots, H_m$ est un développement limité de f en $a \in U$ d'ordre m.*

Ⓟ **8.8 Lemme.** *S'il existe un développement limité $H_0, \ldots, H_n$ de f en $a \in U$ d'ordre n, alors les applications H_k sont uniques.*

Ⓟ **8.9 Proposition.** *Si f est n fois différentiable au point $a \in U$ avec $n \geqslant 1$, alors il existe un développement limité $H_0, \ldots, H_n$ de f en a d'ordre n donné par*

$$H_k(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \cdot \big((D^k f)(a)\big)(v_1, \ldots, v_k) \quad .$$

Ⓟ **8.10 Lemme.** *Si f est continue en a et admet un développement limité H_0, H_1 d'ordre 1 en a, alors f est différentiable en a avec $H_0 = f(a)$ et $H_1 = (Df)(a)$.*

Nota Bene. • L'hypothèse que f est continue en a est essentielle dans [8.10], car l'existence d'un développement limité d'ordre 0 de f en a n'implique pas la continuité de f en a. Plus précisément, l'existence d'un développement limité d'ordre 0 en a dit qu'on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - H_0\|}{\|h\|^0} \equiv \lim_{h\to 0} \|f(a+h) - H_0\| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{h\to 0} f(a+h) = H_0 \quad .$$

Autrement dit, un développement limité d'ordre 0 de f en a est équivalent à l'existence de $\lim_{h\to 0} f(a+h)$. Ce n'est qu'avec la continuité de f en a qu'on peut conclure qu'on a $H_0 = f(a)$.

• Il est important de noter qu'on ne peut pas généraliser [8.10] à des ordres supérieurs dans le sens que l'existence d'un développement limité d'ordre 2 n'implique pas l'existence de la deuxième différentielle, et cela déjà pour des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. L'exemple classique est la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \cdot \sin(x^{-2}) \quad \text{si } x \neq 0 \quad .$$

Cette fonction est dérivable en 0, mais sa dérivée n'est pas continue en 0 ; elle n'est donc pas deux fois dérivable en 0. Par contre, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(h) - H_0 - H_1(h) - H_2(h,h)|}{|h|^2} = 0$$

pour les applications $H_0 = 1$, $H_1(h) = h$ et $H_2(h,k) = hk$, ce qui montre qu'il existe bien un développement limité d'ordre 2 en $a = 0$.

Le polynôme de Taylor. Si $f : U \to \mathbf{R}$ est une fonction, alors un développement limité d'ordre n en $a \in U$ peut exister sans que f soit n fois différentiable en a. Par contre, si f est n fois différentiable en a, alors une développement limité $H_0, \dots, H_n$ d'ordre n en a existe toujours [8.9] et est donné par

$$H_k(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \cdot \big((D^k f)(a)\big)(v_1, \dots, v_k) \ .$$

Dans ce contexte, il est d'usage d'introduire les fonctions $P_{a,n}$ et $R_{a,n}$ définie par

$$P_{a,n}(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \big((D^k f)(a)\big)(h, \dots, h) \quad \text{et} \quad R_{a,n}(h) = f(a+h) - P_{a,n}(h) \ .$$

La fonction $P_{a,n}$ est définie sur tout l'espace vectoriel E et $R_{a,n}$ est définie sur l'ensemble

$$\{\, h \in E \mid a + h \in U \,\} \equiv U - a \ ,$$

ce qui est un ouvert contenant 0. Si E est un espace vectoriel de dimension finie d, alors $P_{a,n}$ est un polynôme en d variables de degré (au plus) n, appelé le *polynôme de Taylor d'ordre n en a associé à la fonction f* ; la fonction $R_{a,n}$ est appelé *le reste (d'ordre n)*. En mettant des hypothèses de plus en plus fortes, on peut dire des choses de plus en plus intéressantes sur ce reste dans [8.11].

Ⓟ **8.11 Théorème.** *Soit $f : U \to F$ une application, soit $a \in U$ tel que f est n fois différentiable en a, soit $h \in E$ tels que $[a, a+h] \subset U$, soit $P_{a,n}$ le polynôme de Taylor et soit $R_{a,n}$ le reste.*

(i) *(**Taylor-Young**) Sans hypothèses supplémentaire on a*

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_{a,n}(h)}{\|h\|^n} = 0 \ .$$

(ii) *(**l'inégalité de Taylor-Lagrange**) Si f est $n+1$ fois différentiable (sur U), alors on a la majoration*

$$\|R_{a,n}(h)\| \leqslant \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sup_{x\in\,]a,a+h[} \|(D^{n+1}f)(x)\| \ .$$

Dans la suite on suppose que $F = \mathbf{R}$.

(iii) *(**l'égalité de Taylor-Lagrange**) Si f est $n+1$ fois différentiable (sur U), alors il existe $\theta \in \,]0,1[$ tel que*

$$R_{a,n}(h) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \big((D^{n+1}f)(a+\theta h)\big)(\underbrace{h, \dots, h}_{n+1 \text{ fois}}) \ .$$

(iv) *(**Taylor-Laplace**) Si f est de classe C^{n+1}, alors on a l'égalité*

$$R_{a,n}(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \big((D^{n+1}f)(a+th)\big)(h,\ldots,h)\ \mathrm{d}t \quad .$$

Remarque pour les curieux. On a énoncé la formule de Taylor-Laplace [8.11.iv] pour des fonctions à valeurs dans **R**. En regardant la preuve, on s'aperçoit vite que ce résultat reste valable pour des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel (normé) F dès qu'on dispose de la notion d'intégrale d'une fonction sur **R** et à valeurs dans F. Ceci est en particulier vrai pour des fonctions à valeurs complexes. Par contre, la formule de l'égalité de Taylor-Lagrange, qui repose sur l'égalité des accroissements finis, n'est pas généralisable à des fonctions à valeurs dans d'autres espaces vectoriels.

9. Extrema

Convention locale. Dans toute cette section (sauf quand on écrit explicitement autre chose) E est un espace vectoriel normé et $U \subset E$ est un ouvert.

Définitions. Soit $X \subset E$ un sous-ensemble arbitraire, soit $f : X \to \mathbf{R}$ une fonction et $a \in X$. On dit que f *présente un maximum local en* a s'il existe un voisinage ouvert $V \subset E$ de a tel que

$$\forall x \in V \cap X : f(x) \leqslant f(a) \ \ .$$

On dit que f *présente un maximum global en* a si on a

$$\forall x \in X : f(x) \leqslant f(a) \ \ .$$

Parfois on parle d'un maximum (local ou global) *strict*, ce qui veut dire qu'on a en plus la condition

$$x \neq a \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \neq fa) \ \ .$$

Pour la définition d'un *minimum local/global (strict)* on change l'inégalité en $f(x) \geqslant f(a)$. Et on résume la propriété "f présente un maximum ou un minimum local/global (strict) en a" par "f présente un *extremum* local/global (strict) en a." On dit que *a est un point critique* si X est un ouvert et si f est différentiable en a avec $(Df)(a) = 0$.

Nota Bene. Au lieu de dire que "f présente un maximum en a" (ou toute autre variante, style minimum local/global (strict)), on dit parfois que "a est un maximum de f." Cet abus courant de langage prête à confusion, car ce n'est pas a qui est la valeur maximale, mais $f(a)$.

Ⓟ **9.1 Lemme.** *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction et $a \in U$. Si f est différentiable en a et si f présente un maximum ou minimum local en a, alors a est un point critique.*

9.2 Définitions. Soit $H : E \times E \to \mathbf{R}$ une application bilinéaire continue symétrique et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. On dit que H *est définie positive sur* F si on a

$$\forall v \in F^* \quad = \quad H(v, v) > 0 \ \ .$$

Si on a (seulement) $H(v, v) \geqslant 0$ pour tout $v \in F$, on dit que H *est positive sur* F. Si on a

$$\forall v \in F^* \quad : \quad H(v, v) < 0 \ \ ,$$

on dit que H *est définie négative sur* F et si on a $H(v, v) \leqslant 0$ pour tout $v \in F$, on dit que H *est négative sur* F. Dans le cas où on a $F = E$, on ne précise pas que c'est sur E et on dit simplement que H est (définie) positive/négative.

Si $f : U \to \mathbf{R}$ est un fonction deux fois différentiable en $a \in U$, alors la différentielle seconde $(D^2 f)(a)$ vue comme application bilinéaire symétrique [8.2] est appelée *le Hessien de f au point a.*

Ⓟ **9.3 Proposition.** *Soit E un espace vectoriel normé* ***de dimension finie****, soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction deux fois différentiable, soit $a \in U$ un point critique et soit $H = (D^2 f)(a)$ le Hessien de f au point a.*

(i) *Si H est définie positive, alors f présente un minimum local strict en a.*

(ii) *Si H est définie négative, alors f présente un maximum local strict en a.*

(iii) *S'il existe $v, w \in E$ avec $H(v, v) < 0 < H(w, w)$, alors f ne présente ni un minimum local, ni un maximum local en a. Dans le cas* $\dim(E) = 2$ *on parle d'un* point selle.

Nota Bene. Le résultat de [9.3] ne couvre pas tous les cas : si H est (seulement) positive ou négative, alors on ne peut pas conclure sur la nature du point critique (maximum ou minimum local (strict), ou ni l'un ni l'autre) à la seule aide de la différentielle seconde.

Nota Bene. Dans la preuve de [9.3] on utilise d'une façon essentielle le fait qu'on est en dimension finie. Et pour cause, car il existe des exemples en dimension infinie où on a un point critique avec un Hessien défini positif, sans que le point représente un extremum local, voir [16.87].

9.4 Nota Bene. Il existe plusieurs façons pour déterminer si une forme bilinéaire H sur un espace vectoriel E de dimension finie est définie positive/négative ou s'il existe v, w avec $H(v, v) < 0 < H(w, w)$. On a d'abord le critère de Sylvester (qu'on discutera en dernier) qui a l'avantage d'être relativement simple à calculer, mais qui a le désavantage de ne pas donner une réponse complète dans tous les cas. Et on a l'approche par les valeurs propres qu'on privilégie. Dans ce contexte, il y a une différence entre la matrice d'une application linéaire $f : E \to E$ et la matrice d'une application bilinéaire $H : E \times E \to \mathbf{R}$. Pour bien saisir cette différence, choisissons deux bases $e_1, \dots, e_n$ et $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ de E. Les matrices A_{ij} et $\hat{A}_{ij}$ de l'application f par rapport aux bases e et $\hat{e}$ sont données par

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\, e_i \qquad \text{et} \qquad f(\hat{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \hat{A}_{ij}\, \hat{e}_i \quad ,$$

de sorte qu'on a

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j\, \hat{e}_j \quad \Longrightarrow$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, x_j \Big)\, e_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \hat{A}_{ij}\, \hat{x}_j \Big)\, \hat{e}_i \quad . \tag{9.5}$$

D'autre part, les matrices B_{ij} et $\hat{B}_{ij}$ de l'application H par rapport aux bases e et $\hat{e}$ sont données par

$$B_{ij} = H(e_i, e_j) \qquad \text{et} \qquad \hat{B}_{ij} = H(\hat{e}_i, \hat{e}_j) \quad ,$$

de sorte qu'on a

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j\, \hat{e}_j \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j = \sum_{j=1}^{n} \hat{y}_j\, \hat{e}_j$$

$$\Longrightarrow \quad H(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i\, B_{ij}\, y_j = \sum_{i,j=1}^{n} \hat{x}_i\, \hat{B}_{ij}\, \hat{y}_j \quad . \tag{9.6}$$

Soit maintenant P_{ij} la matrice de passage entre les deux bases : $\hat{e}_j = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}\, e_i$. Alors les liens entre les matrices A_{ij} et $\hat{A}_{ij}$ respectivement B_{ij} et $\hat{B}_{ij}$ sont donnés par

$$\sum_{i=1}^{n} A_{\ell i}\, P_{ij} = \sum_{i=1}^{n} P_{\ell i}\, \hat{A}_{ij} \qquad \text{et} \qquad \hat{B}_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{n} P_{ki}\, B_{k\ell}\, P_{\ell j} \quad ,$$

ou sous forme sans indices :

$$\hat{A} = P^{-1}\, A\, P \qquad \text{et} \qquad \hat{B} = {}^t P\, B\, P \quad .$$

Il s'ensuit que, si on a la même matrice : $A_{ij} = B_{ij}$ par rapport à la base e, il n'est nullement garanti qu'on aura les mêmes matrices par rapport à la base $\hat{e}$! Par contre, si P est une matrice orthogonale, c'est-à-dire $P^{-1} = {}^t P$ ou encore ${}^t P\, P = \mathbf{1}$, alors même dans la nouvelle base $\hat{e}$ on retrouve la même matrice. Ceci explique l'intérêt porté aux matrices de passage orthogonales.

D'autre part, le fait qu'un changement de base peut mener à des matrices différentes "implique" que la notion de valeur propre pour une application bilinéaire symétrique n'est pas intrinsèque mais dépend du choix de la base ! Pour le voir, il suffit de prendre une base dans laquelle la matrice B est diagonale avec ses "valeurs propres" $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale et de prendre une matrice de passage P que elle aussi est diagonale avec des valeurs $d_1, \dots, d_n$ sur la diagonale. Dans ce cas la matrice $\hat{B} = {}^t P\, B\, P$ est de nouveau diagonale, mais avec les valeurs $d_1^2\, \lambda_1, \dots, d_n^2\, \lambda_n$ sur la diagonale. Malgré le fait que les valeurs propres ne sont pas intrinsèques, leurs signes le sont. Plus précisément, pour toute application bilinéaire symétrique H (sur un espace vectoriel de dimension finie n) il existe deux nombres $p, q \in \mathbf{N}$, $p + q \leqslant n$ tels que la matrice B de H a p valeurs propres strictement positives et q valeurs propres strictement négatives (et donc $n - p - q$ valeurs propres nulles), et ceci indépendamment du choix de la base. Ou encore qu'il existe une matrice P telle que la matrice $\hat{B} = {}^t P\, B\, P$ est une matrice diagonale avec p fois $+1$ sur le diagonal, q fois -1 et $n - p - q$ fois 0. Ce résultat s'appelle *la loi d'inertie de Sylvester*.

9.7 Proposition (rappel). *Soit $A \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ une matrice carrée symétrique. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres. En particulier toutes les valeurs propres de A sont réelles.*

Ⓟ **9.8 Lemme.** *Soit $H : E \times E \to \mathbf{R}$ une application bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E, soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie n, soit $e_1, \dots, e_n$ une base de F et soit $B \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ avec $B_{ij} = H(e_i, e_j)$ la matrice symétrique associée à H.*

(i) *H est définie positive sur F si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice B sont strictement positives.*

(ii) *H est définie négative sur F si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice B sont strictement négatives.*

(iii) *Il existe $v, w \in F$ tels que $H(v,v) < 0 < H(w,w)$ si et seulement si la matrice B possède des valeurs propres strictement positives* **et** *strictement négatives.*

Nota Bene Rappel. Comme pour [9.3], le résultat [9.8] ne couvre pas tous les cas : s'il y a des valeurs propres nulles, et si les autres valeurs propres ont tous le même signe, alors on ne peut pas conclure sur la nature du point critique à la seule aide de la différentielle seconde.

Discussion. Selon [9.8] ce ne sont pas les valeurs des valeurs propres du Hessien qui déterminent la nature du point critique, mais seulement les signes des valeurs propres. Étant donné que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, il suffit donc de connaître les signes de ses racines ; on n'a pas besoin de connaître les valeurs ! C'est là qu'intervient la règle des signes de Descartes : un résultat qui permet de connaître le nombre de racines positives d'un polynôme sans connaître ces racines explicitement.

Définition. Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. On dit que *a est un zéro d'ordre $k \in \mathbf{N}$ de f* si f est au moins k fois dérivable en a et qu'on a

$$f^{(k)}(a) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i < k \quad : \quad f^{(i)}(a) = 0 \ .$$

Selon les circonstances on remplace le mot "zéro" par "racine" et/ou le mot "ordre" par "multiplicité." Une *racine de multiplicité k* de f veut donc dire la même chose qu'un zéro d'ordre k.

Ⓟ **9.9 Proposition (la règle des signes de Descartes généralisée).** *Soit $d_0 < d_1 < \cdots < d_n$ des réels, soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}^*$ des réels non-nuls et soit $f : \,]0,\infty[\, \to \mathbf{R}$ la fonction (de classe C^∞) définie par*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^{d_i} \ . \tag{9.10}$$

On définit le nombre $\sigma(f)$ comme le nombre de changements de signe parmi deux coefficients consécutifs. Plus précisément, $\sigma(f)$ est le nombre de -1 dans la suite $s_1, \ldots, s_n$ définie par $s_i = \mathrm{signe}(a_{i-1}\, a_i) \in \{\pm 1\}$.

(i) *Pour tout $x > 0$ il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que x est un zéro d'ordre k de f.*

(ii) *La fonction f n'a pas plus que $\sigma(f)$ zéros comptés avec multiplicité.*

Remarque. Si $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞ arbitraire, il n'est nullement garanti que pour $x \in I$ il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que x est un zéro d'ordre k de f. Le contre-exemple classique est la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-x^{-2}} \qquad \text{si } x \neq 0 \ .$$

C'est un exercice classique de montrer que ce f est bien de classe C^∞ et qu'on a $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Ⓟ **9.11 Corollaire (la règle des signes de Descartes).** *Pour $P \in \mathbf{R}[X]$ on note par $z_+(P)$ et $z_-(P)$ le nombre de racines strictement positives respectivement négatives de P comptées avec multiplicité et on note par $z_o(P)$ l'ordre de 0 comme racine de P. On définit aussi $\sigma(P)$ comme le nombre de changements de signe parmi les coefficients non-nuls consécutifs de P. Plus précisément, pour $P \in \mathbf{R}[X]$ il existe des entiers $0 \leqslant d_0 < d_1 < \cdots < d_n$ et des réels non-nuls $a_0, \ldots, a_n$ tels que*

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i \, X^{d_i} \quad .$$

Le nombre $\sigma(P)$ est alors le nombre de -1 dans la suite $s_1, \ldots, s_n$ définie par $s_i = \operatorname{signe}(a_{i-1}\, a_i)$. Avec ces notations on a les résultats suivants.

(i) *$z_+(P) \leqslant \sigma(P)$.*

(ii) *Si on note $P_-(X) = P(-X)$, alors $z_-(P) = z_+(P_-) \leqslant \sigma(P_-)$.*

(iii) *$\sigma(P) + \sigma(P_-) \leqslant \deg(P) - z_o(P) \equiv d_n - d_0$.*

(iv) *Si P a toutes ses racines dans $\mathbf{R}$, alors $z_+(P) = \sigma(P)$ et (en conséquence) $z_-(P) = \deg(P) - \sigma(P) - z_o(P)$.*

Remarque. Pour un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ qui a toutes ses racines dans $\mathbf{R}$ on a l'égalité $z_+(P) = \sigma(P)$ et $z_-(P) = \sigma(P_-)$. Par contre, pour d'autres polynômes on n'a pas forcément égalité. Par exemple, si on prend le polynôme

$$P(X) = X^2 - 2\,X + 2 = (X-1)^2 + 1 \quad ,$$

on a $z_+(P) = z_o(P) = z_-(P) = 0$, ainsi que $\sigma(P) = 2$ et $\sigma(P_-) = 0$. On aura donc $z_+(P) < \sigma(P)$ et $z_-(P) = \sigma(P_-)$. Et si on prend

$$P(X) = X^4 - 2\,X^2 + 2 = (X^2-1)^2 + 1 \quad ,$$

on aura $z_+(P) = z_o(P) = z_-(P) = 0$, ainsi que $\sigma(P) = \sigma(P_-) = 2$. Pour ce polynôme on aura donc $z_+(P) < \sigma(P)$ et $z_-(P) < \sigma(P_-)$.

D'autre part, le décalage $\sigma(P) - z_+(P)$ n'est pas (complètement) arbitraire, car on peut montrer (voir [**Wan04**]) que c'est toujours pair (et donc $\sigma(P_-) - z_-(P)$ aussi).

Ⓟ **9.12 Proposition (le critère de Sylvester).** *Soit $H : E \times E \to \mathbf{R}$ une application bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E de dimension finie n, soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E, soit $B \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ avec $B_{ij} = H(e_i, e_j)$ la matrice symétrique associée à H et soit $M_1, \ldots, M_n$ les* mineurs principaux dominants *de la matrice $(B_{ij})_{i,j=1}^n$ définis comme*

$$M_k = \det\big((B_{ij})_{i,j=1}^k\big) \quad .$$

(i) *H est définie positive si et seulement si $M_k > 0$ pour tout k.*

(ii) *H est définie négative si et seulement si $(-1)^k\, M_k > 0$ pour tout k.*

9.13 Discussion. Avec [9.11] et [9.12] on dispose de deux méthodes différentes pour déterminer la nature d'un point critique a d'une fonction f à l'aide du Hessien $H = (D^2f)(a)$ (voir [9.3]) sans passer par la case des valeurs propres. La règle des signes de Descartes [9.11] permet de distinguer les quatre (sic !) cas décrits par [9.3] pour déterminer la nature d'un point critique, y compris le cas où le Hessien ne permet pas de conclure. Par contre, le critère de Sylvester [9.12], qui est plus facile à calculer, donne une réponse complète seulement si $M_n \neq 0$. Dans le cas $M_n = 0$ il peut y rester des doutes. Pour comprendre le problème, il suffit de penser au cas $n = 3$ avec la matrice de H une matrice diagonale avec les valeurs $0, \lambda, \mu$ dans cet ordre sur la diagonale. Dans ce cas on a $M_1 = M_2 = M_3 = 0$. Maintenant si $\lambda\mu < 0$, alors a est ni un minimum ni un maximum local, tandis que si λ et μ ont le même signe, on ne peut rien conclure sur la nature du point critique a à l'aide du Hessien. Voici donc un résumé des conclusion qu'on peut obtenir, y compris comment.

En prenant la base canonique $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbf{R}^n$, on déduit de [7.12.i] et [5.6] que $H_{ij} = H(e_i, e_j)$, la matrice de H, est donnée par la matrice des dérivées secondes de f :

$$H_{ij} = H(e_i, e_j) = \big((D^2f)(a)\big)(e_i, e_j) \overset{[7.12.i]}{=} \big(D_{e_i}(D_{e_j}f)\big)(a) \overset{[5.6]}{=} \big(\partial_i(\partial_j f)\big)(a) \ .$$

Avec la règle des signes de Descartes on calcule d'abord le polynôme caractéristique P_H de cette matrice. Ensuite on détermine le plus petit degré z_o avec un coefficient non-nul dans P_H et le nombre σ de changements de signe parmi les coefficients non-nuls consécutifs de P_H. Et on conclut (sachant que toutes les racines de P_H sont dans $\mathbf{R}$ [9.7]) :

— Si $\sigma = n \equiv \dim(E)$, alors a est un minimum strict.

— Si $\sigma + z_o = 0$, alors a est un maximum strict.

— Si $0 < \sigma < n - z_o$, alors a n'est ni un maximum ni un minimum local.

— Si $\sigma \cdot (n - \sigma - z_o) = 0$ et $z_o > 0$ (c'est-à-dire, les cas restants), alors on ne peut rien conclure sur la nature du point critique (à l'aide du Hessien).

Avec le critère de Sylvester on calcule les mineurs principaux dominants M_k de la matrice H_{ij} et on conclut :

— Si tous les M_k sont strictement positifs, alors a est un minimum strict.

— Si tous les $(-1)^k\, M_k$ sont strictement positifs, alors a est un maximum strict.

— Si aucun des deux critères précédents est satisfait (ni tous les M_k strictement positifs, ni tous les $(-1)^k\, M_k$ strictement positifs) et si $M_n \neq 0$ (c'est-à-dire que le produit de toutes les valeurs propres est non-nul, donc aucune peut être nulle), alors a n'est ni un maximum local ni un minimum local.

À noter que si, avec le critère de Sylvester, on n'est pas dans un des trois cas décrits ci-dessus (c'est-à-dire, le cas $M_n = 0$), il reste possible qu'on peut déterminer la nature du point critique à l'aide du Hessien, mais qu'il faut utiliser d'autres méthodes que le critère de Sylvester.

Chapitre III

Autour du théorème des fonctions implicites

10. Différentiabilité de l'application Inv

10.1 Proposition. *Soit E un espace de Banach. Alors l'ensemble* $\mathrm{Isom}(E;E) \subset \mathcal{L}(E;E)$ *est un ouvert. Pour $U \in \mathcal{L}(E;E)$ vérifiant $\|U\| < 1$ on a en plus*

$$\mathbf{1} - U \in \mathrm{Isom}(E;E) \quad , \quad (\mathbf{1} - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} U^k \quad \textit{et} \quad \big\|(\mathbf{1} - U)^{-1}\big\| \leqslant (1 - \|U\|\,)^{-1} \quad ,$$

ce qui dit en particulier qu'on a $B_1(\mathbf{1}) \subset \mathrm{Isom}(E;E)$.

10.2 Lemme. *Soient E, F, G et H des espaces vectoriels normés. Pour $A \in \mathcal{L}(E;F)$ et $B \in \mathcal{L}(G;H)$, soit $X_{A,B} : \mathcal{L}(F;G) \to \mathcal{L}(E;H)$ l'application définie par*

$$X_{A,B}(C) = B \circ C \circ A \quad .$$

Alors $X_{A,B}$ est une application linéaire continue.

De plus, l'application $X : \mathcal{L}(E;F) \times \mathcal{L}(G;H) \to \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(F;G);\mathcal{L}(E;H)\big)$ définie par

$$X(A,B) = X_{A,B}$$

est une application bilinéaire continue.

10.3 Proposition. *Soit E un espace de Banach. Si on définit l'application* $\mathrm{Inv} : \mathrm{Isom}(E;E) \to \mathrm{Isom}(E;E) \subset \mathcal{L}(E;E)$ *par* $\mathrm{Inv}(A) = A^{-1}$, *alors* Inv *est différentiable avec*

$$\big((D\mathrm{Inv})(A)\big)(H) = -A^{-1} \circ H \circ A^{-1} \equiv -X_{A^{-1},A^{-1}}(H) \quad ,$$

où $X_{A^{-1},A^{-1}} : \mathcal{L}(E;E) \to \mathcal{L}(E;E)$ est l'application linéaire continue définie en [10.2].

10.4 Corollaire. *Si E est un espace de Banach, l'application* $\mathrm{Inv} : \mathrm{Isom}(E;E) \to \mathcal{L}(E;E)$ *est de classe C^∞.*

10.5 Proposition. *Soit E et F deux espaces de Banach. Alors l'application* $\mathrm{Inv} : \mathrm{Isom}(E;F) \to \mathcal{L}(F;E)$ *définie comme*

$$\mathrm{Inv}(A) = A^{-1}$$

est de classe C^∞. Nota Bene : l'utilisation du "nom" Inv *pour cette application est un abus de notation, car ce nom désignait l'application* $\mathrm{Inv} : \mathrm{Isom}(E;E) \to \mathcal{L}(E;E)$ *et ici on regarde des isomorphismes entre deux espaces différentes.*

11. L'inversion locale

Il est bien connu que la réciproque d'une fonction dérivable bijective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ n'est pas forcément dérivable : il suffit de penser à la fonction $f(x) = x^3$. De même, une fonction peut être bijective sur une partie de son domaine de définition vers son image sans être bijective globalement : il suffit de penser à la fonction $f(x) = x^2$. D'autre part, si $I, J \subset \mathbf{R}$ sont deux ouverts, $f : I \to J$ une fonction dérivable bijective et $f^{-1} : J \to I$ dérivable, alors on a $(f^{-1})'(y) = \big(f'(x)\big)^{-1}$ pour $y = f(x)$. En particulier on doit avoir $f'(x) \neq 0$. C'est donc une condition nécessaire pour que la fonction réciproque soit dérivable. Le théorème de l'inversion locale [11.2] dira que c'est presque une condition suffisante : si dans un seul point la dérivée est non nulle **et** continue, alors la fonctions sera inversible sur un intervalle contenant ce point et la réciproque sera dérivable. Quand on passe à la dimension plus grande que 1, la condition que la dérivée soit non nulle et continue en un point se transforme en la condition que la différentielle soit un isomorphisme et continue en ce point. Et il faut rajouter la condition que les espaces de départ et d'arrivé soient complets. Sous ces conditions on montre qu'il existe un ouvert contenant le point en question tel que la fonction sera bijective sur cet ouvert (vers son image) avec une application réciproque différentiable.

Pour bien saisir le sens/nécessité des conditions données dans le théorème de l'inversion locale on peut faire les remarques suivantes. Si on part de l'hypothèse qu'une application f est inversible dans un voisinage d'un point a et que sa réciproque est différentiable, alors les égalités $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ montrent directement qu'on doit avoir

$$(Df)(a) \circ (Df^{-1})\big(f(a)\big) = \mathrm{id} \qquad \text{et} \qquad (Df^{-1})\big(f(a)\big) \circ (Df)(a) = \mathrm{id} \ ,$$

ce qui dit que $(Df)(a)$ est inversible et que sa réciproque est une application linéaire continue, à savoir $(Df^{-1})\big(f(a)\big)$. Autrement dit : $(Df)(a)$ est un isomorphisme. Mais cela n'explique pas pourquoi la différentielle devrait être continue en a. Pour le comprendre, regardons à nouveau le cas de dimension 1. La différentielle sera inversible si (et seulement si) $f'(a) \neq 0$. Supposons qu'on a $f'(a) > 0$. Si f' est continue en a, alors f' sera donc strictement positives dans un voisinage de a, qu'on peut supposer être un intervalle, et dans ce voisinage/intervalle la fonction f sera strictement croissante. Elle sera donc injective et *a fortiori* bijective sur son image, qui sera également un intervalle et sa réciproque (définie sur l'intervalle image) sera dérivable. Par contre, si f' n'est pas continue en a, on ne peut pas assurer que f sera strictement croissante dans un voisinage de a, et la bijectivité ne sera plus démontrable. Et effectivement, le contre-exemple [16.89] part de la fonction $f(x) = x + x^2 \sin(1/x)$, qui est dérivable sur $\mathbf{R}$ avec $f'(0) = 1$, mais f' n'est pas continue en $x = 0$. Cette fonction oscille dans tout voisinage de 0, empêchant qu'elle soit injective dans un tel voisinage, aussi petit qu'il soit.

Reste donc la condition que les espaces devraient être complets. Illustrons cette condition par une analogie. Si on considère la fonction $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ définie par $f(x) = x^2$, alors elle est dérivable avec dérivée $f'(x) = 2x$ et donc $f'(1) = 2 \neq 0$. Mais f n'est pas inversible dans aucun (petit) voisinage de 1 (où pourtant la dérivée est non-nulle) pour la simple raison que la plupart des racines carrées d'éléments de $\mathbf{Q}$ n'appartiennent pas à $\mathbf{Q}$: $\mathbf{Q}$ n'est pas complet. Et évidemment ce n'est qu'une analogie avec ces défauts : $\mathbf{Q}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et la théorie du calcul différentiel est basée sur des espaces vectoriels (normés) sur $\mathbf{R}$. Mais le contre-exemple [16.99] est basé sur le même principe : on regarde l'espace des polynômes sur lequel on définit l'application carrée, qui est une application de classe C^∞. Au point $P = 1$ (le polynôme constant 1), la différentielle de cette application est un isomorphisme. Mais il est “évident” qu'elle ne peut pas être inversible, même pas dans un (petit) voisinage de $P = 1$, pour la simple raison que la racine carrée d'un polynôme ne sera pas (en général) un polynôme (il suffit de penser au polynôme $P = 1 + \varepsilon X$).

Convention locale. Dans toute cette section (sauf quand on écrit explicitement autre chose) E et F sont des espaces vectoriels normés et $U \subset E$ est un ouvert.

Ⓟ **11.1 Lemme.** *Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts, soit $f : U \to V$ une application bijective, soit $a \in U$ et $b = f(a) \in V$.*

(i) *Si f est différentiable en a et si $f^{-1} : V \to U$ est différentiable en b, alors $(Df)(a) \in \mathrm{Isom}(E; F)$, $(Df^{-1})(b) \in \mathrm{Isom}(F; E)$ et on a l'égalité*

$$\big(D(f^{-1})\big)(b) = \big((Df)(a)\big)^{-1} \quad .$$

Dans la suite on suppose que E est F sont complets.

(ii) *Si f et f^{-1} sont différentiable et si Df est continue en a, alors $D(f^{-1})$ est continue en b.*

(iii) *Si f est k fois différentiable, $k > 1$ et si f^{-1} est différentiable, alors f^{-1} est k fois différentiable.*

(iv) *Si f est de classe C^k, $k \geqslant 1$ et si f^{-1} est différentiable, alors f^{-1} est de classe C^k.*

Définition. Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts et $f : U \to V$ une application. On dit que f est un *C^k-difféomorphisme (entre U et V)* si f est de classe C^k, qu'elle est bijective et que $f^{-1} : V \to U$ est aussi de classe C^k.

Ⓟ **11.2 Théorème de l'inversion locale - version primitive.** *Soient E et F deux espaces de Banach, soit $f : U \to F$ une application différentiable et $a \in U$. Si Df est continue en a et si la différentielle $(Df)(a)$ appartient à $\mathrm{Isom}(E; F)$, alors il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de a et un voisinage ouvert $W \subset F$ de $f(a)$ tels que $f : V \to W$ est bijective et $f^{-1} : W \to V$ différentiable.*

Nota Bene. En vu de [11.1.i], l'hypothèse “évidente” dans le théorème de l'inversion locale [11.2] est que $(Df)(a)$ appartienne à $\mathrm{Isom}(E; F)$. Mais il y en a deux autres qui sont aussi importantes : que les espaces E et F soient complets et que Df soit continue au point a, comme on peut découvrir dans [16.89] et [16.99].

Remarque pour les curieux. Bien que ce n'est pas tout de suite évident de l'énoncé de la version primitive du théorème de l'inversion locale [11.2], la situation est assez symétrique pour les fonctions f et f^{-1}. L'hypothèse sur f est qu'elle soit différentiable avec une différentielle continue en a et $(Df)(a) \in \mathrm{Isom}(E;F)$. Le résultat est l'existence de $f^{-1} : W \to V$ différentiable. Mais selon [11.1.ii] et [11.1.i] on aura aussi $D(f^{-1})$ continue en $b = f(a)$ et $\big(D(f^{-1})\big)(b) \in \mathrm{Isom}(F;E)$. Par contre, cette symétrie ne peut pas être traduite en un résultat du type "si et seulement si," car ce théorème ne dit pas que f est injective sur U entier, mais seulement qu'elle est injective sur un voisinage ouvert V de a (et donc bijective sur son image). À partir de l'application f^{-1} on ne peut donc pas récupérer des informations sur f en dehors de V. Et on ne peut pas mettre le voisinage V côté hypothèse sur f, car justement ce V est une conséquence du théorème. Le théorème sera presque sans intérêt si on devrait fournir au préalable un voisinage sur lequel f est injective et donc bijective sur $f(V)$.

Ⓟ **11.3 Corollaire (théorème de l'inversion locale - version standard).** *Soient E et F deux espaces de Banach, soit $f : U \to F$ une application de classe C^k, $k \geqslant 1$ et $a \in U$. Si la différentielle $(Df)(a)$ appartient à $\mathrm{Isom}(E;F)$, alors il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de a et un voisinage ouvert $W \subset F$ de $f(a)$ tels que $f : V \to W$ est un C^k-difféomorphisme.*

Ⓟ **11.4 Corollaire (théorème de l'application ouverte).** *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $f : U \to F$ une application de classe C^1 telle que pour tout $x \in U$ on a $(Df)(x) \in \mathrm{Isom}(E;F)$. Alors f est une application ouverte, c'est-à-dire que pour tout ouvert $O \subset U$ son image $f(O)$ est un ouvert de F.*

Ⓟ **11.5 Corollaire (théorème d'inversion globale).** *Soient E et F deux espaces de Banach, soit $f : U \to F$ une application de classe C^k, $k \geqslant 1$ et soit $W = f(U)$. Alors W est un ouvert de F et $f : U \to W$ est un C^k-difféomorphisme si et seulement si f est injective et pour tout $x \in U$ on a $(Df)(x) \in \mathrm{Isom}(E;F)$.*

12. Fonctions implicites

Soit E et F deux espaces vectoriels et soit $M \subset E \times F$ un sous-ensemble. Alors on peut se poser la question s'il existe une application $g : E \to F$ telle que M soit le graphe G_g de g :

$$M = G_g \equiv \{\, (x, y) \in E \times F \mid y = g(x) \,\} \ ?$$

En général il y aura extrêmement peu de chance que cela se produit, mais on peut espérer que cette chance augmente quand M est donné par une équation. On suppose donc donné une fonction $f : E \times F \to G$ et un point $c \in G$ tels que M est défini par

$$M = \{\, (x, y) \in E \times F \mid f(x, y) = c \,\} \quad .$$

Et de nouveau on pose la question si ce M est le graphe d'une application de E dans F. L'archétype de la situation est le cas de l'application $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad .$$

Avec le choix $c = 1 \in \mathbf{R}$ on obtient donc

$$M = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\} \quad ,$$

ce qui représente le cercle unité dans le plan $\mathbf{R}^2$. Et il est évident que ce n'est pas le graphe d'une application. Même dans le cas plus favorable d'un sous-ensemble défini par une équation, il semble donc utopique que cela sera le graphe d'une application. On va donc devenir moins exigeant et on ne demandera plus que le sous-ensemble $M \subset E \times F$ soit le graphe d'une application, mais seulement dans sur une partie du produit $E \times F$. Autrement dit, on se donne une fenêtre rectangulaire $U \times V \subset E \times F$, avec $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts, et on demande si la partie de M contenue dans cette fenêtre est le graphe d'une application, une application donc de U dans V. Évidemment, si on place mal cette fenêtre, on ne rencontre pas le sous-ensemble M et on ne peut pas obtenir le graphe d'une application. Pour s'assurer qu'on a bien placé notre fenêtre, on part donc d'un point $(a, b) \in M$ (avec $a \in E$ et $b \in F$) et on place/choisit la fenêtre telle qu'on a $(a, b) \in U \times V$. Et la question devient donc : étant donné ce point $(a, b) \in M$, peut-on trouver une fenêtre $U \times V$ contenant ce point telle que l'intersection $M \cap (U \times V)$ soit le graphe d'une application $g : U \to V$. Autrement dit : peut-on trouver des ouverts $a \in U \subset E$, $b \in V \subset F$ et une application $g : U \to V$ tels qu'on a

$$M \cap (U \times V) = \{\, \big(x, g(x)\big) \mid x \in U \,\} \ ?$$

Si on regarde notre exemple du cercle unité dans $\mathbf{R}^2$, il est clair qu'il faut bien choisir sa fenêtre pour que ça marche. Et encore, ça ne marchera pas pour tous les points $(a, b) \in M$. Le théorème des fonctions implicites [12.5] nous donne une condition suffisante pour l'existence d'une fenêtre $U \times V$ et une application $f : U \to V$ tels que le morceau de M dans la fenêtre soit le graphe de f.

Pour mieux comprendre la condition suffisante donnée dans ce théorème, on va regarder notre problème sous un autre angle. On suppose toujours que M est décrit par une équation : pour un point $(x, y) \in E \times F$ on a l'équivalence

$$(x, y) \in M \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x, y) = c \quad .$$

Et on cherche des ouverts $U \subset E$, $V \subset F$ et une application $g : U \to V$ tels que cela implique q'on a $y = g(x)$. On cherche donc U, V et g tels qu'on a l'implication

$$(x, y) \in U \times V \text{ et } f(x, y) = c \qquad \Longrightarrow \qquad y = g(x) \ .$$

Autrement dit : on veut résoudre la variable y en fonction de la variable x à partir de l'équation $f(x, y) = c$. Malheureusement, résoudre des équations n'est en général pas très simple et certainement pas toujours possible. L'équation $x^2 + y^2 + 1 = 0$ est un exemple d'une équation qui n'a pas de solutions (dans $\mathbf{R}$). Et l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est un exemple où on ne peut pas résoudre y en fonction de x dans un voisinage de $x = 1$: tout voisinage (ouvert) de $x = 1$ contient des points $x > 1$ pour lesquels il n'y a pas de solution pour y, mais tout voisinage contient aussi des points avec $x < 1$ pour lesquels il y a deux solutions pour y. Par contre, on peut résoudre x en fonction de y sous la forme $x = +\sqrt{1 - y^2}$ pour y dans un voisinage de $y = 0$, mais pas plus grand que $]-1, 1[$. Vu sous cet angle, on peut dire que le théorème des fonctions implicites [12.5] donne des conditions suffisantes pour qu'on puisse résoudre des équations, au moins dans un voisinage d'un point donné.

On comprend facilement les conditions et les résultats en considérant d'abord l'exemple simple suivante. On écrit deux équations linéaires en cinq inconnues

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \ . \tag{12.1}$$

et on se pose la question si on peut résoudre v, w en fonction de s, t, u.

Pour mieux faire le lien avec l'énoncé du théorème des fonctions implicites, on fait quelques changements de notation cosmétiques. On change les noms des variables v, w en y_1, y_2, les noms de s, t, u en x_1, x_2, x_3, on écrit $c = (c_1, c_2)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \equiv (s, t, u)$, $y = (y_1, y_2) \equiv (v, w)$, c'est-à-dire qu'on a

$$(x, y) = (s, t, u, v, w) \ ,$$

et on introduit les matrices A (de taille 2×2) et B (de taille 2×3) par

$$A = \begin{pmatrix} a_4 & a_5 \\ b_4 & b_5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \ .$$

Avec ces changements, l'équation (12.1) s'écrit comme

$$B \cdot x + A \cdot y = c \ . \tag{12.2}$$

Et il est (presque) évident qu'on peut résoudre ce système pour y si (et seulement si) la matrice A est inversible, auquel cas la solution est donnée par

$$y = A^{-1} \cdot c - A^{-1} \cdot B \cdot x \ . \tag{12.3}$$

Si on écrit cela sous la forme $y = g(x)$ on trouve directement la différentielle

$$(Dg)(x) = -A^{-1} \cdot B \ . \tag{12.4}$$

Écrit sous la forme (12.2), la généralisation à des dimensions quelconques est la suivante : on a trois espaces E, F et G, deux application linéaires continues $B : E \to G$ et $A : F \to G$ et un point $c \in G$ et on cherche à résoudre y de l'équation

$$B(x) + A(y) = c \ .$$

De nouveau, ceci sera possible si A est inversible, auquel cas la solution est (toujours) donnée par (12.3).

Pour passer au cas d'équations générales, on suppose qu'on a une fonction $f : U \to G$, où U est un ouvert de $E \times F$. En pensant à des équations qui n'ont pas du tout des solutions, on s'assure d'avoir au moins une solution en choisissant $a \in E$, $b \in F$ et $c \in G$ tels que $(a, b) \in U$ et $f(a, b) = c$, de sorte que l'équation $f(x, y) = c$ a au moins comme solution (a, b). Ensuit on se pose la question s'il y a d'autres solutions proche de ce point (a, b). Pour cela on écrit $(x, y) = (a, b) + (h, k)$ et on fait un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de (a, b) de la fonction f :

$$f(x, y) \equiv f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + \big((Df)(a, b)\big)(h, k) \quad .$$

On obtient donc l'équation approximative, pour (h, k) "petit",

$$c = f(x, y) \approx f(a, b) + \big((Df)(a, b)\big)(h, k) = c + \big((Df)(a, b)\big)(h, k) \quad ,$$

ce qui est équivalent à l'équation approximative

$$\big((Df)(a, b)\big)(h, k) = \big((D_1 f)(a, b)\big)(h) + \big((D_2 f)(a, b)\big)(k) \approx 0 \quad .$$

Comme on a vu, cette équation a une solution pour k si l'application (linéaire continue) $(D_2 f)(a, b)$ est inversible, auquel cas la solution (approximative !) est donnée par

$$k \approx -\big((D_2 f)(a, b)\big)^{-1}\Big(\big((D_1 f)(a, b)\big)(h)\Big)$$

ou encore

$$y \approx b - \big((D_2 f)(a, b)\big)^{-1}\Big(\big((D_1 f)(a, b)\big)(x - a)\Big) \quad .$$

Bien sûr, ceci n'est que suggestif, car on a tronqué le développement limité à l'ordre 1 et rien nous garantit que le reste qu'on a négligé est vraiment négligeable. Le théorème des fonctions implicites nous donne la bonne surprise en disant (avec quelques conditions supplémentaires) que c'est bien comme cela que ça marche : si l'application $(D_2 f)(a, b)$ est inversible, alors dans un voisinage de (a, b) on peut résoudre y en fonction de x d'une façon unique. Et la solution $y = g(x)$ sera différentiable avec différentielle (à comparer avec (12.4))

$$y = g(x) \qquad \Longrightarrow \qquad (Dg)(x) = -\big((D_2 f)(x, y)\big)^{-1} \circ \big((D_1 f)(x, y)\big) \quad .$$

Revenons maintenant à l'exemple initial (12.1) et changenons la question en demandant si on peut résoudre le couple t, v en fonction de s, u, w. Dans ce cas on écrira ces équations sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ b_1 & b_3 & b_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qui suggère l'introduction des vecteurs $x = (s, u, w) \in \mathbf{R}^3$ et $y = (t, v)$ et des matrices A et B comme

$$A = \begin{pmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ b_1 & b_3 & b_5 \end{pmatrix} \quad ,$$

auquel cas nos équations s'écrivent de nouveau sous la forme $Bx + Ay = c$. Et comme avant, cette équation n'est résoluble que si A est inversible. La différence ici est qu'on ne peut plus écrire $(x, y) = (s, t, u, v, w)$ comme dans le premier cas. Ce "faux" problème a deux solutions, chacune avec ses avantages et ses inconvénients.

La première solution est de changer l'ordre des variables et d'écrire l'équation initiale (12.1) comme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_5 & b_2 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ u \\ w \\ t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Écrit comme ça, on est de nouveau dans la même situation que la question initiale où on cherche à résoudre les deux dernières variables en fonction des trois premières. L'avantage est qu'on s'est ramené à la situation précédente qu'on connaît déjà. Le désavantage est qu'on doit changer l'ordre des variables chaque fois qu'on change la question pour un même système d'équations.

La deuxième solution est de dire que la matrice carrée A est constituée de la deuxième et quatrième colonne de la matrice initiale (de taille 2×5) et que la matrice B est formé des trois colonnes restantes. L'avantage est qu'on n'a pas besoin de changer l'ordre des variables (ou de les renommer). Le désavantage est que la formulation devient plus lourd, car il faut parler d'un choix de colonnes pour former cette sous-matrice A. Un deuxième désavantage est qu'en dimension infinie en général on ne peut plus parler d'une matrice et donc parler d'un choix de colonnes sera impossible.

La première solution est la plus courante (car adaptée à des espaces de dimensions arbitraire) et est présentée dans [12.5]. La deuxième solution est plus adaptée pour la discussion des sous-variétés (voir [13.5]) et est présentée dans [12.8].

Ⓟ **12.5 Théorème des fonctions implicites.** *Soient E, F et G trois espaces de Banach, soit $U \subset E \times F$ un ouvert, $a \in E$ et $b \in F$ tels que $(a, b) \in U$, soit $f : U \to G$ une fonction de classe C^k, $k \geqslant 1$ et soit $c = f(a, b) \in G$. Si la différentielle partielle $(D_2 f)(a, b)$ appartient à $\mathrm{Isom}(F; G)$, alors il existe deux ouverts $V \subset E$, $W \subset F$ et une unique application $g : V \to W$ de classe C^k tels que*

(i) $(a, b) \in V \times W \subset U$,

(ii) $\forall (x, y) \in V \times W \ : \ f(x, y) = c \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x) \quad ,$

(iii) $\forall (x, y) \in V \times W \ : \ (D_2 f)(x, y) \in \mathrm{Isom}(F; G)$.

(iv) $\forall x \in V \ : \ (Dg)(x) = -\Big((D_2 f)\big(x, g(x)\big)\Big)^{-1} \circ (D_1 f)\big(x, g(x)\big) \quad .$

Nota Bene. La formule pour la différentielle de g dans le résultat du théorème des fonctions implicites [12.5] n'est pas un miracle, mais une conséquence très simple du fait que g donne la solution de l'équation $f(x, y) = c$, c'est-à-dire qu'on a la propriété

$$\forall x \in V \quad : \quad f\big(x, g(x)\big) = c \quad .$$

Si on considère l'application $F : V \to G$ définie par $F(x) = f\big(x, g(x)\big)$, alors cette égalité nous dit que F est une application constante, donc de différentielle nulle. D'autre part, si on calcule la différentielle de F en termes des différentielles partielles de f et la différentielle de g, on trouve (voir [16.50])

$$(DF)(x) = (D_1 f)\big(x, g(x)\big) + (D_2 f)\big(x, g(x)\big) \circ (Dg)(x) \quad .$$

Sachant que $(DF)(x) = 0$ nous donne la formule pour $(Dg)(x)$. On peut même itérer cette procédure pour obtenir un développement limité de g (d'un ordre qui ne peut pas dépasser k, la classe de dérivabilité de f).

Ⓟ **12.6 Proposition.** *L'énoncé du théorème de l'inversion locale [11.3] est équivalent à l'énoncé du théorème des fonctions implicites [12.5] dans le sens que si on connaît l'un, on peut en déduire l'autre.*

Nota Bene. Pour le théorème de l'inversion locale on a insisté sur le fait que la seule condition que $(Df)(a)$ soit un isomorphisme n'est pas suffisante, mais qu'il y en a deux autres qui sont aussi importantes : que la différentielle soit continue (au point concerné) et que les espaces soient complets. Pour le théorème des fonctions implicites on a surtout insisté, dans les explications, sur le fait que la différentielle partielle $(D_2f)(a,b)$ soit un isomorphisme. Mais, comme on vient de voir, le théorème des fonctions implicites est équivalente au théorème de l'inversion locale, et donc ces deux autres conditions sont également importantes pour ce théorème. Et même les exemples qui montrent l'importance sont les mêmes. Car trouver la réciproque d'une application $f : U \subset E \to F$ revient à résoudre x de l'équation $f(x) - y = 0$.

12.7 Définition/Notation. Une *partition* de l'ensemble $\{1, \dots, s\}$ en deux parties est la donnée de deux ensembles (supposés non vides) $I, J \subset \{1, \dots, s\}$ tels que $I \cap J = \emptyset$ et $I \cup J = \{1, \dots, s\}$. Si $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ et $J = \{j_1, \dots, j_p\}$ est une partition de $\{1, \dots, n+p\}$ en deux parties, alors on définit, pour tout $x \in \mathbf{R}^{n+p}$, les vecteurs $x_I \in \mathbf{R}^n$ et $x_J \in \mathbf{R}^p$ par

$$x_I = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in \mathbf{R}^n \qquad \text{et} \qquad x_J = (x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \in \mathbf{R}^p \quad .$$

Ⓟ **12.8 Théorème des fonctions implicites (variante pour usage pratique).** *Soit $U \subset \mathbf{R}^{p+n}$ un ouvert, $a \in U$ et soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une fonction de classe C^k, $k \geqslant 1$ telle que $f(a) = c \in \mathbf{R}^p$. On suppose que*

$$I = \{i_1, \dots, i_n\} \qquad \text{et} \qquad J = \{j_1, \dots, j_p\}$$

forment une partition de $\{1, \dots, n+p\}$ en deux parties tel que la matrice A (de taille $p \times p$) donnée par

$$A_{k\ell} = (\partial_{j_\ell} f_k)(a) \qquad , \qquad 1 \leqslant k, \ell \leqslant p$$

est inversible.

Alors il existe deux ouverts $V_n \subset \mathbf{R}^n$, $V_p \subset \mathbf{R}^p$ et une unique fonction $g : V_n \to V_p$ de classe C^k avec les propriétés suivantes.

(i) *On a $a \in W \subset U$, où $W \subset \mathbf{R}^{n+p}$ est l'ensemble défini comme (voir [12.7] pour la notation)*

$$W = \{\, x \in \mathbf{R}^{p+n} \mid x_I \in V_n \text{ et } x_J \in V_p \,\} \quad .$$

(ii)
$$\forall x \in W \quad : \quad f(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad x_J = g(x_I) \quad .$$

(iii) *Si on note par B la matrice (de taille $p \times n$, à ne pas confondre avec la matrice A) donnée par*

$$B_{k\ell} = (\partial_{i_\ell} f_k)(a) \qquad , \qquad 1 \leqslant k \leqslant p \quad \text{et} \quad 1 \leqslant \ell \leqslant n \ ,$$

alors la différentielle de g au point $a_I \equiv (a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ est donnée par

$$(Dg)(a_I) = -\ A^{-1} \circ B \ . \tag{12.9}$$

13. Sous-variétés

Une idée pour expliquer la notion de sous-variété est de dire qu'une sous-variété M de l'espace $\mathbf{R}^m$ est une "déformation" d'un sous-espace vectoriel, à condition bien sûr d'expliquer ce qu'on entend par déformation. Ici on entend par déformation le résultat après l'application d'un difféomorphisme. Soit donc $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ un difféomorphisme qu'on applique au sous-espace $\mathbf{R}^n \cong Z \subset \mathbf{R}^m$ (avec $n < m$) définie par

$$Z = \{ (x_1, \ldots, x_m) \mid x_{n+1} = \cdots = x_m = 0 \} \quad .$$

Alors on dit que le sous-ensemble $M = f(Z) \subset \mathbf{R}^m$ est une déformation du sous-espace vectoriel $Z \subset \mathbf{R}^m$ par le difféomorphisme f. Mais on n'est pas obligé de considérer un difféomorphisme de l'espace total ; on peut se contenter de considérer un difféomorphisme local $f : U \to V$, où $U, V \subset \mathbf{R}^m$ sont deux ouverts. Et dans ce cas on dira que l'image $f(Z \cap U) \subset V$ est une déformation du morceau de sous-espace vectoriel $Z \cap U$. Et là on a déjà presque la définition d'une sous-variété : $M \subset \mathbf{R}^m$ est une sous-variété si localement (morceau par morceau) M est une déformation du sous-espace vectoriel Z : $M \cap V = f(Z \cap U)$.

Une question légitime est : pourquoi utiliser des difféomorphisme (locaux) pour définir la notion de déformation ? La réponse est très pragmatique : si on prend des application seulement continues, ou si on demande que le morceau est l'image (d'un morceau) de Z par une application (différentiable ou non), alors on se retrouve avec des situations qu'on ne sait pas très bien gérer. Une des situations qu'on veut éviter concerne les sous-ensembles "pointus." Par là il faut penser au graphe de la fonction $f(x) = |x|$ dans $\mathbf{R}^2$ ou le cône $C \subset \mathbf{R}^3$ défini par l'équation $x^2 + y^2 = z^2$. Ces sous-ensembles présentent une "pointe" (dans le jargon on parle d'une singularité) qui posent des problèmes. Une autre situation qu'on veut éviter concerne les points doubles : on peut réaliser la figure 8 comme l'image injective de la droite réelle dans $\mathbf{R}^2$ par une application de classe C^∞. Et dans un tel point double (le milieu de la 8) on ne sait par exemple pas définir une droite tangente. Ces deux situations embarrassantes et d'autres encore sont évitées en prenant la définition qu'une sous-variété est localement une déformation de Z par un difféomorphisme (local) de l'espace ambiant.

Il y a deux exemples types qu'il faut garder en tête pour bien comprendre la notion de sous-variété. Le premier c'est le graphe d'une application différentiable $g : W \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$:

$$G_g = \big\{ \big(x, g(x)\big) \bigm| x \in W \big\} \subset \mathbf{R}^{n+p} \quad .$$

Pour le voir comme une déformation (d'un morceau) du sous-espace $Z = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \mid y = 0 \}$ on considère le difféomorphisme $f : U = W \times \mathbf{R}^p \to V = W \times \mathbf{R}^p$ définie par

$$f(x, y) = \big(x, y + g(x)\big) \quad .$$

Il est immédiat qu'on a l'égalité

$$f(U \cap Z) = \{ f(x, y) \mid (x, y) \in U \cap Z \} = \big\{ \big(x, g(x)\big) \bigm| x \in W \big\} = M = M \cap V \quad .$$

Notons en passant que cet exemple "explique" le choix pour la notation des dimensions dans la définition d'une sous-variété [13.1] comme étant $n + p$ pour l'espace ambiant et n pour la dimension de M.

L'autre exemple type d'une sous-variété est le cercle unité dans $\mathbf{R}^2$:

$$M = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2+1 \,\} \subset \mathbf{R}^2 \quad .$$

Pour voir que ce M est localement une déformation, on le coupe en quatre morceaux non-disjoints selon le signe de x ou y comme

$$M_{x,+} = \{\, (x,y) \in M \mid x > 0 \,\} \qquad \text{ou} \qquad M_{y,-} = \{\, (x,y) \in M \mid y < 0 \,\} \quad .$$

Regardons maintenant par exemple le morceau $M_{x,-}$. Pour montrer que ce morceau est une déformation du sous-espace $Z = \{\, (x,0) \mid x \in \mathbf{R} \,\}$, on considère le difféomorphisme $f : U = \left]-1,1\right[\times \mathbf{R} \to V = \mathbf{R} \times \left]-1,1\right[$ définie par

$$f(x,y) = \big(y - \sqrt{1-x^2}, x\big) \quad .$$

Alors on trouve immédiatement qu'on a

$$\begin{aligned} f(U \cap Z) &= \{\, f(u,v) \mid (u,v) \in Z \cap U \,\} \\ &= \big\{\, \big(-\sqrt{1-u^2}, u\big) \;\big|\; u \in \left]-1,1\right[\,\big\} = M_{x,-} \cap V \quad . \end{aligned}$$

Si on regarde bien ce qu'on a fait pour construire ce difféomorphisme, on voit qu'on a réalisé le morceau $M_{x,-}$ comme le graphe de la fonction $u \mapsto -\sqrt{1-u^2}$, sauf qu'on a mis l'axe des abscisses verticalement et l'axe des ordonnées horizontalement. Les trois autres morceaux se réalisent comme une déformation de Z en changeant l'ordre des coordonnées et/ou de changer un signe dans la définition de f. Et si on regarde bien comment on a "deviné" la fonction à utiliser pour réaliser le morceau $M_{x,-}$ comme un graphe avec les axes échangé, alors on voit facilement qu'on a résolu x en fonction de y de l'équation $x^2+y^2 = 1$ qui définie M.

Le lecteur qui a maintenant l'impression que cet exemple ressemble drôlement à la discussion du théorème des fonctions implicites a tout à fait raison. Dans [13.5] on montre qu'une sous-variété est toujours localement (morceau par morceau) le graphe d'une application, avec le bémol que les variables de l'espace source et les variables de l'espace d'arrivé de l'application peuvent être dispersées parmi les variables $x_1, \ldots, x_m$ de l'espace $\mathbf{R}^m$. Pour bien comprendre les raisons, considérons un exemple un tout petit peu plus compliqué : la sphère $M = \{\, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1 \,\}$. On a six choix pour "résoudre" l'équation :

$$x_1 = \pm\sqrt{1-x_2^2-x_3^2} \quad , \quad x_2 = \pm\sqrt{1-x_1^2-x_3^2} \quad \text{ou} \quad x_3 = \pm\sqrt{1-x_1^2-x_2^2} \quad .$$

Si on est dans un point où aucune des coordonnées vaut ±1, tous les trois possibilités conviennent. Mais au voisinage du point $(0,-1,0)$ ni la première ni la troisième formule s'appliquent, car dans un voisinage de $(x_1,x_2) = (0,-1)$ ou $(x_2,x_3) = (-1,0)$ il y a toujours des points avec $x_2 < -1$ et l'autre coordonnée 0 et on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif. Par contre, la deuxième formule s'applique bien, car dans le voisinage $B_1(0,0)$ de $(x_1,x_3) = (0,0)$ la formule $x_2 = -\sqrt{1-x_1^2-x_3^2}$ fonctionne à merveille. La conclusion est donc qu'on peut voir $M \subset \mathbf{R}^3$ toujours localement comme le graphe d'une fonction, mais on n'a pas toujours le choix quelle coordonnée on peut voir comme fonction des autres coordonnées : au voisinage du point $(0,-1,0)$ on est "obligé" de voir x_2 comme fonction des coordonnées (x_1,x_3), tandis qu'au voisinage du point $(1,0,0)$ on est "obligé" de voir x_1 comme fonction des coordonnées (x_2,x_3).

Avec cet exemple en tête et en comparant [13.5] avec l'énoncé du théorème des fonctions implicites sous la forme [12.8], on peut dire qu'une sous-variété $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ est un sous-ensemble tel que pour tout point $m \in M$ on peut appliquer le théorème des fonctions implicites : pour chaque point $m \in M$ il existe une fenêtre tel que l'intersection de M avec cette fenêtre est le graphe d'une application. Avec la souplesse qu'on n'est pas obligé de prendre les premières coordonnées comme les variables de l'espace source de l'application mais qu'on peut les éparpiller parmi toutes les coordonnées de l'espace ambiant $\mathbf{R}^{n+p}$.

13.1 Définition. Soit $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ un sous-ensemble. On dit que M est une *sous-variété (de dimension n et de classe C^k, $k \geqslant 1$)* si pour tout $m \in M$ il existe un voisinage ouvert $W \subset \mathbf{R}^{n+p}$ de m, un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ et un difféomorphisme $f : U \to W$ de classe C^k tels que

$$M \cap W = f(Z \cap U) \ ,$$

où $Z \subset \mathbf{R}^{n+p}$ est le sous-espace vectoriel

$$Z = \mathbf{R}^n \times \{0\} \equiv \{\, (u, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \mid v = 0 \,\} \ .$$

À noter qu'on interprète l'espace côté source de f explicitement comme le produit des deux espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$.

Ⓟ **13.2 Proposition (invariance de dimension).** *Soit $f_1 : U_1 \to W_1$ un difféomorphisme de classe C^k et soit $f_2 : U_2 \to W_2$ un difféomorphisme de classe C^ℓ, $k, \ell \geqslant 1$ entre des ouverts $U_i, W_i \subset \mathbf{R}^n$. Soit, pour $0 \leqslant p \leqslant n$, le sous-espace vectoriel $Z_p \subset \mathbf{R}^n$ défini par*

$$Z_p = \mathbf{R}^p \times \{0\} \equiv \{\, (u, v) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p} \mid v = 0 \,\} \ .$$

Soit finalement $M \subset \mathbf{R}^n$ un sous-ensemble et $0 \leqslant p_1, p_2 \leqslant n$ deux entiers tels que

$$M \cap W_1 = f_1(U \cap Z_{p_1}) \qquad \text{et} \qquad M \cap W_2 = f_2(U \cap Z_{p_2}) \ .$$

Si $W_1 \cap W_2 \cap M \neq \emptyset$, alors $p_1 = p_2$.

13.3 Nota Bene. Une sous-variété M de $\mathbf{R}^n$ a deux attributs : une dimension et une classe de différentiabilité. Il est bien possible que deux personnes trouvent des classes de différentiabilité différentes, car cela dépend des difféomorphismes utilisées. En plus, si M est de classe C^k, elle sera automatiquement de classe C^ℓ pour tout $1 \leqslant \ell < k$. Au mieux on peut essayer de trouver un k maximal pour la classe de différentiabilité de M, mais ce sport est rarement pratiqué. Par contre, tout le monde doit trouver la même dimension : si on a trouvé une dimension p_1 et une dimension p_2, il suffit de prendre un point $m \in M$ et d'appliquer la définition [13.1] pour trouver deux difféomorphismes $f_i : U_i \to W_i$ comme dans [13.2] avec $m \in M \cap W_1 \cap W_2$. Et donc on aura $p_1 = p_2$.

Ⓟ **13.4 Lemme.** *Soit $V \subset \mathbf{R}^{n+p}$ un ouvert et soit $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ une sous-variété de dimension n et de classe C^k. Alors $M' = M \cap V$ est une sous-variété de dimension n et de classe C^k.*

Ⓟ **13.5 Théorème.** *Soit $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ un sous-ensemble. Alors M est une sous-variété (de dimension n et de classe C^k, $k \geqslant 1$) si et seulement si pour tout $m \in M$ on peut* *trouver deux ouverts* $V_p \subset \mathbf{R}^p$ *et* $V_n \subset \mathbf{R}^n$*, une fonction* $g : V_n \to V_p$ *de classe* C^k*, et une partition de l'ensemble* $\{1, \ldots, n+p\}$ *en deux parties*

$$I = \{i_1, \ldots, i_n\} \qquad \text{et} \qquad J = \{j_1, \ldots, j_p\} \ ,$$

tels que (voir [12.7] pour la notation)

$$m \in W \quad \text{et} \quad W \cap M = \{\, x \in W \mid x_J = g(x_I) \,\} \ ,$$

où $W \subset \mathbf{R}^{n+p}$ *est défini par*

$$W = \{\, x \in \mathbf{R}^{p+n} \mid x_I \in V_n \ \text{et}\ x_J \in V_p \,\} \ .$$

Remarque pour les curieux. Sachant qu'une sous-variété est toujours localement le graphe d'une fonction, on peut se poser la question pourquoi on ne le définit pas ainsi. La raison est que l'idée de disperser les coordonnées de l'espace source parmi les coordonnées de l'espace ambiant ne se généralise pas facilement à des espaces de dimension infinie où la notion de coordonnée est plus problématique. Une autre raison est un argument de simplicité (d'écriture) : il est plus facile d'exiger l'existence d'un "simple" difféomorphisme entre deux ouverts, que d'exiger l'existence d'une fonction $g : V_n \to V_p$ et une partition d'un ensemble d'indices en deux parties avec la définition annexe de l'ouvert W (voir [13.5]).

Ⓟ **13.6 Théorème.** *Soit* $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ *une sous-variété de dimension* n *(et de classe* C^k*,* $k \geqslant 1$*). Alors pour tout* $m \in M$ *il existe un unique sous-espace vectoriel* $T \subset \mathbf{R}^{n+p}$ *de dimension* n *tel que*

$$\lim_{\substack{x \to m \\ x \in M}} \frac{d(x-m, T)}{\|x-m\|} = 0 \ ,$$

où $d(y, T)$ *désigne la distance du point* y *au sous-espace vectoriel* T *définie par*

$$d(y, T) = \inf_{z \in T} \ \|y - z\| \ .$$

Si $f : U \to W \ni m$ *est un* C^k*-difféomorphimse tel que* $f(U \cap Z) = W \cap M$ *comme dans [13.1], alors on a*

$$T = \Big((Df)\big(f^{-1}(m)\big)\Big)(Z) \equiv \Big\{ \Big((Df)\big(f^{-1}(m)\big)\Big)(v) \mid v \in Z \subset \mathbf{R}^{n+p} \Big\} \ .$$

13.7 Remarque. Il paraît naturel d'exiger, dans l'énoncé de [13.6], que la norme pour calculer la distance $d(y, T)$ soit la même que celle utilisée dans le dénominateur. Et il paraît aussi naturel qu'on devrait exiger l'utilisation de la norme euclidienne. Heureusement il n'en est rien : on peut remplacer la norme dans le numérateur ou le dénominateur par une norme équivalente sans que la conclusion change, voir [16.118]. Et parce que sur un espace de dimension finie toutes les normes sont équivalentes [1.18], le choix d'une norme n'a pas d'importance ici. D'autre part, l'utilisation de la norme euclidienne a l'avantage qu'on peut donner une formule "simple" pour la distance d'un point à un sous-espace vectoriel. C'est pourquoi on utilisera la norme euclidienne dans la preuve de [13.6].

13.8 Définition. Soit $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ une sous-variété de dimension n (et de classe C^k, $k \geqslant 1$) et $m \in M$. Alors l'unique sous-espace vectoriel T (de dimension n) donné par [13.6] est appelé *l'espace tangent à M au point m*. Pour bien indiquer que ce sous-espace dépend de la sous-variété M et du point m, on le note comme T_mM.

Remarque pour les curieux. Strictement parlant ce n'est pas l'espace tangent qui est "tangent" à la sous-variété, mais le sous-espace affine $m+T_mM$ défini comme

$$m + T_mM = \{\, m + v \in \mathbf{R}^{n+p} \mid v \in T_mM \,\} \ .$$

Dans le cas $n = 1$ ce sous-espace affine est appelé la *droite tangente* ; c'est une généralisation directe de la droite tangente au graphe d'une fonction réelle d'un variable (souvent donnée par l'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$). Dans le cas $n = 2$ on parle plutôt du *plan tangent*.

Ⓟ **13.9 Théorème.** *Soit $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ une sous-variété de dimension n et de classe C^k, $k \geqslant 1$, soit $m \in M$ et $v \in \mathbf{R}^{n+p}$. Alors on a les égalités*

$$\begin{aligned} T_mM &= \{\, v \in \mathbf{R}^{n+p} \mid \exists \varepsilon > 0\ \exists \gamma : I_\varepsilon \to M \textit{ de classe } C^k : \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma(0) = m \ \&\ \gamma'(0) = v \,\} \\ &= \{\, v \in \mathbf{R}^{n+p} \mid \exists \varepsilon > 0\ \exists \gamma : I_\varepsilon \to M \textit{ dérivable en } 0 : \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma(0) = m \ \&\ \gamma'(0) = v \,\} \ , \end{aligned}$$

où $I_\varepsilon \subset \mathbf{R}$ est l'intervalle ouvert $I_\varepsilon = \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$.

Nota Bene. La définition [13.8] du plan tangent T_mM à la sous-variété $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ au point m est une définition de l'extérieur : on regarde la sous-variété de l'extérieur et on cherche le sous-espace vectoriel qui approche le mieux cette sous-variété en un point donné. Dans la littérature on trouve plus souvent la propriété [13.9] comme définition du plan tangent : on définit T_mM comme l'ensemble des dérivées de courbes sur M qui passent par le point $m \in M$. Cela est une définition de l'intérieur, car on part de courbes qui se trouvent dans la sous-variété. Mais dans ce cas, il faut montrer que l'ensemble de ces dérivées forme bien un sous-espace vectoriel.

13.10 Définition. Soit $U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ un ouvert et $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application différentiable. On dit que $c \in \mathbf{R}^p$ est une *valeur régulière pour f* si pour **tout** $x \in f^{-1}(c)$ l'application linéaire $(Df)(x) : \mathbf{R}^{n+p} \to \mathbf{R}^p$ est surjective. Cette condition est équivalente à la condition que le rang de $(Df)(x)$ est égal à p.

Remarque. Cela peut paraître bizarre, mais si $c \in \mathbf{R}^p$ n'appartient pas à l'image de f, alors c est une valeur régulière de f !

Ⓟ **13.11 Proposition.** *Soit $U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application différentiable et $c \in \mathbf{R}^p$. Alors c est une valeur régulière de f si et seulement si le système de $1 + C^p_{n+p}$ équations*

$$f(x) = c \quad \textit{et} \quad \forall\, 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leqslant n + p \ : \ \det\Big(\big((\partial_{j_k} f_i)(x)\big)_{i,k=1}^{p} \Big) = 0$$

n'a pas de solutions.

Ⓟ **13.12 Proposition.** *Soit $U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application de classe C^k, $k \geqslant 1$, $c \in \mathbf{R}^p$ et $M \subset U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ le sous-ensemble défini par*

$$M = \{\, x \in U \mid f(x) = c \,\} \equiv f^{-1}(c) \ \ .$$

Si c est une valeur régulière pour f, alors M est une sous-variété (de dimension n et de classe C^k) de $\mathbf{R}^{n+p}$. De plus, pour $m \in M$ l'espace tangent T_mM à M au point m est donné par

$$T_mM = \{\, x \in \mathbf{R}^{n+p} \mid \big((Df)(m)\big)(x) = 0 \,\} \equiv \ker\big((Df)(m)\big) \ \ .$$

Ⓟ **13.13 Corollaire.** *Soit $U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application de classe C^k, $k \geqslant 1$, $c \in \mathbf{R}^p$ et $M \subset U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ le sous-ensemble défini par*

$$M = \{\, x \in U \mid f(x) = c \,\} \equiv f^{-1}(c) \ \ .$$

Soit finalement $m \in M$ tel que $\mathrm{rang}\big((Df)(m)\big) = p$. Alors il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de m tel que $V \cap M$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+p}$ (de dimension n et de classe C^k).

13.14 Sous-variété ou pas, c'est la question. Soit $U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ un ouvert, $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application de classe C^k, $k \geqslant 1$, soit $c \in \mathbf{R}^p$ et soit $M \subset U$ le sous-ensemble défini par

$$M = \{\, x \in U \mid f(x) = c \,\} \ \ .$$

La question qu'on se pose dans ce contexte est à savoir si M est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+p}$ ou non. La stratégie standard pour répondre à cette question est la suivante. On commence à déterminer l'ensemble $V \subset M \subset U$ défini par

$$V = \Big\{\, x \in U \ \Big|\ f(x) = c \quad \text{et} \quad \forall 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leqslant n+p \ : \\ \det\Big(\big((\partial_{j_k} f_i)(x)\big)_{i,k=1}^{p}\Big) = 0 \,\Big\} \ \ .$$

Si $V = \emptyset$, alors par [13.11], c est une valeur régulière de f et par [13.12] M est une sous-variété (de dimension n et de classe C^k) de $\mathbf{R}^{n+p}$.

Si $\emptyset \neq V \neq M$, alors on soupçonne que M n'est pas une sous-variété et on tente de le montrer par l'absurde. On commence avec la remarque que V est un fermé dans U (car déterminé par des égalités avec des fonctions continues) et donc que $U' = U \setminus V$ est un ouvert (de U et donc de $\mathbf{R}^{n+p}$). Par définition de V la valeur c est (de nouveau par [13.11]) une valeur régulière pour la restriction de f à l'ouvert U' et donc $M' = M \cap U'$ (ce qui n'est pas vide par l'hypothèse $V \neq M$) est, par [13.12], une sous-variété de dimension n (et de classe C^k) de $\mathbf{R}^{n+p}$. Il s'ensuit que, **si** M est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+p}$, alors selon [13.4] M doit être une sous-variété de dimension n (et de classe C^k). Toujours sous l'hypothèse que M est une sous-variété, il s'ensuit que pour un point $m \in V$ il devrait exister, selon [13.5], les ingrédients suivants : deux ouverts $V_p \subset \mathbf{R}^p$ et $V_n \subset \mathbf{R}^n$, une fonction $g : V_n \to V_p$ de classe C^k, et une partition de l'ensemble $\{1, \ldots, n+p\}$ en deux parties

$$I = \{i_1, \ldots, i_n\} \qquad \text{et} \qquad J = \{j_1, \ldots, j_p\} \ \ ,$$

tels que
$$m \in W \quad \text{et} \quad W \cap M = \{\, x \in W \mid x_J = g(x_I) \,\} \ ,$$
où $W \subset \mathbf{R}^{n+p}$ est défini par
$$W = \{\, x \in \mathbf{R}^{p+n} \mid x_I \in V_n \text{ et } x_J \in V_p \,\} \ .$$
Il “suffit” donc de montrer que de tels ingrédients n’existent pas pour obtenir une contradiction et de conclure que M n’est pas une sous-variété.

Pour résumer : si $V = \emptyset$, M est une sous-variété ; si $\emptyset \neq V \neq M$ et si on trouve $m \in V$ pour lequel on peut montrer la non-existence des ingrédients cités ci-dessus, alors M n’est pas une sous-variété. Dans les cas contraire, c’est au cas par cas qu’il faut raisonner.

14. Extrema liés

Il arrive régulièrement qu'on s'intéresse aux extrema d'une fonction $f : V \subset \mathbf{R}^{n+p} \to \mathbf{R}$, pas sur son domaine de définition, mais sur la restriction à un sous-ensemble $M = g^{-1}(0)$ défini par une application $g : V \to \mathbf{R}^p$. Dans cette situation on parle d'un extremum avec contraintes ou d'un extremum lié. On peut penser à la fonction température dans l'espace $\mathbf{R}^3$, où on s'intéresse aux extrema sur la surface de la Terre (donnée plus ou moins par l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$). Il devrait être évident que l'approche par les points critiques ne marchera pas : il suffit de penser à la fonction $f(x, y) = x^2 + y$ qui n'a aucun point critique dans $\mathbf{R}^2$, mais si on la restreint au sous-ensemble $y = 0$, alors le point $(0, 0)$ est un minimum global sur ce sous-ensemble.

Si $M \subset \mathbf{R}^{n+p}$ était un sous-variété de dimension n (voir [13.1]), alors on pourrait se ramener à la recherche d'un point critique par la méthode suivante. On prend un difféomorphisme local $\varphi : U \to W$ vérifiant la condition

$$M \cap W = \varphi(Z \cap U) \quad ,$$

où $Z \subset \mathbf{R}^{n+p}$ est le sous-espace vectoriel

$$Z = \mathbf{R}^n \times \{0\} \equiv \{\, (u, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \mid v = 0 \,\} \quad .$$

Dans ce cas un point $m \in M$ est un extremum de f sur $M \cap W$ si et seulement si $\varphi^{-1}(m)$ est un extremum pour $f \circ \varphi$ sur $Z \cap U$. Dans ce cas, la fonction $f \circ \varphi$ peut être vue comme une fonction de n variables (les coordonnées dans Z), plutôt que de $n + p$ variables, et on revient à la recherche d'un point critique pour une fonction de moins de variables (n à la place de $n + p$), ce qui réduit le travail de la recherche d'un tel extremum. Mais en même temps on a compliqué le travail de deux façons : pour une sous-variété M donnée (et il faut donc avoir établi au préalable que c'est bien une sous-variété), il faut trouver l'expression d'un tel difféomorphisme, ce qui n'est pas forcément une tâche facile. Et deuxièmement, notre difféomorphisme φ n'est que local et ne couvre (en général) pas le sous-ensemble M entier ; il faut donc refaire le travail avec d'autres difféomorphismes.

Il se trouve qu'on peut contourner ces deux problèmes (et même trois problèmes si on compte aussi la vérification que M est une sous-variété) en rajoutant des variables, appelées des "multiplicateurs de Lagrange." À première vu cela complique aussi notre travail (plus de variables, donc plus de travail), mais pas de la même façon. [1] Voici la démarche à suivre : on cherche les points critiques d'une fonction $F : V \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ construite à partir des applications f et g (avec donc autant de variables en plus que g a des composantes). Un point critique $(x, \lambda) \in V \times \mathbf{R}^p$ de F nous donne automatiquement $x \in M$ et si on a en plus la condition $\mathrm{rang}\big((Dg)(x)\big) = p$ (ce qui implique que M est localement une sous-variété [13.13]), alors on a une classification de la nature de ce "point critique lié" analogue à la classification d'un point critique "ordinaire" donnée dans [9.3].

Ⓟ **14.1 Lemme d'algèbre linéaire.** *Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie et soit $f : E \to F$ et $h : E \to G$ deux applications linéaires.*

(i) *Il existe $g : F \to G$ linéaire tel que $h = g \circ f$ si et seulement si* $\ker(f) \subset \ker(h)$.

1. Mais oui, on peut parler d'une "conservation de travail/problèmes."

(ii) *S'il existe* $g : F \to G$ *linéaire tel que* $h = g \circ f$*, alors* g *est unique si et seulement si* f *est surjectif.*

Ⓟ **14.2 Théorème des extrema liés.** *Soit* $U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ *un ouvert, soient* $f : U \to \mathbf{R}$ *et* $g : U \to \mathbf{R}^p$ *deux applications de classe* C^1 *et soit* $M = \{\, x \in U \mid g(x) = 0 \,\}$*. Si* $f|_M$*, la restriction de la fonction* f *à* M*, présente un extremum local en* $a \in M$ *et si* $\operatorname{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$*, alors il existe un unique* $\lambda \in \mathbf{R}^p$ *tel que*

$$(Df)(a) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, (Dg_k)(a) \quad , \tag{14.3}$$

où $g_k = \pi_k \circ g : U \to \mathbf{R}$ *(4.2), c'est-à-dire* $g(x) = \big(g_1(x), \dots, g_p(x)\big)$*. Les coefficients* $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{R}$ *s'appellent des* multiplicateurs de Lagrange.

Ⓟ **14.4 Lemme.** *Soit* $U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ *un ouvert, soient* $f : U \to \mathbf{R}$ *et* $g : U \to \mathbf{R}^p$ *deux applications de classe* C^1*, soit* $M = \{\, x \in U \mid g(x) = 0 \,\}$ *et soit* $g_k = \pi_k \circ g : U \to \mathbf{R}$ *(4.2). Alors pour* $(a, \lambda) \in U \times \mathbf{R}^p$ *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $a \in M$ *et* $(Df)(a) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, (Dg_k)(a)$ *;*

(ii) (a, λ) *est un point critique de la fonction* $F : U \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ *définie par*

$$F(x, \lambda) = f(x) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, g_k(x) \quad .$$

Ⓟ **14.5 Théorème des extrema liés bis.** *Soit* $U \subset \mathbf{R}^{n+p}$ *un ouvert, soient* $f : U \to \mathbf{R}$ *et* $g : U \to \mathbf{R}^p$ *deux applications de classe* C^1*, soit* $g_k = \pi_k \circ g : U \to \mathbf{R}$ *(4.2) et soit* $M = \{\, x \in U \mid g(x) = 0 \,\}$*. Soit* $(a, \lambda) \in U \times \mathbf{R}^p$ *tel que les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) $(a, \lambda) \in U \times \mathbf{R}^p$ *est un point critique de la fonction* $F : U \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ *définie par*

$$F(x, \mu) = f(x) - \sum_{k=1}^{p} \mu_k \, g_k(x) \quad ,$$

(b) $\operatorname{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$.

Alors, en notant $H = \big(D_1(D_1F)\big)(a, \lambda)$ *le Hessien partiel de* F *par rapport aux variables* x *défini comme*

$$H(v, w) = \big((D^2 f)(a)\big)(v, w) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, \big(D^2 g_k)(a)\big)(v, w) \quad ,$$

on a :

(i) *si* H *est définie positive sur* $\ker\big((Dg)(a)\big)$ *[9.2], alors* $f|_M$ *présente un minimum local strict en* a *;*

(ii) *si* H *est définie négative sur* $\ker\big((Dg)(a)\big)$*, alors* $f|_M$ *présente un maximum local strict en* a *;*

(iii) *s'il existe* $v, w \in \ker\big((Dg)(a)\big)$ *tels que* $H(v, v) < 0 < H(w, w)$*, alors* $f|_M$ *ne présente ni un maximum ni un minimum local en* a*.*

14.6 Discussion : la détermination des extrema de $f|_M$. Si on conjugue [14.2] et [14.4], on voit que si $f|_M$ présente un extremum en a et si $\operatorname{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}^p$ (unique) tel que (a, λ) est un point critique de la fonction F. La recherche (systématique) des extrema de $f|_M$ consiste donc à trouver les points critiques de la fonction F, tout comme la recherche des extrema de f elle-même consiste à trouver les points critique de f. Une fois qu'on connaît les points critiques de F, on peut appliquer [14.5] pour déterminer leur nature (dans la plupart des cas).

Il y a pourtant un petit détail qu'il ne faut pas oublier de vérifier : qu'on a bien $\operatorname{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$, car cette condition est une hypothèse essentielle dans [14.2] et [14.5]. Si on sait que 0 est une valeur régulière de g [13.10], alors cette condition sera vraie pour tout $x \in M$ (et M sera une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+p}$), et donc en particulier pour a. Mais il n'est pas nécessaire que 0 soit une valeur régulière de g, il suffit que $\operatorname{rang}(Dg)$ soit p au point a seulement (ce qui dit que M est localement une sous-variété dans un voisinage de a).

Pour connaître la nature d'un point critique (a, λ), il faut, selon [14.5], déterminer si la restriction de H à $\ker\big((Dg)(a)\big)$ vérifie une des conditions précisée dans [14.5]. Pour le faire, on applique, comme dans le cas sans contraintes, la règle des signes de Descartes [9.11] ou le critère de Sylvester [9.12]. Mais pour pouvoir appliquer l'une de ces méthodes, il faut disposer de la matrice $\widehat{H}_{st}$ de cette restriction. Pour obtenir cette matrice on procède comme suit. Étant donné que $\operatorname{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$, la dimension de $\ker\big((Dg)(a)\big)$ est n. Si $f_1, \ldots, f_n$ est une base de $\ker\big((Dg)(a)\big)$, alors cette matrice $\widehat{H}_{st}$ est donnée par

$$\widehat{H}_{st} = H(f_s, f_t) \quad .$$

Dans la pratique on détermine d'abord la matrice H_{ij} de H dans la base canonique $e_1, \ldots, e_{n+p}$ de $\mathbf{R}^{n+p}$, ce qui donne (comme dans le cas sans contraintes [9.13]) la matrice des dérivées partielles secondes (de taille $(n+p) \times (n+p)$) :

$$\begin{aligned} H_{ij} = H(e_i, e_j) &= \big((D^2 f)(a)\big)(e_i, e_j) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \,\big(D^2 g_k)(a)\big)(e_i, e_j) \\ &= (\partial_i \partial_j f)(a) - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \,(\partial_i \partial_j g_k)(a) \quad . \end{aligned}$$

Ensuite on détermine, toujours dans la base canonique de $\mathbf{R}^{n+p}$, une base $f_1, \ldots, f_n$ de $\ker\big((Dg)(a)\big)$, ce qui revient à déterminer une base du noyau de la matrice (de taille $n \times (n+p)$)

$$\begin{pmatrix} (\partial_1 g_1)(a) & \cdots & (\partial_{n+p} g_1)(a) \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial_1 g_p)(a) & \cdots & (\partial_{n+p} g_p)(a) \end{pmatrix} \quad .$$

Si on écrit $f_s = (f_{1s}, \ldots, f_{n+p,s}) \in \mathbf{R}^{n+p}$, alors la matrice $\widehat{H}_{st}$ est donnée par (attention : on multiplie trois matrices de tailles différentes !)

$$(\widehat{H}_{st}) = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{n+p,1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{1n} & \cdots & f_{n+p,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1,n+p} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n+p,1} & \cdots & H_{n+p,n+p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n+p,1} & \cdots & f_{n+p,n} \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qu'on écrit symboliquement comme $\widehat{H} = {}^{\mathrm{t}}(f_1 \ldots f_n) \cdot H \cdot (f_1 \ldots f_n)$.

Chapitre IV

Les preuves

Les preuves de §1

Preuve de [1.3]. Par l'inégalité triangulaire on a l'inégalité

$$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leqslant (\,\|x-y\| + \|y\|\,) - \|y\| = \|x-y\| \quad .$$

On a donc aussi

$$\begin{aligned} -(\,\|x\| - \|y\|\,) &= \|y\| - \|x\| \\ &\leqslant \|y-x\| = \|(-1)\cdot(x-y)\| = |-1|\cdot\|x-y\| = \|x-y\| \quad . \end{aligned}$$

Ces deux inégalités se résument comme $\|x-y\| \geqslant \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big|$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.4]. Si on pose $r = N(1) > 0$, alors par définition d'une norme on a l'égalité

$$N(x) = |x|\cdot N(1) = r\cdot|x| \quad .$$

$\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.5]. Pour montrer que $B_r(x)$ est un ouvert, on prend $y \in B_r(x)$ et on pose $\varepsilon = r - \|y-x\| > 0$. Pour montrer qu'on a l'inclusion $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$ (nécessaire pour montrer que $B_r(x)$ est un ouvert !), on fait le calcul :

$$\begin{aligned} z \in B_\varepsilon(y) \quad &\Rightarrow \quad \|z-y\| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \|z-x\| \leqslant \|z-y\| + \|y-x\| < \varepsilon + \|y-x\| = r \quad \Rightarrow \quad z \in B_r(x) \quad . \end{aligned}$$

Pour montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie, on vérifie les propriétés d'une topologie. Il est immédiat que $\emptyset$ et E appartiennent à $\mathcal{T}$. Et si O_α, $\alpha \in I$ est une famille d'ouverts (indexée par I), alors pour $x \in \cup_{\alpha\in I} O_\alpha$ il existe $\alpha \in I$ tel que $x \in O_\alpha$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(x) \subset O_\alpha \subset \cup_{\alpha\in I} O_\alpha$, montrant que $\cup_{\alpha\in I} O_\alpha$ est un ouvert. Et finalement, si U et V sont deux ouverts et $x \in U \cap V$, il existe $\varepsilon_U > 0$ et $\varepsilon_V > 0$ tels que

$$B_{\varepsilon_U}(x) \subset U \qquad \text{et} \qquad B_{\varepsilon_V}(x) \subset V \quad .$$

Il s'ensuit que si on pose $\varepsilon = \min(\varepsilon_U, \varepsilon_V)$, alors on a l'inclusion $B_\varepsilon(c) \subset U \cap V$, montrant que $U \cap V$ est un ouvert. Ainsi on a montré que $\mathcal{T}$ est une topologie.

Pour montré que cette topologie est séparée, on prend $x \neq y$ et on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}\,\|x-y\| > 0$. Il est immédiat qu'on a $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$, ce qui montre que la topologie est séparée. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.7]. Soit $k \geqslant 0$ tel que f est k-lipschitzienne. Si $k = 0$, alors on a $\|f(x)-f(y)\| = 0$ pour tout $x, y \in U$, c'est-à-dire que f est constante, donc continue. Dans la suite on peut donc supposer que $k > 0$.

Pour montrer que f est continue en $x \in U$, on prend $\varepsilon > 0$ arbitraire et on pose $\delta = \varepsilon/k$. Ainsi on a l'implication

$$\|y - x\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(y) - f(x)\| \leqslant k \cdot \|y - x\| < k \cdot \delta = \varepsilon \ ,$$

ce qui montre que f est continue en x. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.8]. Par [1.3] on a

$$\big| \, \|x\| - \|y\| \, \big| \leqslant \|x - y\| \ ,$$

ce qui dit que $\| \ \|$ est 1-Lipschitzienne. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.9]. On fait la preuve en boucle en montrant les (quatre) implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

• L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est une conséquence immédiate de la définition d'être continue et l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) est montré (plus généralement) dans [1.7].

• (iii) $\Rightarrow$ (iv) : Si on a $\|A(x)\| \leqslant C \cdot \|x\|$, alors on en déduit, en utilisant que A est linéaire, que A est C-lipschitzienne comme suit :

$$\|A(x) - A(y)\| = \|A(x - y)\| \leqslant C \cdot \|x - y\| \ .$$

• (ii) $\Rightarrow$ (iii) : Si A est continue en 0, il existe, pour $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in E : \|x\| < \delta \ \Rightarrow \ \|A(x)\| < 1 \ .$$

Pour $x \in E^*$ on peut donc faire le calcul :

$$\left\| \frac{\delta \cdot x}{2\,\|x\|} \right\| = \tfrac{1}{2} \cdot \delta < \delta \quad \Rightarrow \quad \left\| A\Big(\frac{\delta \cdot x}{2\,\|x\|}\Big) \right\| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \|A(x)\| < \frac{2}{\delta} \cdot \|x\| \ .$$

En posant $C = 2/\delta$ on aura donc la propriété

$$\forall x \in E : \|A(x)\| \leqslant C \cdot \|x\| \ ,$$

le cas $x = 0$ étant automatiquement vrai pour l'inégalité large. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.11]. • ($\Rightarrow$) Si N_1 et N_2 sont équivalentes, alors $B_1^{N_1}(0)$, la boule de rayon 1 et centre l'origine pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_2. En particulier il existe $C > 0$ tel qu'on a

$$B_C^{N_2}(0) \subset B_1^{N_1}(0) \ .$$

Mais ceci veut dire qu'on a l'implication

$$N_2(x) < C \qquad \Longrightarrow \qquad N_1(x) < 1 \ .$$

Pour $x \in E^*$ on peut donc faire le calcul

$$N_2\Big(\frac{C \cdot x}{2\,N_2(x)}\Big) = \tfrac{1}{2} \cdot C < C \quad \Rightarrow \quad N_1\Big(\frac{C \cdot x}{2\,N_2(x)}\Big) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad N_1(x) < \frac{2}{C} \cdot N_2(x) \ .$$

Si on pose $C_1 = 2/C$, on aura donc trouvé notre première constante vérifiant

$$\forall x \in E : N_1(x) \leqslant C_1 \cdot N_2(x) \quad .$$

(On remarquera que le cas $x = 0$ est automatiquement vérifié pour l'inégalité large !) En échangeant les rôles de N_1 et N_2 on trouve une constante $C_2 > 0$ vérifiant

$$\forall x \in E : N_2(x) \leqslant C_2 \cdot N_1(x) \quad .$$

• ($\Leftarrow$) Supposons maintenant l'existence des deux constantes C_1 et C_2 et soit $O \subset E$ un ouvert pour la topologie induite par la norme N_1. Pour tout $x \in O$ il existe donc $r > 0$ tel qu'on a l'inclusion

$$B_r^{N_1}(x) \subset O \quad .$$

Avec ce r on pose $R = r/C_1$ et on constate qu'on a l'implication

$$N_2(y) < R = r/C_1 \quad \Longrightarrow \quad N_1(y) \leqslant C_1 \cdot N_2(y) < r \quad ,$$

c'est-à-dire qu'on a l'inclusion $B_R^{N_2}(x) \subset B_r^{N_1}(x)$. Ainsi on a montré que pour tout $x \in O$ il existe $R > 0$ tel qu'on a l'inclusion $B_R^{N_2}(x) \subset O$; autrement dit, O est un ouvert pour la topologie induite par la norme N_2. En échangeant les rôles de N_1 et N_2 on montre de la même façon qu'un ouvert pour la topologie donnée par N_2 est également un ouvert pour la topologie donnée par N_1. On a donc montré que les deux topologies sont les mêmes. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.12]. • (i) : Pour tout $p \in [1, \infty]$ il est immédiat qu'on a, avec $v = (v_1, \ldots, v_n)$, les propriétés

$$\|v\|_p \geqslant 0 \qquad , \qquad v \neq 0 \ \Rightarrow \ \|v\|_p \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \|\lambda \cdot v\|_p = |\lambda| \cdot \|v\|_p \quad .$$

Il reste donc l'inégalité triangulaire pour finir la preuve que ce sont des normes. Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont simples :

$$\|v + w\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|v_i + w_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\, \|v_i\| + \|w_i\| \,) = \|v\|_1 + \|w\|_1 \quad .$$

et

$$\begin{aligned} \|v + w\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \|v_i + w_i\| &\leqslant \max_{i=1,\ldots,n} (\, \|v_i\| + \|w_i\| \,) \\ &\leqslant (\, \max_{i=1,\ldots,n} \|v_i\| \,) + (\, \max_{i=1,\ldots,n} \|w_i\| \,) = \|v\|_\infty + \|w\|_\infty \quad . \end{aligned}$$

Pour traiter les cas $1 < p < \infty$, on a besoin d'un résultat un peu indépendant de cette preuve.

Petit lemme : Pour $a, b \geqslant 0$ et pour $p, q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (autrement dit, $q = p/(p-1)$) on a l'inégalité

$$ab \leqslant \tfrac{1}{p}\, a^p + \tfrac{1}{q}\, b^q \quad .$$

Preuve du petit lemme : On commence avec la remarque que si $ab = 0$, alors c'est évident. On peut donc supposer qu'on a $a, b > 0$. Ensuite on remarque que la fonction ln est concave, ce qui veut dire que son graphe entre deux point est au-dessus de la corde joignant ces deux points. En formule ceci veut dire qu'on a, pour $0 < a < b$:

$$\forall t \in [a, b] \quad : \quad \ln(t) \geqslant \ln(a) + (t - a) \cdot \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} = \tfrac{b-t}{b-a} \cdot \ln(a) + \tfrac{t-a}{b-a} \cdot \ln(b) \quad ,$$

un résultat qui se démontre facilement quand on note que la deuxième dérivée de ln est strictement négative. Si on applique cette inégalité à $t = p^{-1}\,a + q^{-1}\,b$ on obtient

$$\forall a, b > 0 \quad : \quad \ln(\tfrac{1}{p}\,a + \tfrac{1}{q}\,b) \geqslant \tfrac{1}{p}\,\ln(a) + \tfrac{1}{q}\,\ln(b) \ .$$

Il suffit maintenant de remplacer a et b par a^p et b^p et de prendre l'exponentielle (une fonction croissante qui respecte donc les inégalités) pour obtenir le résultat

$$\tfrac{1}{p}\,a^p + \tfrac{1}{q}\,b^q \geqslant ab \ ,$$

ce qui termine la preuve du petit lemme. $\boxed{CQFD}$

En revenant à la preuve de l'inégalité triangulaire dans le cas $p > 1$, on remarque d'abord que cette inégalité

$$\|v + w\|_p \leqslant \|v\|_p + \|w\|_p$$

est trivialement vraie si $v = 0$ ou $w = 0$. Dans la suite on peut donc supposer qu'on a $\|v\|_p, \|w\|_p > 0$. Ensuite on remarque qu'on a l'inégalité (en utilisant que les applications $t \mapsto t^p$ et $t \mapsto t^{1/p}$ sont croissantes et respectent donc les inégalités)

$$\|v + w\|_p \equiv \Big(\sum_{i=1}^{n} \|v_i + w_i\|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} (\,\|v_i\| + \|w_i\|\,)^p\Big)^{1/p} \ . \tag{15.1}$$

Pour simplifier les notations on introduit les nombres $c_i = \|v_i\| + \|w_i\| \geqslant 0$ ainsi que le nombre $C = \big(\sum_{i=1}^{n} c_i^p\big)^{1/p} > 0$. Avec ces préparations on calcule, en utilisant le petit lemme :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\|v_i\|}{\|v\|_p} \cdot \frac{(c_i)^{p/q}}{C^{p/q}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{p} \cdot \frac{\|v_i\|^p}{(\,\|v\|_p)^p} + \tfrac{1}{q} \cdot \frac{\|c_i\|^p}{C^p} = \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1 \ .$$

Autrement dit, avec un calcul analogue pour w :

$$\sum_{i=1}^{n} \|v_i\| \cdot (c_i)^{p/q} \leqslant \|v\|_p \cdot C^{p/q} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \|w_i\| \cdot (c_i)^{p/q} \leqslant \|w\|_p \cdot C^{p/q} \ .$$

L'addition de ces deux inégalités et la définition de c_i nous donne l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i)^{1+p/q} \leqslant (\,\|v\|_p + \|w\|_p) \cdot C^{p/q} \ .$$

Mais $1 + p/q = p$ et "donc" (avec la définition de C) cette inégalité se simplifie en

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} (\,\|v_i\| + \|w_i\|\,)^p\Big)^{1/p} \equiv C \leqslant \|v\|_p + \|w\|_p \ .$$

Combiné avec (15.1) on a donc montré l'inégalité triangulaire pour l'application $\|\cdot\|_p$, ce qui finit la preuve que ces applications sont des normes.

• (ii) : Pour montrer les inégalités entre ces normes, on fait d'abord le calcul pour $p \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\|v\|_\infty &\equiv \max_{i=1,\ldots,n} \|v_i\| = \big(\max_{i=1,\ldots,n} \|v_i\|^p\big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} (\,\|v_i\|\,)^p\Big)^{1/p} \equiv \|v\|_p \\ &\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} (\max_{j=1,\ldots,n} \|v_j\|\,)^p\Big)^{1/p} = \big(n \cdot (\,\|v\|_\infty)^p\big)^{1/p} = n^{1/p} \cdot \|v\|_\infty \ .\end{aligned}$$

Ceci nous donne déjà les inégalités $\|v\|_\infty \leqslant \|v\|_q$ et $\|v\|_p \leqslant n^{1/p} \cdot \|v\|_\infty$. Reste donc l'inégalité $\|v\|_q \leqslant \|v\|_p$ pour $q > p$. Pour cela on note $\alpha = \max_{i=1,\dots,n} \|v_i\| = \|v\|_\infty$ et on remarque d'abord qu'on a

$$\forall i \quad : \quad \frac{\|v_i\|}{\alpha} \leqslant 1 \qquad \text{et donc} \qquad \left(\frac{\|v_i\|}{\alpha}\right)^q \leqslant \left(\frac{\|v_i\|}{\alpha}\right)^p .$$

Ensuite on remarque qu'il existe i tel que $\|v_i\| = \alpha$, ce qui permet de faire le calcul

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^n \left(\frac{\|v_i\|}{\alpha}\right)^q \leqslant \sum_{i=1}^n \left(\frac{\|v_i\|}{\alpha}\right)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\|v_i\|}{\alpha}\right)^p\right)^{q/p} .$$

En gardant l'inégalité entre le deuxième et quatrième terme, on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\|v\|_q}{\alpha} = \left\|\frac{v}{\alpha}\right\|_q &\equiv \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\|v_i\|}{\alpha}\right)^q\right)^{1/q} \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\|v_i\|}{\alpha}\right)^p\right)^{1/p} \equiv \left\|\frac{v}{\alpha}\right\|_p = \frac{\|v\|_p}{\alpha} \quad , \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve des inégalités.

- (iii) : Si on prend la limite $p \to \infty$ dans l'encadrement

$$\|v\|_\infty \leqslant \|v\|_p \leqslant n^{1/p} \cdot \|v\|_\infty$$

et si on se rappelle qu'on a $\lim_{p\to\infty} x^{1/p} = 1$ pour tout $x > 0$, on obtient l'égalité $\lim_{p\to\infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$.

- (iv) : Si on combine [1.11] avec nos inégalités "circulaire", on obtient directement l'équivalence de toutes ces normes. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.15]. En partant des propriétés annoncés on trouve directement

$$\langle x, y\rangle = \langle x, y_\perp + y_\parallel\rangle = \langle x, y_\perp\rangle + \langle x, \lambda x\rangle = \lambda \cdot \langle x, x\rangle \quad .$$

Si les vecteurs $y_\perp$ et $y_\parallel$ existent, on doit donc avoir

$$\lambda = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \quad ,$$

ce qui est bien défini car $x \neq 0$. Il suffit maintenant de poser

$$y_\parallel = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x \qquad \text{et} \qquad y_\perp = y - y_\parallel$$

pour trouver ces deux vecteurs car :

$$\langle x, y_\perp\rangle = \left\langle x, y - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x\right\rangle = \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot \langle x, x\rangle = 0 \quad .$$

L'unicité est une conséquence directe du fait que λ est déterminé par x et y. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.16]. Si $x = 0$, alors l'inégalité se réduit à l'égalité $0 = 0$ car la bilinéarité de $\langle\ ,\ \rangle$ implique directement que $\langle x, y\rangle = 0$ dès qu'un des deux arguments est nul. Et dans ce cas les deux vecteurs sont trivialement colinéaires. Dans le cas contraire on peut appliquer [1.15] ce qui nous permet de faire le calcul

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \langle y_\perp, y_\perp \rangle &= \left\langle y - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\cdot x, y - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\cdot x \right\rangle \\
&= \langle y,y\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\cdot\langle x,y\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\cdot\langle y,x\rangle + \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\cdot\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\cdot\langle x,x\rangle \\
&= \frac{\langle y,y\rangle\cdot\langle x,x\rangle - |\langle x,y\rangle|^2}{\langle x,x\rangle}
\end{aligned}$$

et donc, parce que $\langle x,x\rangle > 0$, on a l'inégalité annoncée. Et on a égalité si et seulement si $\langle y_\perp, y_\perp\rangle = 0$, ce qui se produit par (PS4) seulement si $y_\perp = 0$, ce qui, selon [1.15], est équivalent à dire que x et y sont colinéaires. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.17]. Par la propriété (PS4) d'un produit scalaire on a bien $\|x\| \geqslant 0$ (et que cette application est bien définie car on ne prend la racine carrée que d'un nombre réel positif) et l'implication $\|x\| = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$.

En utilisant la bilinéarité on peut faire le calcul

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\cdot\lambda\cdot\langle x,x\rangle} = |\lambda|\cdot\|x\| \quad .$$

Finalement, pour l'inégalité triangulaire on fait le calcul

$$\begin{aligned}
|\langle x+y, x+y\rangle| &= |\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle| \\
&\leqslant \langle x,x\rangle + |\langle x,y\rangle| + |\langle y,x\rangle| + \langle y,y\rangle \\
&\overset{[1.16],\ (PS3)}{\leqslant} \langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\
&= \left(\sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}\,\right)^2 \quad .
\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée de cette inégalité et en utilisant la définition de l'application $\|\ \|$, on trouve

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad ,$$

ce qui est bien l'inégalité triangulaire. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.18]. Soit $n = \dim(E)$, soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E et soit $\phi : \mathbf{R}^n \to E$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels donné par

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i\, e_i \quad .$$

Alors on vérifie aisément que l'application $\|\cdot\|_\infty : E \to \mathbf{R}$ définie par

$$N_\infty\big(\phi(x)\big) = \|x\|_\infty \equiv \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

est une norme sur E. Soit $N : E \to \mathbf{R}$ une norme arbitraire. Alors, par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $x \in \mathbf{R}^n$:

$$N\big(\phi(x)\big) \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\cdot N(e_i) \leqslant N_\infty\big(\phi(x)\big)\cdot\sum_{i=1}^n N(e_i) \quad .$$

En notant $C = \sum_{i=1}^{n} N(e_i)$ on a donc $N(v) \leqslant C \cdot N_\infty(v)$ pour tout $v \in E$.

On en déduit en particulier que l'application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = N\big(\phi(x)\big)$$

est continue :

$$|f(x) - f(y)| \overset{[1.3]}{\leqslant} N\big(\phi(x-y)\big) \leqslant C \cdot N_\infty\big(\phi(x-y)\big) \equiv C \cdot \|x-y\|_\infty \ .$$

D'autre part, l'ensemble $S_1 \subset \mathbf{R}^n$ défini par $S_1 = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1 \,\}$ est un ensemble fermé et borné, donc compact. Il existe donc $c \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \in S_1 \quad : \quad f(x) \geqslant c \ .$$

Mais f ne s'annule qu'on 0 et est donc strictement positive sur S_1, ce qui entraîne qu'on a, avec la définition d'une norme :

$$N\big(\phi(x)\big) = \|x\|_\infty \cdot N\Big(\phi\Big(\frac{x}{\|x\|_\infty}\Big)\Big) = \|x\|_\infty \cdot f\Big(\frac{x}{\|x\|_\infty}\Big) \geqslant N_\infty\big(\phi(x)\big) \cdot c \ .$$

Autrement dit, on a la majoration $N_\infty(v) \leqslant c^{-1} \cdot N(v)$ pour tout $v \in E$, ce qui montre que N et N_∞ sont des normes équivalentes [1.11]. Avec le fait que "être équivalent" est une relation d'équivalence on en déduit directement que deux normes quelconques sur E sont équivalentes. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.19]. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E (qu'on suppose de dimension n). Alors pour tout $v = \sum_{i=1}^{n} v_i\, e_i \in E$ on a (par l'inégalité triangulaire)

$$\|f(v)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |v_i| \cdot \|f(e_i)\| \ .$$

D'autre part, l'application $v \mapsto N(v) = \max_{i=1,\ldots,n} |v_i|$ est une norme sur E (voir la preuve de [1.18]). En posant $C = \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|$ on aura donc la majoration

$$\|f(v)\| \leqslant C \cdot N(v) \ ,$$

ce qui montre que f est continue par rapport à la norme N sur E. Mais sur E toutes les normes sont équivalentes [1.18], donc f est continue par rapport à n'importe quelle norme sur E parce qu'elles induisent la même topologie [1.10]. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.20]. On vérifie les propriétés d'une norme, à commencer avec la positivité :

$$\forall x \in E^* \ : \ \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad N(A) = \sup_{x \in E^*} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \geqslant 0 \ .$$

Ensuite, si on a $N(A) = 0$, alors

$$\sup_{x \in E^*} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall x \in E^* \ : \ \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leqslant 0 \ .$$

Avec la positivité de $\|A(x)\|$ on en déduit $\|A(x)\| = 0$, c'est-à-dire $A(x) = 0$. Ceci étant vrai aussi pour $x = 0$, il s'ensuit que f est l'application nulle.

On poursuit avec le choix d'un $\lambda \in \mathbf{R}$ et on calcule :

$$N(\lambda A) = \sup_{x\in E^*} \frac{\|(\lambda A)(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in E^*} \frac{\|\lambda\big(A(x)\big)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in E^*} \frac{|\lambda|\cdot\|A(x)\|}{\|x\|}$$
$$= |\lambda| \cdot \sup_{x\in E^*} \frac{\|\big(A(x)\big)\|}{\|x\|} = |\lambda|\cdot N(A) \quad ,$$

où l'avant dernière égalité se justifie par le fait qu'on manipule des quantités positives.

Et on termine avec l'inégalité triangulaire :

$$N(A+B) = \sup_{x\in E^*} \frac{\|(A+B)(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in E^*} \frac{\|A(x)+B(x)\|}{\|x\|}$$
$$\leqslant \sup_{x\in E^*} \left(\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|B(x)\|}{\|x\|} \right)$$
$$\leqslant \sup_{x\in E^*} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} + \sup_{x\in E^*} \frac{\|B(x)\|}{\|x\|} = N(A) + N(B) \quad .$$

$\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.22]. Par définition d'une norme et la linéarité de A, on a les égalités

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \qquad \text{et} \qquad \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1 \quad .$$

Il s'ensuit qu'on l'égalité

$$\left\{ \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \;\middle|\; x \in E^* \right\} = \{\, \|A(x)\| \mid x \in E\,,\ \|x\| = 1 \,\} \quad ,$$

et donc l'égalité

$$\sup_{x\in E^*} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in E\,,\|x\|=1} \|A(x)\| \quad .$$

Parce qu'on a l'inclusion évidente (plus d'éléments potentiels)

$$\{\, \|A(x)\| \mid x \in E\,,\ \|x\| = 1 \,\} \subset \{\, \|A(x)\| \mid x \in E\,,\ \|x\| \leqslant 1 \,\} \quad ,$$

on a l'inégalité

$$\sup_{x\in E\,,\|x\|=1} \|A(x)\| \leqslant \sup_{x\in E\,,\|x\|\leqslant 1} \|A(x)\| \quad .$$

D'autre part, pour $\|x\| \leqslant 1$ on a l'inégalité (seulement si $x \neq 0$)

$$\|A(x)\| = \|x\| \cdot \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leqslant \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \quad .$$

On en déduit l'implication (aussi valable pour $x = 0$)

$$\|x\| \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad \|A(x)\| \leqslant \sup_{x\in E\,,\|x\|=1} \|A(x)\| \quad .$$

L'inégalité dans l'autre sens

$$\sup_{x\in E\,,\|x\|\leqslant 1} \|A(x)\| \leqslant \sup_{x\in E\,,\|x\|=1} \|A(x)\|$$

en découle immédiatement.

Pour la dernière égalité on introduit d'abord l'ensemble $X \subset \mathbf{R}$ comme

$$X = \{\, C \in \mathbf{R}_+ \mid \forall x \in E : \|A(x)\| \leqslant C \cdot \|x\| \,\}$$

et ensuite on remarque qu'on a l'égalité

$$X = \left\{ C \in \mathbf{R}_+ \;\middle|\; \forall x \in E^* : \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leqslant C \right\} \ .$$

La définition du sup nous donne immédiatement les propriétés

$$\sup_{x\in E^*} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \in X \qquad \text{et} \qquad C \in X \ \Rightarrow \ \sup_{x\in E^*} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leqslant C \ .$$

L'égalité

$$\sup_{x\in E^*} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \inf X = \min X$$

est une conséquence immédiate. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.23]. L'inégalité donnée est, selon [1.9], équivalente à la continuité de A. Mais pour $x \in E^*$ on peut aussi l'écrire sous la forme $\|A(x)\|/\|x\| \leqslant C$; l'inégalité $\|A\| \leqslant C$ en découle immédiatement. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.24]. Par définition de la norme d'opérateur on a

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbf{R}^*} \frac{A(x)}{|x|} = \sup_{x\in\mathbf{R}^*} \frac{\|x\cdot A(1)\|}{|x|} = \|A(1)\| \ . \qquad \boxed{CQFD}$$

Preuve de [1.25]. Par définition il existe $C_1, C_2, D_1, D_2 > 0$ tels que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on a

$$C_1^{-1} \cdot L_1(x) \leqslant L_2(x) \leqslant C_2 \cdot L_1(x) \quad \text{et} \quad D_1^{-1} \cdot M_1(y) \leqslant M_2(y) \leqslant D_2 \cdot M_1(y) \ .$$

Pour $x \in E^*$ et $y = A(x)$ on a donc les inégalités

$$\frac{1}{C_2 \cdot D_1} \cdot \frac{M_1\big(A(x)\big)}{L_1(x)} \leqslant \frac{M_2\big(A(x)\big)}{L_2(x)} \leqslant C_1 \cdot D_2 \cdot \frac{M_1\big(A(x)\big)}{L_1(x)} \ .$$

En prenant le sup sur $x \in E^*$, on en déduit les inégalités

$$\frac{1}{C_2 \cdot D_1} \cdot N_1(A) \leqslant N_2(A) \leqslant C_1 \cdot D_2 \cdot N_1(A) \ ,$$

ce qui montre que N_1 et N_2 sont équivalentes. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.26]. Par définition du suprémum on a

$$\|A\| = \sup_{x\in E^*} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \qquad \Longrightarrow \qquad \forall x \in E^* : \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leqslant \|A\| \ ,$$

c'est-à-dire $\|A(x)\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$ pour tout $x \in E^*$. L'égalité étant vraie aussi pour $x = 0$, on a le résultat.

Pour l'autre inégalité on utilise le résultat précédent :

$$\begin{aligned}\|B\circ A\| &= \sup_{x\in E^*}\frac{\big\|B\big(A(x)\big)\big\|}{\|x\|} \leqslant \sup_{x\in E^*}\frac{\|B\|\cdot\|A(x)\|}{\|x\|}\\ &\leqslant \sup_{x\in E^*}\frac{\|B\|\cdot\|A\|\cdot\|x\|}{\|x\|} = \|B\|\cdot\|A\| \quad .\end{aligned}$$ $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.27]. Pour la linéarité de $\mathcal{E}_v$ il suffit de faire le calcul

$$\mathcal{E}_v(A+\lambda B) = (A+\lambda B)(v) = A(v) + \lambda\big(B(v)\big) = \mathcal{E}_v(A) + \lambda\mathcal{E}_v(B) \quad .$$

Pour la continuité on invoque [1.26] pour obtenir l'inégalité $\|\mathcal{E}_v(A)\| = \|A(v)\| \leqslant \|A\|\cdot\|v\|$. Avec [1.23] il s'ensuit immédiatement que $\mathcal{E}_v$ est continue et qu'on a l'inégalité $\|\mathcal{E}_v\| \leqslant \|v\|$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.28]. Pour montrer la continuité, on remarque d'abord que la notion de continuité ne dépend pas du choix de la norme dans sa classe de normes équivalentes. Avec [1.25] il s'ensuit qu'on peut utiliser toute norme équivalente sur E pour calculer la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E;F)$. Et parce que E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes [1.18], ce qui nous permet d'utiliser sur E la norme (voir la preuve de [1.18])

$$\Big\|\sum_{i=1}^n v_i\, e_i\Big\| = \max_{i=1,\ldots,n}|v_i| \quad .$$

Maintenant on fait le calcul, pour $v = \sum_{i=1}^n v_i\, e_i$,

$$\begin{aligned}\big\|\big(\varphi(x)-\varphi(a)\big)(v)\big\| &= \Big\|\sum_{i=1}^n v_i\cdot\big(\varphi_i(x)-\varphi_i(a)\big)\Big\|\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |v_i|\cdot\|\varphi_i(x)-\varphi_i(a)\|\\ &\leqslant \|v\|\cdot\sum_{i=1}^n\|\varphi_i(x)-\varphi_i(a)\| \quad .\end{aligned}$$

Avec [1.23] on en déduit qu'on a l'inégalité

$$\|\varphi(x)-\varphi(a)\| \leqslant \sum_{i=1}^n \|\varphi_i(x)-\varphi_i(a)\| \quad .$$

Si toutes les applications φ_i sont continues, on a donc $\lim_{x\to a}\|\varphi_i(x)-\varphi_i(a)\| = 0$. Et donc (car on a une somme finie) on a aussi $\lim_{x\to a}\|\varphi(x)-\varphi(a)\| = 0$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.29]. Avec [1.23] on déduit directement de l'égalité $\|A(v)\| = \|v\|$ que A est continue et aussi qu'on a $\|A\| = \sup_{v\in E^*}\|A(v)\|/\|v\| = 1$. Mais avec l'égalité

$\|A(v)\| = \|v\|$ on peut aussi faire le raisonnement suivant :

$$A(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \|A(v)\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \|v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0 \ ,$$

ce qui montre que A est injective. Si A est aussi surjective, elle est bijective et on peut réécrire l'égalité $\|A(v)\| = \|v\|$ comme $\|w\| = \|A^{-1}(w)\|$ pour $w = A(v)$. Comme pour la continuité de A on en déduit que A^{-1} est continue avec $\|A^{-1}\| = 1$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.31]. Il est immédiat que Φ est linéaire. Considérons donc l'application $\Psi : F \to \mathcal{L}(\mathbf{R}; F)$ définie par

$$\Psi(v) : \mathbf{R} \to F \quad , \quad \lambda \mapsto \lambda v \ .$$

En faisant le calcul

$$\|\Psi(v)\| = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\big\|\big(\Psi(v)\big)(\lambda)\big\|}{|\lambda|} = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\|\lambda v\|}{|\lambda|} = \sup_{\lambda\neq 0} \|v\| = \|v\| \ ,$$

on a montré que $\Psi(v) : \mathbf{R} \to F$ est bien continue (une fois qu'on a constaté qu'elle est bien linéaire !). Il est maintenant immédiat qu'on a :

$$\Phi\big(\Psi(v)\big) = \big(\Psi(v)\big)(1) = v \qquad \text{et} \qquad \Big(\Psi\big(\Phi(A)\big)\Big)(\lambda) = \lambda A(1) = A(\lambda) \ .$$

Autrement dit, Φ et Ψ sont bijective avec $\Psi = \Phi^{-1}$. Pour montrer que Φ est un isomorphisme *isométrique*, on fait le calcul

$$\|A\| = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\|A(\lambda)\|}{|\lambda|} \overset{\text{lin. de } A}{=} \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\|\lambda A(1)\|}{|\lambda|} = \|A(1)\| = \|\Phi(A)\| \ . \qquad \boxed{CQFD}$$

Preuve de [1.34]. L'énoncé étant symétrique dans les deux normes, il suffit de montrer l'une des deux implications. Supposons donc que $(E, \|\cdot\|_1)$ soit complet et soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy par rapport à la norme $\|\cdot\|_2$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n, m \in \mathbf{N} \quad : \quad n, m \geqslant N \ \Rightarrow \ \|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon \ . \tag{15.2}$$

Le fait que les deux normes sont équivalentes implique entre autre l'existence d'une constante $C > 0$ tel que

$$\forall y \in E : \|y\|_1 \leqslant C \cdot \|y\|_2 \ . \tag{15.3}$$

Soit maintenant $\varepsilon' > 0$, alors par (15.2) avec $\varepsilon = \varepsilon'/C$ il existe $N \in \mathbf{N}$ avec la propriété

$$\forall n, m \in \mathbf{N} \quad : \quad n, m \geqslant N \ \Rightarrow \ \|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon = \varepsilon'/C \ .$$

Par (15.3) on a donc aussi

$$\forall n, m \in \mathbf{N} \quad : \quad n, m \geqslant N \ \Rightarrow \ \|x_n - x_m\|_1 \leqslant C \cdot \|x_n - x_m\|_2 < C \cdot \varepsilon = \varepsilon' \ .$$

Autrement dit, on a montré que la suite est de Cauchy par rapport à la norme $\|\cdot\|_1$, donc convergente. La notion de convergence étant une propriété topologique (une suite converge vers ℓ si pour tout voisinage ouvert de ℓ il existe $N \in \mathbf{N}$ telqu'à partir de ce N tous les éléments de la suite appartiennent au voisinage), il s'ensuit que $(E, \|\cdot\|_2)$ est aussi complet. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.35]. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite absolument convergente, alors, par définition, la suite $T_n = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|$ converge (dans $\mathbf{R}$). Pour montrer que la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ converge, on va montrer que c'est une suite de Cauchy dans l'espace complet E. Prenons donc $\varepsilon > 0$. Parce que la suite T_n converge, c'est une suite de Cauchy dans $\mathbf{R}$. Il existe donc $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n > m \geqslant N \quad : \quad |T_n - T_m| \equiv \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \varepsilon \ .$$

Il s'ensuit qu'on a :

$$\|S_n - S_m\| = \Big\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \Big\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \varepsilon \ ,$$

ce qui montre que $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien une suite de Cauchy et donc, parce que E est complet, elle converge. De plus, par l'inégalité triangulaire on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$ la majoration

$$\Big\| \sum_{k=0}^{n} x_k \Big\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|x_k\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| \ .$$

Par passage à la limite $n \to \infty$ et le fait que la norme est une application continue on en déduit la majoration de l'énoncé. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.36]. Il faut montrer que toute suite de Cauchy A_n dans $\mathcal{L}(E; F)$ converge vers un élément B de $\mathcal{L}(E; F)$. Si on choisit $x \in E$, alors pour $m, n \in \mathbf{N}$ on a la majoration

$$\|A_m(x) - A_n(x)\| = \|(A_m - A_n)(x)\| \leqslant \|A_m - A_n\| \cdot \|x\| \ .$$

Il s'ensuit que la suite $A_n(x)$ est une suite de Cauchy dans F qui est complet. Il existe donc $B(x) \in F$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = B(x) \ .$$

Ainsi on a obtenu une application $B : E \to F$. Reste à montrer que B est linéaire, continue et vérifie $\lim_{n\to\infty} A_n = B$. Pour la linéarité on fait le calcul :

$$\begin{aligned} B(x + \lambda y) &= \lim_{n\to\infty} A_n(x + \lambda y) = \lim_{n\to\infty} \big(A_n(x) + \lambda\, A_n(y)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} A_n(x) + \lambda \lim_{n\to\infty} A_n(y) = B(x) + \lambda\, B(y) \ . \end{aligned}$$

Les deux autres résultats se montrent ensemble. On prend $\varepsilon > 0$ et on invoque l'aspect “suite de Cauchy” de A_n pour trouver $N \in \mathbf{N}$ tel que $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$ pour tout $n, m \geqslant N$. On aura donc aussi

$$\forall n, m \geqslant N \quad : \quad \|A_m(x) - A_n(x)\| \leqslant \|A_m - A_n\| \cdot \|x\| \leqslant \varepsilon \cdot \|x\| \ .$$

(Attention : on n'a pas une inégalité stricte ci-dessus, car on ne sait pas si on a $\|x\| \neq 0$.) Par passage à la limite $m \to \infty$ (qui respecte les inégalités larges) et le fait que la norme est une application continue, on aura aussi

$$\forall n \geqslant N \quad : \quad \|B(x) - A_n(x)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|x\| \ .$$

Par [1.23] on en déduit que $B-A_n$ est continue avec $\|B-A_n\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Nos deux résultats en découlent : en prenant $n = N$ on a $B = (B - A_N) + A_N$, ce qui est continue comme somme de deux applications continues et on a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \geqslant N \quad : \quad \|B - A_n\| \leqslant \varepsilon \ ,$$

ce qui est (une variante de) la définition de $\lim_{n\to\infty} A_n = B$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.37]. Les normes $\|\cdot\|_p$ étant équivalentes, il suffit (selon [1.34]) de montrer que le produit est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit donc $\big((x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)})\big)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall k,\ell \in \mathbf{N} \quad &: \quad k,\ell \geqslant N \ \Rightarrow \\ &\max_{i=1,\ldots,n} \big\|x_k^{(i)} - x_\ell^{(i)}\big\| \equiv \big\|(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}) - (x_\ell^{(1)}, \ldots, x_\ell^{(n)})\big\|_\infty < \varepsilon \ .\end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ on a la propriété

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall k,\ell \in \mathbf{N} \quad : \quad k,\ell \geqslant N \ \Rightarrow \ \big\|x_k^{(i)} - x_\ell^{(i)}\big\| < \varepsilon \ .$$

Autrement dit, pour chaque i la suite $(x_k^{(i)})_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans E_i. Il existe donc $y^{(i)} \in E_i$ tel que $\lim_{k\to\infty} x_k^{(i)} = y^{(i)}$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_i \in \mathbf{N}\ \forall k \in \mathbf{N} \quad : \quad k \geqslant N_i \ \Rightarrow \ \big\|x_k^{(i)} - y^{(i)}\big\| < \varepsilon \ .$$

On en déduit la propriété

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \max_{i=1,\ldots,n} N_i \in \mathbf{N}\ \forall k \in \mathbf{N} \quad : \quad k \geqslant N \ \Rightarrow \ \max_{i=1,\ldots,n} \big\|x_k^{(i)} - y^{(i)}\big\| < \varepsilon \ .$$

Et ceci est la définition que $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ est la limite de notre suite initiale. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.38]. La fonction f étant contractante, il existe $k \in \,]0,1[$ tel que $\|f(x) - f(y)\| \leqslant k \cdot \|x - y\|$ pour tout $x, y \in B$ [1.6]. L'unicité s'en déduit immédiatement, car si on avait $f(x_o) = x_o$ et $f(y_o) = y_o$) avec $x_o \neq y_o$, on aurait

$$\|x_o - y_o\| = \|f(x_o) - f(y_o)\| \leqslant k \cdot \|x_o - y_o\| < \|x_o - y_o\| \ ,$$

ce qui est impossible.

Pour montrer l'existence d'un point fixe, on prend $x \in B$ arbitraire et on va montrer que la suite $f^{(n)}(x)$ converge et que sa limite est un point fixe (où $f^{(n)}$ est la fonction f itérée n fois). Pour cela on montre d'abord par récurrence qu'on a

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad : \quad \|f^{(n+1)}(x) - f^{(n)}(x)\| \leqslant k^n \cdot \|f(x) - x\| \ .$$

On en déduit la majoration

$$\begin{aligned}\|f^{(n)}(x) - x\| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \|f^{(i+1)}(x) - f^{(i)}(x)\| \leqslant \|f(x) - x\| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} k^i \\ &= \|f(x) - x\| \cdot \frac{1-k^n}{1-k} \leqslant \frac{\|f(x) - x\|}{1-k} \ .\end{aligned}$$

À partir de cette majoration on démontre par récurrence qu'on a pour tout $n, p \in \mathbf{N}$ la majoration

$$\|f^{(p+n)}(x) - f^{(p)}(x)\| \leqslant k^p \cdot \|f^{(n)}(x) - x\| \leqslant k^p \cdot \frac{\|f(x) - x\|}{1-k} \quad ,$$

ce qu'on peut reformuler comme

$$\forall m, n \in \mathbf{N} \quad : \quad \|f^{(n)}(x) = f^{(m)}(x)\| \leqslant k^{\min(m,n)} \cdot \frac{\|f(x) - x\|}{1-k} \quad .$$

Il s'ensuit immédiatement que la suite $f^{(n)}(x)$ est une suite de Cauchy dans B.

Mais B est un sous-ensemble fermé d'un espace complet, donc complet, ce qui veut dire qu'il existe $x_o \in B$ tel que $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = x_o$. La suite $y_n = f\big(f^{(n)}(x)\big) = f^{(n+1)}(x)$ est une suite extraite de la suite $f^{(n)}(x)$, donc on a $\lim_{n\to\infty} y_n = x_o$. D'autre part, par continuité de f, on aussi

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f\big(f^{(n)}(x)\big) = f\big(\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)\big) = f(x_o) \quad .$$

Ainsi on a $f(x_o) = x_o$ et on a trouvé notre point fixe. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.39]. Il est quasiment immédiat de montrer à partir de la définition qu'on a les propriétés

$$\|f\|_\infty \geqslant 0 \qquad , \qquad f \neq 0 \;\Rightarrow\; \|f\|_\infty \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty \quad .$$

Pour l'inégalité triangulaire on raisonne comme suit :

$$\begin{aligned} &\|f(x) + g(x)\| \leqslant \|f(x)\| + \|g(x)\| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow \qquad \|f + g\|_\infty \equiv \sup_{x\in X} \|f(x) + g(x)\| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad . \end{aligned}$$

Si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy, alors on a la propriété

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbf{N} \;\forall n, m \geqslant N \quad : \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad .$$

Pour $x \in X$ on a donc

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad , \tag{15.4}$$

ce qui montre que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans F qui est complet. Il existe donc $g(x) \in F$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \quad .$$

Le but est maintenant de montrer que la fonction $g : X \to F$ est bornée et qu'on a $\lim_{n\to\infty} f_n = g$, ce qui revient à montrer $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_\infty = 0$. Pour cela on reprend l'inégalité (15.4) et on utilise le fait que la norme (dans F) est une application continue pour passer la limite $m \to \infty$ à l'intérieur de la norme pour obtenir

$$\|f_n(x) - g(x)\| \leqslant \varepsilon \quad , \tag{15.5}$$

ce qui montre que la fonction $f_n - g$ est bornée. Mais f_n est elle aussi bornée, donc $g = (g - f_n) + f_n$ aussi. Une fois qu'on sait que g appartient à $C_b(X; F)$, on constate qu'avec (15.5) on a montré la propriété

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbf{N} \;\forall n \geqslant N \quad : \quad \|f_n - g\|_\infty \leqslant \varepsilon \quad ,$$

ce qui est (une variante de) la définition de $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - g\|_\infty = 0$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.40]. Soit $g \in C_b(X;F)$ dans l'adhérence de $C_b^0(X;F)$, c'est-à-dire qu'il existe $f_n \in C_b^0(X;F)$ tels que $\lim_{n\to\infty} f_n = g$ (par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$). Alors il faut montrer qu'on a $g \in C_b^0(X;f)$, c'est-à-dire que g est continue. Il semble normal que, pour faire cela, on a besoin de la continuité des fonctions f_n et le fait g est la limite de ces fonctions. Ceci suggère qu'on fait la majoration

$$\begin{aligned} \|g(y) - g(x)\| &\leqslant \|g(y) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - g(x)\| \\ &\leqslant 2 \cdot \|g - f_n\|_\infty + \|f_n(y) - f_n(x)\| \ . \end{aligned} \tag{15.6}$$

En vu de ce calcul, on démontre la continuité de g en x comme suit. On prend $\varepsilon > 0$ arbitraire et on invoque la définition de limite qui nous donne $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N : \|g - f_n\|_\infty < \tfrac{1}{3}\,\varepsilon \ .$$

Étant donné que f_N est continue en x, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in B_\delta(x) : \|f_N(y) - f_N(x)\| < \tfrac{1}{3}\,\varepsilon \ .$$

Avec la majoration (15.6) il s'ensuit qu'on a

$$\forall y \in B_\delta(x) : \|g(y) - g(x)\| \leqslant 2 \cdot \|g - f_N\|_\infty + \|f_N(y) - f_N(x)\| < \varepsilon \ ,$$

c'est-à-dire que g est continue en x. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.42]. Soit $f : X \to F$ une application continue. X étant compact, l'image $f(X)$ est aussi compact, donc bornée. Il s'ensuit que f est bornée, ce qui montre l'inclusion $C^0(X;F) \subset C_b^0(X;F)$. L'autre inclusion étant évidente, on a donc égalité. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.43]. C'est une conséquence directe de [1.37] et du fait que $\mathbf{R}$ est complet. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.44]. Selon [1.12] la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ est donnée par

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \ .$$

Et selon [1.17], la norme associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ est donnée par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i \cdot x_i} \ ,$$

ce qui est la même chose. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.45]. • Il est évident que si $x \in \ell^p$, alors $\lambda x \in \ell^p$ pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$. Soit donc $x, y \in \ell^p$. L'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbf{R}^n$ montrée dans [1.12] nous donne

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |x(i)+y(i)|^p &\leqslant \Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} |x(i)|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y(i)|^p\Big)^{1/p}\Big)^p \\ &\leqslant \Big(\Big(\sum_{i\in\mathbf{N}} |x(i)|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i\in\mathbf{N}} |y(i)|^p\Big)^{1/p}\Big)^p \ .\end{aligned} \tag{15.7}$$

Les sommes partielles étant majorées, il s'ensuit qu'on a bien $x+y \in \ell^p$, ce termine la preuve que ℓ^p est un espace vectoriel.

• Il est immédiat que l'application $\|\cdot\|_p$ vérifie les propriétés

$$\|x\|_p \geqslant 0 \quad , \quad x \neq 0 \ \Rightarrow \ \|x\|_p \neq 0 \quad \text{et} \quad \|\lambda x\|_p = |\lambda|\cdot\|x\|_p \ .$$

D'autre part, la majoration (15.7) montre qu'on a bien l'inégalité triangulaire, ce qui montre que $\|\cdot\|_p$ est une norme.

• Il nous reste donc à montrer que ℓ^p est complet. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans ℓ^p, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n,m \geqslant N \quad : \quad \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon \ .$$

Parce que pour $i \in \mathbf{N}$ on a l'inégalité

$$\begin{aligned}|x_n(i) - x_m(i)| &= (\,|x_n(i)-x_m(i)|^p)^{1/p} \\ &\leqslant \Big(\sum_{j\in\mathbf{N}} |x_n(j)-x_m(j)|^p\Big)^{1/p} = \|x_n - x_m\|_p \ ,\end{aligned}$$

chaque suite $(x_n(i)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{K}$. Et parce que $\mathbf{K}$ est complet, il existe $y(i) \in \mathbf{K}$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n(i) = y(i)$. Le but est maintenant de montrer qu'on a $y \in \ell^p$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\|_p = 0$. Pour cela on prend $\varepsilon > 0$ arbitraire. Parce que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n,m \geqslant N \quad : \quad \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon \ .$$

Pour $M \in \mathbf{N}$ arbitraire on a donc :

$$\sum_{i=0}^{M} |x_n(i)-x_m(i)|^p \leqslant (\,\|x_n - x_m\|_p)^p < \varepsilon^p \ .$$

En prenant la limite $m \to \infty$ on en déduit l'inégalité

$$\sum_{i=0}^{M} |x_n(i)-y(i)|^p \leqslant \varepsilon^p \ ,$$

et donc aussi (car la majoration est indépendant de M)

$$\sum_{i\in\mathbf{N}} |x_n(i)-y(i)|^p \leqslant \varepsilon^p \ . \tag{15.8}$$

Ainsi on a montré que l'application $x_n - y : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ appartient à ℓ^p. Étant donné qu'on a montré que ℓ^p est un espace vectoriel, il s'ensuit que $y = x_n - (x_n - y)$ appartient aussi à ℓ^p. Mais quand on sait cela, on constate que le choix de $N \in \mathbf{N}$ et (15.8) nous donnent la propriété

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n \geqslant N \quad : \quad \|x_n - y\|_p \leqslant \varepsilon \ .$$

Et cela, c'est (une variante de) la définition de $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\|_p = 0$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.46]. Pour $x \in \ell^p$ on a $\sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^p < \infty$. Si x est la suite constante nulle, alors $x \in \ell^q$ pour tout $1 \leqslant q \leqslant \infty$ et on a $\|x\|_q = 0$, donc aussi $\lim_{q\to\infty} \|x\|_q = \|x\|_\infty$. Dans la suite on suppose donc qu'on a $x \neq 0$, ce qui implique qu'il existe $M \in \mathbf{N}$ tel que $x_M \neq 0$. Maintenant on prend $0 < \varepsilon < \max(1, |x_M|^p)$ arbitraire. Par définition de la convergence de la série, il existe $N_o \in \mathbf{N}$ tel que

$$\sum_{n>N_o} |x_n|^p < \varepsilon \leqslant |x_M|^p \quad .$$

Il s'ensuit qu'on a $|x_n| < |x_M|$ pour tout $n > N_o$ (ce qui implique $M \leqslant N_o$) et donc :

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n| = \max_{n=0,\dots,N_o} |x_n| \in \mathbf{R} \quad ,$$

ce qui montre qu'on a $x \in \ell^\infty$. Autrement dit, on a l'inclusion $\ell^p \subset \ell^\infty$.

Soit maintenant $p < q < \infty$. Pour alléger la notation on introduit $\alpha > 0$ comme

$$\alpha = \|x\|_\infty = \max_{n\leqslant N_o} |x_n| \quad ,$$

ce qui nous donne

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad : \quad \left(\frac{|x_n|}{\alpha}\right)^q \leqslant \left(\frac{|x_n|}{\alpha}\right)^p \leqslant 1$$

On en déduit (en utilisant $t \geqslant 1$ et $q > p \Rightarrow t^{q/p} \geqslant t$)

$$1 = \frac{\max_{n\leqslant N_o} |x_n|^q}{\alpha^q} \leqslant \sum_{n\in\mathbf{N}} \left(\frac{|x_n|}{\alpha}\right)^q \leqslant \sum_{n\in\mathbf{N}} \left(\frac{|x_n|}{\alpha}\right)^p \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} \left(\frac{|x_n|}{\alpha}\right)^p\right)^{q/p} \quad .$$

Parce que à droite c'est fini, il s'ensuit qu'on a

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \left(\frac{|x_n|}{\alpha}\right)^q < \infty \qquad \text{et donc} \qquad \sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^q < \infty \quad ,$$

c'est-à-dire $x \in \ell^q$. Ensuite, en prenant la puissance $1/q$ et en multipliant après par $\alpha = \|x\|_\infty$, on obtient :

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_q \leqslant (\,\|x\|_\infty)^{1-p/q} \cdot (\,\|x\|_p)^{p/q} \leqslant \|x\|_p \quad .$$

Ainsi on a montré $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$ pour tout $p < q \leqslant \infty$. Mais si on remarque que pour tout $t > 0$ on a $\lim\limits_{q\to\infty} t^{p/q} = 1$, on déduit de l'encadrement

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_q \leqslant \|x\|_\infty \cdot \left(\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty}\right)^{p/q} \quad ,$$

qu'on doit avoir $\lim\limits_{q\to\infty} \|x\|_q = \|x\|_\infty$.

• Pour montrer que l'inclusions est stricte, on commence avec la remarque que la suite constante $x_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, qui appartient à ℓ^∞, n'appartient pas à ℓ^p, ce qui montre qu'on a $\ell^p \neq \ell^\infty$. Pour $1 \leqslant p < q < \infty$ on considère la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$x_n = (n+1)^{-1/p} \quad .$$

La série $\sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^p = \sum_{n\in\mathbf{N}} (n+1)^{-1}$ est une série divergente, donc $x \notin \ell^p$. Par contre, la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^q = \sum_{n\in\mathbf{N}} (n+1)^{-q/p}$ est convergente pour $q > p$ (par exemple par comparaison avec une intégrale), donc $x \in \ell^q$, ce qui montre qu'on a bien $\ell^p \neq \ell^q$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [1.47]. Pour montrer que la série est absolument convergente, on fait le calcul

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} |x_i\, y_i| &= \sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{1}{4} \cdot |(x_i+y_i)^2 - (x_i-y_i)^2| \\ &\leqslant \tfrac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty}(x_i+y_i)^2 + \tfrac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty}(x_i-y_i)^2 \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot \big((\,\|x+y\|_2)^2 + (\,\|x-y\|_2)^2 \,\big) < \infty \quad .\end{aligned}$$

Une fois qu'on sait que cette série est absolument convergente, on sait que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie. Il est alors (très) élémentaire de montrer qu'elle est bilinéaire et symétrique. En plus on a $\langle x, x\rangle = \sum_{i=0}^{\infty}(x_i)^2 = \|x\|_2^2 \geqslant 0$ et donc (parce que $\|\cdot\|_2$ est une norme) aussi l'implication $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$. C'est donc bien un produit scalaire sur ℓ^2 qui induit la norme $\|\cdot\|_2$. $\boxed{CQFD}$

Les preuves de §2

Preuve de [2.3]. L'équivalence des normes nous donne en particulier deux constantes strictement positives C_E et C_F telles que

$$\forall x \in E : N_E(x) \leqslant C_E N_E'(x) \qquad \text{et} \qquad \forall y \in F : N_F'(y) \leqslant C_F N_F(y) \quad .$$

Il s'ensuit qu'on a l'encadrement

$$0 \leqslant \frac{N_F'\big(f(a+h) - f(a) - Ah\big)}{N_E'(h)} \leqslant C_E \cdot C_F \cdot \frac{N_F\big(f(a+h) - f(a) - Ah\big)}{N_E(h)} \quad .$$

Le résultat en découle immédiatement. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [2.4]. Pour $h \in E^*$ et $t \in \mathbf{R}^*$ on a l'encadrement

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{\|Ah - Bh\|}{\|h\|} &= \frac{\|A(th) - B(th)\|}{\|th\|} \\ &\leqslant \frac{\|A(th) - f(a+th) + f(a)\|}{\|th\|} + \frac{\|f(a+th) - f(a) - B(th)\|}{\|th\|} \quad . \end{aligned}$$

En prenant la limite $t \to 0$, le membre de droite tend vers 0 par hypothèse (et composée de limites). Mais $\|Ah - Bh\|/\|h\|$ ne dépend pas de t. Il s'ensuit qu'on doit avoir $\|Ah - Bh\|/\|h\| = 0$, c'est-à-dire qu'on a $Ah = Bh$ pour tout $h \in E^*$. Mais ceci est aussi (et automatiquement) vrai pour $h = 0 \in E$, donc $A = B$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [2.6]. f est dérivable en a si (et seulement si) il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \quad .$$

En utilisant l'équivalence

$$\lim_{h \to 0} g(h) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{h \to 0} \|g(h)\| = 0 \quad ,$$

on montre facilement que notre "égalité" est équivalente à l'égalité

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \ell\, h\|}{|h|} = 0 \quad , \tag{15.9}$$

et donc que f est dérivable en a s'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ vérifiant (15.9).

D'autre part, f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbf{R} \to F$ vérifiant

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{|h|} = 0 \quad .$$

Si on compare ces deux conditions, on voit qu'on a l'équivalence

$$f \text{ dérivable en } a \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ différentiable en } a \quad ,$$

à condition que le lien entre ℓ et L soit donné par

$$L(h) = L(1) \cdot h = \ell \cdot h \qquad \text{ou} \qquad \ell = L(1) \quad .$$

Il suffit maintenant de remplacer $\ell = f'(a)$ et $L = (Df)(a)$ pour obtenir les résultats annoncés. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [2.8]. Il est immédiat que l'application nulle vérifie la condition pour être la différentielle de f :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - 0\cdot h\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|0\|}{\|h\|} = 0 \quad .$$

De plus, l'application constante nulle est continue, donc f est de classe C^1.

$\boxed{CQFD}$

Preuve de [2.9]. On vérifie la définition de la différentielle par le calcul direct :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|A(x+h) - A(x) - A(h)\|}{\|h\|} \overset{\text{lin. de } A}{=} \lim_{h\to 0} \frac{0}{\|h\|} = 0 \quad .$$

On a donc, pour tout $x \in E$, l'égalité $(DA)(x) = A$, c'est-à-dire, $DA : E \to \mathcal{L}(E;F)$ est bien l'application constante A. Étant donné que toute application constante est continue, A est donc de classe C^1. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [2.10]. On a l'équivalence

$$f \text{ continue en } a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{h\to 0} \|f(a+h) - f(a)\| = 0 \quad .$$

D'autre part, le fait que f est différentiable en a veut dire qu'il existe $A \in \mathcal{L}(E;F)$ tel que

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0 \quad .$$

On peut donc faire le calcul

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leqslant \quad \|f(a+h) - f(a)\| \ \leqslant\ \|f(a+h) - f(a) - Ah\| + \|Ah\| \\ &\overset{[1.26]}{\leqslant} \quad \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} \cdot \|h\| + \|A\| \cdot \|h\| \quad . \end{aligned}$$

Étant donné que le membre de droite admet une limite $0 \cdot 0 + \|A\| \cdot 0 = 0$ quand $h \to 0$, il s'ensuit qu'on doit avoir $\lim\limits_{h\to 0} \|f(a+h) - f(a)\| = 0$, c'est-à-dire que f est continue en a. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [2.11]. Il est immédiat que $(Df)(a)+(Dg)(a)$ est une application linéaire continue. Il suffit donc de vérifier qu'elle est la différentielle de $f+g$ en a. Pour cela on commence avec l'encadrement

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \frac{\big\|(f+g)(a+h) - (f+g)(a) - \big((Df)(a) + (Dg)(a)\big)(h)\big\|}{\|h\|} \\ &= \frac{\big\|f(a+h) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(h) + g(a+h) - g(a) - \big((Dg)(a)\big)(h)\big\|}{\|h\|} \\ &\leqslant \frac{\big\|f(a+h) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(h)\big\|}{\|h\|} + \frac{\big\|g(a+h) - g(a) - \big((Dg)(a)\big)(h)\big\|}{\|h\|} \quad . \end{aligned}$$

Par hypothèse le membre de droite tend vers 0 dans la limite $h \to 0$ et donc par le théorème des gendarmes $(Df)(a) + (Dg)(a)$ est bien la différentielle de $f + g$ en a.
$\boxed{CQFD}$

Preuve de [2.12]. Si on définit l'application $A : E \to F$ par

$$A(v) = g(a) \cdot \big((Df)(a)\big)(v) + \big((Dg)(a)\big)(v) \cdot f(a) \quad ,$$

alors il faut montrer trois choses : que A est linéaire, continue et qu'elle vérifie la condition d'être la différentielle de $g \cdot f$ en a. La linéarité étant quasi-immédiate, on fait, pour la continuité, le calcul

$$\begin{aligned} \|A(v)\| &\leqslant |g(a)| \cdot \|\big((Df)(a)\big)(v)\| + |\big((Dg)(a)\big)(v)| \cdot \|f(a)\| \\ \scriptstyle (Df)(a) \text{ et } (Dg)(a) \text{ continue} \quad &\leqslant |g(a)| \cdot \|(Df)(a)\| \cdot \|v\| + \|(Dg)(a)\| \cdot \|v\|| \cdot \|f(a)\| \\ &= \big(\, |g(a)| \cdot \|(Df)(a)\| + \|(Dg)(a)\|| \cdot \|f(a)\| \,\big) \cdot \|v\| \quad . \end{aligned}$$

Avec [1.9] on en déduit que A est bien continue.

Pour montrer que A vérifie la condition d'être la différentielle de $g \cdot f$ en a, on fait les majorations

$$\begin{aligned} &\frac{\big\|g(a+h) \cdot f(a+h) - g(a) \cdot f(a) - A(h)\big\|}{\|h\|} \\ &\qquad \leqslant \frac{\big\|g(a+h) \cdot \big(f(a+h) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(h)\big)\big\|}{\|h\|} \\ &\qquad\qquad + \frac{\big\|\big(g(a+h) - g(a)\big) \cdot \big((Df)(a)\big)(h)\big\|}{\|h\|} \\ &\qquad\qquad\qquad + \frac{\big\|\big(g(a+h) - g(a) - \big((Dg)(a)\big)(h)\big) \cdot f(a)\big\|}{\|h\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leqslant |g(a+h)| \cdot \frac{\big\|f(a+h) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(h)\big\|}{\|h\|} \\ &\qquad + \frac{|g(a+h) - g(a)| \cdot \|(Df)(a)\| \cdot \|h\|}{\|h\|} \\ &\qquad\qquad + \frac{\big|g(a+h) - g(a) - \big((Dg)(a)\big)(h)\big|}{\|h\|} \cdot \|f(a)\| \quad . \end{aligned} \tag{15.10}$$

Si g est différentiable en a, elle est continue en a [2.10], donc on a en particulier

$$\lim_{h \to 0} |g(a+h)| = |g(a)| \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} |g(a+h) - g(a)| = 0 \quad .$$

Il s'ensuit que les trois termes dans la majoration (15.10) ont une limite 0 quand h tend vers $0 \in E$. Et donc A est bien la différentielle de $g \cdot f$ en a. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [2.14]. Pour montrer qu'on a bien
$$\lim_{h\to 0} \frac{\Big\| (g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) - \big((Dg)(b)\big)\Big(\big((Df)(a)\big)(h)\Big)\Big\|}{\|h\|} = 0 \ ,$$
on introduit le vecteur $v = f(a+h) - b$ et on fait les majorations suivantes :
$$\begin{aligned}
&\frac{\Big\| (g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) - \big((Dg)(b)\big)\Big(\big((Df)(a)\big)(h)\Big)\Big\|}{\|h\|} \\
&\qquad \equiv \frac{\Big\| g(b+v) - g(b) - \big((Dg)(b)\big)\Big(\big((Df)(a)\big)(h)\Big)\Big\|}{\|h\|} \\
&\qquad \leqslant \frac{\big\|g(b+v) - g(b) - \big((Dg)(b)\big)(v)\big\|}{\|h\|} \\
&\qquad\qquad + \frac{\Big\| (Dg)(b)v - \big((Dg)(b)\big)\Big(\big((Df)(a)\big)(h)\Big)\Big\|}{\|h\|}
\end{aligned}$$
$$\leqslant \frac{\big\|g(b+v) - g(b) - \big((Dg)(b)\big)(v)\big\|}{\|h\|} + \|(Dg)(b)\| \cdot \frac{\big\|v - \big((Df)(a)\big)(h)\big\|}{\|h\|} \ . \tag{15.11}$$
Le but est de montrer que chacun de ces deux termes tend vers 0 dans la limite $\|h\| \to 0$. Pour le deuxième c'est simple, car c'est la définition de l'hypothèse que f est différentiable en a (le facteur constant $\|(Dg)(b)\|$ ne change pas la conclusion).

Pour montrer que le premier terme tend aussi vers 0, on définit d'abord la fonction q par
$$q(v) = \begin{cases} \dfrac{\big\|g(b+v) - g(b) - \big((Dg)(b)\big)(v)\big\|}{\|v\|} & \text{si } v \neq 0 \\ 0 & \text{si } v = 0, \end{cases}$$
et on constate qu'on a, pour tout $h \neq 0$ (même si $v = 0$), l'égalité
$$\frac{\big\|g(b+v) - g(b) - \big((Dg)(b)\big)(v)\big\|}{\|h\|} = q(v) \cdot \frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|} \ .$$
Ensuite on constate qu'on a $\lim_{h\to 0} v \equiv \lim_{h\to 0}\big(f(a+h) - f(a)\big) = 0$ et donc par composée de limites et le fait que g est différentiable en b on a
$$\lim_{h\to 0} q(v) = 0 \ .$$
Pour terminer on majore :
$$\begin{aligned}
\frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|} &\leqslant \frac{\big\|f(a+h) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(h)\big\|}{\|h\|} + \frac{\big\|\big((Df)(a)\big)(h)\big\|}{\|h\|} \\
&\leqslant \frac{\big\|f(a+h) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(h)\big\|}{\|h\|} + \|(Df)(a)\| \ .
\end{aligned}$$
Par l'hypothèse de différentiabilité de f au point a le membre de droite tend vers $\|(Df)(a)\|$ dans la limite $h \to 0$. On a donc les majorations
$$\begin{aligned}
0 &\leqslant q(v) \cdot \frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|} \\
&\leqslant q(v) \cdot \left(\frac{\big\|f(a+h) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(h)\big\|}{\|h\|} + \|(Df)(a)\| \right) \ ,
\end{aligned}$$

où le membre de droite tend vers $0 \cdot \|(Df)(a)\| = 0$ dans la limite $h \to 0$. Par le théorème des gendarmes on en déduit qu'on a bien

$$\lim_{h\to 0} \quad q(v) \cdot \frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|} = 0 \quad ,$$

ce qui termine la preuve que le premier terme dans (15.11) tend aussi vers 0 dans la limite $h \to 0$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [2.16]. Si γ est dérivable/différentiable en t, alors $(D\gamma)(t)$ et $\gamma'(t)$ existent et on a l'égalité $\gamma'(t) = \big((D\gamma)(t)\big)(1)$ [2.6]. Mais si γ est différentiable en t et f en $a = \gamma(t)$, alors selon [2.14] g est différentiable en t avec

$$(Dg)(t) = \big((Df)\big(\gamma(t)\big)\,\big) \circ (D\gamma)(t) \quad .$$

Mais g est différentiable en t si et seulement si elle est dérivable en t, auquel cas on a l'égalité $g'(t) = \big((Dg)(t)\big)(1)$. On a donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= \big((Dg)(t)\big)(1) = \Big(\big((Df)\big(\gamma(t)\big)\,\big) \circ (D\gamma)(t)\Big)(1) \\ &= \big((Df)\big(\gamma(t)\big)\,\big)\Big(\big((D\gamma)(t)\big)(1)\Big) = \big((Df)\big(\gamma(t)\big)\,\big)\big(\gamma'(t)\big) \quad . \end{aligned}$$

$\boxed{CQFD}$

Les preuves de §3

Preuve de [3.3]. On définit l'application $\gamma : [0,1] \to E$ par

$$\gamma(t) = a + t(b-a)$$

et on définit la fonction $F : [0,1] \to \mathbf{R}$ par

$$F(t) = f\big(a + t(b-a)\big) - t\cdot\big(f(b) - f(a)\big) \equiv f\big(\gamma(t)\big) - t\cdot\big(f(b)-f(a)\big) \quad ,$$

ce qui est bien définie car $[a,b] \subset U$. Étant donné que f est continue sur le segment (fermé) $[a,b]$ et différentiable sur le segment (ouvert) $]a,b[$, et que γ est (au moins) de classe C^1, on peut appliquer [2.16] pour conclure que F est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et qu'on a, pour $0 < t < 1$, l'égalité

$$F'(t) = \Big((Df)\big(a + t(b-a)\big)\Big)(b-a) - f(b) + f(a) \in \mathbf{R} \quad . \tag{15.12}$$

En plus, on a l'égalité $F(0) = F(1) = f(a)$ (c'est la raison du terme linéaire qu'on a rajouté). On peut donc appliquer le théorème de Rolle et conclure qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $F'(\theta) = 0$. [1]

Théorème de Rolle. *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Preuve. L'intervalle $[a,b]$ étant fermé et borné, c'est-à-dire compact, la fonction f atteint ses bornes : il existe $c_m, c_M \in [a,b]$ tels que

$$\forall x \in [a,b] \quad : \quad f(c_m) \leqslant f(x) \leqslant f(c_M) \quad . \tag{15.13}$$

Il faut maintenant distinguer trois cas. Le premier est quand on a $f(c_m) = f(c_M)$, auquel cas la fonction f est constante, donc pour n'importe quel $c \in]a,b[$ on aura $f'(c) = 0$. Le deuxième cas est quand on a $f(c_m) < f(a) = f(b)$. Dans ce cas on aura $c_m \in]a,b[$ et en plus les inégalités

$$\forall x \in [a, c_m[\quad : \quad \frac{f(x) - f(c_m)}{x - c_m} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]c_m, b] \quad : \quad \frac{f(x)-f(c_m)}{x - c_m} \geqslant 0 \quad ,$$

simplement parce que le dénominateur change de signe, mais le numérateur est toujours positif à cause de (15.13). Mais f est dérivable en c_m, donc dérivable à gauche et à droite avec la même limite, et donc, par passage à la limite dans les inégalités ci-dessus on a

$$f'(c_m) = \lim_{\substack{x\to c_m\\ x<c_m}} \frac{f(x)-f(c_m)}{x-c_m} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f'(c_m) = \lim_{\substack{x\to c_m\\ x>c_m}} \frac{f(x)-f(c_m)}{x-c_m} \geqslant 0 \quad .$$

Il s'ensuit qu'on doit avoir $f'(c_m) = 0$. Et finalement le troisième cas est le cas $f(c_M) > f(a) = f(b)$. Dans ce cas on aura (comme dans le cas précédent) $c_M \in]a,b[$, ainsi que (de nouveau par (15.13)) les inégalités

$$\forall x \in [a, c_m[\quad : \quad \frac{f(x) - f(c_m)}{x - c_m} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]c_m, b] \quad : \quad \frac{f(x)-f(c_m)}{x - c_m} \leqslant 0 \quad .$$

Et de nouveau parce que f est dérivable à gauche et à droite en c_M on a les inégalités

$$f'(c_M) = \lim_{\substack{x\to c_M\\ x<c_M}} \frac{f(x)-f(c_M)}{x-c_M} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f'(c_M) = \lim_{\substack{x\to c_M\\ x>c_M}} \frac{f(x)-f(c_M)}{x-c_M} \leqslant 0 \quad ,$$

et donc $f'(c_M) = 0$. $\boxed{CQFD}$

Si, dans l'égalité $F'(\theta) = 0$, on substitue la formule (15.12) pour F', on obtient le résultat annoncé. $\boxed{CQFD}$

---

1. J'ai choisis d'utiliser le théorème de Rolle, plutôt que le théorème des accroissements classique. Ce dernier simplifie la preuve, car on n'aura pas besoin du terme linéaire qu'on a rajouté à la fonction F ; la définition $F(t) = f\big(\gamma(t)\big)$ aurait suffit. Le passage par le théorème de Rolle me permet de le rappeler, ainsi que sa preuve !

Preuve de [3.5]. On prend $\varepsilon > 0$ arbitraire et on définit l'ensemble $I_\varepsilon \subset [0,1]$ par

$$I_\varepsilon = \{\, t \in [0,1] \;\mid\; \|g(t) - g(0)\| \leqslant h(t) - h(0) + 2\,\varepsilon\, t + \varepsilon \,\} \ .$$

Le fait que g et h sont continues a deux conséquences qui sont importantes pour nous. D'abord que I_ε est un fermé. Ensuite on introduit (juste pour simplifier l'argument) la fonction continue $\Delta : [0,1] \to \mathbf{R}$ par

$$\Delta(t) = \|g(t) - g(0)\| - h(t) + h(0) - 2\,\varepsilon\, t$$

et on constate qu'on a $\Delta(0) = 0$. La définition de la continuité en 0 nous fournit alors $\delta_o > 0$ tel que (pour notre $\varepsilon > 0$ choisi)

$$\forall t \in [0, \delta_o[\quad : \quad -\varepsilon < \Delta(t) < \varepsilon \ .$$

Avec la définition de Δ, il s'ensuit qu'on a l'inclusion $[0, \delta_o[\;\subset I_\varepsilon$. On peut donc définir $t_o = \sup I_\varepsilon \in [\delta_o, 1]$ et, parce que I_ε est fermé, on a $t_o \in I_\varepsilon$.

Le lecteur curieux peut se demander pourquoi notre $\varepsilon > 0$ apparaît deux fois dans la définition de I_ε : une fois comme coefficient de t et une fois seul. Comme on a vu ci-dessus, l'apparition "seul" nous permet de conclure que $t_o > 0$. L'apparition comme coefficient de t nous permet ci-dessous d'utiliser la dérivée à droite pour déduire qu'on doit avoir $t_o = 1$. Pour mieux distinguer ces deux rôles, on aurait pu utiliser deux constantes arbitraires $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ et de remplacer $2\,\varepsilon\, t + \varepsilon$ par $\varepsilon_1\, t + \varepsilon_2$. Mais cela aurait alourdi inutilement les notations.

Supposons maintenant que $t_o < 1$ (et donc $t_o \in \,]0,1[$. Par définition de $g'_d(t_o)$ et $h'_d(t_o)$ il existe $\delta > 0$ (prendre le plus petit de deux !) tel que pour tout $t_o < t < t_o + \delta$:

$$\left\| \,\frac{g(t) - g(t_o)}{t - t_o} - g'_d(t_o)\, \right\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \,\frac{h(t) - h(t_o)}{t - t_o} - h'_d(t_o)\, \right| < \varepsilon \ .$$

On en déduit en particulier les inégalités

$$\left\| \,\frac{g(t) - g(t_o)}{t - t_o}\, \right\| < \|g'_d(t_o)\| + \varepsilon \overset{\text{hyp.}}{\leqslant} h'_d(t_o) + \varepsilon < \frac{h(t) - h(t_o)}{t - t_o} + 2\varepsilon \ . \tag{15.14}$$

Pour $t_o < t < t_o + \delta$ on peut donc faire le calcul :

$$\begin{aligned} \|g(t) - g(0)\| &\leqslant \|g(t) - g(t_o)\| + \|g(t_o) - g(0)\| \\ &= (t - t_o) \cdot \left\| \,\frac{g(t) - g(t_o)}{t - t_o}\, \right\| + \|g(t_o) - g(0)\| \\ &\overset{(15.14)}{<} (t - t_o) \cdot \Big(\frac{h(t) - h(t_o)}{t - t_o} + 2\varepsilon \Big) + \|g(t_o) - g(0)\| \\ &\overset{t_o \in I_\varepsilon}{\leqslant} h(t) - h(t_o) + 2\,\varepsilon\,(t - t_o) + h(t_o) - h(0) + 2\,\varepsilon\, t_o + \varepsilon \\ &= h(t) - h(0) + 2\,\varepsilon\, t + \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $t \in I_\varepsilon$ pour tout $t_o < t < t_o + \delta$, ce qui contredit la définition de t_o (qu'on a supposé inférieur à 1 !). On doit donc avoir $t_o = 1 \in I_\varepsilon$, ce qui veut dire qu'on a

$$\|g(1) - g(0)\| \leqslant h(1) - h(0) + 3\,\varepsilon \ .$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on doit avoir $\|g(1) - g(0)\| \leqslant h(1) - h(0)$.

$\boxed{CQFD}$

Preuve de [3.6]. Si $\kappa \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{x \in]a,b[} \|(Df)(x)\| = \infty$, alors l'inégalité à montrer est trivialement vraie. Dans la suite on peut donc supposer qu'on a $\kappa < \infty$. Maintenant

on commence avec la définition de l'application $\gamma : \mathbf{R} \to E$ par
$$\gamma(t) = a + t(b-a) \quad .$$
Cette application est dérivable avec $\gamma'(t) \equiv \big((D\gamma)(t)\big)(1) = b - a$ (voir [2.6] ou [2.7] pour l'utilisation du 1). Étant (donc) continue, l'ensemble $I = \gamma^{-1}(U) \subset \mathbf{R}$ est un ouvert qui contient, par l'hypothèse $[a,b] \subset U$, l'intervalle $[0,1]$. En plus, γ fournit une bijection entre $]0,1[$ et $]a,b[$. Ensuite on définit la fonction $g : I \to F$ par
$$g(t) = f\big(\gamma(t)\big) \equiv f\big(a + t(b-a)\big)$$
et on constate qu'elle est différentiable comme composée d'applications différentiables. La fonction g étant dérivable sur I, elle est certainement dérivable à droite sur $]0,1[\subset I$ avec $g'_d(t) = g'(t)$. Par [2.16] et [1.26] on a
$$\begin{aligned}\|g'(t)\| &= \Big\|\Big((Df)\big(a+t(b-a)\big)\Big)(b-a)\Big\| \leqslant \big\|(Df)\big(a+t(b-a)\big)\big\| \cdot \|b-a\| \\ &\leqslant \kappa \cdot \|b-a\| \quad .\end{aligned}$$
Si on définit la fonction $h : [0,1] \to \mathbf{R}$ par $h(t) = \kappa\, t \cdot \|b-a\|$, alors on aura l'inégalité $\|g'(t)\| \leqslant h'(t)$. On peut donc appliquer [3.5] pour obtenir
$$\begin{aligned}\|f(b) - f(a)\| &\equiv \|g(1) - g(0)\| \\ &\leqslant h(1) - h(0) \equiv \sup_{x \in]a,b[} \|(Df)(x)\| \cdot \|b-a\| \quad .\end{aligned}$$ $\boxed{CQFD}$

Preuve de [3.7]. Si f est constante, il est évident que $(Df)(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Pour le montrer rigoureusement on montre que l'application nulle vérifie la condition pour être la différentielle au point x :
$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - \mathbf{0}(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|0\|}{\|h\|} = 0 \quad .$$
On voit que l'application nulle (qui est bien une application linéaire continue) vérifie la condition, donc $(Df)(x) = 0$.

Pour montrer la réciproque, choisissons $a \in U$ arbitrairement et posons $c = f(a)$. Par définition l'ensemble $f^{-1}(c)$ n'est donc pas vide (car contenant a) et parce que f est continue, c'est fermé. Si on montre que c'est aussi ouvert, par connexité de U il s'ensuit qu'on doit avoir $f^{-1}(c) = U$, c'est-à-dire que f est constante c sur U.

Prenons donc $x \in f^{-1}(c)$ arbitraire. Parce que U est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(x) \subset U$. Pour tout $y \in B_\varepsilon(x)$ le segment $[x,y]$ est inclus dans $B_\varepsilon(x)$ et par hypothèse on a $\sup_{z\in U} \|(Df)(z)\| = 0$. Par l'inégalité des accroissements finis [3.6] on a donc
$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant 0 \cdot \|y - x\| = 0 \quad .$$
Autrement dit $f(y) = f(x) = c$ et donc $y \in f^{-1}(c)$, ce qui montre qu'on a l'inclusion $B_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(c)$. Ceci montre que $f^{-1}(c)$ est un ouvert et donc, par l'argument donné ci-dessus, f est constante c sur U. $\boxed{CQFD}$

Les preuves de §4

Preuve de [4.4]. • (i) : Par définition de la structure d'espace vectoriel sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ on a l'égalité

$$(v_1, \ldots, v_n) + \lambda \cdot (w_1, \ldots, w_n) = (v_1 + \lambda w_1, \ldots, v_n + \lambda w_n) \ .$$

Il s'ensuit qu'on a, pour $v, v' \in E_j$, l'égalité

$$\begin{aligned} \iota_j(v + \lambda v') &= (0, \ldots, 0, v + \lambda v', 0, \ldots, 0) \\ &= (0, \ldots, 0, v, 0, \ldots, 0) + \lambda(0, \ldots, 0, v', 0, \ldots, 0) \\ &= \iota_j(v) + \lambda \iota(w) \ , \end{aligned}$$

ce qui montre la linéarité de ι_j. De la même façon on a, pour $w_k, w_k' \in F_k$, l'égalité

$$\begin{aligned} \pi_i\big((w_1, \ldots, w_p) + \lambda \cdot (w_1', \ldots, w_p')\big) &= w_i + \lambda w_i' \\ &= \pi_i(w_1, \ldots, w_p) + \lambda \pi_i(w_1', \ldots, w_p') \ , \end{aligned}$$

ce qui montre la linéarité de π_i. Pour la continuité de ι_j, on remarque que, avec la norme $\| \cdot \|_p$ sur le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ [1.12], on a, pour tout $v_j \in E_j$, l'égalité

$$\|\iota_j(v_j)\|_p = \|v_j\| \ .$$

On en déduit (avec [1.9]) que ι_j est continue et qu'on a l'égalité $\|\iota_j\| = 1$ [1.21]. Pour la continuité de π_i on commence avec la remarque qu'on déduit directement de la définition des normes $\| \cdot \|_p$ sur $F_1 \times \cdots \times F_p$ qu'on a, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, les (in)égalités

$$\|(0, \ldots, 0, w_i, 0, \ldots, 0)\|_p = \|w_i\| \leqslant \|(w_1, \ldots, w_p)\|_p \ .$$

On en déduit qu'on a

$$\|\pi_i(w_1, \ldots, w_p)\| = \|w_i\| \leqslant \|(w_1, \ldots, w_p)\|_p \ , \tag{15.15}$$

ce qui montre (par [1.23]) que π_i est continue avec $\|\pi_i\| \leqslant 1$, mais aussi

$$\|\pi_i(0, \ldots, 0, w_i, 0, \ldots, 0)\| = \|w_i\| = \|(0, \ldots, 0, w_i, 0, \ldots, 0)\|_p \ ,$$

ce qui montre qu'on ne peut pas avoir $\|\pi_i\| < 1$.

• (ii) : L'application $A_{ij} = \pi_i \circ A \circ \iota_j$ étant une composée de trois applications linéaires est donc elle-même linéaire. Et si A est continue, les A_{ij} sont aussi continues comme composées d'applications continues.

• (iii) : Toujours par la définition de la structure d'espace vectoriel on a l'égalité

$$(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{j=1}^{n} (0, \ldots, 0, v_j, 0, \ldots, 0) = \sum_{j=1}^{n} \iota_j(v_j) \ .$$

Par linéarité on a donc :

$$A_i(v_1, \ldots, v_n) = (\pi_i \circ A)\Big(\sum_{j=1}^{n} \iota_j(v_j) \Big) = \sum_{j=1}^{n} (\pi_i \circ A)\big(\iota_j(v_j)\big) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(v_j) \ .$$

• Pour le résultat réciproque on commence avec la linéarité de l'application A définie par (4.6) :

$$\begin{aligned} &A\big((v_1, \ldots, v_n) + \lambda \cdot (v_1', \ldots, v_n')\big) \\ &\qquad = \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{1j}(v_j + \lambda v_j'), \ldots, \sum_{j=1}^{n} A_{pj}(v_j + \lambda v_j') \Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{1j}(v_j) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{1j}(v'_j), \dots, \sum_{j=1}^{n} A_{pj}(v_j) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{pj}(v'_j) \Big) \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{1j}(v_j), \dots, \sum_{j=1}^{n} A_{pj}(v_j) \Big) \\
&\qquad\qquad + \lambda \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{1j}(v'_j), \dots, \sum_{j=1}^{n} A_{pj}(v'_j) \Big) \\
&= A(v_1, \dots, v_n) + \lambda \cdot A(v'_1, \dots, v'_n) \quad .
\end{aligned}
$$

Les majorations

$$
\begin{aligned}
\|A(v_1, \dots, v_n)\|_\infty &= \Big\| \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{1j}(v_j), \dots, \sum_{j=1}^{n} A_{pj}(v_j) \Big) \Big\|_\infty \\
&= \max_{i=1,\dots,p} \Big\| \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(v_j) \Big\| \leqslant \max_{i=1,\dots,p} \sum_{j=1}^{n} \|A_{ij}\| \cdot \|v_j\| \\
&\overset{(15.15)}{\leqslant} \Big(\max_{i=1,\dots,p} \sum_{j=1}^{n} \|A_{ij}\| \Big) \cdot \|(v_1, \dots, v_n)\|_\infty
\end{aligned}
$$

montrent, à l'aide de [1.9], la continuité de A dans le cas où tous les A_{ij} sont continues. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [4.16]. Si on note $\iota_k^E : E_k \to E_1 \times \cdots \times E_n$ et $\iota_j^F : F_j \to F_1 \times \cdots \times F_p$ les injections canoniques [4.1] et si on note $\pi_j : F_1 \times \cdots \times F_p \to F_j$ et $\pi_i^G : G_1 \times \cdots \times G_q \to G_i$ les projections canoniques [4.1], alors on a les égalités

$$
A_{jk} = \pi_j^F \circ A \circ \iota_k^E \quad , \quad B_{ij} = \pi_i^G \circ B \circ \iota_j^F \quad , \quad (B \circ A)_{ik} = \pi_i^G \circ (B \circ A) \circ \iota_k^E \quad .
$$

D'autre part, les composées $\iota_j^F \circ \pi_j^F$ sont toutes des applications de $F_1 \times \cdots \times F_p$ vers lui-même. On peut donc parler de l'application $\sum_{j=1}^{p} \iota_j^F \circ \pi_j^F$ et on constate qu'on a :

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=1}^{p} \iota_j^F \circ \pi_j^F \Big)(v_1, \dots, v_p) &= \sum_{j=1}^{p} \iota_j^F \big(\pi_j^F (v_1, \dots, v_p) \big) = \sum_{j=1}^{p} \iota_j^F (v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{p} (0, \dots, 0, v_j, 0, \dots, 0) = (v_1, \dots, v_p) \quad .
\end{aligned}
$$

On vient donc de montrer l'égalité $\sum_{j=1}^{p} \iota_j^F \circ \pi_j^F = id$. Il suffit maintenant de faire le calcul

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} B_{ij} \circ A_{jk} &= \sum_{j=1}^{p} \pi_i^G \circ B \circ \iota_j^F \circ \pi_j^F \circ A \circ \iota_k^E = \pi_i^G \circ B \circ \Big(\sum_{j=1}^{p} \iota_j^F \circ \pi_j^F \Big) \circ A \circ \iota_k^E \\
&= \pi_i^G \circ B \circ id \circ A \circ \iota_k^E = \pi_i^G \circ (B \circ A) \circ \iota_k^E = (B \circ A)_{ik} \quad .
\end{aligned}
$$

$\boxed{CQFD}$

Preuve de [4.18]. Selon [4.4] avec $n = 1$ ou par une vérification directe on conclut que $\mathcal{J}$ est une bijection linéaire. Reste à montrer qu'on a l'égalité $\|\mathcal{J}(A_1, \ldots, A_p)\| = \|(A_1, \ldots, A_p)\|_\infty$. On calcule donc :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{J}(A_1, \ldots, A_p)\| &= \sup_{v \in E^*} \frac{\big\|\big(\mathcal{J}(A_1, \ldots, A_p)\big)(v)\big\|_\infty}{\|v\|} \\
&= \sup_{v \in E^*} \frac{\big\|\big(A_1(v), \ldots, A_p(v)\big)\big\|_\infty}{\|v\|} = \sup_{v \in E^*} \max_{i=1,\ldots,p} \frac{\|A_i(v)\|}{\|v\|} \\
&= \max_{i=1,\ldots,p} \|A_i\| = \|(A_1, \ldots, A_p)\|_\infty \quad .
\end{aligned}$$

$\boxed{CQFD}$

Preuve de [4.19]. Selon [4.4] avec $p = 1$, l'application $\mathcal{F}$ est une bijection. De plus, il est immédiat que $\mathcal{F}$ est linéaire. Reste donc à montrer qu'elle est continue et que sa réciproque est aussi continue. Pour la continuité de $\mathcal{F}$ on fait le calcul :

$$\begin{aligned}
\big\|\big(\mathcal{F}(A_1, \ldots, A_n)\big)(v_1, \ldots, v_n)\big\| &= \Big\| \sum_{j=1}^n A_j(v_j) \Big\| \leqslant \sum_{j=1}^n \|A_j(v_j)\| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^n \|A_j\| \cdot \|v_j\| \leqslant \sum_{j=1}^n \max_j \|A_j\| \cdot \max_j \|v_j\| \\
&= n \cdot \|(A_1, \ldots, A_n)\|_\infty \cdot \|(v_1, \ldots, v_n)\|_\infty \quad .
\end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'on a l'inégalité $\|\mathcal{F}(A_1, \ldots, A_n)\| \leqslant n \cdot \|(A_1, \ldots, A_n)\|_\infty$, montrant que $\mathcal{F}$ est continue avec $\|\mathcal{F}\| \leqslant n$.

Mais on peut aussi faire le calcul

$$\begin{aligned}
\|A_j(v_j)\| &= \big\|\big(\mathcal{F}(A_1, \ldots, A_n)\big)(\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1 \text{ fois}}, v_j, 0, \ldots, 0)\big\| \\
&\leqslant \|\mathcal{F}(A_1, \ldots, A_n)\| \cdot \|(\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1 \text{ fois}}, v_j, 0, \ldots, 0)\|_\infty \\
&= \|\mathcal{F}(A_1, \ldots, A_n)\| \cdot \|v_j\| \quad ,
\end{aligned}$$

montrant qu'on a l'inégalité $\|A_j\| \leqslant \|\mathcal{F}(A_1, \ldots, A_n)\|$ et donc

$$\|(A_1, \ldots, A_n)\|_\infty \equiv \max_j \|A_j\| \leqslant \|\mathcal{F}(A_1, \ldots, A_n)\| \quad .$$

En écrivant $B = \mathcal{F}(A_1, \ldots, A_n)$, ceci devient l'inégalité $\|\mathcal{F}^{-1}(B)\|_\infty \leqslant \|B\|$, montrant que $\mathcal{F}^{-1}$ est continue avec $\|\mathcal{F}^{-1}\| \leqslant 1$. $\boxed{CQFD}$

Les preuves de §5

Preuve de [5.2]. Il est évident que le résultat est vrai dans le cas $v = 0$. Dans la suite on suppose donc qu'on a $v \neq 0$. On définit l'application $g : \mathbf{R} \to E$ par $g(t) = tv$ et on constate que pour $t \neq 0$ on a $g(t) \neq 0$, mais $\lim_{t\to 0} g(t) = 0$. Si on définit la fonction $\Delta : E^* \to \mathbf{R}$ par

$$\Delta(h) = \frac{\big\| f(a+h) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(h)\big\|}{\|h\|}$$

alors le fait que f est différentiable en a se traduit en $\lim_{h\to 0} \Delta(h) = 0$. Par composée de limites on a donc $\lim_{t\to 0} \Delta\big(g(t)\big) = 0$.

Si on regarde très attentivement, on constate que Δ n'est pas défini sur E^* entier, mais seulement dans un voisinage ouvert de 0. Plus précisément, U étant un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_r(a) \subset U$ et donc Δ sera défini (au moins) sur $B_r(0)$. Ensuite, pour que la composée $\Delta \circ g$ existe, il faut restreindre g à l'intervalle $|t| < r/\|v\|$. Mais tout cela n'a pas d'influence sur la conclusion qu'on a $\lim_{t\to 0} \Delta\big(g(t)\big) = 0$.

Si on substitue les définitions de g et Δ on a donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{\big\| f(a+tv) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(tv)\big\|}{\|tv\|} = 0 \quad . \tag{15.16}$$

Quelques petites manipulations nous donne l'égalité

$$\frac{\big\| f(a+tv) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(tv)\big\|}{\|tv\|} = \frac{\big\| f(a+tv) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(tv)\big\|}{|t| \cdot \|v\|}$$

$$= \frac{1}{\|v\|} \cdot \left\| \frac{f(a+tv) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(tv)}{t} \right\|$$

Si on multiplie (15.16) par $\|v\| \neq 0$ on obtient donc

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} - \big((Df)(a)\big)(v) \right\| = 0 \quad ,$$

ce qui est équivalent à $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \big((Df)(a)\big)(v)$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [5.4]. L'argument principal de la preuve est l'unicité de la différentielle. On utilise la partie gauche ou droite de l'égalité donnée pour "deviner" la différentielle recherchée et ensuite on montre que cette application linéaire continue vérifie bien la condition pour être la différentielle.

Si $(Df)(a)$ existe, alors selon [4.4.ii] il existe $A_j \in \mathcal{L}(E; F_j)$ telles qu'on a pour $v \in E$

$$\big((Df)(a)\big)(v) = \big(A_1(v), \ldots, A_p(v)\big) \quad .$$

ce qui s'écrit (avec [4.18]) comme $(Df)(a) = \mathcal{J}(A_1, \ldots, A_p)$. La définition de la différentiabilité et de la norme sur $F_1 \times \cdots \times F_p$ nous donne alors

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} & \frac{\|f_j(a+h) - f_j(a) - A_j(h)\|}{\|h\|} \\ & \leqslant \lim_{h\to 0} \frac{\max_j \|f_j(a+h) - f_j(a) - A_j(h)\|}{\|h\|} \\ & = \lim_{h\to 0} \frac{\big\| f(a+h) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(h)\big\|_\infty}{\|h\|} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que f_j est différentiable en a avec $(Df_j)(a) = A_j$.

D'autre part, si tous les f_j sont différentiables en a, alors selon [4.4] l'application $A : E \to F$ définie par

$$A(v) = \Big(\ \big((Df_1)(a)\big)(v), \ldots, \big((Df_1)(a)\big)(v)\ \Big)$$

appartient à $\mathcal{L}(E; F)$, ce qu'on peut écrire (de nouveau avec [4.18]) comme $A = \mathcal{J}\big((Df_1)(a), \ldots, (Df_p)(a)\big)$. Il s'ensuit qu'on a

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} & \frac{\|f(a+h) - f(a) - A(h)\|_\infty}{\|h\|} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\max_j \big\|f_j(a+h) - f_j(a) - \big((Df_j)(a)\big)(h)\big\|}{\|h\|} \\
&\leqslant \lim_{h\to 0} \frac{\sum_j \|f_j(a+h) - f_j(a) - A_j(h)\|}{\|h\|} = 0 \ ,
\end{aligned}$$

ce qui montre que f est différentiable en a avec $(Df)(a) = A$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [5.5]. L'argument un peu simpliste est de dire que (selon l'écriture courante) les composantes de Df sont les Df_i et d'invoquer le résultat classique qu'une application à valeurs dans un produit est continue si et seulement si les composantes sont continues. Quand on utilise l'isomorphisme $\mathcal{J}$, cet argument devient correct.

Si Df est continue, alors la composée $\mathcal{J}^{-1} \circ Df : U \to \prod_{i=1}^p \mathcal{L}(E; F_i)$ sera continue. Mais une telle application est continue si et seulement si ses composantes sont continues, c'est-à-dire, selon [5.4], si et seulement si les Df_i sont continues. Réciproquement, si les $D_i f : U \to \mathcal{L}(E; F_i)$ sont continues, alors l'application $g : U \to \prod_{i=1}^p \mathcal{L}(E; F_i)$ définie par $g(a) = \big((Df_1)(a), \ldots, (Df_p)(a)\big)$ sera continue. En composant avec $\mathcal{J}$ (une application linéaire continue) et en invoquant [5.4], il s'ensuit que Df est continue. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [5.7]. La différentielle partielle $(D_j f)(a)$ existe si et seulement si (par définition) l'application partielle $f_{a,j}$ est différentiable en a_j, ce qui est le cas si et seulement si (de nouveau par définition) il existe $A \in \mathcal{L}(E_j; F)$ tel que

$$\lim_{h\in E_j,\, h\to 0} \frac{\|f_{a,j}(a_j + h) - f_{a,j}(a_j) - A(h)\|}{\|h\|} = 0 \ .$$

Si on substitue la définition de l'application partielle $f_{a,j}$ on obtient

$$\lim_{h\in E_j,\, h\to 0} \frac{\|f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a) - A(h)\|}{\|h\|} = 0 \ .$$

Si c'est le cas, alors (toujours par défintion) A est la différentielle de $f_{a,j}$ au point a_j, ce qui est la différentielle partielle $(D_j f)(a)$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [5.8]. Si on substitue la définition de l'application partielle $f_{a,j}$ dans la définition de $(\partial_j f)(a)$ on obtient

$$\begin{aligned}(\partial_j f)(a) = f'_{a,j}(a_j) &= \lim_{h\in\mathbf{R},\, h\to 0} \frac{f_{a,j}(a_j+h) - f_{a,j}(a_j)}{h} \\ &= \lim_{h\in\mathbf{R},\, h\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+h,a_{j+1},\dots,a_n) - f(a)}{h} \quad ,\end{aligned}$$

ce qui montre l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Et si on remarque qu'on a l'égalité

$$(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+h,a_{j+1},\dots,a_n) = a + he_j \quad ,$$

alors il est immédiat que la dernière limite vaut aussi $(D_{e_j}f)(a)$ [5.1], montrant l'équivalence avec (iii), ainsi que les égalités entre ces trois résultats. L'équivalence entre (i) et (iv) est donnée par [2.6], ce qui nous donne en plus l'égalité

$$(\partial_j f)(a) \overset{\text{déf.}}{=} f'_{a,j}(a_j) \overset{[2.6]}{=} \big((Df_{a,j})(a_j)\big)(1) \overset{\text{déf.}}{=} \big((D_j f)(a)\big)(1) \quad . \qquad \boxed{CQFD}$$

Preuve de [5.9]. Comme pour la preuve de [5.4], l'argument principal de la preuve est l'unicité de la différentielle.

Si $(Df)(a)$ existe, alors selon [4.4.ii] les applications $A_j : E_j \to F$ définies par $A_j = (Df)(a)\circ\iota_j$ (avec ι_j l'injection canonique (4.3)) appartiennent à $\mathcal{L}(E_j;F)$. En plus, pour $h_j \in E_j$ on a l'égalité

$$\big((Df)(a)\big)(h_1,\dots,h_n) = \sum_{j=1}^n A_j(h_j) \quad . \tag{15.17}$$

La définition de $f_{a,j}$, la définition de la différentiabilité de f en a et la définition de de la norme sur E nous donne alors

$$\begin{aligned}&\lim_{h\in E_j,\, h\to 0} \frac{\|f_{a,j}(a_j+h) - f_{a,j}(a_j) - A_j(h)\|}{\|h\|} \\ &\qquad = \lim_{h\in E_j,\, h\to 0} \frac{\|f(a+\iota_j(h)) - f(a) - \big((Df)(a)\big)\big(\iota_j(h)\big)\|}{\|\iota_j(h)\|_\infty} = 0 \quad ,\end{aligned}$$

où la conclusion est une conséquence de la limite d'une composée (celle de la définition de la différentiabilité de f en a et l'application $h \mapsto \iota_j(h)$). Il s'ensuit que la différentielle partielle de f dans la direction de E_j au point a existe et vaut A_j. La définition de A_j et la définition de l'injection canonique ι_j nous donnent immédiatement la formule pour $\big((D_j f)(a)\big)(h)$. Les égalités sans h (vraie et courante) sont une transcription de l'égalité (15.17). $\boxed{CQFD}$

Preuve de [5.10]. Selon [5.4] on a l'égalité

$$\big((Df)(a)\big)(h) = \begin{pmatrix}\big((Df_1)(a)\big)(h) \\ \vdots \\ \big((Df_p)(a)\big)(h)\end{pmatrix} \quad ,$$

et selon [5.9] on a, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, l'égalité

$$\big((Df_i)(a)\big)(h) = \sum_{j=1}^{n} \big((D_j f_i)(a)\big)(h_j) \quad .$$

Substituer la deuxième égalité dans la première donne le résultat voulu. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [5.11]. On applique [5.2] et on calcule (avec $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$) :

$$\big((Df)(a)\big)(h) = \big((Df)(a)\big)\Big(\sum_{j=1}^{n} h_j \cdot e_j\Big) \overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{j=1}^{n} \big((Df)(a)\big)(e_j) \cdot h_j$$

$$\overset{[5.2]}{=} \sum_{j=1}^{n} (D_{e_j} f)(a) \cdot h_j \overset{[5.8]}{=} \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(a) \cdot h_j$$

Dans le cas $F = \mathbf{R}^p$ il y a deux façons d'obtenir le résultat. Si on applique le résultat précédent, on trouve

$$w = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(a) \cdot h_j \quad .$$

Et ensuite on applique le résultat classique que la i-ème composante d'une limite (la définition de $(\partial_j f)(a)$ comme limite [5.8]) est la limite de la i-ème composante pour obtenir

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f_i)(a) \cdot h_j \quad .$$

Ou bien on applique [5.10] avec tous les E_j et tous les F_i égaux à $\mathbf{R}$, ce qui nous donne une matrice d'applications $(D_j f_i)(a) \in \mathcal{L}(\mathbf{R};\mathbf{R})$. Dans [4.7] on a vu que la matrice des réels $a_{ij} = \big((D_j f_i)(a)\big)(1)$ est la matrice de l'application linéaire $(Df)(a)$ par rapport aux bases canoniques. D'autre part, selon [5.8] le nombre $a_{ij} = \big((D_j f_i)(a)\big)(1)$ n'est rien d'autre que $(\partial_j f_i)(a)$, la dérivée partielle de la composante f_i dans la j-ème direction. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [5.12]. • (i) : L'énoncé dit que l'application linéaire continue $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ définie par

$$A(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{j=1}^{n} \big((D_j f)(a)\big)(h_j)$$

est la différentielle de f au point a. On commence avec le cas $n = 2$ où il faut donc montrer qu'on a

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\|f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - A(h_1, h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|_\infty} = 0 \quad , \tag{15.18}$$

où on a utilisé la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur le produit $E_1 \times E_2$ conformément à notre convention [1.13] (ce qui nous donne en particulier l'égalité $B_r(a, b) = B_r(a) \times B_r(b)$). Pour cela on ajoute et on enlève des termes en créant trois termes auxquels on applique l'inégalité triangulaire :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-\sum_{j=1}^{2}\big((D_jf)(a_1,a_2)\big)(h_j)\|}{\|(h_1,h_2)\|_\infty}\\
&\qquad\leqslant \frac{\big\|f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)-\big((D_1f)(a_1,a_2+h_2)\big)(h_1)\big\|}{\|(h_1,h_2)\|_\infty}\\
&\qquad\quad+\frac{\big\|\big((D_1f)(a_1,a_2+h_2)\big)(h_1)-\big((D_1f)(a_1,a_2)\big)(h_1)\big\|}{\|(h_1,h_2)\|_\infty}\\
&\qquad\quad+\frac{\big\|f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-\big((D_2f)(a_1,a_2)\big)(h_2)\big\|}{\|(h_1,h_2)\|_\infty}\ .
\end{aligned}
\tag{15.19}
$$

Pour montrer que la limite dans (15.18) vaut bien 0, on montre que chacun des trois termes dans (15.19) tend vers 0 quand (h_1,h_2) tend vers $(0,0)$. Pour éviter une confusion entre trois "zéro" différents, on va noter dans le suite de cette preuve l'élément neutre dans $\mathbf{R}$ par 0, l'élément neutre dans E_1 par 0_1 et l'élément neutre dans E_2 par 0_2, de sorte qu'on fait tendre le couple (h_1,h_2) vers $(0_1,0_2)$.

Pour le troisième terme on remarque que la majoration $\|h_2\|\leqslant\|(h_1,h_2)\|_\infty$ nous donne l'inégalité

$$
\begin{aligned}
&\frac{\big\|f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-\big((D_2f)(a_1,a_2)\big)(h_2)\big\|}{\|(h_1,h_2)\|_\infty}\\
&\qquad=\frac{\big\|f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-\big((D_2f)(a_1,a_2)\big)(h_2)\big\|}{\|h_2\|}\cdot\frac{\|h_2\|}{\|(h_1,h_2)\|_\infty}\\
&\qquad\leqslant\frac{\big\|f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-\big((D_2f)(a_1,a_2)\big)(h_2)\big\|}{\|h_2\|}
\end{aligned}
\tag{15.20}
$$

et donc que la définition de la différentielle partielle nous donne immédiatement

$$
\lim_{(h_1,h_2)\to(0_1,0_2)}\frac{\big\|f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-\big((D_2f)(a_1,a_2)\big)(h_2)\big\|}{\|(h_1,h_2)\|_\infty}=0\ .
$$

Si on regarde de plus près, il y a un petit hic avec cet argument : dans la limite $(h_1,h_2)\to(0_1,0_2)$ il est bien possible qu'on a $(h_1,h_2)\neq(0_1,0_2)$ avec $h_2=0_2$. Le quotient dans la majoration (15.20) n'est donc pas défini, malgré la condition $(h_1,h_2)\neq(0_1,0_2)$. Le problème vient de notre majoration

$$
\|h_2\|\leqslant\max(\|h_1\|,\|h_2\|)\equiv\|(h_1,h_2)\|_\infty\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{1}{\|(h_1,h_2)\|_\infty}\leqslant\frac{1}{\|h_2\|}\ ,
$$

qui n'est valable que quand $h_2\neq 0_2$. Si on veut être (extrêmement) précis, on commence avec la remarque que U est un ouvert et qu'il existe donc $r>0$ tel que $B_r(a)\subset U$. Avec ce r on définit d'abord la fonction $q:B_r(0_2)\subset E_2\to\mathbf{R}$ par (attention : c'est bien le même r, mais on considère des boules dans différents espaces !)

$$
q(h_2)=\begin{cases}\dfrac{\big\|f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-\big((D_2f)(a_1,a_2)\big)(h_2)\big\|}{\|h_2\|} & \text{si } h_2\neq 0\\[2ex] 0 & \text{si } h_2=0_2,\end{cases}
$$

de sorte qu'on a bien $\lim_{h_2\to 0_2}q(h_2)=q(0_2)$. Ensuite on définit $p:E_1\times E_2\to E_2$ par $p(h_1,h_2)=h_2$. Et finalement on constate qu'on a toujours l'inégalité

$$
\frac{\big\|f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-\big((D_2f)(a_1,a_2)\big)(h_2)\big\|}{\|(h_1,h_2)\|_\infty}\leqslant q\big(p(h_1,h_2)\big)\ ,
$$

simplement parce que, dans le cas $(h_1,h_2)\neq(0_1,0_2)$ mais $h_2=0_2$, les deux côtés sont définis et égaux à 0. Pour terminer l'argument on observe qu'on a $\lim_{(h_1,h_2)\to(0_1,0_2)}p(h_1,h_2)=0$ et donc par composée de limites (et le théorème des gendarmes) on a bien

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0_1,0_2)} \frac{\big\|f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-\big((D_2f)(a_1,a_2)\big)(h_2)\big\|}{\|(h_1,h_2)\|_\infty} = 0 \ .$$

Pour le deuxième terme on invoque [1.26] et la majoration $\|h_1\| \leqslant \|(h_1,h_2)\|_\infty$ pour obtenir la majoration

$$\frac{\big\|\big((D_1f)(a_1,a_2+h_2)\big)(h_1)-\big((D_1f)(a_1,a_2)\big)(h_1)\big\|}{\|(h_1,h_2)\|_\infty} \leqslant \|(D_1f)(a_1,a_2+h_2)-(D_1f)(a_1,a_2)\| \ .$$

Il suffit d'invoquer la continuité de D_1f au point a pour pouvoir conclure qu'on a

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0_1,0_2)} \frac{\big\|\big((D_1f)(a_1,a_2+h_2)\big)(h_1)-\big((D_1f)(a_1,a_2)\big)(h_1)\big\|}{\|(h_1,h_2)\|_\infty} = 0 \ .$$

C'est le premier terme qui nécessite un petit peu plus d'attention. On commence avec la remarque que $V \subset U$ est un ouvert et donc qu'il existe $r > 0$ tel que $B_r(a) \subset V$. Avec ce r on fixe $h_2 \in B_r(0_2) \subset E_2$ et on définit la fonction $g : B_r(0_1) \subset E_1 \to \mathbf{R}$ par

$$g(h_1) = f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)-\big((D_1f)(a_1,a_2+h_2)\big)(h_1)$$

avec

$$(Dg)(h_1) = (D_1f)(a_1+h_1,a_2+h_2)-(D_1f)(a_1,a_2+h_2) \ .$$

La continuité de D_1f en a implique que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|(h_1,h_2)\|_\infty < \delta \quad\Longrightarrow\quad \|(D_1f)(a_1+h_1,a_2+h_2)-(D_1f)(a_1,a_2)\| < \varepsilon \ .$$

Il s'ensuit que pour tout $(h_1,h_2) \in B_\delta(0_1,0_2) = B_\delta(0_1)\times B_\delta(0_2) \subset E_1\times E_2$ on a

$$\begin{aligned}\|(Dg)(h_1)\| &= \|(D_1f)(a_1+h_1,a_2+h_2)-(D_1f)(a_1,a_2+h_2)\| \\ &\leqslant \|(D_1f)(a_1+h_1,a_2+h_2)-(D_1f)(a_1,a_2)\| \\ &\qquad + \|(D_1f)(a_1,a_2)-(D_1f)(a_1,a_2+h_2)\| < 2\varepsilon \ .\end{aligned}$$

Pour un $h_2 \in B_\delta(0_2) \subset E_2$ fixé, l'inégalité des accroissements finis [3.6] appliquée à la fonction g nous donne donc pour tout $h_1 \in B_\delta(0_1) \subset E_1$ la majoration

$$|g(h_1)| \equiv |g(h_1)-g(0_1)| \leqslant 2\varepsilon\,\|h_1-0_1\| \leqslant 2\varepsilon\,\|(h_1,h_2)\|_\infty \ .$$

Si on substitue la définition de la fonction g, on vient donc de montrer :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(h_1,h_2)\in B_\delta(0_1,0_2) \quad : \quad \frac{\big\|f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)-\big((D_1f)(a_1,a_2+h_2)\big)(h_1)\big\|}{\|(h_1,h_2)\|_\infty} \leqslant 2\varepsilon \ ,$$

ce qui montre que le premier terme aussi tend vers 0 quand (h_1,h_2) tend vers $(0_1,0_2)$. Ainsi on a montré le cas $n = 2$.

Le cas général se démontre de la même façon, sauf qu'il faut découper en $2n+1$ morceaux au lieu de trois. Par exemple pour $n = 3$ on fait le découpage

$$\begin{aligned}f(a_1+h_1,a_2+h_2,a_3+h_3)-f(a_1,a_2,a_3)-\sum_{j=1}^{3}\big((D_jf)(a)\big)(h_j) \\ = f(a_1+h_1,a_2+h_2,a_3+h_3)-f(a_1,a_2+h_2,a_3+h_3)\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
1^{\text{er}} \text{ terme} & \qquad - \big((D_1f)(a_1, a_2+h_2, a_3+h_3)\big)(h_1) \\
& \dotfill \\
2^{\text{ème}} \text{ terme} & + \big((D_1f)(a_1, a_2+h_2, a_3+h_3)\big)(h_1) - \big((D_1f)(a_1, a_2, a_3)\big)(h_1) \\
& \dotfill \\
3^{\text{ème}} \text{ terme} & \begin{array}{l} + f(a_1, a_2+h_2, a_3+h_3) - f(a_1, a_2, a_3+h_3) \\ \qquad - \big((D_2f)(a_1, a_2, a_3+h_3)\big)(h_2) \end{array} \\
& \dotfill \\
4^{\text{ème}} \text{ terme} & + \big((D_2f)(a_1, a_2, a_3+h_3)\big)(h_2) - \big((D_2f)(a_1, a_2, a_3)\big)(h_2) \\
& \dotfill \\
5^{\text{ème}} \text{ terme} & + f(a_1, a_2, a_3+h_3) - f(a_1, a_2, a_3) - \big((D_3f)(a_1, a_2, a_3)\big)(h_3)
\end{array}
$$

Les termes pairs tendent vers 0 par continuité des différentielles partielles au point a, et les termes impairs tendent vers 0 à l'aide (en plus) de l'inégalité des accroissements finis (sauf le dernier qui est une conséquence immédiate de la différentiabilité au point a).

• (ii) : f est de classe C^1 si et seulement si l'application $Df : U \to \mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_n; F)$ est continue. Donc si f est de classe C^1, alors selon [5.9] toutes les différentielles partielles existent et on a l'égalité

$$
\mathcal{J}^{-1}\big((Df)(a)\big) = \big(\, (Df_1)(a) \ (Df_2)(a) \ \ldots \ (Df_n)(a) \,\big) \ .
$$

Étant donné que $\mathcal{J}^{-1}$ est continue [4.19], il s'ensuit que les différentielles partielles D_if sont continues.

Réciproquement, si toutes les différentielles partielles existent sur U et y sont continues, alors par la première étape, f est différentiable en chaque point $a \in U$ et on a (comme avant, mais écrite autrement) l'égalité

$$
(Df)(a) = \mathcal{J}\big(\, (Df_1)(a) \ (Df_2)(a) \ \ldots \ (Df_n)(a) \,\big) \ .
$$

Étant donné que $\mathcal{J}$ est (aussi) continue [4.19], il s'ensuit que Df est continue sur U et donc que f est de classe C^1. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [5.14]. • (i) : Si $\partial_j f$ existe au point $x \in V$, alors selon [5.8] la différentielle partielle D_jf existe au point x et on a l'égalité

$$
(\partial_j f)(x) = \big((D_jf)(x)\big)(1) \ .
$$

Mais $(D_jf)(x)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbf{R}; F)$ et 1 est un vecteur de base de l'espace source $\mathbf{R}$. Selon [1.28] la continuité de $\partial_j f$ en a implique donc la continuité de D_jf en a. Par [5.12] l'application f est donc différentiable en a et il suffit d'invoquer [5.11] pour obtenir l'égalité annoncée.

• (ii) : Selon [5.12] f est de classe C^1 si et seulement si toutes les différentielles partielles D_jf existent sur U et y sont continues. Selon [5.8] D_jf existe si et seulement si $\partial_j f$ existe et en combinant [1.27] et [1.28] D_jf est continue si et seulement si $\partial_j f$ est continue. $\boxed{CQFD}$

Les preuves de §6

Preuve de [6.2]. La preuve se fait “en boucle” en montrant les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i). La première observation est que l’implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiate à cause de la définition de continuité sur un ensemble.

Pour l’implication (ii) $\Rightarrow$ (iii), on commence avec la définition de continuité de f en $(0,\dots,0)$ qui dit en particulier que pour $\varepsilon = 1$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} &\forall (v_1,\dots,v_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \quad : \\ &\qquad \|(v_1,\dots,v_n)\|_\infty < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(v_1,\dots,v_n)\| < 1 \ . \end{aligned} \tag{15.21}$$

Ensuite on constate que pour tout vecteur non-nul x on a

$$x = \frac{2\|x\|}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2\|x\|} \cdot x \qquad \text{et} \qquad \left\| \frac{\delta}{2\|x\|} \cdot x \right\| = \tfrac{1}{2}\delta < \delta \ .$$

On pose maintenant $C = 2^n\,\delta^{-n}$ et on calcule, quand $v_i \neq 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\begin{aligned} \|f(v_1,\dots,v_n)\| &= \frac{2^n\|v_1\|\cdots\|v_n\|}{\delta^n} \cdot \left\| f\Big(\frac{\delta}{2\|v_1\|}\cdot v_1,\dots,\frac{\delta}{2\|v_n\|}\cdot v_n\Big) \right\| \\ &\overset{(15.21)}{<} C \cdot \|v_1\|\cdots\|v_n\| \ . \end{aligned}$$

D’autre part, s’il existe i tel que $v_i = 0$, alors la n-linéarité de f nous dit qu’on a $f(v_1,\dots,v_n) = 0$ et donc l’inégalité (large !) à montrer sera vraie pour tout choix de $C > 0$.

Pour l’implication (iii) $\Rightarrow$ (i) on montre que f est continue en $v = (v_1,\dots,v_n)$. Pour cela on prend $h = (h_1,\dots,h_n)$ et on calcule, en utilisant la n-linéarité de f :

$$\begin{aligned} \|f(v+h) - f(v)\| &\equiv \|f(v_1+h_1,\dots,v_n+h_n) - f(v_1,\dots,v_n)\| \\ &= \Big\| \sum_{j=1}^n f(v_1,\dots,v_{j-1},h_j,v_{j+1}+h_{j+1},\dots,v_n+h_n) \Big\| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^n \|f(v_1,\dots,v_{j-1},h_j,v_{j+1}+h_{j+1},\dots,v_n+h_n)\| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^n C\cdot\|v_1\|\cdots\|v_{j-1}\|\cdot\|h_j\|\cdot\|v_{j+1}+h_{j+1}\|\cdots\|v_n+h_n\| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^n C\cdot\|h\|_\infty\cdot\|v_1\|\cdots\|v_{j-1}\|\cdot \\ &\qquad\qquad \cdot\big(\|v_{j+1}\|+\|h\|_\infty\big)\cdots\big(\|v_n\|+\|h\|_\infty\big) \ . \end{aligned}$$

Étant donné que chaque terme de la somme contient un facteur $\|h\|_\infty$, il est immédiat qu’on a

$$\lim_{h\to 0} \|f(v+h) - f(v)\| = 0 \ ,$$

ce qui termine la preuve que f est continue au point $v = (v_1,\dots,v_n) \in E_1 \times\cdots\times E_n$.

$\boxed{CQFD}$

Preuve de [6.3]. La preuve suit exactement le même schéma que la preuve de [1.20] : on vérifie les propriétés d'une norme, à commencer avec la positivité :

$$\forall i \ \forall v_i \in E_i^* \ : \ \frac{\|f(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} \geqslant 0$$
$$\implies \qquad N(f) = \sup_{v_i\in E_i^*} \frac{\|f(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} \geqslant 0 \ .$$

Ensuite, si on a $N(f)=0$, alors

$$\sup_{v_i\in E_i^*} \frac{\|f(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} = 0$$
$$\overset{\text{déf. d'un sup}}{\implies} \qquad \forall v_i \in E_i^* \ : \ \frac{\|f(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} \leqslant 0$$
$$\implies \qquad \forall v_i \in E_i^* \ : \ \|f(v_1,\ldots,v_n)\| = 0 \ .$$

Étant donné que la n-linéarité implique que $f(v_1,\ldots,v_n)=0$ dès qu'un des $v_i=0$, il s'ensuit que $f(v_1,\ldots,v_n)=0$ pour tout choix de $v_i\in E_i$, c'est-à-dire que $f=0$.

On poursuit avec le choix d'un $\lambda\in\mathbf{R}$ et on calcule :

$$\begin{aligned} N(\lambda f) &= \sup_{v_i\in E_i^*} \frac{\|(\lambda f)(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} = \sup_{v_i\in E_i^*} \frac{\|\lambda\cdot\big(f(v_1,\ldots,v_n)\big)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} \\ &= \sup_{v_i\in E_i^*} \frac{|\lambda|\cdot\|f(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} = |\lambda|\cdot \sup_{v_i\in E_i^*} \frac{\|f(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} = |\lambda|\cdot N(f) \ , \end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité se justifie par le fait qu'on manipule des quantités positives.

Et on termine avec l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} N(f+g) &= \sup_{v_i\in E_i^*} \frac{\|(f+g)(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} = \sup_{v_i\in E_i^*} \frac{\|f(v_1,\ldots,v_n)+g(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} \\ &\leqslant \sup_{v_i\in E_i^*} \left(\frac{\|f(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} + \frac{\|g(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} \right) \\ &\leqslant \sup_{v_i\in E_i^*} \frac{\|f(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} + \sup_{v_i\in E_i^*} \frac{\|g(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|} \\ &= N(f)+N(g) \ . \end{aligned}$$

$\boxed{CQFD}$

Preuve de [6.5]. Si, pour un $i=1,\ldots,n$ on a $v_i=0$, alors par la n-linéarité de f on a $f(v_1,\ldots,v_n)=0$ et donc l'inégalité sera vraie (et même une égalité). Et si pour tout i on a $v_i\neq 0$, alors par définition de $\|f\|$ on a l'inégalité

$$\frac{\|f(v_1,\ldots,v_n)\|}{\|v_1\|\cdots\|v_n\|} \leqslant \|f\| \ ,$$

ce qui se transforme en l'inégalité à montrer après multiplication par $\|v_1\|\cdots\|v_n\|$.

$\boxed{CQFD}$

Preuve de [6.6]. L'inégalité donnée est, selon [6.2], équivalente à la continuité de f. Mais pour $v_i \in E_i^*$ on peut aussi l'écrire sous la forme

$$\frac{\|f(v_1, \ldots, v_n)\|}{\|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdots \|v_n\|} \leqslant C \quad .$$

Avec [6.3] l'inégalité $\|f\| \leqslant C$ en découle immédiatement. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [6.7]. Soit $e_1^{(i)}, \ldots, e_{k_i}^{(i)}$ une base de E_i qu'on suppose de dimension k_i. Alors pour tout $v^{(i)} = \sum_{j_i=1}^{k_i} v_{j_i}^{(i)}$ on a (par n-linéarité et l'inégalité triangulaire)

$$\begin{aligned} \|f(v^{(1)}, \ldots, v^{(n)})\| &= \Big\| \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} v_{j_1}^{(1)}\, v_{j_2}^{(2)} \cdots v_{j_n}^{k_n} \cdot f(e_{j_1}^{(1)}, \ldots, e_{j_n}^{(n)}) \Big\| \\ &\leqslant \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} |v_{j_1}^{(1)}| \cdot |v_{j_2}^{(2)}| \cdots |v_{j_n}^{k_n}| \cdot \big\| f(e_{j_1}^{(1)}, \ldots, e_{j_n}^{(n)}) \big\| \quad . \end{aligned}$$

D'autre part, l'application $v^{(i)} \mapsto N_i(v^{(i)}) = \max_{j=1,\ldots,k_i} |v_j^{(i)}|$ est une norme (équivalente) sur E_i (voir la preuve de [1.18]). En posant

$$C = \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} \big\| f(e_{j_1}^{(1)}, \ldots, e_{j_n}^{(n)}) \big\|$$

on aura donc la majoration

$$\|f(v^{(1)}, \ldots, v^{(n)})\| \leqslant C \cdot N_1(v^{(1)}) \cdots N_n(v^{(n)}) \quad ,$$

ce qui montre, à l'aide de [6.6], que f est continue. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [6.8]. Le bilinéarité de $\mathcal{M}$ est une conséquence immédiate des axiomes d'un espace vectoriel et la définition d'une norme nous donne l'égalité $\|\mathcal{M}(\lambda, x)\| = \|\lambda\| \cdot \|x\|$. Avec [6.2] et [6.3] il s'ensuit immédiatement que $\mathcal{M}$ est continue avec $\|\mathcal{M}\| = 1$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [6.9]. La bilinéarité de ces deux applications étant évident, il suffit de remarquer qu'on a, selon [1.26], les inégalités $\|\mathcal{E}(A, v)\| \leqslant \|A\| \cdot \|v\|$ et $\|\mathcal{C}(A, B)\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$. Avec [6.6] il s'ensuit immédiatement que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ sont continues avec $\|\mathcal{E}\| \leqslant 1$ et $\|\mathcal{C}\| \leqslant 1$. $\boxed{CQFD}$

Les preuves de §7

Preuve de [7.2]. Il est immédiate que si f est constante, alors l'application nulle (qui est bien continue !) vérifie les condition de la différentielle. Il s'ensuit que f est différentiable avec comme différentielle une application constante (nulle). Par récurrence, f est k fois différentiable pour tout $k \in \mathbf{N}$ et donc f est de classe C^∞.

Si f est une application linéaire continue, alors elle est différentiable et sa différentielle est l'application constante $(Df)(x) = f \in \mathcal{L}(E; F)$ [2.9]. La différentielle est donc k fois différentiable pour tout $k \in \mathbf{N}$ par l'argument précédent, donc f elle même est $k+1$ fois différentiable pout tout $k \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire que f est de classe C^∞. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.3]. Commençons avec la preuve que l'application $B_{x,y} : E \times F \to G$ donnée par

$$B_{x,y}(h,k) = A(x,k) + A(h,y)$$

est continue pour tout $(x,y) \in E \times F$. Mais cela découle immédiatement de [1.9] et la majoration

$$\|B_{x,y}(h,k)\| \leqslant \|A(x,k)\| + \|A(h,k)\| \overset{[6.2]}{\leqslant} \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|k\| + \|A\| \cdot \|h\| \cdot \|y\|$$

$$\overset{[1.13]}{\leqslant} \|A\| \cdot (\,\|x\| + \|y\|\,) \cdot \|(h,k)\|_\infty \quad . \tag{15.22}$$

Pour montrer que ce $B_{x,y}$ est la différentielle $(DA)(x,y)$, on fait le calcul

$$\frac{\|A(x+h, y+k) - A(x,y) - B_{x,y}(h,k)\|}{\|(h,k)\|_\infty} \overset{\text{bilinéarité et déf. de } B_{x,y}}{=} \frac{\|A(h,k)\|}{\|(h,k)\|_\infty}$$

$$\leqslant \frac{\|A\| \cdot \|h\| \cdot \|k\|}{\|(h,k)\|_\infty} \leqslant \|A\| \cdot \|(h,k)\|_\infty \quad .$$

En prenant la limite $(h,k) \to (0,0)$, on en déduit immédiatement qu'on a bien $B_{x,y} = (DA)(x,y)$.

Ensuite on montre que l'application $DA : E \times F \to \mathcal{L}(E \times F; G)$ est une application linéaire continue. Pour la linéarité on fait le calcul

$$\begin{aligned}
&\Big((DA)\big((x_1,y_1) + \lambda(x_2,y_2)\big)\Big)(h,k) \\
&\qquad = \big((DA)(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2)\big)(h,k) \\
&\qquad = A(x_1 + \lambda x_2, k) + A(h, y_1 + \lambda y_2) \\
&\qquad \overset{\text{bilinéarité}}{=} A(x_1,k) + \lambda A(x_2,k) + A(h,y_1) + \lambda A(h,y_2) \\
&\qquad = \big((DA)(x_1,y_1)\big)(h,k) + \lambda\big((DA)(x_2,y_2)\big)(h,k) \quad ,
\end{aligned}$$

et donc on a bien l'égalité

$$(DA)\big((x_1,y_1) + \lambda(x_2,y_2)\big) = (DA)(x_1,y_1) + \lambda(DA)(x_2,y_2) \quad ,$$

ce qui montre la linéarité de DA.

Pour la continuité de DA on reprend la majoration (15.22) qui dit

$$\|\big((DA)(x,y)\big)(h,k)\| \leqslant \|A\| \cdot (\,\|x\| + \|y\|\,) \cdot \|(h,k)\|_\infty \quad ,$$

dont on déduit, à l'aide de [1.23], la majoration

$$\|(DA)(x,y)\| \leqslant \|A\| \cdot (\,\|x\| + \|y\|\,) \leqslant 2 \cdot \|A\| \cdot \|(x,y)\|_\infty \quad .$$

Il s'ensuit, de nouveau avec [1.23], que DA est continue avec $\|DA\| \leqslant 2 \cdot \|A\|$.

Une fois qu'on sait que DA est linéaire continue, on en déduit, avec [7.2], que DA est de classe C^k pour tout $k \in \mathbf{N}$ et donc que A elle-même est de classe C^{k+1} pour tout $k \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire que A est de classe C^∞.

Finalement, pour la formule explicite pour D^2A, on s'appuie sur [2.9] qui nous dit qu'on a l'égalité

$$\big(D(DA)\big)(x, y) = DA \quad .$$

La majoration $\|DA\| \leqslant 2 \cdot \|A\|$ nous donne donc $\big\|\big(D(DA)\big)(x, y)\big\| \leqslant 2\,\|A\|$. Mais on déduit aussi de cette égalité qu'on a

$$\begin{aligned}\Big(\big((D^2A)(x, y)\big)(h, k)\Big)(h', k') &\equiv \bigg(\Big(\big(D(DA)\big)(x, y)\Big)(h, k)\bigg)(h', k') \\ &= \big((DA)(h, k)\big)(h', k') = A(h, k') + A(h', k) \quad .\end{aligned}$$

$\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.4]. Les preuves de (i) et (ii) se font naturellement par récurrence sur k.

• (i) : Par définition on a $\mathcal{L}^{\uparrow 1}(E; F) = \mathcal{L}(E; F) = \mathcal{L}\big(E; \mathcal{L}^{\uparrow 0}(E; F)\big)$, ce qui montre que c'est vrai pour $k = 0$. Et si c'est vrai pour k, on calcule :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\uparrow(k+1)+1}(E; F) &\overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{L}\big(E; \mathcal{L}^{\uparrow k+1}(E; F)\big) \overset{\text{hyp. réc.}}{=} \mathcal{L}\Big(E; \mathcal{L}^{\uparrow k}\big(E; \mathcal{L}(E; F)\big)\Big) \\ &\overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{L}^{\uparrow k+1}\big(E; \mathcal{L}(E; F)\big) \quad ,\end{aligned}$$

ce qui montre que c'est vrai aussi pour $k + 1$.

• (ii) : Commençons avec la remarque que l'égalité a un sens, car $(D^{k+1}f)(a)$ appartient à $\mathcal{L}^{\uparrow k+1}(E; F)$, $\big(D^k(Df)\big)(a)$ appartient à $\mathcal{L}^{\uparrow k}\big(E; \mathcal{L}(E; F)\big)$ et selon (i), ces deux espaces sont bien le même.

Le cas $k = 0$ est un peu particulier, car il faut le lire comme l'équivalence "f est 1 fois différentiable en a si et seulement si Df existe en a" et avec la définition $D^0 f = f$, l'égalité $\big(D(D^0 f)\big)(a) = \big(D^0(Df)\big)(a)$ se lit comme $(Df)(a) = (Df)(a)$ (voir [7.1]), ce qui sont des tautologies. Supposons donc que c'est vrai pour k et considérons le cas $k + 1$.

La fonction f est $(k+1)+1$ fois différentiable en a si et seulement f est $k+1$ fois différentiable sur U et que $D^{k+1}f$ est différentiable en a. Par hypothèse de récurrence f est $k + 1$ fois différentiable en chaque point $x \in U$ si et seulement si Df est k fois différentiable en chaque point $x \in U$ et on a l'égalité

$$\forall x \in U \quad : \quad (D^{k+1}f)(x) = \big(D^k(Df)\big)(x) \quad ,$$

c'est-à-dire qu'on a l'égalité $D^{k+1}f = D^k(Df)$ sur U. La condition $D^{k+1}f$ différentiable en a équivaut donc à la condition $D^k(Df)$ différentiable en a, c'est-à-dire, Df $k + 1$ fois différentiable au point a. Et si c'est le cas, on aura l'égalité

$$(D^{k+2}f)(a) \overset{\text{déf.}}{=} \big(D(D^{k+1}f)\big)(a) = \Big(D\big(D^k(Df)\big)\Big)(a) \overset{\text{déf.}}{=} \big(D^{k+1}(Df)\big)(a) \quad ,$$

ce qui termine la récurrence.

• (iii) : f est de classe C^{k+1} si f est $k + 1$ fois différentiable sur U et si $D^{k+1}f$: $U \to \mathcal{L}^{\uparrow k+1}(E; F)$ est continue. Par (ii) ceci est le cas si et seulement si Df est k

fois différentiable sur U et si

$$D^{k+1}f = D^k(Df) : U \to \mathcal{L}^{\uparrow k}\big(E; \mathcal{L}(E;F)\big) = \mathcal{L}^{\uparrow k+1}(E;F)$$

est continue. Mais ceci est équivalent à dire que Df est de classe C^k.

• (iv) : Si f est de classe C^∞, alors f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbf{N}$. Mais si f est de classe C^k, elle est en particulier k fois différentiable sur U. D'autre part, si f est k fois différentiable sur U pour tout k, elle est aussi $k+1$ fois différentiable sur U pour tout $k \in \mathbf{N}$. Mais par définition, f est $k+1$ fois différentiable sur U si et seulement si $D^k f$ est différentiable sur U. Et une fonction différentiable est continue [2.10], donc $D^k f$ est continue sur U, ce qui veut dire que f est de classe C^k. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.5]. L'ingrédient essentiel de la preuve est la réécriture de Df comme une composée avec une application qui prend ses valeurs dans un produit. C'est cette réécriture qui permet d'appliquer un argument de récurrence.

On commence avec les cas de la différentiabilité en a, laissant les cas concernant la classe C^k à plus tard. La preuve se fait par récurrence sur k et on constate que selon [5.4] f est différentiable en a si et seulement si toutes les composantes f_i sont différentiable en a, ce qui est le cas $k = 1$. Supposons donc qu'on a montré le cas k et considérons le cas $k+1$. Par définition f est donc k fois différentiable sur U et que $D^k f$ est différentiable en a. De nouveau selon [5.4], f est différentiable sur U si et seulement si toutes les composantes f_i sont différentiable sur U et dans ce cas on a

$$\forall x \in U \quad : \quad (Df)(x) = \mathcal{J}(\begin{pmatrix} (Df_1)(x) \\ \vdots \\ (Df_p)(x) \end{pmatrix}) \ .$$

Autrement dit, si on introduit la fonction $F : U \to \mathcal{L}(E;F_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E;F_p)$ comme

$$F(x) = \big((Df_1)(x), \ldots, (Df_p)(x)\big) \ ,$$

alors on a les égalités

$$Df = \mathcal{J} \circ F \qquad \text{et} \qquad F = \mathcal{J}^{-1} \circ Df \ . \tag{15.23}$$

Étant donné que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}^{-1}$ sont linéaires continues [4.18], elles sont de classe C^∞ [7.2]. On peut donc invoquer [7.6] pour conclure que Df est k fois différentiable en a si et seulement si F est k fois différentiable en a. Et par hypothèse de récurrence F est k fois différentiable en a si et seulement si toutes les Df_i sont k fois différentiables en a. Avec [7.4.ii] il s'ensuit que f est $k+1$ fois différentiable en a si et seulement si toutes les f_i sont $k+1$ fois différentiables en a.

Pour traiter le cas "de classe C^k," il suffit d'appliquer un argument de récurrence aux formules (15.23). D'abord on note que, selon ces égalités, Df est continue si et seulement si F est continue, ce qui est le cas si et seulement si toutes les Df_i sont continues. Ainsi on a montré que f est de classe C^1 si et seulement si toutes les f_i sont de classe C^1. Supposons donc qu'on a montré le cas k et traitons le cas $k+1$. D'abord, selon [7.4.iii], f est de classe C^{k+1} si et seulement si Df est de classe C^k. Et selon (15.23) et [7.6] Df est de classe C^k si et seulement si F est de classe C^k. Par hypothèse de récurrence, F est de classe C^k si et seulement si toutes les Df_i sont de classe C^k, ce qui est le cas (de nouveau par [7.4.iii]) si et seulement si toutes les f_i sont de classe C^{k+1}. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.6]. L'idée de la preuve est de reconnaître que la différentielle de $g \circ f$ s'écrit comme la composée d'applications qui ne fait intervenir que Df, Dg et des applications (bi)linéaires continues. Avec une telle écriture un peut utiliser un argument de récurrence pour montrer le résultat. La partie essentielle de la preuve est donc la réécriture de la formule pour la différentielle de $g \circ f$ pour obtenir la forme souhaitée.

On commence avec les cas de la différentiabilité en a, laissant les cas concernant la classe C^k à plus tard. La preuve se fait par récurrence sur k et on constate que si f est différentiable en a et g en b, alors selon [2.14] $g \circ f$ est différentiable en a, ce qui est le cas $k = 1$. Supposons donc qu'on a montré le cas k et considérons le cas $k+1$. Par définition f est donc k fois différentiable sur U et que $D^k f$ est différentiable en a et g est k fois différentiable sur V et que $D^k g$ est différentiable en b. On déduit de [2.14] que $g \circ f$ est (au moins une fois) différentiable sur U et qu'on a

$$\begin{aligned}\forall x \in U \quad : \quad \big(D(g \circ f)\big)(x) &= (Dg)\big(f(x)\big) \circ (Df)(x) \\ &= \big((Dg) \circ f\big)(x) \circ (Df)(x) \\ &= \mathcal{C}\Big(\big((Dg) \circ f\big)(x)\ ,\ (Df)(x)\Big)\ ,\end{aligned}$$

où $\mathcal{C}$ est l'application (bilinéaire continue) de composition [6.9]. Pour terminer notre réécriture on introduit l'application $\mathcal{P} : U \to \mathcal{L}(F; G) \times \mathcal{L}(E; F)$ par

$$\mathcal{P}(x) = \Big(\ \big((Dg) \circ f\big)(x)\ ,\ (Df)(x)\ \Big)\ , \tag{15.24}$$

de sorte qu'on a l'égalité

$$D(g \circ f) = \mathcal{C} \circ \mathcal{P}\ . \tag{15.25}$$

Par hypothèse f et g sont $k+1$ fois différentiable en a respectivement b, et donc Df et Dg sont k fois différentiables en a respectivement b [7.4]. Par hypothèse de récurrence la fonction $(Dg) \circ f$ est donc aussi k fois différentiable en a. On peut donc invoquer [7.5] pour conclure que $\mathcal{P}$ est k fois différentiable en a. Et parce que $\mathcal{C}$, en tant qu'application bilinéaire continue, est de classe C^∞ [7.3], on peut de nouveau invoquer l'hypothèse de récurrence pour conclure que $D(g \circ f) = \mathcal{C} \circ \mathcal{P}$ est k fois différentiable en a. Autrement dit, $g \circ f$ est $k+1$ fois différentiable en a, ce qui termine la preuve par récurrence.

Pour traiter le cas "de classe C^k," il suffit d'appliquer un argument de récurrence aux formules (15.25) et (15.24). Si f et g sont de classe C^1, alors Df et Dg sont continues. Il s'ensuit, avec (15.24) et (15.25), que $D(g \circ f)$ est aussi continue, et donc $g \circ f$ est de classe C^1. Et si f et g sont de classe C^{k+1}, alors Df et Dg sont de classe C^k [7.4]. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence une première fois pour conclure que $(Dg) \circ f$ est de classe C^k. Ensuite on invoque [7.5] pour conclure que $\mathcal{P}$ est de classe C^k. En finalement on invoque l'hypothèse de récurrence une deuxième fois pour conclure que $D(g \circ f)$ est de classe C^k et donc que $g \circ f$ est de classe C^{k+1}.

$\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.7]. L'application $S : F \times F \to F$ définie par $S(x, y) = x + y$ est linéaire avec $\|S(x, y)\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant 2 \cdot \|(x, y)\|_\infty$. Il s'ensuit que S est continue [1.9] et donc de classe C^∞ [7.2]. Ensuite on définit l'application $P : U \to F \times F$ par $P(x) = \big(f(x), g(x)\big)$, de sorte qu'on a l'égalité $f + g = S \circ P$. Le résultat annoncé est maintenant une conséquence immédiate de [7.5] (pour P) et [7.6] (pour la composée

$S \circ P$). Reste donc la formule pour $D^k(f+g)$, mais celle-là se démontre par récurrence sur k à partir de [2.11] qui dit qu'on a $D(f+g) = Df + Dg$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.8]. On sait que l'application $\mathcal{M} : \mathbf{R} \times E \to E$ définie par $M(\lambda, v) = \lambda \cdot v$ est une application bilinéaire continue [6.8]. Elle est donc de classe C^∞ [7.3]. Ensuite on définit l'application $P : U \to \mathbf{R} \times E$ par $P(x) = \big(g(x), f(x)\big)$, de sorte qu'on a l'égalité $g \cdot f = \mathcal{M} \circ P$. Le résultat annoncé est maintenant une conséquence immédiate de [7.5] (pour P) et [7.6] (pour la composée $\mathcal{M} \circ P$). $\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.10]. • (i) : Si f est différentiable en a, alors selon [5.2] et [1.27] on a

$$(D_v f)(a) = \big((Df)(a)\big)(v) = \mathcal{E}_v\big((Df)(a)\big) = \big(\mathcal{E}_v \circ (Df)\big)(a) \quad .$$

• (ii) : L'application $\mathcal{E}_v$ étant linéaire est donc de classe C^∞ [7.2]. Par [7.4] il s'ensuit que si f est $k+1$ fois différentiable en a ou de classe C^{k+1} sur U, alors Df est k fois différentiable en a ou de classe C^k sur U et donc par [7.6] $\mathcal{E}_v \circ Df$ est k fois différentiable en a ou de classe C^k sur U. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.11]. En utilisant [2.14] et [2.9] on obtient directement que $A \circ f$ est différentiable en a si f l'est. Et si on utilise en plus [5.2], on peut faire le calcul

$$\begin{aligned}\big(D_v(A \circ f)\big)(a) &\overset{[5.2]}{=} \Big(\big(D(A \circ f)\big)(a)\Big)(v) \overset{[2.14]}{=} \Big((DA)\big(f(a)\big) \circ (Df)(a)\Big)(v) \\ &\overset{[2.9]}{=} \Big(A \circ (Df)(a)\Big)(v) = A\Big(\big((Df)(a)\big)(v)\Big) \overset{[5.2]}{=} A\big((D_v f)(a)\big) \quad ,\end{aligned}$$

ce qui est, après avoir enlevé la dépendance en a, l'égalité annoncée. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.12]. L'idée de la preuve est assez simple : on remarque d'abord que l'évaluation successive de $(D^k f)(a)$ en v_1, …, v_k est donnée par l'application successive de l'application $\mathcal{E}_{v_i}$:

$$\Big(\dots\Big(\big((D^k f)(a)\big)(v_1)\Big)(v_2)\dots\Big)(v_k) = \big(\mathcal{E}_{v_k} \circ \mathcal{E}_{v_{k-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{E}_{v_1} \circ (D^k f)\big)(a) \quad .$$

Et on termine en appliquant [7.10.i] et [7.11] par récurrence pour transformer $\mathcal{E}_{v_i}$ en D_{v_i}. La longueur de la preuve s'explique par le soin nécessaire pour justifier l'application de ces résultats et par le fait que les différentes applications $\mathcal{E}_{v_i}$ ne sont pas définies sur les mêmes espaces ; il faut donc les distinguer soigneusement.

• (i) : Pour $v \in E$ on définit l'application $\mathcal{E}_v^k : \mathcal{L}^{\uparrow k}(E;F) \to \mathcal{L}^{\uparrow k-1}(E;F)$ comme cas particulier de [1.27] par

$$A \in \mathcal{L}^{\uparrow k}(E;F) \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{L}\big(E; \mathcal{L}^{\uparrow k-1}(E;F)\big) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_v^k(A) = A(v) \quad .$$

C'est une application linéaire continue avec $\|\mathcal{E}_v^k\| \leqslant \|v\|$. Si on regarde bien la définition de $(D^\ell f)(a)$, il est quasi-immédiat qu'on a, pour une fonction qui est $\ell \geqslant 1$ fois différentiable en a, l'égalité

$$\bigg(\dots\Big(\big((D^\ell f)(a)\big)(v_1)\Big)(v_2)\dots\bigg)(v_\ell) = \big(\mathcal{E}^1_{v_\ell} \circ \mathcal{E}^2_{v_{\ell-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{E}^\ell_{v_1}\big)\big((D^\ell f)(a)\big)$$

$$= \big(\mathcal{E}^1_{v_\ell} \circ \mathcal{E}^2_{v_{\ell-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{E}^\ell_{v_1} \circ (D^\ell f)\big)(a) \tag{15.26}$$

Avec ces préparation on fait la preuve par récurrence sur k. Pour $k=1$ on doit montrer l'existence de $(D_v f)(a)$ et l'égalité $(D_v f)(a) = \big((Df)(a)\big)(v)$, ce qui est [5.2]. Supposons donc qu'on a montré le résultat pour k et considérons une fonction f qui est $k+1$ fois différentiable en a. Et il faut montrer que l'application itérée des dérivées directionnelles existe et est donnée par l'évaluation itérée. Par hypothèse, f est k fois différentiable sur U et $D^k f$ est différentiable en a. Par hypothèse de récurrence on a donc, pour tout $x \in U$, l'égalité

$$\begin{aligned}\Big(D_{v_2}\big(D_{v_3} \dots (D_{v_{k+1}} f) \dots\big)\Big)(x) &= \bigg(\dots \Big(\big((D^k f)(x)\big)(v_2)\Big)(v_3) \dots\bigg)(v_{k+1}) \\ &\overset{(15.26)}{=} \big(\mathcal{E}^1_{v_{k+1}} \circ \mathcal{E}^2_{v_k} \circ \cdots \circ \mathcal{E}^k_{v_2} \circ (D^k f)\big)(x) \ .\end{aligned} \tag{15.27}$$

La fonction $D^k f$ étant différentiable en a, la fonction $\mathcal{E}^1_{v_{k+1}} \circ \mathcal{E}^2_{v_k} \circ \cdots \circ \mathcal{E}^k_{v_2} \circ (D^k f)$ est aussi différentiable en a comme composée avec des fonctions de classe C^∞ [7.6]. L'égalité (15.27) montre donc que l'application $x \mapsto \big(D_{v_2}\big(D_{v_3} \dots (D_{v_{k+1}} f) \dots\big)\big)(x)$ est différentiable en a. L'existence de $\big(D_{v_1}\big(D_{v_2} \dots (D_{v_k} f) \dots\big)\big)(a)$ découle maintenant de [5.2]. Ensuite on fait le calcul :

$$\begin{aligned}&\Big(D_{v_1}\big(D_{v_2} \dots \big(D_{v_k}(D_{v_{k+1}} f)\big) \dots\big)\Big)(a) \\ &\overset{(15.27)}{=} \Big(D_{v_1}\big((\mathcal{E}^1_{v_{k+1}} \circ \mathcal{E}^2_{v_k} \circ \cdots \circ \mathcal{E}^k_{v_2}) \circ (D^k f)\big)\Big)(a) \\ &\overset{[7.11]}{=} \Big((\mathcal{E}^1_{v_{k+1}} \circ \mathcal{E}^2_{v_k} \circ \cdots \circ \mathcal{E}^k_{v_1}) \circ \big(D_{v_1}(D^k f)\big)\Big)(a) \\ &\overset{[7.10.i]}{=} \Big((\mathcal{E}^1_{v_{k+1}} \circ \mathcal{E}^2_{v_k} \circ \cdots \circ \mathcal{E}^k_{v_2}) \circ \big(\mathcal{E}^{k+1}_{v_1} \circ (D(D^k f))\, \big)\Big)(a) \\ &= \big(\mathcal{E}^1_{v_{k+1}} \circ \mathcal{E}^2_{v_k} \circ \cdots \circ \mathcal{E}^k_{v_2} \circ \mathcal{E}^{k+1}_{v_1} \circ (D^{k+1} f)\big)(a) \\ &\overset{(15.26)}{=} \bigg(\dots \Big(\big((D^{k+1} f)(a)\big)(v_1)\Big)(v_2) \dots\bigg)(v_{k+1}) \ ,\end{aligned}$$

ce qui montre que l'égalité est vraie pour $k+1$.

On remarquera que pour la première égalité dans ce dernier calcul on a utilisé (15.27) pour un $x \in U$ arbitraire et pas seulement pour $x = a$. Ceci est nécessaire, car on applique la dérivée directionnelle D_{v_1} à une fonction, pas à une seule valeur.

• (ii) : Pour montrer que l'application A est k-linéaire continue, on commence avec la remarque que, pour $f, g : U \to F$ différentiable en $x \in U$, $v, w \in E$ et pour $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, on a les égalités

$$\begin{aligned}(D_{v+\lambda w} f)(x) &= (D_v f)(x) + \lambda\, (D_w f)(x) \\ \big(D_v(f + \mu g)\big)(x) &= (D_v f)(x) + \mu\, (D_v g)(x) \ .\end{aligned}$$

À l'aide de l'égalité montré en (i) on en déduit facilement que l'application A est k-linéaire. Pour la continuité on utilise l'égalité (15.26) qui dit qu'on a

$$A(v_1, \dots, v_k) = (\mathcal{E}^1_{v_k} \circ \mathcal{E}^2_{v_{k-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{E}^k_{v_1})\big((D^k f)(a)\big) \ ,$$

ce qui nous permet de faire le calcul

$$\begin{aligned}\|A(v_1, \dots, v_k)\| &= \big\|(\mathcal{E}^1_{v_k} \circ \mathcal{E}^2_{v_{k-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{E}^k_{v_1})\big((D^k f)(a)\big)\big\| \\ &\overset{[1.26]}{\leqslant} \|\mathcal{E}^1_{v_k} \circ \mathcal{E}^2_{v_{k-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{E}^k_{v_1}\| \cdot \|(D^k f)(a)\| \\ &\overset{[1.26]}{\leqslant} \|\mathcal{E}^1_{v_k}\| \cdot \|\mathcal{E}^2_{v_{k-1}}\| \cdots \|\mathcal{E}^k_{v_1}\| \cdot \|(D^k f)(a)\|\end{aligned}$$

$$\overset{[1.27]}{\leqslant} \quad \|v_k\| \cdot \|v_{k-1}\| \cdots \|v_1\| \cdot \|(D^k f)(a)\| \quad .$$

L'invocation de [6.2] finit alors la preuve que A est une application k-linéaire continue. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.15]. La preuve se fait naturellement par récurrence sur k. Dans le cas $k = 1$ on constate qu'on a montré dans [2.6] que f est dérivable en a si et seulement si f est différentiable en a avec l'égalité

$$f'(a) = \big((Df)(a)\big)(1) \quad ,$$

ce qui est la première partie du cas $k = 1$. Pour faire le lien entre la continuité de f' et celle de Df (pour être de classe C^1 et pour pouvoir entamer la récurrence, on introduit les isomorphismes isométriques $\Phi^{(k)}$ comme des cas particuliers de l'isomorphisme isométrique $\Phi : \mathcal{L}(\mathbf{R}; F) \to F$ définie en [1.31]. On commence avec

$$\Phi^{(1)} : \mathcal{L}^{\uparrow 1}(\mathbf{R}; F) \equiv \mathcal{L}(\mathbf{R}; F) \to F \equiv \mathcal{L}^{\uparrow 0}(\mathbf{R}; F) \quad ,$$

ce qui est exactement l'application Φ décrite dans [1.31]. Ensuite on définit les $\Phi^{(k)}$ pour $k \geqslant 2$ par

$$\Phi^{(k)} = \mathcal{L}^{\uparrow k}(\mathbf{R}; F) \equiv \mathcal{L}\big(\mathbf{R}; \mathcal{L}^{\uparrow k-1}(\mathbf{R}; F)\big) \to \mathcal{L}^{\uparrow k-1}(\mathbf{R}; F) \quad ,$$

c'est-à-dire comme l'isomorphisme isométrique de [1.31] où on a remplacé l'espace F par l'espace $\mathcal{L}^{\uparrow k-1}(\mathbf{R}; F)$. Pour éviter ultérieurement toute confusion avec une différentielle partielle, on introduit le “vecteur” de base canonique $u = 1$ de l'espace $\mathbf{R}$. À l'aide des applications $\Phi^{(k)}$ (n'oublions pas qu'on a $u = 1$) on a trois façons différentes pour exprimer $\big(\ldots\big((D^k f)(a)\big)(u)\ldots\big)(u)$, l'évaluation successive de $D^k f$:

$$(15.28) \qquad \Big(\ldots\big((D^k f)(a)\big)(u)\ldots\Big)(u) \quad \begin{cases} \overset{(7.14)}{=} & \big((D^k f)(a)\big)(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k \text{ fois}}) \\[2ex] \overset{[7.12]}{=} & \Big(\underbrace{D_u\big(\ldots(D_u}_{k \text{ fois}} f)\ldots\big)\Big)(a) \\[2ex] \overset{\text{déf. de } \Phi^{(i)}}{=} & \Phi^{(1)}\Big(\ldots\Phi^{(k)}\big((D^k f)(a)\big)\Big) \quad . \end{cases}$$

Dans le cas $k = 1$ on a donc les égalités

$$f'(x) \overset{[2.6]}{=} \big((Df)(x)\big)(1) = \big(\Phi^{(1)} \circ (Df)\big)(x) = (D_u f)(x) \quad ,$$

ce qui dit qu'on a les égalités entre fonctions

$$f' = D_u f = \Phi^{(1)} \circ Df \quad .$$

Mais $\Phi^{(1)}$ est un isomorphisme, donc $\Phi^{(1)}$ ainsi que sa réciproque $\big(\Phi^{(1)}\big)^{-1}$ sont de classe C^∞. On déduit donc des égalités $f' = \Phi^{(1)} \circ Df$ et $Df = \big(\Phi^{(1)}\big)^{-1} \circ f'$ que f' est continue si et seulement si Df est continue, c'est-à-dire que f' est continue si et seulement si f est de classe C^1. Ainsi on a montré aussi la deuxième partie du cas $k = 1$.

Supposons maintenant qu'on sait que c'est vrai dans le cas k et considérons le cas $k + 1$. Si f est $k + 1$ fois dérivable en a ou si f est $k + 1$ fois différentiable en a, alors f est certainement k fois dérivable sur U ou k fois différentiable sur U

[7.1]. Par hypothèse de récurrence et les égalités (15.28) on a donc les égalités entre applications

$$f^{(k)} = \underbrace{D_u\big(\dots(D_u}_{k \text{ fois}} f)\dots\big) = \Phi^{(1)} \circ \cdots \Phi^{(k)} \circ (D^k f) \enspace .$$

Selon [2.6] $f^{(k)}$ est dérivable en a si et seulement si elle est différentiable en a, auquel cas on aura l'égalité

$$(15.29) \qquad f^{(k+1)}(a) = \big(f^{(k)}\big)' = \big((Df^{(k)})(a)\big)(1) \overset{[5.2]}{=} (D_u f^{(k)})(a) \enspace .$$

D'autre part, on déduit de l'égalité $f^{(k)} = \Phi^{(1)} \circ \cdots \Phi^{(k)} \circ (D^k f)$ et le fait que les $\Phi^{(i)}$ sont des isomorphismes (donc de classe C^∞) que $f^{(k)}$ est différentiable en a respectivement de classe C^1 si et seulement si $D^k f$ est différentiable en a respectivement de classe C^1. Si on combine les deux équivalences, on aura donc montré que $f^{(k)}$ est dérivable en a, respectivement $f^{(k+1)}$ est continue si et seulement si $D^k f$ est différentiable en a respectivement $D^k f$ est de classe C^1, ce qui, selon la définition [7.1], est le cas si et seulement si f est $k+1$ fois différentiable en a respectivement f est de classe C^{k+1} . Et si c'est le cas on aura l'égalité

$$f^{(k+1)}(a) \overset{(15.29)}{=} \Bigg(D_u\Big(\underbrace{D_u\big(\dots(D_u}_{k \text{ fois}} f)\dots\big)\Big)\Bigg)(a) \overset{(15.28)}{=} \big((D^{k+1}f)(a)\big)(\underbrace{1,\dots,1}_{k+1 \text{ fois}}) \enspace .$$

Ainsi on a montré le cas $k+1$, ce qui termine la preuve par récurrence.

L'égalité

$$\big((D^k f)(a)\big)(h_1,\dots,h_k) = f^{(k)}(a) \cdot h_1 \cdots h_k$$

est une conséquence immédiate de l'autre égalité

$$f^{(k)}(a) = \big((D^k f)(a)\big)(1,\dots,1)$$

et la k-linéarité de la k-ième différentielle [7.12.ii], [7.13]. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.16]. Commençons avec la remarque que Φ° envoie bien $\mathcal{L}(E;F)$ dans $\mathcal{L}(E;G)$ pour la simple raison que la composée de deux application linéaires continues est linéaire continue. Ensuite on remarque que Φ° est linéaire et qu'elle est continue :

$$\|\Phi^\circ(A)\| = \|\Phi \circ A\| \overset{[1.26]}{\leqslant} \|\Phi\| \cdot \|A\| \enspace ,$$

et donc par [1.23] Φ° est continue avec $\|\Phi^\circ\| \leqslant \|\Phi\|$.

Maintenant, si Φ est un isomorphisme, on a $\Phi^{-1} \in \mathcal{L}(G;F)$ et par la même procédure on obtient une application $(\Phi^{-1})^\circ : \mathcal{L}(E;G) \to \mathcal{L}(E;F)$ définie par

$$(\Phi^{-1})^\circ(B) = \Phi^{-1} \circ B \enspace .$$

Il est immédiat qu'on a

$$\big((\Phi^{-1})^\circ \circ \Phi^\circ\big)(A) = \Phi^{-1} \circ \Phi \circ A = A \enspace ,$$

c'est-à-dire, $(\Phi^{-1})^\circ \circ \Phi^\circ = \mathrm{id}$. Et de la même façon on aura $\Phi^\circ \circ (\Phi^{-1})^\circ = \mathrm{id}$. Autrement dit, Φ° est bijective d'inverse $(\Phi^{-1})^\circ$. Ainsi on a montré que si Φ est un isomorphisme, alors Φ° l'est aussi.

Et si Φ est isométrique, on a, pour $A \in \mathcal{L}(E;F)$ et $v \in E$,

$$\|\big(\Phi^\circ(A)\big)(v)\| = \|\Phi\big(A(v)\big)\| \overset{\Phi \text{ isométrie}}{=} \|A(v)\|$$

et donc $\|\Phi^\circ(A)\| = \|A\|$, montrant que Φ° est également isométrique. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.17]. La preuve se fait naturellement par récurrence sur k. Si on regarde bien le cas $k = 1$, on s'aperçoit vite qu'il n'y a rien à faire : $\mathcal{L}^{\uparrow 1}(E;F) = \mathcal{L}(E;F) = \mathcal{L}^{(1)}(E^1;F)$ et l'application Φ_1 est donnée par

$$\big(\Phi_1(A)\big)(v) = A(v) \quad ,$$

c'est-à-dire, $\Phi_1 = \mathrm{id}$, ce qui est évidemment un isomorphisme isométrique.

Supposons donc que c'est vrai pour k et regardons le cas $k+1$. Par définition on a $\mathcal{L}^{\uparrow k+1}(E;F) = \mathcal{L}\big(E;\mathcal{L}^{\uparrow k}(E;F)\big)$. Pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence, on va découper l'application Φ_{k+1} en deux en écrivant $\Phi_{k+1} = \Psi \circ \Phi_k^\circ$, où on définit les applications $\Phi_k^\circ : \mathcal{L}^{\uparrow k+1}(E;F) \to \mathcal{L}\big(E;\mathcal{L}^{(k)}(E^k;F)\big)$ comme dans [7.16] et $\Psi : \mathcal{L}\big(E;\mathcal{L}^{(k)}(E^k;F)\big) \to \mathcal{L}^{(k+1)}(E^{k+1};F)$ par

$$\begin{aligned} &A \in \mathcal{L}\big(E;\mathcal{L}^{(k)}(E^k;F)\big) \quad \Rightarrow \\ &\qquad \big(\Psi(A)\big)(v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}) = \big(A(v_1)\big)(v_2, \ldots, v_{k+1}) \quad . \end{aligned} \tag{15.30}$$

Une fois qu'on a posé ces définitions, il suffit de vérifier deux choses : qu'on a bien $\Phi_{k+1} = \Psi \circ \Phi_k^\circ$ et que Ψ est un isomorphisme isométrique. Car selon [7.16] (et l'hypothèse de récurrence) Φ_k° est un isomorphisme isométrique et la composée de deux isomorphismes isométriques est (évidemment) un isomorphisme isométrique, montrant que Φ_{k+1} l'est.

Pour l'égalité $\Phi_{k+1} = \Psi \circ \Phi_k^\circ$ on fait le calcul

$$\begin{aligned} \big((\Psi \circ \Phi_k^\circ)(A)\big)(v_0, v_1, \ldots, v_k) &= \Big(\Psi\big(\Phi_k^\circ(A)\big)\Big)(v_0, v_1, \ldots, v_k) \\ &= \Big(\big(\Phi_k^\circ(A)\big)(v_0)\Big)(v_1, \ldots, v_k) = \big((\Phi_k \circ A)(v_0)\big)(v_1, \ldots, v_k) \\ &= \Big(\Phi_k\big(A(v_0)\big)\Big)(v_1, \ldots, v_k) \\ &= \Big(\ldots\Big(\big(A(v_0)\big)(v_1)\Big)(v_2)\ldots\Big)(v_k) = \big(\Phi_{k+1}(A)\big)(v_0, \ldots, v_k) \quad , \end{aligned}$$

où on a volontairement utilisé, dans $v_0, \ldots, v_k$, les indices de 0 à k au lieu d'aller de 1 à $k+1$ pour pouvoir mieux comparer/appliquer la définition de l'application Φ_k à l'élément $A(v_0)$. La conclusion est qu'on a bien l'égalité $\Phi_{k+1} = \Psi \circ \Phi_k^\circ$.

Pour montrer que Ψ est un isomorphisme isométrique, il y a plusieurs choses à vérifier : (1) que Ψ envoie bien $\mathcal{L}\big(E;\mathcal{L}^{(k)}(E^k;F)\big)$ dans $\mathcal{L}^{(k+1)}(E^{k+1};F)$; (2) que Ψ est linéaire ; (3) que Ψ est isométrique [1.30] ; et (4) que Ψ est surjective.[2] Avec ces résultats on peut invoquer [1.29] pour conclure que Ψ est bien un isomorphisme isométrique.

Soit donc $A \in \mathcal{L}\big(E;\mathcal{L}^{(k)}(E^k;F)\big)$ et regardons la définition (15.30) de $\Psi(A)$ où il faut montrer que le résultat est linéaire en chacun des variables v_i et que $\Psi(A)$ est bien continue. La linéarité dans les variables v_i avec $i > 1$ est immédiat, car l'application $A(v_1)$ appartient à $\mathcal{L}^{(k)}(E^k;F)$. Pour la linéarité dans v_1 il suffit d'invoquer que A est linéaire et de faire le calcul

$$\begin{aligned} \big(\Psi(A)\big)(v_1 + \lambda v_1', v_2, \ldots, v_{k+1}) &= \big(A(v_1 + \lambda v_1')\big)(v_2, \ldots, v_{k+1}) \\ &= \big(A(v_1) + \lambda A(v_1')\big)(v_2, \ldots, v_{k+1}) \\ &= \big(A(v_1)\big)(v_2, \ldots, v_{k+1}) + \lambda \cdot \big(A(v_1')\big)(v_2, \ldots, v_{k+1}) \end{aligned}$$

2. Une partie de cette preuve est déjà faite dans la preuve de [7.12.ii], mais dans des circonstances légèrement différentes (pas sous la forme de récurrence). Ici il faut donc "refaire" la preuve que $\Psi(A)$ est une application $k+1$-linéaire et continue.

$$= \big(\Psi(A)\big)(v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) + \lambda \cdot \big(\Psi(A)\big)(v_1', v_2, \dots, v_{k+1}) \quad .$$

Pour la continuité de $\Psi(A)$ on fait le calcul

$$\begin{aligned}\|\big(\Psi(A)\big)(v_1, v_2, \dots, v_{k+1})\| &= \|\big(A(v_1)\big)(v_2, \dots, v_{k+1})\| \\ &\overset{A(v_1)\in\mathcal{L}^{(k)}(E^k;F))}{\leqslant} \|A(v_1)\| \cdot \|v_2\| \cdots \|v_{k+1}\| \\ &\overset{A\in\mathcal{L}(E;\mathcal{L}^{(k)}(E^k;F))}{\leqslant} \|A\| \cdot \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdots \|v_{k+1}\| \quad .\end{aligned}$$

Avec [6.6] on en déduit que $\Psi(A)$ est continue avec $\|\Psi(A)\| \leqslant \|A\|$. Ainsi on est sûr que $\Psi(A)$ appartient bien à $\mathcal{L}^{(k+1)}(E^{k+1}; F)$.

Pour la linéarité de Ψ on fait le calcul

$$\begin{aligned}\big(\Psi(A+\lambda A')\big)(v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) &= \big((A+\lambda A')(v_1)\big)(v_2, \dots, v_{k+1}) \\ &= \big(A(v_1) + \lambda A'(v_1)\big)(v_2, \dots, v_{k+1}) \\ &= \big(A(v_1)\big)(v_2, \dots, v_{k+1}) + \lambda \cdot \big(A'(v_1)\big)(v_2, \dots, v_{k+1}) \\ &= \big(\Psi(A)\big)(v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) + \lambda \cdot \big(\Psi(A')\big)(v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) \quad .\end{aligned}$$

Étant donné que c'est vrai pour tout $v_i \in E$, on en déduit la linéarité de Ψ.

Pour montrer que Ψ est une isométrie, on fait le calcul

$$\begin{aligned}\|\Psi(A)\| &= \sup_{v_0,\dots,v_k\neq 0} \frac{\|\big(\Psi(A)\big)(v_0, \dots, v_k)\|}{\|v_0\| \cdots \|v_k\|} = \sup_{v_0,\dots,v_k\neq 0} \frac{\|\big(A(v_0)\big)(v_1, \dots, v_k)\|}{\|v_0\| \cdots \|v_k\|} \\ &= \sup_{v_0\neq 0} \sup_{v_1,\dots,v_k\neq 0} \frac{\|\big(A(v_0)\big)(v_1, \dots, v_k)\|}{\|v_0\| \cdot \|v_1\| \cdots \|v_k\|} = \sup_{v_0\neq 0} \frac{\|A(v_0)\|}{\|v_0\|} = \|A\| \quad .\end{aligned}$$

Et finalement pour montrer que Ψ est surjective, on prend $B \in \mathcal{L}^{(k+1)}(E^{k+1}; F)$ et on définit l'application $A \in \mathcal{L}\big(E; \mathcal{L}^{(k)}(E^k; F)\big)$ par

$$\big(A(v_0)\big)(v_1, \dots, v_k) = B(v_0, \dots, v_k) \quad .$$

Évidemment il faut montrer que ce A appartient bien à $\mathcal{L}\big(E; \mathcal{L}^{(k)}(E^k; F)\big)$. Et pour cela il faut d'abord montrer que l'application $A(v_0) : E^k \to F$ est bien k-linéaire et continue et ensuite que l'application $A : E \to \mathcal{L}^{(k)}(E^k; F)$ est linéaire et continue. Ces vérifications sont analogue aux vérifications faites ci-dessus et elles sont laissées aux bons soins du lecteur assidu. La définition de A est telle qu'il est évident qu'on a $\Psi(A) = B$, montrant que Ψ est bien surjective. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.19]. Si on combine [5.2] avec [5.4], on obtient l'égalité

$$(D_v f)(a) = \begin{pmatrix} (D_v f_1)(a) \\ \vdots \\ (D_v f_p)(a) \end{pmatrix} \quad .$$

Si on itère cette opération k fois, on obtient l'égalité

$$\Big(D_{v_1}\big(D_{v_2} \dots (D_{v_k} f) \dots\big)\Big)(a) = \begin{pmatrix} \Big(D_{v_1}\big(D_{v_2} \dots (D_{v_k} f_1) \dots\big)\Big)(a) \\ \vdots \\ \Big(D_{v_1}\big(D_{v_2} \dots (D_{v_k} f_p) \dots\big)\Big)(a) \end{pmatrix} \quad .$$

Il suffit maintenant d'appliquer [7.12.i] pour obtenir le résultat voulu. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [7.20]. Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, ce qui donne l'égalité

$$v^{(\ell)} \equiv \big(v_1^{(\ell)}, \dots, v_n^{(\ell)} \big) = \sum_{j=1}^{n} v_j^{(\ell)} \, e_j \quad .$$

Par k-linéarité [7.12.ii], [7.12.i] et [5.8] on a donc :

$$\begin{aligned} \big((D^k f)(a)\big)(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) &\overset{[7.12.ii]}{=} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} \big((D^k f)(a)\big)(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \, v_{j_1}^{(1)} \, v_{j_2}^{(2)} \cdots v_{j_k}^{(k)} \\ &\overset{[7.12.i]}{=} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} \Big(D_{e_{j_1}} \big(D_{e_{j_2}} \dots (D_{e_{j_k}} f) \dots \big) \Big)(a) \, v_{j_1}^{(1)} \, v_{j_2}^{(2)} \cdots v_{j_k}^{(k)} \\ &\overset{[5.8]}{=} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (\partial_{j_1} \partial_{j_2} \cdots \partial_{j_k} f)(a) \, v_{j_1}^{(1)} \, v_{j_2}^{(2)} \cdots v_{j_k}^{(k)} \quad . \end{aligned}$$

Dans le cas $F = \mathbf{R}^p$ il suffit maintenant d'appliquer [7.19]. $\boxed{CQFD}$

Les preuves de §8

Preuve de [8.1]. Pour montrer l'égalité $\big(D_v(D_w f)\big)(a) = \big(D_w(D_v f)\big)(a)$, faisons d'abord quelques calculs heuristiques pour justifier la preuve officielle. On commence avec la remarque que, pour une application différentiable g, on a approximativement l'égalité

$$g(a+v) - g(a) \approx \big((Dg)(a)\big)(v) = (D_v g)(a) \quad ,$$

et que l'approximation est meilleure quand v est plus petit. On peut donc faire les approximations suivantes :

$$\begin{aligned}\big(D_v(D_w f)\big)(a) &\approx (D_w f)(a+v) - (D_w f)(a) \\ &\approx f(a+v+w) - f(a+v) - f(a+w) + f(a) \quad ,\end{aligned}$$

mais aussi

$$\begin{aligned}\big(D_w(D_v f)\big)(a) &\approx (D_v f)(a+w) - (D_v f)(a) \\ &\approx f(a+v+w) - f(a+w) - f(a+v) + f(a) \quad .\end{aligned}$$

Les deux quantités dont on veut montrer l'égalité ont donc la même expression comme approximation, ce qui nous donne l'égalité approximative

$$\big(D_w(D_v f)\big)(a) \approx \big(D_v(D_w f)\big)(a) \quad .$$

Mais ce n'est qu'un approximation et cela ne marche bien que si v et w sont “petits.” Pour remédier ce dernier “défaut,” on remplace v par xv avec $x \in \mathbf{R}$ qu'on suppose petit, on remplace w par yw avec $y \in \mathbf{R}$ petit et on introduit (pour raccourcir les expressions) la fonction g comme

$$g(x,y) = f(a+xv+yw) - f(a+xv) - f(a+yw) + f(a) \quad .$$

Si on utilise le fait qu'une différentielle est une application linéaire, on obtient les approximations suivantes :

$$xy\,\big(D_w(D_v f)\big)(a) = \big(D_{yw}(D_{xv} f)\big)(a) \approx g(x,y) \approx \big(D_{xv}(D_{yw} f)\big)(a) = xy\,\big(D_v(D_w f)\big)(a) \quad ,$$

des approximations qu'on réécrit sous la forme

$$g(x,y) - xy\,\big(D_w(D_v f)\big)(a) \approx 0 \qquad \text{et} \qquad g(x,y) - xy\,\big(D_v(D_w f)\big)(a) \approx 0 \quad .$$

L'idée de la preuve est alors de rendre ces approximations tellement précises qu'on peut en déduire l'égalité voulue.

On commence par fixer $\varepsilon > 0$ arbitraire et on introduit (comme ci-dessus) la fonction g par

$$g(x,y) = f(a+xv+yw) - f(a+xv) - f(a+yw) + f(a) \quad ,$$

ce qui est une fonction définie et différentiable dans un voisinage ouvert de $(0,0)$ et qui est deux fois différentiable en $(0,0)$. Plus précisément, on introduit l'application $P : \mathbf{R}^2 \to E$ par

$$P(x,y) = a + xv + yw \quad .$$

Il est immédiat que P est de classe C^∞ comme la somme d'une application constante et une application linéaire continue [1.19], [7.2]. Si on note par $V \subset U$ le voisinage ouvert de a sur lequel f est différentiable (et donc $Df : V \to \mathcal{L}(E;F)$ est différentiable en a), alors $W = P^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de $(0,0) \in \mathbf{R}^2$, la fonction g est définie et différentiable sur W et deux fois différentiable en $(0,0)$ comme (addition/différence de) composée d'une fonction infiniment différentiable en $(0,0)$ et une fonction différentiable sur V et deux fois différentiable en $a = P(0,0)$.

On commence maintenant avec quelques calculs simples :

$$\begin{aligned}(\partial_1 g)(x,y) &= \big((Df)(a+xv+yw)\big)(v) - \big((Df)(a+xv)\big)(v)\\ &= (D_v f)(a+xv+yw) - (D_v f)(a+xv)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\partial_2 g)(x,y) &= \big((Df)(a+xv+yw)\big)(w) - \big((Df)(a+yw)\big)(w)\\ &= (D_w f)(a+xv+yw) - (D_w f)(a+yw)\end{aligned}$$

$$\big(\partial_1(\partial_1 g)\big)(0,0) = 0 = \big(\partial_2(\partial_2 g)\big)(0,0)$$

$$\big(\partial_2(\partial_1 g)\big)(0,0) = \big(D_w(D_v f)\big)(a) \quad \text{et} \quad \big(\partial_1(\partial_2 g)\big)(0,0) = \big(D_v(D_w f)\big)(a) \quad .$$

Il y a plusieurs façons d'obtenir ces résultats. La première est directe : la définition de la dérivée partielle ∂_1 comme une dérivée directionnelle. Par exemple, pour la dérivée $\partial_1 h$ de la partie $h(x,y) = f(a+xv+yw)$ on a donc

$$\begin{aligned}(\partial_1 h)(x,y) \equiv (D_{e_1} h)(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h,y)-h(x,y)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+xv+yw+hv) - f(a+xv+yw)}{h} = (D_v f)(a+xv+yw) \quad ,\end{aligned}$$

et des calculs similaires pour les autres termes. Pour les dérivées secondes on fait la remarque que $\partial_1(\partial_1 g)$ est la dérivée directionnelle (dans la direction e_1) de la fonction $\partial_1 g$ calculée précédemment. On aura donc pour la partie $h(x,y) = (D_v)(a+xv+yw)$ le calcul

$$(\partial_1 h)(0,0) = \big(D_v(D_v f)\big)(a+0v+0w) = \big(D_v(D_v f)\big)(a) \quad ,$$

et des calculs similaires pour les autres termes.

Une deuxième façon utilise la fonction $P : \mathbf{R}^2 \to E$ définie précédemment. La différentielle $(DP)(x,y)$ est l'application linéaire continue (constante) donnée par

$$\big((DP)(x,y)\big)(h,k) = hv + kv \quad ,$$

ce qui donne immédiatement les résultats

$$(\partial_1 P)(x,y) \equiv (D_{e_1} P)(x,y) = \big((DP)(x,y)\big)(1,0) = v \qquad \text{et} \qquad (\partial_2 P)(x,y) = \cdots = w \quad .$$

Pour la partie $h(x,y) = f(a+xv+yw) = f\big(P(x,y)\big)$ et donc $h = f\circ P$ on a le calcul :

$$\begin{aligned}(\partial_1 h)(x,y) \equiv \big((Dh)(x,y)\big)(e_1) &\overset{[2.14]}{=} \Big((Df)\big(g(x,y)\big)\Big)\Big(\big((DP)(x,y)\big)(e_1)\Big)\\ &= \Big((Df)\big(g(x,y)\big)\Big)(v) = (D_v f)\big(g(x,y) \quad .\end{aligned}$$

Le calcul des autres termes suit le même schéma.

Ensuite on invoque le fait que $\partial_1 g = D_{e_1} g$ est différentiable en $(0,0)$ [7.10.ii] pour en déduire que (pour notre $\varepsilon > 0$ donné) il existe $\delta > 0$ (avec bien sûr $B_\delta\big((0,0)\big) \subset W$ pour que l'expression a un sens) tel que, si $\|(x,y)\|_\infty < \delta$, alors on a, en utilisant [5.11], l'inégalité

$$\frac{\|\,(\partial_1 g)(x,y) - (\partial_1 g)(0,0) - x\,\big(\partial_1(\partial_1 g)\big)(0,0) - y\,\big(\partial_2(\partial_1 g)\big)(0,0)\,\|}{\|(x,y)\|_\infty} < \epsilon \quad .$$

Avec ce qu'on sait sur g, ceci se réduit à la propriété

$$|x|, |y| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|(\partial_1 g)(x,y) - y\,\big(D_w(D_v f)\big)(a)\| < \varepsilon \cdot \|(x,y)\|_\infty \quad .$$

La dernière étape est de considérer, pour $|y| < \delta$, la fonction $G : \,]-\delta,\delta\,[\, \to F$ définie par

$$G(t) = g(t,y) - ty\,\big(D_w(D_v f)\big)(a)$$

avec

$$G'(t) = (\partial_1 g)(t,y) - y\,\big(D_w(D_v f)\big)(a) \quad ,$$

et d'appliquer l'inégalité des accroissements finis [3.6] à G sur l'intervalle de 0 à x avec $|x| < \delta$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\|G(x) - G(0)\| &\leqslant \sup_{t\in\ ]-\delta,\delta[} \|G'(t)\| \cdot |x-0| \leqslant \varepsilon \cdot \|(x,y)\|_\infty \cdot |x| \\ &\leqslant \varepsilon \cdot \big(\, \|(x,y)\|_\infty\big)^2 \ .\end{aligned}$$

Avec la définition de G on a donc obtenu la propriété

$$|x|, |y| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|g(x,y) - xy\,\big(D_w(D_vf)\big)(a)\| \leqslant \varepsilon \cdot \big(\, \|(x,y)\|_\infty\big)^2 \ .$$

En partant de la différentiabilité de $\partial_2 g$ en $(0,0)$ on obtient (de la même manière) un $\delta' > 0$ tel qu'on ait

$$|x|, |y| < \delta' \qquad \Longrightarrow \qquad \|g(x,y) - xy\,\big(D_v(D_wf)\big)(a)\| \leqslant \varepsilon \cdot \big(\, \|(x,y)\|_\infty\big)^2 \ .$$

Avec $x = y = \frac{1}{2}\min(\delta,\delta')$ on peut donc faire le calcul

$$\begin{aligned}&\|\,\big(D_w(D_vf)\big)(a) - \big(D_v(D_wf)\big)(a)\,\| \\ &\qquad = \frac{1}{x^2} \cdot \|\, x^2\,\big(D_w(D_vf)\big)(a) - x^2\,\big(D_v(D_wf)\big)(a)\,\| \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{x^2} \cdot \Big(\ \|\, g(x,x) - x^2\,\big(D_w(D_vf)\big)(a)\,\| \\ &\qquad\qquad\qquad + \|\, g(x,x) - x^2\,\big(D_v(D_wf)\big)(a)\,\|\ \Big) \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{x^2} \cdot 2\varepsilon \cdot \big(\, \|(x,x)\|_\infty\big)^2 = 2\varepsilon \ .\end{aligned}$$

Étant donné que $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit qu'on a forcément l'égalité $\big(D_w(D_vf)\big)(a) = \big(D_v(D_wf)\big)(a)$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [8.2]. On commence avec la remarque/rappel que toute permutation de $\{1,\ldots,k\}$ s'écrit comme une composée de transpositions de deux voisins, c'est-à-dire comme une composée de permutations σ_i, $1 \leqslant i < k$ de la forme

$$\sigma_i(j) = \begin{cases} j & j < i \text{ ou } j > i+1 \\ i+1 & j = i \\ i & j = i+1 \ . \end{cases}$$

Pour montrer que $(D^kf)(a)$ est symétrique, il suffit donc de montrer, pour tout $1 \leqslant i < k$ et tout $v_\ell \in E$, l'égalité

$$\begin{aligned}&\big((D^kf)(a)\big)(v_1,\ldots,v_k) \\ &\qquad = \big((D^kf)(a)\big)(v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},v_i,v_{i+2},\ldots,v_k) \ .\end{aligned} \tag{15.31}$$

Étant donné que f est k fois différentiable en a, f est $k-1$ fois différentiable sur U et $D^{k-1}f$ est différentiable en a. On peut donc appliquer [7.10.ii] d'une façon itérative pour en déduire que la fonction g définie comme

$$g = D_{v_{i+2}} D_{v_{i+3}} \ldots D_{v_k} f$$

est $i+1$ fois différentiable sur U pour $1 < i < k$ et 2 fois différentiable en a pour $i = 1$. Selon le théorème de Schwarz [8.1] on a donc l'égalité

$$D_{v_i}(D_{v_{i+1}} g) = D_{v_{i+1}}(D_{v_i} g)$$

sur U dans le cas $1 < i < k$ et seulement en a dans le cas $i = 1$. Pour $1 < i < k$ on en déduit, de nouveau avec [7.10.ii], que $D_{v_i}(D_{v_{i+1}}g)$ (et donc $D_{v_{i+1}}(D_{v_i}g)$) est $i-1$ fois différentiable en a. Il s'ensuit qu'on a, pour tout $1 \leqslant i < k$, l'égalité

$$(D_{v_1} \dots D_{v_{i-1}} D_{v_i} D_{v_{i+1}} g)(a) = (D_{v_1} \dots D_{v_{i-1}} D_{v_{i+1}} D_{v_i} g)(a) \ .$$

Selon la définition de g on a donc, pour tout $1 \leqslant i < k$, l'égalité

$$\begin{aligned}(D_{v_1} \dots D_{v_{i-1}} D_{v_i} D_{v_{i+1}} D_{v_{i+2}} \dots D_{v_k} f)(a) \\ = (D_{v_1} \dots D_{v_{i-1}} D_{v_{i+1}} D_{v_i} D_{v_{i+2}} \dots D_{v_k} f)(a) \ .\end{aligned}$$

Si on combine cela avec [7.12] et [7.13], on a montré (15.31). $\boxed{CQFD}$

Preuve de [8.3]. La preuve se fait par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant montré en [2.9] et [7.2]. Supposons donc qu'on a le résultat pour $n \geqslant 1$ et considérons le cas $n + 1$. Pour $v_1, \dots, v_n \in E$ on définit l'application $H^\flat(v_1, \dots, v_n) : E \to F$ par

$$\big(H^\flat(v_1, \dots, v_n)\big)(h) = (n+1) \cdot H(v_1, \dots, v_n, h) \ .$$

De la continuité de H on déduit immédiatement qu'on a

$$\|\big(H^\flat(v_1, \dots, v_n)\big)(h)\| \leqslant (n+1) \cdot \|H\| \cdot \|v_1\| \cdots \|v_n\| \cdot \|h\| \ ,$$

ce qui montre (avec [1.23]) que $H^\flat(v_1, \dots, v_n)$ est continue avec

$$\|H^\flat(v_1, \dots, v_n)\| \leqslant (n+1) \cdot \|H\| \cdot \|v_1\| \cdots \|v_n\| \ . \tag{15.32}$$

Ainsi on a obtenu une application $H^\flat : E^n \to \mathcal{L}(E; F)$. Le fait que H est $(n+1)$-linéaire symétrique entraîne que $H^\flat$ est n-linéaire symétrique et l'inégalité (15.32) montre qu'elle est continue. Si on définit maintenant la fonction $f^\flat : E \to \mathcal{L}(E; F)$ par

$$f^\flat(v) = H^\flat(v, \dots, v) \ ,$$

alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et conclure que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$\big((D^k f^\flat)(v)\big)(h_1, \dots, h_k) = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot H^\flat(\underbrace{v, \dots, v}_{n-k \text{ fois}}, h_1, \dots, h_k) \ , \tag{15.33}$$

et $D^k f^\flat = 0$ pour $k > n$. D'autre part, de nouveau par la $(n+1)$-linéarité et symétrie de H (et le binôme de Newton), on a l'égalité

$$f(v+h) - f(v) - \big(f^\flat(v)\big)(h) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} \cdot H(\underbrace{v, \dots, v}_{n+1-k \text{ fois}}, \underbrace{h, \dots, h}_{k \text{ fois}}) \ ,$$

ce qui nous donne la majoration

$$\|f(v+h) - f(v) - \big(f^\flat(v)\big)(h)\| \leqslant \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} \cdot \|H\| \cdot \|v\|^{n+1-k} \cdot \|h\|^k \ .$$

Il s'ensuit que f est différentiable en v avec $(Df)(v) = f^\flat(v)$. La fonction $f^\flat$ étant de classe C^∞ par hypothèse de récurrence, f est de classe C^∞ par [7.4]. Si on combine ce résultat avec (15.33), on retrouve directement le résultat souhaité : d'abord

$$\big((Df)(v)\big)(h) = \big(f^\flat(v)\big)(h) = (n+1) \cdot H(v, \dots, v, h) \ ,$$

ensuite pour $2 \leqslant k+1 \leqslant n+1$

$$\begin{aligned}\big((D^{k+1}f)(v)\big)(h_1,\ldots,h_{k+1}) &= \Big(\big((D^k f^\flat)(v)\big)(h_1,\ldots,h_k)\Big)(h_{k+1})\\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\cdot\big(H^\flat(v,\ldots,v,h_1,\ldots,h_k)\big)(h_{n+1})\\ &= \frac{(n+1)!}{(n-k)!}\cdot H(v,\ldots,v,h_1,\ldots,h_k,h_{k+1})\\ &= \frac{(n+1)!}{\big((n+1)-(k+1)\big)!}\cdot H(v,\ldots,v,h_1,\ldots,h_k,h_{k+1})\quad ,\end{aligned}$$

et finalement pour $k+1 > n+1$: $D^{k+1}f = D^k(Df) = D^k f^\flat = 0$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [8.4]. On pose $G = E_1 \times \cdots \times E_n$ et on définit $H : G^n \to F$ par la formule

$$H\big(v^{[1]},\ldots,v^{[n]}\big) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}} A\big(v_1^{[\sigma(1)]},v_2^{[\sigma(2)]},\ldots,v_n^{[\sigma(n)]}\big)\quad .$$

On vérifie facilement que H est une application n-linéaire et on va montrer qu'elle est continue symétrique. Pour la continuité on rappelle que la norme sur le produit $G = E_1 \times \cdots \times E_n$ est définie par $\|v\|_\infty = \max_i \|v_i\|$ [1.13]. Ensuite il suffit de faire le calcul

$$\begin{aligned}\big\|H\big(v^{[1]},\ldots,v^{[n]}\big)\big\| &\leqslant \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}}\big\|A\big(v_1^{[\sigma(1)]},\ldots,v_n^{[\sigma(n)]}\big)\big\|\\ &\overset{[6.5]}{\leqslant} \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}}\|A\|\cdot\big\|v_1^{[\sigma(1)]}\big\|\cdots\big\|v_n^{[\sigma(n)]}\big\|\\ &\overset{\text{déf. }\|\cdot\|_\infty}{\leqslant} \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}}\|A\|\cdot\big\|v^{[\sigma(1)]}\big\|_\infty\cdots\big\|v^{[\sigma(n)]}\big\|_\infty\\ &= \|A\|\cdot\big\|v^{[1]}\big\|_\infty\cdots\big\|v^{[n]}\big\|_\infty\quad .\end{aligned}$$

Selon [6.6] l'application n-linéaire H est donc continue avec $\|H\| \leqslant \|A\|$. Et pour la symétrie on fait le calcul :

$$\begin{aligned}H\big(v^{[\tau(1)]},\ldots,v^{[\tau(n)]}\big) &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}} A\big(v_1^{[\tau(\sigma(1))]},\ldots,v_n^{[\tau(\sigma(n))]}\big)\\ &\overset{\sigma'=\tau\circ\sigma}{=} \frac{1}{n!}\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}} A\big(v_1^{[\sigma'(1)]},\ldots,v_n^{[\sigma'(n)]}\big)\\ &= H\big(v^{[1]},\ldots,v^{[n]}\big)\quad .\end{aligned}$$

Mais pour $v \in G$ on a en plus l'égalité

$$H(\underbrace{v,\ldots,v}_{n\text{ fois}}) = A(v)\quad .$$

On peut donc appliquer [8.3] (avec E remplacé par G est f par A) pour obtenir que A est de classe C^∞, que $D^kA \equiv 0$ pour $k > n$ et que pour $1 \leqslant k \leqslant n$ on a

$$\big((D^kA)(v)\big)\big(h^{[1]},\ldots,h^{[k]}\big) = \frac{n!}{(n-k)!}\cdot H\big(\underbrace{v,\ldots,v}_{n-k\text{ fois}},h^{[1]},\ldots,h^{[k]}\big)$$

$$\overset{\text{sym. de } H}{=} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot H\big(h^{[1]}, \ldots, h^{[k]}, v, \ldots, v\big)$$
$$= \frac{1}{(n-k)!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} A\big(h_1^{[\sigma(1)]}, \ldots, h_n^{[\sigma(n)]}\big) \ ,$$

où on a posé $h^{[i]} = v$ pour $i > k$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [8.7]. On commence avec quelques majorations :

$$\frac{\left\| f(a+h) - \sum_{k=0}^{m} H_k(h, \ldots, h) \right\|}{\|h\|^m}$$
$$= \frac{\left\| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} H_k(h, \ldots, h) + \sum_{k=m+1}^{n} H_k(h, \ldots, h) \right\|}{\|h\|^m}$$
$$\leqslant \frac{\left\| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} H_k(h, \ldots, h) \right\|}{\|h\|^m} + \frac{\left\| \sum_{k=m+1}^{n} H_k(h, \ldots, h) \right\|}{\|h\|^m}$$
$$\overset{[6.5]}{\leqslant} \frac{\left\| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} H_k(h, \ldots, h) \right\|}{\|h\|^n} \cdot \|h\|^{n-m} + \sum_{k=m+1}^{n} \|H_k\| \cdot \|h\|^{k-m} \ .$$

Avec cela, il suffit de prendre la limite $h \to 0$ pour obtenir le résultat. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [8.8]. Supposons qu'on a deux suites d'applications $H_0, \ldots, H_n$ et $H'_0, \ldots, H'_n$ vérifiant la condition d'un développement limité. Alors on démontre par récurrence sur k que $H_k = H'_k$. En supposant qu'on a montré $H_i = H'_i$ pour $i < k$, on prend $h \in E^*$ et $\lambda \in \mathbf{R}^*$ et on calcule :

$$\|H_k(h, \ldots, h) - H'_k(h, \ldots, h)\| = \frac{\|H_k(\lambda h, \ldots, \lambda h) - H'_k(\lambda h, \ldots, \lambda h)\|}{|\lambda|^k}$$
$$\leqslant \frac{\left\| f(a+\lambda h) - \sum_{i=0}^{k} H_i(\lambda h, \ldots, \lambda h) \right\|}{\|\lambda h\|^k} \cdot \|h\|^k$$
$$+ \frac{\left\| f(a+\lambda h) - \sum_{i=0}^{k} H'_i(\lambda h, \ldots, \lambda h) \right\|}{\|\lambda h\|^k} \cdot \|h\|^k \ .$$

Mais par [8.7] $H_0, \ldots, H_k$ et $H'_0, \ldots, H'_k$ sont des développements limités de f en a d'ordre k, donc le membre de droite tend vers 0 dans la limite $\lambda \to 0$. D'autre part, le membre de gauche est indépendant de λ et doit donc être nul. Il s'ensuit qu'on a

$$\forall h \in E \quad : \quad H_k(h, \ldots, h) = H'_k(h, \ldots, h) \ .$$

Suivant [8.3] (en remplaçant le n dans [8.3] par k) on définit la fonction $f : E \to F$ par

$$f(v) = H_k(h, \ldots, h) = H_k'(h, \ldots, h)$$

et on en déduit que pour tout $h_1, \ldots, h_k \in E$ on a les égalités

$$k! \cdot H_k(h_1, \ldots, h_k) = \big((D^k f)(v)\big)(h_1, \ldots, h_k) = k! \cdot H_k'(h_1, \ldots, h_k) \quad .$$

Autrement dit, $H_k = H_k'$.

Le lecteur vaguement attentif pourrait avoir l'impression qu'il manque l'initialisation de la récurrence. Mais cette manque n'est qu'illusoire, car elle est bien là. Si on regarde bien l'hypothèse de récurrence, elle est formulée comme l'hypothèse qu'on sait quelque chose pour tout $i < k$ et on en déduit que c'est vrai aussi pour $i = k$. Il est vrai que normalement on l'aurait formulé comme l'hypothèse qu'on sait quelque chose pour tout $i \leqslant k$ et on en déduit que ça reste vrai pour le cas $i = k+1$. La différence est subtile mais significative. Si on regarde notre cas $k = 0$, l'hypothèse est qu'on sait quelque chose pour tout $i < 0$, ce qui est trivialement vrai, car il n'y a pas d'entier $i < 0$. Et on en déduit que c'est vrai pour $i = 0$, ce qu'on peut considérer comme l'initialisation. Cette façon de formuler la récurrence vient de la récurrence transfinie et est particulièrement avantageux dans les cas où l'initialisation se montre de la même manière que le passage au successeur, comme c'est le cas ici. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [8.9]. La preuve se fait par récurrence sur n. Pour le cas $n = 1$ on remarque qu'on a $H_0 = (D^0 f)(a) \equiv f(a)$ et $H_1(v) = \big((Df)(a)\big)(v)$. Il faut donc montrer qu'on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - H_0 - H_1(h)\|}{\|h\|} \equiv \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(v)\|}{\|h\|} = 0 \quad .$$

Mais ceci exprime le fait que f est différentiable en a avec différentielle $(Df)(a)$, ce qui est l'hypothèse.

On suppose donc que c'est vrai pour n et on suppose que f est $n+1$ fois différentiable en a, ce qui veut dire (voir [7.4]) que $Df : U \to \mathcal{L}(E; F)$ est n fois différentiable en a. Par hypothèse de récurrence il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tel que pour tout $\|h\| < \delta$ on a

$$\Big\| \, (Df)(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!} \Big(\big(D^k(Df)\big)(a)\Big)(h, \ldots, h) \, \Big\| < \varepsilon \cdot \|h\|^n \quad . \tag{15.34}$$

Comme à d'autres endroits, cette affirmation n'est pas complètement honnête. Dans la définition de limite on doit se restreindre aux points qui se trouvent dans le domaine de définition de la fonction. Ici il faut donc officiellement rajouter, à la condition $\|h\| < \delta$, la condition $a + h \in U$. Mais U est un ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B_r(a) \subset U$. Dans la définition de limite, il suffit donc de prendre un $\delta < r$ (ce qui est toujours possible) pour avoir une formule qui est effectivement valable pour tout $\|h\| < \delta$.

Maintenant on définit, pour un h vérifiant $\|h\| < \delta$ fixe, l'ouvert $I \subset \mathbf{R}$ par

$$I = \{\, t \in \mathbf{R} \mid a + th \in U \,\}$$

et il est évident qu'on a l'inclusion $[0, 1] \subset I$. Ensuite on introduit la fonction $G : I \to F$ par

$$G(t) = f(a+th) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k\,!} \big((D^k f)(a)\big)(h, \ldots, h)$$

$$= f(a+th) - \sum_{k=0}^{n+1} t^k\, H_k(h,\ldots,h) \enspace .$$

Pour appliquer l'inégalité des accroissements finis [3.6], on constate qu'on a

$$\begin{aligned}
G'(t) &= \big((Df)(a+th)\big)(h) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,\big((D^k f)(a)\big)(\underbrace{h,\ldots,h}_{k \text{ fois}}) \\
&= \big((Df)(a+th)\big)(h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\,\big((D^{k+1} f)(a)\big)(\underbrace{h,\ldots,h}_{k+1 \text{ fois}}) \\
&= \big((Df)(a+th)\big)(h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\Big(\big(\big(D^k(Df)\big)(a)\big)(\underbrace{h,\ldots,h}_{k \text{ fois}})\Big)(h) \\
&= \Big((Df)(a+th) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\,\big(\big(D^k(Df)\big)(a)\big)(h,\ldots,h)\Big)(h) \\
&= \Big((Df)(a+th) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\big(\big(D^k(Df)\big)(a)\big)(th,\ldots,th)\Big)(h) \enspace .
\end{aligned}$$

Avec (15.34) il s'ensuit que pour $t \in [0,1]$ et $\|h\| < \delta$ (et donc $\|th\| < \delta$) on a la majoration

$$\begin{aligned}
\|G'(t)\| &\leqslant \Big\|\ (Df)(a+th) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\big(\big(D^k(Df)\big)(a)\big)(th,\ldots,th)\ \Big\| \cdot \|h\| \\
&< \varepsilon \cdot \|h\|^{n+1} \enspace .
\end{aligned}$$

Selon l'inégalité des accroissements finis [3.6] on a donc la majoration

$$\|G(1) - G(0)\| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \|G'(t)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|h\|^{n+1} \enspace .$$

Mais $G(1) - G(0) = f(a+h) - \sum_{k=0}^{n+1} H_k(h,\ldots,h)$ et donc il s'ensuit que la suite $H_0,\ldots,H_{n+1}$ est bien un développement limité de f en a d'ordre $n+1$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [8.10]. Selon [8.7] avec $n = 1$ et $m = 0$ on a

$$\lim_{h\to 0} \|f(a+h) - H_0\| = 0 \enspace .$$

La continuité de f en a implique alors qu'on doit avoir $H_0 = f(a)$. Sachant cela, la définition d'un développement limité d'ordre 1 nous donne

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - H_0 - H_1(h)\|}{\|h\|} \equiv \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - H_1(h)\|}{\|h\|} = 0 \enspace ,$$

ce qui dit, selon la définition de la différentielle, que f est différentiable en a avec $(Df)(a) = H_1$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [8.11]. • (i) : Le résultat de Taylor-Young n'est rien d'autre que [8.9] (combiné avec la définition [8.6]).

Pour les trois autres formules, on commence avec les définitions de l'application $\gamma : \mathbf{R} \to E$ par

$$\gamma(t) = a + th$$

et de $I = \gamma^{-1}(U) \subset \mathbf{R}$. Alors par hypothèse on a l'inclusion $[0,1] \subset I$. Ensuite on définit l'application $\overline{g} : I \to F$ par

$$\overline{g}(t) = f(a+th) \equiv f\big(\gamma(t)\big)$$

qui est (donc, au moins) une application $n+1$ fois différentiable/dérivable comme composée d'une application $n+1$ fois différentiable avec une application de classe C^∞. Par [2.16] on a l'égalité

$$\overline{g}'(t) = \big((Df)(a+th)\big)\big(\gamma'(t)\big) = \big((Df)(a+th)\big)(h) = (D_h f)(a+th) \quad .$$

Par récurrence on a donc pour tout $k = 1, \dots, n+1$ l'égalité

$$\overline{g}^{(k)}(t) = \Big(\underbrace{D_h\big(D_h \dots (D_h}_{k \text{ fois}} f) \dots\big)\Big)(a+th) \overset{[7.12]}{=} \big((D^k f)(a+th)\big)(\underbrace{h, \dots, h}_{k \text{ fois}}) \quad .$$

Après ces préparations on reprend la preuve des trois résultats restants.

• (ii) : Si $\kappa \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{x \in]a,a+h[} \|(D^{n+1}f)(x)\| = \infty$, alors l'inégalité à montrer est trivialement vraie. Dans la suite on suppose donc que $\kappa < \infty$. Avec cette hypothèse on définit l'application $g : [0,1] \to F$ et la fonction $h : [0,1] \to \mathbf{R}$ par

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t)^k}{k!} \cdot \overline{g}^{(k)}(t) \qquad \text{et} \qquad h(t) = -\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \kappa \cdot \|h\|^{n+1} \quad .$$

L'intérêt de l'application g est qu'on a les égalités

$$\begin{aligned} g(0) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \overline{g}^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \big((D^k f)(a+th)\big)(\underbrace{h, \dots, h}_{k \text{ fois}}) = P_{a,n}(h) \\ g(1) &= \overline{g}(1) = f(a+h) \quad . \end{aligned}$$

Parce que $\overline{g}$ est $n+1$ fois dérivable, g est dérivable et on a

$$g'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \overline{g}^{(n+1)}(t) \qquad \text{et} \qquad h'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \kappa \cdot \|h\|^{n+1} \quad .$$

On a donc les majorations

$$\begin{aligned} \|g'(t)\| &= \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \|\overline{g}^{(n+1)}(t)\| = \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \Big\|\big((D^{n+1}f)(a+th)\big)(h, \dots, h)\Big\| \\ &\leqslant \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \|(D^{n+1}f)(a+th)\| \cdot \|h\|^{n+1} \\ &\leqslant \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \kappa \cdot \|h\|^{n+1} = h'(t) \quad . \end{aligned}$$

On peut donc appliquer la version primitive de l'inégalité des accroissements finis [3.5] (car la dérivabilité sur I implique la dérivabilité à droite sur $]0,1[\subset I$) pour conclure qu'on a l'inégalité

$$\|R_{a,n}(h)\| \equiv \|g(1) - g(0)\| \leqslant h(1) - h(0) \equiv \frac{\kappa \cdot \|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \quad .$$

• (iii) : Pour l'égalité de Taylor-Langrange dans le cas $F = \mathbf{R}$ on se base bien évidemment sur l'égalité des accroissements finis [3.3]. Mais on l'applique à une autre application g que pour l'inégalité (de Taylor-Lagrange) !

Soit $r \in \mathbf{R}$ et soit $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t)^k}{k!} \cdot \overline{g}^{(k)}(t) + r \cdot (1-t)^{n+1} \quad .$$

Et pour cette fonction g on a les égalités

$$g(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \overline{g}^{(k)}(0) + r = P_{a,n}(h) + r$$
$$g(1) = \overline{g}(1) = f(a+h) \quad .$$

Parce que $\overline{g}$ est $n+1$ fois dérivable, g est dérivable avec

$$g'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \overline{g}^{(n+1)}(t) - r \cdot (n+1) \cdot (1-t)^n \quad . \tag{15.35}$$

Si on définit r par l'équation $g(0) = g(1)$ (qui a une solution unique facile, mais on est trop paresseux pour l'écrire), alors on peut appliquer l'égalité des accroissements finis [3.3] (ce qui devient dans cette circonstance le théorème de Rolle) et conclure qu'il existe $\theta \in \,]0,1[$ tel que

$$0 = g(1) - g(0) = g'(\theta) \quad ,$$

ce qui nous donne (à l'aide de (15.35)) une autre expression pour r :

$$r = \frac{\overline{g}^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \big((D^{n+1}f)(a+\theta h)\big)(\underbrace{h,\ldots,h}_{n+1 \text{ fois}}) \quad .$$

Si on substitue cela dans l'équation $g(0) = g(1)$ on obtient

$$\begin{aligned} f(a+h) \equiv g(1) = g(0) &= P_{a,n}(h) + r \\ &= P_{a,n}(h) + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \big((D^{n+1}f)(a+\theta h)\big)(\underbrace{h,\ldots,h}_{n+1 \text{ fois}}) \quad , \end{aligned}$$

ce qui est la formule souhaitée.

• (iv) : Pour la preuve de la formule de Taylor-Laplace on utilise la même fonction g que dans la preuve de l'inégalité de Taylor-Lagrange ci-dessus, qui maintenant prend ses valeurs dans $\mathbf{R}$. Parce que f est de classe C^{n+1}, g sera de classe C^1, auquel cas on a, selon le théorème fondamental de l'analyse, l'égalité

$$\int_0^1 g'(t)\ \mathrm{d}t = g(1) - g(0) \quad .$$

Mais on a vu qu'on a les égalités $g(1) - g(0) = f(a+h) - P_{a,n}(h) \equiv R_{a,n}(h)$ et

$$g'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \overline{g}^{(n+1)}(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \big((D^{n+1}f)(a+th)\big)(h,\ldots,h)$$

et donc le théorème fondamental de l'analyse ci-dessus nous donne le résultat voulu.

$\boxed{CQFD}$

Les preuves de §9

Preuve de [9.1]. Soit $v \in E$ arbitraire, alors on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \overset{[5.1]}{=} (D_v f)(a) \overset{[5.2]}{=} \big((Df)(a)\big)(v) \quad .$$

Supposons maintenant que f présente un maximum local en a, ce qui veut dire qu'il existe un ouvert $V \subset U$ tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in V$. Si on définit l'ouvert $I \subset \mathbf{R}$ par

$$I = \{\, t \in \mathbf{R} \mid a + tv \in V \,\} \quad ,$$

alors I contient 0 et on a

$$t \in I\,,\, t > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \leqslant 0$$

et

$$t \in I\,,\, t < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \geqslant 0 \quad .$$

Pour justifier que I est un ouvert, on pourrait considérer l'application $\gamma : \mathbf{R} \to E$ définie par $\gamma(t) = a + tv$. Cette application est continue (elle est même de classe C^∞) et donc $I = \gamma^{-1}(V)$ est bien un ouvert.

Par passage à la limite (ce qui préserve les inégalités larges) et le fait que si la limite existe, les limites à droite et à gauche existent et ont la même valeur, on aura donc

$$\big((Df)(a)\big)(v) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \leqslant 0$$

et

$$\big((Df)(a)\big)(v) = \lim_{t\uparrow 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \geqslant 0 \quad .$$

Il s'ensuit qu'on doit avoir $\big((Df)(a)\big)(v) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $v \in E$, on a donc forcément $(Df)(a) = 0$. Et si f présente un minimum local en a, il suffit de changer les inégalités dans l'argument ci-dessus de sens pour arriver à la même conclusion.

Notre preuve est essentiellement une réécriture de la preuve que si une fonction $g : I \to \mathbf{R}$ dérivable en 0 présente un extremum local en 0 alors $g'(0) = 0$. Si on accepte ce résultat, alors on aurait pu raccourcir l'argument un peu en considérant l'application $g = f \circ \gamma : I \to \mathbf{R}$. Il est immédiat que $g(0) = f(a)$ est une valeur extrémale pour la fonction g et que g est dérivable en $t = 0$ avec

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \big((Df)(a)\big)(v) \quad .$$

Par le résultat cité on aura donc $0 = g'(0) = \big((Df)(a)\big)(v)$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [9.3]. L'idée (principale et unique) de la preuve est d'utiliser [8.9] avec $n = 2$ en disant que si h est petit, alors on peut faire l'approximation

$$f(a+h) \approx f(a) + \big((Df)(a)\big)(h) + \tfrac{1}{2}\big((D^2f)(a)\big)(h,h) \overset{a \text{ critique}}{=} f(a) + \tfrac{1}{2}H(h,h) \quad .$$

Si H est définie positive, il s'ensuit que $f(a+h) \geqslant f(a)$ pour h petit, c'est-à-dire que f présente un minimum local ; si H est définie négative, il s'ensuit que $f(a+h) \leqslant f(a)$ pour h petit, c'est-à-dire que f présente un maximum local ; et s'il existe des directions v et w telles que $H(v,v) < 0 < H(w,w)$, alors dans tout voisinage de a il y a des poins avec $f(x) < f(a)$ et des points avec $f(x) > f(a)$. La principale difficulté de la preuve est donc de préciser ce que veut dire "h petit" pour que ces conclusions sont justifiées.

On commence avec l'introduction de la fonction $q : S_1 \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall s \in S_1 \quad : \quad q(s) = H(s,s) \ \ ,$$

où $S_1 \subset E$ est la sphère unité :

$$S_1 = \{\, x \in E \mid \|x\| = 1 \,\} \ \ .$$

La sphère unité étant fermée (image réciproque du fermé $\{1\} \subset \mathbf{R}$ par l'application continue $\|\cdot\|$) et bornée, elle est donc compact (on est en dimension finie !). Parce que l'application H est bilinéaire et continue, la fonction q est continue. Il s'ensuit qu'il existe $s_m, s_M \in S_1$ tel que

$$\forall s \in S_1 \quad : \quad q(s_m) \leqslant q(s) \leqslant q(s_M) \ \ . \tag{15.36}$$

Pour $h \in E^*$ on peut écrire $h = \|h\| \cdot s$ avec $s = h/\|h\| \in S_1$. Par la bilinéarité de H on en déduit avec (15.36) qu'on a l'encadrement

$$\forall h \in E \quad : \quad q(s_m) \cdot \|h\|^2 \leqslant H(h,h) \leqslant q(s_M) \cdot \|h\|^2 \ \ .$$

Ensuite on prend $\varepsilon > 0$ qu'on déterminera plus tard et on invoque [8.9] avec $n = 2$ au point a pour conclure qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \forall h \in E \quad : \quad 0 < \|h\| < \delta \text{ et } a + h \in U \quad \Longrightarrow \\ \big|\, f(a+h) - f(a) - \big((Df)(a)\big)(h) - \tfrac{1}{2}\big((D^2 f)(a)\big)(h,h) \,\big| < \varepsilon \cdot \|h\|^2 \ \ . \end{aligned} \tag{15.37}$$

Sans perte de généralité on peut supposer qu'on a l'inclusion $B_\delta(a) \subset U$.

La phrase "sans perte de généralité on peut supposer que…" est souvent utilisée et veut dire qu'on peut s'arranger pour obtenir la condition écrite sans que les autres propriétés soient affectées. Ici on prétend donc qu'on peut s'arranger qu'on a $B_\delta(a) \subset U$. L'argument est comme suit : U est un ouvert, et $a \in U$. Donc il existe $r > 0$ tel que $B_r(a) \subset U$. En remplaçant δ par $\min(\delta, r)$ on aura un δ tel que $B_\delta(a) \subset U$ et tel que la condition (15.37) dont on parlait au préalable reste vraie.

Mais a est un point critique, donc $(Df)(a) = 0$, ce qui nous permet de réécrire ceci comme

$$\forall h \in B_\delta(0)^* \quad : \quad |f(a+h) - f(a) - \tfrac{1}{2}\, H(h,h)| < \varepsilon \cdot \|h\|^2 \ \ ,$$

ce qu'on peut transformer en l'encadrement

$$\begin{aligned} \forall h \in B_\delta(0)^* \quad : \quad (\text{en notant } s = h/\|h\| \in S_1\,) \\ \|h\|^2 \left(\tfrac{1}{2}\, q(s) - \varepsilon\right) < f(a+h) - f(a) < \|h\|^2 \left(\tfrac{1}{2}\, q(s) + \varepsilon\right) \ \ . \end{aligned} \tag{15.38}$$

Avec ces préparations on peut finalement traiter les trois cas de l'énoncé.

- Si H est définie positive, alors $q(s_m) > 0$. On choisit "donc" $\varepsilon = \frac{1}{2}\, q(s_m) > 0$, de sorte que les minorations dans [15.36] et [15.38] nous donnent :

$$\begin{aligned} \forall h \in B_\delta(0)^* \quad : \quad f(a+h) - f(a) &> \|h\|^2 \left(\tfrac{1}{2}\, q(s) - \varepsilon\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\, \|h\|^2 \, \big(q(s) - q(s_m)\big) \geqslant 0 \ \ , \end{aligned}$$

ce qui montre que f présente un minimum local strict en a.

- Si H est définie négative, $q(s_M) < 0$ et on choisit "donc" $\varepsilon = -\frac{1}{2}\, q(s_M) > 0$. Dans ce cas on utilise les majorations dans [15.36] et [15.38] pour obtenir :

$$\begin{aligned} \forall h \in B_\delta(0)^* \quad : \quad f(a+h) - f(a) &< \|h\|^2 \left(\tfrac{1}{2}\, q(s) + \varepsilon\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\, \|h\|^2 \, \big(q(s) - q(s_M)\big) \leqslant 0 \ \ , \end{aligned}$$

ce qui montre que f présente un maximum local strict en a.

• Pour traiter le dernier cas, on suppose que $v, w \in E$ sont comme annoncé et on définit $v_1 = v/\|v\|$ et $w_1 = w/\|w\|$ de sorte que $v_1, w_1 \in S_1$. Ensuite on pose

$$\varepsilon = \tfrac{1}{3}\,\min\bigl(-q(v_1), q(w_1)\bigr) > 0\ \ .$$

Supposons maintenant que f présente un minimum local en a. Il existe donc un voisinage ouvert V de a tel que

$$\forall x \in V \cap U \quad : \quad f(x) \geqslant f(a)\ \ . \tag{15.39}$$

V et U étant des ouvert contenant a, il existe $r > 0$ tel que $B_r(a) \subset V \cap U$. Il s'ensuit que pour $0 < \lambda < \min(\delta, r)$ on a $x = a + \lambda v_1 \in B_r(a) \cap B_\delta(a) \subset U$ et donc selon la majoration dans [15.38] on a :

$$f(x) - f(a) < \lambda^2 \cdot \bigl(\tfrac{1}{2}\,q(v_1) + \varepsilon\bigr) \leqslant \tfrac{1}{6}\,\lambda^2 \cdot q(v_1) < 0\ \ ,$$

en contradiction avec (15.39).

Si on suppose que f présente un maximum local en a, alors l'inégalité dans (15.39) change de sens et on utilise la minoration dans [15.38] pour obtenir :

$$f(a + \lambda w_1) - f(a) > \lambda^2 \cdot \bigl(\tfrac{1}{2}\,q(w_1) - \varepsilon\bigr) \geqslant \tfrac{1}{6}\,\lambda^2 \cdot q(w_1) > 0\ \ ,$$

en contradiction avec l'inégalité d'un maximum local. La conclusion est donc que f ne présente ni un maximum local ni un minimum local en a. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [9.8]. La matrice B étant symétrique, il existe une base orthonormée de vecteurs propres. Soit $P \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ la matrice formée par ces vecteurs propres. Alors le fait que c'est un système orthonormé implique qu'on a $P^{-1} = {}^tP$. Mais parce que ce sont des vecteurs propres, la matrice

$${}^tP \cdot B \cdot P \equiv P^{-1} \cdot B \cdot P = D$$

est une matrice diagonale avec les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur la diagonale. D'autre part, parce que P est inversble, les vecteurs $f_i = \sum_{j=1}^n P_{ji} e_j$ forment (aussi) une base de F. L'égalité $P^{-1} = {}^tP$ implique qu'on a la relation réciproque $e_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} f_j$. Pour tout vecteur $v = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ on a donc :

$$\begin{aligned} H(v, v) &= \sum_{i,j} x_i\, x_j\, H(f_i, f_j) = \sum_{i,j,k,\ell} x_i\, P_{ki}\, H(e_k, e_\ell)\, P_{\ell j}\, x_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i\, ({}^tP \cdot B \cdot P)_{ij}\, x_j = \sum_{i,j=1}^n x_i\, D_{ij}\, x_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, x_i^2\ \ . \end{aligned}$$

Il s'ensuit immédiatement que H est définie positive si et seulement si tous les $\lambda_i > 0$ et qu'elle est définie négative si et seulement si tous les $\lambda_i < 0$. Il est aussi immédiat que s'il existe $\lambda_i < 0$ et $\lambda_j > 0$, alors il existe $v, w \in F$ tels que $H(v, v) < 0 < H(w, w)$. Dans l'autre sens, si on a $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout i, alors il n'existe pas $v \in F$ tel que $H(v, v) < 0$ et si $\lambda_i \leqslant 0$ pour tout i, alors il n'existe pas $w \in F$ tel que $H(w, w) > 0$, ce qui termine l'équivalence (iii). $\boxed{CQFD}$

Preuve de [9.9]. On commence avec la remarque que $x_o > 0$ est un zéro de f d'ordre k si et seulement si x_o est un zéro d'ordre k de la fonction $f_d : \,]0, \infty[\, \to \mathbf{R}$

(pour un $d \in \mathbf{R}$ arbitraire) définie par

$$f_d(x) = x^d \cdot f(x) \quad .$$

Pour le voir on remarque la formule (une combinaison de le formule de Leibniz et le binôme de Newton) :

$$f_d^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \cdot d \cdot (d-1) \cdots (d-i+1) \cdot x^{d-i} \cdot f^{(n-i)}(x) \quad .$$

Si x_o est un zéro de f d'ordre k, alors il est immédiat que pour $n < k$ tous les termes de la somme à droite sont nuls, donc $f_d^{(n)}(x_o) = 0$. Et que pour $n = k$ la somme à droite ne contient qu'un seul terme non-nul : $x_o^d \cdot f^{(k)}(x_o)$, montrant qu'on a aussi $f_d^{(k)}(x_o) \neq 0$. Par symétrie, en remplaçant d par $-d$ ($f(x) = x^{-d} \cdot f_d(x)$), on en déduit que si x_o est un zéro de f_d d'ordre k, alors c'est un zéro d'ordre k de f.

La deuxième remarque à faire, une conséquence immédiate de la définition, est que, si x_o est un zéro de f d'ordre $k > 0$, alors x_o est un zéro d'ordre $k-1$ de f' et réciproquement, si $f(x_o) = 0$ et si x_o est un zéro d'ordre $k-1$ de f', alors x_o est un zéro d'ordre k de f.

• Avec ces préparations, la preuve de (i) se fait par récurrence sur n. Pour $n = 0$ la fonction f n'a pas de zéros ou, autrement dit, tout $x_o > 0$ est un zéro d'ordre 0 de f. Soit donc f une telle fonction avec $n+1$ termes et soit $x_o > 0$ tel que $f(x_o) = 0$. Si $f'(x_o) \neq 0$, c'est un zéro d'ordre 1. Sinon, par la première remarque ci-dessus, c'est aussi un zéro de f_d avec $d = -d_0$ et en plus avec aussi $f_d'(x_o) = 0$. Mais f_d' n'a que n termes, le terme constante a_0 ayant disparu en prenant la dérivée (c'est pourquoi on a multiplié f par x^{-d_0}). Par hypothèse de récurrence, il existe donc $k \in \mathbf{N}$ tel que x_o est un zéro d'ordre k de f_d', donc c'est un zéro d'ordre $k+1$ de f_d par la deuxième remarque ci-dessus, et donc c'est aussi un zéro d'ordre $k+1$ de f. Ainsi tout zéro de f a une multiplicité.

• La preuve de (ii) se fait par récurrence sur la valeur de $\sigma(f)$ comme décrite dans [**Kom06**]. Pour simplifier la discussion, on désigne par $z(f) \in \mathbf{N}$ le nombre de zéros de f comptés avec multiplicité. Le but est donc de montrer $z(f) \leqslant \sigma(f)$.

Si $\sigma(f) = 0$, tous les a_i ont le même signe, donc pour tout $x > 0$ la valeur de $f(x)$ a ce même signe, ce qui implique que f n'a pas de zéros, c'est-à-dire $z(f) = 0$. On a donc bien $z(f) \leqslant \sigma(f)$. Supposons maintenant qu'on a montré le résultat pour toute valeur $\sigma(f) \leqslant p$ et soit f une telle fonction avec $\sigma(f) = p+1$. Il existe donc (au moins) un j tel que signe$(a_{j-1}\,a_j) = -1$. Avec la première remarque ci-dessus, on a $z(f) = z(f_d)$ pour $d_{j-1} < d < d_j$. Avec un tel choix de d, on aura donc

$$f_d(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^{d_i - d} \quad \Longrightarrow \quad f_d'(x) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a}_i\, x^{d_i-d-1} \quad ,$$

avec $\overline{a}_i = (d_i - d)\, a_i$. Mais pour f_d' on a, parce que $d_{j-1} < d < d_j$,

$$i < j \quad \Rightarrow \quad \text{signe}(\overline{a}_i) = -\text{signe}(a_i) \quad \text{et} \quad i \geqslant j \quad \Rightarrow \quad \text{signe}(\overline{a}_i) = \text{signe}(a_i) \quad .$$

Il s'ensuit qu'on a $\sigma(f_d') = \sigma(f_d) - 1 = \sigma(f) - 1 = p$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et conclure qu'on a $z(f_d') \leqslant p$.

Soit maintenant $x_0 < x_1 < \cdots < x_q$ une suite de $q+1$ réels tels que pour tout $0 \leqslant i \leqslant q$ on a $f(x_i) = 0$, donc $f_d(x_i) = 0$. Par le théorème de Rolle (ou l'égalité des accroissements finis si on veut) il existe $y_i \in \,]x_{i-1}, x_i[\,$, $i = 1, \ldots, q$ avec $f_d'(y_i) = 0$. Il s'ensuit que le nombre de zéros de f sans compter la multiplicité est fini (borné par $z(f_d') + 1 \leqslant p + 1$). (Nota Bene : pour une fonction arbitraire ce nombre de zéros n'est pas toujours borné, par exemple pour la fonction $\sin(1/x)$ sur $]0, \infty[$.) Supposons donc que cette suite des x_i est la suite de tous les zéros distincts de f et que x_i est un zéro d'ordre $m_i \geqslant 1$. Par la deuxième remarque ci-dessus, chaque x_i est donc un zéro de f_d' d'ordre $m_i - 1$. Mais f_d' a aussi les q valeurs y_i comme zéros d'ordre au moins 1. Il s'ensuit qu'on a

$$p \geqslant z(f_d') \geqslant q + \sum_{i=0}^{q} (m_i - 1) = -1 + \sum_{i=0}^{q} m_i = z(f) - 1 \quad ,$$

ce qu'on peut réécrire comme $z(f) \leqslant p + 1 = \sigma(f)$. Ainsi se termine la preuve par récurrence de l'affirmation $z(f) \leqslant \sigma(f)$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [9.11]. L'affirmation $z_+(P) \leqslant \sigma(P)$ est une conséquence immédiate de [9.9] en considérant la restriction de P à $]0, \infty[$. Ensuite, si x est une racine de P, alors $-x$ est une racine de P_-. Le résultat $z_-(P) = z_+(P_-) \leqslant \sigma(P_-)$ en découle immédiatement. Ainsi on a démontré les affirmations (i) et (ii).

Pour montrer les affirmations (iii) et (iv), on commence avec la remarque que $z_o(P) = d_0$, ce qui est une conséquence immédiate du fait qu'on peut factoriser P par X^{d_0} :

$$P(X) = X^{d_0} \cdot Q(X) \qquad \text{avec} \qquad Q(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot X^{d_i - d_0} \quad ,$$

où $Q(X)$ est un polynôme vérifiant $Q(0) = a_0 \neq 0$. Vu qu'on a aussi $d_n = \deg(P)$, on vient de montrer l'égalité $\deg(P) - z_o(P) = d_n - d_0$.

Pour montrer la majoration de $\sigma(P) + \sigma(P_-)$, on écrit $P_-(X) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a}_i \, X^{d_i}$, avec $\overline{a}_i = (-1)^{d_i} \, a_i$. Associé à P_- on définit la suite $\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_n \in \{\pm 1\}$ par $\overline{s}_i = \mathrm{signe}(\overline{a}_{i-1} \, \overline{a}_i)$, de sorte que le nombre de -1 dans cette suite égale $\sigma(P_-)$. Et on définit la suite $t_1, \ldots, t_n \in \{\pm 1\}$ par

$$t_i = (-1)^{d_{i-1} + d_i} \quad ,$$

de sorte qu'on a

$$\overline{s}_i = \mathrm{signe}(\overline{a}_{i-1} \, \overline{a}_i) = (-1)^{d_{i-1} + d_i} \cdot \mathrm{signe}(a_{i-1} \, a_i) = t_i \cdot s_i \quad .$$

On note maintenant N le nombre de -1 dans la suite $t_1, \ldots, t_n$ et $C \leqslant N$ le nombre d'indices tels que $t_i = s_i = -1$. Il s'ensuit qu'on a

$$\sigma(P_-) = \sigma(P) - C + (N - C) = \sigma(P) + N - 2C \quad , \tag{15.40}$$

car on enlève un élément -1 de la suite s_i si $s_i = t_i = -1$, et on rajoute un élément -1 si $s_i = 1$ et $t_i = -1$. Mais on a aussi l'inégalité

$$\sigma(P) + N - C \leqslant n \quad , \tag{15.41}$$

ce qu'on vérifie en regardant le nombre d'indices tels que s_i *ou* t_i vaut -1.

D'autre part, si $t_i = 1$, alors forcément $d_i \geqslant d_{i-1} + 2$, tandis que dans le cas $t_i = -1$ on n'a que $d_i \geqslant d_{i-1} + 1$. On en déduit qu'on a l'inégalité

$$d_n - d_0 \geqslant 2(n - N) + N = 2n - N \quad . \tag{15.42}$$

Si on combine maintenant (15.40), (15.41) et (15.42), on trouve :

$$\sigma(P) + \sigma(P_-) = 2\big(\sigma(P) + N - C\big) - N \leqslant 2n - N \leqslant d_n - d_0 \ .$$

La dernière chose qui reste à montrer est que $z_+(P) = \sigma(P)$ si on sait que P a toutes ses racines dans $\mathbf{R}$. Dans ce cas on a donc $z_+(P) + z_o(P) + z_-(P) = \deg(P)$, ce qui donne, avec les résultats déjà montrés, les inégalités

$$d_n - d_0 = z_+(P) + z_-(P) \leqslant \sigma(P) + \sigma(P_-) \leqslant d_n - d_0 \ .$$

La première inégalité (large) ne peut donc pas être stricte, ce qui nous donne $z_+(P) = \sigma(P)$ et $z_-(P) = \sigma(P_-)$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [9.12]. (i) - ($\Rightarrow$) : Si H est définie positive, alors elle l'est aussi sur le sous-espace vectoriel E_k engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ pour chaque $1 \leqslant k \leqslant n$. La matrice de la restriction de H à E_k par rapport à la base $e_1, \ldots, e_k$ est exactement la matrice $(B_{ij})_{i,j=1}^k$. Selon [9.8] toutes ses valeurs propres sont donc strictement positives et donc son déterminant M_k est strictement positif comme produit de ses valeurs propres.

(i) - ($\Leftarrow$) : Pour montrer que H est définie positive si tous les M_k sont strictement positifs, on procède par récurrence sur la dimension n. Pour $n = 1$ c'est trivial, car dans ce cas $H(xe_1, xe_1) = M_1 \cdot x^2$, ce qui est strictement positif (pour $x \neq 0$) si et seulement si $M_1 > 0$. Supposons donc le résultat vrai pour la dimension n et regardons le cas de la dimension $n{+}1$. Si on note H' la restriction de H au sous-espace vectoriel E_n engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ et par $B' \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ la matrice de H' par rapport à la base $e_1, \ldots, e_n$, il est immédiat qu'on a $(B'_{ij})_{i,j=1}^n = (B_{ij})_{i,j=1}^n$ et que donc les mineurs principaux dominants de la matrice B' sont les $M_1, \ldots, M_n$. Par hypothèse ils sont tous strictement positifs, donc par l'hypothèse de récurrence H' est définie positive.

Avec [9.8] on en déduit que les valeurs propres de B' sont toutes strictement positives et en invoquant [9.7] il existe une matrice P formée par un système orthonormé de vecteurs propres (donc $P^{-1} = {}^tP$) telle que ${}^tPB'P = D$ avec D la matrice diagonale avec les valeurs propres strictement positives sur la diagonale. Il existe donc $v \in \mathbf{R}^n$ et $w \in \mathbf{R}$ tels que, en ajoutant une colonne et une ligne à la matrice P, on obtient l'égalité

$$ {}^t\!\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & v \\ {}^tv & w \end{pmatrix} \ .$$

Étant donné que les éléments diagonaux de D sont strictement positifs, D est une matrice inversible, ce qui nous permet de faire le calcul :

$$ {}^t\!\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -D^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & v \\ {}^tv & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -D^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & w - {}^tvD^{-1}v \end{pmatrix} \ . \tag{15.43}$$

La matrice $Q \in \mathrm{M}(n+1, \mathbf{R})$ définie comme

$$Q = \begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -D^{-1}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et vérifie la propriété que ${}^tQ\,B\,Q$ est la matrice diagonale (15.43). Il s'ensuit que H est définie positive si et seulement si les éléments diagonaux de la matrice (15.43) sont tous strictement positives. Ceux dans D le sont, donc il suffit que le réél $w - {}^t v D^{-1} v$ le soit. Mais on a l'égalité

$$\det(Q)^2 \cdot \det(B) = \det(D) \cdot (w - {}^t v D^{-1} v) \quad .$$

Il suffit maintenant de remarquer qu'on a $\det(B) = M_{n+1} > 0$ (par hypothèse) et $\det(D) > 0$, pour conclure qu'on a $w - {}^t v D^{-1} v > 0$, ce qui montre que H est définie positive.

(ii) : H est définie négative si et seulement si $-H$ est définie positive. La matrice $C \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ associée à $-H$ est (évidemment) donnée par $C_{ij} = -B_{ij}$. Il s'ensuit que les mineurs principaux dominants de C sont les $(-1)^k M_k$. Et donc $-H$ est définie positive si et seulement si on a $(-1)^k M_k > 0$ pour tout k. $\boxed{CQFD}$

Les preuves de §10

Preuve de [10.1]. Selon [1.36] l'espace $\mathcal{L}(E;E)$ est complet. Soit maintenant $U \in \mathcal{L}(E;E)$ tel que $\|U\| < 1$. Alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} U^k$ est absolument convergente, donc, selon [1.35], il existe $B \in \mathcal{L}(E;E)$ avec

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} U^k \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} U^k \qquad \text{et} \qquad \|B\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|U\|^k = (1 - \|U\|\,)^{-1} \ .$$

Mais on a aussi

$$B \circ (\mathbf{1} - U) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} U^k\Big) \circ (\mathbf{1} - U) = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} U^k\Big) \circ (\mathbf{1} - U) = \lim_{n\to\infty} \big(\mathbf{1} - U^{n+1}\big) = \mathbf{1}$$

et

$$(\mathbf{1} - U) \circ B = (\mathbf{1} - U) \circ \sum_{k=0}^{\infty} U^k = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{1} - U) \circ \sum_{k=0}^{n} U^k = \lim_{n\to\infty} \big(\mathbf{1} - U^{n+1}\big) = \mathbf{1} \ .$$

Il s'ensuit qu'on a $\mathbf{1} - U \in \mathrm{Isom}(E;E)$ avec $(\mathbf{1} - U)^{-1} = B = \sum_{k=0}^{\infty} U^k$. Parce que U vérifiant $\|U\| < 1$ est arbitraire, on a montré la deuxième partie de l'énoncé et en particulier l'inclusion $B_1(\mathbf{1}) \subset \mathrm{Isom}(E;E)$.

Pour terminer la preuve, il reste à montrer que $\mathrm{Isom}(E;E)$ est ouvert. Pour cela on prend $X \in \mathrm{Isom}(E;E)$ et on cherche $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(X) \subset \mathrm{Isom}(E;E)$. On pose

$$\varepsilon = \frac{1}{\|X^{-1}\|} \ ,$$

on prend $U \in \mathcal{L}(E;E)$ vérifiant $\|U\| < \varepsilon$ et on raisonne :

$$\begin{aligned} \|U\| < \varepsilon = \frac{1}{\|X^{-1}\|} \quad &\Longrightarrow \quad \|X^{-1} \circ U\| \leqslant \|X^{-1}\| \cdot \|U\| < 1 \\ &\Longrightarrow \quad (\mathbf{1} - X^{-1} \circ U) \in \mathrm{Isom}(E;E) \\ &\Longrightarrow \quad X \circ (\mathbf{1} - X^{-1} \circ U) = (X - U) \in \mathrm{Isom}(E;E) \ . \end{aligned}$$

Ce qui n'a pas été dit, c'est qu'on utilise le fait que si on a $A, B \in \mathrm{Isom}(E;E)$, alors la composée $A \circ B \in \mathrm{Isom}(E;E)$. C'est une conséquence immédiate de l'égalité $(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$ (et le fait que la composée de deux applications continues est continue).

Si on note $A = X - U$ et donc $U = X - A$, on vient donc de montrer l'implication

$$\|X - A\| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad A \in \mathrm{Isom}(E;E) \ ,$$

ce qui veut dire qu'on a bien $B_\varepsilon(X) \subset \mathrm{Isom}(E;E)$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [10.2]. Par [1.26] on a l'inégalité

$$\|X_{A,B}(C)\| \equiv \|B \circ C \circ A\| \leqslant \|B\| \cdot \|C\| \cdot \|A\| \ ,$$

ce qui nous donne immédiatement (avec [1.9] et [1.20]) que $X_{A,B}$ est continue avec $\|X_{A,B}\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

La bilinéarité de X étant immédiate, on applique [6.2] et [6.3] pour constater que X est continue avec $\|X\| \leqslant 1$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [10.3]. Pour $A \in \mathrm{Isom}(E;E)$ on prend $H \in \mathcal{L}(E;E)$ tel que

$$0 < \|H\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \qquad \text{et donc} \qquad \|A^{-1} \circ H\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|H\| < 1 \ .$$

On peut donc faire le calcul

$$\begin{aligned}(A+H)^{-1} - A^{-1} - (-A^{-1} \circ H \circ A^{-1}) \\ &= \big((\mathbf{1} + A^{-1} \circ H)^{-1} - \mathbf{1} + A^{-1} \circ H\big) \circ A^{-1} \\ &\overset{[10.1]}{=} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-A^{-1} \circ H)^k - \mathbf{1} + A^{-1} \circ H\Big) \circ A^{-1} \\ &= \Big(\sum_{k=2}^{\infty} (-A^{-1} \circ H)^k\Big) \circ A^{-1} \ .\end{aligned}$$

On en déduit la majoration de sa norme :

$$\begin{aligned}\|(A+H)^{-1} - A^{-1} - (-A^{-1} \circ H \circ A^{-1})\| &= \Big\| \Big(\sum_{k=2}^{\infty} (-A^{-1} \circ H)^k\Big) \circ A^{-1} \Big\| \\ &\leqslant \Big(\sum_{k=2}^{\infty} \big(\|A^{-1}\| \cdot \|H\|\big)^k\Big) \cdot \|A^{-1}\| = \frac{\|A^{-1}\|^3 \cdot \|H\|^2}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|H\|} \ .\end{aligned}$$

Pour justifier rigoureusement la majoration, il faut commencer à la fin : la série numérique $\sum_{k=2}^{\infty} \big(\|A^{-1}\| \cdot \|H\|\big)^k$ est convergente, donc la série $\sum_{k=2}^{\infty} (-A^{-1} \circ H)^k$ est convergente et la norme du résultat est majorée par le résultat de la série numérique [1.35].

Il s'ensuit immédiatement qu'on a (pour $0 < \|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$)

$$0 \leqslant \frac{\|(A+H)^{-1} - A^{-1} - (-A^{-1} \circ H \circ A^{-1})\|}{\|H\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^3 \cdot \|H\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|H\|}$$

et donc

$$\lim_{H \to 0} \frac{\|\mathrm{Inv}(A+H) - \mathrm{Inv}(A) - (-A^{-1} \circ H \circ A^{-1})\|}{\|H\|} = 0 \ ,$$

ce qui montre bien que l'application Inv est différentiable en A et que sa différentielle en A est donnée par $\big((D\mathrm{Inv})(A)\big)(H) = -A^{-1} \circ H \circ A^{-1}$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [10.4]. Pour montrer que Inv est de classe C^∞, il suffit selon [7.4.iv] de montrer que Inv est k fois différentiable pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, ce qu'on fera par récurrence sur k. Le cas $k = 1$ a été montré dans [10.3] avec en plus la formule pour la différentielle :

$$\big((D\mathrm{Inv})(A)\big)(H) = -A^{-1} \circ H \circ A^{-1} \equiv -X_{A^{-1},A^{-1}}(H) \ . \tag{15.44}$$

Notons en passant que Inv est une application qui va de $\mathrm{Isom}(E;E) \subset \mathcal{L}(E;E)$ vers $\mathcal{L}(E;E)$ et donc que l'espace source et but de l'application DInv sont donnés par

$$D\mathrm{Inv} : \mathrm{Isom}(E;E) \to \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(E;E); \mathcal{L}(E;E)\big) \ .$$

Si on note $\mathrm{Dup} : \mathcal{L}(E;E) \to \mathcal{L}(E;E) \times \mathcal{L}(E;E)$ l'application

$$\mathrm{Dup}(A) = (A, A) \ ,$$

alors Dup est une application linéaire continue. Maintenant on peut réécrire la formule (15.44) pour DInv comme

$$\big((D\mathrm{Inv})(A)\big)(H) = -\Big(X\Big(\mathrm{Dup}\big(\mathrm{Inv}(A)\big)\Big)\Big)(H) \quad ,$$

où $X : \mathcal{L}(E;E) \times \mathcal{L}(E;E) \to \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(E;E);\mathcal{L}(E;E)\big)$ est l'application définie dans [10.2] comme

$$\big(X(A,B)\big)(C) = B \circ C \circ A \quad .$$

On peut donc écrire

$$(D\mathrm{Inv})(A) = -X\Big(\mathrm{Dup}\big(\mathrm{Inv}(A)\big)\Big) \quad ,$$

ou encore

$$D\mathrm{Inv} = -X \circ \mathrm{Dup} \circ \mathrm{Inv} \quad . \tag{15.45}$$

Supposons maintenant que Inv est k fois différentiable. Alors (15.45) montre que DInv est k fois différentiable comme composée de fonctions k fois différentiables (Dup et $-X$ sont même de classe C^∞, étant linéaire continue et bilinéaire continue respectivement). Et donc selon [7.4.ii] l'application Inv elle-même est $k+1$ fois différentiable. Par récurrence, Inv est donc k fois différentiable pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

$\boxed{CQFD}$

Preuve de [10.5]. Pour distinguer l'application Inv : $\mathrm{Isom}(E;F) \to \mathcal{L}(F;E)$ définie ici de l'application Inv : $\mathrm{Isom}(E;E) \to \mathrm{Isom}(E;E)$ définie en [10.3], on écrira, seulement dans cette preuve, la première comme $\mathrm{Inv}_{E,F}$. Si l'ensemble $\mathrm{Isom}(E;F)$ est vide, il n'y a rien à montrer. On peut donc supposer qu'il existe $A_o \in \mathrm{Isom}(E;F)$. Par définition de l'ensemble $\mathrm{Isom}(E;F)$ l'application $A_o^{-1} : F \to E$ est linéaires continue. Il est alors immédiat que les applications

$$L : \mathcal{L}(E;F) \to \mathcal{L}(E;E) \qquad \text{et} \qquad R : \mathcal{L}(E;E) \to \mathcal{L}(F;E)$$

définies par

$$L(A) = A_o^{-1} \circ A \qquad \text{et} \qquad R(A) = A \circ A_o^{-1}$$

sont linéaires continues (on utilise [1.23] et [1.26]) avec $\|L\|, \|R\| \leqslant \|A_o^{-1}\|$. Selon [7.2] elles sont donc de classe C^∞. Maintenant on prend $A \in \mathrm{Isom}(E;F)$ et on calcule :

$$\mathrm{Inv}_{E,F}(A) \equiv A^{-1} = (A_o^{-1} \circ A)^{-1} \circ A_o^{-1} = R\Big(\mathrm{Inv}\big(L(A)\big)\Big) \quad .$$

Autrement dit, on a l'égalité

$$\mathrm{Inv}_{E,F} = R \circ \mathrm{Inv} \circ L \quad .$$

En tant que composée de trois applications de classe C^∞, $\mathrm{Inv}_{E,F}$ est donc de classe C^∞.

$\boxed{CQFD}$

Les preuves de §11

Preuve de [11.1]. • (i) : Par définition on a l'égalité $f \circ f^{-1} = id$, donc par [2.14] on en déduit qu'on a l'égalité $(Df)(a) \circ \big(D(f^{-1})\big)(b) = \mathbf{1}$. Ceci montre à la fois l'égalité $\big(D(f^{-1})\big)(b) = \big(Df)(a)\big)^{-1}$ ainsi que les appartenances $(Df)(a) \in \mathrm{Isom}(E;F)$ et $(Df^{-1})(b) \in \mathrm{Isom}(F;E)$.

• (ii) : Si f^{-1} est différentiable, on sait par (i) qu'on a, pour tout $x \in U$ et avec $y = f(x)$, l'égalité $\big(D(f^{-1})\big)(y) = \big((Df)(x)\big)^{-1}$, c'est-à-dire qu'on a l'égalité

$$D(f^{-1}) = \mathrm{Inv} \circ Df \circ f^{-1} \quad .$$

L'application Inv étant de classe C^∞ [10.5], on en déduit que si Df est continue en a, alors $D(f^{-1})$ est continue en b comme composée de trois applications continues (on a invoqué au passage [2.10]).

• (iii) : Si f^{-1} est différentiable, on a l'égalité $D(f^{-1}) = \mathrm{Inv} \circ Df \circ f^{-1}$ (voir (ii)). Si f est k fois différentiable avec $k > 1$, Df est $k-1$ fois différentiable [7.4.ii]. Étant donné que l'application Inv est de classe C^∞ [10.5], il s'ensuit avec [7.6] que $D(f^{-1})$ est $k-1$ fois différentiable, c'est-à-dire que f^{-1} est k fois différentiable.

• (iv) : Si f est de classe C^k, Df est de classe C^{k-1}. Selon l'égalité $D(f^{-1}) = \mathrm{Inv} \circ Df \circ f^{-1}$ il s'ensuit (avec [10.5] et [7.6]) que $D(f^{-1})$ est de classe C^{k-1}, c'est-à-dire que f^{-1} est de classe C^k. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [11.2]. Pour alléger les notations, on introduit les abréviations $b = f(a) \in F$ et $A = (Df)(a) \in \mathrm{Isom}(E;F)$.

Étape 1. Le but de la première étape est de trouver un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de b tels que $f : V \to W$ est un homéomorphisme. L'idée de pour trouver ces voisinages est de se servir du théorème du point fixe pour résoudre l'équation $y = f(x)$ pour un y donné. Pour un $y \in F$ fixe on cherche donc une fonction g_y telle qu'un point fixe de g_y est une solution pour x de l'équation $y = f(x)$. Pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe, une telle fonction doit être contractante, définie sur un espace complet et à valeurs dans cet même espace. Une idée trop naïve est de se servir de l'équivalence

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x + y - f(x) \equiv g_y(x) \quad .$$

Par contre, l'idée à peine moins naïve de considérer les équivalences

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}\big(y - f(x)\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x + A^{-1}\big(y - f(x)\big) \equiv g_y(x)$$

fait l'affaire car on constate facilement qu'on a $(Dg_y)(a) = 0$, ce qui permet d'en déduire que g_y sera contractante dans une (petite) boule fermée de centre a. Une boule fermée étant complet, on a donc remplit déjà deux des objectifs : une application contractante définie sur un espace complet. Pour être sûr que g_y envoie cette boule vers elle-même, on doit imposer des contraintes sur y. Ces deux contraintes (la taille de la boule et la contrainte sur y) nous donnent presque immédiatement les voisinages V et W recherchés. (Une petite remarque entre parenthèses pour terminer : la plupart des preuves qu'on lit dans la littérature transforment d'abord l'application f en une autre pour laquelle on aura $a = 0$, $f(a) = 0$ et $(Df)(a) = \mathbf{1}$. Au pire ils disent que "sans perte de généralité on peut supposer que..." et dans les meilleurs des cas ils expliquent en détails comment le faire. J'ai préféré de ne pas le faire, car le gain en brèveté n'est pas énorme et on perd à mon avis beaucoup dans la compréhension en perdant de vue qu'il s'agit bien de voisinages des points a et $b = f(a)$.)

On introduit, pour tout $y \in F$, la fonction $g_y : U \to E$ définie par

$$g_y(x) = x - A^{-1}\big(f(x) - y\big) \quad .$$

En tant que composée d'une fonction différentiable et des fonctions de classe C^∞, la fonction g est différentiable avec

$$\forall y \in F : (Dg_y)(x) = (Dg_0)(x) = \mathbf{1} - A^{-1} \circ (Df)(x) \tag{15.46}$$

et en particulier $(Dg_y)(a) = 0$. L'hypothèse que Df est continue en a implique directement que Dg est continue au point a. Il s'ensuit qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in E \ \forall y \in F \quad : \quad \|x - a\| \leqslant r \quad \Rightarrow \quad \|(Dg_y)(x)\| \leqslant \tfrac{1}{2} \quad . \tag{15.47}$$

Officiellement il y a deux petits problèmes avec l'affirmation ci-dessus : la définition de continuité ne donne que des inégalités strictes et il faut rajouter la condition que x appartient au domaine de définition des applications. Pour justifier notre affirmation on procède comme suit. La définition de la continuité de Dg_0 au point a nous dit que pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe $s > 0$ tel que

$$\forall x \in U \quad : \quad \|x - a\| < s \quad \Rightarrow \quad \|(Dg_0)(x) - (Dg_0)(a)\| < \tfrac{1}{2} \quad .$$

Mais U est un ouvert, donc il existe $\rho > 0$ tel que $B_\rho(a) \subset U$. Si on pose alors $r = \frac{1}{2} \cdot \min(s, \rho)$, alors on aura les implications

$$\|x - a\| \leqslant r < \rho \quad \Rightarrow \quad x \in U$$

et

$$\|x - a\| \leqslant r < s \quad \Rightarrow \quad \|(Dg_y)(x)\| = \|(Dg_0)(x) - (Dg_0)(a)\| < \tfrac{1}{2} \leqslant \tfrac{1}{2} \quad ,$$

ce qui termine la justification de notre affirmation.

Maintenant on applique l'inégalité des accroissements finis [3.6] à la fonction g_y et deux points $x, x_o \in \overline{B_r(a)} \subset U$. Une boule (fermée ou ouverte) étant convexe, il s'ensuit que le segment $[x_o, x]$ est contenu dans $\overline{B_r(a)}$, ce qui nous permet de conclure :

$$\begin{aligned} \forall x_o, x \in \overline{B_r(a)} \quad : \quad \|g_y(x) - g_y(x_o)\| &\leqslant \sup_{t \in \overline{B_r(a)}} \|(Dg_y)(t)\| \cdot \|x - x_o\| \\ &\leqslant \tfrac{1}{2} \cdot \|x - x_o\| \quad . \end{aligned} \tag{15.48}$$

On en déduit la majoration

$$\begin{aligned} \|g_y(x) - g_{y_o}(x_o)\| &\leqslant \|g_y(x) - g_y(x_o)\| + \|g_y(x_o) - g_{y_o}(x_o)\| \\ &\leqslant \tfrac{1}{2} \cdot \|x - x_o\| + \|A^{-1}(y - y_o)\| \\ &\leqslant \tfrac{1}{2} \cdot \|x - x_o\| + \|A^{-1}\| \cdot \|y - y_o\| \quad . \end{aligned} \tag{15.49}$$

Si on pose $\rho = r/(2\,\|A^{-1}\|\,)$ et si on considère le cas partculier $x_o = a$ et $y_o = b$, on obtient (attention aux inégalités larges et strictes !) :

$$\forall x \in \overline{B_r(a)} \quad \forall y \in B_\rho(b) \quad : \quad \|g_y(x) - a\| \equiv \|g_y(x) - g_b(a)\| < r \quad .$$

Autrement dit :

$$\forall y \in B_\rho(b) \quad : \quad g_y\big(\, \overline{B_r(a)}\, \big) \subset B_r(a) \subset \overline{B_r(a)} \quad ,$$

c'est-à-dire que g_y envoie la boule fermée $\overline{B_r(a)}$ vers elle-même. En plus, selon (15.48) g_y est contractante de coefficient $\frac{1}{2}$. On peut donc appliquer le théorème du point fixe [1.38] (car E est supposé complet) et conclure qu'il existe un point fixe unique pour g_y dans $\overline{B_r(a)}$. Mais pour un point fixe on a :

$$\begin{aligned} x = g_y(x) \in B_r(a) \quad &\Longleftrightarrow \quad x - A^{-1}\big(f(x) - y\big) = x \in B_r(a) \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in B_r(a) \quad \text{et} \quad y = f(x) \quad . \end{aligned} \tag{15.50}$$

Le point fixe, qui *a priori* appartient à la boule fermée $\overline{B_r(a)}$, appartient donc à la boule ouverte $B_r(a)$. On a donc montré :

$$\forall y \in B_\rho(b) \quad \exists\,!\, x \in B_r(a) \quad : \quad y = f(x) \quad . \tag{15.51}$$

On définit maintenant les ouverts (f est continue) V et W par

$$V = f^{-1}\big(B_\rho(b)\big) \cap B_r(a) \qquad \text{et} \qquad W = B_\rho(b) \ ,$$

de sorte que, selon (15.51), $f : V \to W$ est une bijection continue.

Reste donc à montrer que $f^{-1} : W \to V$ est continue pour terminer la première étape. Pour cela on prend $x_o, x \in V$ avec $y_o = f(x_o), y = f(x) \in W$. Si on combine (15.49) avec (15.50), on obtient :

$$\|x - x_o\| \equiv \|g_y(x) - g_{y_o}(x_o)\| \leqslant \tfrac{1}{2} \cdot \|x - x_o\| + \|A^{-1}\| \cdot \|y - y_o\| \ ,$$

ce qu'on peut réécrire sous la forme

$$(15.52) \quad \forall y, y_o \in W \quad : \quad \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)\| \equiv \|x - x_o\| \leqslant 2\,\|A^{-1}\| \cdot \|y - y_o\| \ .$$

Autrement dit, f^{-1} est Lipschitzienne de rapport $2\,\|A^{-1}\|$, donc continue [1.7].

Étape 2. Maintenant qu'on a établi que $f : V \to W$ est un homéomorphisme, on va montrer que f^{-1} est différentiable sur W. Selon [11.1], si c'est le cas, on devrait avoir $(Df^{-1})(y) = \big((Df)(x)\big)^{-1}$ quand on a $x = f^{-1}(y)$. On montre donc d'abord que $(Df)(x) \in \mathrm{Isom}(E; F)$ pour tout $x \in V$ et ensuite on montre que f^{-1} est différentiable en $y = f(x)$ avec $(Df^{-1})(y) = \big((Df)(x)\big)^{-1}$.

On commence avec le constat qu'on peut utiliser (15.46) et (15.47) dans le résultat [10.1] pour obtenir :

$$\forall x \in \overline{B_r(a)} \quad : \quad A^{-1} \circ (Df)(x) \in \mathrm{Isom}(E; E) \ .$$

Parce que $V \subset \overline{B_r(a)}$, il s'ensuit que

$$(Df)(x) = A \circ \big(A^{-1} \circ (Df)(x)\big)$$

appartient à $\mathrm{Isom}(E; F)$ pour tout $x \in V$.

Si on prend maintenant $y_o, y \in W$ avec $x_o = f^{-1}(y_o), x = f^{-1}(y) \in V$, alors on peut calculer/majorer :

$$\begin{aligned}
&\frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o) - \big((Df)(x_o)\big)^{-1}(y - y_o)\|}{\|y - y_o\|} \\
&\qquad = \frac{\Big\| -\big((Df)(x_o)\big)^{-1}\Big((y - y_o) - \big((Df)(x_o)\big)\big(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)\big)\Big)\Big\|}{\|y - y_o\|} \\
&\qquad \leqslant \Big\|\big((Df)(x_o)\big)^{-1}\Big\| \cdot \frac{\big\|f(x) - f(x_o) - \big((Df)(x_o)\big)(x - x_o)\big\|}{\|y - y_o\|} \\
&\qquad = \Big\|\big((Df)(x_o)\big)^{-1}\Big\| \cdot \frac{\big\|f(x) - f(x_o) - \big((Df)(x_o)\big)(x - x_o)\big\|}{\|x - x_o\|} \cdot \frac{\|x - x_o\|}{\|y - y_o\|} \\
&\qquad \overset{(15.52)}{\leqslant} \ 2\,\|A^{-1}\| \cdot \Big\|\big((Df)(x_o)\big)^{-1}\Big\| \cdot \frac{\big\|f(x) - f(x_o) - \big((Df)(x_o)\big)(x - x_o)\big\|}{\|x - x_o\|}
\end{aligned}$$

$$(15.53) \qquad = 2\,\|A^{-1}\| \cdot \Big\|\big((Df)(x_o)\big)^{-1}\Big\| \cdot \frac{\Big\|f\big(f^{-1}(y)\big) - f(x_o) - \big((Df)(x_o)\big)\big(f^{-1}(y) - x_o\big)\Big\|}{\|f^{-1}(y) - x_o\|} \ .$$

Pour terminer on rappelle qu'on a montré que f^{-1} est continue, donc qu'on a en particulier

$$\lim_{y\to y_o} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_o) = x_o \quad .$$

Par composée de limites, le fait que f est différentiable au point x_o et la majoration (15.53) on a donc

$$\lim_{y\to y_o} \frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o) - \big((Df)(x_o)\big)^{-1}(y-y_o)\|}{\|y-y_o\|} = 0 \quad ,$$

ce qui montre bien que f^{-1} est différentiable au point y_o avec

$$(Df^{-1})(y_o) = \Big((Df)\big(f^{-1}(y_o)\big)\Big)^{-1} \quad . \qquad \boxed{CQFD}$$

Preuve de [11.3]. Les hypothèses de cette version sont plus fortes que celles de [11.2]. On peut donc conclure qu'il existe des voisinages $a \in V \subset U$ et $W \subset F$ tels que $f : V \to W$ est bijective et $f^{-1} : W \to V$ différentiable. Pour montrer que f^{-1} est de classe C^k, il suffit d'invoquer[11.1.iv]. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [11.4]. Soit $O \subset U$ un ouvert et $b \in f(O)$. Alors il existe $a \in O$ tel que $b = f(a)$ et donc, par hypothèse, $(Df)(a) \in \mathrm{Isom}(E;F)$. Par le théorème de l'inversion locale [11.3] il existe deux ouverts $V \subset U$ et $W \subset F$ avec $a \in V$, $b = f(a) \in W$ tels que $f : V \to W$ est un C^1 difféomorphisme et donc en particulier un homéomorphisme. Il s'ensuit que $f(O \cap V)$ est un ouvert de W, ce qui est un ouvert de F. Il s'ensuit que $f(O \cap V)$ est un ouvert de F qui contient $b = f(a)$. On a donc montré que pour tout $b \in f(O)$ il existe un voisinage ouvert $O' = f(O \cap V)$ de b vérifiant $b \in O' \subset f(O)$, ce qui montre que $f(O)$ est un ouvert. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [11.5]. Si W est un ouvert et f est un C^k-difféomorphisme, alors f est en particulier injective et $(Df)(x) \in \mathrm{Isom}(E;F)$ pour tout $x \in U$ par [11.1.i].

Réciproquement, Soit f injective et $(Df)(x) \in \mathrm{Isom}(E;F)$ pour tout $x \in U$. Alors par l'injectivité de f l'application $f : U \to W$ est bijective. Selon le théorème de l'application ouverte [11.4] W est un ouvert et selon le théorème de l'inversion locale [11.3] il existe pour tout $a \in U$ un voisinage ouvert V de a et un ouvert $W' \subset F$ tels que $f : V \to W'$ est un C^k-difféomorphisme et donc en particulier f^{-1} est différentiable en $f(a)$. f^{-1} est donc différentiable en chaque point de $W = f(U)$, ce qui permet d'appliquer [11.1.iv] et de conclure que $f : U \to W$ est un C^k-difféomorphisme. $\boxed{CQFD}$

Les preuves de §12

Preuve de [12.5]. La preuve repose sur le théorème de l'inversion locale. Pour pouvoir l'appliquer, on introduit la fonction $\Phi : U \to E \times G$ définie par

$$\Phi(x, y) = \big(x, f(x, y)\big) \quad .$$

et on constate qu'on a (avec l'écriture [4.7], (4.10))

$$(D\Phi)(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ (D_1 f)(x, y) & (D_2 f)(x, y) \end{pmatrix} \quad . \tag{15.54}$$

En utilisant [4.16] et [4.4], il s'ensuit qu'au point (a, b) cette différentielle est inversible avec

$$\big((D\Phi)(a, b)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\big((D_2 f)(a, b)\big)^{-1} \circ (D_1 f)(a, b) & \big((D_2 f)(a, b)\big)^{-1} \end{pmatrix} \quad .$$

Toujours avec [4.4], on en déduit (car $\big((D_2 f)(a, b)\big)^{-1}$ est une application linéaire continue par hypothèse) que $\big((D\Phi)(a, b)\big)^{-1}$ est une application linéaire continue, et donc $(D\Phi)(a, b) \in \mathrm{Isom}(E \times F; E \times G)$. Il s'ensuite qu'on peut invoquer le théorème de l'inversion locale [11.3] (car Φ est "évidemment" de classe C^k [7.5] et les espaces $E \times F$ et $E \times G$ sont complets [1.37]) pour conclure qu'il existe un voisinage ouvert $R \subset U$ de (a, b) et un ouvert $S \subset E \times G$ tels que $\Phi : R \to S$ est un C^k-difféomorphisme.

On note $\Psi = (\Psi_E, \Psi_F)$ la réciproque (locale) de Φ :

$$\Psi : S \to R \qquad \text{et} \qquad \Psi(u, v) = \big(\Psi_E(u, v), \Psi_F(u, v)\big)$$

avec $\Psi_E(u, v) \in E$ et $\Psi_F(u, v) \in F$. Par définition de la réciproque on a $\Phi\big(\Psi(u, v)\big) = (u, v)$, ce qui implique immédiatement les égalités

$$\forall (u, v) \in S \quad : \quad \Psi_E(u, v) = u \quad \text{et (donc)} \quad v = f\big(u, \Psi_F(u, v)\big) \quad .$$

Le cas particulier $v = c$ nous donne $f\big(x, \Psi_F(x, c)\big) = c$, ce qui suggère que $\Psi_F(x, c)$ est notre fonction g recherchée. Pour trouver des ouverts V et W qui satisfont aux exigences, en particulier que la fonction g est définie sur V et prend ses valeurs dans W, on commence avec la remarque que R est un voisinage ouvert de $(a, b) \in E \times F$, ce qui implique qu'il existe deux ouverts $T \subset E$ et $W \subset F$ tels que $(a, b) \in T \times W \subset R$.

Ceci est une conséquence directe de la définition de la topologie produit sur $E \times F$, mais on peut aussi le voir comme une conséquence de notre choix de munir $E \times F$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$: il existe $r > 0$ tel que $B_r\big((a, b)\big) \subset R$, où on prend la boule par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$. Mais pour cette norme on a l'égalité $B_r\big((a, b)\big) = B_r(a) \times B_r(b)$ [1.13].

Comme le choix des noms suggère, le W trouvé est "bon," mais le T pourrait être trop grand : bien que pour chaque $x \in T$ il existe au plus un $y \in W$ tel que $f(x, y) = c$, on ne peut pas garantir l'existence d'un tel y. Pour trouver un V qui fait l'affaire, on remarque qu'on a $(a, c) = \Phi(a, b) \in \Phi(T \times W)$ et que $\Phi(T \times W)$ est un ouvert de S (comme image d'un ouvert de R par Φ qui est un homéomorphisme). Il existe donc deux ouverts $V \subset E$ et $Z \subset G$ tels que

$$(a, c) \in V \times Z \subset \Phi(T \times W) \subset S \quad .$$

En appliquant Ψ à $(x, z) \in V \times Z$ on a

$$\big(x, \Psi_F(x, z)\big) = \Psi(x, z) \in \Psi(V \times Z) \subset \Psi\big(\Phi(T \times W)\big) = T \times W \quad , \tag{15.55}$$

ce qui montre qu'on a l'inclusion $V \subset T$. On est maintenant prêt à montrer que les ouverts V et W et l'application $g(x) = \Psi_F(x, c)$ font l'affaire.

On commence avec la preuve que ce g est bien une application de V dans W :

$$x \in V \quad \Rightarrow \quad (x,c) \in V \times Z \quad \overset{(15.55)}{\Rightarrow} \quad \big(x, g(x)\big) \equiv \Psi(x,c) \in T \times W \quad \Rightarrow \quad g(x) \in W \quad .$$

Ensuit on note que $g : V \to W$ est bien de classe C^k, car Ψ est un C^k-difféomorphisme et Ψ_F est une composante de Ψ [7.5]. Reste les trois propriétés (i), (ii) et (iii).

Pour (i) on note que par définition de W on a $b \in W$ et par définition de V on a $a \in V$. Mais on a aussi les inclusions

$$V \times W \subset T \times W \subset R \subset U \quad .$$

Pour (ii) on note que les équivalences

$$f(x,y) = c \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x,y) = (x,c) \quad \Leftrightarrow$$
$$(x,y) = \Psi(x,c) \equiv \big(x, \Psi_F(x,c)\big) \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x)$$

sont valables pour tout $(x,y) \in R$ et donc en particulier pour tout $(x,y) \in V \times W$. Et (iii) est une conséquence immédiate de (15.54) : pour tout $(x,y) \in R$ la différentielle $(D\Phi)(x,y)$ appartient à $\mathrm{Isom}(E \times F; E \times G)$ et donc sa forme (15.54) implique que forcément $(D_2 f)(x,y) \in \mathrm{Isom}(F;G)$. Notons en passant que la propriété (ii) montre en même temps l'unicité de la fonction g : si on en avait deux, on aurait les équivalences $y = g_1(x) \Leftrightarrow f(x,y) = c \Leftrightarrow y = g_2(x)$.

Finalement pour trouver la différentielle $(Dg)(x)$ il y a deux méthodes. La première consiste à comparer $\big((D\Phi)(x,y)\big)^{-1}$ (15.54) avec $(D\Psi)(u,v)$:

$$\big((D\Phi)(x,y)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\big((D_2 f)(x,y)\big)^{-1} \circ (D_1 f)(x,y) & \big((D_2 f)(x,y)\big)^{-1} \end{pmatrix}$$

avec

$$(D\Psi)(u,v) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ (D_1 \Psi_F)(u,v) & (D_2 \Psi_F)(u,v) \end{pmatrix} \quad .$$

Il s'ensuit qu'on a

$$(u,v) = \Phi(x,y) \qquad \Longrightarrow \qquad (D_1 \Psi_F)(u,v) = -\big((D_2 f)(x,y)\big)^{-1} \circ (D_1 f)(x,y)$$

et donc, parce que $(x,c) = \Phi\big(x, g(x)\big)$,

$$(Dg)(x) = (D_1 \Psi_F)(x,c) = -\Big((D_2 f)\big(x, g(x)\big)\Big)^{-1} \circ (D_1 f)\big(x, g(x)\big) \quad .$$

La deuxième méthode part du constat que pour tout $x \in V$ on a l'égalité $f\big(x, g(x)\big) = c$. Si on dérive cela, on obtient l'égalité

$$0 = (D_1 f)\big(x, g(x)\big) + (D_2 f)\big(x, g(x)\big) \circ (Dg)(x) \quad ,$$

ce qui nous donne le même résultat pour $(Dg)(x)$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [12.6]. Ci-dessus on a montré le théorème des fonctions implicites à l'aide du théorème de l'inversion locale. Pour déduire le théorème de l'inversion locale du théorème des fonctions implicites, on applique le dernier à la fonction $\Phi : F \times U \to F$ définie par

$$\Phi(y,x) = y - f(x) \quad .$$

Sa différentielle est donnée par

$$(D\Phi)(y,x) = \big((D_1\Phi)(y,x)\ ,\ (D_2\Phi)(y,x)\big) = \big(\mathbf{1}\ ,\ -(Df)(x)\big) \in \mathcal{L}(F \times E; F) \quad .$$

Par hypothèse $(D_2\Phi)(b,a) = -(Df)(a)$ appartient à $\mathrm{Isom}(E;F)$, ce qui nous permet d'invoquer le théorème des fonctions implicites [12.5] (car Φ est de classe C^k et $F\times E$ et F sont complets). Ainsi on obtient un voisinage ouvert $W \subset F$ de b, un voisinage ouvert $V \subset E$ de a et une (unique) fonction $g : W \to V$ de classe C^k avec (entre autres) la propriété :

$$(b,a) \in W \times V \subset F \times U \quad ,$$

ce qui montre qu'on a $V \subset U$, ainsi que la propriété, valable pour tout $(y,x) \in W\times V$,

$$y = f(x) \qquad \iff \qquad \Phi(y,x) = 0 \qquad \iff \qquad x = g(y) \quad . \tag{15.56}$$

Si on veut montrer que g est la réciproque de f, il nous faut la condition supplémentaire que $f(V) \subset W$, ce qui n'est pas garantie. On définit donc l'ouvert $V_o = f^{-1}(W) \cap V$ et on constate que les équivalences (15.56) sont toujours valables pour tout $(y,x) \in W \times V_o \subset W \times V$. Soit maintenant $x \in V_o$, alors $f(x) \in W$ et donc on a $x = g\big(f(x)\big)$. D'autre part, pour $y \in W$ on obtient par (15.56) qu'on a $y = f\big(g(y)\big)$, ce qui montre que $g(y) \in V$ vérifie $f\big(g(y)\big) = y \in W$, et donc $g(y) \in V_o$. En résumé : on a $f : V_o \to W$ et $g : W \to V_o$ qui vérifient l'équivalence

$$y = f(x) \qquad \iff \qquad x = g(y) \quad ,$$

autrement dit, $g = f^{-1}$. Et parce que g est de classe C^k, il s'ensuit que $f : V_o \to W$ est un C^k-difféomorphisme. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [12.8]. Le seul problème de cette preuve est de mettre l'énoncé en accord avec l'énoncé du théorème des fonctions implicites [12.5]. La clé pour y parvenir est l'application $S : \mathbf{R}^{n+p} \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ définie par

$$S(x) = (x_I, x_J) \quad .$$

Il est immédiat que S est une application linéaire inversible, donc un C^∞ difféomorphisme (on est en dimension finie). À l'aide de S on définit l'ouvert $U_{IJ} \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ par $U_{IJ} = S(U)$ et l'application $F : U_{IJ} \to \mathbf{R}^p$ par $F = f \circ S^{-1}$. Si on regarde les dérivées partielles de F, on s'aperçoit vite qu'on a les égalités

$$1 \leqslant k \leqslant n \;\Rightarrow\; \partial_k F = \partial_{i_k} f \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant \ell \leqslant p \;\Rightarrow\; \partial_{n+\ell} F = \partial_{j_\ell} f \quad .$$

Au point $(a_I, a_J) = S(a)$ ces égalités se transforment en

$$(D_1F)(a_I,a_J) = B \qquad \text{et} \qquad (D_2F)(a_I,a_J) = A \quad .$$

Si on fait maintenant les remarques que F est de classe C^k comme composée d'une application de classe C^k avec une application de classe C^∞, que les espaces $E = \mathbf{R}^n$ et $F = G = \mathbf{R}^p$ sont complets et que $A : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ est un isomorphisme (car on est en dimension finie), alors on conclut que les conditions du théorème des fonction implicites [12.5] sont remplies. Il existe donc un voisinage $V_n \subset \mathbf{R}^n$ de a_I, un voisinage $V_p \subset \mathbf{R}^p$ de a_J et une application $g : V_n \to V_p$ tels que

(i) $(a_I, a_J) \in V_n \times V_n \subset U_{IJ}$,

(ii) $\forall (x_I, x_J) \in V_n \times V_p \quad : \quad F(x_I, x_J) = c \quad \Leftrightarrow \quad x_J = g(x_I) \quad ,$

De plus, pour tout $x_I \in V_n$, la différentielle $(Dg)(x)$ est donnée par

$$(Dg)(x) = -\Big((D_2F)\big(x_I, g(x_I)\big)\Big)^{-1} \circ (D_1F)\big(x_I, g(x_I)\big) \quad .$$

Le résultat sur Dg nous donne immédiatement la formule (12.9). La définition de l'ouvert W se transforme en l'égalité $W = S^{-1}(V_n \times V_p)$ ou $S(W) = V_n \times V_p$, auquel cas les deux premiers résultats se transforment en

(i) $S(a) \in S(W) \subset S(U)$ et

(ii) $\forall S(x) \in S(W) \quad : \quad F\big(S(x)\big) = c \quad \Leftrightarrow \quad x_J = g(x_I) \ .$

Il suffit alors "d'enlever" la bijection S pour obtenir le résultat voulu. $\boxed{CQFD}$

Les preuves de §13

Preuve de [13.2]. Si on définit les ouverts $W_o = W_1 \cap W_2$ et $U_{io} = f_i^{-1}(W_o)$, alors parce que $W_1 \cap W_2 \cap M \neq \emptyset$ ces ouverts ainsi que les ensembles $Z_{p_i} \cap U_{io}$ seront non-vides. Les difféomorphismes f_1 et f_2 étant de classe C^k respectivement C^ℓ, elles seront certainement toutes les deux (au moins) de classe C^1. La composition $\varphi \overset{\text{déf.}}{=} f_2^{-1} \circ f_1 : U_{1o} \to U_{2o}$ est donc un C^1-difféomorphisme vérifiant

$$\varphi(Z_{p_1} \cap U_{1o}) = f_2^{-1}\big(f_1(Z_{p_1} \cap U_{1o})\big) = f_2^{-1}(M \cap W_o) = Z_{p_2} \cap U_{2o} \quad ,$$

ainsi que $\varphi^{-1}(Z_{p_2} \cap U_{2o}) = Z_{p_1} \cap U_{1o}$.

L'idée de la preuve est maintenant simple : ces égalités disent que φ définit un C^1-difféomorphisme entre $Z_{p_1} \cap U_{1o}$, un ouvert de Z_{p_1} et $Z_{p_2} \cap U_{2o}$, un ouvert de Z_{p_2}. Et selon [11.1.i], si on a un C^1-difféomorphisme, alors sa différentielle en un point est un isomorphisme linéaire entre les deux espaces vectoriels. Mais Z_{p_i} est un espace vectoriel de dimension p_i et un isomorphisme entre $\mathbf{R}^{p_1}$ et $\mathbf{R}^{p_2}$ n'existe que si $p_1 = p_2$.[3]

On définit les ouverts $V_i \subset \mathbf{R}^{p_i}$ par

$$V_i = \{\, (x_1, \dots, x_{p_i}) \mid (x_1, \dots, x_{p_i}, 0, \dots, 0) \in U_{io} \,\} \quad .$$

Par définition on a donc

$$Z_{p_i} \cap U_{io} = V_i \times \{0\} \subset \mathbf{R}^{p_i} \times \mathbf{R}^{n-p_i} \quad .$$

Ensuite on définit l'application $\psi : V_1 \to \mathbf{R}^{p_2}$ par

$$\psi(x_1, \dots, x_{p_1}) = \pi_{p_2}\big(\varphi(x_1, \dots, x_{p_1}, 0, \dots, 0)\big) \quad ,$$

où $\pi_{p_2} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{p_2}$ désigne la projection

$$\pi_{p_2}(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_p) \quad .$$

Mais φ est en particulier une bijection, donc une bijection entre $Z_{p_1} \cap U_{1o}$ et $Z_{p_2} \cap U_{2o}$. On en déduit facilement que ψ est une bijection entre V_1 et V_2 et que l'application $\psi^{-1} : V_2 \to V_1$ est donnée par

$$\psi^{-1}(y_1, \dots, y_{p_2}) = \pi_{p_1}\big(\varphi^{-1}(y_1, \dots, y_{p_2}, 0, \dots, 0)\big) \quad ,$$

où, comme pour π_{p_2}, l'application $\pi_{p_1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{p_1}$ est la projection

$$\pi_{p_1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{p_1}) \quad .$$

D'autre part, φ et φ^{-1} sont des application de classe (au moins) C^1 et donc ψ et ψ^{-1} le sont aussi comme composées d'une applications de classe C^1 avec une application de classe C^∞ (les projections). On peut donc appliquer [11.1.i] à un point $a \in V_{1o}$ quelconque pour conclure qu'on doit avoir $(D\psi)(a) \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^{p_1}; \mathbf{R}^{p_2})$. Mais de tels isomorphismes n'existent que si $p_1 = p_2$, ce qui est la conclusion souhaitée. $\boxed{\mathit{CQFD}}$

Preuve de [13.4]. Soit $m \in M'$. Alors, parce que $m \in M$ une sous-variété [13.1], il existe un voisinage ouvert $W \subset \mathbf{R}^{n+p}$ de m, un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ et un difféomorphisme $f : U \to W$ de classe C^k tels que

$$M \cap W = f(Z \cap U) \quad .$$

3. Ici on utilise le passage par la différentielle, mais un corollaire du théorème de l'invariance du domaine de L.E.J. Brouwer dit qu'un homéomorphisme entre de tels ouverts n'est possible que si $p_1 = p_2$. La différentiabilité n'est donc pas un ingrédient essentiel.

Si on pose $W' = W \cap V$ et $U' = f^{-1}(W')$, alors ce sont deux ouverts vérifiant $f(U') = W' = W \cap V$. Si maintenant on désigne par f' la restriction de f à U', c'est-à-dire $f' = f|_{U'}$, alors $f' : U' \to W'$ est un C^k-difféomorphisme vérifiant

$$\begin{aligned} f'(U' \cap Z) &= f(U' \cap U \cap Z) = f(U') \cap f(U \cap Z) \\ &= W' \cap W \cap M = W \cap V \cap M = M' \cap W' \ . \end{aligned}$$

Le triplet $f' : U' \to W'$ vérifie donc les conditions données en [13.1] pour $m \in M'$, ce qui montre que M' est une sous-variété (de même dimension et classe de différentiabilité que M). $\boxed{CQFD}$

Preuve de [13.5]. ($\Rightarrow$) Soit $m \in M$, soit $f : \tilde{U} \to \tilde{W}$ un C^k-difféomorphisme tel que $m \in \tilde{W}$ et $f(\tilde{U} \cap Z) = \tilde{W} \cap M$ comme dans la définition d'une sous-variété. Parce qu'on a $f^{-1}(m) \in Z$, il existe $u_m \in \mathbf{R}^n$ tel que $f^{-1}(m) = (u_m, 0)$.

L'idée de la preuve est comme suit : on utilise le fait que f est un difféomorphisme pour déduire que les images des vecteurs de base de $Z \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ par $(Df)(u_m, 0)$ sont des vecteurs indépendants. La matrice de taille $(n+p)\times n$ de ces vecteurs a donc une sous-matrice de taille $n\times n$ inversible. Les indices des lignes correspondantes nous fournissent le découpage de $\{1, \dots, n+p\}$ en deux parties I et J. Et ensuite on définit la fonction g par l'équivalence entre $x \in M$ et $x_J = g(x_I)$. Le problème majeur est de trouver les bons ouverts où tout cela marche bien. On passe donc la plupart du temps à réduire les ouverts pour le garantir.

Parce que f est un difféomorphisme, $(Df)(u_m, 0)$ est bijective, et donc sa restriction au sous-espace vectoriel Z et injective. La matrice de $(Df)(u_m, 0)$ par rapport aux bases canoniques est donnée par les dérivées partielles $(\partial_j f_i)(u_m, 0)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n + p$ et en particulier la matrice de sa restriction à Z est donnée par

$$(\partial_j f_i)(u_m, 0) \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n + p \ .$$

Le fait que cette restriction est injective implique qu'il existe une sous-matrice de taille $n \times n$ inversible. Autrement dit, il existe $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant n + p$ tels que la matrice carrée de taille $n \times n$ donnée par

$$(\partial_j f_{i_k})(u_m, 0) \quad , \quad 1 \leqslant j, k \leqslant n$$

est inversible. On définit $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ et les indices $j_1 < j_2 < \cdots < j_p$ tels que $J = \{j_1, \dots, j_p\}$ est le complémentaire de I dans le sens $I \cup J = \{1, \dots, n + p\}$. Par définition de la topologie produit, il existe deux ouverts $V_n' \subset \mathbf{R}^n$ et $V_p \subset \mathbf{R}^p$ tels que

$$m \in \tilde{W}' \overset{\text{déf.}}{=} \{\, x \in \mathbf{R}^{n+p} \mid x_I \in V_n' \text{ et } x_J \in V_p \,\} \subset \tilde{W} \quad , \tag{15.57}$$

où on a utilisé la notation [12.7].

Une façon facile d'obtenir ces deux ouverts est d'utiliser la norme $\| \cdot \|_\infty$: par définition de la topologie il existe $r > 0$ tel que $B_r(m) \subset \tilde{W}$ avec

$$B_r(m) = \{\, x \in \mathbf{R}^{n+p} \mid \forall 1 \leqslant i \leqslant n + p : |x_i - m_i| < r \,\} \ .$$

Il suffit donc de prendre $V_n' = B_r(m_I)$ et $V_p = B_r(m_J)$ qui sont donnés par

$$\begin{aligned} V_n' &= \{\, y \in \mathbf{R}^n \mid \forall 1 \leqslant k \leqslant n : |y_k - m_{i_k}| < r \,\} \quad \text{et} \\ V_p &= \{\, z \in \mathbf{R}^p \mid \forall 1 \leqslant k \leqslant p : |z_k - m_{j_k}| < r \,\} \ . \end{aligned}$$

Si on définit l'ouvert $\tilde{U}' = f^{-1}\big(\tilde{W}'\big) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$, on a toujours $f(\tilde{U}' \cap Z) = \tilde{W}' \cap M$. De plus, par définition de la topologie produit, l'ensemble $U_n' \subset \mathbf{R}^n$ défini par

$$U_n' = \big\{\, u \in \mathbf{R}^n \mid (u, 0) \in \tilde{U}' \,\big\} \qquad \text{ou} \qquad \tilde{U}' \cap Z = U_n' \times \{0\} \tag{15.58}$$

est un ouvert contenant u_m. Ensuite on définit l'application $F : U'_n \to \mathbf{R}^n$ par

$$F(u) = f(u,0)_I \quad .$$

Par définition des indices i_k, l'application $(DF)(u_m) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est inversible. On peut donc invoquer le théorème de l'inversion locale et conclure qu'il existe deux ouverts $U''_n \subset U'_n$ et $V_n \subset V'_n$ (avec $u_m \in U''_n$) tels que $F : U''_n \to V_n$ est un C^k-difféomorphisme. On définit maintenant l'application $g : V_n \to \mathbf{R}^p$ par

$$g(y) = f\big(F^{-1}(y),0\big)_J \quad . \tag{15.59}$$

Pour montrer que cette fonction vérifie $g(V_n) \subset V_p$ et qu'elle a bien les propriétés annoncées, on commence avec la remarque qu'on a $W \subset \tilde{W}'$:

$$W \overset{\text{déf.}}{=} \{\, x \in \mathbf{R}^{n+p} \mid x_I \in V_n \text{ et } x_J \in V_p \,\} \subset \tilde{W}' \quad ,$$

simplement parce qu'on a l'inclusion $V_n \subset V'_n$. Ensuite on remarque les implications

$$\begin{aligned} y \in V_n \quad &\Longrightarrow \quad F^{-1}(x) \in U''_n \subset U'_n \quad \overset{(15.58)}{\Longrightarrow} \quad \big(F^{-1}(y),0\big) \in \tilde{U}' \\ &\Longrightarrow \quad f\big(F^{-1}(y),0\big) \in \tilde{W}' \quad \overset{(15.59),\,(15.57)}{\Longrightarrow} \quad g(y) \in V_p \quad , \end{aligned}$$

ce qui montre qu'on a bien $g(V_n) \subset V_p$.

Pour terminer on raisonne comme suit :

$$\begin{aligned} x \in W \cap M \subset \tilde{W}' \quad &\Longrightarrow \quad \exists u \in U'_n : f(u,0) = x \\ \overset{x \in W}{\Longrightarrow} \quad F(u) = x_I \in V_n \quad &\overset{\text{unicité de } u}{\Longrightarrow} \quad u = F^{-1}(x_I) \in U''_n \\ &\Longrightarrow \quad x = f\big(F^{-1}(x_I),0\big) \quad \Longrightarrow \quad x_J = g(x_I) \end{aligned}$$

et dans l'autre sens :

$$\begin{aligned} x \in W \text{ et } x_J = g(x_I) \quad &\Longrightarrow \quad u = F^{-1}(x_I) \in U''_n \text{ et } x_J = f(u,0)_J \\ \Longrightarrow \quad x_I = F(u) = f(u,0)_I \text{ et } x_J = f(u,0)_J \quad &\Longrightarrow \quad x = f(u,0) \in M \quad . \end{aligned}$$

Ainsi on a montré l'égalité $W \cap M = \{\, x \in W \mid x_J = g(x_I) \,\}$.

($\Leftarrow$) Soit $m \in M$ et soit $g : V_n \to V_p$ et W comme dans les hypothèses de l'énoncé. Soit $F : V_n \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^{n+p}$ l'application définie par

$$F(u,v) = x \qquad \text{avec} \qquad x_I = u \quad \text{et} \quad x_J = v + g(u) \quad .$$

On a donc en particulier $F(m_I, 0) = m$. Il est immédiat que F est de classe C^k et injective avec image $\{\, x \in \mathbf{R}^{n+p} \mid x_I \in V_n \,\}$. Sa réciproque est donnée par

$$F^{-1}(x) = \big(x_I, x_J - g(x_I)\big) \quad .$$

Si on définit $U \subset V_n \times \mathbf{R}^p \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ par

$$U = F^{-1}(W) \quad ,$$

alors $f = F|_U : U \to W$ est un C^k-difféomorphisme vérifiant $f(U \cap Z) = W \cap M$.

$\boxed{CQFD}$

Preuve de [13.6]. Soit $f : U \to W \ni m$ un C^k-difféomorphisme tel que $f(U \cap Z) = W \cap M$. On définit l'ouvert $U_n \subset \mathbf{R}^n$ par

$$U_n = \big\{\, u \in \mathbf{R}^n \mid (u,0) \in U \,\big\} \qquad \text{ou} \qquad U \cap Z = U_n \times \{0\} \quad ,$$

le point $u_o \in U_n$ par $f(u_o, 0) = m$ et la fonction $F : U_n \to \mathbf{R}^{n+p}$ par $F(u) = f(u, 0)$. En comparant avec la définition [5.6] des différentielles partielles, on voit qu'on a

$$(DF)(u_o) = (D_1 f)(u_o, 0) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n+p} \quad ,$$

ce qui est donc une application injective, étant la restriction de l'application bijective $(Df)(u_o, 0)$ à un sous-espace. De plus, avec la définition de la différentielle partielle, il est immédiat qu'on a l'égalité

$$\big((DF)(u_o)\big)(\mathbf{R}^n) = \big((Df)(u_o, 0)\big)(Z) \equiv \Big((Df)\big(f^{-1}(m)\big)\Big)(Z) \quad . \tag{15.60}$$

Pour simplifier/raccourcir, on introduit, pour $h \in (\mathbf{R}^n)^*$, les notations s_h et $\varepsilon_F(h)$ par

$$s_h = \frac{1}{\|h\|} \cdot h \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_F(h) = \frac{F(u_o + h) - F(u_o) - \big((DF)(u_o)\big)(h)}{\|h\|} \quad ,$$

où on se restreint évidemment aux valeurs de h pour lesquelles ces expressions ont un sens. Et finalement on abrège $(DF)(u_o)$ par $A \equiv (DF)(u_o)$. Avec tout cela on a donc :

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_F(h) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{F(u_o + h) - F(u_o)}{\|h\|} = A(s_h) + \varepsilon_F(h) \quad . \tag{15.61}$$

Après ces préparations, on commence avec la preuve proprement dite, qui demande donc de montrer que $T = A(\mathbf{R}^n)$ est cet unique sous-espace vectoriel (voir (15.60)). Pour cela on choisit arbitrairement un sous-espace vectoriel $T \subset \mathbf{R}^{n+p}$ de dimension n et on veut montrer qu'on a l'équivalence

$$\lim_{\substack{x \to m \\ x \in M}} \frac{d(x - m, T)}{\|x - m\|} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad T = A(\mathbf{R}^n) \quad .$$

La première chose à faire est donc d'obtenir une formule pour la distance $d(y, T)$ et, comme dit dans [13.7], nous utilisons la norme euclidienne pour cela. On choisit une base $e_1, \ldots e_n$ de T qu'on complète en une base $e_1, \ldots, e_{n+p}$ de $\mathbf{R}^{n+p}$. Par la procédure d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt on peut supposer que c'est une base orthonormée. Dans ces conditions on peut décomposer tout vecteur $y \in \mathbf{R}^{n+p}$ en une partie $y_\parallel \in T$ et une partie $y_\perp$ orthogonal à T. Cette décomposition est donnée par la formule

$$y_\parallel = \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle \cdot e_i \qquad \text{et} \qquad y_\perp = \sum_{i=n+1}^{n+p} \langle y, e_i \rangle \cdot e_i \quad ,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire (usuel) dans $\mathbf{R}^{n+p}$: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n+p} x_i\, y_i$. Ce qui est important à noter est que la formule explicite pour $y_\perp$ montre que l'application $y \mapsto y_\perp$ est continue. Avec cette décomposition on obtient la distance $d(y, T)$ comme

$$d(y, T) = \|y_\perp\| \quad .$$

Sachant qu'on veut prendre la limite $x \to m$, on peut supposer que $x \in W$ avec $x \neq m$, et sachant qu'on a la condition supplémentaire $x \in M$, il existe $h \in (\mathbf{R}^n)^*$ tel que

$$u_o + h \in U_n \qquad \text{et} \qquad F(u_o + h) \equiv f(u_o + h, 0) = x \quad .$$

On a donc l'égalité

$$\frac{d(x - m, T)}{\|x - m\|} = \frac{\big\|\big(F(u_o + h) - F(u_o)\big)_\perp\big\|}{\|F(u_o + h) - F(u_o)\|} = \frac{\big\|\big(A(s_h) + \varepsilon_F(h)\big)_\perp\big\|}{\|A(s_h) + \varepsilon_F(h)\|} \quad . \tag{15.62}$$

Dans un premier temps on s'intéresse exclusivement au dénominateur. On commence avec l'introduction de l'ensemble $S_1 \subset \mathbf{R}^n$ comme

$$S_1 = \{ \, u \in \mathbf{R}^n \mid \|u\| = 1 \, \} \quad ,$$

ce qui est un ensemble fermé et borné. La fonction continue $u \mapsto \|A(u)\|$ admet donc un minimum α_m et un maximum α_M sur S_1 :

$$\exists s_0, s_1 \in S_1 \; \forall s \in S_1 \quad : \quad \alpha_m \equiv \|A(s_0)\| \leqslant \|A(s)\| \leqslant \|A(s_1)\| \equiv \alpha_M \quad .$$

Mais A est injective, donc $\alpha_m > 0$ (sinon il y aurait un vecteur non-nul dans le noyau de A). L'inégalité triangulaire (et le fait qu'on a $s_h \in S_1$) nous donne donc l'encadrement

$$\alpha_m - \|\varepsilon_F(h)\| \leqslant \|A(s_h) + \varepsilon_F(h)\| \leqslant \alpha_M + \|\varepsilon_F(h)\| \quad . \tag{15.63}$$

Ce qu'on va voir est que l'inégalité à gauche nous donnera l'existence et l'inégalité à droite nous donnera l'unicité.

• Commençons avec l'unicité en montrant que s'il existe un tel T, alors c'est nécessairement $A(\mathbf{R}^n)$. Pour cela on fixe $v \in (\mathbf{R}^n)^*$ et on pose $h = \lambda \cdot v$. Il s'ensuit non seulement, avec (15.61), qu'on a

$$\lim_{\lambda \to 0} \varepsilon_F(h) = 0 \quad , \tag{15.64}$$

mais aussi que s_h est indépendant de $\lambda \in \mathbf{R}$, ce qui nous permet d'utiliser (15.62) et (15.63) (et la continuité de l'application $y \mapsto y_\perp$!) pour faire le calcul :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{\|A(s_h)_\perp\|}{\alpha_M} &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\big\|\big(A(s_h) + \varepsilon_F(h)\big)_\perp\big\|}{\alpha_M + \|\varepsilon_F(h)\|} \\ &\overset{(15.63)}{\leqslant} \lim_{\lambda \to 0} \frac{\big\|\big(A(s_h) + \varepsilon_F(h)\big)_\perp\big\|}{\|A(s_h) + \varepsilon_F(h)\|} \overset{(15.62)}{=} \lim_{\lambda \to 0} \frac{d\big(F(u_o + h) - m, T\big)}{\|F(u_o + h) - m\|} \overset{\text{hyp.}}{=} 0 \quad . \end{aligned}$$

On doit donc avoir $A(s_h)_\perp = 0$, ce qui veut dire qu'on doit avoir $A(s_h) \in T$. Mais $v \in \mathbf{R}^n$ était arbitraire et $s_h = v/\|v\|$, donc $A(s_h)$ est un multiple de $A(v)$. Il s'ensuit que $A(\mathbf{R}^n) \subset T$ et donc, parce qu'ils ont la même dimension (A est injective !), on a l'égalité $T = A(\mathbf{R}^n)$. La conclusion est donc que, **si** un tel T existe, il doit être égale à $A(\mathbf{R}^n)$.

• Pour montrer que $T = A(\mathbf{R}^n)$ remplit bien les conditions souhaitées, il ne suffit pas de montrer qu'en suivant un chemin particulier (en l'occurrence $\lambda \mapsto F(u_o + \lambda v)$) on obtient une limite zéro, il faut le faire "globalement." Pour cela on remarque d'abord que l'application $f^{-1} : W \to U$ est continue, ce qui est le cas si et seulement si toutes les composantes sont continues. Il s'ensuit que l'application $g : W \to \mathbf{R}^n$ définie par

$$g(x) = \Big(\, \big(f^{-1}(x)\big)_1 \, , \ldots , \, \big(f^{-1}(x)\big)_n \, \Big) - \big(\, (u_o)_1, \ldots, (u_o)_n \, \big)$$

est continue et qu'on a donc en particulier

$$\lim_{x \to m} g(x) = g(m) = 0 \in \mathbf{R}^n \quad . \tag{15.65}$$

Cette application a en plus la bonne propriété

$$x \in W \cap M \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(x) \in Z \cap U \quad \Longrightarrow \quad x = F\big(u_o + g(x)\big) \quad .$$

On a donc pour $x \in W \cap M$, en notant $g(x) = h$, la majoration

$$\frac{d\big(x - m, T\big)}{\|x - m\|} = \frac{d\big(F(u_o + h) - m, T\big)}{\|F(u_o + h) - m\|} \overset{(15.62)}{=} \frac{\big\|\big(A(s_h) + \varepsilon_F(h)\big)_\perp\big\|}{\|A(s_h) + \varepsilon_F(h)\|}$$

$$\overset{(15.63)}{\leqslant} \frac{\left\|\big(A(s_h)+\varepsilon_F(h)\big)_\perp\right\|}{\alpha_m - \|\varepsilon_F(h)\|} = \frac{\left\|\varepsilon_F\big(g(x)\big)_\perp\right\|}{\alpha_m - \left\|\varepsilon_F\big(g(x)\big)\right\|} \quad ,$$

où pour la majoration il faut supposer que $\alpha_m - \|\varepsilon_F(h)\|$ soit positive, ce qui est vrai si $h = g(x)$ est suffisamment petit grâce à (15.61), et cela sera vrai si x est suffisamment proche de m grâce à (15.65). Et pour la dernière égalité on a utilisé l'hypothèse que $T = A(\mathbf{R}^n)$, ce qui implique que $A(v)_\perp = 0$ pour tout $v \in \mathbf{R}^n$. En combinant les deux limites (15.61) et (15.65) on a donc

$$0 \leqslant \lim_{\substack{x\to m\\ x\in M}} \frac{d(x-m,T)}{\|x-m\|} \leqslant \lim_{x\to m} \frac{\left\|\varepsilon_F\big(g(x)\big)_\perp\right\|}{\alpha_m - \left\|\varepsilon_F\big(g(x)\big)\right\|} = 0 \quad ,$$

comme souhaité. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [13.9]. Pour simplifier les notations, abrégeons

$$\begin{aligned} T_k &= \{\, v \in \mathbf{R}^{n+p} \mid \exists \varepsilon > 0 \ \exists \gamma : I_\varepsilon \to M \text{ de classe } C^k : \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma(0) = m \ \&\ \gamma'(0) = v \,\} \\ T_0 &= \{\, v \in \mathbf{R}^{n+p} \mid \exists \varepsilon > 0 \ \exists \gamma : I_\varepsilon \to M \text{ dérivable en } 0 : \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma(0) = m \ \&\ \gamma'(0) = v \,\} \quad , \end{aligned}$$

ce qui veut dire qu'on doit montrer les égalités $T_mM = T_k = T_0$, ce qu'on fera par les trois inclusions circulaires $T_mM \subset T_k \subset T_0 \subset T_mM$. Parmi ces trois inclusion, l'inclusion $T_k \subset T_0$ est évident : si une courbe est de classe C^k, elle est certainement dérivable en 0.

• Pour montrer l'inclusion $T_mM \subset T_k$, on invoque la définition d'une sous-variété pour obtenir un C^k-difféomorphisme $f : U \to W \ni m$ tel que $f(U \cap Z) = W \cap M$. Dans ce cas on a, selon [13.6], l'égalité (avec $u_o = f^{-1}(m) \in U \cap Z$)

$$T_mM = \left\{ \big((Df)(u_o)\big)(v) \mid v \in Z \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \right\} \quad .$$

Pour $v \in Z$ on définit maintenant la courbe (de classe C^∞) $c : \mathbf{R} \to Z$ par

$$c(t) = u_o + tv \quad .$$

Par continuité de c il existe $\varepsilon > 0$ tel que $c(I_\varepsilon) \subset U \cap Z$. On peut donc définir la courbe $\gamma : I_\varepsilon \to M$ par

$$\gamma(t) = f\big(c(t)\big) \quad .$$

Par composée de dérivées il est immédiat qu'on a l'égalité

$$\gamma'(0) = \big((Df)(u_o)\big)(v) \quad ,$$

ce qui montre bien qu'on a l'inclusion $T_mM \subset T_k$.

• Pour montrer l'inclusion $T_0 \subset T_mM$, on prend une courbe $\gamma : I_\varepsilon \to M$ dérivable en 0 avec $\gamma(0) = m$. Parce que γ est dérivable en 0, elle est continue en 0, donc il existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tel que $\gamma(I_{\varepsilon'}) \subset W$. Il s'ensuit que la courbe $c : I_{\varepsilon'} \to Z \cap U$ définie par

$$c(t) = f^{-1}\big(\gamma(t)\big)$$

est dérivable en 0 et qu'on a l'égalité $\gamma = f \circ c$. On déduit du fait que c prend ses valeurs dans Z, que $c'(0)$ appartient aussi à Z. Mais dans ce cas on aura

$$\gamma'(0) = \big((Df)(u_o)\big)\big(c'(0)\big) \in \big((Df)(u_o)\big)(Z) = T_mM \quad ,$$

ce qui montre l'inclusion $T_0 \subset T_m M$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [13.11]. Soit $x \in f^{-1}(c)$ arbitraire. Pour qu'on ait $\mathrm{rang}\big((Df)(x)\big) = p$, il faut et il suffit qu'il existe une sous-matrice carrée de taille $p\times p$ dont le déterminant est non-nul. Autrement dit, s'il existe des indices $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leqslant n+p$ tel que

$$\det\Big(\big((\partial_{j_k} f_i)(x)\big)_{i,k=1}^{p}\Big) \neq 0 \quad .$$

Il s'ensuit qu'on a la propriété

$$\mathrm{rang}\big((Df)(x)\big) < p \qquad \Longleftrightarrow \\ \forall\, 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leqslant n+p \;:\; \det\Big(\big((\partial_{j_k} f_i)(x)\big)_{i,k=1}^{p}\Big) = 0 \quad ,$$

simplement parce qu'on a (pour une application linéaire à valeur dans $\mathbf{R}^p$) toujours $\mathrm{rang}\big((Df)(x)\big) \leqslant p$. Pour que c soit une valeur régulière, il faut (et il suffit) que pour tout $x \in f^{-1}(c)$ on n'a pas $\mathrm{rang}\big((Df)(x)\big) < p$, ce qui revient à dire que la condition $f(x) = c$ est incompatible avec $\mathrm{rang}\big((Df)(x)\big) < p$. Notre équivalence ci-dessus termine alors la preuve. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [13.12]. Soit $m \in M$, alors par définition d'une valeur régulière, le rang de $(Df)(m)$ est p, ce qui implique que sa matrice, de taille $p \times (n+p)$, a une sous-matrice de taille $p \times p$ inversible. Autrement dit, il existe des indices $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n+p$ tels que la matrice

$$(\partial_{i_\ell} f_k)(m) \quad , \quad 1 \leqslant k, \ell \leqslant p$$

est inversible. On définit $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ et les indices $j_1 < \cdots < j_n$ tels que $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ est le complémentaire de I : $I \cup J = \{1, \ldots, n+p\}$. Ainsi on a vérifié les hypothèses du théorèmes des fonctions implicites [12.8]. Il existe donc deux ouverts $V_n \subset \mathbf{R}^n$, $V_p \subset \mathbf{R}^p$ et une (unique) fonction $g : V_n \to V_p$ de classe C^k tels que

(i) $m \in W \subset U$, avec (voir [12.7] pour la notation)

$$W = \{\, x \in \mathbf{R}^{p+n} \mid x_I \in V_p \text{ et } x_J \in V_n \,\} \quad .$$

(ii)
$$\forall x \in W \quad : \quad f(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad x_J = g(x_I) \quad .$$

Ceci montre qu'on a rempli les hypothèses de [13.5]. Il s'ensuit que M est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+p}$ de classe C^k et de dimension n.

Pour montrer qu'on a $T_m M = \ker\big((Df)(m)\big)$, on utilise [13.9]. Soit donc $\gamma : I_\varepsilon \to M$ une courbe dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = m$. Alors par définition de M on a

$$\forall t \in I_\varepsilon \quad : \quad f\big(\gamma(t)\big) = c$$

et donc par la dérivée d'une composée d'applications, on a forcément

$$\big((Df)(m)\big)\big(\gamma'(0)\big) = 0 \quad .$$

Il s'ensuit avec [13.9] qu'on doit avoir l'inclusion $T_mM \subset \ker\big((Df)(m)\big)$. Mais par définition d'une valeur régulière $\ker\big((Df)(m)\big)$ a dimension $n = \dim\big(T_mM\big)$ et donc on doit avoir l'égalité $T_mM = \ker\big((Df)(m)\big)$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [13.13]. On a $\mathrm{rang}\big((Df)(m)\big) = p$ si et seulement s'il existe une sous-matrice carrée de taille $p \times p$ dont le déterminant est non-nul. Autrement dit, s'il existe des indices $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leqslant n+p$ tel que

$$\det\Big(\big((\partial_{j_k} f_i)(m)\big)_{i,k=1}^{p}\Big) \neq 0 \ .$$

Mais f est de classe C^k avec $k \geqslant 1$ et donc la fonction $g : U \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x) = \det\Big(\big((\partial_{j_k} f_i)(x)\big)_{i,k=1}^{p}\Big)$$

est (au moins) continue. Il existe donc un voisinage ouvert $V \subset U$ de m tel que la restriction de g à V reste non-nulle (on pourrait prendre $V = g^{-1}(\mathbf{R}^*)$). Il s'ensuit que c est une valeur régulière pour $f|_V$, la restriction de f à V. Et donc par [13.12] $\big(f|_V\big)^{-1}(c) = V \cap f^{-1}(c) = V \cap M$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+p}$. $\boxed{CQFD}$

Les preuves de §14

Preuve de [14.1]. S'il existe g tel que $h = g \circ f$, alors on en déduit immédiatement qu'on a $\ker(f) \subset \ker(h)$. De plus, on devrait avoir

$$\forall y \in F \quad : \quad y = f(x) \quad \Longrightarrow \quad g(y) = g\big(f(x)\big) = h(x) \quad . \tag{15.66}$$

Il s'ensuit immédiatement que si g existe, il est déterminé d'un façon unique sur $\mathrm{im}(f)$, montrant que si f est surjectif, alors g est unique.

Supposons donc qu'on a $\ker(f) \subset \ker(h)$ et cherchons g. On définit d'abord l'application $g_1 : \mathrm{im}(f) \subset F \to G$ par (15.66), ou plus précisément : pour $y \in \mathrm{im}(f)$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et dans ce cas on pose $g_1(y) = h(x)$. Que la valeur $h(x)$ ne dépend pas du choix de $x \in E$ vérifiant $f(x) = y$ est une conséquence de l'hypothèse $\ker(f) \subset \ker(h)$: si on a aussi $y = f(x')$, alors $x - x' \in \ker(f) \subset \ker(h)$ et donc $h(x') = h(x)$. Il est immédiat que l'application $g_1 : \mathrm{im}(f) \to G$ est linéaire.

Soit maintenant $F_2 \subset F$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{im}(f)$, de sorte qu'on a $F = \mathrm{im}(f) \oplus F_2$. (On trouve un tel supplément en appliquant le théorème de la base incomplète à une base de $\mathrm{im}(f)$ pour trouver une base de F. Le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de base supplémentaires est un tel supplément.) Si $g_2 : F_2 \to G$ est une application linéaire arbitraire, on définit $g : F \to G$ par

$$g(y) = g_1(y_1) + g_2(y_2)$$

où $y = y_1 + y_2$ est l'unique décomposition de y avec $y_1 \in \mathrm{im}(f)$ et $y_2 \in F_2$.

C'est une conséquence immédiate de la construction de g_1 qu'on a $h = g \circ f$. De plus, si f n'est pas surjectif, alors $F_2 \neq \{0\}$ et donc on a plusieurs choix possibles pour g_2, montrant que si f n'est pas surjectif, alors g n'est pas unique. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [14.2]. L'idée de la preuve est de montrer l'inclusion $\ker\big((Dg)(a)\big) \subset \ker\big((Df)(a)\big)$ et d'appliquer [14.1] à ces deux applications linéaires pour obtenir une application linéaire $\lambda : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ tel que $(Df)(a) = \lambda \circ (Dg)(a)$. L'écriture de cette égalité en coordonnées donne le résultat (14.3). Dans la preuve de cette inclusion on veut utiliser l'espace tangent T_aM. Pour pouvoir le faire on montre d'abord que la condition $\mathrm{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$ nous dit que M est localement (dans un voisinage ouvert de a) une sous-variété. Dans ce voisinage la restriction de f à M présente toujours un extremum local, ce qui nous permettra de montrer l'inclusion recherchée.

Si $f|_M$ présente un extremum local en a, alors par définition il existe un voisinage ouvert V_o de a tel que

$$\forall x \in V_o \cap M \ : \ f(x) \leqslant f(a) \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in V_o \cap M \ : \ f(x) \geqslant f(a) \quad .$$

D'autre part, la condition $\mathrm{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$ dit que la matrice $(Dg)(a)$ de taille $p \times (n+p)$ a une sous-matrice de taille $p \times p$ qui a un déterminant non-nul. Par continuité du déterminant il existe donc un voisinage $V \subset U$ de a tel que ce déterminant est non-nul sur V et donc que $\mathrm{rang}\big((Dg)(x)\big) = p$ pour tout $x \in V$. Par [13.12] on en déduit que $M' = M \cap V$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+p}$ et que M' est définie comme

$$M' = \{\, x \in V \mid g(x) = 0 \,\} \quad .$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a

$$\forall x \in V_o \cap M' \ : \ f(x) \leqslant f(a) \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in V_o \cap M' \ : \ f(x) \geqslant f(a) \quad ,$$

ce qui se résume en disant que $f|_{M'}$ présente un extremum local en a.

Soit maintenant $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to M' \subset \mathbf{R}^{n+p}$ une application dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = a$. Du fait que $f|_{M'}$ présente un extremum local en a on déduit que $h = f\circ\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbf{R}$ présente un extremum local en 0 et donc $h'(0) = 0$. Il s'ensuit qu'on a

$$0 = h'(0) = (Df)(a)\circ\gamma'(0) \ ,$$

ce qui veut dire qu'on doit avoir $\gamma'(0) \in \ker\big((Df)(a)\big)$. Avec [13.9] et [13.12] il s'ensuit qu'on a l'inclusion

$$\ker\big((Dg)(a)\big) \overset{[13.9],\,[13.12]}{=} T_aM' \subset \ker\big((Df)(a)\big) \ .$$

L'application de [14.1] aux applications linéaire $(Df)(a) : \mathbf{R}^{n+p} \to \mathbf{R}$ et $(Dg)(a) : \mathbf{R}^{n+p} \to \mathbf{R}^p$ permet alors de conclure qu'il existe $\lambda : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ tel que

$$(Df)(a) = \lambda\circ(Dg)(a) \ . \tag{15.67}$$

La condition $\mathrm{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$ dit que $(Dg)(a)$ est surjectif et donc λ est unique. Il suffit maintenant d'exprimer g et λ par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^p$ comme

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_p(x)\end{pmatrix} \quad , \quad (Dg)(a) = \begin{pmatrix} (Dg_1)(a) \\ \vdots \\ (Dg_p)(a)\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$$

pour que (15.67) se transforme en (14.3). $\boxed{CQFD}$

Preuve de [14.4]. La condition que (a,λ) est un point critique de F est équivalent à la condition que toutes les dérivées partielles sont nulles au point (a,λ). Il suffit maintenant de remarquer que les dérivées partielles par rapport au $n+p$ premières variables (les x) sont données par

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n+p \quad : \quad (\partial_i F)(a,\lambda) = (\partial_i f)(a) - \sum_{k=1}^p \lambda_k\,(\partial_i g_k)(a,\lambda)$$

et que donc la nullité des ces dérivées partielles se résume comme

$$(Df)(a) - \sum_{k=1}^p \lambda_k\,(Dg_k)(a) = 0 \ ,$$

et d'autre part que les dérivées partielles par rapport aux p dernières variables (les λ) sont données par

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant p \quad : \quad (\partial_{n+p+i} F)(a,\lambda) = g_i(a)$$

et donc la nullité de ces dérivées partielles nous dit qu'on doit avoir $a \in M$. $\boxed{CQFD}$

Preuve de [14.5]. La preuve est une adaptation de l'idée de la preuve du cas non-lié [9.3]. L'argument peut se résumer comme suit. La condition $\mathrm{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$ garantit que M est une sous-variété dans un voisinage de m et donc il existe un C^k difféomorphisme $\varphi : O \subset \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^p \to W \subset \mathbf{R}^n$ tel que $\varphi(O\cap Z) = W\cap M$. Ensuite on définit $O_n \subset \mathbf{R}^n$ par $O_n\times\{0\} = O\cap Z$, $\Phi : O_n \to W$ par $\Phi(u) = \varphi(u,0)$ et $u_o \in O_n$ par $\Phi(u_o) = a$. On développe Φ à l'ordre 1 au voisinage de u_o et F à l'ordre 2 au voisinage de a,λ (sachant que (a,λ) est un point stationnaire, donc que le terme d'ordre 1 disparaît) ce qui donne

$$F\big(\Phi(u_o+h),\lambda\big) - F(a,\lambda) = \frac{\|h\|^2}{2}\Big(\ H(\sigma_h,\sigma_h) + 2\,H\big(\sigma_h,\varepsilon_\Phi(h)\big)$$

$$+ H\big(\varepsilon_\Phi(h), \varepsilon_\Phi(h)\big) + 2\,\|\eta\|^2 \cdot \rho_F(\,\|h\|\cdot\eta)\,\Big) \quad , \tag{15.68}$$

où ε_Φ est le "reste" dans le développement de Φ à l'ordre 1, où ρ_F est le "reste" dans le développement de F à l'ordre 2 et où on a introduit les abréviations

$$\sigma_h = \big((D\Phi)(u_o)\big)(\,h/\|h\|\,) \qquad \text{et} \qquad \eta = \sigma_h + \varepsilon_\Phi(h) \quad .$$

Le cœur de l'argument est alors que les trois derniers termes dans (15.68) tendent vers 0 dans la limite $h \to 0$ et donc que le terme $H(\sigma_h, \sigma_h)$, qui ne dépend pas de la longueur de h mais seulement de sa direction, devient dominant. Et de plus, $F\big(\Phi(u_o+h), \lambda\big) - F(a, \lambda) = f\big(\Phi(u_o+h)\big) - f(a)$ et σ_h appartient à $\ker\big((Dg)(a)\big)$. Si donc H est définie positive sur $\ker\big((Dg)(a)\big)$, alors la restriction de f à M présente un minimum local strict, si définie négative un maximum local strict, et s'il existe v, w comme dans l'énoncé, dans tout voisinage de a il y aura des points $x \in M$ avec $f(x) < f(a)$ et d'autres avec $f(x) > f(a)$ et donc il ne peut pas y avoir un maximum ni un minimum local en a.

• (Étape 1) : Pour pouvoir bien décrire le sous-ensemble M dans un voisinage de a, on commence avec l'observation que la matrice de $(Dg)(a)$ est une matrice de taille $(n+p) \times p$ et que la condition $\mathrm{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$ dit qu'il existe une sous-matrice de taille $p \times p$ qui a un déterminant non-nul. Par continuité du déterminant, il s'ensuit qu'il existe un voisinage ouvert $U_o \subset U$ de a tel que ce déterminant est non-nul sur U_o et donc que $\mathrm{rang}\big((Dg)(x)\big) = p$ pour tout $x \in U_o$. Par [13.12] on en déduit que $M \cap U_o$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+p}$ (de dimension n et de classe C^k). Une fois qu'on sait que $M \cap U_o$ est une sous-variété, il s'ensuit qu'il existe un C^k-difféomorphisme $\varphi : O \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \to W \subset U_o$ tel que $\varphi(Z \cap O) = M \cap W$ [13.1]. Ensuite on définit l'ouvert $O_n \subset \mathbf{R}^n$ par

$$O_n = \big\{\, u \in \mathbf{R}^n \mid (u, 0) \in O \,\big\} \qquad \text{ou} \qquad O \cap Z = O_n \times \{0\} \quad ,$$

le point $u_o \in O_n$ par $\varphi(u_o, 0) = a$ et la fonction $\Phi : O_n \to \mathbf{R}^{n+p}$ par $\Phi(u) = \varphi(u, 0)$. La définition de φ nous assure que l'application $\Phi : O_n \to W \cap M$ est une bijection.

• (Étape 2) : Pour montrer que a est un extremum local strict, il faut trouver un voisinage ouvert V de a sur lequel $f(a)$ est la valeur extrémale pour $f(M \cap V)$. L'idée est de prendre $V \subset W$ de sorte que chaque point $x \in M \cap V$ est de la forme $x = \Phi(u)$. Ensuite on raisonne en termes des coordonnées $u \in \mathbf{R}^n$. Et pour trouver le bon voisinage V on utilise [8.9] avec $n = 2$ avec (entre autres) la fonction Φ. Comme dans a preuve de [13.6], on commence avec un grand nombre d'abréviations en partant d'un $h \in \mathbf{R}^n$ tel que $u = u_o + h \in O_n$. D'abord :

$$s_h = \frac{1}{\|h\|} \cdot h \qquad , \qquad \varepsilon_\Phi(h) = \frac{\Phi(u_o + h) - \Phi(u_o) - \big((D\Phi)(u_o)\big)(h)}{\|h\|} \quad ,$$

de sorte que

$$\Phi(u) = \Phi(u_o) + \|h\| \cdot \Big(\big((D\Phi)(u_o)\big)(s_h) + \varepsilon_\Phi(h)\Big) \quad . \tag{15.69}$$

La définition de la différentielle nous dit alors qu'on a

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_\Phi(h) = 0 \quad . \tag{15.70}$$

Ensuite, pour $\xi \in \mathbf{R}^{n+p}$ tel que $x = a + \xi \in U$ et en utilisant la définition de H :

$$\begin{aligned} \rho_F(\xi) &= \frac{F(a+\xi, \lambda) - F(a, \lambda) - \frac{1}{2} \cdot \big((D^2F)(a, \lambda)\big)\big((\xi, 0), (\xi, 0)\big)}{\|\xi\|^2} \\ &= \frac{F(a+\xi, \lambda) - F(a, \lambda) - \frac{1}{2} \cdot H(\xi, \xi)}{\|\xi\|^2} \quad , \end{aligned}$$

de sorte qu'on a

$$F(a+\xi,\lambda)-F(a,\lambda)=\tfrac{1}{2}\cdot H(\xi,\xi)+\|\xi\|^2\cdot\rho_F(\xi)\quad . \tag{15.71}$$

Par [8.9] avec $n=2$ et le fait que (a,λ) est un point critique de F il s'ensuit qu'on a

$$\lim_{\xi\to 0}\ \rho_F(\xi)=0\quad . \tag{15.72}$$

En prenant

$$\xi=\|h\|\cdot\eta\qquad\text{avec}\qquad \eta=\big((D\Phi)(u_o)\big)(s_h)+\varepsilon_\Phi(h)$$

et en remarquant que $\Phi(u_o)=a$ et $\Phi(u)$ appartiennent à M, donc $g\big(\Phi(u \text{ resp. } u_o)\big)=0$ et donc $F\big(\Phi(u \text{ resp. } u_o)\big)=f\big(\Phi(u \text{ resp. } u_o)\big)$, on obtient, en combinant [15.69] et [15.71]

$$\begin{aligned} f\big(\Phi(u)\big)-f(a)&=F(a+\xi,\lambda)-F(a,\lambda)\\ &=\tfrac{1}{2}\cdot H(\xi,\xi)+\|\xi\|^2\cdot\rho_F(\xi)\\ &=\frac{\|h\|^2}{2}\cdot\big(H(\eta,\eta)+2\,\|\eta\|^2\cdot\rho_F(\,\|h\|\cdot\eta)\big)\quad . \end{aligned}\tag{15.73}$$

Il s'ensuit que savoir si $f\big(\Phi(u)\big)$ est plus grand ou plut petit que $f(a)$ revient à la détermination du signe de $H(\eta,\eta)+2\,\|\eta\|^2\cdot\rho_F(\,\|h\|\cdot\eta)$.

La dernière abréviation est l'introduction du vecteur $\sigma_h\in\mathbf{R}^{n+p}$ comme

$$\sigma_h=\big((D\Phi)(u_o)\big)(s_h)\quad ,$$

qui, par [13.6] et [13.12] appartient à $T_aM=\ker\big((Dg)(a)\big)$. En combinant ceci avec la définition de η on obtient (en utilisant la bilinéarité et la symétrie de H)

$$\begin{aligned} &H(\eta,\eta)+2\,\|\eta\|^2\cdot\rho_F(\,\|h\|\cdot\eta)\\ &\qquad=H(\sigma_h,\sigma_h)+2\,H\big(\sigma_h,\varepsilon_\Phi(h)\big)\\ &\qquad\qquad+H\big(\varepsilon_\Phi(h),\varepsilon_\Phi(h)\big)+2\,\|\eta\|^2\cdot\rho_F(\,\|h\|\cdot\eta)\quad . \end{aligned}\tag{15.74}$$

Parmi ces quatre termes, on va montrer que les trois derniers ont une limite 0 quand h tend vers 0. Pour cela on commence avec les majorations

$$\|s_h\|=1\qquad\Longrightarrow\qquad\|\sigma_h\|\leqslant\|(D\Phi)(u_o)\|\cdot\|s_h\|=\|(D\Phi)(u_o)\|$$

et

$$\|\eta\|\leqslant\|(D\Phi)(u_o)\|+\|\varepsilon_\Phi(h)\|\quad .$$

Ce dernier, combiné avec (15.70) et (15.72), nous permet de faire le raisonnement

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\ \|h\|\cdot\eta=0\quad&\Rightarrow\quad\lim_{h\to 0}\ \rho_F(\,\|h\|\cdot\eta\,)=0\\ &\qquad\Rightarrow\quad\lim_{h\to 0}\ 2\,\|\eta\|^2\cdot\rho_F(\,\|h\|\cdot\eta\,)=0\quad . \end{aligned}$$

Ensuite on utilise la continuité de H et de nouveau (15.70) pour conclure :

$$\|H\big(\varepsilon_\Phi(h),\varepsilon_\Phi(h)\big)\|\leqslant\|H\|\cdot\|\varepsilon_\Phi(h)\|^2\quad\Rightarrow\quad\lim_{h\to 0}H\big(\varepsilon_\Phi(h),\varepsilon_\Phi(h)\big)=0\quad ,$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \|2\,H\big(\sigma_h,\varepsilon_\Phi(h)\big)\|&\leqslant 2\,\|H\|\cdot\|\sigma_h\|\cdot\|\varepsilon_\Phi(h)\|\\ &\leqslant 2\,\|H\|\cdot\|(D\Phi)(u_o)\|\cdot\|\varepsilon_\Phi(h)\| \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{h\to 0}\ 2\,H\big(\sigma_h,\varepsilon_\Phi(h)\big)=0\quad .$$

La conclusion est que pour tout $\alpha > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|h\| < \delta \qquad \Longrightarrow$$

$$\Big\| \, 2\,H\big(\sigma_h, \varepsilon_\Phi(h)\big) + H\big(\varepsilon_\Phi(h), \varepsilon_\Phi(h)\big) + 2\,\|\eta\|^2 \cdot \rho_F(\, \|h\| \cdot \eta) \,\Big\| < \alpha \quad . \tag{15.75}$$

• (Étape 3) : Après ces préparations on peut commencer à traiter les trois cas de l'énoncé. L'ensemble $S_1 \subset \mathbf{R}^n$ défini comme $S_1 = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1 \,\}$ est fermé et borné, donc un compact. Et la fonction $q : S_1 \to \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{aligned} q(s) &= H\Big(\big((D\Phi)(u_o)\big)(s)\,,\ \big((D\Phi)(u_o)\big)(s) \Big) \\ &\equiv H(\sigma, \sigma) \qquad \text{avec} \qquad \sigma = \big((D\Phi)(u_o)\big)(s) \end{aligned}$$

est continue. Il existe donc $s_{min}, s_{max} \in S_1$ tels que

$$\forall s \in S_1 \quad : \quad \alpha_{min} \overset{\text{déf.}}{=} q(s_{min}) \leqslant q(s) \leqslant q(s_{max}) \overset{\text{déf.}}{=} \alpha_{max} \quad .$$

De plus, $\sigma = \big((D\Phi)(u_o)\big)(s)$ appartient à $T_aM = \ker\big((Dg)(a)\big)$, ce qui montre que $q(s)$ est une des valeurs de la restriction de H au sous-espace $\ker\big((Dg)(a)\big)$.

Si H est donc définie positive sur $\ker\big((Dg)(a)\big)$, alors $q(s) > 0$ pour tout $s \in S_1$ (car $(D\Phi)(u_o)$ est injective, donc pour $s \in S_1$ on a $\sigma \neq 0$). En particulier $\alpha_{min} > 0$. Si dans (15.75) on choisit donc $\alpha = \alpha_{min}$, alors avec (15.73) il s'ensuit qu'il existe $\delta > 0$ tel qu'on a

$$0 < \|h\| < \delta \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} &f\big(\Phi(u_o{+}h)\big) - f(a) \\ &\qquad \geqslant \frac{\|h\|^2}{2} \cdot \Big(\ H(\sigma_h, \sigma_h) - \big|\ 2\,H\big(\sigma_h, \varepsilon_\Phi(h)\big) + H\big(\varepsilon_\Phi(h), \varepsilon_\Phi(h)\big) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + 2\,\|\eta\|^2 \cdot \rho_F(\, \|h\| \cdot \eta) \ \big| \ \Big) \\ &\qquad > \frac{\|h\|^2}{2} \cdot (\alpha_{min} - \alpha_{min}) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{15.76}$$

Pour justifier que ceci montre que la restriction de f à M présente un minimum local strict en a, il faut trouver l'ouvert V dont on a parlé au début de l'étape 2. Pour cela on le définit par

$$V = \varphi\Big(\ \big(B_\delta(u_o) \times \mathbf{R}^p\big) \cap O \ \Big) \quad .$$

L'application φ étant un C^k-difféomorphisme, l'image d'un ouvert est un ouvert, ce qui montre que V est bien un voisinage ouvert de a. Ensuite, pour $x \in V \cap M$ avec $x \neq a$, il existe (par définition de l'application φ) un unique $u \in O_n \cap B_\delta(u_o)$ avec $u \neq u_o$ tel que $x = \varphi(u,0) = \Phi(u)$. Avec $h = u - u_o$ vérifiant $0 < \|h\| < \delta$ on déduit de (15.76) qu'on a bien $f(x) > f(a)$.

Et si H est définie négative sur $\ker\big((Dg)(a)\big)$, alors $q(s) < 0$ pour tout $s \in S_1$ et en particulier $\alpha_{max} < 0$. Si dans (15.75) on choisit donc $\alpha = -\alpha_{max}$, alors avec (15.73) il s'ensuit qu'il existe $\delta > 0$ tel qu'on a

$$0 < \|h\| < \delta \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} &f\big(\Phi(u_o{+}h)\big) - f(a) \\ &\qquad \leqslant \frac{\|h\|^2}{2} \cdot \Big(\ H(\sigma_h, \sigma_h) + \big|\ 2\,H\big(\sigma_h, \varepsilon_\Phi(h)\big) + H\big(\varepsilon_\Phi(h), \varepsilon_\Phi(h)\big) \end{aligned}$$

$$+ 2\,\|\eta\|^2 \cdot \rho_F(\,\|h\|\cdot\eta)\ \Big|\ \Big)$$

$$< \frac{\|h\|^2}{2} \cdot (\alpha_{max} - \alpha_{max}) = 0 \ \ .$$

Avec la même définition du voisinage ouvert V de a, mais avec le nouveau δ, et avec les mêmes arguments, il s'ensuit que la restriction de f à M présente un maximum local strict en a.

Il nous reste donc à traiter le troisième cas. Les égalités $\big((D\Phi)(u_o)\big)(\mathbf{R}^n) = T_aM = \ker\big((Dg)(a)\big)$ nous disent qu'il existe $v_o, w_o \in \mathbf{R}^n$ tels que $v = \big((D\Phi)(u_o)\big)(v_o)$ et $w = \big((D\Phi)(u_o)\big)(w_o)$. Il s'ensuit qu'on a

$$q(\,v_o/\|v_o\|\,) < 0 < q(\,w_o/\|w_o\|\,) \ \ .$$

Pour $t > 0$ on définit $h = t \cdot v_o$, de sorte qu'on a $\lim_{t\to0} h = 0$. Par composée de limite on a

$$\lim_{t\to0} \big|\,2\,H\big(\sigma_h, \varepsilon_\Phi(h)\big) + H\big(\varepsilon_\Phi(h), \varepsilon_\Phi(h)\big) + 2\,\|\eta\|^2 \cdot \rho_F(\,\|h\|\cdot\eta)\,\big| = 0$$

Mais on a aussi $\sigma_h = \big((D\Phi)(u_o)\big)(v_o/\|v_o\|\,)$ indépendamment de t et donc

$$H(\sigma_h, \sigma_h) = q(\,v_o/\|v_o\|\,) < 0 \ \ .$$

Si dans (15.75) on choisit donc $\alpha = -q(\,v_o/\|v_o\|\,)$, alors avec (15.73) il s'ensuit qu'il existe $\delta > 0$ tel qu'on a

$$0 < \|h\| < \delta \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} f\big(\Phi(u_o{+}h)\big) - f(a) & \\ \geqslant \frac{\|h\|^2}{2} \cdot \Big(\ & H(\sigma_h, \sigma_h) - \Big|\ 2\,H\big(\sigma_h, \varepsilon_\Phi(h)\big) + H\big(\varepsilon_\Phi(h), \varepsilon_\Phi(h)\big) \\ & + 2\,\|\eta\|^2 \cdot \rho_F(\,\|h\|\cdot\eta)\ \Big|\ \Big) \\ > \frac{\|h\|^2}{2} \cdot \big(& H(\sigma_h, \sigma_h) - q(\,v_o/\|v_o\|\,)\big) = 0 \ \ . \end{aligned}$$

Parce qu'on a $\lim_{t\to0} \Phi(u_o{+}h) = \Phi(u_o) = a$, il s'ensuit que pour *tout* voisinage ouvert V de a il existe $t > 0$ tel que $\|h\| < \delta$ et $\Phi(u_o{+}h) \in V$. Et donc $f\big(\Phi(u_o{+}h)\big) > f(a)$, ce qui montre que la restriction de f à M ne peut pas présenter un minimum local en a. Un raisonnement analogue avec $\alpha = q(\,w_o/\|w_o\|\,)$ montre que f ne peut pas présenter un maximum local en a. $\boxed{CQFD}$

Chapitre V

Les exercices

Les exercices de §1

16.1 Exercice. Pour chacune des applications suivantes de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, décider s'il s'agit oui ou non d'une norme.

(i) $N(x,y) = |4x+3y|$.

(ii) $N_a(x,y) = \sqrt{|x^2+2axy+y^2|}$ (on discutera suivant a).

(iii) $N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

16.2 Exercice. Soit $N : \mathrm{M}(n,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \qquad \Longrightarrow \qquad N(A) = n \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}| \ .$$

Montrer que N est une norme vérifiant l'inégalité

$$\forall A,B\in E \quad : \quad N(AB) \leqslant N(A)\cdot N(B) \ .$$

16.3 Exercice. Soit $E = C^0(\,[0,1],\mathbf{R}\,)$ l'ensemble des applications continues définies sur $[0,1]$ (et à valeurs dans $\mathbf{R}$).

(i) Montrer que E est un espace vectoriel.

(ii) Montrer que les applications $N_1, N_2, N_\infty : C^0(\,[0,1],\mathbf{R}\,) \to [0,\infty[$ définies par

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t \quad , \quad N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\ \mathrm{d}t} \quad , \quad N_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

sont des normes sur $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$.

(iii) Pour chaque $i \neq j \in \{1,2,\infty\}$, trouver des réels $a_{ij} > 0$ (ou montrer qu'ils n'existent pas) tels que pour tout f dans E on a $N_i(f) \leq a_{ij} N_j(f)$.

Ⓢ **16.4 Exercice.** Soit c un réel. Pour tout polynôme P à coefficient réels (c'est-à-dire : $P\in\mathbf{R}[X]$) on définit le nombre $N_c(P)$ par

$$N_c(P) = |P(c)| + \int_0^1 |P'(t)|\ \mathrm{d}t \ .$$

(i) Montrer que N_c est une norme sur $\mathbf{R}[X]$.

(ii) Pour $b>1$ et $a\neq b$, montrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

(iii) Montrer que N_a et N_b sont des normes équivalentes si $a, b \in [0,1]$. Indication : penser au théorème fondamental de l'analyse.

16.5 Exercice. Sur $E = \mathbf{R}[X]$ on définit une norme en posant

$$\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|, \qquad P \in \mathbf{R}[X] \ .$$

(i) Soit $a \in \mathbf{R}$ et L_a l'application de E dans $\mathbf{R}$, $L_a(P) = P(a)$. Vérifier que L_a est une forme linéaire. Montrer que L_a est continue si et seulement si $a \in [0,1]$. Lorsque $a \in [0,1]$, calculer $\|L_a\|$.

(ii) Soient α et β deux réels vérifiant $\alpha < \beta$. On définit une application $\varphi_{\alpha,\beta} : E \to \mathbf{R}$ en posant

$$\varphi_{\alpha,\beta}(P) = \int_\alpha^\beta P(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Montrer que $\varphi_{\alpha,\beta}$ est une forme linéaire sur E. Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur α et β, pour que cette forme linéaire soit continue et lorsque c'est le cas, déterminer sa norme.

Ⓢ **16.6 Exercice.** Pour $p \in [1,\infty]$ on définit la norme $\|\cdot\|_p$ sur $E = \mathbf{R}[X]$ par

$$P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \qquad \Longrightarrow \qquad \|P\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\Big)^{1/p} \quad , \quad \|P\|_\infty = \max_{i=0,\dots,n} |a_i| \ .$$

On définit les sous-espaces $F_1, F_2 \subset E$ par

$$F_1 = \{\, P \in E \mid \exists a_0 \in \mathbf{R} : P = a_o \,\}$$
$$F_2 = \{\, P \in E \mid \exists Q \in E : P(X) = (X-1)\,Q(X) \,\} \ .$$

Autrement dit, F_1 est l'ensemble des polynômes constants et F_2 l'ensemble des polynômes divisible par $X-1$. Sur E on définit l'application linéaire $A : E \to \mathbf{R}$ par $A(P) = P(1)$.

(i) Montrer que l'application $\mathrm{Id} : (E, \|\cdot\|_p) \to (E, \|\cdot\|_q)$ définie par $\mathrm{Id}(x) = x$ est continue si et seulement si $p \leqslant q$. (Remarque : ceci fournit un exemple d'une application linéaire continue bijective dont la réciproque n'est pas continue.)

(ii) Montrer que E est la somme directe de F_1 et F_2 : $E = F_1 \oplus F_2$.

(iii) Montrer que la restriction de A à F_1 est continue, ainsi que la restriction de A à F_2.

(iv) Montrer que A est continue pour la norme $\|\cdot\|_1$, mais que A n'est pas continue pour la norme $\|\cdot\|_p$ avec $p > 1$.

16.7 Exercice. Soit $E = C^0([0,1], \mathbf{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|$ [1.39], [1.42]. On définit l'application $\varphi : E \to \mathbf{R}$ par

$$\varphi(f) = \int_0^1 x(1-x) f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

(i) Montrer que l'application φ est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme.

(ii) Même question si on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \|f\|_2 = \Big(\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \ .$$

Indication : on pourra considérer la suite de fonctions $f_n(x) = x^n(1-x)^n$.

Ⓢ **16.8 Exercice.** Soit $A \in \mathrm{M}(n, \mathbf{K})$ avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Pour $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, on note $\|A\|_{p,q}$ sa norme d'application linéaire de $\mathbf{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_p$ vers $\mathbf{K}^n$ muni de $\|\cdot\|_q$ [1.12], [1.13]. On note A^* la matrice transposée conjuguée de A, et $\rho(A)$ le rayon spectral de A, i.e. le plus grand module des valeurs propres de A.

On considère d'abord l'exemple $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(i) Représenter sur un même dessin les images par A des "sphères" $\|x\|_1 = 1$ et $\|x\|_\infty = 1$. En déduire $\|A\|_{1,1}$, $\|A\|_{1,\infty}$, $\|A\|_{\infty,1}$ et $\|A\|_{\infty,\infty}$.

(ii) Calculer de même $\|A\|_{1,2}$ et $\|A\|_{\infty,2}$.

(iii) Calculer $\|A\|_{2,2}$.

On revient maintenant au cas général $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

(iv) Vérifier qu'on a les (in)égalités

$$\|A\|_{\infty,\infty} = \max_{i=1,\ldots,n} \Big(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \Big) \quad \text{et} \quad \|A\|_{1,1} = \max_{j=1,\ldots,n} \Big(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \Big) \ .$$

$$\|A\|_{1,\infty} = \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{ij}| \quad \text{et} \quad \|A\|_{\infty,1} \leqslant \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \ .$$

En déduire l'égalité $\|A^*\|_{1,1} = \|A\|_{\infty,\infty}$ et montrer que dans le cas $\|A\|_{1,\infty}$ on peut aussi bien avoir une égalité qu'une inégalité stricte.

(v) On note $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i}\, y_i$ (le produit scalaire usuel dans $\mathbf{K}^n$). Montrer que

$$\|x\|_1 = \max_{\|y\|_\infty = 1} |\langle x, y\rangle| \qquad , \qquad \|y\|_\infty = \max_{\|x\|_1 = 1} |\langle x, y\rangle| \ ,$$

et retrouver l'égalité $\|A^*\|_{1,1} = \|A\|_{\infty,\infty}$.

(vi) Si A est hermitienne (i.e. $A^* = A$), montrer que

$$\|A\|_{2,2} = \rho(A) \ .$$

(On pourra diagonaliser A dans une base orthonormale.)

(vii) Montrer qu'on a toujours

$$\|A\|_{2,2} = \sqrt{\rho(A^*A)} \ .$$

(On poura utiliser (vi) en notant que $(\|Ax\|_2)^2 = \langle x, A^*Ax\rangle$.)

16.9 Exercice. Soit $C^1([a,b], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe C^1 sur $[a,b] \subset \mathbf{R}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. On munit cet espace de la norme

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \ .$$

Montrer que $(C^1([a,b], \mathbf{R}), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

16.10 Exercice. Le but de cet exercice est de montrer que la condition que E doit être de dimension finie dans [1.28] n'est pas superflue. Pour cela on prend $F = \mathbf{R}$ et $U = G = E$ avec $E = \mathbf{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, X^i \qquad \Longrightarrow \qquad \|P\|_\infty = \max_{i=0,\dots,n} |a_i| \quad .$$

Pour chaque $P \in \mathbf{R}[X]$ on définit l'application $\varphi_P : E \to \mathbf{R}$ par

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, X^i \quad \text{et} \quad Q(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i\, X^i \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_P(Q) = \sum_{i=0}^{\min(m,n)} a_i\, b_i \quad .$$

(i) Montrer que pour chaque $P \in E$ φ_P est une application linéaire continue avec $\|\varphi_P\| = \sum_{i=0}^n |a_i|$. Nota Bene : on demande une égalité, pas une simple inégalité !

On considère maintenant l'application $\varphi : E \to \mathcal{L}(E;\mathbf{R})$ définie par $\varphi(P) = \varphi_P$.

(ii) Montrer que pour tout $Q \in E$ l'application $P \mapsto \big(\varphi(P)\big)(Q)$ est égale à φ_Q, donc continue.

(iii) En considérant la suite $P_n(X) = \sum_{i=0}^n X^i$, montrer que φ n'est pas continue.

16.11 Exercice. Soit $(E, \|\cdot\|\,)$ un espace de Banach.

(i) Soit $A \in \mathcal{L}(E;E)$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n!}\, A^n$ converge. On notera $\exp(A)$ sa somme.

(ii) Montrer que si $A, B \in \mathcal{L}(E;E)$ sont tels que $AB = BA$, alors

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A) = \exp(A+B) \quad .$$

(iii) Montrer que, pour tout élément $A \in \mathcal{L}(E;E)$, on a $\exp(A) \in \mathrm{Isom}(E;E)$ et qu'on a l'égalité

$$\big(\exp(A)\big)^{-1} = \exp(-A) \quad .$$

(iv) Montrer que l'application $\exp : \mathcal{L}(E;E) \to \mathcal{L}(E;E)$ est continue.

16.12 Exercice. Soit $E = C^0(\,[0,1];\mathbf{R})$ l'espace des fonctions réelles (mais ni le résultat ni l'argument ne change si on considère des fonctions à valeurs complexes) continues sur $[0,1]$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit T l'application de E dans E qui à $u \in E$ associe $T(u)$ définie, pour $x \in [0,1]$, par

$$\big(T(u)\big)(x) = \int_0^x u(t)\ \mathrm{d}t \quad .$$

(i) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $u \in E$, on a, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\big(T^n(u)\big)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, u(t)\ \mathrm{d}t \quad .$$

(ii) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que T^n est un élément de $\mathcal{L}(E;E)$ et déterminer $\|T^n\|$.

(iii) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} T^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(E;E)$ et calculer sa somme.

(iv) Utiliser ces résultats pour résoudre l'équation

$$(Id - T)(u) = g \quad ,$$

où g est un élément donnée de E et u est l'inconnue qu'on cherche dans E.

Les exercices de §2

Ⓢ **16.13 Exercice.** Montrer que toute fonction $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ qui est polynomiale dans les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ est une fonction de classe C^1 (on montrera dans [16.66] qu'elle est même de classe C^∞). Indication : montrer que l'application $\pi_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ est linéaire et continue.

Ⓢ **16.14 Exercice.** Soit E un espace vectoriel normé et f une application de E dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout x de E on ait : $|f(x)| \leq \|x\|^2$. Montrer que f est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en ce point.

16.15 Exercice. Étudier la différentiabilité des applications $f : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}[X]$ définies par :

$$f(P) = \int_0^1 \Big(\big(P(t)\big)^3 - \big(P(t)\big)^2 \Big) \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(P) = P' - P^2 \quad .$$

Expliquer pourquoi votre réponse pour g ne dépend pas du choix de la norme sur $\mathbf{R}[X]$, bien que sur cet espace il existe des normes non-équivalentes.

Ⓢ **16.16 Exercice.** Soit f une application différentiable de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même vérifiant $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$ (ceci est une façon déguisée pour dire que f est propre[1]) et telle que $(Df)(x)$ soit injective pour tout $x \in \mathbf{R}^2$. Le but de l'exercice est de montrer que f est surjective. Pour cela on prend $a \in \mathbf{R}^2$ et on définit la fonction $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par $g(x) = \|f(x) - a\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

(i) Montrer que $\displaystyle\lim_{\|x\|\to\infty} g(x) = \infty$.

(ii) En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\inf \{\, g(x) \mid x \in \mathbf{R}^2 \,\} = \inf \{\, g(x) \mid x \in \mathbf{R}^2 \ , \ \|x\| \leqslant M \,\} \quad .$$

(iii) Montrer que g atteint sa borne inférieure en un point x_o de $\mathbf{R}^2$.

(iv) Montrer que g est différentiable et en déduire que $(Dg)(x_o) = 0$. Calculer explicitement la différentielle Dg et conclure.

Ⓢ **16.17 Exercice.** Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, soit $\|\cdot\|$ la norme associée et soit $u \in \mathcal{L}(E; E)$ un endomorphisme continu que l'on suppose symétrique : $\forall x, y : \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. À l'aide de u on définit les applications $f : E \to \mathbf{R}$ et $g : E^* \to \mathbf{R}$ par

$$f(x) = \langle u(x), x\rangle \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\langle u(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \quad .$$

(i) Montrer que f est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

(ii) En déduire que l'application $\ell : x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable.

1. La définition officielle d'une application propre est que l'image réciproque de tout compact est compact.

(iii) En déduire que $k : x \mapsto \|x\|$ est différentiable en tout point $x \in E^*$ et calculer sa différentielle $(Dk)(x)$. Décrire $\ker\big((Dk)(x)\big)$ pour tout $x \neq 0$.

(iv) Montrer que g est différentiable sur E^* et calculer sa différentielle.

(v) Soit $a \in E^*$. Montrer que $(Dg)(a) = 0$ si et seulement si a est vecteur propre de u.

Ⓢ **16.18 Exercice.** Soit $f : E \to F$ une application telle que pour tout réel λ et tout $x \in E$ on ait $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Montrer que si f est dérivable en $0 \in E$, alors

$$\forall x \in E \quad : \quad f(x) = \big((Df)(0)\big)(x) \ ,$$

et donc que f est une application linéaire continue.

Ⓢ **16.19 Exercice.** Soit $f : U \subset E \to F$ une application k-lipschitzienne. Montrer que si f est différentiable en $x \in U$, alors $\|(Df)(x)\| \leqslant k$.

Ⓢ **16.20 Exercice.** Soit F un fermé non-vide de $\mathbf{R}^n$ muni de la norme euclidienne, et $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \mathrm{dist}(x, F) \overset{\text{déf.}}{=} \inf_{z \in F} \ \|x - z\| \equiv \inf\{\, \|x - z\| \mid z \in F \,\} \ .$$

Le but de l'exercice est de montrer que si f est différentiable en $x \notin F$, alors il existe un unique $y \in F$ (qui dépendra de x bien sûr) tel que $f(x) = \|x - y\|$. Autrement dit : si la fonction "distance à F" est différentiable en x, alors cette distance est réalisée par un unique point de F. Les questions qui suivent vous guident vers ce résultat.

(i) Montrer que f est 1-lipschitzienne.

(ii) Montrer que pour chaque $x \in \mathbf{R}^n$ il existe $y \in F$ tel que $f(x) = \|x - y\|$.

Dans la suite on suppose que f est différentiable en $x \notin F$ et que $y \in F$ est tel que $f(x) = \|x - y\|$. On définit en plus la fonction $\varphi : [0, 1] \to \mathbf{R}$ par

$$\varphi(t) = f\big((1 - t)x + ty\big) \ .$$

(iii) En utilisant le résultat de [16.19], montrer que $\|(Df)(x)\| \leqslant 1$.

(iv) Montrer qu'on a l'égalité $\varphi(t) = (1 - t) \cdot \|x - y\|$.

(v) En calculant $\varphi'(0)$ de deux façons, montrer que $\big((Df)(x)\big)\Big(\dfrac{x - y}{\|x - y\|}\Big) = 1$.

(vi) En déduire que y est unique.

Ⓢ **16.21 Exercice.** Soient E un espace normé, U un ouvert convexe de E et $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction. On rappelle que f est dite *convexe* si et seulement si $\forall a, b \in U$, $\forall t \in [0, 1]$, on a :

$$f\big(ta + (1 - t)b\big) \leqslant tf(a) + (1 - t)f(b) \ . \tag{16.22}$$

(On exprime cette propriété en disant que les valeurs de f sur le segment $[a, b]$ sont en-dessous de la corde reliant $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$.)

(i) On suppose que f est différentiable sur U. Montrer que f est convexe si et seulement si, $\forall x, y \in U$,

$$f(x) \geqslant f(y) + \big((Df)(y)\big)(x-y) \quad . \tag{16.23}$$

(On exprime cette propriété en disant que les valeurs de f sont partout au-dessus de la tangente.)

(ii) Si $E = \mathbf{R}$, montrer qu'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert U de $\mathbf{R}$ est convexe si et seulement si sa dérivée est une fonction croissante sur U.

(iii) On suppose que f est convexe et différentiable sur U. Soit $a \in U$ tel que $(Df)(a) = 0$. Montrer que f a un minimum global en a.

Ⓢ **16.24 Exercice.** Soit $F = C^0\big([0,1];\mathbf{R}\big)$ l'espace des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ [1.42] muni de la norme de la convergence uniforme $\| \ \|_\infty$ [1.39] et soit E l'espace des fonctions $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ qui sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et nulles en $x = 0$:

$$E = \{\, f : [0,1] \to \mathbf{R} \mid f(0) = 0 \text{ et } f \text{ de classe } C^1 \text{ sur } [0,1] \,\} \quad .$$

Ici il faut interpréter les valeurs $f'(0)$ et $f'(1)$ de la fonction (supposée continue) $f' : [0,1] \to \mathbf{R}$ comme les dérivées à droite en 0 et à gauche en 1 respectivement. On peut montrer que pour chaque élément $f \in E$ il existe une fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^1 telle que f est la restriction de g à $[0,1]$. Il suffit de prolonger f par des droites (affines).

On muni E de la norme $\| \cdot \|_E$ donnée par

$$\|f\|_E = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \equiv \|f'\|_\infty \quad .$$

(i) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $f \in E$, on a l'inégalité

$$|f(t)| \leqslant \|f\|_E \cdot t \quad .$$

(ii) Montrer que $\| \cdot \|_E$ est bien une norme sur E.

(iii) Montrer que l'application $\mathcal{D} : E \to F$ définie par $\mathcal{D}(f) = f'$ est une application linéaire continue vérifiant $\|\mathcal{D}\| = 1$.

(iv) Pour tout $g \in F$ on définit l'application $B_g : E \to F$ par

$$B_g(h) = g \cdot h \qquad \text{c'est-à-dire :} \quad \forall t \in [0,1] \ : \ \big(B_g(h)\big)(t) = g(t) \cdot h(t) \quad .$$

Montrer que B_g est une application linéaire continue.

(v) Soit $\Phi : E \to F$ l'application définie par

$$\Phi(f) = f' + f^2 \quad .$$

Montrer que Φ est différentiable en tout point $f \in E$ et déterminer sa différentielle $(D\Phi)(f)$ en ce point.

(vi) Montrer que l'application Φ définie ci-dessus est de classe C^1.

16.25 Exercice. Soient $F = C^0([0,1],\mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme de la convergence uniforme $\| \ \|_\infty$ [1.39], [1.42] et soit

$$E = \{\, \varphi \in C^2([0,1],\mathbf{R}) \mid \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \,\}$$

muni de la norme $\| \ \|_E$ donnée par

$$\forall \varphi \in E : \|\varphi\|_E = |\varphi'(0)| + \|\varphi''\|_\infty \quad .$$

Montrer au préalable que $\|\cdot\|_E$ est bien une norme sur E et ensuite que l'application $f : E \to F$ définie par $f(\varphi) = \varphi'' - \varphi^3$ est différentiable ; calculer $\big((Df)(\varphi)\big)(h)$ pour $(\varphi, h) \in E^2$.

Ⓢ **16.26 Exercice.** Soit $E = C^0([a,b]; \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ définie comme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. On pose

$$U = \{\, f \in E \mid \forall x \in [a,b] : f(x) \neq 0 \,\}$$

et on définit l'application $\Phi : U \to E$ par $\Phi(f) = 1/f$. Le but de l'exercice est de montrer que Φ est différentiable en chaque "point" $f \in U$ et de déterminer sa différentielle $(D\Phi)(f)$. Pour cela il faut au préalable montrer que cette question est bien posée. Les questions suivantes vous guident dans cette démarche.

(i) Montrer que U est un ouvert de E et que Φ est bien définie (c'est-à-dire qu'il faut s'assurer entre autres qu'on a bien $\Phi(f) \in E$).

(ii) Soit $f \in E$ et soit $\hat{B}(f) : E \to E$ l'application définie par

$$\big(\hat{B}(f)\big)(g) = f \cdot g \quad .$$

Montrer que $\hat{B}(f)$ est une application linéaire continue avec $\|\hat{B}(f)\| \leqslant \|f\|_\infty$.

(iii) Montrer que Φ est différentiable en chaque point $f \in U$ avec

$$(D\Phi)(f) = -\hat{B}(f^{-2}) = -\hat{B}\big(\Phi(f^2)\big) \quad .$$

16.27 Exercice. Soit ℓ^1 l'espace de Banach défini en [1.45].

(i) Soit $c = (c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels telle que $\sup_{n\in\mathbf{N}} |c_n| < \infty$. Pour tout $x \in \ell^1$ on pose

$$\Phi_c(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n\, x_n \quad .$$

Montrer que l'on définit ainsi une forme linéaire continue Φ_c sur ℓ^1, de norme $\|\Phi_c\| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |c_n|$.

(ii) Montrer que toute forme linéaire continue sur ℓ^1 est de la forme Φ_c, où c est comme indiqué ci-dessus.

(iii) Montrer que si l'application $f : x \mapsto \|x\|_1$ de ℓ^1 dans $\mathbf{R}_+$ est différentiable en un point $z = (z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de ℓ^1, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$: $z_n \neq 0$, et on a $(Df)(z) = \Phi_c$, avec $c_n = \mathrm{sgn}(z_n)$.

(iv) Déterminer l'ensemble des points où f est différentiable.

Ⓢ **16.28 Exercice.** Soit ℓ^1 l'espace de Banach défini en [1.45]. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^1$, on pose $f(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^2$.

(i) Montrer que $f : \ell^1 \to \mathbf{R}$ est bien définie.

(ii) Montrer que f est de classe C^1 sur ℓ^1 et calculer $\big((Df)(a)\big)(h)$ pour $a, h \in \ell^1$.

Ⓢ **16.29 Exercice.** Soit ℓ^1 l'espace de Banach défini en [1.45] et soit $\varphi : \ell^1 \to \ell^1$ l'application définie par $\varphi(u) = v$, où $v = (v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est défini par

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad : \quad v_n = \sum_{p=0}^{n} u_p \, u_{n-p}.$$

(i) Montrer que φ est bien définie.

(ii) Montrer que φ est de classe C^1 sur ℓ^1 et déterminer sa différentielle.

Les exercices de §3

Ⓢ **16.30 Exercice.** Montrer que l'égalité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions à valeurs vectorielles (considérer $f(x) = \mathrm{e}^{ix}$).

Ⓢ **16.31 Exercice.** Soit $f : U \to F$ une application différentiable.

(i) Montrer que si U est convexe et si $\|Df\|$ est majoré par $k \geqslant 0$ (c'est-à-dire $\|(Df)(x)\| \leqslant k$ pour tout $x \in U$), alors f est k-lipschitzienne. Avec [16.19] on a donc montré que f (différentiable sur un ouvert convexe) est k-lipschitzienne si et seulement si $\|Df\|$ est majoré par k.

(ii) Montrer que si f est de classe C^1, alors f est localement lipschitzienne : pour tout $a \in U$ il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de a tel que la restriction de f à V est lipschitzienne.

Ⓢ **16.32 Exercice.** On muni $\mathbf{R}^2$ de la norme euclidienne et on considère l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \left(\frac{\cos x - \sin y}{2} \ , \ \frac{\sin x - \cos y}{2} \right) \ .$$

(i) Montrer que $\|(Df)(x,y)\| \leqslant \sqrt{2}/2$ pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(ii) En déduire que la suite récurrente définie par x_0, y_0 et pour $n \geqslant 0$

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(\cos x_n - \sin y_n) \quad , \quad y_{n+1} = \tfrac{1}{2}(\sin x_n - \cos y_n)$$

converge quel que soit (x_0, y_0). Que peut-on dire de sa limite ?

16.33 Exercice. Montrer que le système d'équations

$$x = \tfrac{1}{2}\sin(x+y) \qquad , \qquad y = \tfrac{1}{2}\cos(x-y)$$

admet une unique solution dans $\mathbf{R}^2$.

Ⓢ **16.34 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $g = f \circ f$.

(i) Calculer la matrice de $(Df)(x,y)$ en tout point $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ et montrer que f est de classe C^1.

(ii) Montrer que g est de classe C^1 et exprimer la matrice de $(Dg)(x,y)$ en fonction de la matrice de $(Df)(x,y)$.

(iii) Calculer $(Dg)(0,0)$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \overline{B_\delta(0,0)}$ on a $\|(Dg)(x,y)\| \leqslant \frac{1}{2}$.

(iv) Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B_\delta(0,0)}$ et le déterminer.

Ⓢ **16.35 Exercice.** On considère l'application $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = (x^2 + y^2, y^2) \ .$$

Soit $\Omega = \{\, p \in \mathbf{R}^2 \mid \lim_{n\to\infty} F^n(p) = 0 \,\}$, où F^n est l'application F composée n-fois avec elle-même.

(i) Vérifier que $p \in \Omega$ si et seulement si $F(p) \in \Omega$.

(ii) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\|(DF)(p)\| < \frac{1}{2}$ si $\|p\| < \delta$. En déduire que $B_\delta(0) \subset \Omega$.

(iii) Montrer que pour tout $p \in \Omega$ il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $p \in (F^k)^{-1}\big(B_\delta(0)\big) \subset \Omega$. En déduire que Ω est ouvert.

(iv) Calculer $F(tx, ty)$ pour $t \in \mathbf{R}$. En déduire que Ω est connexe.

Ⓢ **16.36 Exercice.** L'espace $\mathbf{R}^n$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$.

(i) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $g : I \to \mathbf{R}^n$ une fonction différentiable, k une constante positive et t_0 un élément de I. On suppose que

$$g(t_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in I \quad : \quad \|g'(t)\| \leqslant k\,\|g(t)\| \ .$$

Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que g soit identiquement nulle sur l'intervalle $[t_0 - h, t_0 + h]$. Indication : on pourra raisonner sur $M = \max \|g(t)\|$, où le maximum est pris sur $[t_0 - h, t_0 + h]$. En déduire que g est identiquement nulle sur I.

(ii) Soit U un ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application continue, supposée k-lipschitzienne par rapport à y, i.e.

$$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leqslant k\,\|y - z\|$$

pour tous $(t,y), (t,z) \in U$. Déduire de (i) que le système différentiel

$$y(t_0) = x \qquad , \qquad y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$$

(avec $(t_0, x) \in U$ donné) admet au plus une solution définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0.

Ⓢ **16.37 Exercice**[2]**.** Soient $U \subset E$ un ouvert connexe, F un espace de Banach et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications différentiables de U dans F vérifiant les deux propriétés suivantes :

a) il existe un point $a \in U$ tel que la suite $\big(f_n(a)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et

b) la suite des différentielles $(Df_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge localement uniformément sur U vers une application $g : U \to \mathcal{L}(E,F)$, c'est-à-dire que pour tout $x \in U$ il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x tel que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in V} \|(Df_n)(y) - g(y)\| = 0 \ .$$

Dans un premier temps on suppose que U est convexe et que la suite $(Df_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers g sur U (ce qui revient à prendre le voisinage V de b) égal à U).

2. Cet exercice est une généralisation sur la convergence d'une suite de primitives. L'idée est qu'on dispose d'une suite de fonctions g_n qui converge vers une fonction g et on dispose d'une suite de primitives G_n associée, c'est-à-dire qu'on a $G_n' = g_n$. Sans condition supplémentaire il est évident qu'on ne peut pas déduire que la suite G_n converge, simplement parce qu'une primitive n'est déterminée qu'à une constante près. Mais si la suite G_n converge dans un seul point, il semble raisonnable de croire que la suite G_n converge "partout." Dans cet exercice on montrera que la condition que la suite g_n converge localement uniformément suffit pour pouvoir le montrer.

(i) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $x, y \in U$ et tout $n, m \geqslant N$ on a
$$\|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)\| < 2\varepsilon \cdot \|x - y\| \ .$$

(ii) En déduire qu'il existe une fonction $f : U \to F$ telle que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ et que la convergence est uniforme sur toute partie bornée de U.

(iii) Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in U$. Montrer, en utilisant un f_k particulier et le résultat de (i), qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $h \in E$ vérifiant $\|h\| < \delta$, on a la majoration
$$\|f(x+h) - f(x) - g(x)(h)\| < 4\varepsilon \cdot \|h\|$$
et en déduire que f est différentiable avec $Df = g$. Nota Bene : tout autre facteur que 4 convient aussi !

On considère maintenant le cas général où U est (seulement) connexe et que la convergence de Df_n vers g est (seulement) localement uniforme.

(iv) Soit $C \subset U$ l'ensemble
$$C = \{\, x \in U \mid \text{la suite } f_n(x) \text{ converge} \,\} \ .$$
Montrer que C est un ouvert, que la fonction $f = \lim_{n\to\infty} f_n : C \to F$ est différentiable avec $Df = g$ et que la convergence $f_n \to f$ est localement uniforme (sur C).

(v) Montrer que $U \setminus C$ est aussi un ouvert et déduire qu'on doit avoir $C = U$.

(vi) Montrer que s'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ qui consiste de fonctions de classe C^1, alors f est de classe C^1.

Ⓢ **16.38 Exercice.** Soient E un espace vectoriel normé de dimension (finie ou infinie) au moins égale à 2, F un espace de Banach, a un point de E, r, k des réels strictement positifs, $B_r(a)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r. Soit f une application différentiable définie sur l'ensemble $B_r(a) \setminus \{a\}$, à valeurs dans F, vérifiant, pour tout $x \in B_r(a) \setminus \{a\}$, $\|(Df)(x)\| \leqslant k$.

(i) Montrer que pour $x, y \in B_r(a) \setminus \{a\}$, on a
$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\,\|x - y\| \ .$$
Indication : si $y - a = \lambda(x - a)$, $\lambda < 0$, on choisira un vecteur z linéairement indépendant de $x - a$ et on majorera $\|f(x) - f(a + \varepsilon z)\|$, pour $0 < \varepsilon < r/\|z\|$.

(ii) Montrer que f a une limite $\alpha \in F$ lorsque x tend vers a.

(iii) On suppose que $(Df)(x)$ tend vers une limite A lorsque x tend vers a, et on considère l'application $h : B_r(a) \setminus \{a\} \to F$ définie par
$$h(x) = f(x) - A(x) \ .$$
À l'aide de (i) montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall x, y \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \quad : \quad \|h(x) - h(y)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|x - y\| \ .$$

(iv) Déduire de (iii) que si on définit l'application $g : B_r(a) \to F$ par
$$g(x) = f(x) \quad \text{si } x \neq a \qquad , \qquad g(a) = \alpha \ ,$$
alors g est différentiable en a avec $(Dg)(a) = A$.

(v) Montrer que la condition $\dim(E) \geqslant 2$ n'est pas superflue en donnant un exemple d'une application $f : \mathbf{R} \setminus \{a\} \to F$ qui vérifie les hypothèses (différentiable avec différentielle bornée et la différentielle admettant une limite en a) pour laquelle les conclusions ne sont pas valables.

Ⓢ **16.39 Exercice.** L'espace vectoriel $E = C^0([a,b], \mathbf{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b] \subset \mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ est muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ [1.39], [1.40]. Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application de classe C^1. Montrer que l'application $G : E \to \mathbf{R}$ définie par

$$G(f) = \int_a^b \varphi\big(f(x)\big)\ \mathrm{d}x$$

est différentiable sur E et que sa différentielle au point f est donnée, pour $u \in E$, par

$$\big((DG)(f)\big)(u) = \int_a^b \varphi'\big(f(x)\big)\, u(x)\ \mathrm{d}x \quad .$$

Ⓢ **16.40 Exercice.** (*Une application de [16.21] et [16.39].*) Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est une fonction de classe C^1, la longueur de son graphe est donné par

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\ \mathrm{d}x \quad .$$

Le but de cet exercice est de montrer (d'une certaine façon ; il y en a d'autres) que si on fixe $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, alors parmi les fonctions qui vérifient $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$, la fonction affine passant par ces deux points réalise la plus courte longueur de son graphe. [3] Pour le faire on introduit la constante $c = (\beta - \alpha)/(b - a)$ et on remarque d'abord que si f vérifie les contraintes, alors la fonction $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - \alpha - c \cdot (x - a)$$

vérifie les conditions $g(a) = g(b) = 0$. Et réciproquement, si g vérifie ces conditions, alors f vérifie les conditions $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

On définit "donc" l'espace E par

$$E = \{\, g : [a,b] \to \mathbf{R} \mid g \text{ de classe } C^1 \ ,\ g(a) = g(b) = 0 \,\} \quad ,$$

qu'on muni de la norme $\|\cdot\|_E$ définie par

$$\|g\|_E = \|g'\|_\infty \equiv \sup_{x \in [a,b]} |g'(x)| \quad .$$

Notons en passant qu'il faut interpréter une fonction g de classe C^1 sur l'intervalle fermé $[a,b]$ comme une fonction telle que $g' : [a,b] \to \mathbf{R}$ est continue, où il faut interpréter $g'(a)$ et $g'(b)$ comme les dérivées à droite en a respectivement à gauche en b de g. On définit également la fonction $F : E \to \mathbf{R}$ par

$$F(g) = \int_a^b \sqrt{1 + \big(g'(x) + c\big)^2}\ \mathrm{d}x \quad .$$

(i) Montrer que E est bien un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_E$ est bien une norme sur E.

3. On peut même montrer que c'est la seule, mais pour cela il faut améliorer un peu le résultat de [16.21.iii].

(ii) Montrer que F est différentiable et que sa différentielle au point $g \in E$ est donnée, pour tout $u \in E$, par

$$\big((DF)(g)\big)(u) = \int_a^b \frac{g'(x) + c}{\sqrt{1 + \big(g'(x) + c\big)^2}} \cdot u'(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

(iii) Montrer que F est une fonction convexe [16.21]. (Indication : montrer au préalable que la fonction $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $\varphi(t) = \sqrt{1 + (t+c)^2}$ est convexe.)

(iv) Montrer que la différentielle de F au "point" $g \equiv 0$ (la fonction nulle) est nulle. En déduire que F présente un minimum global en $g = 0$.

(v) Conclure que la fonction affine $f(x) = \alpha + c \cdot (x - a)$ est l'unique fonction de classe C^1 qui réalise la plus petite longueur de son graphe parmi les fonctions vérifiant $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

Ⓢ **16.41 Exercice.** Soit ℓ^1 l'espace de Banach défini en [1.45] et soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $f(0) = 0$ et que f soit dérivable en $x = 0$. On définit $F : \ell^1 \to \ell^1$ par

$$F(x) = f \circ x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad : \quad \big(F(x)\big)(n) = f\big(x(n)\big) \ .$$

(i) Montrer que F est bien définie, c'est-à-dire, que pour $x \in \ell^1$ on a bien $F(x) \in \ell^1$.

(ii) Montrer que, si f est de classe C^1, alors F est différentiable en tout point $a \in \ell^1$ et calculer $\big((DF)(a)\big)(h)$ pour $h \in \ell^1$.

(iii) Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable mais pas de classe C^1 telle que l'application $F : \ell^1 \to \ell^1$ est bien définie mais qu'elle n'est pas différentiable en tout point de ℓ^1.

Les exercices de §4

Ⓢ **16.42 Exercice.** Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ et $F = F_1 \times \cdots \times F_p$. En s'inspirant des preuves de [4.18] et [4.19], montrer que l'application $\mathcal{J} : \mathcal{L}(E;F) \to \prod_{i=1}^{p}{}_{j=1}^{n}\mathcal{L}(E_j;F_i)$, $\mathcal{J}(A) = (A_{ij})_{i=1}^{p}{}_{j=1}^{n}$ (définie dans [4.4] et qui à $A \in \mathcal{L}(E;F)$ associe la famille d'applications $A_{ij} : E_j \to F_i$) est un isomorphisme. (Mais attention, pour $n > 1$ ce n'est plus un isomorphisme isométrique.)

Les exercices de §5

Ⓢ **16.43 Exercice.** On considère $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ .$$

Montrer que les dérivées directionnelles $(D_v f)(0,0)$ existent pour tout $v \in \mathbf{R}^2$, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Étudier la continuité de f en $(0,0)$.

Mêmes questions pour la fonction $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^6} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ .$$

16.44 Exercice. Pour chacune des fonctions f suivantes, trouver l'ensemble des points où f est continue (resp. possède des dérivées partielles premières, est différentiable, est de classe C^1) :

(i) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ .$$

(ii) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ .$$

(iii) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(0,0) = (0,0) \quad , \quad f(1,1) = \big(2\sin(\tfrac{1}{\sqrt{2}}), 0\big) \quad \text{et pour } (x,y) \notin \{(0,0),(1,1)\} :$$
$$f(x,y) = \left((x^2+y^2)\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) \ , \ \frac{(x-1)^3 - (y-1)^3}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \right) \ .$$

Ⓢ **16.45 Exercice.** Étudier la continuité et la différentiabilité de $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

Ⓢ **16.46 Exercice.** Étudier la continuité et la différentiabilité de la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + y^2 \tan^2 x} & \text{si } (x,y) \in D = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \big(\,](k - \tfrac12)\pi, (k + \tfrac12)\pi[\times \mathbf{R} \big) \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D \ . \end{cases}$$

Ⓢ **16.47 Exercice.** Étudier la continuité et la différentiabilité de $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = \min(x^2, y^2)$.

Ⓢ **16.48 Exercice.** Soient f et g deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f'(1)$ et $g'(1)$ existent. On définit $u : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par $u(x,y) = f(xy) + g(y/x)$. Montrer que u est différentiable au point $(1,1)$ et calculer $\big((Du)(1,1)\big)(h,k)$, pour $(h,k) \in \mathbf{R}^2$.

Ⓢ **16.49 Exercice.** Soient $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ et $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ les fonctions définies par

$$f(x,y,z) = \big(x\,\sin(y)\sin(z)\,,\, x\,\cos(y)\cos(z)\big),$$
$$g(u,v) = \big(au + bv + \sin(u^2)\sinh(v^2), cu + dv + \sin(v^2)\sinh(u^2)\big) \quad ,$$

où $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$.

(i) Calculer les dérivées partielles premières de f ; montrer que f est de classe C^1 ; calculer le rang de la matrice jacobienne de f.

(ii) Calculer la matrice jacobienne de $g \circ f$ au point $(0,0,0)$.

Ⓢ **16.50 Exercice.** Soit $E = \mathbf{R}$ et soit $f, k, \ell : E \times E \to E$ et $g, h : E \to E$ des applications différentiables.

(i) Exprimer la dérivée/les dérivées partielles des fonctions F_i en termes des dérivées (partielles) des fonctions f, g, h, k, ℓ.

(a) $F_1 : E \to E$, $F_1(x) = f\big(g(x), h(x)\big)$.

(b) $F_2 : E \times E \to E$, $F_2(x,y) = f\big(g(x), h(y)\big)$.

(c) $F_3 : E \times E \to E$, $F_4(x,y) = g\big(k(x,y)\big)$.

(d) $F_4 : E \times E \to E$, $F_5(x,y) = f\big(k(x,y), g(x)\big)$.

(e) $F_5 : E \times E \to E$, $F_3(x,y) = f\big(k(x,y), \ell(x,y)\big)$.

(ii) On suppose maintenant que E est un espace vectoriel normé quelconque. Exprimer la différentielle/les différentielles partielles des fonctions F_i en termes des différentielles (partielles) des fonctions f, g, h, k, ℓ.

Ⓢ **16.51 Exercice.** Dans un espace vectoriel E muni d'une norme N, on considère l'application $x \mapsto N(x)$. En raisonnant par l'absurde, montrer que N n'est pas différentiable en 0 (on pourra regarder ses dérivées directionnelles).

16.52 Exercice. On désigne par $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on pose (voir [1.12] et [1.43])

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad , \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad , \quad N_\infty(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \quad .$$

(i) Montrer que N_2 est différentiable en tout point de $(\mathbf{R}^n)^*$ et calculer la différentielle $\big((DN_2)(x)\big)(h)$ pour $x \in (\mathbf{R}^n)^*$ et $h \in \mathbf{R}^n$.

(ii) (a) Soit $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $x_i \neq 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que N_1 est différentiable au point x et calculer $\big((DN_1)(x)\big)(h)$ pour $h \in \mathbf{R}^n$. (On pourra utiliser la définition de la différentiabilité et utiliser des vecteurs h tels que $N_1(h) \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.)

(b) Soit $x \in \mathbf{R}^n$ tel qu'il existe $m \in \{1, \dots, n\}$ avec $x_m = 0$. Calculer

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{N_1(x + th) - N_1(x)}{t} \qquad \text{avec } h = e_m \text{ et avec } h = -e_m \quad .$$

En déduire que N_1 n'est pas différentiable au point x.

(iii) (a) Soit $x \in \mathbf{R}^n$ tel qu'il existe un unique $m \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_m| = N_\infty(x)$. Montrer que, si $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n$ est suffisamment petit, on a

$$N_\infty(x + h) - N_\infty(x) = \operatorname{sgn}(x_m) h_m.$$

En déduire que N_∞ est différentiable au point x.

(b) Soit $x \in \mathbf{R}^n$ tel qu'il existe au moins deux entiers l et m, $1 \leqslant l, m \leqslant n$, tels que $|x_l| = |x_m| = N_\infty(x)$. Montrer que N_∞ n'est pas différentiable au point x. (On pourra raisonner par l'absurde et utiliser une méthode analogue à celle employée en (ii)(b).

Ⓢ **16.53 Exercice.** Soit $a \in \mathbf{R}^n$ muni de la norme euclidienne et soit $f : \mathbf{R}^n \backslash \{a\} \to \mathbf{R}^n$ définie par

$$f(x) = \frac{x - a}{\|x - a\|^2} \quad .$$

(i) Déterminer $(Df)(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{a\}$.

(ii) Soit $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'application définie par

$$S(h) = \|x - a\|^2 \cdot \big((Df)(x)\big)(h) \quad .$$

Calculer $S(x - a)$, puis $S(v)$ pour v orthogonal à $x - a$. Comment appelle-t-on S ?

Ⓢ **16.54 Exercice.** Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1. On définit l'ensemble $\Delta = \{\, (x, x) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in I \,\}$ et on définit la fonction $g : I \times I \to \mathbf{R}$ par

$$g(x, x) = f'(x) \qquad \text{et} \qquad g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \text{si } x \neq y \quad .$$

(i) Montrer que g est continue sur $I \times I$.

(ii) Montrer que g est de classe C^1 sur $(I \times I) \setminus \Delta$ et donner la différentielle Dg sur ce domaine.

(iii) Soit $x \in I$. On suppose que $f''(x)$ existe. Montrer que g possède des dérivées partielles premières en (x, x).

(iv) En déduire que g est différentiable en (x, x) et calculer $(Dg)(x, x)$.

(v) Montrer que pour tout $(x, y) \in I \times I$ on a $g(x, y) = \int_0^1 f'\big(tx + (1 - t)y\big)\, \mathrm{d}t$.

(vi) En déduire que si f est de classe C^2, alors g est de classe C^1.

16.55 Exercice. Soient f et g deux applications de classe C^1 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. On définit l'application $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } g(x, y) > 0 \\ f(x, y) + (g(x, y))^2 & \text{si } g(x, y) \leqslant 0 \quad . \end{cases}$$

Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$.

Ⓢ **16.56 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On définit $g : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$g(x, y) = \frac{1}{x} \int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

(i) Montrer que g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles premières de g en $(x, y) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$.

(ii) Montrer qu'on peut prolonger g en une fonction continue $\widetilde{g}$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.

(iii) On suppose que $f'(0)$ existe. Calculer les dérivées partielles premières de $\widetilde{g}$ en $(0, y_o) \in \{0\} \times \mathbf{R}$.

(iv) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ on a $g(x, y) = \varphi(y)$.

Ⓢ **16.57 Exercice.**

(i) Soient $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbf{R}$. On définit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par

$$f(x, y) = \int_a^{x+y} g(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

En écrivant f comme une composée d'applications différentiables simples, montrer que f est différentiable et calculer $\big((Df)(x, y)\big)(h, k)$, pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et $(h, k) \in \mathbf{R}^2$. Retrouver le résultat à l'aide des dérivées partielles premières.

(ii) Traiter la même question avec $f : \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = x^y$.

Ⓢ **16.58 Exercice.** Soit $E = \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ l'espace des matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels, qu'on munit d'une norme convenable.

(i) Soit $f : E \to \mathbf{R}$ définie par $f(A) = \det(A)$. Montrer qu'elle est de classe C^1.

(ii) Montrer qu'on a $\big((Df)(\mathbf{1})\big)(H) = \mathrm{trace}(H)$, où $\mathbf{1}$ désigne la matrice identité et trace l'application qui à une matrice associe sa trace. Indication : calculer les n^2 dérivées partielles de f en $\mathbf{1}$.

(iii) En déduire $\big((Df)(A)\big)(H)$ pour $A \in E$ inversible.

(iv) Montrer que toute matrice $A \in E$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

(v) En déduire qu'on a, pour tout $A, H \in E$

$$\big((Df)(A)\big)(H) = \mathrm{trace}({}^tXH) \quad ,$$

où X est la comatrice de A. Pouvait-on trouver ce résultat directement ?

Ⓢ **16.59 Exercice.** Soient E un espace normé, $\Omega \subset \mathbf{R} \times E$ un ouvert et $f : \Omega \to E$ une application continue telle que

(i) $\forall (t, x) \in \Omega$, $(D_2 f)(t, x)$, la différentielle partielle dans la direction de E, existe,

(ii) $D_2 f : \Omega \to \mathcal{L}(E)$ est continue.

Montrer que f est localement lipschitzienne [16.31] par rapport à la deuxième variable sur Ω.

Ⓢ **16.60 Exercice.** Soient E et F des espaces normés, $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to F$ une application continue. On suppose en plus que, $\forall a \in U$, $\forall v \in E$,

$$(L_v f)(a) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

existe (c'est presque l'hypothèse que toutes les dérivées directionnelles existent, mais pas exactement !). Si f vérifie cette propriété, on dit parfois que f est *directionnellement dérivable au sens de Dini*.

(i) On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $a \in U$ et tout $v \in E$, on a $\|(L_v f)(a)\| \leqslant k \cdot \|v\|$. Montrer que si x et y sont des points de U tels que le segment $[x, y]$ soit contenu dans U, on a

$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant k \cdot \|x - y\| \ .$$

Indication : utiliser [3.5].

(ii) On suppose que, pour tout $x \in U$ fixé, l'application $M(x) : E \to F$ définie par $\big(M(x)\big)(v) = (L_v f)(x)$ est linéaire et continue (on dit alors que f *est différentiable au sens de Gâteaux sur* U). Montrer que si $M : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue au point $a \in U$, alors f est différentiable en a. Indication : appliquer (i) à l'application $g(x) = f(x) - \big(M(a)\big)(x)$.

Les exercices de §6

Ⓢ **16.61 Exercice.** Montrer que $\mathcal{L}^{(2)}(E_1 \times E_2; F)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}\big(E_1; \mathcal{L}(E_2; F)\big)$.

Ⓢ **16.62 Exercice.** Soit E et F deux espaces vectoriels normés. On définit l'application $\Phi : F \times \mathcal{L}(E; \mathbf{R}) \to \mathcal{L}(E; F)$ par

$$\big(\Phi(f, \varphi)\big)(e) = \varphi(e) \cdot f \quad .$$

(i) Montrer que $\Phi(f, \varphi)$ appartient bien à $\mathcal{L}(E; F)$.

(ii) Montrer que Φ est une application bilinéaire continue avec $\|\Phi\| = 1$. [4]

Ⓢ **16.63 Exercice.** Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E; \mathbf{R})$, $\varphi \neq 0$ (on dit que φ est une forme linéaire continue non-triviale sur E) ; selon le théorème de Hahn-Banach un tel φ existe. Le but de l'exercice est de montrer que la norme d'opérateur de l'application de composition $\mathcal{C} : \mathcal{L}(F; G) \times \mathcal{L}(E; F) \to \mathcal{L}(E; G)$ [6.9] vaut 1.

(i) Soit $y \in F$ arbitraire. Montrer que l'application $B : E \to F$ définie par

$$B(x) = \varphi(x) \cdot y$$

appartient à $\mathcal{L}(E; F)$ et vérifie $\|B\| = \|\varphi\| \cdot \|y\|$ (voir aussi [16.62]).

(ii) Soit $A \in \mathcal{L}(F; G)$, $\|A\| \neq 0$ et $\varepsilon > 0$. Montrer l'existence d'un $y \in F^*$ tel que $\|A(y)\| > \|A\| \cdot (1 - \varepsilon) \cdot \|y\|$.

(iii) En calculant $\big\|A\big(B(x)\big)\big\|$ (avec le B de (i) et le y de (ii)), déduire qu'on a $\|A \circ B\| > \|A\| \cdot \|B\| \cdot (1 - \varepsilon)$.

(iv) Conclure qu'on a bien $\|\mathcal{C}\| = 1$.

Ⓢ **16.64 Exercice.** Soit $E = \mathbf{R}[X]$ l'espace des polynômes muni de la norme $\|\cdot\|_1$ [16.6]. On considère l'application $B : E \times E \to \mathbf{R}$ définie par

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k \text{ et } Q(X) = \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell\, X^\ell \quad \Longrightarrow \quad B(P, Q) = \sum_{k=0}^{\min(n,m)} k\, a_k\, b_k \quad .$$

(i) Montrer que B est une application bilinéaire symétrique.

(ii) Montrer que pour tout $P \in E$ il existe une constante $C_P \geqslant 0$ tel que

$$\forall Q \in E : |B(P, Q)| \leqslant C_P \cdot \|Q\|_1 \quad .$$

(iii) En déduire que les applications partielles (les applications $E \to \mathbf{R}$, $Q \mapsto B(P, Q)$ et $Q \mapsto B(Q, P)$ pour $P \in E$ fixé) sont continues.

---

4. Avec la notion de produit tensoriel, on en déduit qu'il existe une application linéaire $\Psi : F \otimes \mathcal{L}(E; \mathbf{R}) \to \mathcal{L}(E; F)$ telle que $\Psi(f \otimes \varphi) = \Phi(f, \varphi)$. On montre facilement que Ψ est injective et que son image consiste de toutes les $A \in \mathcal{L}(E; F)$ telles que $\dim\big(\mathrm{im}(A)\big) < \infty$. Ψ est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels si $\dim(E) < \infty$ ou $\dim(F) < \infty$.

(iv) Montrer que B n'est pas continue.[5] Indication : considérer la suite des polynômes $P_n(X) = X^n$.

5. Mais on peut montrer, en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, que toute application bilinéaire $B : E_1 \times E_2 \to F$ avec E_1 ou E_2 complet est continue dès que les applications partielles sont continues. Cet exercice montre donc que la condition qu'au moins un des deux espaces est complet est essentielle.

Les exercices de §7

16.65 Exercice. Montrer qu'on peut "améliorer" [7.11] en remplaçant la condition "en tout point où f est différentiable" par la condition "en tout point où $D_v f$ existe."

Ⓢ **16.66 Exercice.** Montrer que toute fonction $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ qui est polynomiale dans les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ est une fonction de classe C^∞ (voir aussi [16.13].

Ⓢ **16.67 Exercice.** Déterminer la matrice Hessienne (en chaque point du domaine de définition) des fonctions suivantes :

(i) $f(x,y) = x^2 + y^2$;
(ii) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 - z^3$.
(iii) $f(x,y,z) = \sin(x+y+z) \cdot \mathrm{e}^{3xz+y^2}$;

Ⓢ **16.68 Exercice.**

(i) Soit $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ deux fonctions deux fois différentiables et soit $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par
$$h(x,y) = f(x) \cdot \cos\big(g(y)\big) \quad .$$
Exprimer la matrice Hessienne de h en fonction des dérivées partielles de f et de g.

(ii) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction deux fois différentiable et soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par
$$g(x,y) = f\big(x^2 + y, \sin(xy)\big) \quad .$$
Exprimer la matrice Hessienne de g en fonction des dérivées partielles de f.

(iii) Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ et $g : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ deux application deux fois différentiable et soit $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $h = g \circ f$. Exprimer les dérivées partielles secondes de h, c'est-à-dire les $(\partial_i \partial_j h)(x)$, en fonctions des dérivées partielles de f et de g.

Ⓢ **16.69 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'application définie par
$$f(x,y,z) = \big(x^4 + y^2 + z^3, \mathrm{e}^x \sin(yz)\big) \quad .$$
Justifier que f est deux fois différentiable et calculer la différentielle seconde
$$\big((D^2 f)(0,\pi,1)\big)\big((1,2,1),(0,1,0)\big) \quad .$$

16.70 Exercice. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application définie par
$$f(x,y) = (\cos x \cosh y, -\sin x \sinh y) \quad .$$
Montrer que f est deux fois différentiable sur $\mathbf{R}^2$ et calculer la différentielle seconde $\big((D^2 f)(0,0)\big)\big((1,0),(0,1)\big)$.

16.71 Exercice. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2 \sin(y) + y^2 \sin(x) \quad .$$

Calculer $\big((D^3 f)(x,y)\big)(u,v,w)$ en fonction de $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ et $u,v,w \in \mathbf{R}^2$.

Ⓢ **16.72 Exercice.** Soient E un espace normé, $f : E \to \mathcal{L}(E;E)$ une application deux fois différentiable et $\varphi : E \to E$ l'application définie par

$$\forall x \in E \quad : \quad \varphi(x) = \big(f(x)\big)(x) \quad .$$

Montrer que φ est deux fois différentiable et calculer $\big((D^2\varphi)(x)\big)(h,k)$ pour $x,h,k \in E$.

Ⓢ **16.73 Exercice.** Soient E, F et G des espaces normés, $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts, $f : V \to G$ et $g : U \to F$ deux applications telles que $g(U) \subset V$. On suppose que g est deux fois différentiable au point $a \in U$ et que f est deux fois différentiable au point $g(a)$. Exprimer, pour tout $h,k \in E$, $\big(\big(D^2(f \circ g)\big)(a)\big)(h,k)$ à l'aide des différentielles premières et secondes de f (resp. de g) en $g(a)$ (resp. en a).

Les exercices de §8

16.74 Exercice. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par
$$f(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0).$$
Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$, que les dérivées partielles secondes
$$\big(\partial_1(\partial_2 f)\big)(0,0) \qquad \text{et} \qquad \big(\partial_2(\partial_1 f)\big)(0,0)$$
existent, mais qu'elles sont différentes. [6]

Ⓢ **16.75 Exercice.** Soit E un espace normé et $f : E \to \mathbf{R}$ une application deux fois différentiable telle que, pour tout $x \in E$, $f(x) > 0$. On suppose qu'il existe $M > 0$ telle que
$$\forall x \in E \quad : \quad \|(D^2 f)(x)\| \leqslant M \ .$$
Montrer que
$$\forall x \in E \quad : \quad \|(Df)(x)\| \leqslant \sqrt{2M \cdot f(x)} \ .$$
Indications : (1) ce résultat n'est nullement local. Un contre-exemple est fourni par la fonction positive $f(x) = x$ définie sur $]0,\infty[$. (2) Penser à la distance d'arrêt d'une voiture en mouvement rectiligne uniformément décélérée.

Ⓢ **16.76 Exercice.** (*La suite de l'exercice [16.21].*) Soient E un espace normé, U un ouvert convexe de E et $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction deux fois différentiable.

(i) Montrer que f est convexe si et seulement si $\forall x \in U$, $\forall h \in E$, on a
$$\big((D^2 f)(x)\big)(h,h) \geqslant 0 \ .$$

(ii) Soit $A \in \mathrm{M}(n,\mathbf{R})$ une matrice réelle $n \times n$ symétrique et $b \in \mathbf{R}^n$. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ l'application définie par
$$f(x) = \tfrac{1}{2} \cdot \langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle \ ,$$
où $\langle \cdot,\cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que f est convexe si et seulement si A est positive, i.e. vérifie, pour tout $v \in \mathbf{R}^n$, $\langle Av, v\rangle \geqslant 0$.

Ⓢ **16.77 Exercice.** (*La suite de l'exercice [16.18].*) Soit $U \subset E$ un ouvert étoilé par rapport à 0, c'est-à-dire que pour tout $x \in U$ le segment $[0,x]$ est inclus dans U, et soit $f : U \to F$ une application n fois différentiable en $0 \in E$, $n \geqslant 1$. On suppose en plus que f vérifie la propriété
$$\forall t \in\,]0,1[\quad \forall x \in U \quad : \quad f(tx) = t^n \cdot f(x) \ . \tag{16.78}$$
Montrer que pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$ on a :
$$\forall x \in U \quad : \quad \big((D^k f)(0)\big)(\underbrace{x,\dots,x}_{k \text{ fois}}) = 0$$

6. C'est l'exemple donné par Giuseppe Peano dans [**Gen84**, Annotazione N. 103, p.XXV] (reproduit dans [**Pea57**, p.66]), voir aussi [**HW96**, §IV.4, p.316].

et qu'on a

$$\forall x \in U \quad : \quad f(x) = \frac{1}{n!} \cdot \big((D^n)(0)\big)(\underbrace{x, \dots, x}_{n \text{ fois}}) \ .$$

Autrement dit, la propriété (16.78) et le fait que f soit n fois différentiable en 0 impliquent qu'il existe une fonction n-linéaire continue $A : E^n \to F$ telle que f est (la restriction de) la fonction $x \mapsto A(x, \dots, x)$, voir aussi [8.3].

Ⓢ **16.79 Exercice.** Soit $E = \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ l'espace des matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels, qu'on munit d'une norme convenable. Pour $k \in \mathbf{N}$, on considère l'application $f : E \to E$ définie par $f(A) = A^k$. Montrer qu'elle est différentiable et calculer sa différentielle.

Ⓢ **16.80 Exercice.** Soit E un espace de Banach, $a > 0$, $f :]-a, a[\to E$ une application et $y \in]0, a[$.

(i) On suppose que f est deux fois différentiable et qu'il existe deux constantes positives A et B telles que, pour tout $x \in]-a, a[$, on a

$$\|f(x)\| \leqslant A \qquad \text{et} \qquad \|(D^2 f)(x)\| \leqslant B \ .$$

Montrer que si $x \in [-y, y]$, alors

$$\|(Df)(x)\| \leqslant \frac{2A}{y} + \frac{By}{2} \ .$$

Indication : appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange [8.11.ii].

(ii) On suppose que f est de classe C^∞ et qu'il existe deux constantes positives M et K telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in]-a, a[$,

$$\|(D^{2n} f)(x)\| \leqslant (2n)! \cdot M \cdot K^n \ .$$

(a) Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [-y, y]$, majorer $\|(D^{2n+1} f)(x)\|$.

(b) Montrer que, si $y^2 K < 1$, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \big((D^n f)(0)\big)(x, x, \dots, x)$$

converge sur $[-y, y]$ et a pour somme $f(x)$.

Les exercices de §9

Ⓢ **16.81 Exercice.**

(i) Déterminer les extrema (locaux et/ou globaux) de :

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(b) $f(x,y) = x^3 - y^3$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(ii) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel a, la nature des extrema de la fonction

$$f(x,y) = y\,(x^2 + y^2 - 2ay) \quad .$$

(iii) Soit $r,\ s,\ t$ des réels et Q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^2$ définie par $Q(x,y) = r\,x^2 + 2s\,xy + t\,y^2$. Montrer directement, sans recours au critère de Sylvester, que

(a) Q est définie positive si et seulement si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$;

(b) Q est définie négative si et seulement si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$.

Ⓢ **16.82 Exercice.** On considère la fonction $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \quad .$$

(i) Trouver les points critiques de f.

(ii) Déterminer les extrema locaux de f.

(iii) La fonction f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbf{R}^3$?

Ⓢ **16.83 Exercice.** Trouver tous les extrema de $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \quad .$$

16.84 Exercice. Étudier les extrema locaux puis les extrema globaux de la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

16.85 Exercice. Étudier les extrema (globaux) des fonctions suivantes sur $\mathbf{R}^3$:

$$f(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xyz - z + y \qquad \text{et} \qquad g(x,y,z) = x^3 + 3xy^2 + 3z^2 + 3xy \quad .$$

Ⓢ **16.86 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2\,y}{x^4 + y^2} \quad .$$

Déterminer les points critiques de f et (à l'aide du Hessien, autant que possible) s'il y a des extrema locaux parmi ces points critiques.

Ⓢ **16.87 Exercice.** Soit ℓ^2 l'espace vectoriel des suites $x : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ de carré sommable [1.45] muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme induite $\| \cdot \|$ [1.47] (attention : on a enlevé l'indice 2 de cette norme pour alléger la notation !). On définit la fonction $f : \ell^2 \to \mathbf{R}$ par

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{(x_i)^2}{i+1} + (x_i)^3 \right) \quad .$$

(i) Montrer que f est différentiable sur ℓ^2 et calculer sa différentielle $\big((Df)(x)\big)(h)$ pour tout $x, h \in \ell^2$. En déduire que 0 est un point critique de f.

(ii) Montrer que f est deux fois différentiable en 0, calculer pour tout $h \in \ell^2$, la différentielle seconde $\big((D^2 f)(0)\big)(h, h)$ et montrer qu'elle est définie positive.

(iii) Trouver deux suites $x^{(k)}$ et $y^{(k)}$ dans ℓ^2 vérifiant

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} y^{(k)} = 0 \in \ell^2 \quad , \quad \forall k \in \mathbf{N} : f\big(x^{(k)}\big) < 0 < f\big(y^{(k)}\big) \quad .$$

Indication : on pourrait prendre les éléments $x^{(k)}, y^{(k)} \in \ell^2$ tels que pour $n \neq k$ on a $\big(x^{(k)}\big)_n = \big(y^{(k)}\big)_n = 0$.

(iv) Conclure que f ne présente pas un extremum au point a.

Nota Bene : on a ici donc un exemple d'une fonction (sur une espace de dimension infinie !) avec un point critique et un Hessien qui est défini positif, mais qui ne présente pas un extremum local en ce point critique.

Les exercices de §11

Ⓢ **16.88 Exercice.**

(i) Soit U le plan privé de l'origine, et $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.

(ii) Soit g l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $g(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$ et que $Dg(x,y)$ est inversible pour tout (x,y) de $\mathbf{R}^2$ mais que g n'est pas un homéomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $g(\mathbf{R}^2)$.

Ⓢ **16.89 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad x \neq 0 \;\Rightarrow\; f(x) = x + x^2 \sin(\pi/x) \ .$$

(i) Montrer que f est différentiable sur $\mathbf{R}$ et que $f'(0) = 1$; en déduire que $(Df)(0) \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R};\mathbf{R})$.

(ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a les inégalités

$$f\left(\frac{1}{2n+1}\right) < f\left(\frac{1}{2n}\right) < f\left(\frac{1}{2n+\frac{1}{2}}\right) \ .$$

(iii) En déduire que f n'est inversible sur aucun voisinage de $0 \in \mathbf{R}$.

(iv) Pourquoi ce résultat ne contredit-il pas le théorème de l'inversion locale ?

Ⓢ **16.90 Exercice.** Montrer que si a, b sont voisins de 1, on peut trouver $x, y \in \mathbf{R}$ tels que

$$x + e^{-xy} = a \qquad \text{et} \qquad y + e^{xy} = b \ .$$

Ⓢ **16.91 Exercice.** Soit $F : \mathrm{M}(n,\mathbf{R}) \to \mathrm{M}(n,\mathbf{R})$ l'application $f(A) = A^2$.

(i) Montrer que f est de classe C^∞ et calculer sa différentielle.

(ii) On se place au point $\mathbf{1}_n$ (la matrice unité $n \times n$). Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que toute matrice A vérifiant $\|A - \mathbf{1}\| < r$ admette une racine carrée ; plus précisément, montrer qu'il existe une fonction différentiable $g : B_r(\mathbf{1}_n) \to \mathrm{M}(n,\mathbf{R})$ telle que, pour tout $A \in B_r(\mathbf{1}_n)$, on ait $\big(g(A)\big)^2 = A$.

(iii) Dans cette question on prend $n = 2$ et on donne les matrices

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Calculer $\big((Df)(J)\big)(H)$. En déduire qu'il n'existe pas une application différentiable g, définie au voisinage de $\mathbf{1}_2$, telle que $g(\mathbf{1}_2) = J$ et que $\big(g(A)\big)^2 = A$, pour A voisin de $\mathbf{1}_2$.

Ⓢ **16.92 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application de classe C^1 et soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application définie par

$$g(x,y) = \big(x + f(y), y + f(x)\big) \ .$$

On suppose qu'il existe un réel $k < 1$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $|f'(t)| \leq k$. Le but de l'exercice (un classique) est de montrer que g est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.

(i) Montrer que g est injective.

(ii) Justifier que g est un C^1 difféomorphisme global de $\mathbf{R}^2$ sur son image.

Il nous reste donc à montrer la surjectivité de g, qu'on va montrer de trois façons différentes.

(iii) (a) Justifier le fait que $g(\mathbf{R}^2)$ soit un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

(b) En appliquant l'égalité des accroissements finis à chaque composante de g, montrer, pour tout $x, x', y, y' \in \mathbf{R}$, l'inégalité
$$(1-k)\cdot \|(x,y)-(x',y')\|_1 \leqslant \|g(x,y)-g(x',y')\|_1 \quad ,$$
où $\|(a,b)\|_1 = |a| + |b|$ désigne la norme sur $\mathbf{R}^2$ définie en [1.12].

(c) Montrer que g est une application fermée, c'est-à-dire que l'image d'un fermé est fermée, que (donc) $g(\mathbf{R}^2)$ est un fermé de $\mathbf{R}^2$ et conclure. Indication : si une suite $g(x_n)$ converge, alors c'est une suite de Cauchy.

(iv) (a) Montrer qu'on a $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \|g(x,y)\| = \infty$.

(b) Montrer que, pour $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, la fonction $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par
$$F(x,y) = \|g(x,y) - (a,b)\|_2^2$$
(où $\|(a,b)\|_2 = \sqrt{a^2+b^2}$ désigne la norme euclidienne définie en [1.12]) est de classe C^1 et atteint sa borne inférieure en un point annulant $(DF)(x,y)$ et conclure.

(v) En appliquant le théorème du point fixe à $\phi(x,y) = \big(a - f(y), b - f(x)\big)$ pour $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, montrer que $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est surjective et conclure.

Ⓢ **16.93 Exercice.** Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, xy)$. Trouver un ouvert connexe maximal $U \subset \mathbf{R}^2$ tel que f soit un difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Ⓢ **16.94 Exercice.** Soit $U \subset \mathbf{R}^2$ le plan $\mathbf{R}^2$ privé du demi-axe négatif des abscisses $\mathbf{R}^- = \{\,(x,0) \mid x \leqslant 0\,\}$:
$$U = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \neq 0 \text{ ou } x > 0\,\} \quad ,$$
soit $V \subset \mathbf{R}^2$ l'ouvert
$$V = \,]0,\infty[\, \times \,]-\pi,\pi[$$
et soit $\varphi : V \to \mathbf{R}^2$ l'application définie par
$$\varphi(r,\theta) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \quad .$$

(i) Montrer que $\varphi(V) = U$ et que φ est un C^∞-difféomorphisme entre V et U.

(ii) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable et soit $g = f \circ \varphi$. Exprimer les dérivées partielles de f en termes des dérivées partielles de g et vice-versa. Plus précisément : trouver des fonctions $F_1, F_2 : U \to \mathbf{R}$ (qui font intervenir les dérivées partielles de f) et des fonctions $G_1, G_2 : V \to \mathbf{R}$ (qui font intervenir les dérivées partielles de g) telles qu'on ait pour $i = 1, 2$
$$\partial_i g = F_i \circ \varphi \qquad \text{et} \qquad \partial_i f = G_i \circ \varphi^{-1} \quad .$$

(iii) On suppose maintenant que f est deux fois différentiable. Exprimer la combinaison $(\partial_1\partial_1 f)(x,y)+(\partial_2\partial_2 f)(x,y)$ (qu'on appelle *le Laplacien de* f) en termes des dérivées partielles (premières et secondes) de g. Plus précisément, déterminer une fonction $G : V \to \mathbf{R}$ (qui fait intervenir les dérivées partielles de g) telle qu'on ait l'égalité

$$\big((\partial_1\partial_1 f) + (\partial_2\partial_2 f)\big)\big(\varphi(r,\theta)\big) = G(r,\theta) \ .$$

Ⓢ **16.95 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application définie par

$$f(x,y,z) = (e^y + e^z, e^x - e^z, x - y) \ .$$

(i) Calculer le rang de la matrice jacobienne de f en un point $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

(ii) Montrer qu'au voisinage de tout point $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, f est un difféomorphisme local de classe C^∞.

(iii) Montrer que l'application f est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbf{R}^3$ sur son image $f(\mathbf{R}^3)$ que l'on précisera.

16.96 Exercice. Soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $|ab| < 1$, et $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \big(x + a\sin(y), y + b\sin(x)\big) \ .$$

Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur lui-même.

Ⓢ **16.97 Exercice.** Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (\sin x + \sinh y, \sinh x - \sin y)$$

est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.

16.98 Exercice. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une application de classe C^1 telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n \quad : \quad \|f(x) - f(y)\| \geqslant k \cdot \|x - y\|$$

où $k > 0$ est une constante.

(i) Montrer que $(Df)(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbf{R}^n$. En déduire que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur son image et que $f(\mathbf{R}^n)$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

(ii) Montrer que f est une application fermée, c'est-à-dire que l'image d'un fermé est fermée. Indication : si une suite $f(x_n)$ converge, alors c'est une suite de Cauchy.

(iii) En déduire que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur lui-même.

Soit maintenant f une application de classe C^1 de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ telle qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x, h \in \mathbf{R}^n \quad : \quad \big\langle \big((Df)(x)\big)(h), h \big\rangle \geqslant k \cdot \langle h, h \rangle \ ,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$.

(iv) En appliquant l'égalité des accroissements finis à la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(t) = \langle f(x + th), h \rangle \ ,$$

montrer qu'on a

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n : \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geqslant k \cdot \langle x - y, x - y \rangle \ .$$

En déduire, à l'aide du résultat précédent, que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur lui-même.

Ⓢ **16.99 Exercice.** Soit $E = \mathbf{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels, soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et soit $\| \cdot \|_p$ la norme sur E définie dans [16.6]. Soit $B : E \times E \to E$ l'application définie par $B(P, Q) = P \cdot Q$ et soit $f : E \to E$ l'application $f(P) = B(P, P) \equiv P^2$.

(i) Montrer qu'on a l'inégalité $\|B(P, Q)\|_1 \leqslant \|P\|_1 \cdot \|Q\|_1$. En déduire que B est une application bilinéaire symétrique continue quand on muni E de la norme $\| \cdot \|_1$.

(ii) Montrer que B n'est pas continue quand on muni E de la norme $\| \cdot \|_2$ ou la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Dans la suite de l'exercice on muni E de la norme $\| \cdot \|_1$.

(iii) Montrer que f est différentiable en chaque point $A \in E$ et déterminer la différentielle $(Df)(A)$. En déduire que f est de classe C^∞.

(iv) Montrer que $(Df)(1)$ appartient à $\mathrm{Isom}(E; E)$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de $1 \in E$.

(v) Pourquoi ce résultat ne contredit-il pas le théorème de l'inversion locale ?

Ⓢ **16.100 Exercice.** Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$ et $g : U \to G$ deux applications de classe C^1.

(i) On suppose que pour tout $x \in U$, $(Df)(x)$ est un isomorphisme de E vers F. Montrer que $f(U)$ est un ouvert de F.

(ii) On suppose de plus qu'il existe une application $\Phi : f(U) \to G$ telle que $g = \Phi \circ f$. Montrer que Φ est de classe C^1.

16.101 Exercice. On considère l'équation différentielle suivante

$$x''(t) - \big(x(t)\big)^3 = g(t) \ , \tag{16.102}$$

où $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ est continue. On voudrait trouver une condition sur g assurant que l'équation différentielle (16.102) possède une solution définie sur $[0, 1]$ et s'annulant en 0 et en 1. On considère pour cela $F = C^0(\,[0, 1], \mathbf{R})$, muni de la norme infinie, et

$$E = \{\, \varphi \in C^2(\,[0, 1], \mathbf{R}) \mid \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \,\} \ ,$$

muni de la norme $\|\varphi\|_E = |\varphi'(0)| + \|\varphi''\|_\infty$, $(\varphi \in E)$. On admettra que $(E, \| \cdot \|_E)$ est un espace de Banach.

(i) Montrer que, si $\varphi \in E$, $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_E$.

(ii) Soit $\Phi : E \to F$ définie par $\Phi(\varphi) = \varphi'' - \varphi^3$. Montrer que Φ est de classe C^1 sur E et calculer $\big((D\Phi)(\varphi)\big)(h)$, pour $\varphi, h \in E$.

(iii) Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction $g \in F$ vérifiant $\|g\|_\infty \leqslant \varepsilon$, il existe une fonction $\varphi \in E$ solution de l'équation différentielle (16.102).

Ⓢ **16.103 Exercice.** Soit $F = C^0\big([0,1];\mathbf{R}\big)$ l'espace des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ et soit E l'espace des fonctions $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ qui sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et nulles en $x = 0$:

$$E = \{\, f : [0,1] \to \mathbf{R} \mid f(0) = 0 \text{ et } f \text{ de classe } C^1 \text{ sur } [0,1]\,\} \ \ .$$

Voir [16.24] pour plus de précisions. On muni F de la norme $\|\cdot\|_F$, la norme de la convergence uniforme [1.39] donnée par

$$\|f\|_F = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \equiv \|f\|_\infty$$

et on muni E de la norme $\|\cdot\|_E$ donnée par

$$\|f\|_E = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \equiv \|f'\|_\infty \ \ .$$

(i) Montrer que E et F sont complets (*i.e.*, de Banach). Indication : penser à [1.40].

(ii) Soit $\Phi : E \to F$ l'application définie par $\Phi(f) = f' + ff'$. Montrer que Φ est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

(iii) Montrer que Φ est un C^1-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans E sur un voisinage de 0 dans F.

(iv) En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction $g : [0,1]$ continue et vérifiant $\sup_{t\in[0,1]} |g(t)| < \varepsilon$ il existe une unique fonction $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ de classe C^1 vérifiant l'équation différentielle

$$(1+f)\cdot f' = g \ \ ,$$

ainsi que la condition initiale $f(0) = 0$.

Ⓢ **16.104 Exercice.** Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme (euclidienne) associée. On rappelle que $S \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$ est appelée une *isométrie* si (et seulement si)

$$\forall h,k \in \mathbf{R}^n \quad : \quad \langle S(h), S(k)\rangle = \langle h,k\rangle \ \ .$$

On note $O(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des isométries de $\mathbf{R}^n$. Soient $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert connexe et $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application (au moins) de classe C^1. On suppose que f est une isométrie infinitésimale, c'est-à-dire que pour tout $x \in U$ l'application $(Df)(x) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$ est une isométrie. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $S \in O(\mathbf{R}^n)$ et $b \in \mathbf{R}^n$ tels que

$$\forall x \in U \quad : \quad f(x) = S(x) + b \ \ .$$

(i) On commence avec quelques questions préliminaires.

(a) Montrer que tout élément de $O(\mathbf{R}^n)$ appartient à $\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^n)$ (c'est-à-dire, est une bijection).

(b) Montrer que $O(\mathbf{R}^n)$ est un groupe (pour la composition d'applications).

(c) Soit $S \in O(\mathbf{R}^n)$. Montrer qu'on a $\|S\| = 1$.

(d) Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$ une application linéaire et soit $a = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Montrer que $A \in O(\mathbf{R}^n)$ si et seulement si la matrice a vérifie la condition

$$^t a \cdot a = \mathbf{1} \ \ .$$

(ii) On suppose maintenant que f est deux fois différentiable.

(a) Montrer que, $\forall h, k, \ell \in \mathbf{R}^n$ et $\forall x \in U$, on a :

$$\Big\langle \big((D^2 f)(x)\big)(\ell, h), \big((Df)(x)\big)(k) \Big\rangle + \Big\langle \big((Df)(x)\big)(h), \big((D^2 f)(x)\big)(\ell, k) \Big\rangle = 0 \quad .$$

(b) En déduire (par permutation circulaire sur les vecteurs h, k, ℓ) que

$$\forall h, k, \ell \in \mathbf{R}^n\,,\ \forall x \in U \quad : \quad \Big\langle \big((Df)(x)\big)(\ell), \big((D^2 f)(x)\big)(h, k) \Big\rangle = 0 \quad ,$$

puis que, pour tout $x \in U$, $(D^2 f)(x) = 0$.

(c) Conclure qu'il existe $S \in O(\mathbf{R}^n)$ et $b \in \mathbf{R}^n$ tel que $f(x) = S(x) + b$ pour tout $x \in U$.

(iii) On suppose maintenant que f est (seulement) de classe C^1.

(a) Soit $a \in U$ et $r > 0$ tels que $B_r(a) \subset U$. Montrer que

$$\forall x, y \in B_r(a) \quad : \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\| \quad .$$

(b) Montrer que, pour tout $a \in \mathbf{R}^n$, il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que $f|_V$ soit un C^1-difféomorphisme de V sur W.

(c) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V' de a contenu dans V tel que

$$\forall x, y \in V' \quad : \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad .$$

(d) On définit une application $\Phi : V' \times V' \to \mathbf{R}$ par

$$\Phi(x, y) = \|f(x) - f(y)\|^2 \quad .$$

Montrer, en les calculant, que pour tout $x, y \in V'$ et tout $h, k \in \mathbf{R}^n$ les dérivées directionnelles doubles

$$\big(D_{(h,0)}(D_{(0,k)}\Phi)\big)(x, y)$$

existent. En déduire que pour tout $x, y \in V'$ et tout $h, k \in \mathbf{R}^n$ on a l'égalité

$$\langle (D_h f)(x), (D_k f)(y) \rangle = \langle h, k \rangle \quad .$$

(e) Calculer $\Big\| \big((Df)(x)\big)(h) - \big((Df)(y)\big)(h) \Big\|^2$ pour $(x, y, h) \in V' \times V' \times \mathbf{R}^n$. En déduire que $(Df)(x) = (Df)(y)$ pour tout $x, y \in V'$.

(f) Conclure qu'il existe $S \in O(\mathbf{R}^n)$ et $b \in \mathbf{R}^n$ tel que $f(x) = S(x) + b$ pour tout $x \in U$.

Les exercices de §12

Ⓢ **16.105 Exercice.**

(i) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. En quels points peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites ? Calculer la dérivée de la fonction implicite lorsqu'elle existe.

(ii) Montrer que l'équation $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite g de x dont on calculera le développement limité à l'ordre 3 en 0.

(iii) Montrer que les équations $x + y - zt = xy - z + t = 0$ définissent au voisinage de $z = 0, t = 1$ deux fonctions implicites $x = g_1(z,t),\ y = g_2(z,t)$ avec $g_1(0,1) = 1$, dont on calculera les différentielles en ce point.

Ⓢ **16.106 Exercice.** On considère $E = \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$, $F = \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ et l'application f de $F \times E$ dans E définie par $f(A,B) = AB$. Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites que $g : F \to E$ définie par $g(A) = A^{-1}$ est différentiable en tout point de F et retrouver sa différentielle.

Ⓢ **16.107 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_o, y_o, z_o) \in \mathbf{R}^3$ tel que $f(x_o, y_o, z_o) = (0,0)$. Montrer qu'il existe un intervalle I contenant x_o et une application $g : I \to \mathbf{R}^2$ tels que $f\big(x, g(x)\big) = (0,0)$ pour tout $x \in I$ et $g(x_o) = (y_o, z_o)$.

Ⓢ **16.108 Exercice.** On considère le système d'équations

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \ .$$

Montrer que, pour x proche de l'origine, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $\big(x, y(x), z(x)\big)$ soit solution du système. On déterminera y' en fonction de x, y et z' en fonction de x, z.

Ⓢ **16.109 Exercice.** Montrer qu'au voisinage du point $(1,1,1,1,1)$ les équations

$$xu^2 + yzv + x^2 z = 3 \qquad \text{et} \qquad xyv^3 + 2zu - u^2v^2 = 2$$

permettent de définir (u,v) comme une fonction de classe C^1 de (x,y,z) et calculer la différentielle au point $(1,1,1)$ de cette fonction.

Ⓢ **16.110 Exercice.** Montrer que l'équation

$$xy - y\ln(z) + \sin(xz) = 0$$

permet de définir une fonction $(x,y) \mapsto z = g(x,y)$ de classe C^∞ sur un voisinage ouvert de $(0,2)$ et valant 1 en $(0,2)$. Calculer $\big((Dg)(0,2)\big)(\xi,\eta)$, $(\xi,\eta) \in \mathbf{R}^2$.

Ⓢ **16.111 Exercice.** Soit $D \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$. Montrer qu'il existe un voisinage $V \subset \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ de $\mathbf{0} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ tel que pour tout $B \in V$ l'équation en Y

$$Y + YDY = B$$

a une solution.

Ⓢ **16.112 Exercice.** Montrer qu'au voisinage de $(0,0)$ la relation

$$e^{x-y} = x + y + 1$$

permet de définir y comme fonction de classe C^1 de x. Soit g cette fonction. Déterminer un développement limité d'ordre 3 de g en $x = 0$.

Ⓢ **16.113 Exercice.** Soit $U \subset \mathbf{R}^2$ un ouvert non-vide et $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que f ne peut pas être injective.

16.114 Exercice. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = 1 + xy - \log\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) \quad .$$

Montrer qu'au voisinage du point $(1, 1)$ la relation

$$f(x, y) = 3 - \log(e^2 + 1)$$

permet de définir y comme fonction de classe C^1 de x. Calculer la dérivée de cette fonction sur son ouvert de définition. Déterminer explicitement cette fonction.

Ⓢ **16.115 Exercice.** Soient O un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f : O \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2 telle que

$$\forall (u, y) \in O \quad : \quad (\partial_1 \partial_2 f)(u, y) \neq 0 \quad .$$

Montrer que l'on peut résoudre localement le système

$$x = (\partial_2 f)(u, y) \qquad , \qquad v = (\partial_1 f)(u, y)$$

en (u, v) et calculer le jacobien de l'application $(x, y) \mapsto (u, v)$ ainsi définie.

Ⓢ **16.116 Exercice.** Soit $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ l'espace des matrices réelles $n \times n$. On définit l'application $f : \mathbf{R} \times \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ par

$$f(x, A) = \det(x\mathbf{1} - A) \quad .$$

(i) Montrer que f est de classe C^∞.

(ii) Soit $A \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ telle que A possède une valeur propre réelle λ de multiplicité 1. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de A dans $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ et une fonction $g : V \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ telle que $g(A) = \lambda$ et que, pour toute matrice $B \in V$, $g(B)$ soit une valeur propre réelle de B.

(iii) Soit U le sous-ensemble de $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ formé des matrices ayant n valeurs propres réelles deux à deux distinctes. Montrer que U est un ouvert de $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$.

(iv) Soit $A \in U$, $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A)$ les n valeurs propres de A rangées par ordre croissant. On définit ainsi n applications λ_i de U dans $\mathbf{R}$. Montrer que ces applications sont de classe C^∞ sur U.

Ⓢ **16.117 Exercice.** (*Suite de l'exercice [16.26]*). Soit $E = C^0([a,b];\mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ définie comme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. On pose

$$U = \{\, f \in E \mid \forall x \in [a,b] : f(x) \neq 0 \,\}$$

et on définit l'application $\Phi : U \to E$ par $\Phi(f) = 1/f$. Dans [16.26] on a montré que U est un ouvert et que Φ est bien définie. Le but de l'exercice est d'utiliser le théorème des fonctions implicites pour montrer que Φ est de classe C^∞ et de déterminer sa différentielle. Les questions suivantes vous guident dans cette démarche.

Soit $B : E \times E \to E$ l'application définie par

$$B(f,g) = f \cdot g \quad ,$$

c'est-à-dire $\big(B(f,g)\big)(x) = f(x)\cdot g(x)$, et soit, pour $f \in E$ fixe, l'application $\hat{B}(f) : E \to E$ définie par

$$\big(\hat{B}(f)\big)(g) = B(f,g) = f \cdot g \quad .$$

(i) Montrer que B est une application bilinéaire continue avec $\|B\| = 1$.

(ii) En déduire que l'application $\hat{B}(f)$ est linéaire et continue avec $\|\hat{B}(f)\| = \|f\|_\infty$.

(iii) Montrer que, pour $f \in U$, l'application $\hat{B}(f)$ appartient à $\mathrm{Isom}(E;E)$.

(iv) Exprimer les deux différentielles partielles $(D_1B)(f,g)$ et $(D_2B)(f,g)$ en termes de l'application $\hat{B}$.

(v) Montrer, à l'aide du théorème des fonctions implicites, que Φ est de classe C^∞ sur U et déterminer sa différentielle au point $f \in U$.

(vi) En déduire que Φ est un C^∞-difféomorphisme de U sur son image qu'on déterminera.

Les exercices de §13

16.118 Exercice. Soit N_i, $i = 1, \ldots, 4$ quatre normes sur un espace vectoriel E telles que N_1 est équivalente à N_3 et N_2 à N_4, soit $A \subset E$ un sous-ensemble et soit $d_i : E \to \mathbf{R}$ la fonction

$$d_i(x) = \inf_{y \in A} N_i(x-y)$$

qui donne la distance de x à A mesuré avec la norme N_i. Montrer l'équivalence

$$\lim_{x \to x_o} \frac{d_1(x)}{N_2(x-x_o)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_o} \frac{d_3(x)}{N_4(x-x_o)} = 0 \ .$$

Ⓢ **16.119 Exercice.** Soit $f, g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ les fonctions définies par

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz + 2x + 2y - z$$
$$g(x,y,z) = 4xy + 2xz + 4y - z \ .$$

(i) Montrer que l'équation $f(x,y,z) = 0$ définit au voisinage de $(0,0,0)$ une surface (une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2). Donner l'équation du plan tangent de cette surface au point $(0,0,0)$.

(ii) Montrer que les équations $f(x,y,z) = 0 = g(x,y,z)$ définissent au voisinage de $(0,0,0)$ une courbe (une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ de dimension 1). Déterminer l'espace tangent de cette courbe au point $(0,0,0)$.

16.120 Exercice. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y$$

et soit $\mathcal{C} = f^{-1}(0) \subset \mathbf{R}^2$.

(i) Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^2$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(1,1)$ et déterminer l'espace tangent à $\mathcal{C}$ dans ces deux points.

(ii) Montrer que dans un voisinage de $(0,0)$ et $(1,1)$ l'ensemble des $(x,y) \in \mathcal{C}$ s'écrit sous la forme $x = g(y)$.

(iii) Déduire de l'équation $f\big(g(y),y\big) = 0$ les valeurs $g'(0)$, $g''(0)$, $g'(1)$ et $g''(1)$. Est ce que les valeurs $g'(0)$ et $g'(1)$ confirment les espaces tangents trouvés en (i) ?

(iv) Déduire des valeurs $g''(0)$ et $g''(1)$ la position de $\mathcal{C}$ par rapport à son espace tangent aux points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Ⓢ **16.121 Exercice.** Déterminer, parmi les sous-ensembles définis ci-dessous, ceux qui sont des sous-variétés :

(i) $M_1 = \{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1 \,\}$;

(ii) $M_2 = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 0 \,\}$;

(iii) $M_3 = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = x^3 \,\}$;

(iv) $M_4 = \{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \lambda z^2 \,\}$ où $\lambda \in \mathbf{R}$;

(v) $M_5 = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^3 = x^3 \,\}$;

(vi) $M_6 = \{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x^2 + y^2 - x = 0 \,\}$.

Ⓢ **16.122 Exercice.** Soit $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n et définissons les trois sous-ensembles[7] $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$, $\mathrm{Sl}(n, \mathbf{R})$ et $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ par

$$\begin{aligned} \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R}) &= \{\, A \in E \mid \det(A) \neq 0 \,\} \\ \mathrm{Sl}(n, \mathbf{R}) &= \{\, A \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \mid \det(A) = 1 \,\} \\ \mathrm{O}(n, \mathbf{R}) &= \{\, A \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \mid {}^t\!AA = \mathbf{1} \,\} \ . \end{aligned}$$

(i) Montrer que $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R}) \subset \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ est un ouvert et que c'est un groupe pour la multiplication matricielle.

(ii) Montrer que $\mathrm{Sl}(n, \mathbf{R})$ et $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ sont des sous-groupes de $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$.

(iii) Montrer que $\mathrm{Sl}(n, \mathbf{R})$ est une sous-variété de $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ de dimension $n^2 - 1$ dont l'espace tangent en $\mathbf{1}$ est

$$T_{\mathbf{1}}\mathrm{Sl}(n, \mathbf{R}) = \{\, X \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \mid \mathrm{trace}(X) = 0 \,\} \ .$$

Indication : dans [16.58] on a montré, pour $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$, la formule

$$\big((D \det)(A)\big)(H) = \det(A) \cdot \mathrm{trace}(A^{-1}H) \ .$$

(iv) Soit $f : \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \to \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ l'application définie par $f(A) = {}^t\!AA$. Montrer que f est de classe C^∞ et qu'on a

$$\big((Df)(A)\big)(H) = {}^t\!AH + {}^t HA \ .$$

(v) Montrer que $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ est une sous-variété de $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ de dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ dont l'espace tangent en $\mathbf{1}$ est

$$T_{\mathbf{1}}\mathrm{O}(n, \mathbf{R}) = \{\, X \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \mid X + {}^t X = \mathbf{0} \,\} \ .$$

Ⓢ **16.123 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ un difféomorphisme de classe C^1 ayant un point fixe $a \in \mathbf{R}^d$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathrm{id} = f^n \equiv f \circ f \circ \cdots \circ f$. Le but de l'exercice est de montrer que (les composantes connexes de) l'ensemble des points fixes F défini comme

$$F = \{\, x \in \mathbf{R}^d \mid f(x) = x \,\}$$

est une sous-variété de $\mathbf{R}^d$.

(i) Pour $p \in \mathbf{N}$, calculer $\big(D(f^p)\big)(a)$. En déduire que $u = (Df)(a)$ est une application linéaire inversible.

(ii) On pose, pour $x \in \mathbf{R}^d$, $\varphi(x) = \sum_{p=1}^n u^{-p}\big(f^p(x)\big)$. Vérifier que $\varphi \circ f = u \circ \varphi$.

(iii) Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme au voisinage de a. En déduire qu'il existe un voisinage ouvert U de a sur lequel $f = \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi$.

(iv) Sachant que $a \in F \cap U$, montrer que pour tout $x \in U$ on a l'équivalence

$$x \in F \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) \text{ est vecteur propre de } u \text{ pour la valeur propre } 1.$$

En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel X de $\mathbf{R}^d$ tel que $\varphi(F \cap U) = \varphi(U) \cap X$, puis (en utilisant [13.2]) que chaque composante connexe de F est une sous-variété de $\mathbf{R}^d$.

7. Les noms de ces trois ensembles viennent de l'anglais : Gl ou GL pour "General Linear", Sl ou SL pour "Special Linear" et O pour "Orthogonal". À part ces trois sous-ensembles/groupes on a également les noms SO pour "Special Orthogonal", U pour "Unitary", SU pour "Special Unitary" et Sp pour "Symplectic", des noms qui désignent également des groupes.

(v) Soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $g(x, y) = (x, y + y^3 - x^2)$. Montrer que g est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$. En déduire que (iv) n'est plus nécessairement vrai si on supprime l'hypothèse $f^n = id$.

Les exercices de §14

Ⓢ **16.124 Exercice.** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

(i) Déterminer les extrema locaux de f.

(ii) La fonction f possède-t-elle un extremum global sur $\mathbf{R}^2$?

(iii) Soit $T = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant 0\,,\, y \geqslant 0\,,\, x+y \leqslant 1\,\}$. Justifier l'existence du maximum global M et du minimum global m de $f|_T$ (la restriction de f à T). Déterminer M et m et préciser en quels points de T ils sont atteints.

Ⓢ **16.125 Exercice.** Soit $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ les fonctions définies par

$$f(x,y) = x^2 + 2\,xy + 2\,y^2 \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 \quad .$$

Déterminer les extrema de la fonction f sur $M = g^{-1}(1)$ à l'aide de [14.5]. Ceci fournira une troisième façon de calculer le résultat de [16.8.iii].

Ⓢ **16.126 Exercice.** Soit $f, g : (\mathbf{R}^*)^3 \to \mathbf{R}$ les fonctions définies par

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x,y,z) = xyz \quad .$$

Le but de l'exercice est de trouves les extrema de la fonction f sur $M = g^{-1}(1)$.

(i) En écrivant $M = \{\,(x,y,z) \in (\mathbf{R}^*)^3 \mid z = (xy)^{-1}\,\}$, trouver les extrema de $f|_M$ en appliquant [9.3] à la fonction $h(x,y) = f\big(x, y, (xy)^{-1}\big)$.

(ii) En appliquant la théorie des extrema liés [14.5], retrouver les extrema de $f|_M$.

16.127 Exercice. Soient $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, et $s \in \mathbf{R}$, $s > 0$. On considère l'application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i \equiv x_1\, x_2 \cdots x_n \quad .$$

On pose

$$M_s = \Big\{\, (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbf{R}_{>0})^n \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = s \,\Big\} \quad .$$

Étudier le maximum global de $f|_{M_s}$. Retrouver ainsi l'inégalité arithmético-géométrique.

16.128 Exercice. Soient $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels strictement positifs. On note

$$M = \Big\{\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1 \,\Big\} \quad .$$

Si $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, déterminer le maximum global de $f|_M$.

16.129 Exercice. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Démontrer que

$$\prod_{i=1}^{n} a_i\,(1-a_i) \leqslant \frac{(n-1)^n}{n^{2n}} \quad .$$

16.130 Exercice. Soient f et g les applications de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définies par

$$f(x,y,z) = 2(xy+xz+yz) \qquad \text{et} \qquad g(x,y,z) = xyz - 1000 \quad .$$

Soient $P, A, B \subset \mathbf{R}^3$ définis par

$$P = (\ ]1,1000[\ )^3 \qquad , \qquad A = \{\,(x,y,z) \in (\mathbf{R}_+^*)^3 \mid g(x,y,z) = 0\,\}$$
$$B = P \cap g^{-1}(0) \quad .$$

(i) Montrer que A est un fermé de $\mathbf{R}^3$, que $A \cap \overline{P}$ est compact et que le maximum de $f|_{A\cap\overline{P}}$ n'est atteint en aucun point de $(A\cap\overline{P}) \setminus (A\cap P)$.

(ii) Trouver les extrema de $f|_B$.

(iii) En déduire les dimensions d'une boîte parallélépipédique rectangle ayant pour volume 1000 et ayant une aire minimale.

16.131 Exercice. On considère dans $\mathbf{R}^3$ l'éllipsoïde E d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Trouver parmi les parélélépipèdes rectangles de côtés parallèles aux axes et inscrits dans cet ellipsoïde, celui dont le volume est maximal.

16.132 Exercice. Soient p, q, r trois réels tous non nuls. On considère l'application $f : (\mathbf{R}_+^*)^3 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^p + y^q + z^r$. Trouver les extrema de f sur le plan d'équation $x+y+z=1$.

16.133 Exercice. On considère, dans $\mathbf{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ et de la distance euclidienne d, le cercle Γ d'équation $x^2+y^2=1$ et la droite Δ d'équation $x+y=4$. Trouver les points $P \in \Gamma$ et $Q \in \Delta$ tels que $d(P,Q)$ soit minimale.

16.134 Exercice. Dans chacun des cas suivants, déterminer les points critiques de f puis les points critiques de $f|_M$ où $M = h^{-1}(\{0\})$:

(i) $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ et $h(x,y,z) = x+y+z-1$;

(ii) $f(x,y) = e^x + e^y$ et $h(x,y,z) = x^3+3x^2+3x-y^3+3y^2-3y+5$;

(iii) $f(x,y,z) = x+2z$ et $h(x,y,z) = (x^2+y^2-z, x+y+z-\frac{1}{16})$;

(iv) $f(x,y,z) = \cos(xyz)$ et $h(x,y,z) = (xy-1, y^3-z^2)$;

(v) $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ et $h(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1$.

16.135 Exercice. Soit $f(x,y,z) = (x+y+z, x^2+y^2+z^2-1)$ et $g(x,y,z) = 5x+y-3z$. On note $M = f^{-1}\big(\{(0,0)\}\big)$. Montrer par un argument topologique que $g|_M$ admet un maximum global et un minimum global. En déduire les extrema globaux de $g|_M$.

16.136 Exercice. Déterminer les extrema de la fonction $f(x,y,z) = 2x + 3y + 2z$ sur l'intersection du plan d'équation $x+z = 1$ avec le cylindre d'équation $x^2+y^2 = 2$ dans $\mathbf{R}^3$.

Ⓢ **16.137 Exercice.** Soit $f, g : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ les fonctions définies par

$$f(x,y) = \frac{x^2\,y}{x^4+y^2} \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = x^2+y^2 \quad .$$

Soit $R > 0$. Déterminer les extrema de f sur $M = g^{-1}(R^2)$, ainsi que leur nature, y compris la distinction local/global (voir aussi [16.86]).

Ⓢ **16.138 Exercice.** Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid xyz = 1\}$.

(i) Montrer que S est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbf{R}^3$.

(ii) Montrer que S possède 4 composantes connexes homéomorphes à $\mathbf{R}^2$.

On considère la fonction

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx$$

et on note S_+ la composante connexe de S à laquelle le point $(1,1,1)$ appartient.

(iii) Montrer que f restreinte à S_+ est propre, c'est-à-dire $\lim_{\|v\|\to\infty} |f(v)| = \infty$ (voir [16.16]).

(iv) Montrer que f possède un seul point critique sur la surface S_+. En déduire que f restreinte à S_+ atteint sa plus petite valeur et déterminer cette valeur.

Soit S' une composante connexe de S distincte de S_+.

(v) Montrer que

$$\sup \{\, f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in S' \,\} = +\infty \quad \text{et}$$
$$\inf \{\, f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in S' \,\} = -\infty \quad .$$

En déduire que l'ensemble $\Gamma' = f^{-1}(0) \cap S'$ est non vide et fermé.

(vi) Montrer que $\Gamma = S \cap f^{-1}(0)$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbf{R}^3$.

(vii) Montrer que Γ a trois composantes connexes et qu'aucune n'est bornée.

Chapitre VI

Les solutions

Les solutions de §1

Solution de [16.4]. • (i) : Étant donné que $|P(c)|$ et $|P'(t)|$ sont positives, il est évident que $N_c(P) \geqslant 0$. Si on suppose qu'on a $N_c(P) = 0$, alors on aura donc

$$|P(c)| + \int_0^1 |P'(t)| \ \mathrm{d}t = 0 \quad .$$

Étant donné que $|P(c)|$ et $\int_0^1 |P'(t)| \ \mathrm{d}t$ sont tous les deux positives, on doit donc avoir

$$|P(c)| = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 |P'(t)| \ \mathrm{d}t = 0 \quad .$$

On a donc $P(c) = 0$ et l'intégrale d'une fonction continue et positive (à savoir $|P'(t)|$) qui est nulle. On en déduit que cette fonction $|P'(t)|$ doit être nulle **sur l'intervalle d'intégration** $[0, 1]$. Mais si P est un polynôme de degré n, P' est un polynôme de degré $n - 1$ qui ne peut pas avoir plus que $n - 1$ zéros, sauf si P' est identiquement nulle. Mais on vient de voir que tous les points de l'intervalle $[0, 1]$ sont des zéros de P', ce qui implique donc que P' doit être le polynôme nul. Il s'ensuit que P est un polynôme constant avec $P(c) = 0$, c'est-à-dire que $P = 0$.

Ensuite on calcule

$$\begin{aligned} N_c(\lambda P) &= |\lambda P(c)| + \int_0^1 |\lambda P'(t)| \ \mathrm{d}t = |\lambda| \cdot |P(c)| + |\lambda| \cdot \int_0^1 |P'(t)| \ \mathrm{d}t \\ &= |\lambda| \cdot N_c(P) \quad . \end{aligned}$$

Et on termine avec l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} N_c(P + Q) &= |P(c) + Q(c)| + \int_0^1 |P'(t) + Q'(t)| \ \mathrm{d}t \\ &\leqslant |P(c)| + |Q(c)| + \int_0^1 |P'(t)| + |Q'(t)| \ \mathrm{d}t \\ &= N_c(P) + N_c(Q) \quad . \end{aligned}$$

• (ii) : Supposons que N_a et N_b sont équivalentes. Alors il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que

$$\forall P \in \mathbf{R}[X] \quad : \quad N_a(P) \leqslant C_1 \cdot N_b(P) \quad \text{et} \quad N_b(P) \leqslant C_2 \cdot N_a(P) \quad .$$

Ceci doit être vrai en particulier pour les polynômes $P_n(X) = X^n$, pour lesquels on a

$$N_a(P_n) = |P_n(a)| + \int_0^1 |P_n'(t)| \ \mathrm{d}t = |a|^n + 1 \qquad \text{et} \qquad N_b(P_n) = b^n + 1 \quad .$$

On doit donc avoir

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad : \quad |a|^n + 1 \leqslant C_1 \cdot (b^n + 1) \quad \text{et} \quad b^n + 1 \leqslant C_2 \cdot (|a|^n + 1) \ .$$

Ceci est équivalente à

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad : \quad \frac{(\,|a|/b\,)^n + b^{-n}}{1 + b^{-n}} \leqslant C_1 \quad \text{et} \quad \frac{1 + b^{-n}}{(\,|a|/b\,)^n + b^{-n}} \leqslant C_2 \ .$$

Sachant qu'on a $b > 1$ et donc $\lim_{n\to\infty} b^{-n} = 0$, on constate qu'on a

$$|a|/b > 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(\,|a|/b\,)^n + b^{-n}}{1 + b^{-n}} = \infty$$

et

$$|a|/b < 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1 + b^{-n}}{(\,|a|/b\,)^n + b^{-n}} = \infty \ .$$

Les majorations par C_1 et C_2 respectivement impliquent donc qu'on doit avoir $|a|/b = 1$. Le cas $b = a$ étant exclu, la conclusion est donc que **si** N_a et N_b sont équivalentes, alors on doit avoir $a = -b$. Pour exclure aussi ce dernier cas, on considère les polynômes $Q_n(X) = (X - b)^n$. On calcule aisément qu'on a (n'oublions pas que $b > 1$)

$$N_b(Q_n) = \int_0^1 |Q_n'(t)| \ \mathrm{d}t = \int_0^1 n\,|t - b|^{n-1} \ \mathrm{d}t = b^n - (b-1)^n \ ,$$

et "donc"

$$N_{-b}(Q_n) = (2b)^n + b^n - (b-1)^n \ .$$

Si N_b et N_{-b} sont équivalentes, alors il doit en particulier exister un $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad : \quad N_{-b}(Q_n) \leqslant C \cdot N_b(Q_n)$$

ce qui revient à la condition

$$(2b)^n + b^n - (b-1)^n \leqslant C \cdot \big(b^n - (b-1)^n\big) \ .$$

Mais $b > 1$ et $2b > b$, donc on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2b)^n + b^n - (b-1)^n}{b^n - (b-1)^n} = \infty \ .$$

Il s'ensuit qu'un tel $C > 0$ ne peut pas exister, et donc même N_b et N_{-b} ne peuvent pas être équivalentes.

• (iii) : Sans perte de généralité on peut supposer qu'on a $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Par le théorème fondamental de l'analyse on a donc pour tout fonction de classe C^1 sur $[0,1]$

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) \ \mathrm{d}t \ .$$

Il s'ensuit immédiatement

$$|f(b) - f(a)| = \Big| \int_a^b f'(t) \ \mathrm{d}t \ \Big| \leqslant \int_a^b |f'(t)| \ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |f'(t)| \ \mathrm{d}t \ .$$

Si on applique ceci à un polynôme P on trouve donc

$$\begin{aligned} N_b(P) = |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)| \ \mathrm{d}t &\leqslant |P(a)| + |P(b) - P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \ \mathrm{d}t \\ &\leqslant |P(a)| + 2 \cdot \int_0^1 |P'(t)| \ \mathrm{d}t \leqslant 2 \cdot N_a(P) \ . \end{aligned}$$

De la même façon on obtient

$$N_a(P) \leqslant |P(b)| + |P(b) - P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant 2 \cdot N_b(P) \ .$$

Les deux normes N_a et N_b sont donc équivalentes (avec les constantes $C_1 = C_2 = 2$).

Solution de [16.6]. • (i) : Soit $P \in E$ un polynôme et soit n son degré. Alors on peut voir P comme un élément dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n, qui est un espace de dimension finie $n+1$. On peut donc appliquer [1.12.ii] (avec $E_i = \mathbf{R}$ et en remarquant que la norme $\| \cdot \|_p$ ici coïncide avec la norme $\| \cdot \|_p$ dans [1.12]) pour obtenir

$$1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \|P\|_q \leqslant \|P\|_p \ .$$

Il s'ensuit immédiatement que l'application Id : $(E, \| \cdot \|_p) \to (E, \| \cdot \|_q)$ est continue (avec norme d'opérateur $\leqslant 1$) pour $p \leqslant q$.

D'autre part, on peut considérer la suite des polynômes $P_n \in E$ définie par

$$P_n(X) = \sum_{i=1}^{n} X^i \ .$$

Il est immédiat qu'on a, pour tout $1 \leqslant p < \infty$,

$$\|P_n\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |1|^p \Big)^{1/p} = n^{1/p} \qquad \text{ainsi que} \qquad \|P_n\|_\infty = 1 \ .$$

Pour $q < p$ on a donc pour l'application Id : $(E, \| \cdot \|_p) \to (E, \| \cdot \|_q)$:

$$(17.1) \qquad p < \infty \quad : \quad \frac{\|\mathrm{Id}(P_n)\|_q}{\|P_n\|_p} = n^{1/q - 1/p} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\|\mathrm{Id}(P_n)\|_q}{\|P_n\|_\infty} = n^{1/q} \ .$$

Mais $\lim_{n\to\infty} n^{1/q-1/p} = \lim_{n\to\infty} n^{1/q} = \infty$ (pour $q < p$), donc la condition dans [1.9.iii] ne peut pas être remplie, ce qui montre que pour $q < p$ l'application Id : $(E, \| \cdot \|_p) \to (E, \| \cdot \|_q)$ n'est pas continue.

• (ii) : Pour tout polynôme P, la division euclidienne de P par $X - 1$ nous donne deux polynômes Q, R avec $\deg(R) < \deg(X-1) = 1$ tels que $P(X) = (X-1)Q(X) + R(X)$. On a donc $R \in F_1$, $(X-1) \cdot Q \in F_2$ et $P = R + (X-1) \cdot Q$, montrant que $F_1 + F_2 = E$. D'autre part, si on a $P \in F_1 \cap F_2$, alors par $P \in F_1$ on a $\deg(P) = 0$ et par $P \in F_2$ on a l'implication $P \neq 0 \Rightarrow \deg(P) \geqslant 1$. On en déduit $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et donc $E = F_1 \oplus F_2$.

• (iii) : Par [1.19], la restriction de l'application linéaire A à F_1, un espace vectoriel de dimension 1 est nécessairement continue. D'autre part, pour $P \in F_2$ il existe $Q \in E$ tel que $P(X) = (X-1)\,Q(X)$ et donc $P(1) = 0$, montrant que la restriction de A à F_2 est l'application constante nulle, donc continue.

• (iv) : Avec la norme $\| \cdot \|_1$ on peut faire, pour $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$, le calcul :

$$|P(1)| = \Big| \sum_{k=0}^{n} a_k \Big| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \|P\|_1 \ ,$$

et donc A est continue avec $\|A\| \leqslant 1$ [1.23].

D'autre part, pour $p > 1$ il suffit de prendre la suite des polynômes P_n définie ci-dessus pour constater qu'on a $|A(P_n)| = n$. Avec (17.1) on en déduit immédiatement que le quotient $|A(P_n)|/\|P_n\|_p$ n'est pas borné et donc que A ne peut pas être continue quand on muni E de la norme $\|\cdot\|_p$, $p > 1$.

Solution de [16.8]. • (i) : On note un point dans $\mathbf{R}^2$ par (x, y). Pour $\|(x, y)\|_1 = 1$, c'est le losange délimité par les quatre droites $x + y = \pm 1$ et $x - y = \pm 1$ et pour $\|(x, y)\|_\infty = 1$, c'est le carré délimité par les quatre droites $x = \pm 1$ et $y = \pm 1$. Ces dessins nous aident à déterminer les normes demandées via la formule $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|$. Nos dessins nous donnent les points $\|x\| = 1$ et il faut trouver les dessins qui entourent leurs images. Étant donné qu'il s'agit de quadrilatères et que A est linéaire, ces images seront aussi des quadrilatères, donc déterminés par leurs quatre sommets.

Pour le losange on calcule donc les images de $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$, ce qui donne les quatre points

$$(3, 1) \quad , \quad (-3, -1) \quad , \quad (2, 4) \quad , \quad (-2, -4) \quad .$$

Pour calculer $\|A\|_{1,1}$, il faut trouver le plus petit losange qui contient ces 4 points, ce qui est le losange $\|x\|_1 \leqslant 6$. Pour calculer $\|A\|_{1,\infty}$, il faut trouver le plus petit carré contenant ces 4 points, ce qui est donné par $\|x\|_\infty \leqslant 4$. On a donc

$$\|A\|_{1,1} = 6 \qquad \text{et} \qquad \|A\|_{1,\infty} = 4 \quad .$$

Pour le carré on calcule les images de $(\pm 1, \pm 1)$, ce qui donne

$$(5, 5) \quad , \quad (1, -3) \quad , \quad (-5, -5) \quad , \quad (-1, 3) \quad .$$

De la même manière que ci-dessus on trouve donc

$$\|A\|_{\infty,1} = 10 \qquad \text{et} \qquad \|A\|_{\infty,\infty} = 5 \quad .$$

• (ii) : Pour les normes $\|A\|_{1,2}$ et $\|A\|_{\infty,2}$, il faut entourer les quadrilatères images par des disques, ce qui donne

$$\|A\|_{1,2} = \sqrt{20} \qquad \text{et} \qquad \|A\|_{\infty,2} = \sqrt{50} \quad .$$

• (iii) : Le calcul de $\|A\|_{2,2}$ est un peu moins facile. L'ensemble $\{x \mid \|x\| = 1\}$ étant fermé et borné dans un espace de dimension finie 2 est (donc) un compact. Dans la définition de la norme $\|A\|_{2,2}$ on peut donc remplacer le sup par un max, ce qui nous donne pour son carré :

$$\big(\|A\|_{2,2}\big)^2 = \max_{x^2+y^2=1} (3x + 2y)^2 + (x + 4y)^2 = \max_{x^2+y^2=1} 10x^2 + 20xy + 20y^2 \quad .$$

Pour calculer ce maximum il y a plusieurs méthodes. La plus simple est de considérer cette fonction comme une forme quadratique et d'écrire

$$10x^2 + 20xy + 20y^2 = (\ x \quad y\ ) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice de cette forme quadratique a comme valeurs propres $\lambda = 15 \pm 5\sqrt{5}$. On en déduit que le maximum de la fonction pour $x^2 + y^2 = 1$ vaut $15 + 5\sqrt{5}$.

Une autre façon est de décrire un point sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$ par un angle θ comme $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$. Dans ce cas il faut donc déterminer le maximum de la fonction

$$f(\theta) = 10\cos^2\theta + 20\sin^2\theta + 20\sin\theta\,\cos\theta = 15 - 5\cos(2\theta) + 10\sin(2\theta) \quad .$$

Les points critiques de cette fonction sont donnés par la condition $\tan(2\theta) = -2$, ce qui correspond aux deux solutions

$$\sin(2\theta) = \frac{2}{\sqrt{5}} \ , \ \cos(2\theta) = \frac{-1}{\sqrt{5}} \qquad \text{et} \qquad \sin(2\theta) = \frac{-2}{\sqrt{5}} \ , \ \cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \ .$$

On en déduit que la valeur maximale de f est $15 + 5\sqrt{5}$ (et la valeur minimale $15 - 5\sqrt{5}$), conforme au résultat trouvé précédemment. Il s'ensuit qu'on a

$$\|A\|_{2,2} = \sqrt{15 + 5\sqrt{5}} \ .$$

- (iv) : Par définition on a

$$\begin{aligned} \|A\|_{\infty,\infty} &= \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|A(x)\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \max_{i=1,\dots,n} \Big| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \Big| \\ &\leqslant \sup_{\|x\|_\infty=1} \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \leqslant \sup_{\|x\|_\infty=1} \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \|x_j\|_\infty \\ &= \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \ . \end{aligned}$$

Pour montrer qu'on a bien l'égalité, on choisit $k \in \{1, \dots, n\}$ et $x \in \mathbf{K}^n$ tels que

$$\max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| \qquad \text{et} \qquad x_j = \begin{cases} \overline{a_{kj}} \,/\, |a_{kj}| & a_{kj} \neq 0 \\ 0 & a_{kj} = 0 \ . \end{cases}$$

Alors on aura

$$\|x\|_\infty = 1 \qquad \text{et} \qquad \big(A(x)\big)_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$$

et donc

$$\|A(x)\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \Big| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \Big| \geqslant \Big| \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \Big| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \ .$$

Avec $\|x\|_\infty = 1$ on en déduit l'inégalité $\|A\|_{\infty,\infty} \geqslant 1$, donc avec l'inégalité dans l'autre sens on a égalité.

Pour $\|A\|_{1,1}$ on procède de la même façon. Par définition on a

$$\begin{aligned} \|A\|_{1,1} &= \sup_{\|x\|_1=1} \|A(x)\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \sum_{i=1}^n \Big| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \Big| \\ &\leqslant \sup_{\|x\|_1=1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \sup_{\|x\|_1=1} \sum_{j=1}^n \Big(|x_j| \cdot \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \Big) \\ &\leqslant \sup_{\|x\|_1=1} \sum_{j=1}^n \Big(|x_j| \cdot \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \Big) = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \ . \end{aligned}$$

Pour montrer qu'on a bien l'égalité, on choisit $k \in \{1, \dots, n\}$ et $x \in \mathbf{R}^n$ tels que

$$\max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \qquad \text{et} \qquad x_k = 1 \quad , \quad i \neq k \Rightarrow x_i = 0 \ .$$

Alors on aura

$$\|x\|_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \big(A(x)\big)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = a_{ik}$$

et donc

$$\|A(x)\|_1 = \sum_{i=1}^n \Big| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \Big| = \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad .$$

Avec $\|x\|_1 = 1$ on en déduit l'inégalité $\|A\|_{1,1} \geqslant 1$, donc avec l'inégalité dans l'autre sens on a égalité.

Le cas de $\|A\|_{1,\infty}$ suit toujours le même schéma. À partir de la définition on calcule :

$$\begin{aligned}
\|A\|_{1,\infty} = \sup_{\|x\|_1=1} \|A(x)\|_\infty &= \sup_{\|x\|_1=1} \max_{i=1,\ldots,n} \Big| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \Big| \\
&\leqslant \sup_{\|x\|_1=1} \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \\
&\leqslant \sup_{\|x\|_1=1} \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^n \big(\max_{k=1,\ldots,n} |a_{ik}| \big) \cdot |x_j| = \max_{i,k=1,\ldots,n} |a_{ik}| \quad .
\end{aligned}$$

Pour montrer qu'on a bien l'égalité, on choisit $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ et $x \in \mathbf{R}^n$ tels que

$$\max_{i,k=1,\ldots,n} |a_{ik}| = |a_{pq}| \qquad \text{et} \qquad x_q = 1 \quad , \quad j \neq q \Rightarrow x_j = 0 \quad .$$

Alors on aura

$$\|x\|_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \big(A(x)\big)_p = \sum_{j=1}^n a_{pj} x_j = a_{pq}$$

et donc

$$\|A(x)\|_1 = \max_{i=1,\ldots,n} \Big| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \Big| = \max_{i=1,\ldots,n} |a_{iq}| \geqslant |a_{pq}| = \max_{i,k=1,\ldots,n} |a_{ik}| \quad .$$

Avec $\|x\|_1 = 1$ on en déduit l'inégalité $\|A\|_{1,\infty} \geqslant 1$, donc avec l'inégalité dans l'autre sens on a égalité.

Le cas de $\|A\|_{\infty,1}$ suit au début toujours le même schéma :

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\infty,1} = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|A(x)\|_1 &= \sup_{\|x\|_\infty=1} \sum_{i=1}^n \Big| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \Big| \\
&\leqslant \sup_{\|x\|_\infty=1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \\
&\leqslant \sup_{\|x\|_\infty=1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \quad .
\end{aligned}$$

Pour montrer qu'on peut avoir aussi bien l'égalité que l'inégalité strict, il suffit de considérer la matrice A ci-dessus pour laquelle on a égalité, tandis que pour la matrice $A' = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{smallmatrix}\right)$ on aura $\|A\|_{\infty,1} = 8 < 10 = \sum_{i,k=1}^2 |a_{ik}|$.

Par définition on a $A^* = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. On a donc

$$\|A^*\|_{1,1} = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ji}| = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\|_{\infty,\infty} \quad .$$

• (v) : On a la majoration

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\cdot|y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\cdot \max_{j=1,\dots,n} |y_j| = \|x\|_1\cdot\|y\|_\infty \quad .$$

Mais $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$, donc on a aussi l'inégalité $|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|_\infty\cdot\|y\|_1$. On en déduit immédiatement les inégalités

$$\sup_{\|y\|_\infty=1} |\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|_1 \qquad \text{et} \qquad \sup_{\|y\|_1=1} |\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|_\infty \quad .$$

Pour montrer les inégalités dans l'autre sens, on fait des choix particulier pour y. Pour le premier on choisit

$$y_i = \frac{x_i}{|x_i|} \text{ si } x_i \neq 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \text{ sinon,}$$

ce qui nous donne

$$|\langle x,y\rangle| = \Big|\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\cdot y_i\Big| = \Big|\sum_{i=1} \frac{x_i\cdot\overline{x_i}}{|x_i|}\Big| = \Big|\sum_{i=1} |x_i|\Big| = \|x\|_1 \quad ,$$

et donc $\sup_{\|y\|_\infty=1} |\langle x,y\rangle| \geqslant \|x\|_1$. Bien sûr, ceci n'est correct que si $x \neq 0 \in \mathbf{R}^n$, car sinon on aura $y = 0$ avec $\|y\|_\infty = 0$ (pour $x\neq 0$ on aura bien $\|y\|_\infty = 1$). Mais dans ce cas on a $\langle x,y\rangle = 0$ pour tout y et l'égalité $\sup_{\|y\|_\infty=1} |\langle x,y\rangle| = \|x\|_1$ est automatiquement vrai (étant l'égalité $0 = 0$).

Pour le deuxième on choisit $k \in \{1,\dots,n\}$ et y comme

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = |x_k| \qquad \text{et} \qquad y_k = 1 \quad , \quad i\neq k \Rightarrow y_i = 0 \quad ,$$

ce qui nous donne

$$|\langle x,y\rangle| = |x_k| = \|x\|_\infty \quad ,$$

et donc $\sup_{\|y\|_1=1} |\langle x,y\rangle| \geqslant \|x\|_\infty$ comme voulu.

Pour l'égalité $\|A^*\|_{1,1} = \|A\|_{\infty,\infty}$ on calcule :

$$\begin{aligned}\|A^*\|_{1,1} &= \sup_{\|x\|_1=1} \|A^*x\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1}\ \sup_{\|y\|_\infty=1} |\langle A^*x,y\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|_1=1}\ \sup_{\|y\|_\infty=1} |\langle x,Ay\rangle| = \sup_{\|y\|_\infty=1}\ \sup_{\|x\|_1=1} |\langle Ay,x\rangle| \\ &= \sup_{\|y\|_\infty=1} \|Ay\|_\infty = \|A\|_{\infty,\infty} \quad .\end{aligned}$$

• (vi) : Si $A^* = A$, il existe une base orthonormée $f_1,\dots,f_n$ de $\mathbf{R}^n$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbf{K}$ telle que

$$\forall i = 1,\dots,n \quad : \quad Af_i = \lambda_i\, f_i \quad .$$

Il s'ensuit que pour $x = \sum_{i=1}^n x_i\, f_i$ on a $(\|x\|_2)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$, simplement parce que la base est orthonormée, mais aussi $Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, x_i\, f_i$. On a donc

$$(\|Ax\|_2)^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i\, x_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \big(\max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j|^2\big)\cdot|x_i|^2 = \rho(A)^2\cdot(\|x\|_2)^2 \quad .$$

On en déduit la majoration

$$\|A\|_{2,2} \leqslant \rho(A) \quad .$$

D'autre part, si $k \in \{1, \ldots, n\}$ est tel que $\rho(A) = |\lambda_k|$, alors on a

$$\|Af_k\|_2 = \|\lambda_k\, f_k\|_2 = |\lambda_k| \cdot \|f_k\|_2 = \rho(A)$$

et donc on aura aussi $\|A\|_{2,2} \geqslant \rho(A)$.

- (vii) : En suivant l'indication on a

$$(\,\|Ax\|_2)^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle = |\langle x, A^*Ax\rangle| \quad ,$$

et donc

$$\begin{aligned}(\|A\|_{2,2})^2 &= \sup_{\|x\|_2=1} (\,\|Ax\|_2)^2 = \sup_{\|x\|_2=1} |\langle x, A^*Ax\rangle| \\ &\leqslant \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 \cdot \|A^*Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|A^*Ax\|_2 = \|A^*A\|_{2,2} \quad .\end{aligned}$$

D'autre part, si x est un vecteur propre pour la plus grande valeur propre λ de A^*A (en valeur absolue), on aura

$$(\,\|Ax\|_2)^2 = |\langle x, A^*Ax\rangle| = |\langle x, \lambda x\rangle| = |\lambda| \cdot (\,\|x\|_2)^2 \equiv \rho(A^*A) \cdot (\,\|x\|_2)^2 \quad .$$

Il s'ensuit qu'on a l'inégalité

$$(\,\|A\|_{2,2})^2 \geqslant \rho(A^*A) \quad .$$

Mais A^*A est une matrice hermitienne et donc $\|A^*A\|_{2,2} = \rho(A^*A)$. On a donc

$$\rho(A^*A) \leqslant (\,\|A\|_{2,2})^2 \leqslant \|A^*A\|_{2,2} = \rho(A^*A)$$

comme voulu.

Avec ce résultat on peut confirmer nos calculs dans la question (iii). On a

$$A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \quad ,$$

dont les valeurs propres sont $\lambda = 15 \pm 5\sqrt{5}$. On retrouve donc bien $\|A\|_{2,2} = \sqrt{15 + 5\sqrt{5}}$.

Les solutions de §2

Solution de [16.13]. Une fonction polynomiale est une expression composée de sommes et de produits (les deux finies !) de coordonnées et de constantes. Si on sait qu'une “fonction coordonnée” est linéaire continue, alors ces constituants (coordonnées et constantes) seront des fonctions de classe C^1 [2.8], [2.9]. Avec [2.11] et [2.12] (voir aussi [2.15]) on en déduit qu'une fonction polynomiale est de classe C^1.

Reste donc à montrer qu'une fonction coordonnée est linéaire continue. Pour la linéarité on calcule

$$\begin{aligned}\pi_i(x+\lambda y) &= \pi_i\big((x_1,\ldots,x_n)+\lambda(y_1,\ldots,y_n)\big)\\ &= \pi_i\big((x_1+\lambda y_1,\ldots,x_n+\lambda y_n)\big) = x_i+\lambda y_i = \pi_i(x)+\lambda\pi_i(y) \quad .\end{aligned}$$

Et pour la continuité on fait le calcul

$$\|\pi_i(x)\| = |x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \|x\|_1 \quad .$$

Avec [1.23] on en déduit que π_i est bien continue avec $\|\pi_i\| \leqslant 1$. Ainsi on a montré que π_i est une application linéaire continue, et donc par l'argument ci-dessus, toute fonction polynomiale est de classe C^1.

Solution de [16.14]. La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable avec dérivée $2x$ qui vaut 0 en 0. Ceci suggère que, si f est différentiable, alors sa différentielle sera 0. On commence avec la remarque que l'inégalité $|f(0)| \leqslant \|0\|^2 = 0$ implique qu'on a $f(0) = 0$. Pour la différentielle on essaye de montrer que l'application nulle est bien sa différentielle en 0 par le calcul :

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(h)-f(0)-0\cdot h|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{|f(h)|}{\|h\|} \leqslant \lim_{h\to 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = 0 \quad .$$

Ainsi on a montré que f est différentiable en 0 avec $(Df)(0) = 0$.

Solution de [16.16]. • (i) : Par [1.3] on a en particulier l'inégalité

$$\|f(x)-a\| \geqslant \|f(x)\| - \|a\|$$

et donc

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)-a\| \geqslant \lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| - \|a\| = \infty \quad .$$

Il suffit de prendre le carré pour obtenir $\lim_{\|x\|\to\infty} g(x) = \infty$.

Si on veut montrer cette limite rigoureusement, il faut d'abord donner la définition de la notion $\lim_{\|x\|\to\infty}$, ce qui nous donne pour l'hypothèse $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$ la propriété

$$\forall M>0\ \exists R>0\ \forall x\in\mathbf{R}^2 \quad : \quad \|x\|>R \ \Rightarrow\ \|f(x)\|>M \quad . \tag{17.2}$$

Et il faut en déduire la propriété

$$\forall M'>0\ \exists R'>0\ \forall x\in\mathbf{R}^2 \quad : \quad \|x\|>R' \ \Rightarrow\ \|f(x)-a\|^2>M' \quad . \tag{17.3}$$

Pour le faire on prend “donc” $M' > 0$ arbitraire et on cherche $R' > 0$. En regardant le calcul fait ci-dessus, on invoque (17.2) avec $M = \max(1, M') + \|a\|$ pour obtenir $R > 0$. Alors on pose $R' = R$ et pour x vérifiant $\|x\| > R'$ on a :

$$\|f(x)-a\| \geqslant \|f(x)\| - \|a\| \overset{(17.2)}{>} M - \|a\| = \max(1,M')$$

et donc

$$\|f(x)-a\|^2 > \max(1,M')^2 \geqslant M' \quad ,$$

ce qui montre qu'on a (17.3).

• (ii) : On pose $L = g(0,0)$ (bien que tout autre point que l'origine fera l'affaire aussi bien) et on invoque la définition de $\lim_{\|x\|\to\infty} g(x) = \infty$ pour conclure qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout x vérifiant $\|x\| > M$ on a $g(x) > L$. Il s'ensuit qu'on a bien

$$\inf \{ g(x) \mid x \in \mathbf{R}^2 \} = \inf \{ g(x) \mid x \in \mathbf{R}^2 \ , \ \|x\| \leqslant M \} \ .$$

Pour une preuve rigoureuse, on introduit d'abord les ensembles A et B par

$$A = \{ g(x) \mid x \in \mathbf{R}^2 \} \qquad \text{et} \qquad B = \{ g(x) \mid x \in \mathbf{R}^2 \ , \ \|x\| \leqslant M \}$$

et les réels $I = \inf A$ et $J = \inf B$. L'inclusion $B \subset A$ implique qu'on a l'inégalité $I \leqslant J$. Soit maintenant $a \in A$. Si $a \in B$, alors $a \geqslant J = \inf B$. Et si $a \notin B$, alors il existe $x \in \mathbf{R}^2$, $\|x\| > L$ tel que $a = g(x) > L = g(0,0) \geqslant J$, car $g(0,0) \in B$. Ainsi on a montré que J est un minorant de A et donc $J \leqslant I$. La conclusion est qu'on doit avoir l'égalité $I = J$ comme annoncé.

• (iii) : L'application f est différentiable, donc continue. Par composée la fonction g est aussi continue. D'autre part, l'ensemble $\{ x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| \leqslant M \}$ est une fermé borné, donc un compact. Il s'ensuit que la restriction de la fonction continue g à cet ensemble atteint ses bornes et en particulier il existe $x_o \in \mathbf{R}^2$, $\|x_o\| \leqslant M$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^2 \quad : \quad \|x\| \leqslant M \ \Rightarrow \ g(x) \geqslant g(x_o) \ .$$

Par le résultat de (ii) on en déduit que x_o représente un minimum global de g sur $\mathbf{R}^2$.

• (iv) : Si on définit la fonction $N : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par

$$N(x) = \|x - a\|^2 = \langle x - a, x - a \rangle = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \ ,$$

alors c'est une fonction polynomiale (quadratique), donc de classe C^1 [16.13]. On devine sa différentielle comme

$$\big((DN)(x)\big)(v) = 2 \cdot \langle x - a, v \rangle \ ,$$

et on le montre par la définition de la différentielle :

$$\lim_{v\to 0} \frac{|N(x+v) - N(x) - 2 \cdot \langle x - a, v \rangle|}{\|v\|} = \lim_{v\to 0} \frac{|\langle v, v \rangle|}{\|v\|} = \lim_{v\to 0} \|v\| = 0 \ .$$

De plus, on a l'égalité

$$g(x) = N\big(f(x)\big) = (N \circ f)(x) \ .$$

Il s'ensuit, selon [2.14], que g, comme composée d'applications différentiables, est également différentiable avec

$$\begin{aligned} \big((Dg)(x)\big)(v) &= \Big((DN)\big(f(x)\big)\Big)\Big(\big((Df)(x)\big)(v)\Big) \\ &= 2 \cdot \big\langle f(x) - a, \big((Df)(x)\big)(v) \big\rangle \ . \end{aligned} \tag{17.4}$$

Soit maintenant $v \in \mathbf{R}^2$ et considérons l'application $\gamma_v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$\gamma_v(t) = x_o + tv \ .$$

Avec les mêmes arguments on en déduit que γ est une application de classe C^1 avec

$$\gamma'(t) = v \ .$$

Si on pose maintenant $h = g \circ \gamma$, on peut invoquer [2.16] pour obtenir

$$h'(0) = \Big((Dg)\big(\gamma(0)\big)\Big)\big(\gamma'(0)\big) = \big((Dg)(x_o)\big)(v) \ . \tag{17.5}$$

D'autre part, $h'(0)$ est défini par

$$h'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(x_o + tv) - g(x_o)}{t} \quad .$$

Mais $g(x_o)$ est la valeur minimale de g et donc $h'(0) = 0$.

L'argument précis est comme suit : pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $g(x_o + tv) \geqslant g(x_o)$ par minimalité de $g(x_o)$. En plus on a

$$t > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{g(x_o + tv) - g(x_o)}{t} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to 0, t>0} \frac{g(x_o + tv) - g(x_o)}{t} \geqslant 0$$

et

$$t < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{g(x_o + tv) - g(x_o)}{t} \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to 0, t>0} \frac{g(x_o + tv) - g(x_o)}{t} \leqslant 0 \ .$$

Le fait que la limite $h'(0)$ existe implique que ces deux limites (à gauche et à droite) sont égales et donc ces inégalités impliquent qu'on doit avoir $h'(0) = 0$.

Il s'ensuit, avec (17.5), que $\big((Dg)(x_o)\big)(v) = 0$ pour tout $v \in \mathbf{R}^2$, ce qui veut dire qu'on a $(Dg)(x_o) = 0$. [1] Selon (17.4) on a donc

$$\forall v \in \mathbf{R}^2 \quad : \quad 2 \cdot \big\langle f(x_o) - a, \big((Df)(x_o)\big)(v)\big\rangle = 0 \ .$$

Mais $(Df)(x_o)$ est injective, donc bijective (car on est en dimension $2 < \infty$). Il existe donc $v \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\big((Df)(x_o)\big)(v) = f(x_o) - a \ .$$

Il s'ensuit qu'on a en particulier

$$2 \cdot \|f(x_o) - a\|^2 = 2 \cdot \langle f(x_o) - a, f(x_o) - a\rangle = 0 \ ,$$

ce qui implique qu'on doit avoir $f(x_o) = a$. Étant donné que $a \in \mathbf{R}^2$ était arbitraire, on vient de montrer que f est surjective.

Solution de [16.17]. • (i) : Pour deviner la différentielle de f on calcule $f(x+h)$ et on cherche le terme linéaire en h :

$$\begin{aligned} f(x+h) &\equiv \langle u(x+h), x+h\rangle \\ &\overset{\text{bil. de } \langle\cdot,\cdot\rangle}{=} \langle u(x), x\rangle + \langle u(h), x\rangle + \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), h\rangle \\ &\overset{\text{sym. de } u}{=} \langle u(x), x\rangle + \langle h, u(x)\rangle + \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), h\rangle \\ &\overset{\text{sym. de } \langle\cdot,\cdot\rangle}{=} \langle u(x), x\rangle + 2\,\langle u(x), h\rangle + \langle u(h), h\rangle \ . \end{aligned}$$

Pour montrer que la partie $h \mapsto 2\,\langle u(x), h\rangle$ est bien la différentielle de f au point x, il faut montrer deux choses. D'abord que cette application est linéaire continue et ensuite que la condition pour être la différentielle est satisfaite. Définissons donc l'application $A : E \to \mathbf{R}$ par

$$A(h) = 2\,\langle u(x), h\rangle \ .$$

Alors la linéarité de A est (presque) immédiate (une conséquence de la bilinéarité du produit scalaire) et pour la continuité on calcule :

$$|A(h)| = |2\,\langle u(x), h\rangle| \overset{[1.16],\,[1.17]}{\leqslant} 2 \cdot \|u(x)\| \cdot \|h\| \ ,$$

ce qui montre (à l'aide de [1.23]) que A est continue avec $\|A\| \leqslant 2\,\|u(x)\|$. Pour montrer que ce A est bien la différentielle de f au point x on calcule :

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - A(h)|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{|\langle u(h), h\rangle|}{\|h\|}$$

1. On a ici déjà montré [9.1].

$$\overset{[1.16],\,[1.17]}{\leqslant} \lim_{h\to 0} \frac{\|u(h)\|\cdot\|h\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \|u(h)\| = 0 \quad ,$$

où la dernière égalité est une conséquence immédiate de la continuité de u.

• (ii) : L'application $u = \mathrm{id}$ (ou $u(x) = x$) vérifie les hypothèses (endomorphisme continue symétrique), et pour ce u l'application f est donnée par

$$f(x) = \langle x, x\rangle \quad .$$

Par définition de la norme associée on a donc $f = \ell$, qui est donc différentiable avec

$$\big((D\ell)(x)\big)(h) = 2\,\langle x, h\rangle \quad .$$

• (iii) : L'application $r : y \mapsto \sqrt{y}$ est dérivable/différentiable sur l'ouvert $]0,\infty[$, donc par [2.14] la composée $r\circ\ell$ est différentiable sur E^* (là où $\ell(x) > 0$!) avec

$$\begin{aligned}\big((Dk)(x)\big)(h) &= \Big((Dr)\big(\ell(x)\big)\Big)\Big(\big((D\ell)(x)\big)(h)\Big) \overset{[2.6]}{=} r'\big(\ell(x)\big)\cdot 2\cdot\langle x,h\rangle \\ &= \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|} \quad .\end{aligned}$$

Le noyau $\ker\big((Dk)(x)\big)$ consiste des vecteurs $h\in E$ tels que $\langle x,h\rangle = 0$, c'est-à-dire le sous-espace orthogonal à x.

• (iv) : Si on définit l'application $I : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$ par $I(x) = x^{-1}$, alors I est différentiable/dérivable et par [2.14] et [2.6] la composée $I\circ\ell$ est différentiable avec

$$\begin{aligned}\Big(\big(D(I\circ\ell)\big)(x)\Big)(h) &= \Big((DI)\big(\ell(x)\big)\Big)\Big(\big((D\ell)(x)\big)(h)\Big) = I'\big(\ell(x)\big)\cdot 2\cdot\langle x,h\rangle \\ &= -\frac{2\,\langle x,h\rangle}{\langle x,x\rangle^2} \quad .\end{aligned}$$

Étant donné que l'application g est le quotient de f et ℓ, c'est-à-dire le produit de f avec la composée $I\circ\ell$, on en déduit avec [2.12]

$$\begin{aligned}\big((Dg)(x)\big)(h) &= \frac{\big((Df)(x)\big)(h)}{\ell(x)} + f(x)\cdot\frac{-2\,\langle x,h\rangle}{\langle x,x\rangle^2} \\ &= \frac{2\,\langle u(x),h\rangle}{\langle x,x\rangle} - \frac{2\,\langle u(x),x\rangle\cdot\langle x,h\rangle}{\langle x,x\rangle^2} \quad .\end{aligned}$$

• (v) : Pour qu'on a $(Dg)(x) = 0$, il faut avoir $\big((Dg)(x)\big)(h) = 0$ pour tout $h\in E$. Autrement dit, on doit avoir

$$\langle u(x),h\rangle\cdot\langle x,x\rangle = \langle u(x),x\rangle\cdot\langle x,h\rangle \tag{17.6}$$

pour tout $h\in E$. Si x est vecteur propre de u, alors cette égalité est automatiquement vraie pour tout $h\in E$. Dans l'autre sens, si elle est vraie pour tout vecteur $h\in E$, elle sera vraie en particulier pour le vecteur

$$h_\perp = u(x) - \frac{\langle u(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}\cdot x \quad ,$$

ce qui est la partie de $u(x)$ orthogonal à x : $\langle x,h_\perp\rangle = 0$ (voir [1.15]). Mais on a aussi l'égalité

$$\langle h_\perp,h_\perp\rangle = \left\langle u(x) - \frac{\langle u(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}\cdot x, u(x) - \frac{\langle u(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}\cdot x\right\rangle$$

$$= \langle u(x), u(x)\rangle - \frac{\langle u(x), x\rangle^2}{\langle x, x\rangle} \quad .$$

L'égalité (17.6) se transforme donc en

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u(x), x\rangle \cdot \langle x, h_\perp\rangle = \langle u(x), h_\perp\rangle \cdot \langle x, x\rangle \\ &= \Big(\langle u(x), u(x)\rangle - \frac{\langle u(x), x\rangle^2}{\langle x, x\rangle} \Big) \cdot \langle x, x\rangle = \langle h_\perp, h_\perp\rangle \cdot \langle x, x\rangle \quad . \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'on doit avoir $h_\perp = 0$, ce qui revient à dire qu'on a

$$u(x) = \frac{\langle u(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x \quad ,$$

c'est-à-dire que $u(x)$ est un vecteur propre de u pour la valeur propre $\langle u(x), x\rangle / \langle x, x\rangle$.

Solution de [16.18]. On fixe $x \in E$, on définit l'application $\gamma : \mathbf{R} \to E$ par

$$\gamma(t) = t\, x$$

et on définit l'application $g : \mathbf{R} \to F$ par $g = f \circ \gamma$. L'application γ étant linéaire continue est donc dérivable. Par [2.16] il s'ensuit que g est dérivable en 0 avec

$$g'(0) = \big((Df)(0)\big)(x) \quad .$$

D'autre part, on a l'égalité $g(t) = f\big(\gamma(t)\big) = f(t\,x) = t\,f(x)$, et donc on a forcément l'égalité

$$g'(0) = f(x) \quad .$$

Solution de [16.19]. L'idée de la preuve est qu'on peut majorer le quotient

$$\frac{\big\|f(x+h) - f(x) - \big((Df)(x)\big)(h)\big\|}{\|h\|} \quad ,$$

qu'on peut majorer $\|f(x+h) - f(x)\|$ et qu'on cherche à majorer le quotient $\|\big((Df)(x)\big)(h)\|/\|h\|$. La seule difficulté est qu'on veut majorer ce quotient pour h fixe, tandis que les majorations dont on dispose n'ont un intérêt que quand on fait tendre h vers 0. C'est pourquoi dans la preuve actuelle on introduit un paramètre $t > 0$ arbitraire.

On fixe $h \in E^*$ et on fait le calcul (avec $t > 0$ arbitraire)

$$\begin{aligned} \frac{\|\big((Df)(x)\big)(h)\|}{\|h\|} &= \frac{\|\big((Df)(x)\big)(th)\|}{\|th\|} \\ &\leqslant \frac{\big\|f(x+th) - f(x) - \big((Df)(x)\big)(th)\big\|}{\|th\|} + \frac{\|f(x+th) - f(x)\|}{\|th\|} \\ &\leqslant \frac{\big\|f(x+th) - f(x) - \big((Df)(x)\big)(th)\big\|}{\|th\|} + k \quad . \end{aligned}$$

Le membre de gauche ne dépend pas de $t > 0$ et le membre de droite admet une limite k quand t tend vers 0. Il s'ensuit qu'on doit avoir la majoration

$$\frac{\|\big((Df)(x)\big)(h)\|}{\|h\|} \leqslant k \quad .$$

Avec la définition de $\|(Df)(x)\|$ on en déduit immédiatement qu'on a bien la majoration $\|(Df)(x)\| \leqslant k$.

Pour ceux qui se sentent mal à l'aise avec l'argument donné ci-dessus, voici une version un petit peu plus longue du même argument, mais dit légèrement différemment. On fixe $v \in E$ et on veut montrer l'inégalité $\big\|\big((Df)(x)\big)(v)\big\| \leqslant k \cdot \|v\|$ pour en déduire, avec [1.23], le résultat voulu. L'inégalité étant automatiquement vraie pour $v = 0$, on peut supposer $v \neq 0$. On se donne maintenant $\varepsilon > 0$ et on invoque la définition de la différentielle pour obtenir $\delta > 0$ tel qu'on a l'implication

$$0 < \|h\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x+h) - f(x) - \big((Df)(x)\big)(h)\| < \varepsilon \cdot \|h\| \ .$$

On choisit ensuite $t > 0$ tel que $\|tv\| < \delta$ et on fait le calcul :

$$\begin{aligned}\big\|\big((Df)(x)\big)(tv)\big\| &\leqslant \big\|f(x+tv) - f(x) - \big((Df)(x)\big)(tv)\big\| + \|f(x+tv) - f(x)\| \\ &< \varepsilon \cdot \|tv\| + k \cdot \|(x+tv) - x\| = (k+\varepsilon) \cdot t \cdot \|v\| \ .\end{aligned}$$

En divisant par $t > 0$ on obtient donc l'inégalité ($(Df)(x)$ est linéaire !)

$$\big\|\big((Df)(x)\big)(v)\big\| < (k+\varepsilon) \cdot \|v\| \ .$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit qu'on doit avoir $\big\|\big((Df)(x)\big)(v)\big\| \leqslant k \cdot \|v\|$ et donc $\|(Df)(x)\| \leqslant k$.

Solution de [16.20]. • (i) : Pour $x, y \in \mathbf{R}^n$ et $z \in F$ on a (par définition de l'inf)

$$f(x) \leqslant \|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leqslant \|x - y\| + f(y) \ .$$

En échangeant les rôles de x et y on trouve aussi $f(y) \leqslant \|x-y\| + f(x)$, ce qui nous donne l'inégalité

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\| \ ,$$

ce qui dit que f est 1-lipschitzienne.

• (ii) : Soit $x \in \mathbf{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, alors par définition de f il existe $z_o \in F$ tel que $\|x - z_o\| < f(x) + \varepsilon$. On considère maintenant l'ensemble $G \subset \mathbf{R}^n$ défini comme

$$G = F \cap \overline{B_{f(x)+\varepsilon}(x)} = \{\, z \in F \mid \|x - z\| \leqslant f(x) + \varepsilon \,\} \ .$$

Comme intersection d'un fermé F avec l'ensemble fermé et borné $\overline{B_{f(x)+\varepsilon}(x)}$, G est compact et non-vide, car contenant z_o. On définit maintenant l'application $g : G \to \mathbf{R}$ par $g(z) = \|x - z\|$, qui est de toute évidence continue (la norme est continue). Mais une application continue sur un compact atteint ses bornes, donc il existe en particulier $y \in G$ tel que

$$\forall z \in G \quad : \quad \|x - z\| \geqslant \|x - y\| \ .$$

En plus, pour tout $z \in F \setminus G$ on a

$$z \notin \overline{B_{f(x)+\varepsilon}(x)} \quad \Longrightarrow \quad \|x - z\| > f(x) + \varepsilon > \|x - z_o\| \geqslant \|x - y\| \ .$$

Pour tout $z \in F$ on a donc $\|x - y\| \leqslant \|x - z\|$ et donc $f(x) = \|x - y\|$.

• (iii) : Par [16.19] et le fait que f est 1-lipschitzienne, on a le résultat voulu.

• (iv) : Selon les définitions il faut montrer, pour tout $z \in F$, l'inégalité

$$(1-t) \cdot \|x - y\| \equiv \big\|\big((1-t)x + ty\big) - y\big\| \leqslant \big\|\big((1-t)x + ty\big) - z\big\| \ .$$

Supposons donc (par l'absurde) qu'il existe $z \in F$ tel qu'on a

$$(1-t) \cdot \|x - y\| > \big\|\big((1-t)x + ty\big) - z\big\| \ .$$

Alors on fait le calcul

$$\begin{aligned}\|x - z\| &\leqslant \|x - \big((1-t)x + ty\big)\| + \|\big((1-t)x + ty\big) - z\| \\ &< \|t(y - x)\| + (1-t) \cdot \|x - y\| = \|x - y\| \ .\end{aligned}$$

Ceci contredit la “définition” de y comme le (un) point de F le plus proche de x. Par l'absurde on a donc montré

$$\varphi(t) \equiv f\big((1-t)x + ty\big) \equiv \inf_{z \in F} \ \|\big((1-t)x + ty\big) - z\| = (1-t) \cdot \|x - y\|$$

comme voulu.

- (v) : Selon [2.16] avec $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ on a

$$\varphi'(0) = \big((Df)(x)\big)(y-x)$$

et selon la formule trouvée en (iv) on a

$$\varphi'(0) = -\|x-y\| \quad .$$

Le résultat annoncé en découle immédiatement.

- (vi) : Étant donné que la propriété (pour deux réels a et b)

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geqslant 0 \quad \text{avec égalité si et seulement si } a=b$$

est équivalente à la propriété [2]

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \tfrac{1}{2}\,(a^2+b^2) \quad \text{avec égalité si et seulement si } a=b \quad ,$$

on en déduit que pour $v, w \in \mathbf{R}^n$ avec $v \neq w$ on a l'inégalité stricte

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{v_i+w_i}{2}\right)^2 < \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i^2\right) \quad . \tag{17.7}$$

Supposons maintenant qu'il existe $y_1, y_2 \in F$, $y_1 \neq y_2$ tels que $f(x) = \|x-y_1\| = \|x-y_2\|$. Alors on peut poser

$$v = \frac{x-y_1}{\|x-y_1\|} \qquad \text{et} \qquad w = \frac{x-y_2}{\|x-y_2\|} \quad ,$$

de sorte que $\|v\| = \|w\| = 1$ et $\big((Df)(x)\big)(v) = \big((Df)(x)\big)(w) = 1$. Si on pose $m = \frac{1}{2}(v+w)$, alors on aura $\big((Df)(x)\big)(m) = 1$ par linéarité de $(Df)(x)$, et selon (17.7) on aura l'inégalité stricte

$$\|m\|^2 < \tfrac{1}{2}\big(\,\|v\|^2 + \|w\|^2\,\big) = 1 \quad .$$

Et donc on aura

$$\frac{\big\|\big((Df)(x)\big)(m)\big\|}{\|m\|} > 1 \quad ,$$

ce qui contredit $\|(Df)(x)\| \leqslant 1$. On en déduit qu'on doit avoir $y_1 = y_2$, ce qui montre l'unicité de y.

Solution de [16.21]. • (i) $\Rightarrow$: On suppose que f est convexe et on veut montrer (16.23). Pour cela on commence à introduite quelques ingrédients qui vont nous servir à plusieurs reprises. [3] Pour $a, b \in U$ on définit l'application $\gamma : \mathbf{R} \to E$ par $\gamma(t) = ta + (1-t)b$. Étant continue (et même de classe C^∞), l'ensemble $I = \gamma^{-1}(U) \subset \mathbf{R}$ est un ouvert et, parce que U est convexe, I contient $[0,1]$ et est un intervalle.

La preuve en est facile : pour $s < t$ dans I on a $\gamma(s), \gamma(t) \in U$. Par convexité de U le segment $[\gamma(s), \gamma(t)]$ est donc inclus dans U. Mais on a

$$[\gamma(s), \gamma(t)] \overset{[3.2]}{=} \{\, u\,\gamma(s) + (1-u)\,\gamma(t) \mid u \in [0,1]\,\}$$

---

2. L'interprétation de cette inégalité est que le graphe de la fonction $y = x^2$ est strictement convexe : le segment entre (x_1, x_1^2) et (x_2, x_2^2) est partout strictement au-dessus du graphe, sauf aux extrémités. Une même propriété est vraie pour la fonction $y = |x|^p$ avec $1 < p < \infty$. On peut l'utiliser pour montrer que le résultat de cet exercice reste vrai quand on remplace la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ par la norme $\|\cdot\|_p$ avec $1 < p < \infty$. Mais il est facile de voir que le résultat n'est plus vrai pour la norme $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

3. Ceci est une version épurée de la solution trouvée initialement. La première solution contenait une analyse plus lourde avec plusieurs points sur le segment $[a, b]$.

$$
\begin{aligned}
&= \{\, u\,\big(sa+(1-s)b\big) + (1-u)\,\big(ta+(1-t)b\big) \mid u \in [0,1]\,\} \\
&= \{\, \big(us+(1-u)t\big)\,a + \big(1-\big(us+(1-u)t\big)\big)\,b \mid u \in [0,1]\,\} \\
&= \{\, v\,a + (1-v)\,b \mid v \in [s,t]\,\} = \gamma([s,t]) \ .
\end{aligned}
$$

Ceci montre que $\gamma([s,t]) = [\gamma(s), \gamma(t)] \subset U$ et donc $[s,t] \subset I$. En plus $\gamma(0) = b$ et $\gamma(1) = a$ appartiennent à U, donc $[0,1] \subset I$.

On peut donc définir la fonction $g : I \to \mathbf{R}$ par

$$
g(t) = f\big(\gamma(t)\big) \equiv f\big(ta+(1-t)b\big) \ .
$$

Parce que f est supposée différentiable en $\gamma(t)$, g sera dérivable en t avec

$$
g'(t) \overset{[2.16]}{=} (D_{a-b}f)\big(\gamma(t)\big) \equiv \Big((Df)\big(\gamma(t)\big)\Big)(a-b) \ . \tag{17.8}
$$

La propriété (16.22) de convexité de f se traduit en termes de la fonction g comme :

$$
g(t) \leqslant t\,g(1) + (1-t)\,g(0) \quad \iff \quad \frac{g(t)-g(0)}{t} \leqslant g(1) - g(0) \ .
$$

g étant dérivable en $t = 0$ on peut passer à la limite pour obtenir l'inégalité

$$
\Big((Df)(b)\Big)(a-b) \overset{(17.8)}{\equiv} g'(0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{g(t)-g(0)}{t} \leqslant g(1) - g(0) = f(a) - f(b) \ ,
$$

ce qui est (équivalent à) (16.23) (en remplaçant $x = a$ et $y = b$).

• (i) $\Leftarrow$: Soit $a, b \in U$ et $t \in [0,1]$ et appliquons (16.23) avec $y = ta + (1-t)b$ et les deux cas $x = a$ et $x = b$. On obtient alors les deux inégalités

$$
f(a) \geqslant f(y) + \big((Df)(y)\big)(a-y) \qquad \text{et} \qquad f(b) \geqslant f(y) + \big((Df)(y)\big)(b-y) \ .
$$

Sachant que $t, 1-t \geqslant 0$, on en déduit l'inégalité

$$
\begin{aligned}
t\,f(a) + (1-t)\,f(b) \geqslant t \cdot \Big(f(y) + \big((Df)(y)\big)(a-y)\Big) \\
+ (1-t) \cdot \Big(f(y) + \big((Df)(y)\big)(b-y)\Big) \\
= f(y) + \big((Df)(y)\big)\big(ta+(1-t)b-y\big) = f(y) \ ,
\end{aligned}
$$

ce qui est la propriété (16.22) de la convexité de f.

• (ii) $\Rightarrow$: Dans le cas $E = \mathbf{R}$ on a l'égalité $\big((Df)(x)\big)(v) = f'(x) \cdot v$ [2.6]. L'inégalité (16.23) s'écrit donc comme

$$
f(x) - f(y) \geqslant f'(y) \cdot (x-y) \ .
$$

Mais si on échange les rôles de x et y on obtient

$$
f(y) - f(x) \geqslant f'(x) \cdot (y-x) \ .
$$

Combinant les deux on obtient donc l'inégalité

$$
f'(x) \cdot (y-x) \leqslant f'(y) \cdot (y-x)
$$

et donc en particulier l'implication

$$
x < y \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) \leqslant f'(y) \ ,
$$

ce qui montre que f' est une fonction croissante.

• (ii) $\Leftarrow$: Fixons $y \in U$ et considérons la fonction

$$
g(x) = f(x) - f(y) - f'(y) \cdot (x-y) \ ,
$$

qui est dérivable avec $g'(x) = f'(x) - f'(y)$. Mais f' est une fonction croissante et $g'(y) = 0$. Il s'ensuit qu'on a les inégalités

$$x < y \quad \Rightarrow \quad g'(x) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad x > y \quad \Rightarrow \quad g'(x) \geqslant 0 \ .$$

La fonction g est donc croissante à droite de y et décroissante à gauche. Elle présente donc un minimum global en $x = y$, c'est-à-dire

$$\forall x \in U \quad : \quad g(x) \geqslant g(y) \ ,$$

ce qui est équivalente à [16.23].

- (iii) : Selon (16.23) on a pour tout $x \in U$ l'inégalité

$$f(x) \geqslant f(a) + \big((Df)(a)\big)(x-a) = f(a) \ ,$$

ce qui montre que f présente un minimum global en a.

Solution de [16.24]. • (i) : Une fonction $f \in E$ étant de classe C^1, on peut appliquer le théorème fondamental de l'analyse (intégration) qui nous donne $f(t) - f(0) = \int_0^x f'(x)\ \mathrm{d}x$. Avec $f(0) = 0$ on peut donc faire le calcul :

$$|f(t)| = \Big| \int_0^x f'(x)\ \mathrm{d}x \Big| \leqslant \int_0^x |f'(x)|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^x \|f\|_E\ \mathrm{d}x = t \cdot \|f\|_E \ .$$

Une toute autre façon d'obtenir le même résultat est d'utiliser l'égalité des accroissements finis classique appliquée à la fonction $f : [0,t] \to \mathbf{R}$, qui dit qu'il existe $c \in \,]0,t[$ tel que

$$f(t) - f(0) = f'(c) \cdot (t-0)$$

et donc, parce que $f(0) = 0$,

$$|f(t)| = |f'(c)| \cdot t \leqslant \sup_{c \in [0,1]} |f'(c)| \cdot t \equiv \|f\|_E \cdot t \ .$$

- (ii) : Les propriétés (i), (iii) et (iv) d'une norme [1.2] étant (quasiment) évidentes, il nous reste à montrer l'implication $\|f\|_E = 0 \ \Rightarrow \ f = 0$. Mais par (i) ci-dessus on a les implications

$$\|f\|_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall t \in [0,1] \ : \ 0 \leqslant |f(t)| \leqslant \|f\|_E \cdot t = 0 \cdot t = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \ .$$

- (iii) : La linéarité de l'application $\mathcal{D}$ étant connue, il suffit de montrer la continuité. Les définitions des normes nous donne immédiatement

$$\|\mathcal{D}(f)\|_F = \|f'\|_F = \|f'\|_\infty = \|f\|_E \ .$$

Par [1.23] on en déduit que $\mathcal{D}$ est continue avec $\|\mathcal{D}\| \leqslant 1$, mais la définition de le norme d'opérateur nous donne immédiatement

$$\|\mathcal{D}\| = \sup_{f \in E^*} \frac{\|\mathcal{D}(f)\|_F}{\|f\|_E} = \sup_{f \in E^*} 1 = 1 \ .$$

- (iv) : On commence avec le calcul

$$\begin{aligned} \|B_g(h)\|_F &= \sup_{t \in [0,1]} \big|\big(B_g(h)\big)(t)\big| = \sup_{t \in [0,1]} |g(t) \cdot h(t)| \\ &\leqslant \Big(\sup_{t \in [0,1]} |g(t)| \Big) \cdot \Big(\sup_{t \in [0,1]} |h(t)| \Big) = \|g\|_F \cdot \Big(\sup_{t \in [0,1]} |h(t)| \Big) \ . \end{aligned}$$

Ensuite on remarque qu'on a, par (i) ci-dessus, la majoration

$$|h(t)| \leqslant \|h\|_E \cdot t \leqslant \|h\|_E \qquad \Longrightarrow \qquad \|h\|_F \leqslant \|h\|_E \quad . \tag{17.9}$$

En combinant les deux résultats, on a donc montré l'inégalité

$$\|B_g(h)\|_F \leqslant \|g\|_F \cdot \|h\|_E \quad ,$$

ce qui montre (avec [1.23]), que B_g est continue avec $\|B_g\| \leqslant \|g\|_F$.

- (v) : Par définition de la différentielle, on cherche $A \in \mathcal{L}(E; F)$ tel que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\Phi(f+h) - \Phi(f) - A(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0 \quad .$$

On calcule donc :

$$\begin{aligned}\Phi(f+h) - \Phi(f) &= (f+h)' + (f+h)^2 - f' - f^2 = h' + 2fh + h^2 \\ &= \mathcal{D}(h) + 2\, B_f(h) + h^2 \quad ,\end{aligned}$$

ce qui a un sens, car toute fonction $f \in E$ appartient automatiquement à F, donc B_f est bien définie comme application linéaire sur E. Ce calcul suggère de définir l'application $A \in \mathcal{L}(E; F)$ comme $A = \mathcal{D} + 2 \cdot B_f$, ce qui appartient bien à $\mathcal{L}(E; F)$ par (iii) et (iv) ci-dessus. Reste donc à montrer que ce A convient. Pour cela on commence avec le calcul

$$\begin{aligned}\|\Phi(f+h) - \Phi(f) - A(h)\|_F &= \|h^2\|_F = \sup_{t\in[0,1]} |h(t)^2| \\ &\leqslant \big(\sup_{t\in[0,1]} |h(t)|\big)^2 = \big(\|h\|_F\big)^2 \overset{(17.9)}{\leqslant} \big(\|h\|_E\big)^2 \quad .\end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'on peut faire la majoration

$$\frac{\|\Phi(f+h) - \Phi(f) - A(h)\|_F}{\|h\|_E} = \frac{\|h^2\|_F}{\|h\|_E} \leqslant \|h\|_E \quad ,$$

d'où on déduit immédiatement qu'on a bien

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\Phi(f+h) - \Phi(f) - A(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0 \quad .$$

On a donc montré que Φ est différentiable au point $f \in E$ avec $(D\Phi)(f) = \mathcal{D} + 2\, B_f$.

- (vi) : On vérifie aisément que l'application $\Psi : E \to \mathcal{L}(E; F)$ définie par

$$\Psi(f) = B_f$$

est linéaire. En plus, on a montré en (iv), en combinaison avec (17.9), qu'on a, pour $f \in E$, les majorations

$$\|\Psi(f)\| \equiv \|B_f\| \leqslant \|f\|_F \leqslant \|f\|_E \quad ,$$

ce qui montre (toujours avec [1.23]) que Ψ est continue avec $\|\psi\| \leqslant 1$. Une application constante (à savoir l'application $f \mapsto \mathcal{D}$) étant continue, il s'ensuit que $D\Phi$ est continue et donc Φ est de classe C^1.

Solution de [16.26]. • (i) : Pour montrer que U est un ouvert, il suffit de montrer que pour tout $f \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B_r(f) \subset U$.

Pour trouver le $r > 0$ qui convient on commence à la fin. Si $g \in B_r(f)$, alors on a

$$\|g - f\|_\infty \equiv \sup_{x\in[a,b]} |g(x) - f(x)| < r \quad \Rightarrow \quad \forall x \in [a, b] : g(x) \in \,]f(x) - r, f(x) + r[\quad .$$

On sait que f ne s'annule jamais et on veut s'assurer que g ne s'annule jamais. Il suffit donc de trouver un r tel que 0 ne se trouve jamais dans l'intervalle $]f(x)-r, f(x)+r[$. Ceci veut dire qu'on cherche $r>0$ tel que $|f(x)| \geqslant r$ pour tout x. Pour le trouver on a besoin de la compacité de $[a,b]$. D'autre part, l'existence d'un $r>0$ tel que $|f(x)| \geqslant r$ pour tout $x \in [a,b]$ est aussi nécessaire ! Car supposons que pour tout $r>0$ il existe $c \in [a,b]$ tel que $|f(c)| < r$. Alors la fonction $g(x) = f(x) - f(c)$ appartient à $B_r(f)$ et $g(c) = 0$, montrant qu'il n'existe pas un $r>0$ tel que $B_r(f) \subset U$ et donc que U n'est pas un ouvert.

Pour $f \in U$ fixée, on considère la fonction $h : [a,b] \to [0,\infty[$ définie par $h(x) = |f(x)|$, ce qui est une fonction continue sur un espace compact. Donc h atteint ses bornes et en particulier il existe $c \in [a,b]$ tel que $h(x) \geqslant h(c)$ pour tout $x \in [a,b]$. Mais f et donc h ne s'annule jamais, donc $r = h(c) > 0$. Si maintenant on prend $g \in B_r(f)$, alors pour tout $x \in [a,b]$ on aura

$$|g(x) - f(x)| \leqslant \|g-f\|_\infty < r \quad .$$

Si on avait $g(x) = 0$, alors ceci voudrait dire qu'on a

$$|f(x)| = |g(x) - f(x)| \leqslant \|g-f\|_\infty < r \quad ,$$

ce qui est en contradiction avec la définition de r comme la valeur minimale de $|f(x)| = h(x)$ sur $[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$ on a donc $g(x) \neq 0$, c'est-à-dire $g \in U$, montrant l'inclusion $B_r(f) \subset U$ et donc que U est un ouvert.

Finalement pour montrer que $\Phi(f)$ appartient à E, on constate que $f(x)$ ne s'annule jamais, donc que $\Phi(f) : [a,b] \to \mathbf{R}$ existe en tant que fonction (on ne divise pas par zéro). Mais dans ce cas, si f est continue, alors $\Phi(f)$ est aussi continue, donc $\Phi(f) \in E$. Et parce que f ne s'annule jamais, $1/f$ non plus, et donc on a même $\Phi(f) \in U$.

• (ii) : La linéarité de $\hat{B}(f)$ étant (presque) évident, on se concentre sur la continuité et on calcule

$$\begin{aligned}\|\big(\hat{B}(f)\big)(g)\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} |f(x)\cdot g(x)| \\ &\leqslant \big(\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\big)\cdot\big(\sup_{x\in[a,b]} |g(x)|\big) = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty\end{aligned}$$

et donc par [1.23] il s'ensuit que $\hat{B}(f)$ est continue avec $\|\hat{B}(f)\| \leqslant \|f\|_\infty$.

• (iii) : Pour montrer que l'expression donnée pour $(D\Phi)(f)$ est bien la différentielle de Φ au point $f \in E$, il faut montrer qu'on a

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\big\|\Phi(f+h) - \Phi(f) + \big(\hat{B}(f^{-2})\big)(h)\big\|_\infty}{\|h\|_\infty} &\equiv \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_\infty}\cdot\left\|\frac{1}{f+h} - \frac{1}{f} + \frac{h}{f^2}\right\|_\infty \\ \equiv \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_\infty}\cdot\left\|\frac{h^2}{f^2(f+h)}\right\|_\infty &= 0 \quad .\end{aligned}$$

Pour le faire il faut donc calculer/majorer

$$\left\|\frac{h^2}{f^2(f+h)}\right\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \frac{|h(x)|^2}{|f(x)|^2\cdot|f(x)+h(x)|}$$

de sorte qu'on "compense" plus que le dénominateur $\|h\|_\infty$ dans notre limite $h \to 0$. Le problème "majeur" est la majoration (plutôt minoration) du dénominateur $f^2(f+h)$. Pour le faire on constate que $|f|$ est une fonction continue sur un intervalle fermé et borné donc compact. Les bornes sont donc atteintes, ce qui veut dire qu'il existe $c_-, c_+ \in [a,b]$ tel que

$$\forall x \in [a,b] \quad : \quad m = |f(c_-)| \leqslant |f(x)| \leqslant |f(c_+)| = M \ .$$

Mais f ne s'annule pas, donc $m = |f(c_-)| > 0$. Il s'ensuit qu'on a les implications

$$\begin{aligned} \|h\|_\infty < \delta \quad &\Rightarrow \quad \forall x \in [a,b] : |h(x)| < \delta \\ &\Rightarrow \quad \forall x \in [a,b] : m - \delta < |f(x) + h(x)| < M + \delta \ . \end{aligned}$$

Si on rajoute à cette observation la remarque évidente qu'on a $|h(x)| \leqslant \|h\|_\infty$, on obtient l'implication

$$\|h\|_\infty < \tfrac{1}{2}\, m \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{|h(x)|^2}{|f(x)|^2 \cdot |f(x) + h(x)|} \leqslant \frac{\big(\|h\|_\infty\big)^2}{m^2 \cdot \frac{1}{2}\, m} \ .$$

Autrement dit, on a l'implication

$$\|h\|_\infty < \tfrac{1}{2}\, m \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\|h\|_\infty} \cdot \left\| \frac{h^2}{f^2(f+h)} \right\|_\infty \leqslant \frac{\|h\|_\infty}{m^2 \cdot \frac{1}{2}\, m} \ .$$

Il s'ensuit immédiatement (par le théorème des gendarmes) qu'on a bien

$$\lim_{h \to 0} \frac{\big\| \Phi(f+h) - \Phi(f) + \big(\hat{B}(f^{-2})\big)(h) \big\|_\infty}{\|h\|_\infty} = 0 \ ,$$

ce qui montre que $\hat{B}(f^{-2})$ est bien la différentielle $(D\Phi)(f)$ de Φ au point f.

Solution de [16.28]. • (i) : Selon [1.46] on a l'inclusion $\ell^1 \subset \ell^2$ et, pour $x \in \ell^1$, l'inégalité $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$. On a donc aussi l'inégalité

$$f(x) = \big(\|x\|_2\big)^2 \leqslant \big(\|x\|_1\big)^2 < \infty \ ,$$

ce qui montre que f est bien définie.

• (ii) : On commence à calculer le candidat pour la différentielle en regardant $f(a+h) - f(a)$:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n + h_n|^2 - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (2a_n\, h_n + h_n^2) \ .$$

Ceci suggère comme différentielle l'application $(Df)(a)$ définie par

$$\big((Df)(a)\big)(h) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\, a_n\, h_n \ . \tag{17.10}$$

Pour le confirmer il faut d'abord établir que cette application est bien linéaire et continue de ℓ^1 dans $\mathbf{R}$ et ensuite qu'elle vérifie la condition de la différentielle. La linéarité de $(Df)(a)$ étant (presque) évident, on s'intéresse donc à sa continuité. Pour cela on remarque qu'on a (de nouveau selon [1.46]) l'inégalité $\sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n| \equiv \|a\|_\infty \leqslant \|a\|_1$. On peut donc faire la majoration

$$\begin{aligned} \big|\big((Df)(a)\big)(h)\big| \equiv \Big| \sum_{n=0}^{\infty} 2\, a_n\, h_n \Big| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 2\, |a_n| \cdot |h_n| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 2\, \|a\|_\infty \cdot |h_n| = 2\, \|a\|_\infty \cdot \|h\|_1 \leqslant 2\, \|a\|_1 \cdot \|h\|_1 \ . \end{aligned}$$

Avec [1.23] on en déduit que $(Df)(a)$ est continue avec $\|(Df)(a)\| \leqslant \|a\|_\infty$.

Pour montrer qu'elle vérifie la condition de la différentielle on fait d'abord la remarque que notre calcul ci-dessus nous donne entre autres le résultat

$$|f(x)| = \Big|\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2\Big| = \big|\big((Df)(x)\big)(x)\big| \leqslant 2\left(\|x\|_1\right)^2 \ .$$

On peut donc faire le calcul

$$\lim_{h\to 0}\frac{\big|f(a+h)-f(a)-\big((Df)(a)\big)(h)\big|}{\|h\|_1} = \lim_{h\to 0}\frac{|f(h)|}{\|h\|_1} \leqslant \lim_{h\to 0}\frac{\left(\|h\|_1\right)^2}{\|h\|_1} = 0 \ .$$

Une fois qu'on sait que (17.10) est la différentielle, on attaque la question de la continuité de Df. Pour cela on remarque que l'application $Df : \ell^1 \to \mathcal{L}(\ell^1; \mathbf{R})$ est linéaire :

$$\begin{aligned}\big((Df)(a+\lambda b)\big)(h) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2\,(a_n+\lambda b_n)\,h_n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\,a_n\,h_n + \lambda\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 2\,b_n\,h_n \\ &= \big((Df)(a)\big)(h) + \lambda\cdot\big((Df)(b)\big)(h) \ .\end{aligned}$$

En plus, on a montré ci-dessus l'inégalité $\|(Df)(a)\| \leqslant \|a\|_1$, ce qui montre (toujours avec [1.23]) que Df est continue avec $\|Df\| \leqslant 1$.[4]

Solution de [16.29]. • (i) : Pour montrer que φ est bien définie, il faut montrer que la suite v_n appartient bien à ℓ^1. Pour le faire on fait appel a un résultat concernant les séries généralisées et/ou de la théorie de l'intégration de Lebesgue[5]. Ce résultat dit essentiellement la chose suivante :

— *Soit I un ensemble d'indices et pour chaque $i \in I$ soit $a_i \in \mathbf{C}$ un nombre complexe. S'il existe une façon de calculer la somme $\sum_{i\in I}|a_i|$ qui donne un résultat fini, alors toute façon de calculer $\sum_{i\in I} a_i$ donnera le même résultat (qui sera en plus fini).* —

Pour montrer que $\varphi(u)$ appartient à ℓ^1, il faut donc montrer qu'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big|\sum_{p=0}^{n} u_p\,u_{n-p}\Big| < \infty \ .$$

On fait maintenant d'abord le calcul préliminaire

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big|\sum_{p=0}^{n} u_p\,u_{n-p}\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}|u_p\,u_{n-p}| \ , \tag{17.11}$$

ce qui suggère de considérer la série généralisée

$$\sum_{(n,p)\in\mathbf{N}^2\,,\,p\leqslant n}|u_p\,u_{n-p}| \ .$$

Pour cette série on fait le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\sum_{(n,p)\in\mathbf{N}^2\,,\,p\leqslant n}|u_p\,u_{n-p}| &= \sum_{(p,k)\in\mathbf{N}^2}|u_p\,u_k| = \sum_{p\in\mathbf{N}}\ \sum_{k\in\mathbf{N}}|u_p\,u_k| \\ &= \Big(\sum_{p\in\mathbf{N}}|u_p|\Big)\cdot\Big(\sum_{k\in\mathbf{N}}|u_k|\Big) = \|u\|_1\cdot\|u\|_1 < \infty \ .\end{aligned}$$

4. Cet exercice devient un petit peu plus facile avec [7.3] ou [8.3], une fois qu'on sait que l'application $\Phi : \ell^1 \times \ell^1 \to \mathbf{R}$ définie par $\Phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\,y_n$ est une application bilinéaire continue (dont la preuve est implicite dans la solution présentée ici).

5. C'est le théorème de Fubini pour une mesure de comptage.

Pour la première égalité on a utilisé simplement le fait que l'application

$$(n,p) \mapsto (p,k) \equiv (p, n-p) \quad \text{avec réciproque} \quad (p,k) \mapsto (n,p) \equiv (p+k, p)$$

est une bijection entre les deux ensembles

$$I = \{\, (n,p) \in \mathbf{N}^2 \mid p \leqslant n \,\} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{N}^2 \ .$$

Pour la deuxième égalité on a utilisé le résultat concernant les séries généralisées en utilisant une façon particulière de calculer cette série indexée par $\mathbf{N}^2$, à savoir en le considérant comme une série double. Étant donné que le résultat est fini, on conclut qu'on peut calculer cette série comme on veut et en particulier qu'on a l'égalité

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \sum_{p=0}^{n} |u_p| = \sum_{p\in\mathbf{N}} \sum_{k\in\mathbf{N}} |u_p\, u_k| \ ,$$

ce qui permet donc (avec (17.11)) de conclure que $\varphi(u)$ appartient bien à l'espace ℓ^1. Nota Bene : on a utilisé ici une rigueur extrême dans la rédaction. Normalement on enchaîne la majoration (17.11) avec le calcul de cette série qui nous donne l'égalité avec $\|u\|_1 \cdot \|u\|_1$. Par contre, si on veut rigoureusement appliquer notre résultat sur les séries, on est obligé de séparer le calcul comme on l'a fait ci-dessus.

- (ii) : Pour "deviner" la différentielle de φ, on calcule d'abord $\varphi(u+h) = w$:

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} (u+h)_p\, (u+h)_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} u_p\, u_{n-p} + 2\sum_{p=0}^{n} u_p\, h_{n-p} + \sum_{p=0}^{n} h_p\, h_{n-p} \ .$$

La partie linéaire en h est le terme $2\sum_{p=0}^{n} u_p\, h_{n-p}$, ce qui suggère que φ est bien différentiable avec différentielle

$$\big((D\varphi)(u)\big)(h) = z \qquad \text{avec} \qquad z_n = 2\sum_{p=0}^{n} u_p\, h_{n-p} \ .$$

Pour montrer que c'est bien ainsi, il faut donc montrer que cette application A définie par

$$A(h) = z \qquad \text{avec} \qquad z_n = 2\sum_{p=0}^{n} u_p\, h_{n-p}$$

est bien une application linéaire continue de ℓ^1 dans ℓ^1.

La première chose à montrer est donc que z appartient bien à ℓ^1. Pour cela on fait un calcul analogue au calcul qui justifie que φ est bien définie :

$$(17.12) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = 2\sum_{n=0}^{\infty} \Big| \sum_{p=0}^{n} u_p\, h_{n-p} \Big| \leqslant 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} |u_p\, h_{n-p}|$$
$$= 2\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |u_p\, h_k| = 2 \cdot \|u\|_1 \cdot \|h\|_1 < \infty \ .$$

Une fois qu'on sait que z appartient bien à ℓ^1, la preuve que l'application $A : \ell^1 \to \ell^1$, $A(h) = z$ est linéaire est immédiate. Mais la majoration (17.12) nous donne aussi l'inégalité

$$\|z\|_1 \equiv \|A(h)\|_1 \leqslant 2 \cdot \|u\|_1 \cdot \|h\|_1 \ ,$$

ce qui montre que A est continue avec $\|A\| \leqslant 2 \cdot \|u\|_1$ [1.23]. Ainsi on a montré que φ est différentiable au point $u \in \ell^1$ avec $(D\varphi)(u) = A$. Pour montrer que $D\varphi$:

$\ell^1 \to \mathcal{L}(\ell^1;\ell^1)$ est continue, on commence avec la remarque que cette application est linéaire : si on pose

$$\big((D\varphi)(u)\big)(h) = x \text{ avec } x_n = \sum_{p=0}^{n} u_p\, h_{n-p}$$

$$\big((D\varphi)(v)\big)(h) = y \text{ avec } y_n = \sum_{p=0}^{n} v_p\, h_{n-p}$$

$$\big((D\varphi)(u+\lambda v)\big)(h) = z \text{ avec } z_n = \sum_{p=0}^{n} (u_p + \lambda v_p)\, h_{n-p} \quad ,$$

alors on a

$$z_n = \sum_{p=0}^{n} (u_p + \lambda v_p)\, h_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} u_p\, h_{n-p} + \lambda \cdot \sum_{p=0}^{n} v_p\, h_{n-p} = x_n + \lambda y_n \quad ,$$

ce qui montre la linéarité :

$$\forall h \in \ell^1 : \big((D\varphi)(u+\lambda v)\big)(h) = \big((D\varphi)(u)\big)(h) + \lambda\, \big((D\varphi)(v)\big)(h) \quad ,$$

c'est-à-dire $(D\varphi)(u+\lambda v) = (D\varphi)(u) + \lambda\,(D\varphi)(v)$. Ensuite on rappelle qu'on vient de montrer l'inégalité

$$\|(D\varphi)(u)\| \leqslant 2 \cdot \|u\|_1 \quad .$$

Et donc de nouveau avec [1.23] on en déduit que $D\varphi$ est continue avec $\|D\varphi\| \leqslant 2$.

Les solutions de §3

Solution de [16.30]. Considérons l'application $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ donnée par $f(x) = (\cos x, \sin x)$. Alors on a

$$\big((Df)(x)\big)(h) = \big((Df)(x)\big)(1) \cdot h = f'(x) \cdot h = (-\sin x, \cos x) \cdot h \quad .$$

S'il existait une égalité des accroissements finis, il devrait exister un $c \in\ ]0, 2\pi[$ tel que

$$(0, 0) = f(2\pi) - f(0) = f'(c) \cdot (2\pi - 0) = 2\pi \cdot (-\sin c, \cos c) \quad .$$

Mais ceci nous donne les deux équations $\sin c = 0$ et $\cos c = 0$, ce qui est impossible. Un tel c n'existe donc pas et une égalité des accroissements ne peut pas exister.

Solution de [16.31]. • (i) : Parce que U est convexe, le segment $[x, y]$ est inclus dans U pour tout $x, y \in U$. Et parce que f est différentiable sur U, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis [3.6] pour conclure qu'on a la majoration

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \sup_{z \in\ ]x,y[} \|(Df)(z)\| \cdot \|x - y\| \leqslant k \cdot \|x - y\| \quad ,$$

où la dernière majoration est une conséquence directe de l'hypothèse que Df est majoré par k. Ainsi on a montré que f est k-lipschitzienne.

• (ii) : Soit $a \in U$, alors il existe, par définition d'un ouvert, $r > 0$ tel que $B_r(a) \subset U$. Et parce que Df est continue, il existe, pour $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in U \quad : \quad \|x - a\| < \varepsilon \ \Rightarrow\ \|(Df)(x) - (Df)(a)\| < 1 \quad .$$

Si on pose $V = B_{\min(r,\delta)}(a)$, alors V est un voisinage ouvert et convexe de a contenu dans U. De plus, pour tout $x \in V$ on a la majoration

$$\|(Df)(x)\| \leqslant \|(Df)(x) - (Df)(a)\| + \|(Df)(a)\| < \|(Df)(a)\| + 1 \quad .$$

Sur V la différentielle est donc majorée par $\|(Df)(a)\| + 1$, ce qui permet d'appliquer le résultat de (i) et de conclure que f est lipschitzienne de rapport $\|(Df)(a)\| + 1$.

Solution de [16.32]. • (i) : Pour déterminer la différentielle on fait d'abord un développement limité :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \frac12\big(\cos(x+h) - \sin(y+k)\big) \\ \frac12\big(\sin(x+h) - \cos(y+k)\big)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac12\big(\cos(x) - \sin(y)\big) \\ \frac12\big(\sin(x) - \cos(y)\big)\end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \frac12\big(-h\sin(x) - k\cos(y)\big) \\ \frac12\big(h\cos(x) + k\sin(y)\big)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h\varepsilon_1(h) + k\varepsilon_2(k) \\ h\varepsilon_3(h) + k\varepsilon_4(k)\end{pmatrix} \quad ,\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_i(x) = 0$. Ce calcul suggère qu'on a

$$\big((Df)(x, y)\big)(h, k) = \begin{pmatrix} \frac12\big(-h\sin(x) - k\cos(y)\big) \\ \frac12\big(h\cos(x) + k\sin(y)\big)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac12\sin x & -\frac12\cos y \\ \frac12\cos x & \frac12\sin y\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k\end{pmatrix} \quad ,$$

ou encore

$$(Df)(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac12\sin x & -\frac12\cos y \\ \frac12\cos x & \frac12\sin y\end{pmatrix} \quad . \tag{17.13}$$

Pour le montrer rigoureusement on calcule donc, en utilisant la norme $\|\cdot\|_\infty$ au lieu de la norme euclidienne donnée au départ, ce qui est autorisé par [2.4] :

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\big\|f(x+h,y+k)-f(x,y)-\big((Df)(x,y)\big)(h,k)\big\|_\infty}{\|(h,k)\|_\infty} \\
&\qquad = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left\|\begin{pmatrix} h\varepsilon_1(h)+k\varepsilon_2(k) \\ h\varepsilon_3(h)+k\varepsilon_4(k)\end{pmatrix}\right\|_\infty}{\|(h,k)\|_\infty} \\
&\qquad = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\max\big(\,|h\varepsilon_1(h)+k\varepsilon_2(k)|\,,\,|h\varepsilon_3(h)+k\varepsilon_4(k)|\,\big)}{\|(h,k)\|_\infty} \\
&\qquad \leqslant \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\max\big(\,|h|\cdot|\varepsilon_1(h)|+|k|\cdot|\varepsilon_2(k)|\,,\,|h|\cdot|\varepsilon_3(h)|+|k|\cdot|\varepsilon_4(k)|\,\big)}{\|(h,k)\|_\infty} \\
&\qquad \leqslant \lim_{(h,k)\to(0,0)} \max\big(\,|\varepsilon_1(h)|+|\varepsilon_2(k)|\,,\,|\varepsilon_3(h)|+|\varepsilon_4(k)|\,\big) = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Ainsi on a montré que (17.13) est effectivement la différentielle de f au point (x,y) (rappelons que toute application linéaire entre deux espaces de dimension finie est automatiquement continue).

Une fois qu'on dispose de la notion de dérivée partielle et des résultats [5.12] ou [5.14] qui nous dit quand on peut les utiliser pour reconstituer la différentielle, le calcul de la différentielle devient nettement plus simple. Car il “suffit” de faire les deux observations suivantes : (1) la matrice des dérivées partielles de f est donnée par

$$\begin{pmatrix} -\frac12\,\sin x & \frac12\,\cos x \\ -\frac12\,\cos y & \frac12\,\sin y \end{pmatrix}$$

et (2) ces dérivées partielles sont continues (en (x,y)). On en déduit avec [5.14] que f est différentiable et que la matrice de sa différentielle est la matrice des dérivées partielles.

Pour estimer la norme de $(Df)(x,y)$, on fait d'abord la remarque que tout vecteur $(h,k)\in\mathbf{R}^2$ (muni de la norme euclidienne qui est maintenant obligatoire) s'écrit comme

$$(h,k) = \|(h,k)\|\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi) \equiv \sqrt{h^2+k^2}\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi) \quad .$$

Ensuite on fait le calcul :

$$\begin{aligned}
\|(Df)(a)\| &= \sup_{(h,k)\in(\mathbf{R}^2)^*} \frac{\big((DF)(a)\big)(h,k)}{\|(h,k)\|} \\
&= \sup_{(h,k)\in(\mathbf{R}^2)^*} \frac{\big\|\big(-\frac12\,h\,\sin x+\frac12\,k\,\cos x\,,\,-\frac12\,h\,\cos y+\frac12\,k\,\sin y\big)\big\|}{\|(h,k)\|} \\
&= \sup_{\varphi\in\mathbf{R}} \big\|\tfrac12\cdot\big(-\cos\varphi\,\sin x+\sin\varphi\,\cos x\,,\,-\cos\varphi\,\cos y+\sin\varphi\,\sin y\big)\big\| \\
&= \tfrac12\cdot\sup_{\varphi\in\mathbf{R}} \big\|\big(\sin(\varphi-x)\,,\,-\cos(\varphi+y)\big)\big\| \leqslant \tfrac12\cdot\sqrt2 \quad .
\end{aligned}$$

• (ii) : Selon l'inégalité des accroissements finis [3.6] on a, pour tout $a,b\in\mathbf{R}^2$, la majoration

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \sup_{z\in\mathbf{R}^2}\|(Df)(z)\|\cdot\|b-a\| \leqslant \tfrac12\sqrt2\cdot\|b-a\| \quad ,$$

ce qui montre que f est contractante de rapport $\sqrt2/2$. Si on pose $z_n=(x_n,y_n)\in\mathbf{R}^2$, alors on a $z_{n+1}=f(z_n)$. Par la preuve du théorème du point fixe [1.38] on en déduit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l'unique point fixe (x_o, y_o) de f. Si on calcule $\|(x_o, y_o)\|$ on trouve avec le fait que c'est un point fixe de f :

$$(x_o, y_o) = f(x_o, y_o) \quad \Rightarrow \quad x_o^2 + y_o^2 = \tfrac{1}{2}\big(1 - \sin(x_o + y_o)\big) \ .$$

on en déduit immédiatement qu'on a $\|(x_o, y_o)\| \leqslant 1$.

Solution de [16.34]. • (i) : Pour déterminer la différentielle de f on calcule directement

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x,y) &= \begin{pmatrix} 2xh + h^2 - k \\ 2xh + h^2 + 2yk + k^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^2 \\ h^2 + k^2 \end{pmatrix} \quad , \end{aligned}$$

ce qui suggère fortement qu'on a

$$(Df)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \quad . \tag{17.14}$$

Pour le montrer rigoureusement on utilise la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{R}^2$ et on applique la définition de la différentielle :

$$\begin{aligned} &\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\big\| f(x+h, y+k) - f(x,y) - \big((Df)(x,y)\big)(h,k)\big\|_\infty}{\|(h,k)\|_\infty} \\ &\qquad = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left\| \begin{pmatrix} h^2 \\ h^2+k^2 \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\|(h,k)\|_\infty} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\max(h^2, h^2+k^2)}{\|(h,k)\|_\infty} \\ &\qquad \leqslant \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2\cdot\big(\|(h,k)\|_\infty\big)^2}{\|(h,k)\|_\infty} = 0 \ . \end{aligned}$$

Ainsi on a montré que (17.14) est bien la différentielle de f au point (x,y) (toute application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie est continue). Ensuite on remarque que les composantes de cette matrice (de taille 2×2) sont des fonctions continues. L'application $Df : \mathbf{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2) \cong \mathbf{R}^4$ est donc continue, ce qui veut dire que f est de classe C^1.

Une fois qu'on dispose de la notion de dérivée partielle et du résultat [5.14], on peut simplifier l'argument énormément comme suit. Les deux composantes de f sont formées par des sommes et produits de fonctions de classe C^1 (les coordonnées), donc par [2.11], [2.12] et [5.14] ces composantes sont de classe C^1. Par [5.5] f est donc de classe C^1.

• (ii) : L'application g est la composée de f avec elle-même et f est de classe C^1. Par [2.14] g l'est donc aussi : d'abord elle est différentiable, et ensuite sa différentielle est continue comme composée et produit (matricielle) de fonctions continues. De plus, la matrice de sa différentielle est donnée par

$$\begin{aligned} \text{matrice}\big((Dg)(x,y)\big) &= \text{matrice}\Big((Df)\big(f(x,y)\big)\Big) \cdot \text{matrice}\big((Df)(x,y)\big) \\ &= \begin{pmatrix} 2(x^2-y) & -1 \\ 2(x^2-y) & 2(x^2+y^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x(x^2-y) - 2x & -2x^2 \\ 4x(x^2-y) + 4x(x^2+y^2) & -2(x^2-y) + 4y(x^2+y^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x(2x^2-1-2y) & -2x^2 \\ 4x(2x^2+y^2-y) & 2y(2x^2+2y^2+1)-2x^2 \end{pmatrix} \ .$$

• (iii) : Il est immédiat qu'on a $(Dg)(0,0) = \mathbf{0}$. Par continuité de Dg (en $(0,0)$) on en déduit qu'il existe $\delta' > 0$ tel qu'on a

$$\|(x,y)-(0,0)\| < \delta' \qquad \Rightarrow \qquad \|(Dg)(x,y)-(Dg)(0,0)\| < \tfrac{1}{2} \ .$$

En posant $\delta = \delta'/2$ on aura donc certainement l'implication

$$\|(x,y)\| \leqslant \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|(Dg)(x,y)\| \leqslant \tfrac{1}{2} \ .$$

On pourrait même prendre $\delta = \delta'$, mais alors il faut argumenter une tout petit peu plus avec la continuité et les inégalités larges pour justifier le résultat. La façon dont on a choisi δ évite cela.

• (iv) : Selon l'inégalité des accroissements finis [3.6] on a, pour tout $a, b \in \overline{B_\delta(0,0)}$ (un ensemble convexe !), la majoration

$$\|g(b)-g(a)\| \leqslant \sup_{z \in \overline{B_\delta(0,0)}} \|(Dg)(z)\| \cdot \|b-a\| \leqslant \tfrac{1}{2} \cdot \|b-a\| \ ,$$

ce qui montre que g est contractante de rapport $\frac{1}{2}$. Si on applique ce résultat avec $a = 0$ et donc $g(a) = 0$, on obtient

$$b \in \overline{B_\delta(0,0)} \quad \Leftrightarrow \quad \|v\| \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad \|g(b)\| \leqslant \tfrac{1}{2} \cdot \|b\| < \delta \quad \Rightarrow \quad g(b) \in \overline{B_\delta(0,0)} \ ,$$

ce qui montre que g envoie $\overline{B_\delta(0,0)}$ sur lui-même. Selon le théorème du point fixe [1.38] on en déduit que g admet un unique point fixe de $\overline{B_\delta(0,0)}$ (ce qui est bien un fermé dans un espace complet). D'autre part il est immédiat que le point $(0,0)$ est bien un point fixe de g ; c'est donc cet unique point fixe.

Solution de [16.35]. • (i) : Soit $p \in \mathbf{R}^2$ et notons $x_n = F^n(p)$, $n \in \mathbf{N}$ la suite associée. Alors la suite $y_n = x_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$ est une suite extraite (sous-suite) de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On nous demande donc de montrer qu'on a l'équivalence $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Étant donné que $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite, l'implication directe est immédiate : toute sous-suite d'une suite convergente converge aussi vers la même limite. Mais en général la réciproque est fausse : si une suite extraite converge, on ne peut pas conclure que la suite initiale converge. L'ingrédient clé qui fait que c'est vrai dans ce cas précis est que notre sous-suite n'a pas de "trous" à partir d'un certain moment (ici donc à partir du rang 1). La preuve formelle passe par la définition de limite.

$$\text{On sait : } \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geqslant N : \|y_n\| < \varepsilon$$
$$\text{et on veut montrer : } \forall \varepsilon' > 0 \ \exists N' \ \forall n' \geqslant N' : \|x_{n'}\| < \varepsilon' \ .$$

Prenons donc $\varepsilon' > 0$, alors pour $\varepsilon = \varepsilon'$ la donnée nous donne l'existence d'un N tel qu'on a l'implication $n \geqslant N \Rightarrow \|y_n\| < \varepsilon$. On a donc l'implication

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_{n+1}\| < \varepsilon' \ .$$

Si on pose $N' = N+1$ on aura donc les implications

$$n' \geqslant N' = N+1 \quad \Longrightarrow \quad n = n'-1 \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \|x_{n'}\| = \|x_{n+1}\| < \varepsilon' \ ,$$

ce qu'il est ce qu'on cherchait à montrer.

• (ii) : Si on calcule la matrice de $(DF)(x,y)$ on trouve facilement

$$\text{matrice}\big((DF)(x,y)\big) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \ .$$

Les calculs sont quasiment identiques aux calculs faits dans la solution de [16.34]. Voici quelques détails de ce calcul :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|F(x+h,y+k)-F(x,y)-\big((DF)(x,y)\big)(h,k)\|_\infty}{\|(h,k)\|_\infty} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left\|\begin{pmatrix} h^2+k^2 \\ k^2 \end{pmatrix}\right\|_\infty}{\|(h,k)\|_\infty}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\max(h^2+k^2,k^2)}{\|(h,k)\|_\infty} \leqslant \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2\cdot\big(\|(h,k)\|_\infty\big)^2}{\|(h,k)\|_\infty} = 0 \ .$$

Les éléments de matrice étant des fonctions continues, DF est une application continue, donc l'application $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x,y) = \|(DF)(x,y)\|$$

est aussi continue. De plus, $(DF)(0,0) = \mathbf{0}$ et donc $g(0,0) = 0$. Par définition de la continuité de g en $(0,0)$ (avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$) il existe donc $\delta > 0$ tel qu'on a l'implication

$$\|(x,y)\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|(DF)(x,y)\| < \tfrac{1}{2} \ .$$

Par l'inégalité des accroissements finis [3.6] on en déduit l'implication

$$\|p\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|F(p)-F(0,0)\| \leqslant \|p\|\cdot\sup_{z\in I}\|(DF)(z)\| \leqslant \tfrac{1}{2}\cdot\|p\| \ ,$$

où I désigne le segment ouvert entre l'origine $(0,0)$ et le point p, un segment qui est contenu complètement dans $B_\delta(0)$, justifiant la dernière majoration. (Nota Bene : bien que pour tout $z \in B_\delta(0)$ on a l'inégalité stricte $\|(DF)(z)\| < \frac{1}{2}$, l'utilisation du sup nous "oblige" de mettre l'inégalité large dans cette dernière majoration.) On a en particulier l'implication

$$\|p\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|F(p)\| \leqslant \tfrac{1}{2}\cdot\|p\| < \delta \ .$$

On en déduit, par récurrence, qu'on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'implication :

$$\|p\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad F^n(p) \in B_\delta(0) \quad \text{et} \quad \|F^n(p)\| \leqslant 2^{-n}\cdot\|p\| \ .$$

Pour tout $p \in B_\delta(0)$ on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} F^n(p) = 0$, ce qui montre l'inclusion $B_\delta(0) \subset \Omega$.

• (iii) : Ici on demande de montrer deux choses : d'abord l'existence, pour un $p \in \Omega$ donné, d'un k tel que $p \in (F^k)^{-1}\big(B_\delta(0)\big)$, mais aussi l'inclusion $(F^k)^{-1}\big(B_\delta(0)\big) \subset \Omega$.

Si on a $p \in \Omega$, alors par définition on a $\lim_{n\to\infty} F^n(p) = 0$, ce qui équivaut $\lim_{n\to\infty} \|F^n(p)\| = 0$. Par définition de limite il existe donc (pour $\varepsilon = \delta$) un $N \in \mathbf{N}$ tel qu'on a l'implication

$$k \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad \|F^n(p)\| < \delta \ .$$

En particulier pour $k = N$ on aura $F^k(p) \in B_\delta(0)$, c'est-à-dire $p \in (F^k)^{-1}\big(B_\delta(0)\big)$.

Pour l'inclusion on prend $p \in (F^k)^{-1}\big(B_\delta(0)\big)$, ce qui veut dire qu'on a $F^k(p) \in B_\delta \subset \Omega$. Mais dans la question (i) on a montré l'équivalence $p \in \Omega \Leftrightarrow F(p) \in \Omega$. Par récurrence on en déduit, pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'équivalence $p \in \Omega \Leftrightarrow F^k(p) \in \Omega$. Et donc pour notre $p \in (F^k)^{-1}\big(B_\delta(0)\big)$ il s'ensuit qu'on a aussi $p \in \Omega$, montrant l'inclusion $(F^k)^{-1}\big(B_\delta(0)\big) \subset \Omega$.

On a donc montré que pour tout $p \in \Omega$ il existe un voisinage ouvert $(F^k)^{-1}\big(B_\delta(0)\big)$ (car F^k est continue) de p contenu dans Ω, ce qui montre que Ω est un ouvert.

• (iv) : Il est immédiat qu'on a $F(tx,ty) = t^2 \cdot F(x,y)$. Par récurrence on en déduit qu'on a $F^n(tx,ty) = t^{2^n} F^n(x,y)$. Il s'ensuit que pour $(x,y) \in \Omega$ et $|t| \leqslant 1$ on a

$$\lim_{n\to\infty} F^n(tx,ty) = \lim_{n\to\infty} t^{2^n} \cdot F^n(x,y) = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire $(tx,ty) \in \Omega$. Par conséquent, pour tout $p \in \Omega$ le segment $[0,p]$ entre l'origine et p est contenu dans Ω. Il y a maintenant (au moins) deux arguments différents pour en déduire que Ω est connexe. Le premier dit que Ω est "donc" la réunion de tous les segments $[0,p]$ avec $p \in \Omega$, que tous ces segments sont connexe (comme image d'un intervalle par une application continue) et qu'ils ont tous l'origine en commun. Donc (par un théorème de topologie) leur réunion est connexe. Le deuxième remarque que chaque point $p \in \Omega$ est relié à l'origine par un chemin continue et donc qu'on peut relier deux point arbitraire de Ω par un chemin continue (en passant par l'origine). Donc Ω est connexe par arcs, donc connexe.

Solution de [16.36]. • (i) : Soit $h > 0$ tel qu'on a l'inclusion $J \equiv [t_o - h, t_o + h] \subset I$ (ce qui est toujours possible car I est un ouvert). Alors par [1.31], [2.6] et [3.6] on peut faire les majorations pour $t \in J = [t_o - h, t_o + h]$:

$$\begin{aligned} \|g(t)\| \equiv \|g(t) - g(t_o)\| &\leqslant \sup_{x\in J} \|g'(x)\| \cdot |t - t_o| \\ &\leqslant k \cdot \sup_{x\in J} \|g(x)\| \cdot |t - t_o| \leqslant k \cdot \sup_{x\in J} \|g(x)\| \cdot h \quad . \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité

$$\sup_{x\in J} \|g(x)\| \leqslant hk \cdot \sup_{x\in J} \|g(x)\| \quad .$$

Pour $h < k^{-1}$, ceci n'est possible que si $\sup_{x\in J} \|g(x)\| = 0$, c'est-à-dire que g doit être nulle sur l'intervalle $J = [t_o - h, t_o + h]$.

Considérons maintenant l'ensemble $Z = \{\, x \in I \mid g(x) = 0 \,\}$. Alors par hypothèse Z n'est pas vide et parce que g est continue, c'est un fermé. Mais pour tout $t_o \in Z$ il existe $h > 0$ tel que g est nulle sur $]t_o - h, t_o + h[$ et donc Z est aussi un ouvert. Un intervalle étant connexe, on en déduit qu'on doit avoir $Z = I$ et donc g est identiquement nulle sur I.

• (ii) : Soit y_1 et y_2 deux solutions du système différentiel. Alors on définit l'application $g : I \to \mathbf{R}^n$ par

$$g(t) = y_1(t) - y_2(t) \quad .$$

Par hypothèse on a donc $g(t_o) = 0$. Mais on a aussi la majoration

$$\begin{aligned} \|g'(t)\| = \|y_1'(t) - y_2'(t)\| &= \big\|f\big(t, y_1(t)\big) - f\big(t, y_2(t)\big)\big\| \\ &\leqslant k \cdot \|y_1(t) - y_2(t)\| = k \cdot \|g(t)\| \quad . \end{aligned}$$

On vérifie donc les hypothèse de la première partie, ce qui nous permet de conclure que g est identiquement nulle sur I et donc que les deux solutions coïncident.

Solution de [16.37]. • (i) : Par hypothèse de la convergence uniforme sur U il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$\sup_{z\in U} \|(Df_n)(z) - g(z)\| < \varepsilon \quad .$$

Pour $n, m \geqslant N$ et $x, y \in U$ on a donc $[x, y] \subset U$ (U est convexe) et

$$\begin{aligned}\|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)\| &\overset{[3.6]}{\leqslant} \sup_{z\in U}\big\|\big(D(f_n - f_m)\big)(z)\big\| \cdot \|x - y\| \\ &\leqslant \big(\sup_{z\in U}\|(Df_n)(z) - g(z)\| + \sup_{z\in U}\|g(z) - (Df_m)(z)\|\big) \cdot \|x - y\| \\ &< 2\varepsilon \cdot \|x - y\| \quad .\end{aligned}$$

• (ii) : Par l'hypothèse (a) la suite $f_n(a)$ est de Cauchy, donc il existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n, m \geqslant N_0$ on a

$$\|f_n(a) - f_m(a)\| < \varepsilon \quad .$$

Si on pose $N_1 = \max(N, N_0)$, alors pour $n, m \geqslant N_1$ on a

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - f_m(x)\| &\leqslant \|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a)\| + \|f_n(a) - f_m(a)\| \\ &\overset{\text{(i)}}{<} (2\,\|x - a\| + 1) \cdot \varepsilon \quad .\end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in U$ fixe, la suite $f_n(x)$ est une suite de Cauchy. Étant donné que F est complet, il existe donc $f(x) \in F$ tel que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Si V est une partie bornée de U, alors il existe $R > 0$ tel que $V \subset B_R(a)$. On a donc pour tout $x \in V \subset B_R(a)$ et tout $n, m \geqslant N_1$ la majoration

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < (2R + 1) \cdot \varepsilon \quad .$$

En prenant la limite $m \to \infty$, la continuité de la norme nous donne pour tout $n \geqslant N_1$

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leqslant (2R + 1) \cdot \varepsilon \quad \text{et donc} \quad \sup_{x\in V}\|f_n(x) - f(x)\| \leqslant (2R + 1) \cdot \varepsilon \quad ,$$

ce qui montre que la convergence est uniforme sur V.

• (iii) : Par (i) et son raisonnement on a en particulier

$$\|(Df_N)(x) - g(x)\| < \varepsilon$$

et pour tout $n \geqslant N$:

$$\|(f_n - f_N)(x + h) - (f_n - f_N)(x)\| < 2\varepsilon\,\|h\| \quad .$$

Par passage à la limite $n \to \infty$ on a donc aussi

$$\|(f - f_N)(x + h) - (f - f_N)(x)\| \leqslant 2\varepsilon\,\|h\| \quad .$$

Mais f_N est différentiable en x, donc il existe $\delta > 0$ tel qu'on a l'implication

$$\|h\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f_N(x + h) - f_N(x) - (Df_N)(x)(h)\| < \varepsilon \cdot \|h\| \quad .$$

On a donc, pour $\|h\| < \delta$, les majorations

$$\begin{aligned}&\|f(x + h) - f(x) - g(x)(h)\| \\ &\quad\leqslant \|(f - f_N)(x + h) - (f - f_N)(x)\| \\ &\qquad + \|f_N(x + h) - f_N(x) - (Df_N)(x)(h)\| \\ &\qquad\quad + \|(Df_N)(x)(h) - g(x)(h)\| \\ &\quad\overset{[1.26]}{<} 2\varepsilon \cdot \|h\| + \varepsilon \cdot \|h\| + \|(Df_N)(x) - g(x)\| \cdot \|h\| < 4\varepsilon \cdot \|h\| \quad .\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que f est différentiable en x avec $(Df)(x) = g(x)$.

• (iv) : Soit $b \in C$ arbitraire. Alors par hypothèse il existe un voisinage ouvert V de b sur lequel la suite Df_n converge uniformément vers g. Il existe donc $r > 0$ tel que $B_r(b) \subset V$ et en particulier $B_r(b)$ est un ouvert convexe borné sur lequel la suite

Df_n converge uniformément vers g et qui contient un point où la suite f_n converge (à savoir b). On peut donc appliquer le résultat de (ii) (en remplaçant a par b) et conclure qu'il existe une fonction différentiable $f : B_r(b) \to F$ ayant les propriétés que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, que $Df = g$ et que f_n converge uniformément vers g sur $B_r(b)$ (étant borné).

Les trois conclusions souhaitées en découlent. D'abord qu'on a $B_r(b) \subset C$ (car pour chaque $x \in B_r(b)$ on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$), ce qui montre que C est ouvert. Ensuite que la fonction $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, qui est définie sur C par définition de C, est différentiable en chaque point $b \in C$ avec $(Df)(b) = g(b)$. Et finalement que chaque point b admet un voisinage ouvert $B_r(b)$ sur lequel la convergence de la suite f_n vers f est uniforme.

• (v) : Soit $b \in U \setminus C$. Alors par hypothèse il existe un voisinage ouvert V de b sur lequel la suite Df_n converge uniformément vers g. Il existe donc $r > 0$ tel que $B_r(b) \subset V$ et en particulier $B_r(b)$ est un ouvert convexe sur lequel la suite Df_n converge uniformément vers g. Si $B_r(b)$ contient un point où la suite f_n converge, alors on conclut comme ci-dessus à l'aide de (ii) qu'on doit avoir $B_r(b) \subset C$, ce qui contredit l'hypothèse $b \notin C$. On a donc $B_r(b) \subset U \setminus C$, ce qui montre que $U \setminus C$ est aussi un ouvert. L'ensemble C est donc un ouvert *et* un fermé de U et C n'est pas vide car contenant a. Par connexité de U on a donc $C = U$.

• (vi) : Ceci est un résultat classique qui dit que la limite localement uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. Ici il s'agit de la suite (extraite) $g_k = Df_{n_k}$ qui converge localement uniformément vers g. Pour montrer la continuité de g (ce qui est équivalent à montrer que f est de classe C^1), on raisonne comme suit.

Prenons $\varepsilon > 0$ et $x \in U$ arbitraire. Alors par hypothèse il existe $r > 0$ tel que la suite g_k converge uniformément vers g sur $B_r(x) \subset U$. Il existe donc $K \in \mathbf{N}$ tel que (en particulier)

$$\sup_{y\in B_r(x)} \|g_K(y) - g(y)\| < \varepsilon \quad .$$

Mais g_K est continue, donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in B_\delta(x) \cap U : \|g_K(y) - g_K(x)\| < \varepsilon \quad .$$

Et donc pour tout $y \in U$ vérifiant $\|y - x\| < \min(r, \delta)$ on a donc

$$\|g(y) - g(x)\| \leqslant \|g(y) - g_K(y)\| + \|g_K(y) - g_K(x)\| + \|g_K(x) - g(x)\| < 3\varepsilon \quad .$$

La continuité de g en découle immédiatement.

Solution de [16.38]. • (i) : Prenons $x, y \in B_r(a)\setminus\{a\}$, alors, la boule étant convexe, le segment $[x, y]$ est inclus dans $B_r(a)$. Par contre, il faut distinguer les cas $a \in [x, y]$ et $a \notin [x, y]$. Dans le cas $a \notin [x, y]$ on a donc $[x, y] \subset B_r(a) \setminus \{a\}$ ce qui nous permet d'appliquer l'inégalité des accroissements finis [3.6] pour conclure qu'on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \sup_{z\in\,]x,y[} \|(Df)(z)\| \cdot \|x - y\| \leqslant k \cdot \|x - y\| \quad .$$

Dans le cas $a \in [x, y]$ on constate d'abord que cela implique que les trois vecteurs $x-y$, $x-a$ et $y-a$ sont colinéaires. Ensuite on choisit $v \in E$ linéairement indépendant de $x - y$ (ce qui est possible car la dimension de E est au moins 2) et on constate qu'on a, pour tout $\varepsilon > 0$, les inclusions

$$[x, a + \varepsilon v]\,,\ [y, a + \varepsilon v] \subset B_r(a) \setminus \{a\} \quad .$$

Car si on avait par exemple $a \in [x, a+\varepsilon v]$, alors il existait $t \in [0,1]$ tel que

$$a = (1-t)x + t(a+\varepsilon v) \qquad \Longrightarrow \qquad (1-t)(a-x) = t\varepsilon v \ ,$$

ce qui est impossible, car $a - x$ et v sont linéairement indépendants (et $t \neq 1$ car $a \neq x$). De nouveau par l'inégalité des accroissements finis [3.6] on a

$$\|f(x) - f(a+\varepsilon v)\| \leqslant k \cdot \|x - (a+\varepsilon v)\| \quad \text{et} \quad \|f(y) - f(a+\varepsilon v)\| \leqslant k \cdot \|y - (a+\varepsilon v)\|$$

et donc

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leqslant \|f(x) - f(a+\varepsilon v)\| + \|f(y) - f(a+\varepsilon v)\| \\ &\leqslant k \cdot \big(\|x - (a+\varepsilon v)\| + \|y - (a+\varepsilon v)\| \big) \\ &\leqslant k \cdot \big(\|x - a\| + \|a - y\| + 2\varepsilon \cdot \|v\| \big) \ . \end{aligned} \tag{17.15}$$

Mais $a \in [x, y]$, donc il existe $t \in [0,1]$ tel que $a = tx + (1-t)y$ et donc

$$\begin{aligned} \|x - a\| + \|y - a\| &= \|(1-t)(x-y)\| + \|t(y-x)\| \\ &= (1-t) \cdot \|x - y\| + t \cdot \|y - x\| = \|x - y\| \ . \end{aligned}$$

De plus, la majoration (17.15) est valable pour tout $\varepsilon > 0$. On peut donc conclure qu'on doit avoir, aussi dans le cas $a \in [x, y]$, la majoration

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k \cdot \|x - y\| \ .$$

• (ii) : Le problème se divise en deux parties : trouver la valeur $\alpha \in F$ et montrer qu'on a $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$. Pour le premier il faut (évidemment) utiliser le fait que F est complet, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy converge. Et donc il faut trouver une suite de Cauchy dans F qui "devrait" converger vers la limite supposé de $f(x)$ quand x tend vers a. Et ensuite il faut montrer que la valeur qu'on a trouvé est bien la limite $\lim_{x \to a} f(x)$.

On choisit arbitrairement $v \in E^*$ et considère la suite $x_n \in B_r(a)$, $n \in \mathbf{N}$ dans E définie par

$$x_n = a + \frac{r}{(n+2) \cdot \|v\|} \cdot v \ .$$

Il est évident que cette suite converge vers a et donc que c'est une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall n, m \geqslant N \quad : \quad \|x_n - y_n\| < \varepsilon \ . \tag{17.16}$$

Ensuite on considère la suite y_n, $n \in \mathbf{N}$ dans F définie par $y_n = f(x_n)$ et on montre que c'est une suite de Cauchy. Pour cela on prend $\varepsilon' > 0$ et on invoque (17.16) avec $\varepsilon = \varepsilon'/k$ pour trouver $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n, m \geqslant N \quad : \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon = \varepsilon'/k \ .$$

On a donc

$$\forall n, m \geqslant N \quad : \quad \|y_n - y_m\| \equiv \|f(x_n) - f(x_m)\| \leqslant k \cdot \|x_n - x_m\| < \varepsilon' \ ,$$

ce qui montre que la suite y_n est bien de Cauchy. Mais F est un espace de Banach, c'est-à-dire complet, donc il existe $\alpha \in F$ tel que $\lim_{n \to \infty} y_n = \alpha$.

Reste à montrer qu'on a $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$. Pour $\varepsilon > 0$ il faut donc trouver $\delta > 0$ tel que

$$\|x - a\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|f(x) - \alpha\| < \varepsilon \ .$$

Pour cela on fait la majoration suggestive suivante (sans aucune justification !)

$$\begin{aligned} \|f(x) - \alpha\| &\leqslant \|f(x) - f(x_n)\| + \|f(x_n) - \alpha\| \\ &\leqslant k \cdot \|x - x_n\| + \|f(x_n) - \alpha\| \\ &\leqslant k \cdot \big(\|x - a\| + \|x_n - a\| \big) + \|f(x_n) - \alpha\| \ . \end{aligned}$$

Ce calcul suggère que, **si** on prend x_n tel que $\|f(x_n) - \alpha\|$ soit petit, disons plus petit que $\varepsilon/2$, et que $\|x_n - a\|$ soit petit, disons plus petit que δ à déterminer, et **si** on prend $\|x - a\|$ également plus petit que δ, alors on aura

$$\|f(x) - \alpha\| < 2k\delta + \varepsilon/2 \ .$$

Il “suffit” donc de choisir $\delta = \varepsilon/(4k)$ pour avoir le résultat souhaité.

Mettons donc en place ce raisonnement correctement. Pour $\varepsilon > 0$ on prend $\delta = \varepsilon/(4k)$. Ensuite on invoque la définition de $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ pour en déduire qu'il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1 \quad : \quad \|x_n - a\| < \delta \ .$$

Et on invoque la définition de $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ pour en déduire qu'il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2 \quad : \quad \|f(x_n) - \alpha\| < \varepsilon/2 \ .$$

Et finalement on choisit $n = \max(N_1, N_2)$ et on fait le calcul :

$$\begin{aligned}\|x - a\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - \alpha\| &\leqslant k \cdot \big(\, \|x - a\| + \|x_n - a\| \,\big) + \|f(x_n) - \alpha\| \\ &< 2k\delta + \varepsilon < 2 = \varepsilon \ ,\end{aligned}$$

ce qui montre qu'on a bien $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$.

- (iii) : Par définition de la limite $\lim_{x\to a}(Df)(x) = A$ il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que

$$\|x - a\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|(Df)(x) - A\| < \varepsilon \ .$$

On peut donc appliquer le résultat de (i) à l'application h et la constante ε pour conclure.

- (iv) : Selon (iii) on a pour tout $x, y \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ la majoration

$$\|g(x) - g(y) - A(x - y)\| \equiv \|h(x) - h(y)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|x - y\| \ .$$

Mais la fonction g est continue en a, donc par passage à la limite $y \to a$ on en déduit la majoration

$$\forall x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \quad : \quad \frac{\|g(x) - g(a) - A(x - a)\|}{\|x - a\|} \leqslant \varepsilon \ .$$

Autrement dit, on a montré :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall 0 < \|h\| < \delta \quad : \quad \frac{\|g(a + h) - g(a) - A(h)\|}{\|h\|} \leqslant \varepsilon \ ,$$

ce qui n'est rien d'autre que l'affirmation

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|g(a + h) - g(a) - A(h)\|}{\|h\|} = 0 \ .$$

Ainsi on a montré que g est différentiable en a avec $(Dg)(a) = A$.

Il y a une autre façon d'obtenir la différentiabilité de g en a qui ne passe pas par la ré-utilisation de (i). Si on applique l'inégalité des accroissements finis (version classique) [3.6] à la fonction $x \mapsto g(x) - A(x)$ définie sur $B_r(a)$ on arrive facilement (comme dans la preuve ci-dessus) au résultat

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad : \quad \|x - a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|g(x) - g(a) - A(x - a)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|x - a\| \ .$$

La différentiabilité de g en a avec $(Dg)(a) = A$ en découle immédiatement.

- (v) : L'exemple le plus simple est la fonction $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = 1 \text{ si } x > 0.$$

On a $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, donc f est bien différentiable sur $\mathbf{R}^*$ avec différentielle bornée (par zéro) et $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ existe. Par contre, f n'est pas continue en $x = 0$, donc certainement pas différentiable en $x = 0$.

D'autre part, si on rajoute, dans le cas $\dim(E) = 1$, la condition $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ existe, alors la conclusion sur la différentiabilité de g en a sera valable : $\lim_{x\to a} (Df)(x) = (Dg)(a)$.

Solution de [16.39]. Il y a deux choses à montrer : d'abord que l'application $A : E \to \mathbf{R}$ définie par

$$A(u) = \int_a^b \varphi'\big(f(x)\big)\, u(x)\ \mathrm{d}x$$

est bien une application linéaire continue de E dans $\mathbf{R}$. Et ensuite que A vérifie la condition pour être la différentielle de G au point f.

Il est (presque) immédiat que A est linéaire, reste donc sa continuité. Pour cela on fait le calcul

$$\begin{aligned}|A(u)| &\leqslant \int_a^b |\,\varphi'\big(f(x)\big)\,| \cdot |u(x)|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |\,\varphi'\big(f(x)\big)\,| \cdot \sup_{y\in[a,b]} |u(y)|\ \mathrm{d}x \\ &= \|u\|_\infty \cdot \int_a^b |\,\varphi'\big(f(x)\big)\,|\ \mathrm{d}x \ .\end{aligned}$$

Les fonctions f et φ étant continue, l'intégrale $\int_a^b |\,\varphi'\big(f(x)\big)\,|\ \mathrm{d}x$ est bien définie, ce qui montre que A est continue avec $\|A\| \leqslant \int_a^b |\,\varphi'\big(f(x)\big)\,|\ \mathrm{d}x$ [1.23].

Montrer que A est la différentielle de G au point f est un petit peu plus délicat. On commence bien évidemment avec le calcul

$$G(f+u) - G(f) - A(u) = \int_a^b \Big(\varphi\big(f(x)+u(x)\big) - \varphi\big(f(x)\big) - \varphi'\big(f(x)\big)\, u(x)\Big)\ \mathrm{d}x \ .$$

La définition de la dérivabilité de φ au point $y \in \mathbf{R}$ nous dit qu'il existe une fonction $R_y(h)$ telle qu'on a

$$\varphi(y+h) - \varphi(y) - \varphi'(y)\, h = h \cdot R_y(h) \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} R_y(h) = 0 \ .$$

Avec la définition d'une limite on en déduit directement la propriété

$$\forall x \in [a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad : \quad |u(x)| < \delta \ \Rightarrow\ \big|R_{f(x)}\big(u(x)\big)\big| < \varepsilon \ .$$

On aurait donc envie de dire que si $\|u\|_\infty < \delta$, alors on peut insérer ceci dans notre formule pour la différentielle et conclure. Malheureusement il y a un petit problème : le δ dépend (peut dépendre) de x !

La solution de ce problème réside dans le fait que jusqu'à maintenant on n'a utilisé que le fait que φ est différentiable, pas qu'elle est de classe C^1. On commence à invoquer l'égalité des accroissements finis [3.3] pour conclure qu'il existe, pour chaque $u \in E$ et chaque $x \in [a,b]$, un $\theta \in\ ]0,1[$ tel que

$$\varphi\big(f(x)+u(x)\big) - \varphi\big(f(x)\big) = \varphi'\big(f(x) + \theta\cdot u(x)\big)\cdot u(x) \ .$$

Ensuit on remarque qu'on évalue φ' dans des points de la forme $f(x)$ ou $f(x)+u(x)$. Étant donné que f est fixe et qu'on veut faire tendre u vers 0, ceci implique qu'on n'évalue φ' que sur l'intervalle (en supposant $\|u\|_\infty < 1$)

$$I \overset{\text{déf.}}{=} \big[\,-(\,\|f\|_\infty + 1)\,,\ \|f\|_\infty + 1\,\big] \ .$$

Et finalement on utilise le fait que φ' est continue pour conclure qu'elle est uniformément continue sur l'intervalle (fermé et borné, c'est-à-dire un compact) I. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall y, z \in I \quad : \quad |y - z| < \delta \ \Rightarrow\ |\varphi'(y) - \varphi'(z)| < \varepsilon \ .$$

On en déduit que, si on a l'inégalité $\|u\|_\infty < \min(\delta, 1)$, alors pour tout $x \in [a, b]$ on aura

$$\begin{aligned} &\big|\,\varphi\big(f(x) + u(x)\big) - \varphi\big(f(x)\big) - \varphi'\big(f(x)\big)\,u(x)\,\big| \\ &\qquad = \big|\,\varphi'\big(f(x) + \theta\cdot u(x)\big) - \varphi'\big(f(x)\big)\,\big| \cdot |u(x)| \leqslant \varepsilon\cdot\|u\|_\infty \ . \end{aligned}$$

Au final on a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ (qu'on suppose plus petit que 1) qui nous permet de faire le raisonnement suivant pour tout u vérifiant $\|u\|_\infty < \delta$:

$$\begin{aligned} &\frac{|G(f+u) - G(f) - A(u)|}{\|u\|_\infty} \\ &\qquad \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b \big|\varphi\big(f(x)+u(x)\big) - \varphi\big(f(x)\big) - \varphi'\big(f(x)\big)\,u(x)\big|\ \mathrm{d}x}{\|u\|_\infty} \\ &\qquad = \frac{\displaystyle\int_a^b \big|\varphi'\big(f(x)+\theta\cdot u(x)\big) - \varphi'\big(f(x)\big)\,\big|\cdot|u(x)|\ \mathrm{d}x}{\|u\|_\infty} \\ &\qquad \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b \varepsilon\cdot\|u\|_\infty\ \mathrm{d}x}{\|u\|_\infty} = (b-a)\cdot\varepsilon \ . \end{aligned}$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a bien

$$\lim_{u\to 0} \frac{|G(f+u) - G(f) - A(u)|}{\|u\|_\infty} = 0$$

comme voulu, montrant que G est différentiable en f avec $(DG)(f) = A$.

Solution de [16.40]. • (i) : Il est immédiat que E est bien un espace vectoriel quand on le muni de l'addition de fonctions et la multiplication par des scalaires. Pour montrer que $\|g\|_E = \|g'\|_\infty$ est bien une norme sur E, on vérifie les propriétés d'une norme. Il est évident qu'on a $\|g\|_E \geqslant 0$. Si on suppose qu'on a $\|g\|_E = 0$, alors par définition on aura g' identiquement nulle, c'est-à-dire que g est constante. Mais $g(a) = 0$, donc g est la fonction nulle comme voulu.

Étant donné que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace des fonctions continues [1.40], [1.42] et que prendre la dérivée est une opération linéaire, on en déduit immédiatement que $\|\cdot\|_E$ vérifie les deux autres propriétés d'une norme.

• (ii) : On peut appliquer le même méthode que dans la solution de l'exercice [16.39], mais on peut aussi s'arranger pour pouvoir l'appliquer directement. Pour le faire, on définit l'espace $E' = C^0(\,[a, b], \mathbf{R}\,)$ des fonctions continues sur $[a, b]$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ [1.40], [1.42]. Ensuite on définit l'application $\Phi : E \to E'$ par $\Phi(g) = g'$. La définition de la norme $\|\cdot\|_E$ nous donne immédiatement $\|\Phi(g)\|_\infty = \|g\|_E$. En plus on vérifie aisément que Φ est bijective ; c'est donc une isomorphisme isométrique entre E et E'.

D'autre part, il est immédiat que la fonction G définie dans l'exercice [16.39] à l'aide de la fonction (de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$) $\varphi(t) = \sqrt{1+(t+c)^2}$ vérifie l'égalité

$$G\big(\Phi(g)\big) = F(g) = \int_a^b \sqrt{1+\big(g'(x)+c\big)^2}\ \mathrm{d}x \ \ .$$

Par la différentielle d'une fonction composée [2.14] et le résultat de [16.39] on obtient donc

$$\begin{aligned}\big((DF)(g)\big)(u) &= \Big((DG)\big(\Phi(g)\big)\Big)\Big(\big((D\Phi)(g)\big)(u)\Big)\\ &= \int_a^b \varphi'\Big(\big(\Phi(g)\big)(x)\Big)\cdot\Big(\big((D\Phi)(g)\big)(u)\Big)(x)\ \mathrm{d}x\\ &= \int_a^b \frac{g'(x)+c}{\sqrt{1+\big(g'(x)+c\big)^2}}\cdot u'(x)\ \mathrm{d}x \ \ ,\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que Φ est linéaire continue et donc qu'on a $(D\Phi)(g) = \Phi$ [2.9].

- (iii) : Pour la fonction φ on a

$$\varphi'(y) = \frac{y+c}{\varphi(y)} \qquad \text{et} \qquad \varphi''(y) = \frac{1}{\varphi(y)^3} > 0 \ \ .$$

La dérivée seconde est donc strictement positive, ce qui implique que φ' est une fonction croissante. Par [16.21.ii] on en déduit que φ est une fonction convexe. On a donc pour $g'(x)$ et $h'(x)$ arbitraire la majoration

$$\varphi\big(h'(x)\big) \geqslant \varphi\big(g'(x)\big) + \varphi'\big(g'(x)\big)\cdot\big(h'(f)-g'(x)\big) \ \ .$$

En intégrant sur l'intervalle $[a,b]$ on obtient la majoration

$$F(h) \geqslant F(g) + \big((DF)(g)\big)(h-g) \ \ ,$$

ce qui veut dire, selon (16.23), que F est une fonction convexe.

- (iv) : Pour la fonction nulle on a

$$\big((DF)(0)\big)(u) = \int_a^b \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\cdot u'(x)\ \mathrm{d}x = \frac{c\cdot\big(u(b)-u(a)\big)}{\sqrt{1+c^2}} \ \ .$$

Mais pour $u \in E$ on a $u(a) = u(b) = 0$ et donc $\big((DF)(0)\big)(u) = 0$ pour tout $u \in E$. Selon [16.21.iii] la fonction F présente donc un minimum global en $g = 0$.

- (v) : On cherche dans l'ensemble $X \subset C^1(\,[a,b];\mathbf{R}\,)$ défini comme

$$X = \{\, f : [a,b] \to \mathbf{R} \mid f \text{ de classe } C^\infty \ ,\ f(a) = \alpha \ ,\ f(b) = \beta \,\}$$

l'élément qui minimise la fonction L. Sauf dans le cas $\alpha = \beta = 0$, cet ensemble X ne sera pas un sous-espace vectoriel. Par contre, il est facile à établir que l'application $\Psi : X \to E$ définie par

$$\Psi(f) : [a,b] \to \mathbf{R} \qquad , \qquad \big(\Psi(f)\big)(x) = f(x) - \alpha - c\cdot(x-a)$$

est une bijection et qu'on a l'égalité

$$L(f) = G\big(\Psi(f)\big) \ \ .$$

La fonction nulle est l'élément qui minimise la fonction G sur E, et donc $f = \Psi^{-1}(0)$ minimisera la fonction L sur X. Un calcul direct montre qu'on a $f(x) = \alpha + c\cdot(x-a)$, ce qui la fonction affine qui relie (a,α) et (b,β).

Solution de [16.41]. Une suite réelle s est décrite tantôt par une application $s : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, tantôt par une collection de réels $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou $s_0, s_1, s_2, \ldots$. L'écriture comme application laisse moins de place pour des doutes sur l'ordre (et le début de la suite), mais l'écriture $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou $s_0, s_1, \ldots$ est parfois plus parlant. Ici on adpotera l'écriture avec indices pour raccourcir (littéralement) les notations. On écrira "donc"

$$x_n \text{ pour } x(n) \qquad \text{et} \qquad F_n(x) \text{ ou } \big(F(x)\big)_n \text{ pour } \big(F(x)\big)(n) \ .$$

• (i) : Pour montrer qu'on a $F(x) \in \ell^1$, il faut montrer l'implication

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |f(x_n)| < \infty \ .$$

On sait qu'on a l'implication

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

et par hypothèse on sait que f est dérivable en 0 avec $f(0) = 0$. Ceci veut dire qu'on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = f'(0) \ .$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$|h| < \delta 0 < \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \frac{f(h)}{h} - f'(0) \right| < 1$$

et donc

$$|h| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(h)| \leqslant |h| \cdot \big(|f'(0)| + 1\big) \ ,$$

où on a dû utiliser l'inégalité large pour inclure le cas $h = 0$. Avec $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ et ce $\delta > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad : \quad n \geqslant N \ \Rightarrow \ |x_n| < \delta \ .$$

Si on met les deux résultats ensemble on a donc l'implication

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x_n)| \leqslant |x_n| \cdot \big(|f'(0)| + 1\big) \ .$$

On peut donc faire le calcul

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |f(x_n)| &= \sum_{n=0}^{N-1} |f(x_n)| + \sum_{n=N}^{\infty} |f(x_n)| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |f(x_n)| + \big(|f'(0)| + 1\big) \cdot \sum_{n=N}^{\infty} |x_n| < \infty \ .
\end{aligned}$$

• (ii) : Pour deviner la différentielle (si elle existe) de F, on calcule une approximation de $F(a + h)$:

$$F_n(x + h) f(x_n + h_n) \approx f(x_n) + h_n\, f'(x_n) \ .$$

On en "déduit" que, si la différentielle $(DF)(a)$ existe, elle est donnée par l'application $A : \ell^1 \to \ell^1$ définie par

$$\big(A(h)\big)(n) \equiv A_n(h) = h_n\, f'(a_n) \ . \tag{17.17}$$

Pour montrer que cette formule définit bien la différentielle $(DF)(a)$, il faut montrer, dans l'ordre que $A(h)$ appartient à ℓ^1, que l'application A est une application linéaire continue et qu'elle vérifie la condition d'être la différentielle.

Parce que f' est continue en 0, il existe $\delta > 0$ (pour le choix $\varepsilon = 1$) tel que

$$|x| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f'(x) - f'(0)| < 1$$

et donc

$$|x| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f'(x)| < |f'(0)| + 1 \ \ .$$

Pour $a \in \ell^1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ et donc, avec notre $\delta > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n| < \delta$$

et donc on a

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad |f'(a_n)| < |f'(0)| + 1 \ \ .$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |h_n\, f'(a_n)| &= \sum_{n=0}^{N-1} |h_n\, f'(a_n)| + \sum_{n=N}^{\infty} |h_n\, f'(a_n)| \\ &< \sum_{n=0}^{N-1} |h_n\, f'(a_n)| + \big(|f'(0)| + 1\big) \cdot \sum_{n=N}^{\infty} |h_n| < \infty \ \ .\end{aligned}$$

Ainsi on a montré que $A(h)$ appartient bien à ℓ^1. Une fois qu'on sait que l'application $A : \ell^1 \to \ell^1$ est bien définie, sa linéarité est quasi-immédiate. Pour sa continuité on regarde bien notre calcul ci-dessus et on pose

$$C = \max\big(\,|f'(a_0)|, \dots, |f'(a_{N-1})|, |f'(0)| + 1\,\big) \ \ .$$

Avec ce $C > 0$ on peut faire le calcul :

$$\begin{aligned}\|A(h)\| = \sum_{n=0}^{\infty} |h_n\, f'(a_n)| &< \sum_{n=0}^{N-1} |h_n\, f'(a_n)| + \big(|f'(0)| + 1\big) \cdot \sum_{n=N}^{\infty} |h_n| \\ &\leqslant C \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |h_n| + C \cdot \sum_{n=N}^{\infty} |h_n| = C \cdot \|h\| \ \ .\end{aligned}$$

Ainsi on a montré (avec [1.23]) que A est continue avec $\|A\| \leqslant C$.

Reste donc la preuve que c'est bien la différentielle de F au point a. Pour cela on calcule d'abord :

$$F(a+h) - F(a) - A(h) = u$$

avec

$$u_n = f(a_n + h_n) - f(a_n) - h_n\, f'(a_n) \ \ .$$

Par l'égalité des accroissements finis [3.3] il existe $\theta_n \in\,]0,1[$ tel que

$$u_n = h_n\,\big(f'(a_n + \theta_n h_n) - f'(a_n)\big) \ \ .$$

Maintenant on invoque le fait que f' est continue sur $\mathbf{R}$, donc continue sur l'intervalle fermé et borné $I = \big[-\|a\| - 1, \|a\| + 1\big]$, et donc elle est uniformément continue sur I. Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in I \qquad : \qquad |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f'(x) - f'(y)| < \varepsilon \ \ .$$

Pour $h \in \ell^1$ vérifiant $\|h\| < \min(\delta, 1)$ on aura donc

$$a_n + \theta_n h_n, a_n \in I \quad \text{et} \quad |\theta_n h_n| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |u_n| < |h_n| \cdot \varepsilon \ \ .$$

Si on ne fait pas trop attention, on aurait défini l'intervalle I comme $I = \big[-\|a\|, \|a\|\,\big]$ pour que chaque a_n appartient à I et on aurait pris $\|h\| < \delta$. Mais si $a_n \in I$ et $\|h\| < \delta$, on n'est pas sûr qu'on aura bien $a_n + \theta_n h_n \in I$. I faut donc élargir I un petit peu (mais de combien ?). On a choisi arbitrairement l'élargissement avec 1. Mais dans ce cas il faut limiter la taille de h_n pour être sûr

qu'on a toujours $a_n + \theta_n h_n \in I$, ce qui explique pourquoi on rajoute le min dans la contrainte pour h sous forme $\|h\| < \min(\delta, 1)$.
Ce résultat nous donne que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta' > 0$ (on prendra $\delta' = \min(\delta, 1)$) tel qu'on ait, pour $\|h\| < \delta'$:

$$\frac{\|F(a+h) - F(a) - A(h)\|}{\|h\|} = \frac{\|u\|}{\|h\|} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |h_n|}{\|h\|} = \varepsilon \quad .$$

Ainsi on a montré qu'on a bien

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|F(a+h) - F(a) - A(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire que A représente bien la différentielle $(DF)(a)$ de F au point a.

• (iii) : Dans la preuve de l'existence de la différentielle $(DF)(a)$ on a d'abord utilisé le fait que f' est continue en 0 pour en déduire (par le biais que f' est bornée dans un voisinage de 0) que l'application est bien définie et ensuite on a utilisé le fait qu'elle est continue partout pour montrer (par le biais que f' est uniformément continue sur un intervalle fermé et borné) que cette application est bien la différentielle. On demande un exemple ou f' existe mais n'est pas continue (partout) de sorte que F n'est pas différentiable (partout). En vu de notre preuve ci-dessus, le défaut d'existence de $(DF)(a)$ peut venir de deux endroits : soit parce que l'application n'existe pas, soit qu'elle n'est pas la différentielle. Mais cette analyse repose sur le fait que l'expression (17.17) devrait être la différentielle, ce qui n'est pas sûr *a priori*.

Notre argumentation sera donc la suivante : on montre d'abord que **si** F est différentiable en $a \in \ell^1$, alors forcément sa différentielle est donnée par (17.17). Ensuite on cherche une fonction f et un éléments $h \in \ell^1$ de sorte que l'application $A(h) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ n'appartient pas à ℓ^1. Cette contradiction (le fait que A ne définit pas une application de ℓ^1 dans ℓ^1) montre que F ne peut pas être différentiable en a.

On suppose donc que F est différentiable en $a \in \ell^1$ et on note $A = (DF)(a)$. Pour $i \in \mathbf{N}$ fixé on définit l'élément $e_{(i)} \in \ell^1$ par

$$e_{(i)}(i) = 1 \qquad \text{et} \qquad e_{(i)}(n) = 0 \quad \text{si } n \neq i$$

et on définit l'application $\gamma : \mathbf{R} \to \ell^1$ par $\gamma(t) = a + te_{(i)}$. Il est immédiat que γ est dérivable avec

$$\gamma'(t) = e_{(i)}$$

et donc selon [2.16] la composée $F \circ \gamma$ est dérivable avec

$$(F \circ \gamma)'(0) = \Big((DF)\big(\gamma(0)\big)\Big)\big(\gamma'(0)\big) = A(e_{(i)}) \quad .$$

D'autre part, on a

$$(F \circ \gamma)'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{F\big(\gamma(t)\big) - F\big(\gamma(0)\big)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{F(a + te_{(i)}) - F(a)}{t} \quad .$$

Maintenant on calcule, pour $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} F_n(a + te_{(i)}) - F_n(a) &= f(a_n + t(e_{(i)})_n) - f(a_n) \\ &= \begin{cases} f(a_i + t) - f(a_i) & \text{si } n = i \\ 0 & \text{si } n \neq i \quad . \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'élément $(F\circ\gamma)'(0) \in \ell^1$ est donné par

$$\big((F\circ\gamma)'(0)\big)_n = \begin{cases} f'(a_i) & \text{si } n = i \\ 0 & \text{si } n \neq i \end{cases} .$$

Autrement dit, on a

$$A(e_{(i)}) = (F\circ\gamma)'(0) = f'(a_i)\cdot e_{(i)} \quad .$$

Pour un élément $h \in \ell^1$ arbitraire on montre facilement qu'on a l'égalité

$$h = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} u_i \cdot e_{(i)} \quad .$$

Par la linéarité et continuité de A (c'est notre hypothèse !) on a donc

$$A(h) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} h_i \cdot A(e_{(i)}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} h_i \cdot f'(a_i)\cdot e_{(i)} \quad .$$

Mais $h_i \cdot f'(a_i)\cdot e_{(i)}$ est l'application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par

$$n \mapsto \begin{cases} h_i\, f'(a_i) & \text{si } n = i \\ 0 & \text{si } n \neq i \end{cases}$$

et donc $A(h)$ est bien l'application décrite par (17.17). Ainsi on a montré que **si** F est différentiable au point $a \in \ell^1$, alors sa différentielle est donnée par (17.17).

L'étape suivante est de trouver $a, h \in \ell^1$ et une fonction f dérivable de sorte que l'application $A(h) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ n'appartient pas à ℓ^1. Si on pense à des éléments de ℓ^1, les exemples qui viennent facilement à l'esprit sont les suites

$$u_n = n^s$$

avec $s < -1$ pour que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} n^s$ converge. (Nota Bene : on triche un petit peu, car pour $n = 0$ l'élement n^s n'existe pas ; il fallait définir $u_n = (n+1)^s$, mais cette écriture est moins jolie et l'idée ne change pas.) On a donc envie de prendre pour a et h de telles suites, mais on veut aussi que la série associée à a suite $h_n\, f'(a_n)$ n'est pas absolument convergente. Pour cela il faut donc que $f'(a_n)$ diverge suffisamment pour “compenser” la convergence de la série h_n. Si on prend l'exemple “simple” de la suite $a_n = h_n = n^{-2}$, alors le “choix” $f'(a_n) = n^2 = 1/a_n$ donnera la série $h_n\, f'(a_n) = 1$ qui est bien divergente. La question devient donc si on peut trouver une fonction f dérivable sur $\mathbf{R}$ avec $f'(n^{-2}) = n^2$ ou encore $f'(x) = 1/x$ pour x proche de 0.

Si on pense à l'exemple classique d'une fonction dérivable qui n'est pas continue donné par

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = x^2\,\sin(x^{-1}) \quad \text{si } x \neq 0 \quad ,$$

alors on a

$$f'(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(x) = 2x\,\sin(x^{-1}) - \cos(x^{-1}) \quad \text{si } x \neq 0 \quad ,$$

ce qui ne remplit pas nos conditions souhaitées (car f' reste bornée dans un voisinage de 0). Mais si on le modifie un tout petit peu en posant

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = x^2\,\sin(x^{-2}) \quad \text{si } x \neq 0 \quad , \tag{17.18}$$

alors on a

$$f'(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(x) = 2x\,\sin(x^{-2}) - 2x^{-1}\,\cos(x^{-2}) \quad \text{si } x \neq 0 \quad .$$

Et si on prend les éléments $a, h \in \ell^1$ définis par

$$a_n = h_n = \frac{1}{n^2\sqrt{2\pi}} \quad , \tag{17.19}$$

alors on aura

$$h_n\, f'(a_n) = \frac{1}{n^2\sqrt{2\pi}} \cdot \Big(\frac{2}{n^2\sqrt{2\pi}} \sin(2\pi\, n^4) - 2\, n^2\sqrt{2\pi}\, \cos(2\pi\, n^4) \Big) = -2 \quad .$$

Ceci montre que, avec le choix (17.18) pour la fonction f, l'application $F : \ell^1 \to \ell^1$ n'est pas différentiable au point a donné par (17.19). Car si elle l'était, on devrait avoir, selon notre analyse ci-dessus,

$$\big((DF)(a)\big)(h) : n \mapsto h_n\, f'(a_n) = -2 \quad ,$$

ce qui n'appartient pas à ℓ^1.

Les solutions de §4

Solution de [16.42]. Selon [4.4], l'application $\mathcal{J}$ est une bijection. De plus, il est immédiat que $\mathcal{J}$ est linéaire. Reste donc à montrer qu'elle est continue et que sa réciproque est aussi continue. Commençons avec la continuité de $\mathcal{J}^{-1}$ et calculons :

$$\begin{aligned}\|A(v)\|_\infty &= \max_i \Big(\Big\| \sum_{j=1}^n A_{ij}(v_j) \Big\| \Big) \leqslant \max_i \sum_{j=1}^n \|A_{ij}\| \cdot \|v_j\| \\ &\leqslant \max_i \sum_{j=1}^n \big(\max_{i,j} \|A_{ij}\| \big) \cdot \big(\max_j \|v_j\| \big) \\ &= n \cdot \|\mathcal{J}(A)\|_\infty \cdot \|v\|_\infty \ .\end{aligned}$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a l'inégalité

$$\|A\| \leqslant n \cdot \|\mathcal{J}(A)\|_\infty \quad \text{ou encore} \quad \|\mathcal{J}^{-1}(B)\| \leqslant n \cdot \|B\| \ ,$$

montrant que $\mathcal{J}^{-1}$ est continue avec $\|\mathcal{J}^{-1}\| \leqslant n$.

Mais on peut aussi faire le calcul

$$\begin{aligned}\|A_{ij}(v_j)\| &\leqslant \max_i(\|A_{ij}(v_j)\|) = \big\| \big(A_{1j}(v_j), \dots, A_{pj}(v_j) \big) \big\|_\infty \\ &= \|A(\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1 \text{ fois}}, v_j, 0, \dots, 0)\|_\infty \\ &\leqslant \|A\| \cdot \|(\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1 \text{ fois}}, v_j, 0, \dots, 0)\|_\infty = \|A\| \cdot \|v_j\| \ ,\end{aligned}$$

montrant qu'on a l'inégalité $\|A_{ij}\| \leqslant \|A\|$. Il s'ensuit qu'on a $\|\mathcal{J}(A)\|_\infty \leqslant \|A\|$, ce qui montre que $\mathcal{J}$ est continue avec $\|\mathcal{J}\| \leqslant 1$.

Les solutions de §5

Solution de [16.43]. Par définition de la dérivée directionnelle on a, en écrivant $v = (h, k)$,

$$(D_v f)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(th, tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(th)^3\,(tk)}{t\big((th)^4 + (tk)^2\big)} = \lim_{t\to 0} \frac{t\,h^3\,k}{t^2\,h^4 + k^2} \ .$$

Bien qu'il faut distinguer le cas $k = 0$ du cas $k \neq 0$, on obtient facilement que dans les deux cas on a $(D_v f)(0,0) = 0$. Avec [5.2] on en déduit que **si** f est différentiable en $(0,0)$, on doit avoir $(Df)(0,0) = 0$. Pour montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$, il suffit donc de montrer qu'on n'a pas

(17.20)
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - 0\cdot(h,k)|}{\|(h,k)\|} \equiv \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h^3\,k|}{(h^4+k^2)\cdot\|(h,k)\|} = 0 \ .$$

Et pour cela, on peut, selon [2.3], utiliser une norme sur $\mathbf{R}^2$ qui nous convient. Si on pose $(h,k) = (t, t^2)$, alors $\lim t \to 0$ implique bien $\lim\,(h,k) \to (0,0)$. Et dans ce cas on aura

$$\lim_{t\to 0} \frac{|h^3\,k|}{(h^4+k^2)\cdot\|(h,k)\|} = \lim_{t\to 0} \frac{|t^3\,t^2|}{(t^4+(t^2)^2)\cdot\|(t,t^2)\|} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2\,\|(1,t)\|} = \frac{1}{2\cdot\|(1,0)\|} \ ,$$

où pour la dernière égalité on a utilisé le fait que la norme est une fonction continue. On ne peut donc pas avoir (17.20), ce qui montre que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Pour la continuité de f en $(0,0)$ on fait les majorations classiques suivantes :

$$\frac{|x^3y|}{x^4+y^2} \leqslant \frac{\big(\sqrt[4]{x^4+y^2}\,\big)^3\cdot\sqrt{y^2+x^4}}{x^4+y^2} = \sqrt[4]{x^4+y^2} \ .$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^3y|}{x^4+y^2} \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[4]{x^4+y^2} = 0 \ ,$$

montrant que f est continue en $(0,0)$. Une autre majoration qui nous conduit au même résultat est

$$2\,|x^2y| \leqslant x^4 + y^2 \ ,$$

ce qui est une conséquence immédiate de l'inégalité $(x^2-y)^2 \geqslant 0$. On aura donc la majoration $|f(x,y)| \leqslant \frac{1}{2}|x|$, et la fonction coordonnée x est continue.

Pour la fonction g la démarche est la même. On commence avec le calcul

$$(D_v g)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(th,tk) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(th)^5}{\big(tk - (th)^2\big)^2 + (th)^6} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\,h^5}{\big(k - t\,h^2\big)^2 + t^4\,h^6} \ .$$

Pour $k \neq 0$ cette limite vaut 0. Pour $k = 0$ on tombe sur la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3\,h^5}{t^2\,h^4 + t^4\,h^6} = \lim_{t\to 0} \frac{t\,h^5}{h^4 + t^2\,h^6} \enspace .$$

Comme pour la fonction f, il faut distinguer le cas $h = 0$ du cas $h \neq 0$, mais dans les deux cas cette limite vaut 0. La conclusion est donc que pour tout $v \in \mathbf{R}^2$ on a $(D_v g)(0,0) = 0$ et, comme pour la fonction f, on en déduit que **si** g est différentiable en $(0,0)$, alors on doit avoir $(Dg)(0,0) = 0$.

Pour montrer que g n'est pas différentiable en $(0,0)$ on prend le même chemin $(h,k) = (t,t^2)$ et on calcule

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{|g(h,k) - g(0,0) - 0\cdot(h,k)|}{\|(h,k)\|} &= \lim_{t\to 0} \frac{|t^5|}{\big((t^2-t^2)^2+t^6\big)\cdot\|(t,t^2)\|} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2\,\|(1,t)\|} = \frac{\infty}{\|(1,0)\|} = \infty \enspace .\end{aligned}$$

Il s'ensuit que 0 ne peut pas être la différentielle de g et donc g n'est pas différentiable en $(0,0)$. Mais contrairement à f, la fonction g n'est même pas continue en $(0,0)$. Car si elle était continue, on devrait avoir, avec le chemin $(h,k) = (t,t^2)$:

$$0 = g(0,0) = \lim_{t\to 0} g(t,t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{t^5}{(t^2-t^2)^2+t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \enspace ,$$

une limite qui n'existe pas.

Solution de [16.45]. La fonction $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $p(x,y) = xy$ est polynomiale, donc de classe C^1 (même de classe C^∞, voir §7) et en particulier continue. La fonction $v : \mathbf{R} \to [0,\infty[$, $v(t) = |t|$ est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^*$. Et finalement, la fonction $r : [0,\infty[\to [0,\infty[$, $r(t) = \sqrt{t}$ est continue sur $[0,\infty[$ et de classe C^1 (même C^∞) sur $]0,\infty[$. Il suffit maintenant de constater qu'on a l'égalité $f = r \circ v \circ p$ pour conclure que f est continue sur $\mathbf{R}^2$ comme composée de fonctions continues.

Si f est différentiable en (x,y), alors ses dérivées partielles existent en ce point. On étudie donc d'abord l'existence des dérivées partielles. Pour cela on commence à étudier la fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $h(t) = \sqrt{|t|}$. Un calcul élémentaire nous donne :

$$t > 0 \quad\Rightarrow\quad h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \qquad \text{et} \qquad t < 0 \quad\Rightarrow\quad h'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{-t}} \enspace ,$$

ce qu'on peut résumer par la formule

$$t \neq 0 \quad\Rightarrow\quad h'(t) = \frac{\sqrt{|t|}}{2t} \enspace .$$

D'autre part, la limite

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{h(t)-h(0)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

n'existe pas, ce qui veut dire que la dérivée à droite de h en 0 n'existe pas. Il s'ensuit que h n'est pas différentiable en 0.

Pour déterminer la dérivée partielle $\partial_1 f$, on remarque qu'on a l'égalité

$$f(x,y) = \sqrt{|y|}\cdot h(x) \enspace .$$

Par définition de la dérivée partielle on a donc

$$(\partial_1 f)(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \sqrt{|y|}\cdot\frac{h(x+t)-h(x)}{t} \enspace .$$

Il est tentant d'en déduire l'égalité $(\partial_1 f)(x,y) = \sqrt{|y|} \cdot h'(x)$, mais ceci n'est valable que si $h'(x)$ existe ! Une petite réflexion nous donne le résultat correct

$$\begin{array}{ccc} y \neq 0 \text{ et } x \neq 0 & : & (\partial_1 f)(x,y) = \sqrt{|y|} \cdot h'(x) \\ y \neq 0 \text{ et } x = 0 & : & (\partial_1 f)(0,y) \text{ n'existe pas} \\ y = 0 & : & (\partial_1 f)(x,0) = 0 \ . \end{array}$$

Un raisonnement analogue nous donne pour $\partial_2 f$ le réultat

$$\begin{array}{ccc} y \neq 0 \text{ et } x \neq 0 & : & (\partial_2 f)(x,y) = \sqrt{|x|} \cdot h'(y) \\ y = 0 \text{ et } x \neq 0 & : & (\partial_2 f)(x,0) \text{ n'existe pas} \\ x = 0 & : & (\partial_2 f)(0,y) = 0 \ . \end{array}$$

On constate que sur l'ouvert $U = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \neq 0 \}$ les deux dérivées partielles existent et sont continues. Sur U l'application f est donc différentiable. On aurait pu obtenir ce résultat plus vite en remarquant que sur U l'application f est la composée de fonctions de classe C^∞ (car $p(U) \subset \mathbf{R}^*$ et $v(\mathbf{R}^*) \subset \,]0,\infty[\,$).

Par contre, les deux dérivées partielles existent aussi en $(0,0)$ (mais pas en un point (x,y) avec seulement un des deux coordonnées nul), où elles sont nulles. Si f est différentiable en $(0,0)$ on doit donc avoir $(Df)(0,0) = 0$. Pour le vérifier il faut vérifier si on a l'égalité

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0)|}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\|(x,y)\|} = 0 \ .$$

Mais si on prend $x = y = t > 0$ et si on prend la norme euclidienne, on a

$$\frac{\sqrt{|xy|}}{\|(x,y)\|_2} = \frac{t}{t\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ .$$

Il s'ensuit que f ne peut pas être différentiable en $(0,0)$.

Une autre façon pour voir que f n'est pas différentiable en $(0,0)$ est d'essayer de calculer toutes les dérivées directionnelles. Pour $v = (h,k) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant $hk \neq 0$ on doit donc établir la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{|t^2hk|}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} \cdot \sqrt{|hk|} \ ,$$

une limite qui n'existe pas. Ce n'est donc pas vrai que toutes les dérivées directionnelles existent en $(0,0)$ et donc par [5.2] la fonction f ne peut pas être différentiable en $(0,0)$.

La conclusion est donc que f est de classe C^∞ sur l'ouvert U avec

$$(Df)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{|xy|}}{2x} & \frac{\sqrt{|xy|}}{2y} \end{pmatrix}$$

et qu'elle n'est pas différentiable en dehors de U (bien qu'elle est continue sur $\mathbf{R}^2$ entier).

Solution de [16.46]. Il est immédiat qu'on peut définir la fonction f aussi par l'expression

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in T \equiv \{ (\frac{1}{2}\pi + k\pi, 0) \mid k \in \mathbf{Z} \} \\ \dfrac{\big(\cos(x)\big)^2}{\big(\cos(x)\big)^2 + y^2 \big(\sin(x)\big)^2} & \text{si } (x,y) \notin T \ . \end{cases}$$

Il s'ensuit que f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbf{R}^2 \setminus T$ comme addition/quotient/composée de fonctions de classe C^1 [2.15].

Ensuite on constate que pour $y = 0$ et $x \notin \{\,\frac{1}{2}\pi + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\,\}$ on a $f(x,0) = 1$. Il s'ensuit qu'on a

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi+k\pi} f(x,0) = 1 \neq 0 = f(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi, 0) \quad .$$

Et donc f n'est pas continue (et par conséquent pas différentiable non plus) aux points $(\frac{1}{2}\pi + k\pi, 0) \in T$.

Solution de [16.47]. La continuité de f est une conséquence immédiate du résultat (de topologie) que si f et g sont deux fonctions continues, alors les fonctions $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$, définies par

$$\big(\max(f,g)\big)(x) = \max\big(f(x), g(x)\big) \qquad \text{et} \qquad \big(\min(f,g)\big)(x) = \min\big(f(x), g(x)\big)$$

sont aussi continues. La preuve en est facile une fois qu'on se rend compte qu'on a les deux équations

$$\max(f,g) + \min(f,g) = f + g \qquad \text{et} \qquad \max(f,g) - \min(f,g) = |f - g| \quad .$$

Il s'ensuit qu'on a les égalités

$$\max(f,g) = \tfrac{1}{2}\,(f + g + |f - g|\,) \qquad \text{et} \qquad \min(f,g) = \tfrac{1}{2}\,(f + g - |f - g|\,) \quad .$$

Étant donné que prendre la valeur absolue est une opération continue, on en déduit immédiatement (par addition, soustraction et composée) que $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont continues.

Pour la différentiabilité on commence avec la remarque que l'ensemble $U_+ = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 > y^2\,\}$ est un ouvert et qu'on a

$$(x,y) \in U_+ \qquad \Longrightarrow \qquad f(x,y) = y^2 \quad .$$

Cette fonction étant polynomiale, elle est de classe C^1. Ainsi on a montré que f est de classe C^1 sur l'ouvert U_+. Un raisonnement analogue avec l'ouvert $U_- = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 < y^2\,\}$ montre que f est également de classe C^1 sur U_-. Reste donc la différentiabilité de f dans les point (x,y) vérifiant $x^2 = y^2$, c'est-à-dire $x = y$ ou $x = -y$. Pour cela on commence à calculer les dérivées partielles. Si on commence à écrire la définition d'une dérivée partielle, on s'aperçoit vite qu'il faut distinguer cinq cas : $x = y > 0$, $x = y < 0$, $x = -y > 0$, $x = -y < 0$ et $x = y = 0$. On commence donc avec le cas $x = y > 0$:

$$\begin{aligned}
(\partial_1 f)(x,x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,x) - f(x,x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\min((x+h)^2, x^2) - x^2}{h} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{x^2 - x^2}{h} = 0 & h > 0 \\ \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x & h < 0 \quad . \end{cases}
\end{aligned}$$

Et on constate que la limite à gauche est différente de la limite à droite, ce qui implique que la limite tout court n'existe pas, c'est-à-dire que la dérivée partielle $\partial_1 f$ n'existe pas au point (x,x) avec $x > 0$. Il s'ensuit que f ne peut pas être différentiable au point (x,x) avec $x > 0$.

Dans cet argumentation on a bien sûr fait quelque chose qui est totalement ridicule : on calcule quelque chose pour montrer que cela n'existe pas. On n'aura donc jamais dû commencer à calculer $(\partial_1 f)(x,x)$. Mais cela fait parti d'un abus de notation encore plus insidieux : on peut écrire la phrase

$$\text{“ } \lim_{x\to a} f(x) \text{ n'existe pas” } ,$$

une phrase qui se contredit elle-même, car on note l'objet $\lim_{x\to a} f(x)$ pour dire que cet objet n'existe pas ! Dans notre calcul on procède comme dans beaucoup de raisonnements : on commence "à la fin" et on raisonne à l'envers. Si cela marche, le raisonnement officiel devrait être inversé. Et si cela ne marche pas, on aura des idées pour argumenter que le résultat recherché est faux. Le calcul qu'on a présenté devrait rester sur un brouillon et, pour être rigoureux, on aurait dû présenter le calcul des deux limites à gauche et à droite séparément, constater qu'elles existent mais sont différentes et conclure.

Les trois autres cas $x = y < 0$, $x = -y > 0$ et $x = -y < 0$ sont similaire et mènent à la conclusion que f n'est pas différentiable en ces points. Reste donc le point $(0,0)$ où on trouve directement les dérivées partielles

$$(\partial_1 f)(0,0) = 0 = (\partial_2 f)(0,0) \quad .$$

Si f est différentiable en $(0,0)$, sa différentielle est "donc" l'application nulle. Pour voir si c'est le cas on vérifie la définition d'une différentielle :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(0+h,0+k) - f(0,0)|}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\min(h^2,k^2)}{\|(h,k)\|} \quad ,$$

où on s'aperçoit qu'il faut décider quelle norme on va utiliser. Dans ce cas il s'avère que les trois choix $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont "facile" à gérer, car on a les majorations

$$h^2\,,\,k^2 \;\leqslant\; \begin{cases} (|h|+|k|)^2 = \big(\,\|(h,k)\|_1\big)^2 \\ h^2+k^2 = \big(\,\|(h,k)\|_2\big)^2 \\ \max(|h|,|k|)^2 = \big(\,\|(h,k)\|_\infty\big)^2 \quad , \end{cases}$$

ce qui nous donne pour les trois normes la majoration $\min(h^2,k^2) \leqslant \|(h,k)\|^2$. On peut donc, avec une de ces trois normes, faire le calcul

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(0+h,0+k) - f(0,0)|}{\|(h,k)\|} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\min(h^2,k^2)}{\|(h,k)\|} \\ &\leqslant \lim_{(h,k)\to(0,0)} \|(h,k)\| = 0 \quad . \end{aligned}$$

La conclusion est que f est bien différentiable en $(0,0)$ avec $(Df)(0,0) = \mathbf{0}$.

Solution de [16.48]. Parce que on ne sait rien sur la continuité des dérivées de f ou de g au point 1, on ne peut pas directement appliquer [5.14]. Par contre, on peut l'appliquer indirectement en considérant u comme une somme de deux fonctions composées. Si on définit les fonctions $u_f, u_g : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$u_f(x,y) = f(xy) \qquad \text{et} \qquad u_g(x,y) = g(y/x) \quad ,$$

alors on a $u = u_f + u_g$. Et donc si u_f et u_g sont différentiable en $(1,1)$, alors selon [2.11] $u = u_f + u_g$ sera différentiable en $(1,1)$. Si on se concentre d'abord sur la fonction u_f, on voit que c'est la composée de la fonction $p : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par $p(x,y) = xy$ et la fonction f. Pour la fonction p on constate aisément que les dérivées partielles sont données par

$$(\partial_1 p)(x,y) = y \qquad \text{et} \qquad (\partial_2 p)(x,y) = x$$

et que ces fonctions sont continues. Par [5.14] on peut donc conclure que p est de classe C^1 et que sa différentielle est donnée par

$$(Dp)(x,y) : (h,k) \mapsto xk + yh \quad .$$

En particulier p est différentiable en $(1,1)$ avec image $p(1,1) = 1$. Par [2.14] la composée $u_f = f \circ p$ est différentiable en $(1,1)$ avec

$$\big((Du_f)(1,1)\big)(h,k) = \Big((Df)(1)\Big)\Big(\big((Dp)(1,1)\big)(h,k)\Big) = \Big((Df)(1)\Big)(h+k) \overset{[2.6]}{=} f'(1)\cdot(h+k) \ .$$

L'analyse de la fonction u_g se déroule de la même façon en la considérant comme la composée de g avec la fonction $q : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définit par $q(x,y) = y/x$. Dans ce cas on a

$$(\partial_1 q)(x,y) = -\frac{y}{x^2} \qquad \text{et} \qquad (\partial_2 q)(x,y) = \frac{1}{x}$$

et donc

$$(Dq)(x,y) : (h,k) \mapsto \frac{k}{x} - \frac{hy}{x^2} \ .$$

Par le même argument (que pour u_f) la fonction u_g est différentiable en $(1,1)$ avec

$$\big((Du_g)(1,1)\big)(h,k) = \Big((Dg)(1)\Big)\Big(\big((Dq)(1,1)\big)(h,k)\Big) = \Big((Dg)(1)\Big)(k-h) \overset{[2.6]}{=} g'(1)\cdot(k-h) \ .$$

Par [2.11] on aura au final

$$\big((Du)(1,1)\big)(h,k) = \big(f'(1) - g'(1)\big)\,h + \big(f'(1) + g'(1)\big)\,k \ .$$

Solution de [16.49]. • (i) : Les dérivées partielles (premières) de f sont données par

$$(\partial_1 f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(y)\sin(z) \\ \cos(y)\cos(z) \end{pmatrix} \quad , \quad (\partial_2 f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\,\cos(y)\sin(z) \\ -x\,\sin(y)\cos(z) \end{pmatrix}$$

et

$$(\partial_3 f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\,\sin(y)\cos(z) \\ -x\,\cos(y)\sin(z) \end{pmatrix} \ .$$

Ces trois dérivées partielles étant continues, l'application f est de classe C^1 [5.14]. La matrice de $(Df)(x,y,z)$ est de taille 2×3 et ses trois sous-matrices de taille 2×2 ont déterminant

$$\det(\partial_1 f\ \partial_2 f) = -\tfrac{1}{2}\,x\,\sin(2z) \quad , \quad \det(\partial_1 f\ \partial_3 f) = -\tfrac{1}{2}\,x\,\sin(2y)$$

et

$$\det(\partial_2 f\ \partial_3 f) = -\tfrac{1}{2}x^2\,\big(1 - \cos(2y)\cos(2z)\big) \ .$$

Pour que le rang ne soit pas 2, il faut que ces trois déterminant sont nuls, ce qui sera le cas si $x = 0$ ou si

$$\sin(2y) = 0 \quad , \quad \sin(2z) = 0 \quad , \quad \cos(2y)\cos(2z) = 1 \ .$$

Les solutions de ce système sont les points

$$y = \tfrac{1}{2}k\pi \quad , \quad z = \tfrac{1}{2}k\pi + \ell\pi \qquad \text{avec} \qquad k,\ell \in \mathbf{Z} \ .$$

Dans le cas $x = 0$, le rang sera 0 si on a

$$\sin(y)\sin(z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \cos(y)\cos(z) = 0 \ ,$$

ce qui sera le cas pour

$$y = k\pi \text{ et } z = \tfrac{1}{2}\pi + \ell\pi \qquad \text{ou} \qquad y = \tfrac{1}{2}\pi + \ell\pi \text{ et } z = k\pi \ .$$

Dans le cas $x \neq 0$ le rang sera 0 si on a au moins

$$0 = \sin(y)\sin(z) = \cos(y)\sin(z) = \sin(y)\cos(z) = \cos(y)\cos(z) \ ,$$

mais ces quatre coefficients ne peuvent pas être nuls en même temps. Pour conclure :

$$\operatorname{rang}\big((Df)(x,y,z)\big) = 0 \qquad \Longleftrightarrow$$
$$(x,y,z) \in \{\, (0, k\pi, \tfrac{1}{2}\pi + \ell\pi) \mid k,\ell \in \mathbf{Z}\,\} \cup \{\, (0, \tfrac{1}{2}\pi + k\pi, \ell\pi) \mid k,\ell \in \mathbf{Z}\,\}$$

et

$$\operatorname{rang}\big((Df)(x,y,z)\big) \leqslant 1 \qquad \Longleftrightarrow$$
$$(x,y,z) \in \{\, (0,y,z) \mid y,z \in \mathbf{R}\,\} \cup \{\, (x, \tfrac{1}{2}k\pi, \tfrac{1}{2}k\pi + \ell\pi) \mid x \in \mathbf{R}\,,\ k,\ell \in \mathbf{Z}\,\} \ .$$

Ces deux descriptions suffisent pour déterminer le rang de $(Df)(x,y,z)$ complètement (parce qu'on a toujours $\operatorname{rang}\big((Df)(x,y,z)\big) \leqslant 2$).

- (ii) : On a $f(0,0,0) = (0,0)$ et donc selon [2.14] on a
$$\big(D(g\circ f)\big)(0,0,0) = (Dg)(0,0) \circ (Df)(0,0,0) \ .$$

La différentielle de g est donnée par

$$\operatorname{matrice}\big((Dg)(u,v)\big) = \begin{pmatrix} a + 2u\,\cos(u^2)\sinh(v^2) & b + 2v\,\sin(u^2)\cosh(v^2) \\ c + 2u\,\sin(v^2)\cosh(u^2) & d + 2v\,\cos(v^2)\sinh(u^2) \end{pmatrix}$$

et donc on obtient

$$\operatorname{matrice}\Big(\big(D(g\circ f)\big)(0,0,0)\Big) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Solution de [16.50]. • (i-a) : On définit l'application $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ par $G(x) = \big(g(x), h(x)\big)$. Sa dérivée, qui est définie par une limite, se calcule composante par composante, donnant

$$G'(x) = \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix} \ .$$

Selon [5.11] la matrice de $(Df)(x,y)$ est donnée par

$$\operatorname{matrice}\big((Df)(x,y)\big) = \big((\partial_1 f)(x,y) \quad (\partial_2 f)(x,y)\big) \ . \tag{17.21}$$

Par [2.16] on obtient donc

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= \big((\partial_1 f)\big(G(x)\big) \quad (\partial_2 f)\big(G(x)\big)\big) \cdot \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix} \\ &= (\partial_1 f)\big(g(x),h(x)\big)\cdot g'(x) + (\partial_2 f)\big(g(x),h(x)\big)\cdot h'(x) \ . \end{aligned}$$

- (i-b) : Pour cette application on introduit l'application $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $G(x,y) = \big(g(x), h(y)\big)$ et on constate que, par [5.11], la matrice de sa différentielle est donnée par

$$\operatorname{matrice}\big((DG)(x,y)\big) = \big((\partial_1 G)(x,y) \quad (\partial_2 G)(x,y)\big) = \begin{pmatrix} g'(x) & 0 \\ 0 & h'(y) \end{pmatrix} \ .$$

Selon [2.14] on a

$$\operatorname{matrice}\Big(\big(D(f\circ G)\big)(x,y)\Big) = \operatorname{matrice}\Big((Df)\big(G(x,y)\big)\Big) \cdot \operatorname{matrice}\big((DG)(x,y)\big)$$

et donc en combinant avec (17.21) on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{matrice}\big((DF_2)(x,y)\big) &= \big(\ (\partial_1 f)\big(G(x,y)\big) \quad (\partial_2 f)\big(G(x,y)\big)\ \big) \cdot \begin{pmatrix} g'(x) & 0 \\ 0 & h'(y) \end{pmatrix} \\ &= \big(\ (\partial_1 f)\big(g(x),h(y)\big)\cdot g'(x) \quad (\partial_2 f)\big(g(x),h(y)\big)\cdot h'(y)\ \big) \ . \end{aligned}$$

Cette matrice étant formée par les dérivées partielles de F_2, on en déduit immédiatement

$$\begin{aligned}(\partial_1 F_2)(x,y) &= (\partial_1 f)\big(g(x),h(y)\big)\cdot g'(x)\\ (\partial_2 F_2)(x,y) &= (\partial_2 f)\big(g(x),h(y)\big)\cdot h'(y) \quad .\end{aligned}$$

Une toute autre façon d'obtenir ces dérivées partielles est de partir directement sur la définition avec une fonction partielle. Pour $\partial_1 F_2$ on considère "donc" la fonction $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ définie par $G(x)=\big(g(x),h(y)\big)$, en considérant $h(y)$ comme étant une constante. On aura donc par définition

$$(\partial_1 F_2)(x,y) = (f\circ G)'(x) \quad ,$$

ce qui donne avec les mêmes arguments qu'en (i-a) le résultat

$$\begin{aligned}(\partial_1 F_2)(x,y) &= \big((\partial_1 f)\big(G(x)\big) \quad (\partial_2 f)\big(G(x)\big)\big)\cdot\begin{pmatrix} g'(x)\\ 0\end{pmatrix}\\ &= (\partial_1 f)\big(g(x),h(y)\big)\cdot g'(x) \quad ,\end{aligned}$$

ce qui confirme le résultat déjà obtenu.

• (i-c) : Si on définit la fonction $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ par $G(x)=k(x,y)$, en considérant y comme une constante, on aura

$$(\partial_1 F_3)(x,y) = (g\circ G)'(x) = g'\big(G(x)\big)\cdot G'(x) = g'\big(k(x,y)\big)\cdot(\partial_1 k)(x,y) \quad .$$

De la même façon, avec la fonction $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par $G(y)=k(x,y)$ (maintenant en considérant x comme une constante) on aura

$$(\partial_2 F_3)(x,y) = (g\circ G)'(y) = g'\big(k(x,y)\big)\cdot(\partial_2 k)(x,y) \quad .$$

Et si on partait de la matrice des dérivées partielles, on aurait écrit

$$\begin{aligned}\text{matrice}\big((DF_3)(x,y)\big) &= \text{matrice}\Big(\big(D(g\circ k)\big)(x,y)\Big)\\ &= \text{matrice}\Big((Dg)\big(k(x,y)\big)\Big)\cdot\text{matrice}\big((Dk)(x,y)\big)\\ &= \Big(\; g'\big(k(x,y)\big)\;\Big)\cdot\big((\partial_1 k)(x,y) \quad (\partial_2 k)(x,y)\big)\\ &= \big(\; g'\big(k(x,y)\big)\cdot(\partial_1 k)(x,y) \quad g'\big(k(x,y)\big)\cdot(\partial_2 k)(x,y)\;\big)\\ &= \big(\;(\partial_1 F_3)(x,y) \quad (\partial_2 F_3)(x,y)\;\big) \quad .\end{aligned}$$

Et on aurait obtenu le même résultat par identifications des colonnes de cette matrice.

• (i-d) : Pour $(\partial_1 F_4)(x,y)$ on introduit la fonction $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ par $G(x)=\big(k(x,y),g(x)\big)$ avec dérivée (en considérant y comme une constante !)

$$G'(x) = \begin{pmatrix}(\partial_1 k)(x,y)\\ g'(x)\end{pmatrix} \quad .$$

Par définition de la dérivée partielle on aura donc $(\partial_1 F_4)(x,y)=(f\circ G)'(x)$. Comme dans (i-a) on l'obtient comme

$$\begin{aligned}(\partial_1 F_4)(x,y) = (f\circ G)'(x) &= \big((\partial_1 f)\big(G(x)\big) \quad (\partial_2 f)\big(G(x)\big)\big)\cdot\begin{pmatrix}(\partial_1 k)(x,y)\\ g'(x)\end{pmatrix}\\ &= (\partial_1 f)\big(k(x,y),g(x)\big)\cdot(\partial_1 k)(x,y) + (\partial_2 f)\big(k(x,y),g(x)\big)\cdot g'(x) \quad .\end{aligned}$$

Pour la deuxième dérivée partielle $(\partial_2 F_4)(x,y)$ on introduit la fonction $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ par $G(y) = \big(k(x,y), g(x)\big)$, cette fois-ci en considérant x comme une constante et donc avec dérivée

$$G'(y) = \begin{pmatrix} (\partial_2 k)(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Avec le même argument que pour $(\partial_1 F_4)(x,y)$ on obtient donc

$$\begin{aligned}(\partial_2 F_4)(x,y) = (f\circ G)'(y) &= \big((\partial_1 f)\big(G(x)\big) \quad (\partial_2 f)\big(G(x)\big)\big) \cdot \begin{pmatrix} (\partial_2 k)(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (\partial_1 f)\big(k(x,y), g(x)\big) \cdot (\partial_2 k)(x,y) \quad .\end{aligned}$$

Si on était passé par la matrice de la différentielle, on aurait introduit la fonction $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$G(x,y) = \big(k(x,y), g(x)\big) \quad ,$$

dont la différentielle est donnée par

$$\text{matrice}\big((DG)(x,y)\big) = \begin{pmatrix} (\partial_1 k)(x,y) & (\partial_2 k)(x,y) \\ g'(x) & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Par [2.14] on aurait obtenu

$$\begin{aligned}\text{matrice}\big((DF_4)(x,y)\big) &= \text{matrice}\Big(\big(D(f\circ G)\big)(x,y)\Big) \\ &= \text{matrice}\Big((Df)\big(G(x,y)\big)\Big) \cdot \text{matrice}\big((DG)(x,y)\big) \\ &= \big(\ (\partial_1 f)\big(k(x,y), g(x)\big) \quad (\partial_2 f)\big(k(x,y), g(x)\big)\ \big) \\ &\qquad \cdot \begin{pmatrix} (\partial_1 k)(x,y) & (\partial_2 k)(x,y) \\ g'(x) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \Big(\ (\partial_1 f)\big(k(x,y), g(x)\big) \cdot (\partial_1 k)(x,y) + (\partial_2 f)\big(k(x,y), g(x)\big) \cdot g'(x) \\ &\qquad (\partial_1 f)\big(k(x,y), g(x)\big) \cdot (\partial_2 k)(x,y)\ \Big) \quad .\end{aligned}$$

L'identification des colonnes de cette matrice avec les dérivées partielles aurait donné le même résultat.

• (i-e) : Dans ce cas on pose $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $G(x,y) = \big(k(x,y), \ell(x,y)\big)$ dont la matrice de sa différentielle est donnée par

$$\text{matrice}\big((DG)(x,y)\big) = \begin{pmatrix} (\partial_1 k)(x,y) & (\partial_2 k)(x,y) \\ (\partial_1 \ell)(x,y) & (\partial_2 \ell)(x,y) \end{pmatrix} \quad .$$

Par [2.14] on obtient

$$\begin{aligned}\text{matrice}\big((DF_5)(x,y)\big) &= \text{matrice}\Big(\big(D(f\circ G)\big)(x,y)\Big) \\ &= \text{matrice}\Big((Df)\big(G(x,y)\big)\Big) \cdot \text{matrice}\big((DG)(x,y)\big) \\ &= \big(\ (\partial_1 f)\big(k(x,y), \ell(x,y)\big) \quad (\partial_2 f)\big(k(x,y), \ell(x,y)\big)\ \big) \\ &\qquad \cdot \begin{pmatrix} (\partial_1 k)(x,y) & (\partial_2 k)(x,y) \\ (\partial_1 \ell)(x,y) & (\partial_2 \ell)(x,y) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \Big(\begin{array}{l} (\partial_1 f)\big(k(x,y),\ell(x,y)\big)\cdot(\partial_1 k)(x,y) \\ \quad + (\partial_2 f)\big(k(x,y),\ell(x,y)\big)\cdot(\partial_1 \ell)(x,y) \end{array} \quad \begin{array}{l} (\partial_1 f)\big(k(x,y),g(x)\big)\cdot(\partial_2 k)(x,y) \\ \quad + (\partial_2 f)\big(k(x,y),\ell(x,y)\big)\cdot(\partial_2 \ell)(x,y) \end{array} \Big) \ .$$

L'identification des colonnes de cette matrice avec les dérivées partielles donne donc :

$$\begin{aligned}(\partial_1 F_5)(x,y) &= (\partial_1 f)\big(k(x,y),\ell(x,y)\big)\cdot(\partial_1 k)(x,y) \\ &\qquad + (\partial_2 f)\big(k(x,y),\ell(x,y)\big)\cdot(\partial_1 \ell)(x,y) \\ (\partial_2 F_5)(x,y) &= (\partial_1 f)\big(k(x,y),g(x)\big)\cdot(\partial_2 k)(x,y) \\ &\qquad + (\partial_2 f)\big(k(x,y),\ell(x,y)\big)\cdot(\partial_2 \ell)(x,y) \ .\end{aligned}$$

• (ii) : L'écriture des réponses dans le cas où E est un espace vectoriel normé quelconque est quasiment identique à l'écriture des dérivées partielles. La seule différence est que la justification ne passe plus par la matrice des dérivées partielles, mais par l'identification (4.10) entre une application (linéaire continue) entre des espaces produits et une matrice d'applications (linéaires continues), ou, autrement dit, par [5.10]. Et pour l'utilisation de la différentielle d'une fonction composée [2.14] on invoque [4.16]. Ainsi on obtient "directement" les réponses suivantes. Mais attention : ici on compose des application linéaires, on ne multiplie pas des nombres et donc l'ordre est important !

• (ii-a) :

$$(DF_1)(x) = (D_1 f)\big(g(x),h(x)\big)\circ(Dg)(x) + (D_2 f)\big(g(x),h(x)\big)\circ(Dh)(x) \ .$$

• (ii-b) :

$$\begin{aligned}(D_1 F_2)(x,y) &= (D_1 f)\big(g(x),h(y)\big)\circ(Dg)(x) \\ (D_2 F_2)(x,y) &= (D_2 f)\big(g(x),h(y)\big)\circ(Dh)(y) \ .\end{aligned}$$

• (ii-c) :

$$\begin{aligned}(D_1 F_3)(x,y) &= (Dg)\big(k(x,y)\big)\circ(D_1 k)(x,y) \\ (D_2 F_3)(x,y) &= (Dg)\big(k(x,y)\big)\circ(D_2 k)(x,y) \ .\end{aligned}$$

• (ii-d) :

$$\begin{aligned}(D_1 F_4)(x,y) &= (D_1 f)\big(k(x,y),g(x)\big)\circ(D_1 k)(x,y) \\ &\qquad + (D_2 f)\big(k(x,y),g(x)\big)\circ(Dg)(x) \\ (D_2 F_4)(x,y) &= (D_1 f)\big(k(x,y),g(x)\big)\circ(D_2 k)(x,y) \ .\end{aligned}$$

• (i-e) :

$$\begin{aligned}(D_1 F_5)(x,y) &= (D_1 f)\big(k(x,y),\ell(x,y)\big)\circ(D_1 k)(x,y) \\ &\qquad + (D_2 f)\big(k(x,y),\ell(x,y)\big)\circ(D_1 \ell)(x,y) \\ (D_2 F_5)(x,y) &= (D_1 f)\big(k(x,y),g(x)\big)\circ(D_2 k)(x,y)\end{aligned}$$

$$+ (D_2 f)\big(k(x,y), \ell(x,y)\big) \circ (D_2 \ell)(x,y) \quad .$$

Solution de [16.51]. Pour $x \in E^*$ on a l'égalité

$$\frac{N(0+tx) - N(0)}{t} = \frac{|t| \cdot N(x)}{t} \quad .$$

Il s'ensuit que la dérivée directionnelle $(D_x N)(0)$ n'existe pas, car on a

$$(D_x N)(0) = \lim_{t \to 0} \frac{N(0+tx) - N(0)}{t} \quad .$$

Et si la dérivée directionnelle n'existe pas, alors, selon [5.2], la différentielle ne peut pas non plus exister.

Solution de [16.53]. • (i) : Si on écrit la fonction f en coordonnées, on trouve

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_i - a_i}{\sum_{k=1}^n (x_k - a_k)^2} \quad .$$

La matrice Jacobienne des dérivées partielles en découle immédiatement :

$$(\partial_j f_i)(x) = \frac{\delta_{ij}}{\sum_{k=1}^n (x_k - a_k)^2} - \frac{2\,(x_i - a_i) \cdot (x_j - a_j)}{\big(\sum_{k=1}^n (x_k - a_k)^2\big)^2} \quad ,$$

où δ_{ij} désigne le *symbole de Kronecker* défini par

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j \qquad \text{et} \qquad \delta_{ii} = 1 \quad .$$

Plus précisément, en utilisant [5.11] on a $\big((Df)(x)\big)(h) = w$ avec

$$w_i = \sum_{j=1}^n (\partial_j f_i)(x)\, h_j = \frac{h_i}{\sum_{k=1}^n (x_k - a_k)^2} - \frac{2\,(x_i - a_i) \cdot \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)\, h_j}{\big(\sum_{k=1}^n (x_k - a_k)^2\big)^2} \quad ,$$

ou, en utilisant le produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$:

$$w = \frac{h}{\|x-a\|^2} - \frac{2\,\langle x-a, h\rangle \cdot (x-a)}{\|x-a\|^4} \quad .$$

Si on identifie $(Df)(x)$ avec sa matrice et si on voit un élément $x \in \mathbf{R}^n$ comme un vecteur colonne, on peut résumer cette formule sous la forme

$$(Df)(x) = \frac{\mathbf{1}}{\|x-a\|^2} - \frac{2\,(x-a) \cdot {}^t(x-a)}{\|x-a\|^4} \quad .$$

• (ii) : On a montré ci-dessus qu'on a

$$S(h) = h - 2 \cdot \frac{\langle x-a, h\rangle \cdot (x-a)}{\|x-a\|^2} = h - 2 \cdot \left\langle \frac{x-a}{\|x-a\|}, h \right\rangle \cdot \frac{x-a}{\|x-a\|} \quad .$$

Pour $h = x - a$ on trouve donc

$$S(x-a) = (x-a) - 2\,(x-a) = -\,(x-a)$$

et pour h orthogonal à $x-a$, c'est-à-dire $\langle x-a, h\rangle = 0$, on aura

$$S(h) = h \quad .$$

L'application S est donc la symétrie dans le hyper-plan orthogonal au vecteur $x-a$.

Solution de [16.54]. • (i) : Sur l'ouvert $(I\times I)\setminus\Delta$ la fonction g est continue comme différence et quotient de fonctions continues avec dénominateur non-nul. Reste donc la continuité aux points (x,x) pour laquelle il faut montrer qu'on a

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} g(x+h,x+k) = g(x,x) \equiv f'(x) \quad .$$

Ceci n'est pas la définition de la dérivée, car on a une limite dans $\mathbf{R}^2$, pas dans $\mathbf{R}$. Il faut donc être plus prudent. La fonction f étant dérivable, on peut appliquer l'égalité des accroissements finis [3.3] pour obtenir le résultat

$$\forall h,k\ \exists\theta_{h,k}\in\,]0,1[\quad : \quad f(x+h)-f(x+k) = f'(\xi_{h,k})\cdot(h-k)$$
$$\text{avec}\qquad \xi_{h,k} = x+h+\theta_{h,k}\cdot(k-h) \quad .$$

Il y a un détail qu'on a ignoré dans cet résultat : on ne peut pas le faire pour tout $h,k\in\mathbf{R}$, mais seulement pour ceux tels que $x+h$ et $x+k$ appartiennent à l'intervalle I. Si on veut remédier cette situation, on invoque le fait que I est un intervalle ouvert pour trouver $\delta_o>0$ tel que $]x-\delta_o,x+\delta_o[\,\subset I$. Il s'ensuit que pour tout $h,k\in\,]-\delta_o,\delta_o[$ on aura $x+h,x+k\in I$ comme voulu. Et on peut reformuler cette condition comme $\|(h,k)\|_\infty<\delta_o$. D'autre part, étant donné qu'on veut prendre la limite $(h,k)\to(0,0)$, cette limitation n'aura aucune incidence sur le raisonnement à suivre.

En utilisant la définition de g on obtient donc

$$g(x+h,x+k)-f'(x) = \begin{cases} f'(\xi_{h,k})-f'(x) & h\neq k \\ f'(x+h)-f'(x) & h=k \quad . \end{cases}$$

Si on regarde bien cette formule, on s'aperçoit qu'on n'a même pas besoin de séparer les cas $h=k$ et $h\neq k$: dans les deux cas on peut dire qu'il existe $\theta_{h,k}\in\,]0,1[$ avec $\xi_{h,k}=x+h+\theta_{h,k}(k-h)$ tel que $g(x+h,x+k)=f'(\xi_{h,k})$ pour la simple raison que dans le cas $h=k$ on aura, pour tout valeur de $\theta_{h,k}$, l'égalité $\xi_{h,k}=x+h$.

Il “suffit” maintenant d'utiliser la continuité de f' pour conclure. Voici les détails. La fonction f' étant continue au point x, il existe pour tout $\varepsilon>0$ un $\delta>0$ tel que

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\quad : \quad |y-x|<\delta \ \Rightarrow\ |f'(y)-f'(x)|<\varepsilon \quad .$$

Mais pour $\|(h,k)\|\equiv\max(\,|h|,|k|\,)<\delta$ on a aussi les propriétés $|h|<\delta$ et

$$\begin{aligned}|\xi_{h,k}-x| &\equiv |\theta_{h,k}k+(1-\theta_{h,k})h| \leqslant \theta_{h,k}\cdot|k|+(1-\theta_{h,k})\cdot|h| \\ &\leqslant \theta_{h,k}\cdot\|(h,k)\|+(1-\theta_{h,k})\cdot\|(h,k)\| = \|(h,k)\|<\delta \quad .\end{aligned}$$

On aura donc la propriété

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\quad : \quad |\|(h,k)\|<\delta \ \Rightarrow\ \begin{cases} |f'(\xi_{h,k})-f'(x)|<\varepsilon & h\neq k \\ |f'(x+h)-f'(x)|<\varepsilon & h=k \quad . \end{cases}$$

Autrement dit, on a la propriété

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\quad : \quad |\|(h,k)\|<\delta \ \Rightarrow\ |g(x+h,x+k)-g(x,x)|<\varepsilon \quad ,$$

c'est-à-dire que g est continue au point (x,x).

• (ii) : Sur $I\times I\setminus\Delta$ la fonction g est la différence et quotient de fonctions de classe C^1, donc de classe C^1 [2.15]. Pour trouver sa différentielle, on calcule ses dérivées partielles

$$(\partial_1 g)(x,y) = \frac{f'(x)}{x-y}-\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^2} \quad\text{et}\quad (\partial_2 g)(x,y) = \frac{f'(y)}{y-x}-\frac{f(y)-f(x)}{(y-x)^2} \quad .$$

Ces dérivées partielles étant des quotient de fonctions continues, elles sont continues et donc on voit de nouveau que g est de classe C^1 [5.14]. Sa différentielle est donnée par

$$\mathrm{matrice}\big((Dg)(x,y)\big) = \Big(\frac{f'(x)}{x-y} - \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^2} \ , \ \frac{f'(y)}{y-x} - \frac{f(y)-f(x)}{(y-x)^2} \Big) \ .$$

• (iii) : Si f est deux fois dérivable en x, alors il existe un développement limité d'ordre 2 :

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(h) + \tfrac{1}{2}\, h^2\, f''(x) + h^2\, \varepsilon(h) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \ .$$

Maintenant on calcule :

$$\begin{aligned}(\partial_1 g)(x,x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h,x) - g(x,x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - h\, f'(x)}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{2}\, f''(x) + \varepsilon(h) = \tfrac{1}{2}\, f''(x)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\partial_2 g)(x,x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x,x+h) - g(x,x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - h\, f'(x)}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{2}\, f''(x) + \varepsilon(h) = \tfrac{1}{2}\, f''(x) \ .\end{aligned}$$

• (iv) : Pour montrer que g est différentiable en (x,x) on utilise la définition de la différentielle en combinaison avec [5.11] : on montre que la matrice formée par les dérivées partielles est la différentielle. Autrement dit, on montre que l'application $(Dg)(x,x)$ définie par

$$\mathrm{matrice}\big((Dg)(x,x)\big) = \big(\tfrac{1}{2}\, f''(x) \ , \ \tfrac{1}{2}\, f''(x) \big)$$

ou

$$\big((Dg)(x,x)\big)(h,k) = \tfrac{1}{2}\, f''(x)(h+k) \tag{17.22}$$

vérifie la condition de la différentielle de g au point (x,x).

On commence avec la remarque que, pour $h \neq k$, on a :

$$\begin{aligned} & g(x+h,x+k) - g(x,x) - \tfrac{1}{2} f''(x)(h+k) \\ &= \frac{f(x+h) - f(x+k)}{h-k} - f'(x) - \tfrac{1}{2} f''(x)(h+k) \\ &= \frac{\big(f(x+h) - f'(x)\, h - \tfrac{1}{2}\, f''(x)\, h^2\big) - \big(f(x+k) - f'(x)\, k - \tfrac{1}{2}\, f''(x)\, k^2\big)}{h-k} \ .\end{aligned}$$

Si on introduit la fonction

$$\varphi(s) = f(x+s) - f'(x)\, s - \tfrac{1}{2}\, f''(x)\, s^2 \ ,$$

alors cette fonction est dérivable et on a l'égalité

$$g(x+h,x+k) - g(x,x) - \tfrac{1}{2} f''(x)(h+k) = \frac{\varphi(h) - \varphi(k)}{h-k} \ .$$

Si on applique l'égalité des accroissements finis [3.3] on obtient l'existence d'un $\theta_{h,k} \in \,]0,1[$ (pas le même qu'en (i) !) tel que

$$\varphi(h) - \varphi(k) = \varphi'(\delta_{h,k}) \cdot (h-k) \quad \text{avec} \quad \delta_{h,k} = \theta_{h,k} h + (1-\theta_{h,k})k$$

et donc on aura l'égalité

$$g(x+h,x+k) - g(x,x) - \tfrac{1}{2} f''(x)(h+k) = \varphi'(\delta_{h,k})$$

$$= f'(x+\delta_{h,k}) - f'(x) - f''(x)\,\delta_{h,k} \quad .$$

Mais f' est dérivable en x, ce qui permet d'écrire un développement limité

$$f'(x+\delta) = f'(x) + f''(x)\,\delta + \delta\,\varepsilon(\delta) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{\delta\to 0} \varepsilon(\delta) = 0 \quad ,$$

ce qui nous donne l'égalité (toujours pour $h \neq k$!)

$$g(x+h, x+k) - g(x,x) - \tfrac{1}{2} f''(x)(h+k) = \delta_{h,k}\,\varepsilon(\delta_{h,k}) \quad .$$

D'autre part, pour $h = k$ on a

$$\begin{aligned} g(x+h, x+k) - g(x,x) - \tfrac{1}{2} f''(x)(h+k) &= f'(x+h) - f'(x) - f''(x)\,h \\ &= h\,\varepsilon(h) = \delta_{h,k}\,\varepsilon(\delta_{h,k}) \quad , \end{aligned}$$

où la dernière égalité est une conséquence directe de l'égalité $h = k$ qui implique que pour tout $\theta_{h,k} \in \,]0,1[$ on a $\delta_{h,k} = h$. De plus, la définition de $\delta_{h,k}$ implique qu'on a l'inégalité

$$\begin{aligned} |\delta_{h,k}| &\leqslant \theta_{h,k} \cdot |h| + (1-\theta_{h,k}) \cdot |k| \\ &\leqslant \theta_{h,k} \cdot \|(h,k)\|_\infty + (1-\theta_{h,k}) \cdot \|(h,k)\|_\infty = \|(h,k)\|_\infty \quad . \end{aligned}$$

Si on met tous nos résultats ensemble, on trouve :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \delta_{h,k} = 0$$

et

$$\begin{aligned} &\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|g(x+h,x+k) - g(x,x) - \frac{1}{2} f''(x)(h+k)|}{\|(h,k)\|_\infty} \\ &\qquad = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\delta_{h,k}\,\varepsilon(\delta_{h,k})|}{\|(h,k)\|_\infty} \leqslant \lim_{(h,k)\to(0,0)} |\varepsilon(\delta_{h,k})| = 0 \quad , \end{aligned}$$

ce qui montre que (17.22) est bien la différentielle de g au point (x,x).

• (v) : Si, pour $x, y \in I$, on définit la fonction $h : [0,1] \to \mathbf{R}$ par $h(t) = f\big(tx + (1-t)y\big)$, alors on a

$$h'(t) = (x-y) \cdot f'\big(tx + (1-t)y\big) \quad .$$

Par le théorème fondamental de l'analyse on a donc

$$f(x) - f(y) \equiv h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)\ \mathrm{d}t = (x-y) \cdot \int_0^1 f'\big(tx + (1-t)y\big)\ \mathrm{d}t \quad .$$

Il s'ensuit immédiatement que pour $x \neq y$ on a bien

$$g(x,y) = \int_0^1 f'\big(tx + (1-t)y\big)\ \mathrm{d}t \quad .$$

D'autre part, pour $x = y$ on a

$$\int_0^1 f'\big(tx + (1-t)x\big)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 f'(x)\ \mathrm{d}t = f'(x) \quad ,$$

ce qui montre qu'aussi pour $x = y$ on a l'égalité demandée.

• (vi) : Si f est de classe C^2, alors la fonction f' est de classe C^1. Selon le théorème de la dérivabilité sous le signe d'intégration (une conséquence “directe” du théorème de convergence dominée de Lebesgue) on en déduit que les dérivées partielles sont données par

$$\begin{aligned}(\partial_1 f)(x,y) &= \int_0^1 t\cdot f''\big(tx+(1-t)y\big)\ \mathrm{d}t\\ (\partial_2 f)(x,y) &= \int_0^1 (1-t)\cdot f''\big(tx+(1-t)y\big)\ \mathrm{d}t\end{aligned} \tag{17.23}$$

et que ces dérivées partielles sont des fonctions continues. Par [5.14] il s'ensuit que g est bien de classe C^1.

Dans ce cas précis on peut aussi donner une preuve directe en utilisant le théorème qui dit que toute fonction continue sur un (intervalle) compact est uniformément continue. On l'utilise pour montrer que les expressions (17.23) sont bien les dérivées partielles de g et que ces expressions définissent des fonctions continues (sur $I\times I$).

On commence avec la remarque qu'il existe $\delta_o>0$ tel que

$$J\equiv[\min(x,y)-\delta_o,\max(x,y)+\delta_o]\subset I\quad,$$

simplement parce que I est un ouvert. Ensuite on invoque le théorème cité ci-dessus appliqué à la fonction continue f'' pour obtenir la propriété

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall s,t\in J\quad:\quad |s-t|<\delta\ \Rightarrow\ |f''(s)-f''(t)|<\varepsilon\quad. \tag{17.24}$$

Pour montrer que l'expression (17.23) donne bien la dérivée partielle $(\partial_1 g)(x,y)$, il faut montrer qu'on a

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}-\int_0^1 t\cdot f''\big(tx+(1-t)y\big)\ \mathrm{d}t\right|=0\quad.$$

Pour le faire on commence avec la remarque que pour tout h (vérifiant $|h|<\delta_o$) et tout $t\in[0,1]$ il existe, selon l'égalité des accroissements finis [3.3] appliqué à la fonction f', un $\theta_{h,t}\in\,]0,1[$ tel que

$$f'\big(tx+th+(1-t)y\big)-f'\big(tx+(1-t)y\big)=th\,f''\big(tx+\theta_{h,t}th+(1-t)y\big)\quad.$$

Avec ces préparations on prend $\varepsilon>0$ arbitraire, par (17.24) on obient $\delta>0$ et ensuite on calcule avec $|h|<\min(\delta,\delta_o)$ (et donc en particulier $|\theta_{h,t}th|<\delta$) :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}-\int_0^1 t\cdot f''\big(tx+(1-t)y\big)\ \mathrm{d}t\right|\\ &\quad\leqslant\int_0^1\left|\frac{f'\big(tx+th+(1-t)y\big)-f'\big(tx+(1-t)y\big)-th\,f''\big(tx+(1-t)y\big)}{h}\right|\ \mathrm{d}t\\ &\quad=\int_0^1\left|\frac{th\,f''\big(tx+\theta_{h,t}th+(1-t)y\big)-th\,f''\big(tx+(1-t)y\big)}{h}\right|\ \mathrm{d}t\\ &\quad=\int_0^1 t\cdot\big|\,f''\big(tx+\theta_{h,t}th+(1-t)y\big)-f''\big(tx+(1-t)y\big)\,\big|\ \mathrm{d}t\\ &\quad\overset{(17.24)}{\leqslant}\int_0^1 t\cdot\varepsilon\ \mathrm{d}t=\tfrac12\,\varepsilon<\varepsilon\quad.\end{aligned}$$

Ainsi on a vérifié la définition de limite (pour tout $\varepsilon>0$ on a trouvé un $\delta>0$ tel que…) et on peut affirmer qu'on a bien

$$(\partial_1 g)(x,y)=\int_0^1 t\cdot f''\big(tx+(1-t)y\big)\ \mathrm{d}t\quad.$$

La preuve pour $(\partial_2 g)(x,y)$ est très similaire et laissé aux bons soins du lecteur assidu.

Reste à montrer que les expressions (17.23) définissent des fonctions continues. L'argument est plus simple que ci-dessus : on prend $\varepsilon > 0$, par (17.24) on obtient $\delta > 0$ et on calcule pour $\|(h,k)\|_\infty| < \delta$ (et donc en particulier $|th + (1-t)k| < \delta$) :

$$\begin{aligned}
&|(\partial_1 g)(x+h, y+k) - (\partial_1 g)(x,y)| \\
&\quad = \left| \int_0^1 t \cdot \Big(f''\big(tx + (1-t)y + th + (1-t)k\big) - f''\big(tx + (1-t)y\big)\Big) \,\mathrm{d}t \right| \\
&\quad \leqslant \int_0^1 t \cdot \Big| f''\big(tx + (1-t)y + th + (1-t)k\big) - f''\big(tx + (1-t)y\big)\Big| \,\mathrm{d}t \\
&\quad \overset{(17.24)}{\leqslant} \int_0^1 t \cdot \varepsilon \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \quad .
\end{aligned}$$

Ainsi on a montré, avec la définition de limite, que la fonction $\partial_1 g$ est continue au point $(x,y) \in I \times I$. L'argument pour $\partial_2 g$ étant similaire, on a donc montré que les deux dérivées partielles de g sont continues sur $I \times I$ et donc, comme dit ci-dessus par [5.14], g est de classe C^1.

Solution de [16.56]. • (i) : La fonction f, étant continue, admet une primitive F (qui est donc de classe C^1) ; on pourrait prendre

$$F(z) = \int_0^z f(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

Avec la fonction F on peut réécrire la définition de la fonction g comme

$$g(x,y) = \frac{F(xy) - F(x)}{x} \quad .$$

Comme composée de fonctions de classe C^1 sur $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, g est de classe C^1. Ses dérivées partielles sont données par

$$\begin{aligned}
(\partial_1 g)(x,y) &= -\frac{F(xy) - F(x)}{x^2} + \frac{y\,F'(xy) - F'(x)}{x} \\
&= -\frac{F(xy) - F(x)}{x^2} + \frac{y\,f(xy) - f(x)}{x}
\end{aligned} \tag{17.25}$$

et

$$(\partial_2 g)(x,y) = f(xy) \quad .$$

• (ii) : Pour montrer qu'on peut prolonger g par continuité sur $\mathbf{R}^2$, il faut que les limites

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_o)} g(x,y)$$

existent pour tout $y_o \in \mathbf{R}$. On calcule donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,y_o)} g(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,y_o)} \frac{F(xy) - F(x)}{x} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,y_o)} \left(y \cdot \frac{F(xy) - F(0\cdot y)}{xy} - \frac{F(x) - F(0)}{x} \right) \\
&= y_o \cdot F'(0) - F'(0) = (y_o - 1)\cdot f(0) \quad .
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que si on pose $\widetilde{g}(0,y_o) = (y_o - 1)\,f(0)$, alors $\widetilde{g}$ sera continue sur $\mathbf{R}^2$.

- (iii) : Le calcul de $(\partial_2\widetilde{g})(0,y_o)$ est assez simple :

$$(\partial_2\widetilde{g})(0,y_o) = \lim_{t\to 0} \frac{\widetilde{g}(0,y_o+t) - \widetilde{g}(0,y_o)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(y_o+t-1)\,f(0) - (y_o-1)\,f(0)}{t} = f(0) \quad .$$

Pour $(\partial_1\widetilde{g})(0,y_o)$ il faut calculer

$$(\partial_1\widetilde{g})(0,y_o) = \lim_{x\to 0} \frac{\widetilde{g}(x,y_o) - \widetilde{g}(0,y_o)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F(xy_o) - F(x) - x\,(y_o-1)\,f(0)}{x^2} \quad . \tag{17.26}$$

Pour calculer cette limite il y a (au moins) deux façons différentes. La première utilise la règle de L'Hôpital (deux fois). On constate d'abord que dans le quotient numérateur et dénominateur tendent vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que, si la limite du quotient des dérivées existe, alors on aura l'égalité

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(xy_o) - F(x) - x\,(y_o-1)\,f(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{y_o\,f(xy_o) - f(x) - (y_o-1)\,f(0)}{2x} \quad .$$

Et encore une fois on constate que, dans le quotient de la limité à droite, numérateur et dénominateur tendent vers 0 quand x tend vers 0. Et de nouveau on en déduit que, si la limite du quotient des dérivées existe, alors on aura l'égalité

$$\lim_{x\to 0} \frac{y_o\,f(xy_o) - f(x) - (y_o-1)\,f(0)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(y_o)^2\,f'(xy_o) - f'(x)}{2} = \tfrac{1}{2}\big((y_o)^2 - 1\big)\,f'(0) \quad .$$

Il semble donc que la dernière limite existe et donc qu'on peut remonter nos calcul et conclure qu'on a l'égalité

$$(\partial_1\widetilde{g})(0,y_o) = \tfrac{1}{2}\big((y_o)^2 - 1\big)\,f'(0) \quad .$$

Le petit hic avec cet argument est qu'on ne sait pas si f est dérivable, seulement que $f'(0)$ existe ! On ne peut donc pas appliquer la règle de L'Hôpital à la deuxième limite, il faut la calculer directement. Ce n'est pas difficile en utilisant la définition de la dérivée de f en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{y_o\,f(xy_o) - f(x) - (y_o-1)\,f(0)}{2x} = \lim_{x\to 0} \left(\tfrac{1}{2}\,(y_o)^2 \cdot \frac{f(xy_o) - f(0)}{xy_o} - \frac{f(x) - f(0)}{2x} \right) = \tfrac{1}{2}\,(y_o)^2\,f'(0) - f'(0) \quad .$$

On arrive à la même conclusion, sans avoir utilisé la dérivabilité de f ailleurs qu'en 0.

Donnons un petit rappel sur la règle de L'Hôpital. Ça commence avec un petit lemme.

Lemme. *Soit $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ deux fonctions, continues sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in\,]a,b[$. Alors il existe $c \in\,]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad .$$

Preuve. Il est tentant de vouloir appliquer l'égalité des accroissements finis aux numérateur et dénominateur séparément, mais si on fait cela, on obtient le quotient $f'(c)/g'(c')$ sans garantie qu'on a l'égalité $c = c'$. On commence donc avec la remarque que l'hypothèse $g'(x) \neq 0$ implique

que g est strictement monotone (croissante **ou** décroissante) sur $[a,b]$ et donc qu'on a $g(b) \neq g(a)$. Ensuite on définit la fonction $h : [a,b] \to \mathbf{R}$ par

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g(x) \quad .$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et l'égalité des accroissements finis appliquée à h nous donne $c \in]a,b[$ tel que

$$0 = h(b) - h(a) = (b-a) \cdot h'(c) \quad .$$

Et l'égalité $h'(c) = 0$ (avec l'hypothèse $g'(c) \neq 0$) donne l'égalité annoncée. $\boxed{CQFD}$

Lemme (Règle de L'Hôpital, version simple [6]). Soit $f, g :]a,b[\to \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables. Sous les trois hypothèses suivantes :

(i) $g \neq 0$ et $g' \neq 0$ sur $]a,b[$,

(ii) $\lim_{x\uparrow b} f(x) = 0 = \lim_{x\uparrow b} g(x)$ et

(iii) $\lim_{x\uparrow b} f'(x)/g'(x)$ existe,

alors on a l'égalité $\displaystyle\lim_{x\uparrow b} f(x)/g(x) = \lim_{x\uparrow b} f'(x)/g'(x)$.

Preuve. Si on note $\ell = \lim_{x\uparrow b} f'(x)/g'(x)$, alors il faut montrer

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall b - \delta < x < b : |f(x)/g(x) - \ell| < \varepsilon \quad .$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Alors par hypothèse il existe $\delta > 0$ avec la propriété

$$\forall b - \delta < x < b : |f'(x)/g'(x) - \ell| < \varepsilon \quad . \tag{17.27}$$

Soit maintenant $b - \delta < x < b$ arbitraire. Alors, si on étend la définition de f et de g à $[x,b]$ en posant $f(b) = g(b) = 0$, alors f et g seront continues sur $[x,b]$ et dérivable sur $]x,b[$. En plus, $g' \neq 0$ sur cette intervalle. On peut donc appliquer le lemme précédent et conclure qu'il existe $c \in]x,b[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad .$$

Pour ce c on aura (aussi) $b - \delta < c < b$ et donc par (17.27) on aura

$$|f(x)/g(x) - \ell| = |f'(c)/g'(c) - \ell| < \varepsilon \quad .$$ $\boxed{CQFD}$

Une autre façon de calculer la limite dans (17.26) est d'utiliser la notion de développement limité. F est de classe C^1 avec $F' = f$ et f est dérivable en 0. Donc F est deux fois dérivable en 0, ce qui implique qu'il existe un développement limité d'ordre 2 de F en 0 donné par

$$F(z) = F(0) + z\,F'(0) + \tfrac{1}{2}\,z^2\,F''(0) + z^2\,\varepsilon(z) \quad ,$$

avec $\displaystyle\lim_{z\to 0}\varepsilon(z) = 0$. Avec ce qu'on sait de F on a donc

$$F(z) = F(0) + z\,f(0) + \tfrac{1}{2}\,z^2\,f'(0) + z^2\,\varepsilon(z) \quad .$$

Si on substitue cela dans la limite à calculer, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{F(xy_o) - F(x) - x\,(y_o - 1)\,f(0)}{x^2} \\
&\qquad = \frac{\tfrac{1}{2}\,(xy_o)^2\,f'(0) + (xy_o)^2\,\varepsilon(xy_o) - \tfrac{1}{2}\,x^2\,f'(0) - x^2\,\varepsilon(x)}{x^2} \\
&\qquad = \tfrac{1}{2}\,(y_o)^2\,f'(0) + (y_o)^2\,\varepsilon(xy_o) - \tfrac{1}{2}\,f'(0) - \varepsilon(x) \quad .
\end{aligned}$$

Avec $\displaystyle\lim_{z\to 0}\varepsilon(z) = 0$ on en déduit le même résultat pour $(\partial_1\widetilde{g})(0, y_o)$.

6. Il existe des variantes où on peut remplacer b par ∞ ou dans lesquels on peut remplacer l'hypothèse $\lim_{x\uparrow b} f(x) = 0 = \lim_{x\uparrow b} g(x)$ par l'hypothèse $\lim_{x\uparrow b} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\uparrow b} g(x)$. Des versions avec la limite à l'extrémité gauche existent évidemment aussi.

• (iv) : Pour qu'il existe une telle fonction φ, il faut et il suffit qu'on a $(\partial_1 g)(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. Avec (17.25) cela devient l'égalité pour tout x, y :

$$\frac{F(xy) - F(x)}{x^2} = \frac{y\, f(xy) - f(x)}{x} \quad \Leftrightarrow \quad F(xy) - xy\, f(xy) = F(x) - x\, f(x) \ .$$

Étant donné que ceci doit être vrai pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, il faut en particulier avoir, pour tout $y \in \mathbf{R}$ et $x = 1$, l'égalité

$$F(y) - y\, F'(y) = F(1) - f(1) \ .$$

Si on résout l'équation différentielle $F(y) - y\, F'(y) = c$, $c \in \mathbf{R}$, on trouve comme solutions

$$F(y) = by + c \ ,$$

avec $b \in \mathbf{R}$ une constante arbitraire. Si on substitue cette solution dans l'équation $(\partial_1 g)(x,y) = 0$, on trouve que c'est vrai pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. La conclusion est donc qu'une telle fonction φ existe si et seulement si la fonction $f = F' = b$ est une fonction constante.

Solution de [16.57]. • (i) : Si on définit l'application $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$G(s) = \int_a^s g(t)\ \mathrm{d}t \ ,$$

alors G est une primitive de g et la fonction f s'écrit comme

$$f(x,y) = G(x+y) \ ,$$

ce qui est la composée de l'addition $A : (x,y) \mapsto x+y$ et la fonction de classe C^1 G. L'application A est linéaire et continue, donc on a l'égalité $(DA)(x,y) = A$. Par la dérivée d'une fonction composée on a donc

$$\begin{aligned}\big((Df)(x,y)\big)(h,k) &= \Big((DG)\big(A(x,y)\big)\Big)\Big(\big((DA)(x,y)\big)(h,k)\Big) \\ &= \Big((DG)\big(A(x,y)\big)\Big)(h+k) \overset{[2.6]}{=} G'(x+y)\cdot(h+k) \\ &= g(x+y)\cdot(h+k) \ .\end{aligned}$$

Si on calcule les dérivées partielles (premières) on trouve facilement

$$(\partial_1 f)(x,y) = g(x+y) = (\partial_2 f)(x,y) \ ,$$

simplement parce que dériver une intégrale par rapport à sa borne supérieure donne la fonction (à intégrer) dans cette borne. Par [5.11] on a donc

$$\big((Df)(x,y)\big)(h,k) = (\partial_1 f)(x,y)\cdot h + (\partial_2 f)(x,y)\cdot k = g'(x+y)\cdot(h+k)$$

comme trouvé avant.

• (ii) : On écrit la fonction $f(x,y) = x^y$ sous la forme $f(x,y) = \mathrm{e}^{y\cdot\ln(x)}$ (c'est la définition d'une puissance réelle !). On peut le voir comme la composée des applications “simples” suivantes :

$$(x,y) \mapsto \big(\ln(x), y\big) \mapsto y\cdot\ln(x) \mapsto \mathrm{e}^{y\cdot\ln(x)} \equiv f(x,y) \ .$$

La différentielle de la première $(x,y) \mapsto \big(\ln(x), y\big)$ est donnée par

$$(h,k) \mapsto (hx^{-1}, k) \ ,$$

celle de la deuxième $(u,v) \mapsto uv$ par

$$(h,k) \mapsto vh + uk$$

et celle de la troisième $z \mapsto \mathrm{e}^z$ par

$$h \mapsto \mathrm{e}^z\, h \ .$$

Au total on trouve donc l'application

$$(h,k) \mapsto (hx^{-1}, k) \mapsto yhx^{-1} + \ln(x)k \mapsto \mathrm{e}^{y\ln(x)}\,\big(yhx^{-1} + \ln(x)k\big) \ .$$

Si on applique les dérivées partielles on trouve

$$(\partial_1 f)(x,y) = \mathrm{e}^{y\ln(x)}\ yx^{-1} \qquad \text{et} \qquad (\partial_2 f)(x,y) = \mathrm{e}^{y\ln(x)}\ \ln(x) \ ,$$

ce qui nous donne comme différentielle l'application

$$\big((Df)(x,y)\big)(h,k) = (\partial_1 f)(x,y)\cdot h + (\partial_2 f)(x,y)\cdot k = \mathrm{e}^{y\ln(x)}\,\big(hyx^{-1} + \ln(x)k\big) \ ,$$

conforme au résultat précédent.

Solution de [16.58]. • (i) : Le déterminant est une fonction polynomiale dans les éléments de la matrice et donc c'est une application de classe C^1 (elle est même de classe C^∞ [16.66]).

• (ii) : L'espace $E = \mathrm{M}(n,\mathbf{R})$ est un espace vectoriel de dimension n^2 qu'on identifie naturellement avec $\mathbf{R}^{n^2}$ via les éléments de matrice selon

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \ .$$

Mais ces coordonnées ne sont pas indexées par une seule indice i allant de 1 à n^2, mais par deux indices i,j chacun allant de 1 à n. Si on définit les matrices $B_{ij} \in E$ en disant que tous les éléments de matrices de B_{ij} sont nuls, sauf l'élément a_{ij} qui vaut 1, alors la collection des B_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$ est la base canonique de $E = \mathrm{M}(n,\mathbf{R})$ et cette notation nous donne automatiquement l'indexation par deux indices i,j chacun allant de 1 à n. Il semble donc naturel de noter les dérivées partielles non par $\partial_i f$ (avec i allant de 1 à n^2), mais par $\partial_{ij} f$. Selon [5.8.iii] et [5.1] on aura donc la définition

$$(\partial_{ij} f)(A) = \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(A + h\,B_{ij}) - f(A)\big)}{h} \ .$$

Par exemple dans le cas $n = 3$ et $i,j = 2,3$ on obtient la définition [5.8.ii]

$$(\partial_{23} f)(A) = \lim_{h\to 0}\ h^{-1}\cdot \Bigg(\ f(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + h \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}) - f(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix})\ \Bigg) \ .$$

Si on applique ceci au point $A = \mathbf{1}$, on voit que, pour $i \neq j$ la matrice $\mathbf{1} + h\,B_{ij}$ est une matrice triangulaire avec que des 1 sur le diagonale et donc $\det(A + h\,B_{ij}) = 1$. Il s'ensuit qu'on a l'implication

$$i \neq j \qquad \Longrightarrow \qquad (\partial_{ij} f)(\mathbf{1}) = 0 \ .$$

Pour $i = j$ la matrice $\mathbf{1} + h\,B_{ii}$ est une matrice diagonale avec $n-1$ fois 1 sur les diagonale et une fois $1 + h$. On a donc $\det(\mathbf{1} + h\,B_{ii}) = 1 + h$, ce qui nous donne pour la dérivée partielle

$$(\partial_{ii} f)(\mathbf{1}) = 1 \ .$$

Si on note les éléments de matrice de H par h_{ij}, alors par [5.11] on obtient

$$\big((Df)(\mathbf{1})\big)(H) = \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_{ij} f)(\mathbf{1})\, h_{ij} = \sum_{i=1}^{n} h_{ii} = \mathrm{trace}(H) \quad .$$

• (iii) : Sachant que f est de classe C^∞, elle est différentiable en chaque point $A \in E$. Ceci nous permet de présenter deux façons différentes pour obtenir $\big((Df)(A)\big)(H)$ pour A inversible. L'observation cruciale pour les deux méthodes est l'égalité

$$\det(A+H) = \det\big(A \cdot (\mathbf{1} + A^{-1}H)\big) = \det(A) \cdot \det(\mathbf{1} + A^{-1}H) \quad . \tag{17.28}$$

La première méthode passe par les dérivées directionnelles :

$$\begin{aligned}
\big((Df)(A)\big)(H) &\overset{[5.2]}{=} (D_H f)(A) \overset{[5.1]}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\det(A+tH) - \det(A)}{t} \\
&\overset{(17.28)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\det(A) \cdot \big(\det(\mathbf{1} + tA^{-1}H) - \det(\mathbf{1})\big)}{t} \\
&= \det(A) \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\big(\det(\mathbf{1} + tA^{-1}H) - \det(\mathbf{1})\big)}{t} \\
&= \det(A) \cdot (D_{A^{-1}H} f)(\mathbf{1}) = \det(A) \cdot \big((Df)(\mathbf{1})\big)(A^{-1}H) \\
&= \det(A) \cdot \mathrm{trace}(A^{-1}H) \quad .
\end{aligned}$$

La deuxième méthode utilise directement la définition de la différentielle. La formule (17.28) suggère qu'on a l'égalité

$$\big((Df)(A)\big)(H) = \det(A) \cdot \big((Df)(\mathbf{1})\big)(A^{-1}H) \quad .$$

Pour le montrer on calcule, en utilisant la norme d'opérateur :

$$\begin{aligned}
&\lim_{H\to 0} \frac{\|f(A+H) - f(A) - \det(A) \cdot \big((Df)(\mathbf{1})\big)(A^{-1}H)\|}{\|H\|} \\
&= \lim_{H\to 0} \frac{|\det(A)| \cdot \|f(\mathbf{1} + A^{-1}H) - f(\mathbf{1}) - \big((Df)(\mathbf{1})\big)(A^{-1}H)\|}{\|H\|} \\
&= |\det(A)| \cdot \lim_{H\to 0} \frac{\|f(\mathbf{1} + A^{-1}H) - f(\mathbf{1}) - \big((Df)(\mathbf{1})\big)(A^{-1}H)\|}{\|A^{-1}H\|} \cdot \frac{\|A^{-1}H\|}{\|H\|} \\
&\leqslant |\det(A)| \cdot \lim_{H\to 0} \frac{\|f(\mathbf{1} + A^{-1}H) - f(\mathbf{1}) - \big((Df)(\mathbf{1})\big)(A^{-1}H)\|}{\|A^{-1}H\|} \cdot \|A^{-1}\| \quad .
\end{aligned}$$

Si on remarque maintenant qu'on a $\lim_{H\to 0} A^{-1}H = 0$, alors par composée de limites et le fait que $(Df)(\mathbf{1})$ est bien la différentielle de f en $\mathbf{1}$, cette limite vaut 0 comme voulu.

• (iv) : Donnons deux façons différentes de montrer qu'une matrice arbitraire A est la limite d'une suite de matrices inversibles, la première plus théorique mais rapide, le deuxième plus concrète mais plus longue.

Première méthode : Regardons le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{1}) \quad .$$

Ce polynôme de degré n a au plus n racine distinctes et donc on peut trouver une suite $\lambda_k \in \mathbf{R}$ vérifiant $P(\lambda_k) \neq 0$ et $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. On pourrait commencer avec la suite $\lambda_k = (k+1)^{-1}$ et ensuite enlever les, au plus n, éléments qui sont racines de P_A. Il s'ensuit que la suite de matrices $A_k = A - \lambda_k \mathbf{1}$ est une suite de matrices inversibles vérifiant $\lim_{k\to\infty} A_k = A$.

Deuxième méthode : Pour A il existe p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ vecteurs indépendant $e_1, \ldots, e_p$ qui forment une base de $\ker(A)$. Par le théorème de la base incomplète il existe des vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$ tels que $e_1, \ldots, e_n$ est une base de $\mathbf{R}^n$. De plus, les vecteurs $f_i = A(e_i)$ pour $i > p$ forment une base de l'image $\operatorname{im}(A) \subset \mathbf{R}^n$. De nouveau par le théorème de la base incomplète il existe des vecteurs $f_1, \ldots, f_p$ tels que $f_1, \ldots, f_n$ est une base de $\mathbf{R}^n$.

Avec ces préparations on définit les applications/matrices $A_k \in E$, $k \in \mathbf{N}^*$ par

$$i \leqslant p \quad \Rightarrow \quad A_k(e_i) = \frac{1}{k} f_i \qquad \text{et} \qquad i > p \quad \Rightarrow \quad A_k(e_i) = f_i \ .$$

Pour chaque $k \in \mathbf{N}^*$ l'application A_k envoie donc une base sur une base et donc A_k est inversible. Mais on a aussi

$$i \leqslant p \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} A_k(e_i) = 0 = A(e_i) \quad \text{et} \quad i > p \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} A_k(e_i) = f_i = A(e_i) \ ,$$

ce qui montre qu'on a $\lim_{k\to\infty} A_k = A$.

• (v) : La comatrice X d'une matrice A est définie de la façon suivante. L'élément x_{ij} de la matrice X est le déterminant de la matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ obtenu à partir de a matrice A en barrant la i-ème ligne et la j-ème colonne de cette matrice qu'on multiplie après par le signe $(-1)^{i+j}$. Ainsi on a par exemple dans le cas $n = 3$:

$$x_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det(\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}) = (-1)^{1+2} \cdot \det(\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix})$$

Maintenant on rappelle que la formule de Cramer nous dit qu'on a l'égalité

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^tX \ .$$

Ainsi on a pour A inverible les égalités

$$\big((Df)(A)\big)(H) = \det(A) \cdot \operatorname{trace}(A^{-1}H) = \operatorname{trace}\big(\det(A)A^{-1}H\big) = \operatorname{trace}({}^tXH) \ .$$

Maintenant on constate que les éléments de la comatrice sont des fonctions polynomiale donc continues dans les éléments de la matrice d'origine. Soit maintenant A une matrice quelconque et soit $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite de matrices inversibles vérifiant $\lim_{k\to\infty} A_k = A$. Si on note X_k la comatrice de A_k, alors on a $\lim_{k\to\infty} X_k = X$. Et parce que f est de classe C^1, Df est continue, ce qui permet de calculer (aussi parce que la fonction trace est continue sur $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$)

$$\big((Df)(A)\big)(H) = \lim_{k\to\infty} \big((Df)(A_k)\big)(H) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{trace}({}^tX_kH) = \operatorname{trace}({}^tXH) \ .$$

Et oui, on pouvait trouver ce résultat directement en remarquant qu'on peut calculer le déterminant d'une matrice en développant par une ligne ou une colonne en utilisant les éléments de la comatrice. Ainsi pour i fixé (un développement du déterminant par la i-ème ligne) on a l'égalité

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_{ij} \ .$$

Il suffit maintenant de remarquer que les éléments $x_{i1}, \ldots, x_{in}$ de la comatrice de A ne dépendent pas des éléments $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ de A. Il s'ensuit qu'on peut facilement calculer les dérivées partielles pour i fixé et $j = 1, \ldots, n$:

$$(\partial_{ij} f)(A) = x_{ij} \quad .$$

Comme avant, par [5.11] on en déduit le résultat

$$\begin{aligned}\big((Df)(A)\big)(H) &= \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_{ij} f)(A)\, h_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}\, h_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} ({}^t X)_{ji}\, h_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} ({}^t X H)_{jj} = \mathrm{trace}({}^t X H) \quad .\end{aligned}$$

Solution de [16.59]. Ce qu'il faut montrer est l'existence, pour tout $(t, x) \in U$, d'une constante $k > 0$ et d'un ouvert $V \subset U$ tel que $(t, x) \in V$ et tel que pour tout $(s, y), (s, z) \in V$ on a

$$\|f(s, y) - f(s, z)\| \leqslant k \cdot \|y - z\| \quad .$$

Pour le montrer on suit pas par pas la preuve de [16.31.ii]. On définit l'application $g : U \to \mathbf{R}$ par $g(t, x) = \|(D_2 f)(t, x)\|$, ce qui est une application continue car $D_2 f$ est continue par hypothèse. Pour $\varepsilon = 1$ il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$g\big(B_\delta(t, x) \cap U\big) \subset B_1\big(g(t, x)\big) \quad .$$

Il s'ensuit en particulier que pour tout $(s, w) \in B_\delta(t, x)$ on a

$$\|(Df)(s, w)\| < \|(Df)(t, x)\| + 1 \quad . \tag{17.29}$$

Étant donné que U est un ouvert, il existe $\delta_o > 0$ tel que $B_{\delta_o}(t, x) \subset U$. On pose $V = B_{\delta_1}(t, x) \subset B_\delta(t, x) \cap U$ avec $\delta_1 = \min(\delta, \delta_o)$, ce qui est donc un voisinage ouvert de (t, x) contenu dans U, et $k = \|(D_2 f)(t, x)\| + 1$.

Pour montrer que ce k et ce V conviennent, on raisonne comme suit. D'abord on rappelle qu'on a (à cause de notre choix de la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur des produits [1.13]) l'égalité

$$V = B_{\delta_1}(t, x) = B_{\delta_1}(t) \times B_{\delta_1}(x) \quad .$$

Ensuite on fixe $s \in B_{\delta_1}(t) = \,]t - \delta_1, t + \delta_1[$ et on rappelle que la définition de la différentielle partielle $(D_2 f)(s, y)$ dit que c'est la différentielle de l'application partielle $f_s(z)$ définie par $f_s(z) = f(s, z)$. Et finalement on rappelle que la boule $B_{\delta_1}(x)$ est convexe et donc que pour tout $y, z \in B_{\delta_1}(x)$ le segment $[y, z]$ est inclu dans $B_{\delta_1}(x)$. Avec ces préparations on peut invoquer l'inégalité des accroissements finis [3.6] pour conclure :

$$\begin{aligned}\|f(s, y) - f(s, z)\| &\equiv \|f_s(y) - f_s(z)\| \\ &\leqslant \sup_{w \in B_{\delta_1}(x)} \|(Df_s)(w)\| \cdot \|y - z\| \\ &\equiv \sup_{w \in B_{\delta_1}(x)} \|(D_2 f)(s, w)\| \cdot \|y - z\| \overset{(17.29)}{\leqslant} k \cdot \|y - z\| \quad .\end{aligned}$$

Solution de [16.60]. • (i) : On définit l'application $g : [0, 1] \to F$ par

$$g(t) = f\big(x + t(y - x)\big) \quad .$$

Par hypothèse elle est continue et en plus on a

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f\big(a+(t+h)(b-a)\big) - f\big(a+t(b-a)\big)}{h}$$
$$= L_{b-a}f\big(a+t(b-a)\big) \quad ,$$

ce qui montre qu'elle est dérivable à droite sur $]0,1[$. On peut donc appliquer [3.5] avec la fonction $h(t) = k\,t \cdot \|b-a\|$ et conclure qu'on a

$$\|f(b)-f(a)\| \equiv \|g(1)-g(0)\| \leqslant h(1)-h(0) = k\cdot\|b-a\| \quad .$$

• (ii) : Si on considère la fonction $g(x) = f(x) - \big(M(a)\big)(x)$, alors il est immédiat qu'on a

$$(L_v g)(x) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{g(a+tv)-g(a)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(a+tv)-f(a)+\big(M(a)\big)(tv)}{t}$$
$$= (L_v f)(x) - \big(M(a)\big)v = \big(M(x)-M(a)\big)(v) \quad .$$

L'application M étant continue au point a, il existe donc pour tout $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in B_\delta(a)\cap U : \|M(x)-M(a)\| < \varepsilon \quad .$$

Par le résultat de (i) on en déduit (avec $y = a$) l'inégalité

$$\forall x \in B_\delta(a)\cap U : \|g(x)-g(a)\| \leqslant \varepsilon\cdot\|x-a\| \quad ,$$

ce qui est équivalent à l'inégalité

$$\forall x \in U : \|x-a\| < \delta \implies \frac{\big\|f(x)-f(a)-\big(M(a)\big)(x-a)\big\|}{\|x-a\|} \leqslant \varepsilon \quad .$$

Et ceci est la définition que $M(a)$ est la différentielle de f au point a. Strictement parlant ce n'est pas vraiment la définition à cause du fait qu'on a $\leqslant \varepsilon$ et pas $< \varepsilon$. Mais cela est facilement réparable en prenant $\delta > 0$ tel qu'on a $\|M(x)-M(a)\| < \varepsilon/2$, auquel cas on aurait obtenu une inégalité avec $\leqslant \varepsilon/2$, ce qui est inférieur (strict) à ε.

Les solutions de §6

Solution de [16.61]. On définit l'application $\Psi : \mathcal{L}^{(2)}(E_1\times E_2; F) \to \mathcal{L}\big(E_1; \mathcal{L}(E_2; F)\big)$ par la procédure suivante : pour $B \in \mathcal{L}^{(2)}(E_1 \times E_2; F)$ on doit définir un élément $\Psi(B) \in \mathcal{L}\big(E_1; \mathcal{L}(E_2; F)\big)$, ce qui veut dire que pour tout $e_1 \in E_1$ on doit définir un élément $\big(\Psi(B)\big)(e_1) \in \mathcal{L}(E_2; F)$. On le définit par

$$\big(\Psi(B)\big)(e_1) : E_2 \to F \quad , \quad e_2 \mapsto B(e_1, e_2) \in F \ .$$

Mais attention : le fait d'écrire cette formule ne veut pa dire que cela appartient aux espaces concernés ! Il y a plusieurs vérifications à faire. On vérifie aisément (laissé au lecteur assidu) que l'application $\big(\Psi(B)\big)(e_1) : E_2 \to F$ est bien linéaire. Pour montrer qu'elle est continue on fait le calcul

$$\Big\|\Big(\big(\Psi(B)\big)(e_1)\Big)(e_2)\Big\| \equiv \|B(e_1, e_2)\| \leqslant \|B\| \cdot \|e_1\| \cdot \|e_2\| \ ,$$

ce qui montre (à l'aide de [1.23]) que $\big(\Psi(B)\big)(e_1)$ est continue avec $\|\big(\Psi(B)\big)(e_1)\| \leqslant \|B\| \cdot \|e_1\|$.

Une fois qu'on sait qu'on a bien $\big(\Psi(B)\big)(e_1) \in \mathcal{L}(E_2; F)$, on s'intéresse à l'application $\Psi(B) : E_1 \to \mathcal{L}(E_2; F)$. On laisse (de nouveau) au lecteur le soin de vérifier que cette application est linéaire. Et pour la continuité il suffit de remarquer qu'on vient de montrer qu'on a l'inégalité $\|\big(\Psi(B)\big)(e_1)\| \leqslant \|B\| \cdot \|e_1\|$, ce qui montre (toujours à l'aide de [1.23]) que $\Psi(B)$ est continue avec $\|\Psi(B)\| \leqslant \|B\|$.

La dernière étape est de remarquer qu'on vient de montrer qu'on a bien $\Psi(B) \in \mathcal{L}\big(E_1; \mathcal{L}(E_2; F)\big)$. On a donc bien une application Ψ de $\mathcal{L}^{(2)}(E_1\times E_2; F)$ à valeurs dans $\mathcal{L}\big(E_1; \mathcal{L}(E_2; F)\big)$. On laisse une dernière fois au lecteur le soin de vérifier que cette application est linéaire et on termine avec la remarque qu'on a montré l'inégalité $\|\Psi(B)\| \leqslant \|B\|$, ce qui montre que Ψ est continue avec $\|\Psi\| \leqslant 1$.

Pour montrer que Ψ est un isomorphisme isométrique, il "suffit" de montrer que Ψ est bijective et que sa réciproque vérifie également $\|\Psi^{-1}\| \leqslant 1$. On le fait en construisant explicitement la réciproque (sans le dire). Pour $A \in \mathcal{L}\big(E_1; \mathcal{L}(E_2; F)\big)$ on définit l'application $\Phi(A) : E_1 \times E_2 \to F$ par

$$\big(\Phi(A)\big)(e_1, e_2) = \big(A(e_1)\big)(e_2) \ .$$

Pour montrer que $\Phi(A)$ est bilinéaire on fait d'abord la remarque que A est linéaire (continue) et donc qu'on a l'égalité

$$A(e_1 + \lambda e_1') = A(e_1) + \lambda A(e_1') \ .$$

Si on applique cette égalité (d'applications linéaire continues de E_2 dans F) à $e_2+\mu e_2'$ on obtient

$$\begin{aligned}\big(\Phi(A)\big)(e_1 + \lambda e_1', e_2 + \mu e_2') &\equiv \big(A(e_1 + \lambda e_1')\big)(e_2 + \mu e_2')\\ &= \big(A(e_1)\big)(e_2) + \lambda \cdot \big(A(e_1')\big)(e_2)\\ &\qquad + \mu \cdot \big(A(e_1)\big)(e_2') + \lambda\mu \cdot \big(A(e_1')\big)(e_2')\\ &= \big(\Phi(A)\big)(e_1, e_2) + \lambda \cdot \big(\Phi(A)\big)(e_1', e_2)\\ &\qquad + \mu \cdot \big(\Phi(A)\big)(e_1, e_2') + \lambda\mu \cdot \big(\Phi(A)\big)(e_1', e_2') \ ,\end{aligned}$$

ce qui dit bien que $\Phi(A)$ est bilinéaire. Pour montrer qu'elle est aussi continue, on fait le calcul

$$\big\|\big(\Phi(A)\big)(e_1, e_2)\big\| \equiv \big\|\big(A(e_1)\big)(e_2)\big\| \leqslant \|A(e_1)\| \cdot \|e_2\| \leqslant \|A\| \cdot \|e_1\| \cdot \|e_2\| \ ,$$

ce qui montre (à l'aide de [6.6]) que $\Phi(A)$ est (bilinéaire) continue avec $\|\Phi(A)\| \leqslant \|A\|$.

Pour terminer on montre que Φ est bien la réciproque de Ψ :

$$\Big(\Phi\big(\Psi(B)\big)\Big)(e_1,e_2) = \Big(\big(\Psi(B)\big)(e_1)\Big)(e_2) = B(e_1,e_2)$$

et

$$\bigg(\Big(\Psi\big(\Phi(A)\big)\Big)(e_1)\bigg)(e_2) = \big(\Phi(A)\big)(e_1,e_2) = \big(A(e_1)\big)(e_2) \ ,$$

ce qui montre bien qu'on a $\Phi\big(\Psi(B)\big) = B$ et $\Psi\big(\Phi(A)\big) = A$. Ψ est donc bijective avec $\Phi = \Psi^{-1}$ et on a en plus (parce que $\|\Psi\| \leqslant 1$ et $\|\Phi\| \leqslant 1$)

$$\|B\| = \big\|\Phi\big(\Psi(B)\big)\big\| \leqslant \|\Psi(B)\| \leqslant \|B\| \ ,$$

et donc pour tout $B \in \mathcal{L}^{(2)}(E_1 \times E_2; F)$ on a bien $\|\Psi(B)\| = \|B\|$, terminant la preuve que Ψ est un isomorphisme isométrique.

Solution de [16.62]. • (i) : Il est immédiat que $\Phi(f,\varphi)$ est une application linéaire, donc il reste sa continuité, pour laquelle on fait le calcul

$$\begin{aligned}\|\Phi(f,\varphi)\| &= \sup_{e\in E^*} \frac{\big\|\big(\Phi(f,\varphi)\big)(e)\big\|}{\|e\|} = \sup_{e\in E^*} \frac{\|\varphi(e)\cdot f\|}{\|e\|} \\ &= \sup_{e\in E^*} \frac{|\varphi(e)|\cdot\|f\|}{\|e\|} = \|f\|\cdot \sup_{e\in E^*}\frac{|\varphi(e)|}{\|e\|} = \|f\|\cdot\|\varphi\| \ .\end{aligned}$$

Ce calcul montre que $\Phi(f,\varphi)$ est continue avec $\|\Phi(f,\varphi)\| = \|f\|\cdot\|\varphi\|$.

- (ii) : Pour la bilinéarité de Φ on calcule :

$$\begin{aligned}\big(\Phi(f_1+\lambda f_2,\varphi)\big)(e) &= \varphi(e)\cdot(f_1+\lambda f_2) = \varphi(e)\cdot f_1 + \lambda\cdot\varphi(e)\cdot f_2 \\ &= \big(\Phi(f_1,\varphi)\big)(e) + \lambda\cdot\big(\Phi(f_2,\varphi)\big)(e) \\ &= \big(\Phi(f_1) + \lambda\cdot\Phi(f_2,\varphi)\big)(e) \ ,\end{aligned}$$

ce qui montre qu'on a bien

$$\Phi(f_1+\lambda f_2,\varphi) = \Phi(f_1) + \lambda\cdot\Phi(f_2,\varphi)$$

et on calcule

$$\begin{aligned}\big(\Phi(f,\varphi_1+\lambda\varphi_2)\big)(e) &= (\varphi_1+\lambda\varphi_2)(e)\cdot f = \varphi_1(e)\cdot f + \lambda\cdot\varphi_2(e)\cdot f \\ &= \big(\Phi(f,\varphi_1)\big)(e) + \lambda\cdot\big(\Phi(f,\varphi_2)\big)(e) \\ &= \big(\Phi(f,\varphi_1) + \lambda\cdot\Phi(f,\varphi_2)\big)(e) \ ,\end{aligned}$$

ce qui montre qu'on a bien

$$\Phi(f,\varphi_1+\lambda\varphi_2) = \Phi(f,\varphi_1) + \lambda\cdot\Phi(f,\varphi_2) \ ,$$

terminant ainsi que Φ est bilinéaire. Pour la continuité on a déjà vu qu'on a toujours $\|\Phi(f,\varphi)\| = \|f\|\cdot\|\varphi\|$, montrant que Φ est continue avec $\|\Phi\| = 1$.

Solution de [16.63]. • (i) : La linéarité de B étant évident, on détermine $\|B\|$ par le calcul

$$\begin{aligned}\|B\| &= \sup_{x\in E^*}\frac{\|B(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in E^*}\frac{\|\varphi(x)\cdot y\|}{\|x\|} = \sup_{x\in E^*}\frac{|\varphi(x)|\cdot\|y\|}{\|x\|} \\ &= \|y\|\cdot\sup_{x\in E^*}\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \|y\|\cdot\|\varphi\| \ .\end{aligned}$$

• (ii) : Pour $\varepsilon > 0$ on a $\|A\| \cdot (1-\varepsilon) < \|A\|$ (parce que $\|A\| \neq 0$) et donc par définition de $\|A\|$ (et la définition d'un sup) il existe $y \in F^*$ tel que

$$\frac{\|A(y)\|}{\|y\|} > \|A\| \cdot (1-\varepsilon) \quad .$$

• (iii) : Avec le y trouvé en (ii) et l'application B définie en (i) on a :

$$\begin{aligned}\big\|A\big(B(x)\big)\big\| &= \big\|A\big(\varphi(x)\cdot y\big)\big\| = |\varphi(x)| \cdot \|A(y)\| \\ &= \big(\,|\varphi(x)| \cdot \|y\|\,\big) \cdot \frac{\|A(y)\|}{\|y\|} = \|B(x)\| \cdot \frac{\|A(y)\|}{\|y\|} \quad .\end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'on a (parce que $\|B\| \neq 0$)

$$\|A \circ B\| = \|B\| \cdot \frac{\|A(y)\|}{\|y\|} > \|B\| \cdot \|A\| \cdot (1-\varepsilon) \quad .$$

• (iv) : Selon [1.26] on a $\|A \circ B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$, ce qui montre (avec [1.23]) que $\|\mathcal{C}\| \leqslant 1$. Mais on vient de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in \mathcal{L}(F;G)^*$ et $B \in \mathcal{L}(E;F)^*$ tel que

$$\frac{\mathcal{C}(A,B)}{\|A\| \cdot \|B\|} > 1 - \varepsilon \quad ,$$

ce qui montre qu'on doit avoir $\|\mathcal{C}\| \geqslant 1$.

Solution de [16.64]. • (i) : Pour simplifier les notations, on définit pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ les coefficients a_ℓ, $\ell > n$ comme $a_\ell = 0$. Autrement dit, on identifie le polynôme P avec une suite $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ de coefficients avec la propriété que $a_\ell = 0$ pour tout $\ell > \deg(P)$. Ceci nous permet d'écrire la définition de B comme

$$B(P,Q) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k\, b_k \quad ,$$

sachant que la somme est une somme finie.

Soient maintenant P, Q et P' des polynômes avec coefficients a_k, b_k et a'_k respectivement. Alors pour $\lambda \in \mathbf{R}$ on a :

$$\begin{aligned}B(P+\lambda P', Q) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\,(a_k + \lambda a'_k)\, b_k \overset{\text{somme finie!}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k\, b_k + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k\, a'_k\, b_k \\ &= B(P,Q) + \lambda \cdot B(P',Q) \quad .\end{aligned}$$

Ensuit on calcule :

$$B(P,Q) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k \cdot b_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\, b_k\, a_k = B(Q,P) \quad .$$

L'application B est donc symétrique et linéaire dans la première variable. Par la symétrie elle est donc aussi linéaire dans la deuxième variable, donc B est une application bilinéaire symétrique.

• (ii) : On calcule directement (en gardant les degrés de P et Q dans la définition de B)

$$|B(P,Q)| = \left| \sum_{k=0}^{\min(n,m)} k\, a_k\, b_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{\min(n,m)} k \cdot |a_k| \cdot |b_k|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \bigl(n \cdot \max_{0\leqslant \ell\leqslant n} |a_\ell|\,\bigr) \cdot |b_k| \leqslant \bigl(n \cdot \max_{0\leqslant \ell\leqslant n} |a_\ell|\,\bigr) \cdot \sum_{k=0}^{m} |b_k|$$

Avec $C_P = n \cdot \max_{0\leqslant \ell\leqslant n} |a_\ell|$ on aura donc montré l'inégalité voulu $|B(P,Q)| \leqslant C_P \cdot \|Q\|_1$.

• (iii) : Si on note $f_P : E \to \mathbf{R}$ l'application partielle $f_P(Q) = B(P,Q)$, alors on vient de montrer qu'on a l'inégalité

$$\|f_P(Q)\| \leqslant C_P \cdot \|Q\|_1 \quad ,$$

ce qui veut dire que f_P est continue avec $\|f_P\| \leqslant C_P$. Par symétrie de B, l'autre application partielle est également continue (avec la même estimation de sa norme).

• (iv) : Si B était continue, il devrait exister une constante $C > 0$ tel que

$$|B(P,Q)| \leqslant C \cdot \|P\|_1 \cdot \|Q\|_1 \quad .$$

En particulier on devrait avoir

$$|B(P_n,P_n)| \leqslant C \cdot \bigl(\|P_n\|_1\bigr)^2 \quad .$$

Mais les coefficients de P_n sont tous nuls sauf $a_n = 1$, et donc on a

$$\|P_n\|_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad |B(P_n,P_n)| = \sum_{k=0}^{n} k \cdot (a_k)^2 = n \quad .$$

Mais il n'existe pas une constante $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $n \leqslant C$, et donc B ne peut pas être continue.

Les solutions de §7

Solution de [16.66]. Comme on a déjà argumenté dans [16.13], une fonction polynomiale est une expression composée de sommes et de produits (les deux finies !) de coordonnées et de constantes. On y a aussi montré que les "fonctions coordonnées" $x_i = \pi_i(x)$ sont des fonctions linéaires continues. Il suffit maintenant de invoquer [7.2], [7.7] et [7.8] pour conclure que toute fonction polynomiale est de classe C^∞.

Solution de [16.67]. • (i) : Selon (7.22) il "suffit" de calculer les dérivées partielles secondes $(\partial_i\partial_j f)(x,y)$ avec $i,j = 1,2$. Pour cela on commence avec les dérivées partielles premières :

$$(\partial_1 f)(x,y) = 2x \qquad \text{et} \qquad (\partial_2 f)(x,y) = 2y \ .$$

On en déduit directement les dérivées partielles secondes

$$(\partial_1\partial_1 f)(x,y) = 2 = (\partial_2\partial_2 f)(x,y) \qquad \text{et} \qquad (\partial_1\partial_2 f)(x,y) = 0 = (\partial_2\partial_1 f)(x,y) \ .$$

La matrice Hessienne est donc la matrice

$$\text{Hessienne}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

• (ii) : Selon le même principe on calcule d'abord les dérivées partielles premières :

$$(\partial_1 f)(x,y,z) = 3x^2 \quad , \quad (\partial_2 f)(x,y,z) = 3y^2 \quad , \quad (\partial_3 f)(x,y,z) = -3z^2$$

et on en déduit les dérivées partielles secondes :

$$(\partial_1\partial_1 f)(x,y,z) = 6x \quad , \quad (\partial_2\partial_2 f)(x,y,z) = 6y \quad , \quad (\partial_3\partial_3 f)(x,y,z) = -6z$$

et pour $i \neq j$ on a $(\partial_i\partial_j f)(x,y,z) = 0$. Ce qui nous donne la matrice Hessienne

$$\text{Hessienne}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & -6z \end{pmatrix} \ .$$

• (iii) : On commence avec les dérivées partielles premières :

$$\begin{aligned}
(\partial_1 f)(x,y,z) &= \big(\cos(x+y+z) + 3z\,\sin(x+y+z)\big)\cdot \mathrm{e}^{3xz+y^2} \\
(\partial_2 f)(x,y,z) &= \big(\cos(x+y+z) + 2y\,\sin(x+y+z)\big)\cdot \mathrm{e}^{3xz+y^2} \\
(\partial_3 f)(x,y,z) &= \big(\cos(x+y+z) + 3x\,\sin(x+y+z)\big)\cdot \mathrm{e}^{3xz+y^2} \ .
\end{aligned}$$

Et ensuite on en déduit les dérivées partielles secondes :

$$\begin{aligned}
(\partial_1\partial_1 f)(x,y,z) &= \big((9z^2-1)\,\sin(x+y+z) + 6z\,\cos(x+y+z)\big)\cdot \mathrm{e}^{3xz+y^2} \\
(\partial_2\partial_1 f)(x,y,z) &= \big((6yz-1)\,\sin(x+y+z) + (3z+2y)\,\cos(x+y+z)\big)\cdot \mathrm{e}^{3xz+y^2} \\
&= (\partial_1\partial_2 f)(x,y,z) \\
(\partial_3\partial_1 f)(x,y,z) &= \big((9xz+2)\,\sin(x+y+z) + 3(x+z)\,\cos(x+y+z)\big)\cdot \mathrm{e}^{3xz+y^2} \\
&= (\partial_1\partial_3 f)(x,y,z) \\
(\partial_2\partial_2 f)(x,y,z) &= \big((4y^2+1)\,\sin(x+y+z) + 4y\,\cos(x+y+z)\big)\cdot \mathrm{e}^{3xz+y^2} \\
(\partial_3\partial_2 f)(x,y,z) &= \big((6xy-1)\,\sin(x+y+z) + (3x+2y)\,\cos(x+y+z)\big)\cdot \mathrm{e}^{3xz+y^2} \\
&= (\partial_2\partial_3 f)(x,y,z)
\end{aligned}$$

$$(\partial_3\partial_3 f)(x,y,z) = \big((9x^2-1)\,\sin(x+y+z) + 6x\,\cos(x+y+z)\big)\cdot \mathrm{e}^{3xz+y^2} \quad .$$

Solution de [16.68]. • (i) : On commence avec les dérivées partielles premières $(\partial_1 h)(x,y)$ et $(\partial_2 h)(x,y)$ qui sont assez facile à calculer, car il s'agit de dérivées "ordinaires" :

$$(\partial_1 h)(x,y) = f'(x)\cdot\cos\big(g(y)\big) \qquad \text{et} \qquad (\partial_2 h)(x,y) = -f(x)\cdot g'(y)\cdot\sin\big(g(y)\big) \quad .$$

Et ensuite on en "déduit" les dérivées partielles secondes :

$$\begin{aligned}
(\partial_1\partial_1 h)(x,y) &= f''(x)\cdot\cos\big(g(y)\big)\\
(\partial_2\partial_1 h)(x,y) &= -f'(x)\cdot g'(y)\cdot\sin\big(g(y)\big)\\
&= (\partial_1\partial_2 h)(x,y)\\
(\partial_2\partial_2 h)(x,y) &= -f(x)\cdot g''(y)\cdot\sin\big(g(y)\big) - f(x)\cdot\big(g'(y)\big)^2\cdot\cos\big(g(y)\big) \quad .
\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de le mettre dans une matrice de taille 2×2 selon (7.22).

• (ii) : Pour ceux qui ont l'habitude, le calcul des dérivées partielles premières est assez direct :

$$\begin{aligned}
(\partial_1 h)(x,y) &= 2x\cdot(\partial_1 f)\big(x^2+y,\sin(xy)\big) + y\cdot\cos(xy)\cdot(\partial_2 f)\big(x^2+y,\sin(xy)\big)\\
(\partial_2 h)(x,y) &= (\partial_1 f)\big(x^2+y,\sin(xy)\big) + x\cdot\cos(xy)\cdot(\partial_2 f)\big(x^2+y,\sin(xy)\big) \quad .
\end{aligned}$$

Si on veut un calcul plus "précis" ou plus "détaillé", on introduit l'application $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie comme

$$A(x,y) = \big(x^2+y,\sin(xy)\big) \quad ,$$

de sorte qu'on a $h = f\circ A$. Selon [5.11] la matrice de la différentielle de A est la matrice des dérivées partielles (des composantes de A) :

$$\mathrm{matrice}\big((DA)(x,y)\big) = \begin{pmatrix} 2x & 1\\ y\cdot\cos(xy) & x\cdot\cos(xy)\end{pmatrix} \quad .$$

Par [2.14] on a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{matrice}\big((Dh)(x,y)\big) &= \mathrm{matrice}\Big((Df)\big(A(x,y)\big)\Big)\cdot\mathrm{matrice}\big((DA)(x,y)\big)\\
&= \big(\,(\partial_1 f)\big(A(x,y)\big)\quad (\partial_2 f)\big(A(x,y)\big)\,\big)\cdot\begin{pmatrix} 2x & 1\\ y\cdot\cos(xy) & x\cdot\cos(xy)\end{pmatrix} \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
(\partial_1 h)(x,y) &= (\partial_1 f)\big(A(x,y)\big)\cdot 2x + (\partial_2 f)\big(A(x,y)\big)\cdot y\cdot\cos(xy)\\
(\partial_2 h)(x,y) &= (\partial_1 f)\big(A(x,y)\big) + (\partial_2 f)\big(A(x,y)\big)\cdot x\cdot\cos(xy) \quad .
\end{aligned}$$

Et c'est le résultat déjà annoncé ci-dessus.

Pour les dérivées partielles secondes le même principe s'applique et en particulier aux termes $(\partial_i f)\big(A(x,y)\big) = \big((\partial_i f)\circ A\big)(x,y)$. Mais il ne faut pas oublier d'utiliser la règle de Leibniz pour les produits ! Ainsi on trouve

$$\begin{aligned}
(\partial_1\partial_1 h)(x,y) = (\partial_1 f)\big(A(x,y)\big)\cdot 2 - (\partial_2 f)\big(A(x,y)\big)\cdot y^2\,\sin(xy)&\\
+\Big[(\partial_1\partial_1 f)\big(A(x,y)\big)\cdot 2x + (\partial_2\partial_1 f)\big(A(x,y)\big)\cdot y\cdot\cos(xy)\Big]\cdot 2x&\\
+\Big[(\partial_1\partial_2 f)\big(A(x,y)\big)\cdot 2x\qquad\qquad&\\
+ (\partial_2\partial_2 f)\big(A(x,y)\big)\cdot y\cdot\cos(xy)\Big]\cdot y\cdot\cos(xy)&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\partial_2\partial_1 h)(x,y) &= (\partial_2 f)\big(A(x,y)\big)\cdot\big(\cos(xy) - xy\,\sin(xy)\big)\\ &\qquad + \Big[\,(\partial_1\partial_1 f)\big(A(x,y)\big) + (\partial_2\partial_1 f)\big(A(x,y)\big)\cdot x\cdot\cos(xy)\Big]\cdot 2x\\ &\qquad\quad + \Big[\,(\partial_1\partial_2 f)\big(A(x,y)\big)\\ &\qquad\qquad + (\partial_2\partial_2 f)\big(A(x,y)\big)\cdot x\cdot\cos(xy)\Big]\cdot y\cdot\cos(xy)\\ &= (\partial_1\partial_2 h)(x,y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\partial_2\partial_2 h)(x,y) &= -(\partial_2 f)\big(A(x,y)\big)\cdot x^2\,\sin(xy)\\ &\qquad + \Big[\,(\partial_1\partial_1 f)\big(A(x,y)\big) + (\partial_2\partial_1 f)\big(A(x,y)\big)\cdot x\cdot\cos(xy)\Big]\\ &\qquad\quad + \Big[\,(\partial_1\partial_2 f)\big(A(x,y)\big)\\ &\qquad\qquad + (\partial_2\partial_2 f)\big(A(x,y)\big)\cdot x\cdot\cos(xy)\Big]\cdot x\cdot\cos(xy)\quad .\end{aligned}$$

• (iii) : Pour calculer les dérivées partielles secondes $(\partial_i\partial_j h)(x)$, il faut commencer avec les dérivées partielles premières $(\partial_j h)(x)$. Par [2.14] et [2.14] comme ci-dessus appliqué à $h = g\circ f$, on obtient

$$\begin{aligned}&\big((\partial_1 h)(x)\quad\cdots\quad(\partial_n h)(x)\big) =\\ &\qquad\big((\partial_1 g)\big(f(x)\big)\quad\cdots\quad(\partial_p g)\big(f(x)\big)\big)\cdot\begin{pmatrix}(\partial_1 f_1)(x) & \cdots & (\partial_n f_1)(x)\\ \vdots & & \vdots\\ (\partial_1 f_p)(x) & \cdots & (\partial_n f_p)(x)\end{pmatrix}\quad ,\end{aligned}$$

ce qui nous donne la formule

$$(\partial_j h)(x) = \sum_{k=1}^{p}(\partial_k g)\big(f(x)\big)\cdot(\partial_j f_k)(x)\quad .$$

Pour trouver $(\partial_i\partial_j h)(x)$, il faut appliquer Leibniz à cette formule ainsi que la même procédure aux termes $(\partial_k g)\big(f(x)\big) = \big((\partial_k g)\circ f\big)(x)$. On trouve :

$$\begin{aligned}(\partial_i\partial_j h)(x) &= \sum_{k=1}^{p}\Big[\,\sum_{\ell=1}^{p}(\partial_\ell\partial_k g)\big(f(x)\big)\cdot(\partial_i f_\ell)(x)\,\Big]\cdot(\partial_j f_k)(x)\\ &\qquad + \sum_{k=1}^{p}(\partial_k g)\big(f(x)\big)\cdot(\partial_i\partial_j f_k)(x)\quad .\end{aligned}$$

Solution de [16.69]. Les fonctions $x\mapsto x^n$ (avec $n\in\mathbf{Z}$), $x\mapsto \mathrm{e}^x$ et $x\mapsto\sin x$ sont de classe C^∞ (de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$). Les composantes de f, à savoir $x^4+y^2+z^3$ et $\mathrm{e}^x\sin(yz)$, sont donc de classe C^∞ comme somme, produit et composées de fonctions de classe C^∞.

Il y a maintenant deux façons différentes de calculer la valeur de

$$\big((D^2 f)(0,\pi,1)\big)\big((1,2,1),(0,1,0)\big)\quad .$$

La première méthode passe par les composantes et utilise [7.19] et [7.21]. Pour la première composante $f_1(x,y,z) = x^4 + y^2 + z^3$ la matrice Hessienne est donnée par

$$\big((\partial_{j_1}\partial_{j_2} f_1)\big)_{j_1,j_2=1}^{n} = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

et donc on obtient

$$\big((D^2 f_1)(0,\pi,1)\big)\big((1,2,1),(0,1,0)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12\cdot 0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6\cdot 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \ .$$

Pour la deuxième composante $f_2(x,y,z) = \mathrm{e}^x \sin(yz)$ on trouve la matrice Hessienne

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \sin(yz) & z\ \mathrm{e}^x \cos(yz) & y\ \mathrm{e}^x \cos(yz) \\ z\ \mathrm{e}^x \cos(yz) & -z^2\ \mathrm{e}^x \sin(yz) & \mathrm{e}^x \cos(yz) - yz\ \mathrm{e}^x \sin(yz) \\ y\ \mathrm{e}^x \cos(yz) & \mathrm{e}^x \cos(yz) - yz\ \mathrm{e}^x \sin(yz) & -y^2\ \mathrm{e}^x \sin(yz) \end{pmatrix} \ ,$$

ce qui donne au point $(x,y,z) = (0,\pi,1)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^0 \sin(\pi) & 1\ \mathrm{e}^0 \cos(\pi) & \pi\ \mathrm{e}^0 \cos(\pi) \\ 1\ \mathrm{e}^0 \cos(\pi) & -1^2\ \mathrm{e}^0 \sin(\pi) & \mathrm{e}^0 \cos(\pi) - \pi\ \mathrm{e}^0 \sin(\pi) \\ \pi\ \mathrm{e}^0 \cos(\pi) & \mathrm{e}^0 \cos(\pi) - \pi\ \mathrm{e}^0 \sin(\pi) & -\pi^2\ \mathrm{e}^0 \sin(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\pi \\ -1 & 0 & -1 \\ -\pi & -1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

On obtient donc

$$\big((D^2 f_2)(0,\pi,1)\big)\big((1,2,1),(0,1,0)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\pi \\ -1 & 0 & -1 \\ -\pi & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \ .$$

Au final on trouve donc $\big((D^2 f)(0,\pi,1)\big)\big((1,2,1),(0,1,0)\big) = (4,-2)$.

La deuxième méthode passe par [7.12] avec

$$\big((D^2 f)(0,\pi,1)\big)\big((1,2,1),(0,1,0)\big) = \big(D_{(1,2,1)}(D_{(0,1,0)} f)\big)(0,\pi,1) \ .$$

On calcule donc d'abord l'application $(D_{(0,1,0)} f)(x,y,z) = \big((Df)(x,y,z)\big)(0,1,0)$ en utilisant [5.11] (ou [7.21]) :

$$(D_{(0,1,0)} f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x^3 & 2y & 3z^2 \\ \mathrm{e}^x \sin(yz) & z\ \mathrm{e}^x \cos(yz) & y\ \mathrm{e}^x \cos(yz) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ z\ \mathrm{e}^x \cos(yz) \end{pmatrix} \ .$$

Ensuite il faut calculer de la même façon la dérivée directionnelle de cette fonction au point $(0,\pi,1)$ dans la direction $(1,2,1)$.

$$\big(D(D_{(0,1,0)} f)\big)(x,y,z) \cong \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ z\ \mathrm{e}^x \cos(yz) & -z^2\ \mathrm{e}^x \sin(yz) & \mathrm{e}^x \cos(yz) - yz\ \mathrm{e}^x \sin(yz) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\big(D_{(1,2,1)}(D_{(0,1,0)} f)\big)(0,\pi,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \ .$$

Solution de [16.72]. Selon [6.9] l'application $\mathcal{E} : \mathcal{L}(E;E) \times E \to E$, $\mathcal{E}(A,v) = A(v)$, est une application bilinéaire continue, donc de classe C^∞ [7.3]. D'autre part, l'application $F : E \to \mathcal{L}(E;E) \times E$ définie par

$$F(x) = \big(f(x), x\big)$$

est deux fois différentiable selon [7.5] (car l'application $x \mapsto x$ est de classe C^∞). L'application φ, étant la composée de F avec $\mathcal{E}$, est donc aussi deux fois différentiable [7.6].

Pour calculer $\big((D^2\varphi)(x)\big)(h,k)$ on commence avec le calcul de la différentielle première $(D_k\varphi)(x)$ et pour cela on invoque [2.14] qui nous donne l'égalité

$$(D_k\varphi)(x) = \Big((D\mathcal{E})\big(F(x)\big)\Big)\big((D_kF)(x)\big) \quad .$$

On calcule donc d'abord $(D_kF)(x)$ à l'aide de [5.4], ce qui donne

$$(D_kF)(x) = \big((D_kf)(x), k\big) \quad .$$

Avec [7.3] on obtient donc

$$(D_k\varphi)(x) = \Big((D\mathcal{E})\big(f(x),x\big)\Big)\big((D_kf)(x),k\big) = \mathcal{E}\big(f(x),k\big) + \mathcal{E}\big((D_kf)(x),x\big) \quad .$$

Le premier terme s'écrit comme

$$\mathcal{E}\big(f(x),k\big) = \mathcal{E}_k\big(f(x)\big) = (\mathcal{E}_k \circ f)(x)$$

avec $\mathcal{E}_k$ définie comme dans [1.27], ce qui est une application linéaire continue. Et le deuxième terme a exactement la même forme que l'application φ, sauf qu'on a remplacé f par D_kf. Par (7.14), [2.9] et le calcul précédent on obtient donc

$$\begin{aligned}
\big((D^2\varphi)(x)\big)(h,k) &= \big(D_h(D_k\varphi)\big)(x) \\
&= \mathcal{E}\big((D_hf)(x),k\big) + \mathcal{E}\big((D_kf)(x),h\big) + \mathcal{E}\Big(\big(D_h(D_kf)\big)(x),x\Big) \\
&\equiv \Big(\big((Df)(x)\big)(h)\Big)(k) + \Big(\big((Df)(x)\big)(k)\Big)(h) \\
&\qquad + \Big(\big((D^2f)(x)\big)(h,k)\Big)(x) \quad .
\end{aligned}$$

Solution de [16.73]. Selon [2.14] la différentielle première $D_k(f\circ g)$ est donnée par

$$\big(D_k(f\circ g)\big)(a) = \Big((Df)\big(g(a)\big)\Big)\big((D_kg)(a)\big) = \mathcal{E}\Big((Df)\big(g(a)\big), (D_kg)(a)\Big) \quad ,$$

où $\mathcal{E} : \mathcal{L}(F;G) \times F \to G$ est l'application bilinéaire continue définie par $\mathcal{E}(A,v) = A(v)$ [6.9].

On introduit ensuite l'application $\varphi : U \to \mathcal{L}(F;G) \times F$ par

$$\varphi(a) = \big((Df\circ g)(a), (D_kg)(a)\big) \quad .$$

Étant donné que f et g sont deux fois différentiables, il s'ensuit, avec [2.14] et [5.4], que φ est différentiable et qu'on a

$$\begin{aligned}
(D_h\varphi)(a) &= \Big(\big(D_h(Df\circ g)\big)(a), (D_kg)(a)\Big) \\
&= \bigg(\Big((D^2f)\big(g(a)\big)\Big)\big((D_hg)(a)\big), (D_kg)(a)\bigg)
\end{aligned} \tag{17.30}$$

L'intérêt de l'application φ est qu'on peut maintenant écrire

$$D_k(f\circ g) = \mathcal{E}\circ\varphi \quad .$$

On peut donc de nouveau appliquer [2.14] pour obtenir

$$\begin{aligned}
\Big(D_h\big(D_k(f\circ g)\big)\Big)(a) &= \big(D_h(\mathcal{E}\circ\varphi)\big)(a) = \Big((D\mathcal{E})\big(\varphi(a)\big)\Big)\big((D_h\varphi)(a)\big) \\
&\overset{(17.30)}{=} \Big((D\mathcal{E})\big((Df\circ g)(a),(D_kg)(a)\big)\Big)\Big(\big(D_h(Df\circ g)\big)(a),\big(D_h(D_kg)\big)(a)\Big) \\
&\overset{[7.3]}{=} \mathcal{E}\Big((Df\circ g)(a),\big(D_h(D_kg)\big)(a)\Big)+\mathcal{E}\Big(\big(D_h(Df\circ g)\big)(a),(D_kg)(a)\Big) \\
&\overset{(17.30)}{=} \Big((Df)\big(g(a)\big)\Big)\Big(\big((D^2g)(a)\big)(h,k)\Big) \\
&\qquad + \Bigg(\Big((D^2f)\big(g(a)\big)\Big)\big((D_hg)(a)\big)\Bigg)\big((D_kg)(a)\big) \\
&\overset{[7.12],\,(7.14)}{=} \Big((Df)\big(g(a)\big)\Big)\Big(\big((D^2g)(a)\big)(h,k)\Big) \\
&\qquad + \Big((D^2f)\big(g(a)\big)\Big)\Big(\big((Dg)(a)\big)(h),\big((Dg)(a)\big)(k)\Big) \quad .
\end{aligned}$$

Il est très instructif de comparer ce résultat avec le résultat analogue pour des fonctions d'une seule variable réelle. Dans ce cas on a les dérivées ordinaires et on calcule :

$$(f\circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big)\cdot g'(a) \qquad\Longleftrightarrow\qquad (f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'$$

et

$$\begin{aligned}
(f\circ g)''(a) &= \big((f'\circ g)\cdot g'\big)'(a) = (f'\circ g)(a)\cdot g''(a) + (f'\circ g)'(a)\cdot g'(a) \\
&= f'\big(g(a)\big)\cdot g''(a) + f''\big(g(a)\big)\cdot g'(a)\cdot g'(a) \quad .
\end{aligned}$$

Les solutions de §8

Solution de [16.75]. L'idée pour montrer cette inégalité est la suivante. On s'imagine une voiture qui au temps $t = 0$ découvre un barrage routier à une distance d. Pour s'arrêter le conducteur doit donc freiner. S'il freine d'une façon maximale (constante), sa distance d'arrêt $DA_{\text{opt.}}$ ne dépendra que de la vitesse initiale et la décélération de freinage (maximale, constante). En réalité la distance d'arrêt DA_{vraie} sera plus grande, parce que le freinage ne sera pas constante maximale. Mais il s'arrête (doit s'arrêter) avant le barrage. On a donc les inégalités

$$d \geqslant DA_{\text{vraie}} \geqslant DA_{\text{opt}} \quad .$$

Et c'est l'inégalité $d \geqslant DA_{\text{opt}}$ qui donne l'inégalité demandé.

Pour traduire cette image dans le langage de l'exercice, on fixe $v \in E$ et on considère la fonction $g(t) = f(x + vt)$, qu'on interprète comme la position (uni-dimensionnelle) de la voiture au temps t. La vitesse initiale est directement liée à $\|(Df)(x)\|$, l'accélération maximale est liée à M et $d = f(x)$.

Prenons $x \in E$ et considérons $N = \|(Df)(x)\|$. Si $N = 0$, alors l'inégalité à montrer est trivialement vrai. Sans perte de généralité on peut donc supposer que $N \neq 0$. Par définition de $N \equiv \|(Df)(x)\|$ il existe donc pour tout $\varepsilon > 0$ un $v \in E^*$ tel que

$$\frac{\big\|\big((Df)(x)\big)(v)\big\|}{\|v\|} > N - \varepsilon \quad .$$

Mais $\big((Df)(x)\big)(v) \in \mathbf{R}$, donc $\big\|\big((Df)(x)\big)(v)\big\| = \pm\big((Df)(x)\big)(v)$. En remplaçant v par $-v$ si nécessaire, on peut donc supposer qu'on a

$$m \overset{\text{déf.}}{=} \big((Df)(x)\big)(v) > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{m}{\|v\|} > N - \varepsilon \quad .$$

On définit maintenant la fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ par

$$g(t) = f(x - tv) \quad .$$

On aura donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= -(D_v f)(x - tv) = -\big((Df)(x - tv)\big)(v) \\ g''(t) &= \big(D_v(D_v f)\big)(x - tv) = \big((D^2 f)(x - tv)\big)(v, v) \quad . \end{aligned}$$

On a donc en particulier $g(0) = f(x) > 0$ et $g'(0) = -m < 0$ et la majoration

$$|g''(t)| = \big|\,\big((D^2 f)(x - tv)\big)(v, v)\,\big| \leqslant M \cdot \|v\|^2 \quad .$$

Par l'inégalité des accroissements finis [3.6] appliquée à la fonction g' on aura donc pour $t > 0$

$$\big|\, g'(t) - g'(0) \,\big| \leqslant M \cdot \|v\|^2 \cdot t \quad .$$

On en déduit en particulier la majoration

$$g'(t) \leqslant M \cdot \|v\|^2 \cdot t + g'(0) \equiv M \cdot \|v\|^2 \cdot t - m$$

et donc

$$g(t) - g(0) = \int_0^t g'(s)\; \mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \big(M \cdot \|v\|^2 \cdot s - m\big)\; \mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\, M \cdot \|v\|^2 \cdot t^2 - m\, t \quad .$$

Pour $t = m/(M\, \|v\|^2)$ on trouve donc l'inégalité

$$0 < f(x - tv) \equiv g(t) \leqslant g(0) + \tfrac{1}{2}\, M \cdot \|v\|^2 \cdot t^2 - m\, t = f(x) - \frac{m^2}{2\, M \cdot \|v\|^2} \quad ,$$

ce qu'on peut réécrire comme

$$\sqrt{2M \cdot f(x)} > \frac{m}{\|v\|} > N - \varepsilon \ .$$

Mais $\varepsilon > 0$ est arbitraire, donc on doit avoir $\sqrt{2M \cdot f(x)} \geqslant N = \|(Df)(x)\|$.

On peut remarquer que **si** on trouve $v \in E^*$ tel que $\big\|\big((Df)(x)\big)(v)\big\| = N \cdot \|v\|$ (et cela sera toujours le cas si E est de dimension finie), alors nos calculs montrent qu'on a même $\sqrt{2M \cdot f(x)} > N = \|(Df)(x)\|$.

Solution de [16.76]. • (i) : Comme dans la solution de [16.21], on commence avec l'introduction de l'application $\gamma : \mathbf{R} \to E$ par $\gamma(t) = ta + (1-t)b$. Et comme avant, $I = \gamma^{-1}(U) \subset \mathbf{R}$ est un ouvert, contient $[0,1]$ et est un intervalle. La fonction $g : I \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(t) = f\big(\gamma(t)\big) \equiv f\big(ta + (1-t)b\big)$$

est donc deux fois dérivable comme composée d'une fonction deux fois différentiable f avec une fonction de classe C^∞ γ. Étant donné qu'on a $\gamma'(t) = b - a$, on déduit directement de [2.16] les égalités

$$g'(t) = (D_{a-b}f)\big(\gamma(t)\big) \equiv \Big((Df)\big(\gamma(t)\big)\Big)(a-b) \ ,$$

ainsi que

$$g''(t) = \big((D_{a-b}D_{a-b}f)\big)\big(\gamma(t)\big) \equiv \Big((D^2f)\big(\gamma(t)\big)\Big)(a-b, a-b) \ . \tag{17.31}$$

D'autre part, il est immédiat que f est convexe si et seulement si g est convexe pour tout choix de $a, b \in U$.

Il suffit maintenant d'invoquer [16.21.ii] pour conclure que f est convexe si et seulement si g' est un fonction croissante pour tout choix de $a, b \in U$, ce qui sera le cas si et seulement si g'' est une fonction positive pour tout choix de $a, b \in U$. Autrement dit, f est convexe si et seulement si on a la propriété

$$\forall a, b \in U \ \forall t \in [0,1] \quad : \quad g''\big(\gamma(t)\big) \equiv \Big((D^2f)\big(\gamma(t)\big)\Big)(a-b, a-b) \geqslant 0 \ . \tag{17.32}$$

Reste donc à montrer l'équivalence avec la propriété

$$\forall x \in U \ \forall h \in E \quad : \quad \big((D^2f)(x)\big)(h,h) \geqslant 0 \ . \tag{17.33}$$

Si on suppose (17.33), alors en prenant $x = \gamma(t)$ et $h = b - a$ on trouve (17.32). Réciproquement, si on suppose (17.32), alors pour $x \in U$ et $h \in E$ arbitraire on pose d'abord $t = 1$ et $a = x$. Ensuite on remarque que U est un ouvert et donc qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $b = a + \lambda h \in U$. Par (17.32) on aura donc l'inégalité

$$0 \leqslant \big((D^2f)(a)\big)(a-b, a-b) \equiv \big((D^2f)(x)\big)(\lambda h, \lambda h) = \lambda^2 \cdot \big((D^2f)(x)\big)(h,h)$$

et donc $\big((D^2f)(x)\big)(h,h) \geqslant 0$, ce qui est (17.33) comme voulu.

• (ii) : Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbf{R}^n$ est bilinéaire et symétrique. Il s'ensuit immédiatement que l'application $h(x) = \langle b, x\rangle$ est linéaire (et continue car on est en dimension finie, donc de classe C^∞). Et parce que la matrice A est symétrique, l'application $g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x,y) = \langle Ax, y\rangle$$

est également bilinéaire symétrique (et continue car en dimension finie, donc de classe C^∞). La fonction f s'écrit donc comme

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\, g(x,x) + h(x) \ .$$

On peut donc appliquer [8.3] (qui dit en particulier qu'on a $D^2h = 0$) et conclure qu'on a

$$\big((D^2f)(x)\big)(v,v) = g(v,v) \ .$$

Selon (i) la fonction f est convexe (sur $\mathbf{R}^n$) si et seulement si $\big((D^2f)(x)\big)(v,v) \geqslant 0$ pour tout $x, v \in \mathbf{R}^n$, ce qui est donc le cas si et seulement $g(v,v) = \langle Av, v\rangle \geqslant 0$ pour tout $v \in \mathbf{R}^n$.

Solution de [16.77]. Soit $x \in U$ fixé et soit $\gamma : \mathbf{R} \to E$ l'application

$$\gamma(t) = tx \ .$$

L'application γ étant linéaire continue (donc de classe C^∞), il s'ensuit que $I = \gamma^{-1}(U) \subset \mathbf{R}$ est un ouvert et parce que U est étoilé, on a l'inclusion $[0,1] \subset I$.

Pour $1 \leqslant k < n$ on définit maintenant l'application $g_k : U \to F$ par

$$g_k(y) = \big((D^kf)(y)\big)(\underbrace{x,\dots,x}_{k \text{ fois}}) \overset{[7.12]}{=} \Big(\underbrace{D_x\big(D_x\dots(D_x}_{k \text{ fois}} f)\dots\big)\Big)(y) \ ,$$

ce qui est bien définie, car f est n fois différentiable et donc $k < n$ fois différentiable sur U [7.1]. On définit aussi l'application $h_k : I \to F$ par

$$h_k(t) = g_k(tx) \overset{\text{déf.}}{=} g_k\big(\gamma(t)\big) \ .$$

En utilisant [2.16] et [5.2] on obtient directement l'égalité

$$h_k'(t) = \big((Dg_k)(tx)\big)(x) = (D_xg_k)(tx) = g_{k+1}(tx) = h_{k+1}(t) \ .$$

Et parce que f est n fois différentiable en 0, l'application h_{n-1} est différentiable en $t = 0$ avec

$$\begin{aligned} h_{n-1}'(0) &= \big((Dg_{n-1})(0)\big)(x) = (D_xg_{n-1})(0) \\ &= \Big(\underbrace{D_x\big(D_x\dots(D_x}_{n \text{ fois}} f)\dots\big)\Big)(0) = \big((D^nf)(0)\big)(\underbrace{x,\dots,x}_{n \text{ fois}}) \ . \end{aligned}$$

En partant de l'égalité

$$h_0(t) = f(tx)$$

on en déduit facilement par récurrence qu'on a, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, les égalités

$$h_0^{(k)}(0) = \big((D^kf)(0)\big)(\underbrace{x,\dots,x}_{k \text{ fois}}) \ . \tag{17.34}$$

Si on ne lit pas très attentivement l'énoncé, on invoque maintenant la propriété de f qui nous dit qu'on a l'égalité

$$h_0(t) = f(tx) = t^n \cdot f(x)$$

et on en déduit qu'on a, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, les égalités

$$h_0^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!}\, t^{n-k} \cdot f(x) \ . \tag{17.35}$$

Si on compare (17.34) avec (17.35) (en prenant $t = 0$), on obtient les résultats annoncés.

Malheureusement cet argument n'est pas directement correct, car on n'a pas la propriété $f(tx) = t^n \cdot f(x)$ pour tout $t \in I$. En particulier pour $t < 0$ (et petit) on ne peut rien dire de plus que

$$f(tx) = f\big((-t)\cdot(-x)\big) = (-t)^n \cdot f(-x) \quad .$$

Pour compléter l'argument, on définit l'application $H : \mathbf{R} \to F$ par

$$H(t) = t^n \cdot f(x) \quad ,$$

qui est visiblement de classe C^∞. Ensuite on remarque que la propriété de f nous dit que H et h_0 coïncident sur $]0,1[$. D'autre part, la continuité de f et de H en $0 \in E$ implique directement qu'on a $f(0) = h_0(0) = H(0) = 0$ et on a trivialement $h_0(1) = H(1) = f(x)$. Et donc h_0 et H coïncident sur $[0,1] \subset I$.

Mais H est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et h_0 est n fois dérivable en $0 \in I$. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ ces deux applications ont donc les mêmes dérivées d'ordre k à droite en 0. Et ces dérivées à droite en 0 sont égales aux dérivées k-ième "ordinaires" en 0. De plus, les dérivées k-ième à droite en $t = 0$ coïncident, car H et h_0 coïncident sur $[0,1]$. Avec cela on a (finalement) le droit de comparer (17.34) avec (17.35) et de conclure.

Solution de [16.79]. Si on définit l'application $P : E^k \to E$ par

$$P(A_1, \ldots, A_k) = A_1 \cdot A_2 \cdots A_k \quad ,$$

alors il est immédiat que P est k-linéaire. En plus elle est continue car, en utilisant la norme d'opérateur, on a la majoration

$$\|P(A_1, \ldots, A_k)\| \equiv \|A_1 \cdots A_k\| \overset{[1.26]}{\leqslant} \|A_1\| \cdots \|A_k\| \quad ,$$

ce qui montre que P est continue avec $\|P\| \leqslant 1$ [6.6]. En plus, notre application f est la composée de P avec l'application $g : E \to E^k$ définie par

$$g(A) = (A, \ldots, A) \quad .$$

Il est "évident" que g est de classe C^∞ et P l'est aussi [8.4]. Donc comme composée f est également de classe C^∞.

Malheureusement P n'est pas symétrique, donc on ne peut pas appliquer directement [8.3] pour obtenir la différentielle de f. On calcule donc la différentielle de la composée $P \circ g$:

$$\begin{aligned}
\big((Df)(A)\big)(H) &= \Big((DP)\big(g(A)\big)\Big)\Big(\big((Dg)(A)\big)(H)\Big) \\
&= \Big((DP)\big(g(A)\big)\Big)(H, \ldots, H) \\
&\overset{(8.5)}{=} \sum_{i=1}^{k} P(\underbrace{A, \ldots, A}_{i-1 \text{ fois}}, H, \underbrace{A, \ldots, A}_{k-i \text{ fois}}) = \sum_{i=1}^{k} A^{i-1} \cdot H \cdot A^{k-i} \quad .
\end{aligned}$$

On aurait pu deviner ce résultat en développant la puissance k-ième $(A+H)^k$, mais le binôme de Newton ne s'applique pas, donc on n'a pas une formule "simple". Montrer rigoureusement que notre résultat est la différentielle, directement à partir de la définition, n'est donc pas facile. Dans le fond c'est le même problème que la différentielle d'une application k-linéaire arbitraire : décrire correctement tous les termes dans le développement (par k-linéarité) de l'expression

$$P(A_1 + H_1, A_2 + H_2, \ldots, A_n + H_n)$$

n'est pas facile.

Solution de [16.80]. • (i) : On commence avec la remarque que selon la définition de la norme de $(Df)(x)$ on a :

$$\begin{aligned}\|(Df)(x)\| &= \sup_{v\neq 0} \frac{\big\|\big((Df)(x)\big)(v)\big\|}{|v|} = \sup_{v\neq 0} \frac{\big\|v\cdot\big((Df)(x)\big)(1)\big\|}{|v|}\\ &= \big\|\big((Df)(x)\big)(1)\big\| \ .\end{aligned}$$

Ensuite on note que pour tout $x\in[-y,y]$ il existe $\epsilon=\pm 1$ tel que $x+\epsilon y\in[-y,y]$ (il suffit de prendre $\epsilon=1$ pour $x<0$ et $\epsilon=-1$ pour $x\geqslant 0$). En appliquant [8.11.ii] avec $n=1$, $a=x$ et $h=\epsilon y$ on obtient donc

$$\begin{aligned}y\cdot\|(Df)(x)\| &= \|\big((Df)(x)\big)(h)\|\\ &\leqslant \|f(x+h)-f(x)-\big((Df)(x)\big)(h)\| + \|f(x+h)\| + \|f(x)\|\\ &\leqslant \frac{|h|^2}{2!}\cdot B + 2A \equiv 2A + \frac{By^2}{2} \ .\end{aligned}$$

En divisant par y on obtient le résultat voulu.

• (ii-a) : Par le résultat de (i) appliqué à la fonction $D^{2n}f$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned}\|(D^{2n+1}f)(x)\| &\leqslant \frac{2\,(2n)!\cdot M\cdot K^n}{y} + \tfrac12\,y\cdot(2n+2)!\cdot M\cdot K^{n+1}\\ &= \frac{(2n)!\cdot M\cdot K^n}{y}\cdot\big(2+(n+1)(2n+1)Ky^2\big) \ .\end{aligned}$$

• (ii-b) : On commence à montrer que la série est absolument convergente en faisant le calcul (utilisant qu'on a bien $0\in[-y,y]$) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left\| \frac{1}{n!}\cdot\big((D^nf)(0)\big)(x,x,\dots,x)\right\| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}\cdot\|(D^nf)(0)\|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!}\cdot(2k)!\cdot M\cdot K^k\\ &\qquad + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\frac{(2k)!\cdot M\cdot K^k}{y}\cdot\Big(2+\frac{(2k+2)!}{2\,(2k)!}Ky^2\Big)\\ &= M\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(Kx^2)^k + M\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Kx^2)^k\cdot|x|}{(2k+1)\cdot y}\cdot\Big(2+\frac{(2k+2)!}{2\,(2k)!}Ky^2\Big)\\ &\leqslant 2M\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(Kx^2)^k + M\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(k+3)\cdot(Kx^2)^k \ ,\end{aligned}$$

où la dernière majoration est une conséquence des inégalités $|x|\leqslant y$ et $Ky^2<1$. Mais pour $|z|<1$ les séries $\sum_k z^k$ et $\sum_k (k+3)\,z^k$ sont convergentes. Et donc la série $\sum_n \frac{1}{n!}\cdot\big((D^nf)(0)\big)(x,x,\dots,x)$ est absolument convergente pour tout $x\in[-y,y]$. Avec [1.35] (c'est ici qu'on a besoin que E est un espace de Banach) on en déduit que la série converge pour tout $x\in[-y,y]$.

Pour montrer qu'elle converge vers $f(x)$ on invoque de nouveau [8.11.ii], mais cette fois avec un n impair. Plus précisément, on a

$$\left\| f(x)-\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{n!}\cdot\big((D^nf)(0)\big)(x,x,\dots,x)\right\| \equiv \|R_{0,2n-1}(x)\|$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \cdot \sup_{t \in \,]-a,a[} \|(D^{2n} f(t)\| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \cdot (2n)! \cdot M \cdot K^n \\ &\leqslant M \cdot (Ky^2)^n \quad .\end{aligned}$$

Étant donné qu'on a $\lim\limits_{n\to\infty} M\,(Ky^2)^n = 0$, il s'ensuit que la limite de la série est bien $f(x)$ comme voulu.

Les solutions de §9

Solution de [16.81]. • (i-a) : Pour déterminer les extrema on commence à trouver les points critiques. On calcule donc la matrice de la différentielle

$$\mathrm{Jac}\big((Df)(x,y)\big) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \end{pmatrix} \ ,$$

ce qui donne les équations pour les points critiques :

$$2x = 0 = -2y \ .$$

Il s'ensuit que le seul point critique est $(0,0)$. Pour déterminer sa nature, on calcule la matrice Hessienne en ce point :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \ ,$$

ce qui est une matrice avec une valeur propre strictement positive et une strictement négative. Le point $(0,0)$ n'est donc ni un maximum ni un minimum local.

• (i-b) : La matrice de la différentielle est donnée par

$$\mathrm{Jac}\big((Df)(x,y)\big) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -3y^2 \end{pmatrix} \ ,$$

ce qui donne les équations pour les points critiques :

$$3x^2 = 0 = -3y^2 \ .$$

Il s'ensuit que le seul point critique est $(0,0)$. Pour déterminer sa nature, on calcule la matrice Hessienne en ce point :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Cette matrice a des valeurs propres nulles, donc on ne peut pas conclure sur la nature de ce point critique à l'aide du Hessien. Par contre, pour $y = 0$ et x proche de 0 on voit que f peut prendre des valeurs positive (pour $x > 0$) et négatives (pour $x < 0$), donc le point $(0,0)$ n'est ni un maximum ni un minimum local.

• (i-c) : La matrice de la différentielle est donnée par

$$\mathrm{Jac}\big((Df)(x,y)\big) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y & 3y^2 - 3x \end{pmatrix} \ ,$$

ce qui donne les équations pour les points critiques :

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 &= 3y \\ 3y^2 &= 3x \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} y &= x^2 \\ x &= x^4 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} &y = x^2 \\ &x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}\right\} \ .$$

Il s'ensuit qu'il y a deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$. Pour déterminer leur nature, on calcule la matrice Hessienne en ces points :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \ , \ H(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \ .$$

Le polynôme caractéristique de $H(0,0)$ est $\lambda^2 - 9$, qui a ± 3 comme valeurs propres et donc $(0,0)$ n'est ni un maximum ni un minimum local. Pour $H(1,1)$ le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 12\lambda + 27$ dont les valeurs propres sont 3 et 9. Il s'ensuit que $(1,1)$ est un minimum local. Pour savoir si c'est un minimum global, on constate que pour $y = 0$ on a $f(x,0) = x^3$, ce qui donne

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty \ ,$$

ce qui montre que $(1,1)$ ne peut pas être un minimum global.

• (i-d) : La matrice de la différentielle est donnée par

$$\mathrm{Jac}\big((Df)(x,y)\big) = \begin{pmatrix} 2x-2y & 2y-2x \end{pmatrix} \ ,$$

ce qui donne les équations pour les points critiques :

$$2x-2y = 0 = 2y-2x \ .$$

Il s'ensuit que tous les points de la droite $x = y$ sont des points critiques. Pour déterminer leur nature, on calcule la matrice Hessienne en ces points :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Cette matrice a comme polynôme caractéristique $\lambda^2-4\lambda$, donc 0 et 4 comme valeurs propres. On ne peut donc pas conclure sur la nature de ces points critiques à l'aide du Hessien. Par contre, une simple réécriture nous donne

$$f(x,y) = x^2+y^2-2xy+1 = (x-y)^2+1 \ ,$$

ce qui montre que tous les points (x,x) sont des minima globaux.

• (ii) : La matrice de la différentielle est donnée par

$$\mathrm{Jac}\big((Df)(x,y)\big) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2+3y^2-4ay \end{pmatrix} \ ,$$

ce qui donne les équations pour les points critiques :

$$\left.\begin{aligned} 2xy &= 0 \\ x^2+3y^2-4ay &= 0 \end{aligned}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad \left.\begin{aligned} x = 0 &\text{ ou } y = 0 \\ x^2 &= y(4a-3y) \end{aligned}\right\} \ .$$

Il s'ensuit qu'il y a deux points critiques : $(0,0)$ et $(0,\frac{4}{3}a)$. Pour déterminer leur nature, on calcule la matrice Hessienne en ces points :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 6y-4a \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4a \end{pmatrix} \ , \ H(0,\tfrac{4}{3}a) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}a & 0 \\ 0 & 4a \end{pmatrix} \ .$$

La matrice $H(0,0)$ a une valeur propre 0 (et l'autre $-4a$), donc on ne peut pas déterminer la nature de ce point critique à l'aide du Hessien. Pour avoir une idée on regarde la variation de f selon une droite (de pente m) passant par ce point $(0,0)$:

$$f(x,mx) = mx(x^2+m^2x^2-2amx) = mx^2\big(-2am+x(1+m^2)\big) \ .$$

Quand x tend vers 0, le terme $x(1+m^2)$ devient négligeable par rapport à $-2am$ et donc le signe de $f(x,mx)$ sera, pour x proche de 0, le signe de $-2am^2x^2$. Ceci donne l'impression qu'en se rapprochant de $(0,0)$, les valeurs de f seront toujours positives dans le cas $a < 0$ et toujours négatives dans le cas $a > 0$, c'est-à-dire que $(0,0)$ est un minimum local si $a < 0$ et un maximum local si $a > 0$. Malheureusement ce raisonnement est (au mieux) incomplet, comme un tel raisonnement est insuffisant pour déterminer la continuité d'une fonction de deux variables en un point. Quand on regarde de plus près, on voit que, pour que $f(x,mx)$ prend des valeurs de même signe que $-2am$, il faut que $x(1+m^2)$ soit négligeable par rapport à $-2am$. Mais le x à partir duquel ça marche dépend du valeur de m ; et il faut être d'avantage plus près de 0 avec x quand m est petit. Comme pour la continuité, suivre un chemin particulier ne sert que pour montrer l'opposé ; montrer la continuité ou la nature d'un point critique "à la main" nécessite une preuve avec tous les points dans un voisinage, pas seulement des points sur un chemin (dans un voisinage).

Pour la fonction f en considération, si on prend un autre chemin pour se rapprocher de l'origine, par exemple le parabole $y = mx^2$, on obtient

$$f(x, mx^2) = mx^2(x^2 + m^2x^4 - 2amx^2) = mx^4(1 - 2am + m^2x^2) \ .$$

Pour un x proche de 0 le terme m^2x^2 sera négligeable par rapport à $1 - 2am$ et le signe de $f(x, mx^2)$ sera le signe de $mx^4(1 - 2am)$. Il s'ensuit qu'on peut prendre m suffisamment petit pour que $1 - 2am$ soit positive, auquel cas le signe de $f(x, mx^2)$ est le signe de m (quand x est proche de 0). La fonction f prend donc des valeurs positives **et** négatives dans un voisinage de $(0, 0)$, ce qui montre que $(0, 0)$ n'est ni un maximum local ni un minimum local.

Pour $H(0, \frac{4}{3}a)$ les valeurs propres sont $\frac{8}{3}a$ et $4a$. Il s'ensuit que $(0, \frac{4}{3}a)$ est un minimum local pour $a > 0$, un maximum local pour $a < 0$ et pour $a = 0$ en ne peut pas conclure. Mais dans le cas $a = 0$ on retrouve le point $(0, 0)$ dont on a déjà montré que ce n'est ni maximum ni minimum local dans tous les cas. Ceci se confirme par la remarque que dans le cas $a = 0$ on a

$$f(x, y) = y(x^2 + y^2)$$

et donc que le signe de $f(x, y)$ est le signe de y, montrant que f prend des valeurs positives et négatives dans n'importe quel voisinage de $(0, 0)$.

• (iii) : Dans un premier temps on suppose qu'on a $r \neq 0$, auquel cas op peut faire les calculs suivants :

$$Q(x, y) = r \cdot \left(x^2 + \frac{2s}{r}\, xy + \frac{t}{r}\, y^2 \right) = r \cdot \left(\left(x + \frac{s}{r} y \right)^2 + \frac{rt - s^2}{r^2}\, y^2 \right)$$

On constate qu'on a donc

$$Q(x, 0) = r \cdot x^2 \qquad \text{et} \qquad Q\Big(-\frac{s}{r}\, y, y \Big) = r \cdot (rt - s^2) \cdot \Big(\frac{y}{r} \Big)^2 \ .$$

Maintenant on rappelle que Q est définie positive si et seulement si $Q(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ et définie négative si $Q(x, y) < 0$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$. Il s'ensuit que, sous l'hypothèse $r \neq 0$, Q est définie positive si et seulement si $r > 0$ et $r \cdot (rt - s^2) > 0$, c'est-à-dire $r > 0$ et $rt - s^2 > 0$, et qu'elle est définie négative si et seulement si $r < 0$ et $r \cdot (rt - s^2)$, c'es-à-dire $r < 0$ et $rt - s^2 > 0$. Et c'est exactement ce qu'il fallait démontrer.

Reste donc le cas $r = 0$ auquel cas on aura

$$Q(x, y) = 2s\, xy + t\, y^2 = y\, (2sx + ty) \ .$$

Il s'ensuit qu'on a $Q(x, 0) = 0$ et donc Q ne peut être définie positive ni définie négative, car admettant des valeurs nulles pour $(x, y) \neq (0, 0)$. Et donc les seuls cas où Q est définie (positive ou négative) sont donc les cas décrits ci-dessus.

Solution de [16.82]. • (i) : Les points critiques sont déterminés par $(Df)(x, y, z) = \mathbf{0}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\big(\ (\partial_1 f)(x, y, z) \ , \ (\partial_1 f)(x, y, z) \ , \ (\partial_3)(x, y, z) \ \big) \\ &\qquad\qquad \equiv \big(\ 2x + y + z \ , \ x + 2y + z \ , \ x + y + 2z \ \big) = (\,0\,,\,0\,,\,0\,) \ . \end{aligned}$$

Le système d'équations

$$2x + y + z = x + 2y + z = x + y + 2z = 0$$

a $(0, 0, 0)$ comme solution unique. La fonction f n'a donc qu'un seul point critique.

• (ii) : Pour déterminer si c'est un extremum local, on calcule la matrice Hessienne, d'abord dans un point (x,y,z) arbitraire et ensuite au point $(0,0,0)$:

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Si on applique le critère de Sylvester, on calcule les trois mineurs principaux dominants : $M_1 = 2$ et

$$M_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \quad , \quad M_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 \quad .$$

Ces trois valeurs sont strictement positives, donc $(0,0,0)$ est un minimum local (strict). Si on calcule le polynôme caractéristique pour pouvoir appliquer la règle des signes de Descartes, on trouve

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = (1-\lambda)^2(4-\lambda) \quad .$$

La suite $-1, 6, -9, 4$ comporte 3 changements de signes, donc delon la règle des signes de Descartes ce polynôme a trois racines strictement positives (confirmé par la décomposition : 1 racine double et 4 racine simple). De nouveau la conclusion est que $(0,0,0)$ est un minimum local.

• (iii) : Pour déterminer si ce point est un minimum global, on constate qu'on a l'égalité

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \\ &= \tfrac{1}{2}\,x^2 + xy + \tfrac{1}{2}\,y^2 + \tfrac{1}{2}\,y^2 + yz + \tfrac{1}{2}\,z^2 + \tfrac{1}{2}\,z^2 + zx + \tfrac{1}{2}\,x^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\,(x+y)^2 + \tfrac{1}{2}\,(y+z)^2 + \tfrac{1}{2}\,(x+z)^2 \quad . \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\forall (x,y,z) \quad : \quad f(x,y,z) \geqslant 0 = f(0,0,0) \quad .$$

Par conséquent le point $(0,0,0)$ est un minimum global (strict).

Solution de [16.83]. Pour trouver les extrema de f, on commence à déterminer les points critiques, pour lesquels on calcule la matrice de Df :

$$\mathrm{Jac}\big((Df)(x,y,z)\big) = \begin{pmatrix} 2x - 2yz & 2y - 2xz & 2z - 2xy \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qui donne comme équations pour les points critiques :

$$\left.\begin{aligned} x &= yz \\ y &= xz \\ z &= xy \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= yz \\ y &= yz^2 \\ z &= y^2 z \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= yz \\ y = 0 &\text{ ou } z = \pm 1 \\ z &= y^2 z \end{aligned}\right\}$$

et ce système admet 5 solutions : $(0,0,0)$ et les quatre points $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$ et $(-1,-1,1)$.

Pour déterminer si parmi ces points il y a un extremum, on calcule la matrice Hessienne H dans ces points. Dans un point arbitraire (x, y, z) on a

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -2z & -2y \\ -2z & 2 & -2x \\ -2y & -2x & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Dans le point $(0, 0, 0)$ on a donc

$$H(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qui est une matrice définie positive. Le point $(0, 0, 0)$ est donc un minimum local.

Pour les quatre autres points avec $\varepsilon = \pm$ et $\eta = \pm 1$ on a

$$H(\varepsilon, \eta, \varepsilon\eta) = \begin{pmatrix} 2 & -2\varepsilon\eta & -2\eta \\ -2\varepsilon\eta & 2 & -2\varepsilon \\ -2\eta & -2\varepsilon & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Si on veut appliquer le critère de Sylvester, on calcule les trois mineurs principaux dominants, c'est-à-dire $M_1 = 2$,

$$M_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & -2\varepsilon\eta \\ -2\varepsilon\eta & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad M_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & -2\varepsilon\eta & -2\eta \\ -2\varepsilon\eta & 2 & -2\varepsilon \\ -2\eta & -2\varepsilon & 2 \end{pmatrix} = -32 \quad .$$

Parce que le dernier M_3 est non-nul, le critère de Sylvester permet de conclure que ces points ne sont ni des maxima ni des minima locaux. Quand on calcule le polynôme caractéristique de cette matrice on trouve

$$\det(\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2\varepsilon\eta & -2\eta \\ -2\varepsilon\eta & 2-\lambda & -2\varepsilon \\ -2\eta & -2\varepsilon & 2-\lambda \end{pmatrix}) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = (-2-\lambda)(4-\lambda)^2 \quad .$$

Selon la règle des signes de Descartes on constate que dans la suite $-1, 6, -32$ il y a deux changements de signes. Et 0 n'est pas racine de ce polynôme. On a donc $\sigma = 2$ et $z_o = 0$, ce qui veut dire qu'il y a deux racines strictement positives et une strictement négative. On voit ceci aussi dans la décomposition du polynôme (avec la précision que 4 est une racine double et -2 une racine simple), mais on n'en a pas besoin pour cette conclusion. Ces points ne représentent donc pas des extrema locaux.

Reste à déterminer si $(0, 0, 0)$ est un minimum global ou non. Pour cela on raisonne comme suit. La fonction f est un polynôme en trois variables et le monôme dominant xyz a degré 3, ce qui est impair. Étant donné qu'une fonction cubique n'a pas de minimum ni de maximum global, on devine donc que $(0, 0, 0)$ n'est pas un minimum global. Pour le montrer on considère les points de la forme (x, x, x) pour lesquels on trouve

$$f(x, x, x) = 3x^2 - 2x^3 \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x, x, x) = -\infty \quad .$$

On en déduit qu'effectivement $f(0, 0, 0) = 0$ ne représente pas un minimum global.

Solution de [16.86]. On calcule d'abord la matrice Jacobienne des dérivées partielles :

$$\text{matrice}\big((Df)(x, y)\big) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(x, y) & (\partial_2 f)(x, y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2xy(y^2-x^4)}{(x^4+y^2)^2} & \dfrac{x^2(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2} \end{pmatrix} \quad .$$

Ensuite on calcule la matrice Hessienne :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} (\partial_1\partial_1 f)(x,y) & (\partial_1\partial_2 f)(x,y) \\ (\partial_2\partial_1 f)(a,y) & (\partial_2\partial_2 f)(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2y(y^4+3x^8-12x^4y^2)}{(x^4+y^2)^3} & \dfrac{-2x(x^8+y^4-6x^4y^2)}{(x^4+y^2)^3} \\ \dfrac{-2x(x^8+y^4-6x^4y^2)}{(x^4+y^2)^3} & \dfrac{2x^2y(y^2-3x^4)}{(x^4+y^2)^3} \end{pmatrix}$$

Les points critiques sont donc déterminés par les équations

$$\frac{2xy(y^2-x^4)}{(x^4+y^2)^2} = 0 = \frac{x^2(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2} \quad ,$$

dont les solutions sont tous les points

$$A_{\varepsilon,t} = (t, \varepsilon\, t^2) \qquad \text{et} \qquad B_t = (0,t)$$

avec $t \in \mathbf{R}^*$ et $\varepsilon = \pm 1$. Si on calcule la matrice Hessienne dans ces points, on trouve

$$H(A_{\varepsilon,t}) = \begin{pmatrix} -2\varepsilon\, t^{-2} & t^{-3} \\ t^{-3} & -\frac{1}{2}\varepsilon\, t^{-4} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad H(B_t) = \begin{pmatrix} 2\,t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Pour les points $A_{\varepsilon,t}$ et B_t on a $\det(A_{\varepsilon,t}) = 0 = \det(B_t)$ et donc le produit des deux valeurs propres est nul. Ces points ne peuvent donc pas être des extrema stricts. Mais s'il n'y a qu'une seule valeur propre non nulle, alors il ne peut pas non plus y avoir deux valeurs propres de signes opposés. Pour ces points critiques on ne peut donc pas déterminer leur nature à l'aide du Hessien.

Par contre, si on remarque que pour le couple $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ il existe un couple unique (r,φ) avec $r > 0$ et $\varphi \in [0,\pi]$ tel que

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^4+y^2} \\ \varphi &= \arccos\Big(\frac{y}{\sqrt{x^4+y^2}}\Big) \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{aligned} x^2 &= r\,\sin(\varphi) \\ y &= r\,\cos(\varphi) \end{aligned}\right. \quad ,$$

alors la fonction f prend la forme

$$f(x,y) = \frac{r^2\,\sin(\varphi)\,\cos(\varphi)}{r^2} = \tfrac{1}{2}\,\sin(2\varphi) \quad .$$

Il s'ensuit qu'on a les inégalités $-\frac{1}{2} \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{1}{2}$. Si maintenant on remarque en plus qu'on a $f(A_{\varepsilon,t}) = \frac{1}{2}\,\varepsilon$, on en déduit que chaque point $A_{1,t}$ représente un maximum global et chaque point $A_{-1,t}$ un minimum global.

Pour les points B_t il faut employer d'autres arguments pour trouver leur nature. Commençons avec la remarque qu'on a $f(B_t) = 0$. Et ensuite on constate que le signe de $f(x,y)$ est le même que le signe de y. La conclusion est donc que pour $t > 0$ les points B_t représentent des minima locaux (car f positif dans un voisinage de B_t) et que pour $t < 0$ ils représentent des maxima locaux.

Solution de [16.87]. • (i) : Remarquons au préalable que la convergence de la série $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2$ implique qu'on a $\lim_{i\to\infty} x_i = 0$ et donc en particulier qu'il existe $i_o \in \mathbf{N}$

tel qu'on a (voir aussi [1.46])

$$\|x\|_\infty \equiv \max_{j\in\mathbf{N}} |x_j| = |x_{i_o}| = \sqrt{(x_{i_o})^2} \leqslant \Big(\sum_{i=0}^\infty |x_i|^2\Big)^{1/2} = \|x\| \quad . \tag{17.36}$$

Il s'ensuit qu'on peut faire le calcul

$$\sum_{i=0}^\infty \left|\frac{(x_i)^2}{i+1} + (x_i)^3\right| \leqslant \sum_{i=0}^\infty \left(\frac{|x_i|^2}{i+1} + |x_i|^3\right) \leqslant \sum_{i=0}^\infty \big(\,|x_i|^2 + |x_i|^2\cdot\max_{j\in\mathbf{N}}|x_j|\,\big)$$
$$\leqslant \|x\|^2\cdot(1+\|x\|\,) \quad .$$

On en déduit que la série qui définit $f(x)$ est une série absolument convergente et donc que f est bien définie.

Pour trouver la différentielle, on calcule $f(x+h)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{i=0}^\infty \left(\frac{(x_i+h_i)^2}{i+1} + (x_i+h_i)^3\right) \\ &= \sum_{i=0}^\infty \left(\frac{(x_i)^2}{i+1} + (x_i)^3 + 2\,\frac{x_i\,h_i + (h_i)^2}{i+1} + 3\,(x_i)^2\,h_i + 3\,x_i\,(h_i)^2 + (h_i)^3\right) \quad , \end{aligned}$$

ce qui suggère que la différentielle est donnée par

$$\big((Df)(x)\big)(h) = \sum_{i=0}^\infty \left(2\,\frac{x_i\,h_i}{i+1} + 3\,(x_i)^2\,h_i\right) \quad . \tag{17.37}$$

Pour le montrer il faut vérifier plusieurs choses : que la formule pour $\big((Df)(x)\big)(h)$ est bien définie, c'est-à-dire que la série converge, que l'application $h \mapsto \big((Df)(x)\big)(h)$ est linéaire et continue, et qu'elle vérifie la condition pour être la différentielle. Pour le faire on introduit d'abord, pour un élément $x\in\ell^2$, l'élément $y=|x|\in\ell^2$ définie par $y_i = |x_i|$ (avec de façon évidente l'égalité $\|y\| = \|x\|$). Ensuite on fait le calcul :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^\infty \left|\frac{2\,x_i\,h_i}{i+1} + 3\,(x_i)^2\,h_i\right| &\leqslant \sum_{i=0}^\infty |x_i\,h_i|\cdot\left(\frac{2}{i+1} + 3\,x_i\right) \\ &\leqslant \big(\,2 + 3\,\max_{j\in\mathbf{N}}|x_j|\,\big)\cdot\sum_{i=0}^\infty |x_i\,h_i| = \big(\,2+3\,\max_{j\in\mathbf{N}}|x_j|\,\big)\cdot\langle\,|x|,|h|\,\rangle \\ &\overset{[1.16],\ (17.36)}{\leqslant} \big(\,2+3\,\|x\|\,\big)\cdot\|x\|\cdot\|h\| \quad . \end{aligned}$$

Ce résultat montre d'abord que la série définissant $\big((Df)(x)\big)(h)$ est absolument convergente, c'est-à-dire que $\big((Df)(x)\big)(h)$ est bien définie. Une fois qu'on sait que cette série est absolument convergente, il est élémentaire de montrer que l'application $h \mapsto \big((Df)(x)\big)(h)$ est linéaire. Et sa continuité se déduit du même calcul, car on a l'inégalité

$$\big|\,\big((Df)(x)\big)(h)\,\big| \leqslant \big(\,2+3\,\|x\|\,\big)\cdot\|x\|\cdot\|h\| \quad ,$$

ce qui dit que $(Df)(x)$ est continue avec $\|(Df)(x)\| \leqslant \big(\,2+3\,\|x\|\,\big)\cdot\|x\|$.

Reste à montrer que cette application vérifie la condition d'être la différentielle. Pour cela on remarque qu'on a l'égalité

$$f(x+h) - f(x) - \big((Df)(x)\big)(h) = \sum_{i=0}^\infty \left(2\,\frac{(h_i)^2}{i+1} + 3\,x_i\,(h_i)^2 + (h_i)^3\right) \quad ,$$

ce qui permet de faire le calcul :

$$\big|\, f(x+h) - f(x) - \big((Df)(x)\big)(h)\,\big| \leqslant (2 + 3\,\max_{j\in\mathbf{N}}|x_j| + \max_{j\in\mathbf{N}}|h_j|\,)\cdot\|h\|^2$$

Avec (17.36) on en déduit immédiatement que cette application est bien la différentielle de f au point x. Si on substitue $x=0$ dans (17.37), on trouve immédiatement $(Df)(0)=0$, montrant que 0 est un point critique de f.

• (ii) : Par définition il faut trouver une application linéaire continue $A:\ell^2\to\mathcal{L}(\ell^2;\mathbf{R})$ telle que (attention à l'utilisation de la lettre x au lieu du h habituel !)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\|(Df)(x)-(Df)(0)-A(x)\|}{\|x\|}=0\ . \tag{17.38}$$

Étant donné qu'on a $(Df)(0)=0$, il faut donc trouver la partie linéaire dans $(Df)(x)$. Si on regarde bien (17.37), on devine que l'application A devrait être donnée par

$$A(x) : h\mapsto\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2\,x_i\,h_i}{i+1}\ . \tag{17.39}$$

Comme pour la différentielle première, il y a plusieurs vérifications à faire. Il est élémentaire de vérifier que l'application $A(x)$ est bien linéaire en h et qu'ensuite l'application A est bien linéaire en x. On laisse ces vérifications au lecteur assidu. Mais il faut aussi vérifier que l'application $A(x)$ est continue et ensuite que l'application A est continue. Avec les mêmes techniques qu'utilisées précédemment, on fait le calcul

$$\big|\big(A(x)\big)(h)\big|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{2\,x_i\,h_i}{i+1}\right|\leqslant 2\,\|x\|\cdot\|h\|\ .$$

Il s'ensuit que $(A(x)$ est bien une application linéaire continue, c'est-à-dire $A(x)\in\mathcal{L}(\ell^2;\mathbf{R})$, avec $\|A(x)\|\leqslant 2\,\|x\|$. De la dernière inégalité on déduit que A est continue avec $\|A\|\leqslant 2$.

Une fois qu'on sait que A appartient bien à $\mathcal{L}\big(\ell^2;\mathcal{L}(\ell^2;\mathbf{R})\big)$, on peut procéder à la preuve que c'est la différentielle de Df au point 0. Pour cela on constate d'abord que l'application $(Df)(x)-A(x)$ est donnée par

$$(Df)(x)-A(x)\quad : \quad h\mapsto\sum_{i=0}^{\infty}3\,(x_i)^2\,h_i\ .$$

Comme avant, on vérifie aisément qu'on a l'inégalité

$$\big|(Df)(x)-A(x)\big)(h)\big|\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}3\,(x_i)^2\,|h_i|\leqslant 3\,\max_{j\in\mathbf{N}}|h_j|\cdot\sum_{i=0}^{\infty}(x_i)^2\leqslant 3\,\|h\|\cdot\|x\|^2\ .$$

Il s'ensuit que $(Df)(x)-A(x)$ est continue avec $\|(Df)(x)-A(x)\|\leqslant 3\,\|x\|^2$. Avec cette inégalité il est immédiat que (17.38) est vérifiée, c'est-à-dire que $A=\big(D(Df)\big)(0)$.

Une fois qu'on a $\big(D(Df)\big)(0)$, son évaluation en (h,h) est simple :

$$A(h,h)\cong\big(A(h)\big)(h)\overset{(17.39)}{=}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2\,(h_i)^2}{i+1}\ .$$

Il est alors immédiat que $A(h,h)>0$ pour tout $h\neq 0\in\ell^2$.

• (iii) : Si on définit les suites $x^{(k)}$ et $y^{(k)}$ par

$$-(x^{(k)})_k = (y^{(k)})_k = \frac{2}{k+1} \qquad \text{et} \qquad \forall n \neq k \quad : \quad (x^{(k)})_n = (y^{(k)})_n = 0 \ ,$$

alors on aura $\|x^{(k)}\| = \|y^{(k)}\| = 2\,(k+1)^{-1}$ et donc $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} y^{(k)} = 0$. Mais on aura aussi

$$\begin{aligned} f\big(x^{(k)}\big) &= \frac{4}{(k+1)^3} - \frac{8}{(k+1)^3} = \frac{-4}{(k+1)^3} < 0 \\ f\big(y^{(k)}\big) &= \frac{4}{(k+1)^3} + \frac{8}{(k+1)^3} = \frac{12}{(k+1)^3} > 0 \ . \end{aligned}$$

• (iv) : On a montré qu'on a $(Df)(0) = 0$, donc 0 est un point critique de f et $f(0) = 0$. Par contre, dans tout voisinage de 0 on peut trouver des éléments $x^{(k)}, y^{(k)} \in \ell^2$ (avec un k qui dépendra du voisinage) tels que $f\big(x^{(k)}\big) < f(0) < f\big(y^{(k)}\big)$, ce qui montre que f ne présente ni maximum ni minimum local en 0.

Les solutions de §11

Solution de [16.88]. • (i) : Étant polynomiale dans les coordonnées, f est de classe C^∞. On calcule facilement la différentielle

$$(Df)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

et on constate qu'on a $\det\big((Df)(x,y)\big) = 4(x^2+y^2)$, ce qui est non-nul pour $(x,y) \in U$. Il s'ensuit qu'on a $(Df)(x,y) \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$ et par le théorème de l'inversion locale [11.3] on en déduit que f est un C^∞-difféomorphisme local au voisinage de tout point de U. D'autre part, il est immédiat qu'on a $f(x,y) = f(-x,-y)$ et donc f ne peut pas être un difféomorphisme global.

• (ii) : Comme produit/composée de fonctions de classe C^∞, g est elle-même de classe C^∞. On calcule facilement la différentielle

$$(Dg)(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y & -\mathrm{e}^x \sin y \\ \mathrm{e}^x \sin y & \mathrm{e}^x \cos y \end{pmatrix}$$

et on constate qu'on a $\det\big((Dg)(x,y)\big) = \mathrm{e}^{2x} \neq 0$. Il s'ensuit qu'on a $(Dg)(x,y) \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$ et par le théorème de l'inversion locale [11.3] on en déduit que g est un C^∞-difféomorphisme local au voisinage de tout point $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. D'autre part, il est immédiat qu'on a $f(x,y) = f(x, y+2\pi)$ et donc f ne peut pas être injective sur $\mathbf{R}^2$ entier.

Solution de [16.89]. • (i) : Sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ la fonction f est une somme/produit/quotient/composée de fonctions de classe C^∞, donc f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Reste donc la dérivabilité en $x = 0$, ce qu'on fait par un calcul direct :

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h + h^2 \sin(\pi/h)}{h} = \lim_{h\to 0} \big(1 + h\sin(\pi/h)\big) = 1 \quad .$$

Il s'ensuit que $(Df)(0) = \mathrm{id} \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R};\mathbf{R})$.

• (ii) : Le calcul direct donne

$$f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1} \quad , \quad f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} \quad , \quad f\left(\frac{1}{2n+\frac12}\right) = \frac{2n+\frac32}{\left(2n+\frac12\right)^2} \quad .$$

Les inégalités demandées en découlent immédiatement.

• (iii) : Si f est inversible sur un voisinage (ouvert) I de $0 \in \mathbf{R}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $B_\delta(0) = \,]-\delta,\delta[\, \subset I$ et donc f sera injective sur $B_\delta(0)$. Il existe donc $n \in \mathbf{N}$ tel que $(2n)^{-1} < \delta$ et donc $(2n)^{-1}, (2n+\frac12)^{-1}, (2n+1)^{-1} \in B_\delta(0)$. D'autre part, par le théorème des valeurs intermédiaires et les inégalités montrées en (ii), il existe $x \in \,](2n+1)^{-1}, (2n+\frac12)^{-1}[\,$ tel que $f(x) = f\big((2n)^{-1}\big)$. On a donc $x, (2n)^{-1} \in B_\delta(0)$, $x \neq (2n)^{-1}$ avec $f(x) = f\big((2n)^{-1}\big)$, ce qui contredit l'injectivité de f sur $B_\delta(0)$. Par l'absurde on a donc montré que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0.

• (iv) : Ceci ne contredit pas le théorème de l'inversion locale [11.2], car f' n'est pas continue en 0.

Solution de [16.90]. On définit l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ par

$$f(x, y) = (x + \mathrm{e}^{-xy}, y + \mathrm{e}^{xy}) \quad .$$

f est de classe C^∞ comme addition/produit/composée des coordonnées. On a

$$(Df)(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - y\ \mathrm{e}^{-xy} & -x\ \mathrm{e}^{-xy} \\ y\ \mathrm{e}^{xy} & 1 + x\ \mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}$$

et donc $(Df)(0, 0) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}^2} \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$. Par le théorème de l'inversion locale [11.3] on en déduit qu'il existe deux ouverts $V, W \subset \mathbf{R}^2$, $(0, 0) \in V$ et $f(0, 0) = (1, 1) \in W$ tels que $f : V \to W$ est un difféomorphisme. Pour $(a, b) \in W$ il existe donc $(x, y) \in V$ (même unique) tel que $f(x, y) = (a, b)$.

Solution de [16.91]. • (i) : L'application f est polynomiale dans ses coordonnées (plus précisément : quadratique) donc de classe C^∞. Une autre façon de le voir qui nous permet en même temps d'obtenir sa différentielle est de remarquer que $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ est de dimension finie, donc qu'on a "l'égalité" $\mathrm{M}(n, \mathbf{R}) = \mathcal{L}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$. Ensuite on remarque que l'opération de composition $\mathcal{C} : \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \times \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \to \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ est bilinéaire continue [6.9]. Et finalement on remarque qu'on a l'égalité $f(A) = \mathcal{C}(A, A)$. Selon [7.3] toute application bilinéaire continue est de classe C^∞, donc par composition d'applications $A \mapsto (A, A) \mapsto \mathcal{C}(A, A) = f(A)$ l'application f est aussi de classe C^∞. Si on note $d : \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \to \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \times \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ l'application $d(A) = (A, A)$ on peut donc calculer la différentielle de f à l'aide de [7.3] :

$$\begin{aligned} \big((Df)(A)\big)(H) &= \big((D\mathcal{C})(A, A)\big)\Big(\big((Dd)(A)\big)(H)\Big) \\ &= \big((D\mathcal{C})(A, A)\big)(H, H) = \mathcal{C}(A, H) + \mathcal{C}(H, A) = AH + HA \quad . \end{aligned}$$

On aurait pu obtenir ce résultat également par un calcul direct. Pour cela on aurait commencé à "deviner" la différentielle en calculant la partie linéaire de $f(A + H) - f(A)$:

$$f(A + H) - f(A) = (A + H)^2 - A^2 = AH + HA + H^2 \quad .$$

Ceci suggère qu'on devrait avoir $\big((Df)(A)\big)(H) = AH + HA$ et on aurait terminé avec la preuve par le calcul de la limite :

$$\lim_{H \to \mathbf{0}} \frac{\|f(A + H) - f(A) - AH + HA\|}{\|H\|} = \lim_{H \to \mathbf{0}} \frac{\|H^2\|}{\|H\|} \overset{[1.26]}{\leqslant} \lim_{H \to \mathbf{0}} \frac{\|H\|^2}{\|H\|} = 0 \quad .$$

• (ii) : On constate que $\big((Df)(\mathbf{1}_n)\big)(H) = 2H$, c'est-à-dire qu'on a l'égalité $(Df)(\mathbf{1}_n) = 2\,\mathrm{id}_{\mathrm{M}(n,\mathbf{R})}$. L'espace $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ étant de dimension fini est un espace de Banach, et $2\,\mathrm{id}_{\mathrm{M}(n,\mathbf{R})}$ est un isomorphisme. On peut donc appliquer le théorème de l'inversion locale [11.3] et conclure qu'il existe un voisinage ouvert V de $\mathbf{1}_n$ et un voisinage ouvert W de $f(\mathbf{1}_n) = \mathbf{1}_n$ tels que $f : V \to W$ est un C^∞-difféomorphisme. On note $g = f^{-1} : W \to V$ et on remarque que W est un ouvert contenant $\mathbf{1}_n$. Il existe donc $r > 0$ tel que $B_r(\mathbf{1}_1) \subset W$ et la restriction de g à $B_r(\mathbf{1}_n)$ a la propriété

$$\forall A \in B_r(\mathbf{1}_n) \quad : \quad A = f\big(f^{-1}(A)\big) \equiv f\big(g(A)\big) = \big(g(A)\big)^2 \quad .$$

• (iii) : On a $\big((Df)(J)\big)(H) = JH + HJ = \mathbf{0}$. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert W de $f(J) = \mathbf{1}_2$ et une application $g : W \to \mathrm{M}(2, \mathbf{R})$ tels que $g(\mathbf{1}_2) = J$ et $\big(g(A)\big)^2 = A$ pour tout $A \in W$, c'est-à-dire

$$\forall A \in W \quad : \quad A = f\big(g(A)\big) = \mathrm{id}(A) \quad .$$

Alors par la différentielle de la composée d'applications différentiables on a donc aussi pour tout $H' \in \mathrm{M}(2, \mathbf{R})$ l'égalité

$$\begin{aligned} H' &= \big((D\,\mathrm{id})(J)\big)(H') = \Big((Df)\big(g(\mathbf{1}_2)\big)\Big)\Big(\big((Dg)(\mathbf{1}_2)\big)(H')\Big) \\ &= \big((Df)(J)\big)\Big(\big((Dg)(\mathbf{1}_2)\big)(H')\Big) \quad . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'application $(Df)(J) : \mathrm{M}(2, \mathbf{R}) \to \mathrm{M}(2, \mathbf{R})$ est surjective. Mais on est en dimension fini, donc cette application ne peut être surjective que si elle est (aussi) injective. Ceci contredit le fait que $\big((Df)(J)\big)(H) = \mathbf{0}$. L'hypothèse de départ est donc fausse et un tel voisinage W avec une fonction différentiable g n'existe pas.

On ne peut pas appliquer [11.1] pour dire que si une telle application existait, alors $(Df)(J)$ devrait être un isomorphisme, ce qui contredit la non-injectivité de $(Df)(J)$. La raison est que l'hypothèse de [11.1] est que f établit une bijection entre deux ouverts V et W, tandis que tous ce qu'on sait ici est que la composée $f \circ g$ est l'identité, mais on ne sait pas si un telle g est la réciproque de f, donc on ne sait pas si f établit une bijection. D'où le passage par le calcul direct de la différentielle d'une composée. Et on voit le “problème” avec lequel on est confronté : de l'égalité $f \circ g = \mathrm{id}$ on peut seulement déduire que $(Df)(J)$ doit être surjective. Sauf qu'ici en dimension finie la surjectivité implique aussi l'injectivité, ce qui permet de conclure. Dans le cas général, on aura besoin également de l'identité dans l'autre sens : $g \circ f = \mathrm{id}$ pour pouvoir conclure que $(Df)(J)$ doit être injective.

Un exemple “classique” pour montrer qu'on a besoin des deux conditions en dimension infinie est l'application $\mathcal{D} : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X]$ définie sur l'espace des polynômes par $\mathcal{D}(P) = P'$ (la dérivée). Si on définit l'application $\mathcal{I} : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X]$ (intégration) par

$$\mathcal{I}(P) = Q \qquad \text{avec} \qquad Q(x) = \int_0^x P(t)\ \mathrm{d}t \quad ,$$

alors il est évident qu'on a $\mathcal{D} \circ \mathcal{I} = \mathrm{id}$ (ce qui implique que $\mathcal{D}$ est surjective et $\mathcal{I}$ injective), mais on n'aura pas $\mathcal{I} \circ \mathcal{D} = \mathrm{id}$, simplement parce que la constante d'un polynôme P aura disparue sous cette composée (et effectivement $\mathcal{I}$ n'est pas surjective et $\mathcal{D}$ n'est pas injective).

Nota Bene. Dans le cas $n = 1$ la fonction f se réduit à la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Dans ce cas il est bien connu que pour tout $x_o \neq 0$ il existe une fonction $g : W \to \mathbf{R}$ définie dans un voisinage ouvert W de $y_o = f(x_o) = x_o^2$ telle que $g(y_o) = x_o$ et $\big(g(y)\big)^2 = y$ pour tout $y \in W$. Il suffit de prendre $W =]0, \infty[$ et

$$g(y) = \mathrm{signe}(x_0) \cdot \sqrt{y} \quad .$$

Cette propriété n'est donc plus valable en général : pour le point de départ $\mathbf{1}_n$ ça marche toujours, mais déjà en dimension 2 ce n'est plus vrai pour le point de départ J. L'argument essentiel (pour la preuve que ce n'est pas vrai) est que $(Df)(J)$ n'est pas injective et qu'on est en dimension finie.

Solution de [16.92]. On commence par la remarque générale que pour $x, x' \in \mathbf{R}$ on a, par l'(in)égalité des accroissements finis, la majoration

$$|f(x) - f(x')| \leqslant k \cdot |x - x'| \quad .$$

- (i) : Si on a $g(x, y) = g(x', y')$, on a donc

$$\begin{array}{ccc} x + f(y) = x' + f(y') & \text{et} & y + f(x) = y' + f(x') \\ x - x' = f(y') - f(y) & \text{et} & y' - y = f(x) - f(x') \end{array} .$$

On peut donc faire les majorations

$$|y' - y| = |f(x) - f(x')| \leqslant k \cdot |x - x'| = k \cdot |f(y') - f(y)| \leqslant k^2 \cdot |y' - y| \quad .$$

Ceci n'est possible que si on a $|y' - y| = 0$, car $k^2 < 1$, et donc aussi $|x - x'| = 0$.

• (ii) : Il est immédiat qu'on a

$$(Dg)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qui est une matrice inversible car on a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{pmatrix} = 1 - f'(x) \cdot f'(y) \neq 0 \quad ,$$

simplement parce que $|f'(x)\, f'(y)| \leqslant k^2 < 1$. Par le théorème d'inversion globale [11.5] on peut conclure que $g : \mathbf{R}^2 \to g(\mathbf{R}^2)$ est un C^1-difféomorphisme (car si f est de classe C^1, g l'est aussi).

• (iii)(a) : Toujours par le théorème de l'inversion globale [11.5] on peut conclure que $f(\mathbf{R}^2)$ est un ouvert.

• (iii)(b) : Par l'inégalité établie au début on a

$$|x - x' + f(y) - f(y')| \geqslant |x - x'| - |f(y') - f(y)| \geqslant |x - x'| - k \cdot |y - y'|$$

ainsi que

$$|y - y' + f(x) - f(x')| \geqslant |y - y'| - |f(x') - f(x)| \geqslant |y - y'| - k \cdot |x - x'|$$

En additionnant on trouve l'inégalité demandée.

• (iii)(c) : Soit $F \subset \mathbf{R}^2$ un fermé et soit $(a,b) \in \overline{g(F)}$. Alors il existe une suite $(a_n, b_n) \in f(F)$ telle que $\lim_{n\to\infty}(a_n, b_n) = (a,b)$. Il existe donc une suite $(x_n, y_n) \in F$ telle que $\lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = (a,b)$. Mais la suite $g(x_n, y_n)$ est une suite de Cauchy car convergente. Par l'inégalité montrer en (b), la suite (x_n, y_n) est donc aussi de Cauchy. $\mathbf{R}^2$ étant complet, il existe donc $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x,y)$. Mais F est fermé, donc on doit avoir $(x,y) \in F$. Par continuité de g on a donc $(a,b) = \lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = g(x,y) \in g(F)$, ce qui montre que $g(F)$ est fermé.

En prenant le cas particulier $F = \mathbf{R}^2$ on conclut que $g(\mathbf{R}^2)$ est fermé. Mais selon (a) c'est aussi un ouvert, donc (par connexité de $\mathbf{R}^2$) on a $g(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2$.

• (iv)(a) : Par le résultat de (iii)(a) (et par [1.3]) on a les minorations

$$\begin{aligned} \|g(x,y)\|_1 &\geqslant \|g(x,y) - g(0,0)\|_1 - \|g(0,0)\|_1 \\ &\geqslant (1-k) \cdot \|(x,y) - (0,0)\|_1 - \|g(0,0)\|_1 \\ &= (1-k) \cdot \|(x,y)\|_1 - 2\,|f(0)| \quad . \end{aligned}$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a $\lim_{\|(x,y)\|_1\to\infty} \|g(x,y)\|_1 = \infty$ comme demandé.

• (iv)(b) : La définition de la norme $\|\cdot\|_2$ nous donne immédiatement l'expression

$$F(x,y) = \big(x - a + f(y)\big)^2 + \big(y - b + f(x)\big)^2 \quad ,$$

ce qui est manifestement de classe C^1, étant donné que f est de classe C^1. Parce que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbf{R}^2$ sont équivalentes, on déduit de (a) qu'on a (aussi) $\lim_{\|(x,y)\|_2\to\infty} \|g(x,y)\|_2 = \infty$. Et donc il existe $R > 0$ tel qu'on a

$$\|(x,y)\|_2 \geqslant R \qquad \Longrightarrow \qquad \|g(x,y)\|_2 > \sqrt{F(0,0)} + \|(a,b)\|_2 \quad .$$

Pour tout (x,y) vérifiant $\|(x,y)\|_2 \geqslant R$ on a donc

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \big(\,\|g(x,y) - (a,b)\|_2\big)^2 \geqslant \big(\,\|g(x,y)\|_2 - \|(a,b)\|_2\big)^2 \\ &> \big(\sqrt{F(0,0)}\,\big)^2 = F(0,0) \quad . \end{aligned} \tag{17.40}$$

D'autre part, l'ensemble $\overline{B_R(0,0)}$ est compact (comme un ensemble fermé et borné dans un espace vectoriel de dimension finie), donc la fonction continue F admet un point où la valeur minimale de F sur cet ensemble est atteinte :

$$\exists (x_o, y_o) \in \overline{B_R(0,0)} \quad \forall (x,y) \in \overline{B_R(0,0)} \;:\; F(x_o,y_o) \leqslant F(x,y) \;.$$

Avec la minoration (17.40) le point (x_o, y_o) est donc un minimum global pour la fonction F. Mais un minimum local (dans le domaine de définition ouvert d'une fonction) est en particulier un point stationnaire [9.1], donc on a $(DF)(x_o,y_o) = (0;0)$. Avec l'expression pour la différentielle

$$(DF)(x,y) = \Big(\, 2\big(x-a+f(y)\big) + 2\big(y-b+f(x)\big)\cdot f'(x) \;; \\ 2\big(x-a+f(y)\big)\cdot f'(y) + 2\big(y-b+f(x)\big) \, \Big)$$

on trouve donc les équations

$$\begin{cases} 2\big(x_o-a+f(y_o)\big) + 2\big(y_o-b+f(x_o)\big)\cdot f'(x_o) = 0 \\ 2\big(x_o-a+f(y_o)\big)\cdot f'(y_o) + 2\big(y_o-b+f(x_o)\big) = 0 \end{cases}$$

ce qui donne les équations

$$\begin{cases} \big(x_o-a+f(y_o)\big)\cdot\big(1-f'(x_o)\,f'(y_o)\big) = 0 \\ \big(y_o-b+f(x_o)\big)\cdot\big(1-f'(x_o)\,f'(y_o)\big) = 0 \end{cases}$$

Étant donné que $|f'(x_o)\,f'(y_o)| \leqslant k^2 < 1$, il s'ensuit qu'on a $1 - f'(x_o)\,f'(y_o) \neq 0$ et donc on trouve

$$\begin{cases} x_o-a+f(y_o) = 0 \\ y_o-b+f(x_o) = 0 \end{cases} \qquad\Longleftrightarrow\qquad g(x_o,y_o) = (a,b) \;.$$

On a donc montré que (a,b) appartient à l'image de g et donc que g est surjective sur $\mathbf{R}^2$.

- (v) : On constate facilement que la différentielle de ϕ est donnée par

$$(D\phi)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -f'(y) \\ -f'(x) & 0 \end{pmatrix} \;,$$

ce qui nous permet de faire le calcul

$$\|\big((D\phi)(x,y)\big)(a,b)\|_1 = |f'(x)\,b| + |f'(y)\,a| \leqslant k\cdot\|(a,b)\|_1 \;.$$

Étant donné qu'on a $k < 1$, l'inégalité des accroissements finis nous dit presque immédiatement que ϕ est une contraction. Et parce que $\mathbf{R}^2$ est fermé dans $\mathbf{R}^2$ et complet, on peut appliquer le théorème du point fixe [1.38] qui nous dit que ϕ admet un point fixe unique (x_o, y_o) :

$$\phi(x_o,y_o) = (x_o,y_o) \qquad\Longleftrightarrow\qquad g(x_o,y_o) = (a,b) \;,$$

ce qui montre que (a,b) appartient à l'image de g et donc (parce que (a,b) est arbitraire) que g est surjective sur $\mathbf{R}^2$.

Solution de [16.93]. Soit $U \subset \mathbf{R}^2$ un tel ouvert. Alors $f : U \to f(U)$ est un difféomorphisme et en particulier sa différentielle doit être inversible an chaque point $(x,y) \in U$. Si on calcule la matrice de sa différentielle on trouve

$$\big(\mathrm{Jac}(f)\big)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \;,$$

ce qui est inversible si et seulement si $x \neq y$. Cette condition coupe l'espace $\mathbf{R}^2$ en deux ouverts disjoints (caractérisés par $x < y$ et $x > y$) et donc notre ouvert connexe U doit être contenu dans un des ces deux ouverts. Si la restriction de f à un des ces deux ouverts est injective, alors selon [11.5] on aura trouvé notre ouvert connexe maximal.

Pour voir où f est injective/bijective, on essaye de déterminer sa réciproque, c'est-à-dire qu'on essaye de résoudre (x, y) en fonction de (u, v) de l'équation $f(x, y) = (u, v)$. Ceci nous donne :

$$\left.\begin{aligned} u &= x + y \\ v &= xy \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y &= u - x \\ v &= x(u - x) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y &= u - x \\ 0 &= x^2 - ux + v \end{aligned}\right\}$$

et ce système a comme solution

$$x_\pm = \tfrac{1}{2}(u \pm \sqrt{u^2 - 4v}) \qquad \text{et} \qquad y_\pm = u - x = \tfrac{1}{2}(u \mp \sqrt{u^2 - 4v}) \ .$$

Évidemment une telle solution n'existe pas pour $u^2 - 4v < 0$, pour $u^2 = 4v$ on aura $x = y$ et pour $u^2 - 4v > 0$ il y a deux solutions (x_+, y_+) et (x_-, y_-) avec

$$x_+ - y_+ = \sqrt{u^2 - 4v} > 0 \qquad \text{et} \qquad x_- - y_- = -\sqrt{u^2 - 4v} < 0 \ .$$

On en déduit que f est injective sur chacun des ouverts

$$U_+ = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > y \,\} \qquad \text{et} \qquad U_- = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < y \,\} \ .$$

En plus la différentielle est un isomorphisme sur chacun de ces ouverts (une application linéaire injective de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ est bijective et, parce qu'on est en dimension finie, c'est un isomorphisme), donc selon [11.5] la restriction de f à $U_\pm$ sera un difféomorphisme sur $f(U_\pm) = \{\, (u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 > 4v \,\}$.

On aurait pu voir directement que f n'est pas globalement injective, car on a $f(x, y) = f(y, x)$. Notre calcul montre que cette symétrie est la seule source de non-injecivité.

Solution de [16.94]. • (i) : Le fait que φ est une bijection entre V et U ne fait pas de doute pour ceux qui connaissent les coordonnées polaires, et ces lecteurs peuvent sauter la preuve de ce résultat. Pour les autres on fournit la preuve complète en deux étapes : d'abord que φ est injective et ensuite que son image est U.

Pour montrer que φ est un difféomorphisme sur son image, on veut invoquer [11.5]. Pour cela on montre d'abord que φ est injective :

$$\varphi(r, \theta) = \varphi(r', \theta') \quad \Leftrightarrow \quad r\cos(\theta) = r'\cos(\theta') \ \text{ et } \ r\sin(\theta) = r'\sin(\theta') \ .$$

En prenant le carré de chaque égalité et ensuite la somme, on obtient l'égalité $r^2 = (r')^2$ et donc $r = r' > 0$. Les deux équations se réduisent donc aux équations $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$, ce qui n'a qu'une seule solution pour $\theta, \theta' \in \,]-\pi, \pi[$, à savoir $\theta = \theta'$. Et donc φ est bien injective. Ensuit on constate que la matrice de sa différentielle est donnée par

$$\operatorname{Jac}\big((D\varphi)(r, \theta)\big) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \ .$$

Son déterminant vaut $r \neq 0$ et donc $(D\varphi)(r, \theta)$ est un isomorphisme. Par [11.5] φ est un difféomorphisme global de V sur $\varphi(V)$.

Pour montrer que $\varphi(V) = U$ on procède en plusieurs étapes. On commence avec l'inclusion $\varphi(V) \subset U$. Pour qu'on a $\varphi(r, \theta) \in \mathbf{R}^-$ on doit avoir

$$r\cos(\theta) = x \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad r\sin(\theta) = 0 \ .$$

La deuxième égalité nous dit qu'on doit avoir $\theta = 0$, car $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$. Et dans ce cas on aura $r\cos(\theta) = r > 0$. Les éléments du demi-axe négatif des abscisses n'appartiennent donc pas à $\varphi(V)$. Soit maintenant $(x,y)\in U$. Alors forcément on doit avoir $r=\sqrt{x^2+y^2}$, ce qui est bien strictement positive car l'origine $(0,0)$ n'appartient pas à U. Ensuite on pose

$$\theta=\arccos\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)\in[0,\pi] \ .$$

Mais on doit avoir $\theta<\pi$, car pour qu'on a $\arccos(z)=\pi$, il faut avoir $z=-1$, ce qui n'est possible que si on a $x=-\sqrt{x^2+y^2}$, ce qui implique $y=0$ et $x\leqslant 0$, et un tel point n'appartient pas à U. On a donc $\theta\in[0,\pi[$. Il s'ensuit qu'on a $\sin(\theta)\geqslant 0$ ce qui permet de faire le calcul

$$\sin(\theta)=\sqrt{1-\big(\cos(\theta)\big)}=\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \ .$$

Avec le couple (r,θ) qu'on vient de construire on a donc les implications

$$y\geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad (x,y)=\varphi(r,\theta) \qquad\text{et}\qquad y<0 \quad\Rightarrow\quad (x,y)=\varphi(r,-\theta) \ ,$$

ce qui montre que tout point $(x,y)\in U$ appartient à $\varphi(V)$, terminant la preuve que $\varphi(V)=U$.

Une toute autre approche pour montrer que φ est un C^∞-difféomorphisme entre V et U est d'exhiber explicitement une application $\psi:U\to V$ de classe C^∞ telle qu'on ait

$$\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_V \qquad\text{et}\qquad \psi\circ\varphi=\mathrm{id}_U \ . \tag{17.41}$$

Ainsi on aura montré en même temps que $\varphi(V)=U$, que $\varphi:V\to U$ est bijective, que $\varphi^{-1}=\psi$ est de classe C^∞ et (donc) que φ est un C^∞-difféomorphisme entre V et U.

On définit "donc" (voir aussi [3.4]) l'application $\psi:U\to\mathbf{R}^2$ par

$$\psi(x,y)=\Big(\ \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ 2\arctan\Big(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\Big)\ \Big)$$

et on constate que l'image est bien incluse dans V : parce que $(0,0)\notin U$ on a $\sqrt{x^2+y^2}>0$ et l'arctangent prend ses valeurs dans $]-\frac12\pi,\frac12\pi[$ et donc son double prend ses valeurs dans $]-\pi,\pi[$. D'autre part, pour que l'argument de l'arctangent est bien défini, il faut qu'on a $x+\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$. Mais pour qu'on a $x=-\sqrt{x^2+y^2}$, il faut avoir $y=0$ et $x\leqslant 0$. Et de tels points sont exclus de U. L'application ψ est donc bien une application de classe C^∞ (ses coordonnées sont de classe C^∞, en particulier parce qu'on prend la racine carrée d'un nombre strictement positif) définie sur U et à valeurs dans V. Reste donc à montrer que ce ψ est la réciproque de φ.

Donnons l'argumentation qui nous conduit à la formule pour ψ. Comme on a vu ci-dessus, l'utilisation de l'arccosinus (comme celle de l'arcsinus ou l'arctangent) a le problème que l'image de cette fonction est un intervalle de longueur π, tandis qu'on cherche la réciproque de φ pour laquelle l'angle doit parcourir un intervalle de longueur 2π. La "solution" est de calculer l'angle sur 2 et de multiplier le résultat par 2. Il est d'usage d'utiliser l'arctangent, plutôt que l'arcsinus ou l'arccosinus, mais ces deux dernières fonctions peuvent faire aussi bien l'affaire.

Il est "immédiat" qu'on doit avoir $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Reste donc à résoudre l'angle $\theta\in\,]-\pi,\pi[$ des équations

$$\cos(\theta)=\frac{x}{r} \qquad \sin(\theta)=\frac{y}{r}$$

et la suggestion est de passer par $\theta/2$ et de calculer $\tan(\theta/2)$. Étant donné qu'on a

$$\tan(\theta/2)=\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}=\frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\big(\cos(\theta/2)\big)^2}=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)+1} \ ,$$

on obtient donc

$$\tan(\theta/2) = \frac{y/r}{1+x/r} = \frac{y}{x+r} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = 2\ \arctan\Big(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\Big) \ ,$$

ce qui est la formule donnée ci-dessus dans l'expression pour ψ.

La même méthode permet d'obtenir une formule pour l'angle $\theta \in \,]0, 2\pi[$ comme suit. Pour $0 < \theta < 2\pi$ on a $-\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}(\theta - \pi) < \frac{1}{2}\pi$, ce qui suggère de calculer la valeur de

$$\tan\big(\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{2}\pi\big) = -\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = -\frac{\cos(\theta)+1}{\sin(\theta)} = -\frac{x+r}{y} = \frac{r^2-x^2}{y(x-r)} = \frac{y}{x-r} \ .$$

Il s'ensuit qu'on peut poser

$$\theta = \pi + 2\ \arctan\Big(\frac{y}{x-\sqrt{x^2+y^2}}\Big) \ ,$$

une formule qui a un sens sur $\mathbf{R}^2$ privé du demi-axe positif des abscisses $\mathbf{R}^+ = \{\,(x,0) \mid x \geqslant 0\,\}$.

Et si on cherche un angle dans l'intervalle $]-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi[$, on procède comme suit. Si on a $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$, alors on aura $-\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}(\theta - \frac{1}{2}\pi) < \frac{1}{2}\pi$, ce qui nous suggère le calcul

$$\begin{aligned}\tan\big(\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{4}\pi\big) &= \frac{\sin(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\pi)}{\cos(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\pi)} = \frac{\sin(\theta/2)-\cos(\theta/2)}{\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2)} = \frac{\sin(\theta)-\cos(\theta)-1}{\cos(\theta)+1+\sin(\theta)} \\ &= \frac{y-x-r}{x+r+y} = -\frac{x}{y+r} \ .\end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi - 2\ \arctan\Big(\frac{x}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\Big) \ ,$$

une formule qui a un sens sur $\mathbf{R}^2$ privé du demi-axe négatif des ordonnées $\{\,(0,y) \mid y \leqslant 0\,\}$, la demi-droite où l'angle fait $-\pi/2$.

Pour montrer que ψ est bien la réciproque de φ on vérifie les égalités (17.41) :

$$\begin{aligned}\psi\big(\varphi(r,\theta)\big) = \psi\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) &= \Bigg(\ r\ ,\ 2\ \arctan\Big(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)+1}\Big)\ \Bigg) \\ &= \Bigg(\ r\ ,\ 2\ \arctan\Big(\frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2)+1}\Big)\ \Bigg) \\ &= \Big(\ r\ ,\ 2\ \arctan\big(\tan(\theta/2)\big)\ \Big) = (r,\theta) \ .\end{aligned}$$

Pour $\varphi\circ\psi$ on fait d'abord quelques calculs préliminaires, en commençant avec le calcul

$$\Big(\cos\big(\arctan(z)\big)\Big)^2 = A \quad \Rightarrow$$
$$z^2 = \Big(\tan\big(\arctan(\theta)\big)\Big)^2 = \frac{1-A}{A} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{1+z^2} \ .$$

Ensuite on applique ce résultat pour calculer

$$\cos\big(2\ \arctan(z)\big) = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad \text{et} \qquad \sin\big(2\ \arctan(z)\big) = \frac{2z}{1+z^2} \ .$$

Et finalement on utilise ces résultats pour calculer

$$\begin{aligned}\cos\Bigg(\ 2\ \arctan\Big(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\Big)\ \Bigg) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\Bigg(\ 2\ \arctan\Big(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\Big)\ \Bigg) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \ .\end{aligned}$$

Avec ces préparations on calcule finalement

$$\begin{aligned}\varphi\big(\psi(x,y)\big) &= \varphi\Big(\ \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ 2\ \arctan\Big(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\Big)\ \Big)\\ &= \Big(\ \sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ \sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \Big) = (x,y)\quad .\end{aligned}$$

Ainsi on a montré que ψ est bien la réciproque de φ, ce qui achève la deuxième façon de montrer que φ est un difféomorphisme de V sur U.

• (ii) : Pour exprimer les dérivées partielles de g en termes des dérivées partielles de f et vice-versa, on calcule

$$\begin{aligned}(Dg)(r,\theta) &= (Df)\big(\varphi(r,\theta)\big)\circ(D\varphi)(r,\theta)\\ &= \Big(\ (\partial_1 f)\big(\varphi(r,\theta)\big)\ ,\ (\partial_2 f)\big(\varphi(r,\theta)\big)\ \Big)\cdot\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{pmatrix}\\ &= \Big(\ \cos(\theta)\,(\partial_1 f)\big(\varphi(r,\theta)\big)+\sin(\theta)\,(\partial_2 f)\big(\varphi(r,\theta)\big)\ ,\\ &\qquad -r\sin(\theta)\,(\partial_1 f)\big(\varphi(r,\theta)\big)+r\cos(\theta)\,(\partial_2 f)\big(\varphi(r,\theta)\big)\ \Big)\quad ,\end{aligned}$$

ce qui veut dire qu'on a les égalités

$$\begin{aligned}(\partial_1 g)(r,\theta) &= \cos(\theta)\,(\partial_1 f)\big(\varphi(r,\theta)\big)+\sin(\theta)\,(\partial_2 f)\big(\varphi(r,\theta)\big)\\ (\partial_2 g)(r,\theta) &= -r\sin(\theta)\,(\partial_1 f)\big(\varphi(r,\theta)\big)+r\cos(\theta)\,(\partial_2 f)\big(\varphi(r,\theta)\big)\quad .\end{aligned}$$

Si on remarque maintenant qu'on a les égalités $\cos(\theta) = x/\sqrt{x^2+y^2}$ et $\sin(\theta) = y/\sqrt{x^2+y^2}$, alors on peut introduire les fonctions F_1 et F_2 par

$$\begin{aligned}F_1(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,(\partial_1 f)(x,y)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,(\partial_2 f)(x,y)\\ F_2(x,y) &= -y\,(\partial_1 f)(x,y)+x\,(\partial_2 f)(x,y)\quad ,\end{aligned}$$

de sorte qu'on a les égalités

$$\partial_1 g = F_1\circ\varphi \qquad \text{et} \qquad \partial_2 g = F_2\circ\varphi\quad .$$

Remarque pour les comparateurs curieux. On résume les expressions pour F_1 et F_2 souvent sous la forme

$$r\,\frac{\partial}{\partial r} = x\,\frac{\partial}{\partial x}+y\,\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial\theta} = -y\,\frac{\partial}{\partial x}+x\,\frac{\partial}{\partial y}\quad ,$$

ce qui veut dire qu'on écrit les égalités $\partial_1 g = F_1\circ\varphi$ et $\partial_2 g = F_2\circ\varphi$ sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{x}{r}\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{y}{r}\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta) &= -y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\quad ,\end{aligned}$$

où il faut interpréter le point (x,y) comme désignant $(x,y) = \varphi(r,\theta)$.

Pour exprimer les dérivées partielles de f en termes des dérivées partielles de g on peut procéder de la même façon en calculant la différentielle de $\varphi^{-1} = \psi$. Mais on peut aussi utiliser [11.1.i], ce qui nous donne

$$(D\varphi^{-1})(x,y) = \Big((D\varphi)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big)\Big)^{-1}\quad .$$

Pour $(r,\theta) = \varphi^{-1}(x,y)$ on a donc

$$(Df)(x,y) = (Dg)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big)\circ(D\varphi^{-1})(x,y)$$

$$= \Big(\ (\partial_1 g)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big)\ ,\ (\partial_2 g)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big)\ \Big) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \frac{1}{r} \Big(\ (\partial_1 g)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big)\ ,\ (\partial_2 g)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big)\ \Big) \cdot \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
$$= \Big(\ \cos(\theta)\,(\partial_1 g)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big) - \frac{\sin(\theta)}{r}\,(\partial_2 g)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big)\ ,$$
$$\sin(\theta)\,(\partial_1 g)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big) + \frac{\cos(\theta)}{r}\,(\partial_2 g)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big)\ \Big) \quad ,$$

ce qui veut dire qu'on a les égalités

$$(\partial_1 f)(x,y) = \cos(\theta)\,(\partial_1 g)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big) - \frac{\sin(\theta)}{r}\,(\partial_2 g)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big)$$
$$(\partial_2 f)(r,\theta) = \sin(\theta)\,(\partial_1 g)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big) + \frac{\cos(\theta)}{r}\,(\partial_2 g)\big(\varphi^{-1}(x,y)\big) \quad .$$

Si on introduit les fonctions G_1 et G_2 par

$$G_1(r,\theta) = \cos(\theta)\,(\partial_1 g)(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\,(\partial_2 g)(r,\theta)$$
$$G_2(r,\theta) = \sin(\theta)\,(\partial_1 g)(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\,(\partial_2 g)(r,\theta) \quad ,$$

alors on aura les égalités

$$\partial_1 f = G_1 \circ \varphi^{-1} \qquad \text{et} \qquad \partial_2 f = G_2 \circ \varphi^{-1} \quad ,$$

ou encore

$$f \circ \varphi = g \qquad \Rightarrow \qquad (\partial_1 f) \circ \varphi = G_1 \quad \text{et} \quad (\partial_2 f) \circ \varphi = G_2 \quad .$$

• (iii) : Si on applique le résultat ci-dessus en remplaçant f par $(\partial_i f)$ et g par G_i, alors on obtient :

$$(\partial_1\partial_1 f)\big((r,\theta)\big) = \cos(\theta)\,(\partial_1 G_1)(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\,(\partial_2 G_1)(r,\theta)$$
$$= \cos(\theta)\,\Big(\ \cos(\theta)\,(\partial_1\partial_1 g)(r,\theta) + \frac{\sin(\theta)}{r^2}\,(\partial_2 g)(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\,(\partial_1\partial_2 g)(r,\theta)\Big)$$
$$- \frac{\sin(\theta)}{r}\,\Big(-\sin(\theta)\,(\partial_1 g)(r,\theta) + \cos(\theta)\,(\partial_2\partial_1 g)(r,\theta)$$
$$- \frac{\cos(\theta)}{r}\,(\partial_2 g)(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r}\,(\partial_2\partial_2 g)(r,\theta)\Big)$$
$$= \cos^2(\theta)\,(\partial_1\partial_1 g)(r,\theta) + \frac{\sin^2(\theta)}{r}\,(\partial_1 g)(r,\theta) + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2}\,(\partial_2\partial_2 g)(r,\theta)$$
$$+ \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\,(\partial_2 g)(r,\theta) - \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\,(\partial_1\partial_2 g)(r,\theta)$$

et

$$(\partial_2\partial_2 f)\big((r,\theta)\big) = \sin(\theta)\,(\partial_1 G_2)(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\,(\partial_2 G_2)(r,\theta)$$
$$= \sin(\theta)\,\Big(\ \sin(\theta)\,(\partial_1\partial_1 g)(r,\theta) - \frac{\cos(\theta)}{r^2}\,(\partial_2 g)(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r}\,(\partial_1\partial_2 g)(r,\theta)\Big)$$
$$+ \frac{\cos(\theta)}{r}\,\Big(\cos(\theta)\,(\partial_1 g)(r,\theta) + \sin(\theta)\,(\partial_2\partial_1 g)(r,\theta)$$

$$- \frac{\sin(\theta)}{r} (\partial_2 g)(r,\theta) + \frac{\cos(\theta)}{r} (\partial_2\partial_2 g)(r,\theta) \Big)$$
$$= \sin^2(\theta) (\partial_1\partial_1 g)(r,\theta) + \frac{\cos^2(\theta)}{r} (\partial_1 g)(r,\theta) + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} (\partial_2\partial_2 g)(r,\theta)$$
$$- \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} (\partial_2 g)(r,\theta) + \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r} (\partial_1\partial_2 g)(r,\theta) \ .$$

En fin de compte on trouve donc l'expression

$$\big((\partial_1\partial_1 f) + (\partial_2\partial_2 f)\big)\big(\varphi(r,\theta)\big) = (\partial_1\partial_1 g)(r,\theta) + \frac{1}{r} (\partial_1 g)(r,\theta) + \frac{1}{r^2} (\partial_2\partial_2 g)(r,\theta) \ .$$

Remarque pour les comparateurs curieux. On résume cette formule souvent sous la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

et on dit que le membre de droite est l'expression du Laplacien en coordonnées polaires. Dans ce contexte on écrit notre résultat sous la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)$$

au point $(r,\theta) = \varphi^{-1}(x,y)$ ou $(x,y) = \varphi(r,\theta)$.

Solution de [16.95]. • (i) : On a

$$\mathrm{matrice}\big((Df)(x,y,z)\big) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^y & \mathrm{e}^z \\ \mathrm{e}^x & 0 & -\mathrm{e}^z \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

dont le déterminant vaut $-\mathrm{e}^z(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$, ce qui n'est jamais nul et donc le rang vaut toujours 3.

• (ii) : Le résultat demandé est une conséquence immédiate du théorème de l'inversion locale [11.3], une fois qu'on a vérifié les conditions. Dans (i) on a montré que pour tout point $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ la différentielle est inversible. En plus, on est en dimension finie, donc tout bijection linéaire est un isomorphisme et les espaces sont complets. et pour terminer : l'application f est de classe C^∞, les composantes étant construites à partir d'opérations élémentaires et l'exponentielle. Les conditions étant vérifiées, on peut invoquer [11.3] et conclure que pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ il existe un voisinage V de ce point et un ouvert $W \subset \mathbf{R}^3$ tels que $f : V \to W$ est un C^∞-difféomorphisme.

• (iii) : Pour montrer que f est un C^∞-difféomorphisme sur son image, il suffit, selon [11.5], de montrer que f soit injective (les autres conditions étant vérifiées ci-dessus). Étant donné qu'on demande aussi de trouver l'image $f(\mathbf{R}^3)$, il s'avère que "le plus simple" est de déterminer la réciproque ! On calcule donc :

$$\left.\begin{aligned} u &= \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^z \\ v &= \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^z \\ w &= x - y \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} \mathrm{e}^z &= u - \mathrm{e}^y \\ u + v &= \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x \\ w &= x - y \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} \mathrm{e}^z &= u - \mathrm{e}^y = \frac{u\,\mathrm{e}^w - v}{1 + \mathrm{e}^w} \\ \mathrm{e}^y &= \frac{u+v}{1+\mathrm{e}^w} \\ x &= w + y \end{aligned}\right\}$$

Il s'ensuit que la réciproque n'est définie que si on a les conditions

$$u + v > 0 \qquad \text{et} \qquad u\,\mathrm{e}^w > v \ ,$$

auquel cas on aura un antécédent unique donné par

$$z = \ln\Big(\frac{u\,\mathrm{e}^w - v}{1+\mathrm{e}^w}\Big) \quad , \quad y = \ln\Big(\frac{u+v}{1+\mathrm{e}^w}\Big) \quad \text{et} \quad x = \ln\Big(\frac{u+v}{1+\mathrm{e}^{-w}}\Big) \ .$$

Au final on a montré que f est un C^∞-difféomorphisme sur son image qui est donné par

$$f(\mathbf{R}^3) = \{\,(u,v,w) \in \mathbf{R}^3 \mid u+v > 0 \ \& \ u\,\mathrm{e}^w > v\,\} \ .$$

Solution de [16.97]. Il est évident que f est une application de classe C^∞, étant composée d'applications C^∞. Si on calcule sa différentielle, on trouve

$$(Df)(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x & \cosh y \\ \cosh x & -\cos y \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est

$$\det\big((Df)(x,y)\big) = -\cos x\,\cos y - \cosh x\,\cosh y \ .$$

Les inégalités

$$|\cos z| \leqslant 1 \qquad , \qquad \cosh z \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad z \neq 0 \ \Rightarrow\ \cosh z > 1$$

impliquent immédiatement qu'on a

$$(x,y) \neq (0,0) \qquad \Longrightarrow \qquad \det\big((Df)(x,y)\big) < 0 \ .$$

Mais on a aussi $\det\big((Df)(0,0)\big) = -2$, donc $\det\big((Df)(x,y)\big)$ est toujours inversible. Étant en dimension finie, il s'ensuit que $\det\big((Df)(x,y)\big) \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Pour pouvoir appliquer le théorème de l'inversion globale [11.5], il suffit donc de montrer que $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est bijective pour conclure que f est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur lui-même.

Il faut donc montrer que pour tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2$ il existe un unique $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $f(x,y) = (u,v)$. Autrement dit, il faut montrer que, pour tout (u,v), le système de deux équations en (x,y)

$$\sin x + \sinh y = u \qquad \text{et} \qquad \sinh x - \sin y = v$$

a une solution unique. Sachant que $\sinh : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est bijective, on peut résoudre x de la deuxième équation et le substituer dans la première, ce qui donne le système

$$x = \operatorname{argsh}(v + \sin y) \qquad \text{et} \qquad \sin\big(\operatorname{argsh}(v+\sin y)\big) + \sinh y = u \ .$$

Si on peut résoudre y de la deuxième équation d'une façon unique, il s'ensuit que x aussi est unique et on aura montré notre résultat. Pour le faire on considère, pour $v \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(y) = \sin\big(\operatorname{argsh}(v+\sin y)\big) + \sinh y$$

avec

$$g'(y) = \frac{\cos\big(\operatorname{argsh}(v+\sin y)\big)\cdot\cos y}{\sqrt{(v+\sin y)^2+1}} + \cosh y \ .$$

Il est immédiat qu'on a les inégalités

$$\left|\frac{\cos\big(\operatorname{argsh}(v+\sin y)\big)\cdot\cos y}{\sqrt{(v+\sin y)^2+1}}\right| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad y \neq 0 \ \Rightarrow\ \cosh y > 1 \ .$$

On en déduit que $g'(y) > 0$ pour tout $y \neq 0$, et donc g est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$. Il s'ensuit que g est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Mais on a aussi les limites

$$\lim_{y\to\infty} g(y) = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to-\infty} g(y) = -\infty \quad .$$

Avec le théorème de la valeur intermédiaire on en déduit que l'équation $g(y) = u$ a une solution unique pour tout $u \in \mathbf{R}$.

Si on veut détailler ces argument un peu plus, on commence avec la remarque que $\sinh : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une application strictement croissante et bijective. Pour $M \in \mathbf{R}$ il existe donc $y_o \in \mathbf{R}$ tel que

$$y > y_o \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{argsh} y > M + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad g(y) > M \quad .$$

Ainsi on a justifié qu'on a bien $\lim_{y\to\infty} g(y) = \infty$. L'autre limite est montré de la même manière.

Ensuite on fixe $u \in \mathbf{R}$ et on utilise les deux limites pour obtenir $y_\pm \in \mathbf{R}$ avec les propriétés

$$y \leqslant y_- \quad \Rightarrow \quad g(y) \leqslant u - 1 \qquad \text{et} \qquad y \geqslant y_+ \quad \Rightarrow \quad g(y) \geqslant u + 1 \quad .$$

On aura donc $u \in [g(y_-), g(y_+)]$. En appliquant le théorème de la valeur intermédiaire à $g : [y_-, y_+] \to \mathbf{R}$ on en déduit l'existence d'un $y \in [y_-, y_+]$ tel que $g(y) = u$. Le fait que g est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ montre qu'une telle solution est unique.

Ainsi on a montré que $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est bijective et donc par [11.5] elle est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $f(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2$.

Solution de [16.99]. • (i) : Si on décrit un polynôme P par une suite infinie $a_n \in \mathbf{R}$, nulle à partir d'un certain rang (au-delà du degré du polynôme), alors pour $P(X) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n X^n$ et $Q(X) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n X^n$ on a

$$(P \cdot Q)(X) = \sum_{n,m\in\mathbf{N}} a_n\, b_m\, X^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell\, b_{k-\ell} \Big) X^k \quad ,$$

où la somme sur k est en réalité une somme finie, car pour $k > \deg(P) + \deg(Q)$ le produit $a_\ell\, b_{k-\ell}$ sera toujours nul. Il s'ensuit qu'on a

$$\begin{aligned} \|P \cdot Q\|_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \Big| \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell\, b_{k-\ell} \Big| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} |a_\ell| \cdot |b_{k-\ell}| \\ &= \sum_{n,m\in\mathbf{N}} |a_n| \cdot |b_m| = \|P\|_1 \cdot \|Q\|_1 \quad . \end{aligned}$$

La bilinéarité et symétrie de B étant évidente, on déduit de l'inégalité $\|B(P,Q)\|_1 \leqslant \|P\|_1 \cdot \|Q\|_1$ et [6.6] que B est continue avec $\|B\| \leqslant 1$.

• (ii) : Si on pose $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} X^k$, alors il est immédiat qu'on a $\|P_n\|_2 = \sqrt{n+1}$ et $\|P_n\|_\infty = 1$. D'autre part, on montre aisément qu'on a

$$\big(P_n(X)\big)^2 = (n+1)\, X^n + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot (X^k + X^{2n-k}) \quad .$$

On a donc

$$\|B(P_n, P_n)\|_\infty = n + 1 \qquad \text{et} \qquad \|B(P_n, P_n)\|_2 = \sqrt{(n+1)^2 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2}$$

Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ il s'ensuit qu'on a

$$\frac{\|B(P_n, P_n)\|_\infty}{\|P_n\|_\infty \cdot \|P_n\|_\infty} = n + 1 \quad ,$$

montrant (à l'aide de [6.2]) que B n'est pas continue quand on muni E de cette norme.

Pour la norme $\|\cdot\|_2$ il y a deux approches possibles. Si on connaît la formule $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, on obtient

$$\|B(P_n,P_n)\|_2 = \sqrt{\tfrac{1}{3}(n+1)\big(2(n+1)^2+1\big)}$$

et donc

$$\frac{\|B(P_n,P_n)\|_2}{\|P_n\|_2\cdot\|P_n\|_2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}(n+1)}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2(n+1)^2}} \quad .$$

On en déduit, comme pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, que B n'est pas continue quand on muni E de la norme $\|\cdot\|_2$.

Si on ne connaît pas la formule pour $\sum_{k=1}^n k^2$, on peut faire une comparaison avec une intégrale, une approche qui permet, sans effort supplémentaire, de montrer le résultat plus général que B n'est pas continue quand on muni E de la norme $\|\cdot\|_p$ pour $1<p<\infty$. On commence avec la remarque qu'on a

$$\|P_n\|_p = (n+1)^{1/p} \qquad \text{et} \qquad \|B(P_n,P_n)\|_p = \left((n+1)^p + 2\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^p\right)^{1/p} \quad .$$

Ensuite on utilise la comparaison d'une série avec une intégrale de Riemann (via les sommes de Riemann), ce qui nous donne

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^p = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)^p = \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1} \quad .$$

On en déduit facilement qu'on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|B(P_n,P_n)\|_p}{n^{(p+1)/p}} = \Big(\frac{2}{p+1}\Big)^{1/p} \quad .$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|B(P_n,P_n)\|_p}{\|P_n\|_p\cdot\|P_n\|_p} = \lim_{n\to\infty}\frac{\|B(P_n,P_n)\|_p}{n^{(p+1)/p}}\cdot\frac{n^{(p+1)/p}}{(n+1)^{2/p}} \overset{p\geq 1}{=} \infty \quad .$$

Et comme avant on en déduit que B n'est pas continue quand on muni E de la norme $\|\cdot\|_p$.

Étant donné que la norme est dorénavant fixé, on la notera $\|\cdot\|$, sans mettre l'indice 1.

• (iii) : Sachant que B est bilinéaire continue avec $\|B\|\leqslant 1$, on obtient directement que l'application $g_A(P) = 2\cdot B(A,P)$ est linéaire et continue avec $\|g_A\|\leqslant 2\,\|A\|$. Avec le même argument on obtient la majoration

$$\frac{\|f(A+P)-f(A)-g_A(P)\|}{\|P\|} = \frac{\|B(P,P)\|}{\|P\|} \leqslant \|P\| \quad ,$$

dont on déduit que f est différentiable en A avec $(Df)(A) = g_A$.

Ensuite on constate que l'application $Df : E\to\mathcal{L}(E;E)$, $A\mapsto g_A$ est une application linéaire continue avec $\|Df\|\leqslant 2$. Il s'ensuit (avec [7.2]) que Df est de classe C^∞, et donc f elle-même est de classe C^∞. On remarquera que ce résultat est un cas particulier de [8.3] ; on aurait pu l'invoquer directement !

• (iv) : On a montré l'égalité $\big((Df)(1)\big)(P) = 2\,B(1,P) = 2P$, c'est-à-dire $(Df)(1) = 2\cdot \mathrm{id}_E$. Il est immédiat que $(Df)(1) \in \mathrm{Isom}(E;E)$ avec $\big((Df)(1)\big)^{-1} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{id}_E$. D'autre part, supposons que f soit inversible sur un voisinage de $1 \in E$, c'est-à-dire qu'il existe des ouverts V et W de E avec $1 \in V$ tels que $f : V \to W$ est une bijection. En particulier W est un ouvert contenant $f(1) = 1$, donc il existe $\delta > 0$ tel que $B_\delta(1) \subset W$. Il s'ensuit que $Q(X) = 1 + \frac{1}{2}\,\delta\, X \in W$. Mais il n'existe aucun polynôme $P \in E$ tel que $f(P) = Q$ par un simple argument sur le degré de P : si $\deg(P) = 0$, alors $\deg\big(f(P)\big) = 0 \neq \deg(Q)$ et donc $f(P) \neq Q$, et si $\deg(P) \geqslant 1$, alors $\deg\big(f(P)\big) = 2\cdot \deg(P) \geqslant 2 \neq \deg(Q)$ et donc de nouveau $f(P) \neq Q$. Ceci contredit le fait que f serait une bijection entre V et W, donc f ne peut être inversible sur aucun voisinage de $1 \in E$.

• (v) : Ceci ne contredit pas le théorème de l'inversion locale, car E n'est pas complet quand on le muni de la norme $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Solution de [16.100]. • (i) : Ceci n'est rien d'autre que le théorème de l'application ouverte [11.4].

• (ii) : Soit $y_o \in f(U)$ arbitraire. Alors il existe $x_o \in U$ tel que $f(x_o) = y_o$ et par le théorème de l'inversion locale [11.3] il existe un voisinage $V \subset E$ de x_o et un voisinage $W \subset F$ de y_o tels que $f : V \to W$ est un C^1-difféomorphisme. Pour tout $y \in W$ on a donc

$$\Phi(y) = \Phi\Big(f\big(f^{-1}(y)\big)\Big) = (\Phi\circ f)\big(f^{-1}(y)\big) = g\big(f^{-1}(y)\big) \quad .$$

Autrement dit, la restriction de Φ à W est égale à $g\circ f^{-1}$, ce qui est une application de classe C^1 comme composée de deux applications de classe C^1. L'application Φ est donc différentiable en chaque point $y \in f(U)$ et l'application $D\Phi$ est continue en ce point. Et donc $\Phi : f(U) \to G$ (et non seulement sa restriction à un petit voisinage W) est de classe C^1.

Solution de [16.103]. • (i) : L'intervalle $[0,1]$ étant fermé et borné (et en dimension 1) est un compact. Selon [1.42] on a donc l'égalité $F = C^0_b([0,1];\mathbf{R})$ et donc selon [1.40] (car F est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$) l'espace F est complet.

Pour montrer que E est complet, on prend une suite de Cauchy f_n dans E. Par définition ceci veut dire qu'on a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n,m \geqslant N : \|f_n' - f_m'\|_\infty < \varepsilon \quad .$$

Mais par définition on a l'implication $f \in E \;\Rightarrow\; f' \in F$, donc la suite f_n' est une suite de Cauchy dans F. Il existe donc $g \in F$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = g \qquad \text{ce qui équivaut} \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\|_\infty = 0 \quad .$$

Si on définit maintenant la fonction $G : [0,1] \to \mathbf{R}$ par

$$G(t) = \int_0^t g(x)\;\mathrm{d}x \quad ,$$

alors $G \in E$ et on vient de montrer qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - G\|_E \equiv \lim_{n\to\infty} \|f_n' - G'\|_\infty \equiv \lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\|\infty = 0 \quad .$$

Autrement dit, $\lim_{n\to\infty} f_n = G$ dans E et donc E est complet.

• (ii) : Pour deviner la différentielle de Φ au point f, on calcule :

$$\Phi(f+h) - \Phi(f) = h' + fh' + f'h + hh' \quad ,$$

ce qui suggère, en prenant la partie linéaire en h, qu'on a

$$\big((D\Phi)(f)\big)(h) = h' + f\,h' + f'\,h \quad .$$

Pour montrer qu'on a bien deviné, on commence (en pensant aux résultats obtenus dans [16.24]), on introduit les application $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(E;F)$ et $\Psi_0, \Psi_1 : E \to \mathcal{L}(E;F)$ par

$$\mathcal{D}(h) = h' \qquad , \qquad \Psi_0(f) = \mathcal{D} \qquad , \qquad \big(\Psi_1(f)\big)(h) = f\,h' + f'\,h \quad .$$

Dans [16.24] on a déjà montré que $\mathcal{D}$ appartient effectivement à $\mathcal{L}(E;F)$. Il s'ensuit que l'application Ψ_0 est bien définie et constante donc continue. Pour l'application Ψ_1 il faut montrer que $\Psi_1(f)$ est linéaire et continue. La linéarité étant (presque) évidente, on se concentre sur la continuité et on rappelle que dans [16.24] on a montré l'inégalité

$$\forall f \in E \ : \ \|f\|_F \leqslant \|f\|_E \quad .$$

On peut donc faire le calcul :

$$\begin{aligned}\big\|\big(\Psi_1(f)\big)(h)\big\|_F &= \|f\,h' + f'\,h\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|h'\|_\infty + \|f'\|_\infty \cdot \|h\|_\infty \\ &= \|f\|_F \cdot \|h\|_E + \|f\|_E \cdot \|h\|_F \leqslant 2\,\|f\|_E \cdot \|h\|_E \quad .\end{aligned}$$

Il s'ensuit (avec [1.23]) que Ψ_1 est continue avec $\|\Psi_1(f)\| \leqslant 2\,\|f\|_E$. L'application Ψ_1 est donc bien définie. Mais (ce qui sera nécessaire pour la suite) on a plus : Ψ_1 elle-même est linéaire et continue. De nouveau, la linéarité étant (presque) évidente (on peut aussi remarquer que l'application $E \times E \to F$, $(f,h) \mapsto \big(\Psi_1(f)\big)(h)$ est bilinéaire), il suffit de montrer qu'elle est continue. Mais cela et une conséquence immédiate de notre majoration $\|\Psi_1(f)\| \leqslant 2\,\|f\|_E$, qui montre (toujours avec [1.23]) que Ψ_1 est continue avec $\|\Psi_1\| \leqslant 2$.

Avec ces préparation on est finalement prêt à montrer que Φ est de classe C^1 avec $(D\Phi)(f) = \Psi_0(f) + \Psi_1(f)$. On commence avec la remarque que cette application est bien continue, car on a montré que Ψ_0 et Ψ_1 sont continues. Il suffit donc de montrer que c'est bien la différentielle de Φ. On calcule donc :

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \lim_{h\to 0} \frac{\|\Phi(f+h) - \Phi(f) - \big(\Psi_0(f) + \Psi_1(f)\big)(h)\|_F}{\|h\|_E} \\ &= \lim_{h\to 0\in E} \frac{\|h\,h'\|_\infty}{\|h\|_E} \leqslant \lim_{h\to 0\in E} \frac{\|h\|_\infty \cdot \|h'\|_\infty}{\|h\|_E} = \lim_{h\to 0\in E} \|h\|_F \\ &\leqslant \lim_{h\to 0\in E} \|h\|_E = 0 \quad .\end{aligned}$$

$\Psi_0(f) + \Psi_1(f)$ est donc bien la différentielle de Φ au point $f \in E$.

• (iii) : Pour pouvoir appliquer le théorème de l'inversion locale [11.3], il suffit de vérifier que $(D\Phi)(0)$ appartient à $\mathrm{Isom}(E;F)$. On vient de montrer qu'on a $(D\Phi)(0) = \Psi_0(0) + \Psi_1(0) = \mathcal{D}$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{D} : E \to F$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels normés), c'est-à-dire que $\mathcal{D}$ est injective, surjective et que sa réciproque est continue.

Pour l'injectivité on remarque que si $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g)$, alors on a $f' - g' = 0$ et donc $f - g$ est une fonction constante. Mais $f, g \in E$ implique qu'on a $f(0) = g(0) = 0$

et donc cette constante vaut 0, c'est-à-dire $f = g$, ce qui montre l'injectivité. Pour la surjectivité, prenons $g \in F$, alors la fonction $G : [0,1]$ définie par

$$G(t) = \int_0^t g(x)\ \mathrm{d}x$$

apparient à E et vérifie $\mathcal{D}(G) = G' = g$, ce qui montre la surjectivité, mais ce qui donne aussi l'application réciproque. Reste donc à montrer que la réciproque est continue, c'est-à-dire qu'il faut montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|\mathcal{D}^{-1}(g)\|_E \leqslant C \cdot \|g\|_F \quad .$$

Mais on sait qu'on a $\mathcal{D}^{-1}(g) = G$, donc on a

$$\|\mathcal{D}^{-1}(g)\|_E = \|G\|_E = \|G'\|_\infty = \|g\|_\infty = \|g\|_F \quad ,$$

ce qui montre que $C = 1$ convient. Ainsi on a montré que $\mathcal{D} = (D\Phi)(0)$ est un isomorphisme et par le théorème de l'inversion locale [11.3] (dont toutes les hypothèses sont vérifiées !) on peut conclure qu'il existe deux voisinages $0 \in V \subset E$ et $0 \in W \subset F$ tels que $\Phi : V \to W$ est un C^1-difféomorphisme.

• (iv) : Ceci n'est rien d'autre qu'une reformulation du résultat (iii) : W étant un voisinage ouvert de 0 dans F, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(0) \subset W$. Pour tout $g \in B_\varepsilon(0)$ il existe donc une unique $f \in V \subset E$ telle que $\Phi(f) = g$. Mais la condition $g \in B_\varepsilon(0)$ est équivalente à la condition $\sup_{t\in[0,1]} |g(t)| < \varepsilon$, la condition $\Phi(f) = g$ se traduit comme $(1+f)f' = g$ et la condition $f \in E$ implique que f est de classe C^1 vérifiant $f(0) = 0$.

Solution de [16.104]. • (i-a) : Pour $S \in O(\mathbf{R}^n)$ on a en particulier pour tout $h \in \mathbf{R}^n$ l'égalité

$$\|S(h)\|^2 = \langle S(h), S(h)\rangle = \langle h, h\rangle = \|h\|^2 \quad .$$

Il s'ensuit que S a un noyau $\{0\}$, donc elle est injective et donc, parce qu'on est en dimension finie, S est bijective et continue.

• (i-b) : Pour $S, T \in O(\mathbf{R}^n)$ et $h, k \in \mathbf{R}^n$ on a

$$\big\langle S\big(T(h)\big), S\big(T(k)\big)\big\rangle \overset{S\,\in\,O(\mathbf{R}^n)}{=} \langle T(h), T(k)\rangle \overset{T\,\in\,O(\mathbf{R}^n)}{=} \langle h, k\rangle \quad ,$$

et donc $S \circ T \in O(\mathbf{R}^n)$. Sachant que S^{-1} existe, on calcule, avec $h, k \in \mathbf{R}^n$ arbitraire :

$$\langle S^{-1}(h), S^{-1}(k)\rangle \overset{S\,\in\,O(\mathbf{R}^n)}{=} \langle S\big(S^{-1}(h)\big), S\big(S^{-1}(k)\big)\rangle = \langle h, k\rangle \quad ,$$

et donc $S^{-1} \in O(\mathbf{R}^n)$. La conclusion est donc que $O(\mathbf{R}^n)$ muni de la composition d'applications est un groupe.

• (i-c) : Par définition de la norme d'opérateur on a :

$$\|S\| = \sup_{h\in(\mathbf{R}^n)^*} \frac{\|S(h)\|}{\|h\|} = \sup_{h\in(\mathbf{R}^n)^*} \sqrt{\frac{\langle S(h), S(h)\rangle}{\langle h, h\rangle}} \overset{S\,\in\,O(\mathbf{R}^n)}{=} \sup_{h\in(\mathbf{R}^n)^*} \sqrt{\frac{\langle h, h\rangle}{\langle h, h\rangle}} = 1 \quad .$$

• (i-d) : Par définition de la matrice de A on a l'égalité

$$A(x) \equiv A(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad .$$

Par définition du produit scalaire usuel on a donc

$$\begin{aligned}\langle A(x), A(y)\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \big(A(x)\big)_i \cdot \big(A(y)\big)_i = \sum_{i,j,k=1}^{n} (a_{ij}\, x_j) \cdot (a_{ik}\, y_k) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n} x_j\, ({}^t a)_{ji}\, a_{ik}\, y_k = \sum_{j,k=1}^{n} x_j\, ({}^t a\, a)_{jk}\, y_k \quad .\end{aligned}$$

Il s'ensuit que a est une isométrie si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$ on a l'égalité

$$\sum_{j,k=1}^{n} x_j\, \mathbf{1}_{jk}\, y_k = \sum_{j,k=1}^{n} x_j\, ({}^t a\, a)_{jk}\, y_k \quad . \tag{17.42}$$

Il est évident que si on a l'égalité ${}^t a\, a = \mathbf{1}$, alors cette égalité sera vérifiée. D'autre part, en prenant un vecteur x qui a tous ses coefficients zéro sauf le j-ème et un vecteur y qui a tous ses coefficients zéro sauf le k-ième, alors l'égalité (17.42) implique qu'on a $\mathbf{1}_{jk} = ({}^t a\, a)_{jk}$.

• (ii-a) : Si f est une isométrie infinitésimale, alors pour tout $x \in U$ et tout $h, k \in \mathbf{R}^n$ on a l'égalité

$$\langle (D_h f)(x), (D_k f)(x)\rangle \equiv \big\langle \big((Df)(x)\big)(h), \big((Df)(x)\big)(k)\big\rangle = \langle h, k\rangle \quad .$$

La fonction $\Phi : U \to \mathbf{R}$ définie par

$$\Phi(x) = \langle (D_h f)(x), (D_k f)(x)\rangle$$

est donc constante. D'autre part, on calcule facilement qu'on a, pour $\ell \in \mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned}\big((D\Phi)(x)\big)(\ell) &= (D_\ell \Phi)(x) \\ &= \langle \big(D_\ell(D_h f)\big)(x), (D_k f)(x)\rangle + \langle (D_h f)(x), \big(D_\ell(D_k f)\big)(x)\rangle \quad .\end{aligned}$$

Le fait que Φ est constante se traduit dans l'égalité $(D_\ell \Phi)(x) = 0$ pour tout $x \in U$ et donc, avec [7.12], on a le résultat voulu.

• (ii-b) : Par permutation circulaire on a les trois égalités

$$\begin{aligned}0 &= \big\langle \big((D^2 f)(x)\big)(\ell, h), \big((Df)(x)\big)(k)\big\rangle + \big\langle \big((Df)(x)\big)(h), \big((D^2 f)(x)\big)(\ell, k)\big\rangle \\ 0 &= \big\langle \big((D^2 f)(x)\big)(h, k), \big((Df)(x)\big)(\ell)\big\rangle + \big\langle \big((Df)(x)\big)(k), \big((D^2 f)(x)\big)(h, \ell)\big\rangle \\ 0 &= \big\langle \big((D^2 f)(x)\big)(k, \ell), \big((Df)(x)\big)(h)\big\rangle + \big\langle \big((Df)(x)\big)(\ell), \big((D^2 f)(x)\big)(k, h)\big\rangle \quad .\end{aligned}$$

Mais le produit scalaire est symétrique et la différentielle seconde est aussi symétrique : $\big((D^2 f)(x)\big)(v, w) = \big((D^2 f)(x)\big)(w, v)$ [8.1]. Des deux premières égalités on déduit donc l'égalité

$$\big\langle \big((Df)(x)\big)(h), \big((D^2 f)(x)\big)(\ell, k)\big\rangle = \big\langle \big((D^2 f)(x)\big)(h, k), \big((Df)(x)\big)(\ell)\big\rangle$$

et ensuite on obtient, en substituant dans la troisième égalité,

$$2 \cdot \big\langle \big((Df)(x)\big)(\ell), \big((D^2 f)(x)\big)(k, h)\big\rangle = 0 \quad . \tag{17.43}$$

Maintenant on invoque le fait qu'un produit scalaire est non-dégénéré [1.14] et que l'application $(Df)(x)$ est une isométrie et donc bijective par (i-a). Parce que ℓ est arbitraire on peut donc déduire de (17.43) qu'on doit avoir

$$\forall h, k \in \mathbf{R}^n \quad : \quad \big((D^2 f)(x)\big)(k, h) = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire que $(D^2 f)(x)$ est l'application nulle.

• (ii-c) : Une fois qu'on sait que l'application $D^2 f$ est nulle, il s'ensuit (car U est connexe) que l'application Df est constante [3.7], disons $(Df)(x) = S \in O(\mathbf{R}^n)$. Si on considère maintenant l'application $g : U \to \mathbf{R}^n$ définie par $g(x) = f(x) - S(x)$, on voit immédiatement qu'on a $(Dg)(x) = (Df)(x) - S = 0$. Et donc g est constante, disons $g(x) = b \in \mathbf{R}^n$. Ainsi on a montré qu'on a bien $f(x) = S(x) + b$ comme voulu.

• (iii-a) : La boule $B_r(a)$ est un ensemble convexe, donc le segment $[x, y]$ y est contenu. Par l'inégalité des accroissements finis [3.6] et le résultat de (i-c) ci-dessus on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \sup_{z \in [x,y]} \|(Df)(z)\| \cdot \|x - y\| = \|x - y\| \ .$$

• (iii-b) : Pour $a \in U$ sa différentielle $(Df)(a)$ appartient à $O(\mathbf{R}^n)$ et est donc une isomorphisme par (i-a). On est en dimension finie, donc $(Df)(a)$ est continue et $\mathbf{R}^n$ est complet. On peut donc appliquer le théorème de l'inversion locale [11.3] et conclure qu'il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage W de $f(a)$ tels que $f : V \to W$ est un C^1-difféomorphisme.

• (iii-c) : L'idée de la preuve est assez simple : si f est une isométrie infinitésimale, alors f^{-1} l'est aussi, car $(Df^{-1})\big(f(a)\big) = \big((Df)(a)\big)^{-1} \in O(\mathbf{R}^n)$ [11.1.i] (et le fait que $O(\mathbf{R}^n)$ est un groupe). Et donc par (iii-a) on aura $\|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\| \leqslant \|u - v\|$. En prenant $u = f(x)$ et $v = f(y)$ on aura donc les deux inégalités

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\| \qquad \text{et} \qquad \|x - y\| = \big\|f^{-1}\big(f(x)\big) - f^{-1}\big(f(y)\big)\big\| \leqslant \|f(x) - f(y)\| \ .$$

Le seul problème est que (iii-a) ne s'applique pas partout, mais seulement sur une boule. Il faut donc réduire convenablement les voisinages V et W pour rendre cet argument valable.

V étant un voisinage ouvert de a, il existe $r > 0$ tel que $B_r(a) \subset V$. Selon (iii-a) on a donc on a

$$\forall x, y \in B_r(a) \quad : \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\| \ . \tag{17.44}$$

Mais $f : V \to W$ est un C^1 difféomorphisme, donc $f\big(B_r(a)\big) \subset W$ est un voisinage ouvert de $f(a)$. Il existe donc $s > 0$ tel que $B_s\big(f(a)\big) \subset f\big(B_r(a)\big)$. Par [11.1.i] et le fait que $O(\mathbf{R}^n)$ est un groupe on déduit du fait que f^{-1} est de classe C^1 que f^{-1} est (comme f) une isométrie infinitésimale. On peut donc appliquer (iii-a) à f^{-1} et conclure qu'on a

$$\forall u, v \in B_s\big(f(a)\big) \subset f\big(B_r(a)\big) \quad : \quad \|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\| \leqslant \|u - v\| \ . \tag{17.45}$$

On définit maintenant $V' = f^{-1}\big(B_s\big(f(a)\big)\big) \subset B_r(a)$, ce qui est un voisinage ouvert de a. Pour $x, y \in V'$ on pose $u = f(x), v = f(y) \in B_s\big(f(a)\big)$ et on en déduit

$$\|f(x) - f(y)\| \overset{(17.44)}{\leqslant} \|x - y\| = \|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\| \overset{(17.45)}{\leqslant} \|u - v\| = \|fx) - f(y)\| \ .$$

Ainsi on a $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $x, y \in V'$.

• (iii-d) : Par définition de la norme euclidienne on a

$$\Phi(x, y) = \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y)\rangle \ .$$

Il s'ensuit immédiatement (en utilisant aussi la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire) qu'on a

$$(D_{(0,k)}\Phi)(x, y) = -2 \cdot \langle f(x) - f(y), (D_k f)(y)\rangle \ .$$

Une fois qu'on a cette fonction, il s'ensuit facilement qu'on a

$$\big(D_{(h,0)}(D_{(0,k)}\Phi)\big)(x, y) = -2 \cdot \langle (D_h f)(x), (D_k f)(y)\rangle \ .$$

Mais pour $x, y \in V'$ on a l'égalité

$$\Phi(x,y) = \|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle \ \ .$$

Avec le même argument on en déduit qu'on a (pour $x, y \in V'$) l'égalité

$$\big(D_{(h,0)}(D_{(0,k)}\Phi)\big)(x,y) = -2\cdot\langle h,k\rangle \ \ .$$

Pour tout $x, y \in V'$ on a donc l'égalité

$$\langle (D_h f)(x), (D_k f)(y)\rangle = \langle h,k\rangle \ \ .$$

• (iii-e) : On calcule directement pour $x, y \in V'$:

$$\begin{aligned}\|(D_hf)(x) - (D_hf)(y)\|^2 &= \langle (D_hf)(x)-(D_hf)(y), (D_hf)(x)-(D_hf)(y)\rangle\\ &\overset{\text{bil.}}{=} \langle (D_hf)(x),(D_hf)(x)\rangle - 2\cdot\langle (D_hf)(x),(D_hf)(y)\rangle\\ &\qquad + \langle (D_hf)(y),(D_hf)(y)\rangle\\ &\overset{\text{(iii-d)}}{=} \langle h,h\rangle - 2\cdot\langle h,h\rangle + \langle h,h\rangle = 0 \ \ .\end{aligned}$$

Il s'ensuit immédiatement qu'on a $(D_hf)(x) = (D_hf)(y)$ pour tout $x, y \in V'$ et tout $h \in \mathbf{R}^n$ et donc $(Df)(x) = (Df)(y)$ pour tout $x, y \in V'$.

• (iii-f) : Dans (iii-e) on a montré que Df est localement constante : pour tout $a \in U$ il existe un voisinage ouvert W de a sur lequel Df est constante. Mais U est connexe et donc Df est globalement constante : il existe $S \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$ tel que $(Df)(x) = S$ pour tout $x \in U$.

La preuve détaillée de cette affirmation est la suivante. On fixe $a_o \in U$ et on définit l'ensemble $C \subset U$ par

$$C = \{\, x \in U \mid (Df)(x) = (Df)(a_o)\,\} \ \ .$$

Pour $a \in U$ arbitraire il existe un voisinage ouvert V' de a tel que Df est constante sur V'. Pour tout $x \in V'$ on aura donc $(Df)(x) = (Df)(a)$. Il s'ensuit que si on a $a \in C$, alors on a l'inclusion $V' \subset C$ et donc C est un ouvert. D'autre part, pour $a \notin C$ on aura $(Df)(x) \neq (Df)(a_o)$ pour tout $x \in V'$ et donc $V' \cap C = \emptyset$, ce qui montre que le complémentaire de C est un ouvert. C est donc à la fois ouvert et fermé et donc, parce que C n'est pas vide ($a_o \in C$) par connexité de U on a égalité $C = U$.

La suite de la preuve est alors identique à la réponse à (ii-c), ce qui permet de conclure qu'il existe $b \in \mathbf{R}^n$ tel que $f(x) = S(x) + b$ pour tout $x \in U$.

Les solutions de §12

Solution de [16.105]. • (i) : Pour qu'on puisse appliquer le théorème des fonctions implicites [12.8], il faut et il suffit qu'il y a une sous-matrice de taille 1×1 inversible dans la matrice de la différentielle de taille 1×2. Autrement dit, il faut qu'il y a une dérivée partielle $(\partial_i f)(x,y)$ qui est non-nulle. Ainsi in peut appliquer ce théorème si on a

$$(\partial_1 f)(x,y) \equiv 3x^2-3y \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad (\partial_2 f)(x,y)\equiv 3y^2-3x\neq 0 \ .$$

Dans le premier cas $y_o\neq x_o^2$ on peut résoudre x en fonction de y dans un voisinage de (x_o,y_o), c'est-à-dire qu'il existe des voisinages $V\subset \mathbf{R}$ de x_o et $U\subset\mathbf{R}$ de y_o et une fonction $g:U\to V$ tels que

$$\forall (x,y)\in V\times U \quad : \quad f(x,y)=c \ \Leftrightarrow \ x=g(y) \ .$$

Dans ce cas on aura

$$g'(y_o)\equiv(\partial_1 g)(y_o) = -\frac{(\partial_2 f)\big(g(y_o),y_o\big)}{(\partial_1 f)\big(g(y_o),y_o\big)} = -\frac{3y_o^2-3x_o}{3x_o^2-3y_o} = \frac{x_o-y_o^2}{x_o^2-y_o} \ .$$

Dans le deuxième cas $x_o\neq y_o^2$ on peut résoudre y en fonction de x dans un voisinage de (x_o,y_o), c'est-à-dire qu'il existe des voisinages $U\subset\mathbf{R}$ de x_o et $V\subset\mathbf{R}$ de y_o et une fonction $g:U\to V$ tels que

$$\forall (x,y)\in U\times V \quad : \quad f(x,y)=c \ \Leftrightarrow \ y=g(x) \ .$$

Dans ce cas on aura

$$g'(x_o)\equiv(\partial_1 g)(x_o) = -\frac{(\partial_1 f)\big(x_o,g(x_o)\big)}{(\partial_2 f)\big(x_o,g(x_o)\big)} = -\frac{3x_o^2-3y_o}{3y_o^2-3x_o} = \frac{x_o^2-y_o}{x_o-y_o^2} \ .$$

• (ii) : On définit la fonction $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ par

$$f(x,y)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+x+y-2$$

et on constate qu'on a $f(0,0)=0$. On remarque aussi que la fonction $h:z\mapsto \mathrm{e}^z+z-1$ est une fonction croissante (sa dérivée est strictement positive) vérifiant $\lim_{z\to\infty}h(z)=\infty$ et $\lim_{z\to-\infty}h(z)=-\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il n'existe donc qu'un seul y_o tel que $h(y_o)=0$. Autrement dit, parmi les couples $(0,y_o)$ seulement le couple $(0,0)$ vérifie la condition $f(0,y_o)=0$.

Si on veut résoudre y en fonction de x de l'équation $f(x,y)=0$, alors comme dans le cas précédent, il suffit que $(\partial_2)(0,0)\neq 0$. Pour cela on calcule :

$$(\partial_2 f)(x,y)=\mathrm{e}^y+1 \qquad \Longrightarrow \qquad (\partial_2 f)(0,0)=2\neq 0 \ .$$

On peut donc appliquer le théorèmes des fonctions implicites [12.8] qui dit qu'il des voisinages $U\subset\mathbf{R}$ de 0 et $V\subset\mathbf{R}$ de O et une fonction $g:U\to V$ tels que

$$\forall (x,y)\in U\times V \quad : \quad f(x,y)=0 \ \Leftrightarrow \ y=g(x) \ .$$

On aura donc l'égalité

$$f\big(x,g(x)\big)=0$$

pour tout $x\in U$.

On présente maintenant deux façon d'en déduire le développement limité à l'ordre 3 de g en $x=0$. La première façon part de cette formule, la dérive trois fois et on substitue ce qu'on sait sur la fonction f. Ainsi on obtient les égalités (voir [16.68] pour des détails comment faire ces calculs)

$$\begin{aligned}
0 &= (\partial_1 f)\big(x, g(x)\big) + (\partial_2 f)\big(x, g(x)\big) \cdot g'(x) \\
0 &= (\partial_1\partial_1 f)\big(x, g(x)\big) + 2\,(\partial_1\partial_2 f)\big(x, g(x)\big) \cdot g'(x) \\
&\qquad + (\partial_2\partial_2 f)\big(x, g(x)\big) \cdot \big(g'(x)\big)^2 + (\partial_2 f)\big(x, g(x)\big) \cdot g''(x) \\
0 &= (\partial_1\partial_1\partial_1 f)\big(x, g(x)\big) + 3\,(\partial_1\partial_1\partial_2 f)\big(x, g(x)\big) \cdot g'(x) \\
&\qquad + 3\,(\partial_1\partial_2\partial_2 f)\big(x, g(x)\big) \cdot \big(g'(x)\big)^2 + (\partial_2\partial_2\partial_2 f)\big(x, g(x)\big) \cdot \big(g'(x)\big)^3 \\
&\qquad\quad + 3\,(\partial_1\partial_2 f)\big(x, g(x)\big) \cdot g''(x) + 3\,(\partial_2\partial_2 f)\big(x, g(x)\big) \cdot g'(x) \cdot g''(x) \\
&\qquad\qquad + (\partial_2 f)\big(x, g(x)\big) \cdot g'''(x) \quad .
\end{aligned}$$

Si on rajoute à ces égalités les formules

$$(\partial_1 f)(x,y) = \mathrm{e}^x + 1 \qquad , \qquad (\partial_2 f)(x,y) = \mathrm{e}^y + 1$$
$$(\partial_1\partial_1 f)(x,y) = \mathrm{e}^x \quad , \quad (\partial_1\partial_2 f)(x,y) = 0 \quad , \quad (\partial_2\partial_2 f)(x,y) = \mathrm{e}^y$$
$$(\partial_1\partial_1\partial_1 f)(x,y) = \mathrm{e}^x \ , \ (\partial_1\partial_1\partial_2 f)(x,y) = 0 = (\partial_1\partial_2\partial_2 f)(x,y) \ , \ (\partial_2\partial_2\partial_2 f)(x,y) = \mathrm{e}^y$$

et le fait qu'on a $g(0) = 0$, alors ces trois égalités nous donnent les égalités

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathrm{e}^0 + 1) + (\mathrm{e}^0 + 1) \cdot g'(0) \\
0 &= \mathrm{e}^0 + 2 \cdot 0 \cdot g'(0) + \mathrm{e}^0 \cdot \big(g'(0)\big)^2 + (\mathrm{e}^0 + 1) \cdot g''(0) \\
0 &= \mathrm{e}^0 + 3 \cdot 0 \cdot g'(0) + 3 \cdot 0 \cdot \big(g'(0)\big)^2 + \mathrm{e}^0 \cdot \big(g'(0)\big)^3 \\
&\qquad + 3 \cdot 0 \cdot g''(0) + 3 \cdot \mathrm{e}^0 \cdot g'(0) \cdot g''(0) + (\mathrm{e}^0 + 1) \cdot g'''(0) \quad ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire les équations

$$\begin{aligned}
0 &= 2 + 2\,g'(0) \\
0 &= 1 + \big(g'(0)\big)^2 + 2\,g''(0) \\
0 &= 1 + \big(g'(0)\big)^3 + 3\,g'(0) \cdot g''(0) + 2\,g'''(0) \quad .
\end{aligned}$$

On en déduit

$$g'(0) = -1 \quad , \quad g''(0) = -1 \quad , \quad g'''(0) = -\tfrac{3}{2} \quad .$$

Le développement limité à l'ordre 3 de g en $x = 0$ est donc donné par

$$g(x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^3 + x^3\,\varepsilon_0(x) \quad .$$

La deuxième façon de déterminer ce développement limité consiste à substituer dès le début ce qu'on sait sur la fonction f, ce qui nous donne donc l'égalité

$$\mathrm{e}^x + x + \mathrm{e}^{g(x)} + g(x) - 2 = 0 \quad .$$

Si on dérive cette égalité 3 fois on obtient les égalités

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{e}^x + 1 + g'(x)\ \mathrm{e}^{g(x)} + g'(x) \\
0 &= \mathrm{e}^x + g''(x)\ \mathrm{e}^{g(x)} + \big(g'(x)\big)^2\ \mathrm{e}^{g(x)} + g''(x) \\
0 &= \mathrm{e}^x + g'''(x)\ \mathrm{e}^{g(x)} + 3\,g'(x)\,g''(x)\ \mathrm{e}^{g(x)} + \big(g'(x)\big)^3\ \mathrm{e}^{g'(x)} + g'''(x) \quad .
\end{aligned}$$

Sachant qu'on a $g(0) = 0$ on en déduit les équations

$$\begin{aligned}
0 &= 2 + 2\,g'(0) \\
0 &= 1 + 2\,g''(0) + \big(g'(0)\big)^2
\end{aligned}$$

$$0 = 1 + 2\,g'''(0) + 3\,g'(0)\,g''(0) + \big(g'(0)\big)^3 \quad ,$$

qui sont les mêmes qu'obtenues précédemment.

- (iii) : On définit l'application $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y,z,t) = (x+y-zt, xy-z+t) \quad ,$$

ce qui permet d'écrire les équations sous la forme $f(x,y,z,t) = (0,0)$. On demande de montrer qu'il existe deux fonctions g_1 et g_2 qui expriment x et y en fonction de z et t dans un voisinage de $(0,1)$ à partir de ces équations. Autrement dit, on cherche l'existence de $g_1, g_2 : U \to V$ (avec U un voisinage ouvert de $(0,1)$ et V un ouvert de $\mathbf{R}^2$) vérifiant

$$\forall (z,t) \in U \quad : \quad f\big(g_1(z,t), g_2(z,t), z, t\big) = (0,0) \quad .$$

Et on impose en plus la condition $g_1(0,1) = 1$. Si on substitue cette condition dans les équations, on obtient

$$f\big(1, g_2(0,1), 0, 1\big) = \big(1 + g_2(0,1), g_2(0,1) + 1\big) = (0,0) \quad ,$$

ce qui nous donne $g_2(0,1) = -1$.

Si on veut appliquer le théorème des fonctions implicites [12.8] pour montrer l'existence demandée, on constate d'abord qu'on a $f(1,-1,0,1) = (0,0)$, ce qui correspond à la condition $f(a) = c$ avec $a = (1,-1,0,1)$ et $c = (0,0)$. Ensuite on calcule la matrice de la différentielle de f au point $X = (x,y,z,t)$:

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{Jac}(f)\big)(X) &= \big(\ (\partial_1 f)(X)\ ,\ (\partial_2 f)(X)\ ,\ (\partial_3 f)(X)\ ,\ (\partial_4 f)(X)\ \big) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -t & -z \\ y & x & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .\end{aligned}$$

Pour qu'on puisse résoudre (x,y) en fonction de (z,t), c'est-à-dire les deux premières variables en fonction des deux dernières, il faut montrer que la sous-matrice de taille 2×2 formée par $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ est inversible au point $a = (1,-1,0,1)$. Cette matrice est donnée par

$$\big(\ (\partial_1 f)(a)\ ,\ (\partial_2 f)(a)\ \big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qui est bien une matrice inversible. Selon le théorème des fonctions implicites il existe donc un voisinage U de $(0,1)$, un voisinage V de $(1,-1)$ et une fonction $g : U \to V$ de classe C^∞ (car f est de classe C^∞) tels que

$$\forall (x,y,z,t) \in V \times U \qquad : \qquad f(x,y,z,t) = (0,0) \ \Leftrightarrow\ (x,y) = g(z,t) \quad .$$

En plus, selon [12.8.iii], la différentielle de g au point $(0,1)$ est donnée par

$$\begin{aligned}(Dg)(0,1) &= -\big(\ (\partial_1 f)(a)\ ,\ (\partial_2 f)(a)\ \big)^{-1} \cdot \big(\ (\partial_3 f)(a)\ ,\ (\partial_4 f)(a)\ \big) \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac12 \\ 1 & -\frac12 \end{pmatrix} \quad .\end{aligned}$$

Plus généralement, la différentielle de g au point (z,t) est donnée par la formule (avec $X = \big(g(z,t), (z,t)\big) \in \mathbf{R}^4$)

$$\begin{aligned}(Dg)(z,t) &= -\big(\ (\partial_1 f)(X)\ ,\ (\partial_2 f)(X)\ \big)^{-1} \cdot \big(\ (\partial_3 f)(X)\ ,\ (\partial_4 f)(X)\ \big) \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ g_2(z,t) & g_1(z,t) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -t & -z \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g_2(z,t) - g_1(z,t)} \cdot \begin{pmatrix} 1 - t\,g_1(z,t) & -1 - z\,g_1(z,t) \\ t\,g_2(z,t) - 1 & z\,g_2(z,t) + 1 \end{pmatrix} \quad .\end{aligned}$$

Solution de [16.106]. L'application f est bilinéaire sur un espace de dimension finie ($\dim(E) = n^2$), donc continue. Selon [7.3] elle est donc de classe C^∞ et sa différentielle est donnée par

$$\big((Df)(A,B)\big)(H,K) = f(A,K) + f(H,B) \ .$$

Pour $A \in F$ on a donc, selon [5.9], les égalités

$$\begin{aligned}\big((D_1 f)(A,B)\big)(H) &= \big((Df)(A,B)\big)(H,\mathbf{0}) = f(H,B) = HB \\ \big((D_2 f)(A,B)\big)(H) &= \big((Df)(A,B)\big)(\mathbf{0},H) = f(A,H) = AH \ .\end{aligned}$$

Si on définit, pour $A \in E$, l'application linéaire $L_A : E \to E$ par $L_A(H) = f(A,H) = AH$, alors l'inégalité

$$\|L_A(H)\| = \|AH\| \overset{[1.26]}{\leqslant} \|A\| \cdot \|H\|$$

montre que L_A est continue avec $\|L_A\| \leqslant \|A\|$ [1.23]. En plus, sa réciproque est donnée par $L_{A^{-1}}$. Il s'ensuit que pour tout $(A,B) \in F \times E$ l'application $(D_2 f)(A,B) = L_A$ appartient à $\mathrm{Isom}(E;E)$. Pour $A_o \in F$ et $B_o = A_o^{-1}$ on a $f(A_o, B_o) = \mathbf{1}$ et le théorème des fonctions implicites [12.5] s'applique (un espace de dimension finie est complet). Il existe donc un voisinage ouvert V de A_o, un voisinage ouvert W de B_o et une application $g : V \to W$ de classe C^∞ tels que

$$\forall (A,B) \in V \times W \quad : \quad f(A,B) = \mathbf{1} \ \Leftrightarrow \ B = g(A) \ .$$

Étant donné que l'équation $AB \equiv f(A,B) = \mathbf{1}$ a comme solution unique $B = A^{-1}$, on doit avoir $g(A) = A^{-1}$. Il s'ensuit que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est de classe C^∞ sur V, un voisinage ouvert de A_o. Mais A_o est arbitraire, donc cette application est de classe C^∞ sur tout son domaine de définition F. De plus, selon [12.5] sa différentielle est donnée par

$$\begin{aligned}\big((Dg)(A)\big)(H) &= -\Big((D_2 f)\big(A, g(A)\big)\Big)^{-1}\bigg(\Big((D_1 f)\big(A, g(A)\big)\Big)(H)\bigg) \\ &= -L_{A^{-1}}(HA^{-1}) = -A^{-1}HA^{-1} \ .\end{aligned}$$

Solution de [16.107]. La différentielle de f est donnée par

$$\mathrm{matrice}\big((Df)(x,y,z)\big) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

et le déterminant de la matrice carrée formée des deux dernières colonnes vaut $-2x(y^2+z^2)$. Si $f(x_o,y_o,z_o) = (0,0)$, on a en particulier $x_o y_o z_o = 1$ et donc aucun des trois variables peut être nul. Il s'ensuit que la matrice carrée formée des deux dernières colonnes est inversible, ce qui veut dire qu'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites [12.8] pour conclure qu'il existe un voisinage ouvert $I \subset \mathbf{R}$ de x_o (et on peut supposer que c'est un intervalle), un voisinage ouvert $W \subset \mathbf{R}^2$ de (y_o, z_o) et une fonction $g : I \to W$ de classe C^∞ (car f est polynomiale, donc de classe C^∞ [16.66]) tels que

$$\forall (x,y,z) \in I \times W \quad : \quad f(x,y,z) = (0,0) \ \Leftrightarrow \ (y,z) = g(x) \ .$$

Solution de [16.108]. Si on définit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 - 2z^2, x^2 + 2y^2 + z^2) \ ,$$

alors on demande de résoudre le couple (y, z) de l'équation $f(x, y, z) = (0, 4)$ en fonction de x dans un voisinage de $x = 1$ et que ces solutions soient positives. Pour $x = 1$ l'équation se réduit à

$$2z^2 = y^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad z^2 = 3 - 2y^2 \ ,$$

qui a quatre solutions : $(y, z) = (\pm 1, \pm 1)$, donc une seule qui a les deux coordonnées positives.

Pour pouvoir appliquer le théorème des fonctions implicites, on calcule la matrice de Df :

$$\mathrm{matrice}\big((Df)(x, y, z)\big) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -4z \\ 2x & 4y & 2z \end{pmatrix} \ .$$

Selon le théorème des fonctions implicites on peut résoudre (y, z) en fonction de x au voisinage de $(1, \pm 1, \pm 1)$ si la sous-matrice des deux dernières colonnes est bien une matrice inversible au point $(1, \pm 1, \pm 1)$ concerné. Étant donné que le déterminant de cette sous-matrice vaut $20yz$, cette condition est vérifiée. En plus, la fonction f est polynomiale, donc de classe C^∞. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites [12.8] et conclure qu'il existe des voisinages $I \subset \mathbf{R}$ de 1 et $V \subset \mathbf{R}^2$ de $(\pm 1, \pm 1)$ (ce voisinage dépendra du point choisi !) et une fonction $g : I \to V$ de classe C^∞ tels que

$$\forall (x, y, z) \in I \times V \quad : \quad f(x, y, z) = (0, 4) \ \Leftrightarrow \ (y, z) = g(x) \ .$$

De plus, si on écrit $g(x) = \big(y(x), z(x)\big)$, alors la matrice de la différentielle de g est donnée par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} &= \mathrm{matrice}\big((Dg)(x)\big) \overset{(12.9)}{=} - \begin{pmatrix} 2y(x) & -4z(x) \\ 4y(x) & 2z(x) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}\, x \, \big(y(x)\big)^{-1} \\ \frac{1}{5}\, x \, \big(z(x)\big)^{-1} \end{pmatrix} \ , \end{aligned}$$

ce qui nous donne les équations (différentielles)

$$y'(x) = \frac{-3x}{5y(x)} \qquad \text{et} \qquad z'(x) = \frac{x}{5z(x)} \ .$$

Si on écrit ces équations différentielles sous la forme

$$2\, y(x)\, y'(x) = -\tfrac{6}{5}\, x \qquad \text{et} \qquad 2\, z(x)\, z'(x) = \tfrac{2}{5}\, x \ ,$$

on voit directement que les solutions sont données par

$$y(x) = \pm\sqrt{c_1 - \tfrac{3}{5}\, x^2} \qquad \text{et} \qquad z(x) = \pm\sqrt{c_2 + \tfrac{1}{5}\, x^2} \ .$$

Les conditions $y = \pm 1$ et $z = \pm 1$ pour $x = 1$ donnent alors les solutions finales

$$y(x) = \pm\sqrt{\tfrac{8}{5} - \tfrac{3}{5}\, x^2} \qquad \text{et} \qquad z(x) = \pm\sqrt{\tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{5}\, x^2} \ .$$

Bien sûr, on aurait pu obtenir ces solutions directement en résolvant d'abord y^2 et z^2 des deux équations qui sont linéaires en ces deux quantités et en prenant ensuite la racine carrée.

Solution de [16.109]. Si on définit l'application $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ par

$$f(x, y, z, u, v) = \begin{pmatrix} xu^2 + yzv + x^2 z \\ xyv^3 + 2zu - u^2 v^2 \end{pmatrix} \ ,$$

alors on demande d'exprimer (u, v) en fonction de (x, y, z) à l'aide de l'équation $f(x, y, z, u, v) = (3, 2)$ dans un voisinage de $(1, 1, 1, 1, 1)$ (où on a bien $f(1, 1, 1, 1, 1) = (3, 2)$). Si on veut le faire à l'aide du théorème des fonctions implicites, il faut que la sous-matrice de taille 2×2 formée des deux dernières colonnes (qui correspondent aux variables u et v) de la matrice de la différentielle soit inversible au point $(1,1,1,1,1)$. La différentielle est donnée par

$$\begin{aligned}\text{matrice}\big((Df)(x,y,z,u,v)\big) &= \\ &\begin{pmatrix} u^2+2xz & zv & yv+x^2 & 2ux & yz \\ yv^3 & xv^3 & 2u & 2z-2uv^2 & 3xyv^2-2u^2v \end{pmatrix} \ ,\end{aligned}$$

ce qui donne au point $(1,1,1,1,1)$ la matrice

$$\text{matrice}\big((Df)(1,1,1,1,1)\big) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

dont la sous-matrice des deux dernières colonnes est bien inversible (car de déterminant $2\times 1 - 1\times 0 = 2 \neq 0$. Les éléments de matrice de $(Df)(x,y,z,u,v)$ étant des fonctions polynomiales, f est de classe C^∞, ce qui veut dire qu'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites [12.8] et conclure qu'il existe un voisinage $V\subset \mathbf{R}^3$ de $(1,1,1)$, un voisinage $W\subset\mathbf{R}^2$ de $(1,1)$ et une application $g : V\to W$ de classe C^∞ tels que

$$\forall (x,y,z,u,v)\in V\times W \quad : \quad f(x,y,z,u,v) = (3,2) \ \Leftrightarrow\ (u,v) = g(x,y,z) \ .$$

De plus, la différentielle de g au point $(1,1,1)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\text{matrice}\big((Dg)(1,1,1)\big) &= -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = -\tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix} \ .\end{aligned}$$

Solution de [16.110]. Si on définit l'ouvert $U\subset\mathbf{R}^3$ par $U = \{\,(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid z > 0\,\}$ et la fonction $f : U\to\mathbf{R}$ par

$$f(x,y,z) = xy - y\ln(z) + \sin(xz) \ ,$$

alors f est une fonction de classe C^∞ et on demande de résoudre z en fonction de (x,y) dans un voisinage de $(0,2,1)$ à l'aide de l'équation $f(x,y,z)=0$. On constate d'abord qu'on a

$$\text{matrice}\big((Df)(x,y,z)\big) = \big(\ y + z\,\cos(xz) \quad x - \ln(z) \quad -y\,z^{-1} + x\,\cos(xz)\ \big)$$

et qu'au point $(0,2,1)$ cela donne la matrice $(\,3\ \ 0\ \ -2)$. La troisième composante (correspondant à z) est non-nulle, ce qui permet d'appliquer le théorème des fonctions implicites [12.8] (la fonction f est de classe C^∞). Il existe donc un voisinage $V\subset\mathbf{R}^2$ de $(0,2)$, un voisinage $W\subset\mathbf{R}$ de 1 et une application $g : V\to W$ de classe C^∞ tels que

$$\forall (x,y,z)\in V\times W \quad : \quad f(x,y,z) = 0 \ \Leftrightarrow\ z = g(x,y) \ .$$

De plus, sa différentielle au point $(0,2)$ est donnée par

$$\text{matrice}\big((Dg)(0,2)\big) = -(-2)^{-1}\cdot(\,3\ 0\,) = (\,6\ 0\,) \ ,$$

ce qui donne au final le résultat

$$\big((Dg)(0,2)\big)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = (\,6\ 0\,)\cdot\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = 6\xi \ .$$

Solution de [16.111]. Si on définit l'application $f : \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \times \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \to \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ par

$$f(B, Y) = Y + YDY - B \quad ,$$

alors le but est de montrer qu'on peut résoudre Y de l'équation $f(B, Y) = \mathbf{0}$ en fonction de B dans un voisinage de $B = \mathbf{0}$. On constate qu'on a $f(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ce qui suggère d'appliquer le théorème des fonctions implicites [12.5]. Pour cela on fait plusieurs remarques : d'abord que les applications $Y \mapsto Y$ et $B \mapsto B$ sont linéaire donc de classe C^∞. Ensuite que l'application $(Y, Z) \mapsto YDZ$ est bilinéaire continue (de norme inférieure ou égale à $\|D\|$), donc par [7.3] (et composée d'applications) l'application $Y \mapsto (Y, Y) \mapsto YDY$ et de classe C^∞. Le résultat est donc que f est de classe C^∞. De plus, les espaces sont de dimension finie, donc complets. Reste donc à calculer la différentielle partielle $(D_2 f)(B, Y)$ et de vérifier qu'au point $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ elle est un isomorphisme.

Avec les remarques précédentes on constate que l'application partielle $Y \mapsto Y + YDY - B$ est la somme de trois termes : linéaire, quadratique/bilinéaire et constante. Sa différentielle est "donc" donnée par

$$\big((D_2 f)(B, Y)\big)(H) = H + HDY + YDH \quad .$$

Au point $(B, Y) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ on a donc $\big((D_2 f)(\mathbf{0}, \mathbf{0})\big)(H) = H$ et donc $(D_2)(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathrm{id}$, ce qui est bien un isomorphisme. On peut donc invoquer le théorème des fonctions implicites [12.5] et conclure qu'il existe un voisinage V de $B = \mathbf{0}$, un voisinage W de $Y = \mathbf{0}$ et une application $g : V \to W$ tels que

$$\forall (B, Y) \in V \times W \quad : \quad f(B, Y) = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; Y = g(B) \quad .$$

Autrement dit, pour tout $B \in V$ il existe $Y = g(B) \in W$ vérifiant

$$f(B, Y) = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y + YDY = B \quad .$$

On peut traiter cet exercice aussi avec le théorème de l'inversion locale [11.3]. Dans ce cas on définit l'application $f : \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \to \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ par

$$f(Y) = Y + YDY$$

et on constate que la différentielle de f est donnée par

$$\big((Df)(Y)\big)(H) = H + HDY + YDH \quad .$$

Il s'ensuit qu'on a $(Df)(\mathbf{0}) = \mathrm{id}$ ce qui permet d'appliquer [11.3] et de conclure qu'il existe deux voisinages V et W de $\mathbf{0} = f(\mathbf{0})$ tels que $f : V \to W$ est un C^∞-difféomorphisme. Et alors pour tout $B \in W$ l'élément $Y = f^{-1}(B)$ sera la solution recherchée.

Solution de [16.112]. On définit la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x-y} - x - y$$

et on constate qu'on demande de résoudre y en fonction de x de l'équation $f(x, y) = 1$ dans un voisinage de $(0, 0)$. Selon le théorème des fonctions implicites [12.8] on peut le faire si la "matrice" formée par la dernière colonne de Df au point $(0, 0)$ est inversible (et si f est au moins de classe C^1, ce qui est le cas car f est de classe C^∞). On a

$$\mathrm{matrice}\big((Df)(x, y)\big) = \big(\; \mathrm{e}^{x-y} - 1 \;,\; -\mathrm{e}^{x-y} - 1 \;\big)$$

et donc notre "matrice" de taille 1×1 est donnée par

$$(\partial_2 f)(0, 0) = -\,\mathrm{e}^{0-0} - 1 = -2 \quad ,$$

ce qui est inversible, donc la condition est remplie. Par le théorème des fonctions implicites [12.8] il existe donc un voisinage $V_x \subset \mathbf{R}$ de $x = 0$, un voisinage $V_y \subset \mathbf{R}$ de $y = 0$ et une fonction $g : V_x \to V_y$ de classe C^∞ tels que

$$\forall (x,y) \in V_x \times V_y \quad : \quad f(x,y) = 1 \;\Leftrightarrow\; y = g(x) \quad .$$

De plus, la dérivée de g est donnée par

$$g'(x) = -\frac{(\partial_1 f)\big(x, g(x)\big)}{(\partial_2 f)\big(x, g(x)\big)}$$

et donc en particulier

$$g'(0) = -\frac{(\partial_1 f)(0,0)}{(\partial_2 f)(0,0)} = -\frac{\mathrm{e}^{0-0} - 1}{-\mathrm{e}^{0-0} - 1} = 0 \quad .$$

Pour déterminer un développement limité d'ordre 3 de g on part de l'égalité

$$f\big(x, g(x)\big) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{x-g(x)} - x - g(x) = 1$$

pour tout $x \in U$ (voir aussi [16.105.iii]). Si on dérivé cette égalité trois fois, on obtient successivement

$$\mathrm{e}^{x-g(x)} - 1 - g'(x)\,(\mathrm{e}^{x-g(x)} + 1) = 0$$

$$\mathrm{e}^{x-g(x)} - 2g'(x)\,\mathrm{e}^{x-g(x)} + \big(g'(x)\big)^2\,\mathrm{e}^{x-g(x)} - g''(x)\,(\mathrm{e}^{x-g(x)} + 1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$1 - 2g'(x) + \big(g'(x)\big)^2 - g''(x)\,(\mathrm{e}^{g(x)-x} + 1) = 0$$

$$-2g''(x) + 2g'(x)\,g''(x) - g''(x)\,(g'(x) - 1)\,\mathrm{e}^{g(x)-x} - g'''(x)\,(\mathrm{e}^{g(x)-x} + 1) = 0 \quad .$$

Si on substitue la valeur $g(0) = 0$, on obtient les équations

$$\left.\begin{aligned} -2g'(0)\,(1+1) &= 0 \\ 1 - 2g'(0) + \big(g'(0)\big)^2 - 2g''(0) &= 0 \\ -2g''(0) + 2g'(0)\,g''(0) - g''(0)\,(g'(0) - 1) - 2g'''(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} g'(0) = 0 \\ g''(0) = \frac{1}{2} \\ g'''(0) = -\frac{1}{4} \end{cases} ,$$

où on retrouve $g'(0) = 0$, mais aussi le développement limité

$$g(x) = \tfrac{1}{2}\,x^2 - \tfrac{1}{24}\,x^3 + x^3\,\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \quad .$$

Solution de [16.113]. Supposons d'abord que Df est identiquement nulle. Alors on prend un point $(x,y) \in U$ et $r > 0$ tels que $B_r(x,y) \subset U$ (ce qui est possible car U est un ouvert). La fonction f a donc une différentielle nulle sur l'ouvert connexe $B_r(x,y)$, donc par [3.7] elle est constante sur $B_r(x,y)$. Elle n'est donc pas injective.

Si Df n'est pas identiquement nulle, il existe $(a,b) \in U$ tel que $(Df)(a,b) = \big(\,(\partial_1 f)(a,b)\,,\,(\partial_2 f)(a,b)\,\big) \neq (0,0)$. Si on a $(\partial_2 f)(a,b) \neq 0$, alors on peut appliquer le théorème des fonctions implicites [12.8] et conclure qu'il existe un voisinage $V_n \subset \mathbf{R}$ de a, un voisinage $V_p \subset \mathbf{R}$ de b et une fonction $g : V_n \to V_p$ de classe C^1 tels que

$$\forall (x,y) \in V_n \times V_p \quad : \quad f(x,y) = f(a,b) \;\Leftrightarrow\; \quad y = g(x) \quad .$$

Pour tout $x \in V_n$ on a donc $f\big(x, g(x)\big) = f(a,b)$, ce qui montre que f n'est pas injective. Dans le cas où c'est $(\partial_1 f)(a,b) \neq 0$ le raisonnement est le même, sauf que dans ce cas on utilisera l'équation $f(x,y) = f(a,b)$ pour exprimer x en fonction de y dans un voisinage de (a,b).

Solution de [16.115]. On définit l'application $F : O \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ par

$$F(u,y,x,v) = \big((\partial_2 f)(u,y) - x, (\partial_1 f)(u,y) - v\big) \ .$$

La question est donc si on peut résoudre (u,v) en fonction de (x,y) de l'équation $F(u,y,x,v) = (0,0)$. Soit donc (u_o,y_o,x_o,v_o) une solution de cette équation. Selon [12.8] on peut résoudre localement (u,v) en fonction de (x,y) de ce système si F est de classe C^k avec $k \geqslant 1$ et si la matrice Jacobienne formée par les colonnes $(\partial_1 F)(u_o,y_o,x_o,v_o)$ et $(\partial_4)(u_o,y_o,x_o,v_o)$ est inversible. La fonction f étant de classe C^2, la fonction F est de classe C^1, car ses deux composantes sont de classe C^1. On trouve :

$$(DF)(u_o,y_o,x_o,v_o) = \begin{pmatrix} (\partial_1\partial_2 f)(u_o,y_o) & (\partial_2\partial_2 f)(u_u,y_o) & -1 & 0 \\ (\partial_1\partial_1 f)(u_o,y_o) & (\partial_2\partial_1 f)(u_o,y_o) & 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

La condition pour qu'on puisse résoudre localement (u,v) en fonction de (x,y) est donc la condition que la matrice

$$= \begin{pmatrix} (\partial_1\partial_2 f)(u_o,y_o) & 0 \\ (\partial_1\partial_1 f)(u_o,y_o) & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Par hypothèse son déterminant $-(\partial_1\partial_2 f)(u_o,y_o)$ est toujours non nulle. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites et conclure qu'il existe deux voisinages $U,V \subset \mathbf{R}^2$ et une fonction de classe C^1 $g : U \to V$ tels que

(i) $(u_o,y_o,x_o,v_o) \in W = \{\,(u,y,x,v) \in O \times \mathbf{R}^2 \mid (x,y) \in U \ , \ (u,v) \in V\,\}$;

(ii) $\forall (u,y,x,v) \in W \quad : \quad F(u,y,x,v) = (0,0) \Leftrightarrow (u,v) = g(x,y)$;

(iii) La différentielle $(Dg)(x_o,y_o)$ est donnée par (on n'écrit pas que les dérivées partielles de F doivent être prises au point (u_o,y_o,x_o,v_0) !)

$$(Dg)(x_o,y_o) = -\begin{pmatrix} \partial_1 F & \partial_4 F \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \partial_3 F & \partial_2 F \end{pmatrix} \ ,$$

où on tient bien compte de l'ordre qu'on a choisi pour les coordonnées : au départ on a l'ordre u,y,x,v et on veut résoudre u,v, ce qui impose le choix $1,4$ pour la première matrice. Et pour l'application g on a choisi l'ordre x,y, ce qui impose l'ordre $3,2$ pour la deuxième.

Si on fait le calcul, on obtient

$$\begin{aligned} (Dg)(x_o,y_o) &= -\begin{pmatrix} (\partial_1\partial_2 f) & 0 \\ (\partial_1\partial_1 f) & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & (\partial_2\partial_2 f) \\ 0 & (\partial_2\partial_1 f) \end{pmatrix} \\ &= \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(\partial_1\partial_2 f)} & -\dfrac{(\partial_2\partial_2 f)}{(\partial_1\partial_2 f)} \\[2ex] \dfrac{(\partial_1\partial_1 f)}{(\partial_1\partial_2 f)} & (\partial_2\partial_1 f) - \dfrac{(\partial_1\partial_1 f)(\partial_2\partial_2 f)}{(\partial_1\partial_2 f)} \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

On peut vérifier cette solution en dérivant les équations qui définissent u et v. On part donc des égalités, en écrivant bien les dépendances :

$$x = (\partial_2 f)\big(u(x,y),y\big) \qquad \text{et} \qquad v(x,y) = (\partial_1 f)\big(u(x,y),y\big) \ .$$

En appliquant bien [2.14] (voir aussi [16.50.ie]) on trouve les quatre équations

$$\begin{aligned} 1 &= (\partial_1\partial_2 f)\big(u(x,y),y\big) \cdot (\partial_1 u)(x,y) \\ 0 &= (\partial_1\partial_2 f)\big(u(x,y),y\big) \cdot (\partial_2 u)(x,y) + (\partial_2\partial_2 f)\big(u(x,y),y\big) \end{aligned}$$

$$(\partial_1 v)(x,y) = (\partial_1\partial_1 f)\big(u(x,y),y\big)\cdot(\partial_1 u)(x,y)$$
$$(\partial_2 v)(x,y) = (\partial_1\partial_1 f)\big(u(x,y),y\big)\cdot(\partial_2 u)(x,y) + (\partial_2\partial_1 f)\big(u(x,y),y\big) \ .$$

Si on compare ce résultat avec la matrice

$$(Dg)(x,y) = \begin{pmatrix} (\partial_1 u)(x,y) & (\partial_2 u)(x,y) \\ (\partial_1 v)(x,y) & (\partial_2 v)(x,y) \end{pmatrix} \ ,$$

on voit que ces deux résultats correspondent.

Solution de [16.116]. • (i) : Le déterminant est une fonction polynomiale dans les n^2 éléments de matrices, c'est donc une fonction de classe C^∞.

• (ii) : Pour que λ est une valeur propre de A, il faut et il suffit qu'on a $f(\lambda, A) = 0$. L'idée est donc d'utiliser le théorème des fonctions implicites [12.8], de considérer l'équation $f(x, B) = 0$ et de résoudre x en fonction de B dans un voisinage de $x = \lambda$ est $B = A$. Pour pouvoir le faire, il faut que la dérivée partielle de f par rapport à x est non-nulle (on est dans le cas $p = 1$ avec la partition $J = \{1\}$, car on veut exprimer la première variable en fonction des autres). C'est ici qu'on a besoin de la condition que la multiplicité de λ est 1. Pour A fixé on sait que $f(x, A)$ est un polynôme de degré n en x. Autrement dit :

$$f(x,A) = \sum_{k=0}^{n} c_k(A)\cdot x^k \ ,$$

où les coefficients $c_k(A)$ sont des fonctions polynomiales dans les éléments de matrice de A (en particulier $c_0 = \det(A)$ et $c_n = (-1)^n$). Le fait que λ est un zéro de multiplicité 1 veut dire qu'il existe un autre polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel qu'on a

$$f(x,A) \equiv \det(x\mathbf{1} - 1) = (\lambda - x)\cdot Q(x) \qquad \text{et} \qquad Q(\lambda) \neq 0 \ .$$

Les coefficients du polynôme Q dépendent bien évidemment de la matrice A, mais pas de x. Il s'ensuit que la dérivée partielle $\partial_1 f$ est donnée par

$$(\partial_1 f)(x,A) = -Q(\lambda) + (\lambda - x)\cdot Q'(x) \ .$$

On a donc

$$(\partial_1 f)(\lambda, A) = -Q(\lambda) \neq 0 \ ,$$

ce qui montre qu'on peut appliquer [12.8]. Il existe donc un voisinage ouvert $V \subset \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ de A, un voisinage ouvert $V' \subset \mathbf{R}$ de λ et une application $g : V \to V' \subset \mathbf{R}$ de classe C^∞ tels que

$$\forall (\mu, B) \in V' \times V \quad : \quad f(\mu, B) = 0 \ \Leftrightarrow\ \mu = g(B) \ .$$

On a donc en particulier $g(A) = \lambda$ (car $(\lambda, A) \in V' \times V$ et $f(\lambda, A) = 0$). Étant donné que la condition $g(\mu, B) = 0$ est équivalente à la condition que μ est une valeur propre de B, on a montré ce qu'on demandait.

• (iii) : Soit $A \in U$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses n valeurs propres distinctes. Chaque valeur propre est donc forcément de multiplicité 1. Par la question précédente il existe donc n voisinages ouverts V_i de A et n applications $g_i : V_i \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ tels que

$$\forall i = 1, \dots, n \quad : \quad g_i(A) = \lambda_i \text{ et } \forall B \in V_i : f\big(g_i(B), B\big) = 0 \ .$$

Mais les λ_i sont distinctes, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que les ouverts $B_\varepsilon(\lambda_i) \subset \mathbf{R}$ sont 2 à 2 disjoints (il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|$). Si on définit l'ouvert $V \subset \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ par

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}\big(B_\varepsilon(\lambda_i)\big) \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i \quad ,$$

alors pour tout $B \in V$ on a $g_i(B) \in B_\varepsilon(\lambda_i)$ et donc (parce que ces intervalles sont 2 à 2 disjoints) ces $g_i(B)$ sont tous distincts. Ainsi on a montré qu'on a $A \in V \subset U$.

• (iv) : Dans la question précédente on a montré que pour tout $A \in U$ il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de A et n fonctions $g_i : V \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ tels que $g_i(B)$, $i = 1, \ldots, n$ sont les n valeurs propres distinctes de $B \in V$. Pour tout $A \in U$ il existe donc un voisinage ouvert $V \subset U$ de A sur lequel le fonctions g_i sont de classe C^∞. Mais le point A est arbitraire, donc les fonctions g_i sont de classe C^∞ sur U entier.

Solution de [16.117]. • (i) : La bilinéarité de B étant (presque) évident, on se concentre sur la continuité en tant qu'application bilinéaire. On calcule donc directement :

$$\begin{aligned} \|B(f,g)\|_\infty &= \sup_{x \in [a,b]} |f(x) \cdot g(x)| \\ &\leqslant \big(\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \big) \cdot \big(\sup_{x \in [a,b]} |g(x)| \big) = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty \quad . \end{aligned}$$

Avec [6.6] il s'ensuit que B est continue avec $\|B\| \leqslant 1$. D'autre part, pour $f = \mathbf{1}$ (la fonction constante 1) on a $B(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathbf{1}$ et $\|B(\mathbf{1}, \mathbf{1})\|_\infty = 1 = \|\mathbf{1}\|_\infty \cdot \|\mathbf{1}\|_\infty$ et donc $\|B\| \geqslant 1$, montrant qu'on a $\|B\| = 1$.

• (ii) : La bilinéarité de B implique (par définition) que l'application $\hat{B}(f)$ est linéaire. Pour la continuité on calcule

$$\|\big(\hat{B}(f)\big)(g)\|_\infty = \|B(f,g)\|_\infty \leqslant \|B\| \cdot \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$$

et donc par [1.23] (ou par [6.6] dans le cas $n = 1$) il s'ensuit que $\hat{B}(f)$ est continue avec $\|\hat{B}(f)\| \leqslant \|f\|_\infty$. En utilisant de nouveau $\mathbf{1}$, la fonction constante 1, on a $\big(\hat{B}(f)\big)(\mathbf{1}) = f$ et donc $\|\big(\hat{B}(f)\big)(\mathbf{1})\|_\infty = \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \cdot \|\mathbf{1}\|_\infty$, montrant qu'on doit aussi avoir $\|\hat{B}(f)\| \geqslant \|f\|_\infty$.

• (iii) : On déduit directement de la définition de l'application $\hat{B}(f)$ qu'on a les égalités

$$\hat{B}(f \cdot g) = \hat{B}(f) \circ \hat{B}(g) = \hat{B}(g) \circ \hat{B}(f) \quad .$$

Pour $f \in U$ on a $\Phi(f) = 1/f \in U$ (car si f ne s'annule jamais, $1/f$ non plus) et donc $\hat{B}(1/f)$ est une application linéaire continue vérifiant

$$\hat{B}(f) \circ \hat{B}(1/f) = \hat{B}(1/f) \circ \hat{B}(f) = \hat{B}(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_E \quad .$$

Il s'ensuit que $\hat{B}(f)$ appartient à $\mathrm{Isom}(E;E)$ avec $\hat{B}(f)^{-1} = \hat{B}\big(\Phi(f)\big)$.

• (iv) : Pour les différentielles partielles $(D_iB)(f,g)$ il faut trouver deux applications $A_i \in \mathcal{L}(E;E)$ vérifiant

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|B(f+h,g) - B(f,g) - A_1(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} = 0$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\|B(f,g+h) - B(f,g) - A_2(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} \ .$$

Pour les trouver on calcule les autres termes :

$$B(f+h,g) - B(f,g) = h\cdot g = \big(\hat{B}(g)\big)(h)$$

et

$$B(f,g+h) - B(f,g) = f\cdot h = \big(\hat{B}(f)\big)(h) \ .$$

Sachant que $\hat{B}(g)$ et $\hat{B}(f)$ appartiennent bien à $\mathcal{L}(E;E)$, on en déduit immédiatement qu'on a les égalités

$$(D_1B)(f,g) = \hat{B}(g) \qquad \text{et} \qquad (D_2B)(f,g) = \hat{B}(f) \ .$$

On peut aussi invoquer [7.3] qui dit que la différentielle de B est donné par

$$\big((DB)(f,g)\big)(h,k) = B(f,k) + B(h,g)$$

et ensuite [5.9] pour en déduire qu'on a les égalités

$$\big((D_1B)(f,g)\big)(h) = \big((DB)(f,g)\big)(h,0) = B(h,g) = \big(\hat{B}(g)\big)(h)$$

et

$$\big((D_2B)(f,g)\big)(k) = \big((DB)(f,g)\big)(0,k) = B(f,k) = \big(\hat{B}(f)\big)(k) \ ,$$

ce qui nous donne le même résultat pour les différentielles partielles.

• (v) : Il est évident que l'application Φ est l'unique solution de l'équation $B\big(f,\Phi(f)\big) = \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}\in E$ désigne comme avant la fonction constante égale à 1. Si on arrive à montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique on peut en déduire que Φ est (comme B) de classe C^∞.

On commence avec la remarque que $\mathbf{R}$ est un espace de Banach et que $[a,b]\subset\mathbf{R}$ est un fermé borné dans un espace vectoriel de dimension finie, donc compact. Selon [1.40] et [1.42] on peut donc conclure que $E = C^0([a,b];\mathbf{R})$ est un espace de Banach. Ensuite on remarque que $B : E\times E\to E$ est de classe C^∞ [7.3] et que pour $f_o\in U$ et $g_o = \Phi(f_o) = 1/f_o$ on a $B(f_o,g_o) = \mathbf{1}$. En plus, la différentielle partielle $(D_2B)(f_o) = \hat{B}(f_o)$ appartient à $\mathrm{Isom}(E;E)$. Les conditions du théorème des fonctions implicites [12.5] sont donc satisfaites (en remplaçant E, F et G par E, f par B, (a,b) par (f_o,g_o) et c par $\mathbf{1}$). Il existe donc deux ouverts $V,W\subset E$ et une unique fonction $\Psi : V\to W$ de classe C^∞ tels que

(i) $(f_o,g_o)\in V\times W$,

(ii) $\forall (f,g)\in V\times W \quad : \quad B(f,g) = \mathbf{1} \quad\Leftrightarrow\quad g = \Psi(f)$,

(iii) $\forall (f,g)\in V\times W : (D_2B)(f,g)\in \mathrm{Isom}(E;E)$,

(iv) $\forall f\in V : (D\Psi)(f) = -\Big((D_2B)\big(f,\Psi(f)\big)\Big)^{-1}\circ (D_1B)\big(f,\Psi(f)\big)$.

Si on substitue ce qu'on sait sur B et ses différentielles partielles, on trouve :

(ii) $\forall (f,g)\in V\times W \quad : \quad f\cdot g = \mathbf{1} \quad\Leftrightarrow\quad g = \Psi(f)$,

(iii) $\forall (f,g)\in V\times W : \hat{B}(f)\in \mathrm{Isom}(E;E)$,

(iv) $\forall f\in V : (D\Psi)(f) = -\hat{B}(f)^{-1}\circ \hat{B}\big(\Psi(f)\big) = -\hat{B}\big(\Psi(f)\big)^2$.

Mais on sait que l'unique solution (si elle existe) de l'équation $f\cdot g = \mathbf{1}$ est donnée par $g = 1/f = \Phi(f)$. Il s'ensuit qu'on doit avoir $\Psi = \Phi$, ce qui montre que Φ est de classe C^∞ sur $V\ni f_o$. Mais $f_o\in U$ était arbitraire, ce qui montre que Φ est de classe C^∞ sur U. Sa différentielle est donc donnée par

$$(D\Phi)(f) = -\hat{B}\big(\Psi(f)\big)^2 = -\hat{B}(f^{-2}) \qquad\Leftrightarrow\qquad \big((D\Phi)(f)\big)(h) = -\frac{h}{f^2} \ .$$

• (vi) : Si f ne s'annule jamais, il est évident que la même chose est vraie pour $1/f = \Phi(f)$. Il s'ensuit qu'on a l'inclusion $\Phi(U) \subset U$. Mais il est aussi évident qu'on a l'identité

$$\forall f \in U \quad : \quad \Phi\big(\Phi(f)\big) = f \ .$$

On en déduit immédiatement que $U \subset \Phi(U)$. On a donc $\Phi(U) = U$ et $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}$, montrant que Φ est un C^∞-difféomorphisme de U sur lui-même avec $\Phi^{-1} = \Phi$.

Les solutions de §13

Solution de [16.119]. • (i) : On définit l'ensemble $M = f^{-1}(0)$ et on constate que la matrice de la différentielle de f est donnée par

$$\big(\mathrm{Jac}(f)\big)(x,y,z) = \big(\ y+z+2\ ,\ x+z+2\ ,\ x+y-1\ \big)\ .$$

Au point $(0,0,0) \in M$ c'est $(\,2\ 2\ \ -1\,)$, ce qui est une matrice de rang 1. Par continuité des éléments de la matrice de $(Df)(x,y,z)$ il s'ensuit que le rang de Df vaut 1 dans un voisinage U de $(0,0,0)$ et donc la valeur 0 est une valeur régulière pour la restriction de f à U. Par [13.12] on en déduit que l'intersection $M \cap U$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ de dimension $2 = 3-1$ et que l'espace tangent à M au point $(0,0,0)$ est donné par $\ker\big((Df)(0,0,0)\big)$, c'est-à-dire qu'on a

$$T_{(0,0,0)}M = \{\,(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x+2y-z=0\,\}\ .$$

L'équation du plan tangent affine est donc donnée par

$$2(x-0)+2(y-0)-(z-0)=0\ .$$

Si on applique [13.11] pour voir si 0 est une valeur régulière pour f (sur $\mathbf{R}^3$), alors on trouve les 4 équations

$$f(x,y,z)=0 \quad , \quad y+z+2=0 \quad , \quad x+z+2=0 \quad , \quad x+y-1=0\ .$$

Les trois dernières équations (linéaires) ont comme solution unique le point $(\,\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\,)$ et ce point ne vérifie pas la première équation. 0 est donc une valeur régulière pour f sur $\mathbf{R}^3$ et M est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2 (une surface).

• (ii) : On définit l'application $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ par

$$F(x,y,z) = \big(f(x,y,z), g(x,y,z)\big)$$

et on définit l'ensemble $C = F^{-1}(0,0)$. La matrice de la différentielle de F est donnée par

$$\big(\mathrm{Jac}(F)\big)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4y+2z & 4x+4 & 2x-1 \\ y+z+2 & x+z+2 & x+y-1 \end{pmatrix}$$

Au point $(0,0,0) \in C$ on a donc la matrice

$$\big(\mathrm{Jac}(F)\big)(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\ ,$$

ce qui est une matrice de rang 2, ce qu'on voit par exemple en prenant le déterminant de la sous-matrice de taille 2×2 des deux premières colonnes. Par continuité de ce déterminant il s'ensuit qu'il existe un voisinage ouvert U de $(0,0,0)$ sur lequel le rang de DF vaut 2. $(0,0)$ est donc une valeur régulière pour la restriction de F à U et par conséquent l'intersection $C \cap U$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ de dimension $3-2=1$ (une courbe). Son espace tangent au point $(0,0,0)$ est donné par $\ker\big((DF)(0,0,0)\big)$, c'est-à-dire qu'on a

$$\begin{aligned} T_{(0,0,0)}C &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ \middle|\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{\,\lambda \cdot (1,1,4) \mid \lambda \in \mathbf{R}\,\}\ . \end{aligned}$$

Pour montrer à l'aide de [13.11] que $(0,0)$ est une valeur régulière de F et donc que C est globalement une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ et pas seulement dans un voisinage de $(0,0,0)$, il faut montrer que les équations

$$F(x,y,z) = (0,0) \quad , \quad \det\begin{pmatrix} 4y+2z & 4x+4 \\ y+z+2 & x+z+2 \end{pmatrix} = 0$$

$$, \quad \det\begin{pmatrix} 4y+2z & 2x-1 \\ y+z+2 & x+y-1 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \det\begin{pmatrix} 4x+4 & 2x-1 \\ x+z+2 & x+y-1 \end{pmatrix} = 0$$

n'ont pas de solutions. Mais contrairement au cas précédent, ici le calcul pour le faire est très (trop ?) laborieux.

Solution de [16.121]. • (i) : On considère la fonction $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ de sorte qu'on a $M_1 = f^{-1}(1)$ et on détermine la matrice sa différentielle :

$$\big(\mathrm{Jac}(f)\big)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2-3yz & 3y^2-3xz & 3z^2-3xy \end{pmatrix} \ .$$

Selon [13.14] on détermine l'ensemble V qui ici est donné par les 4 équations

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = 1 \quad \text{et} \quad x^2-yz = y^2-xz = z^2-xy = 0 \ .$$

Selon les trois dernières équations on a

$$f(x,y,z) = x\cdot x^2 + y\cdot y^2 + z\cdot z^2 - 3xyz = x\cdot yz + y\cdot xz + z\cdot xy - 3xyz = 0$$

et donc l'ensemble V est vide. Selon le raisonnement donné dans [13.14] $M_1 = f^{-1}(1)$ est donc une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ de dimension $2 = 3-1$ (et de classe C^∞, car f est de classe C^∞).

• (ii) : Il est immédiat que M_2 est la réunion des deux axes $x=0$ et $y=0$. Il est aussi immédiat que chaque axe est une sous-variété de dimension 1. Et finalement il est "évident" que le point d'intersection $(0,0)$ pose un problème et que M_2 n'est pas une sous-variété de $\mathbf{R}^2$. Pour le montrer rigoureusement on suit le raisonnement donné dans [13.14]. On considère la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie comme $f(x,y) = xy$ de sorte qu'on a $M_2 = f^{-1}(0)$ et on calcule la matrice de différentielle :

$$\big(\mathrm{Jac}(f)\big)(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} \ .$$

Le système pour l'ensemble V consiste donc des trois équations

$$xy = y = x = 0 \ ,$$

ce qui a une solution unique : le point $(0,0)$. On est donc dans le cas $\emptyset \neq V \neq M_2$ et il n'y a qu'un seul point $m = (0,0) \in V$. Si M_2 est une sous-variété de dimension 1, alors on doit être capable de le décrire comme le graphe d'une fonction dans un voisinage de ce point $m = (0,0)$. Plus précisément il doit exister deux voisinages ouverts $U, V \subset \mathbf{R}$ de 0 et une application (d'au moins classe C^1) $g : U \to V$ tels que l'une des deux possibilités suivantes (qui correspondent au deux possibilités de couper l'ensemble $\{1,2\}$ en deux parties d'un élément) est vraie :

$$\begin{aligned} &(1) \quad M_2 \cap (U\times V) = \{(x,y) \in U\times V \mid y = g(x)\} \\ &(2) \quad M_2 \cap (V\times U) = \{(x,y) \in V\times U \mid x = g(y)\} \ . \end{aligned}$$

Mais U et V sont des voisinages ouverts de 0, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon,\varepsilon[\subset U\cap V$. Et donc tous les points $(0,t)$ avec $|t| < \varepsilon$ appartiennent à $M_2 \cap U\times V$, ce qui contredit la première possibilité, et tous les points $(t,0)$ avec $|t| < \varepsilon$ appartiennent à $M_2 \cap V\times U$, ce qui contredit la deuxième possibilité. La conclusion est donc que M_2 n'est pas une sous-variété de $\mathbf{R}^2$.

• (iii) : Le sous-ensemble M_3 est l'exemple classique d'un sous-ensemble qui n'est pas une sous-variété. On procède comme pour le sous-ensemble M_2 en définissant la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par $f(x,y) = x^3 - y^2$ de sorte que $M_3 = f^{-1}(0)$ et on calcule la matrice de différentielle :

$$\big(\mathrm{Jac}(f)\big)(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \end{pmatrix} \ .$$

Le système pour l'ensemble V consiste donc des trois équations

$$x^3 - y^2 = 3x^2 = -2y = 0 \ ,$$

ce qui a une solution unique : le point $(0,0)$. On est donc (comme pour M_2) dans le cas $\emptyset \neq V \neq M_3$ et il n'y a qu'un seul point $m = (0,0) \in V$. Si M_3 est une sous-variété de dimension 1, alors on doit être capable de le décrire comme le graphe d'une fonction dans un voisinage de ce point $m = (0,0)$. Plus précisément il doit exister deux voisinages ouverts $U, V \subset \mathbf{R}$ de 0 et une application (d'au moins classe C^1) $g : U \to V$ tels que l'une des deux possibilités suivantes est vraie :

$$\begin{array}{ll} (1) & M_3 \cap (U \times V) = \{(x,y) \in U \times V \mid y = g(x)\,\} \\ (2) & M_3 \cap (V \times U) = \{(x,y) \in V \times U \mid x = g(y)\,\} \ . \end{array}$$

Mais U et V sont des voisinages ouverts de 0, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset U \cap V$. Mais il n'y a aucun point $(x,y) \in M_3$ avec $x < 0$, ce qui contredit la première possibilité (qui dit que les points $\big(t, g(t)\big)$ appartiennent à M_3 pour $-\varepsilon < t < 0$). D'autre part, si on accepte la deuxième possibilité, alors on obtient que pour t dans un voisinage de 0 on doit avoir $\big(g(t), t\big) \in M_3$, ce qui implique qu'on doit satisfaire l'équation

$$\big(g(t)\big)^3 = t^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(t) = \sqrt[3]{t^2} \ .$$

Mais cette fonction n'est pas dérivable en 0 et donc une fonction g de classe au moins C^1 vérifiant la deuxième possibilité ne peut pas exister dans un voisinage de 0. La conclusion est que M_3 n'est pas une sous-variété.

• (iv) : Si $\lambda < 0$ on peut réécrire la définition de M_4 sous la forme

$$(x,y,z) \in M_4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + \big(z \cdot \sqrt{-\lambda}\,\big)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z \cdot \sqrt{-\lambda} = 0 \ ,$$

c'est-à-dire $M_4 = \{(0,0,0)\}$, ce qui est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ de dimension 0.

Si $\lambda = 0$ on peut réécrire la définition de M_4 sous la forme

$$(x,y,z) \in M_4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0 \ ,$$

c'est-à-dire qu'on a

$$M_4 = \{\, (0,0,z) \mid z \in \mathbf{R}\,\} \ ,$$

ce qui représente l'axe des z, ce qui est une sous-variété de dimension 1 (et de classe C^∞).

Reste donc le cas $\lambda > 0$. Pour ce cas on définit l'application $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - \lambda z^2$, on constate qu'on a $M_4 = f^{-1}(0)$, et on calcule la matrice de sa différentielle :

$$\big(\mathrm{Jac}(f)\big)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2\lambda z \end{pmatrix} \ .$$

Suivant le raisonnement de [13.14] on détermine l'ensemble V par les équations

$$x^2 + y^2 - \lambda z^2 = 2x = 2y = -2\lambda z = 0 \ ,$$

ce qui a une solution unique : le point $(0,0,0)$. On est donc (comme pour M_2 et M_3) dans le cas $\emptyset \neq V \neq M_4$ et il n'y a qu'un seul point $m = (0,0,0) \in V$. Si M_4 est une sous-variété de dimension $2 = 3 - 1$, alors on doit être capable de le décrire comme le graphe d'une fonction dans un voisinage de ce point $m = (0,0,0)$. Mais quand on sait que M_4 est un cône dans $\mathbf{R}^3$ et qu'on le visualise, alors il est visuellement évident que M_4 ne se laisse pas décrire comme le graphe d'une fonction dans un voisinage de $(0,0,0)$.

L'argument rigoureux est un peu plus lourd à écrire. Suivant le raisonnement dans [13.14], il doit exister deux voisinages ouverts $U \subset \mathbf{R}^2$ de $(0,0)$ et $V \subset \mathbf{R}$ de 0 et une application (d'au moins classe C^1) $g : U \to V$ tels que l'une des trois possibilités suivantes est vraie :

$$\begin{aligned}
&(1) \quad M_4 \cap (U \times V) = \{(x,y,z) \in U \times V \mid z = g(x,y)\,\}\\
&(2) \quad M_4 \cap (V \times U) = \{(x,y,z) \in V \times U \mid x = g(y,z)\,\}\\
&(3) \quad M_4 \cap W = \{(x,y,z) \in W \mid y = g(x,z)\,\}\\
&\qquad\qquad \text{avec} \qquad W = \{\,(x,y,z) \mid (x,z) \in U \;\&\; y \in V\,\} \ .
\end{aligned}$$

Étudions ces trois cas un par un. Dans le premier cas on doit donc avoir

$$\forall (x,y,z) \in U \times V \quad : \quad x^2 + y^2 - \lambda z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = g(x,y) \ .$$

Étant donné que le cône complet a une partie supérieure ($z > 0$) et une partie inférieure ($z < 0$), il est “évident” qu'on ne peut pas exprimer z en fonction de (x,y), car il y a toujours deux solutions pour un couple (x,y) donné. Voici l'argument précis. V est un voisinage ouvert de 0, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[\, \subset V$ et U est un voisinage ouvert de $(0,0)$ donc il existe $\delta > 0$ tel que $B_\delta(0,0) \subset U$. Et donc on a l'implication

$$\begin{aligned}
&0 < t < \min\bigl(\delta/\sqrt{2}\ ,\ \varepsilon \cdot \sqrt{\lambda/2}\bigr) \quad \Rightarrow\\
&\qquad (t,t) \in U \quad , \quad \pm t \cdot \sqrt{2/\lambda} \in V \quad , \quad \bigl(\,t, t, \pm t \cdot \sqrt{2/\lambda}\ \bigr) \in M_4 \ .
\end{aligned}$$

Dans le premier cas on aurait donc

$$\pm t \cdot \sqrt{2/\lambda} = g(t,t) \ ,$$

ce qui est absurde, car une fonction n'a qu'une seule image.

Dans le deuxième cas on doit avoir

$$\forall (x,y,z) \in V \times U \quad : \quad x^2 + y^2 - \lambda z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(y,z) \ .$$

Mais tout voisinage V de $(0,0)$ contient un point de la forme $(t,0)$ avec $t \neq 0$. On devrait donc avoir

$$x^2 + t^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = g(t,0) \ ,$$

ce qui est impossible car l'équation $x^2 = -t^2 < 0$ n'a pas de solutions. Le troisième cas est similaire au deuxième en échangeant les rôles de x et y. La conclusion est donc que M_4 n'est pas une sous-variété de $\mathbf{R}^3$.

• (v) : Si on applique toujours le même raisonnement à cet exemple, on considère la fonction $f(x,y) = x^3 - y^3$ (donc $M_5 = f^{-1}(0)$), on calcule la matrice de sa différentielle :

$$\bigl(\mathrm{Jac}(f)\bigr)(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

et on écrit les équations qui déterminent l'ensemble V :

$$x^3 - y^3 = 3x^2 = -3y^2 = 0 \ .$$

Ce système a une solution unique $(0,0)$. Il doit donc exister deux voisinages ouverts $U, V \subset \mathbf{R}$ de 0 et une application (d'au moins classe C^1) $g : U \to V$ tels que l'une des deux possibilités suivantes est vraie :

$$(1) \quad M_5 \cap (U \times V) = \{(x,y) \in U \times V \mid y = g(x)\,\}$$

$$(2) \quad M_5 \cap (V \times U) = \{(x,y) \in V \times U \mid x = g(y)\,\} \ .$$

Malheureusement ces deux possibilités n'amènent pas à une contradiction : les deux donnent la condition

$$(x,y) \in M_5 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = y^3 \quad \Leftrightarrow \quad \big(g(x)\big)^3 = x^3 \text{ ou } \big(g(y)\big)^3 = y^3 \ ,$$

ce qui est bien possible avec $g(t) = t$. Bien qu'on est dans le cas $\emptyset \neq V \neq M_5$, on n'arrive pas à obtenir une contradiction et on ne peut pas conclure que M_5 n'est pas une sous-variété de $\mathbf{R}^2$. Et pour cause, car c'est une sous-variété ! La fonction $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ étant une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$, l'équation $x^3 = y^3$ est équivalente à $x = y$. Et si on considère la fonction $f(x,y) = x - y$, alors on a toujours $M_5 = f^{-1}(0)$, mais cette fois ci il est immédiate de montrer que 0 est une valeur régulière de cette fonction f et donc que M_5 est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbf{R}^2$.

- (vi) : Si on définit l'application $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x^2+y^2-x) \ ,$$

alors on a $M_6 = f^{-1}(1,0)$. La matrice de sa différentielle est donnée par

$$\big(\mathrm{Jac}(f)\big)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

et donc l'ensemble V de la discussion [13.14] est décrit par les équations

$$f(x,y,z) = (1,0) \quad , \quad \det\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x-1 & 2y \end{pmatrix} = 0$$
$$, \quad \det\begin{pmatrix} 2x & 2z \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \det\begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Ce système est équivalent au système de 5 équations

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ x^2+y^2-x &= 0 \\ 2y &= 0 \\ 2z(2x-1) &= 0 \\ 4yz &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} x^2+z^2 &= 1 \\ x(x-1) &= 0 \\ y &= 0 \\ z(2x-1) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} &x^2 = 1 \\ &x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ &y = 0 \\ &z = 0 \end{aligned}\right\}$$

et ce système admet une solution (unique) $(1,0,0)$. La valeur $(1,0)$ n'est donc pas une valeur régulière de f et on est dans le cas $\emptyset \neq V \neq M_6$ de la discussion [13.14], ce qui suggère de montrer que M_6 n'est pas une sous-variété de dimension $1 = 3-2$.

Pour le faire on procède comme dans le cas M_4 en considérant deux voisinages ouverts $U \subset \mathbf{R}$ et $V \subset \mathbf{R}^2$ et une application (d'au moins classe C^1) $g : U \to V$ tels que l'une des trois possibilités suivantes est vraie :

$$\begin{aligned} &(1) \quad M_6 \cap (V \times U) = \{(x,y,z) \in U \times V \mid (x,y) = g(z)\,\} \\ &(2) \quad M_6 \cap (U \times V) = \{(x,y,z) \in V \times U \mid (y,z) = g(x)\,\} \\ &(3) \quad M_6 \cap W = \{(x,y,z) \in W \mid (x,z) = g(y)\,\} \\ &\qquad\qquad \text{avec} \qquad W = \{\,(x,y,z) \mid y \in U \ \&\ (x,z) \in V\,\} \ . \end{aligned}$$

Dans le premier cas on cherche à exprimer (x,y) en fonction de z, c'est-à-dire qu'on envisage l'équivalence

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \ \&\ x^2+y^2-x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = g(z)$$

pour $(x, y) \in V$ et $z \in U$. Mais on a l'équivalence

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \& \ x^2 + y^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = z^2 - z^4 \ \& \ x = 1 - z^2 \ .$$

Quand z est suffisamment proche de 0, il y aura toujours deux solutions pour y dans un voisinage de 0 et donc deux solutions pour (x, y) dans un voisinage de $(1, 0)$. Ce n'est donc pas possible d'exprimer ces solutions par une seule application g.

Dans le deuxième cas U est un voisinage de 1, V est un voisinage de $(0, 0)$ et on cherche à exprimer (y, z) en fonction de x, ce qui nous amène à faire les calculs

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \& \ x^2 + y^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = 1 - x \ \& \ y^2 = x(1 - x) \ .$$

Mais parmi les x dans un voisinage de 1 il y aura des $x > 1$ et donc $1 - x < 0$. Il s'ensuit que pour ces x il n'y a pas de solution pour y ni pour z, car les équations seront de la forme $y^2 < 0$ et $z^2 < 0$. Pour $z \in U$ nos équations ne peuvent donc pas être équivalentes à $(y, z) = g(x)$.

Dans le troisième cas U est de nouveau un voisinage de 0, V un voisinage de $(1, 0)$ et on cherche à exprimer (x, z) en fonction de y, ce qui nous amène à faire les calculs

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \& \ x^2 + y^2 - x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 = 1 - x \ \& \ \tfrac{1}{4} - y^2 = (x - \tfrac{1}{2})^2 \\ &\Leftrightarrow \quad z^2 = 1 - \left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} - y^2}\,\right) \ \& \ x = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} - y^2} \ . \end{aligned}$$

Mais si y est suffisamment proche de 0, l'équation pour z aura toujours deux solutions proche de 0 et il y aura donc deux solutions pour le couple (x, z) dans le voisinage V de $(1, 0)$. Il s'ensuit qu'on ne peut pas exprimer les points (x, y, z) de M_6 en fonction de y dans un voisinage de $(1, 0, 0)$.

La conclusion est donc que M_6 n'est pas une sous-variété de $\mathbf{R}^3$. Quand on visualise M_6 comme sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$ cette conclusion saute au yeux, car cette sous-ensemble présente deux aspects qui l'empêchent d'être une sous-variété : un croisement comme dans M_2 et un point de rebroussement comme dans M_3. Plus précisément, M_6 est naturellement l'intersection de deux sous-ensembles de $\mathbf{R}^3$, à savoir $M_6 = S \cap C$ avec

$$S = \{\, (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,\} \quad \text{et} \quad C = \{\, (x, y, z) \mid (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 = (\tfrac{1}{2})^2 \,\} \ .$$

On reconnaît (devrait reconnaitre) que S est la sphère unité dans $\mathbf{R}^3$ et C un cylindre d'axe vertical passant par le point $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Ces deux sous-ensembles se “touchent” au point $(1, 0, 0)$ et l'intersection est formé par deux courbes de forme elliptique (une dans l'hémisphère supérieur $z \geqslant 0$ et une dans l'hémisphère inférieur $z \leqslant 0$) qui se rejoignent dans le point $(1, 0, 0)$. Pour décrire ces deux courbes, on décrit d'abord les points de C par un couple unique $(\varphi, z) \in [0, 2\pi[\, \times \mathbf{R}$ comme

$$\big(x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(\varphi) \ , \ y = \tfrac{1}{2}\sin(\varphi) \ , \ z\big) \ .$$

Ensuite on résout z par l'intersection avec S :

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2} = \pm\sqrt{1 - x} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(\varphi)} \ .$$

On a donc deux applications $\gamma_\pm : [0, 2\pi[\, \to M_6$ données par

$$\gamma_\pm(\varphi) = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(\varphi) \ , \ \tfrac{1}{2}\sin(\varphi) \ , \ \pm\sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(\varphi)} \ \right)$$

et la réunion des deux images (de forme elliptique) $\gamma_+([0, 2\pi[\,) \cup \gamma_-([0, 2\pi[\,)$ est notre sous-ensemble M_6.

Solution de [16.122]. • (i) : L'ensemble $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$ consiste des matrices inversibles, qui forment un groupe. De plus, det est une fonction continue (même de classe C^∞), $\mathbf{R}^* \equiv \mathbf{R} \setminus \{0\}$ est un ouvert de $\mathbf{R}$ et on a

$$\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R}) = \det{}^{-1}(\mathbf{R}^*) \quad .$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$.

• (ii) : Si on a $\det(A) = \det(B) = 1$, alors $\det(AB) = 1$ et $\det(A^{-1}) = 1$, ce qui montre que $\mathrm{Sl}(n, \mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$. Une autre façon de le montrer est de constater que $\det : \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}^*$ est un homomorphisme de groupes et qu'on a l'égalité

$$\mathrm{Sl}(n, \mathbf{R}) = \ker(\det) \quad .$$

Si on a ${}^tAA = \mathbf{1}$, alors en prenant le déterminant on voit qu'on doit avoir $\det(A)^2 = 1$ et donc $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$. De plus, pour $A, B \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ on a

$${}^t(AB)AB = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tB\mathbf{1}B = \mathbf{1} \quad ,$$

ce qui montre qu'on a $AB \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$. Et finalement, l'égalité ${}^tAA = \mathbf{1}$ implique qu'on doit avoir $A^{-1} = {}^tA$ et donc ${}^t(A^{-1}) = A$, ce qui permet de faire le calcul

$$\mathbf{1} = AA^{-1} = {}^t(A^{-1})A^{-1} \quad ,$$

ce qui montre qu'on a $A^{-1} \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$. Ces résultats montrent que $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ est un groupe inclus dans $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$, donc un sous-groupe de $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$.

• (iii) : Selon [13.12] il suffit de montrer que 1 est une valeur régulière pour l'application det pour pouvoir conclure que $\mathrm{Sl}(n, \mathbf{R})$ est une sous-variété de $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ de dimension $\dim\big(\mathrm{M}(n, \mathbf{R})\big) - 1 = n^2 - 1$. Avec l'indication, il suffit de remarquer qu'on a

$$\big((D\det)(A)(\lambda A) = \det(A) \cdot \mathrm{trace}(\lambda \cdot \mathbf{1}) = n \cdot \lambda \quad ,$$

ce qui montre que $(D\det)(A) : \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est bien surjective pour $A \in \mathrm{Sl}(n, \mathbf{R})$. Et donc selon [13.12] $\mathrm{Sl}(n, \mathbf{R})$ est une sous-variété de $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ de dimension $n^2 - 1$. De plus son espace tangent à $\mathbf{1}$ est donné par

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{1}}\mathrm{Sl}(n, \mathbf{R}) &= \big\{\, H \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \mid \big((D\det)(\mathbf{1})(H) = 0 \,\big\} \\ &= \{\, X \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \mid \mathrm{trace}(X) = 0 \,\} \quad . \end{aligned}$$

• (iv) : Si on considère l'application $F : \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \times \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \to \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ définie par

$$F(A, B) = {}^tAB \quad ,$$

alors il est quasi-immédiat que F est bilinéaire. Et parce qu'on est en dimension finie, F est continue. Avec [8.4] on en déduit que f (qui vérifie $f(A) = F(A, A)$) est une application de classe C^∞ avec

$$\big((Df)(A)\big)(H) = \big((DF)(A, A)\big)(H, H) = F(A, H) + F(H, A) = {}^tAH + {}^tHA \quad .$$

• (v) : Il est tentant de croire que la matrice $\mathbf{1} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ est une valeur régulière pour f, mais ce n'est pas le cas. La raison intuitive est simple : pour $A \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ l'image $f(A)$ est une matrice symétrique qui est complètement déterminé par le triangle supérieur. On est donc amené à introduire l'espace $\mathbf{R}^p$ avec $p = \frac{1}{2}n(n+1)$ et l'application linéaire surjective $\Delta : \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}^p$ définie par

$$X \in \mathbf{R}^p \;\Leftrightarrow\; X = (X_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \qquad \text{et} \qquad \forall 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \;:\; \big(\Delta(A)\big)_{ij} = A_{ij} \quad .$$

Autrement dit, Δ est l'application qui oublie les éléments de matrice A_{ij} avec $i > j$.

Avec ces préparations on constate d'abord qu'on a l'équivalence

$$f(A) = \mathbf{1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta\big(f(A)\big) = \Delta(\mathbf{1}) \ ,$$

précisément parce que $f(A)$ est une matrice symétrique. On a donc l'égalité

$$\mathrm{O}(n, \mathbf{R}) = \{\, A \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \mid (\Delta \circ f)(A) = \Delta(\mathbf{1}) \,\} \ .$$

Parce que Δ est une application linéaire (donc continue car on est en dimension finie), on a (si on veut par [2.9] ou [7.11])

$$\Big(\big(D(\Delta \circ f)\big)(A)\Big)(H) = \Delta\Big(\big((Df)(A)\big)(H)\Big) = \Delta({}^tAH + {}^tHA) \ .$$

Pour montrer que $\Delta(\mathbf{1})$ est une valeur régulière pour $\Delta \circ f$, il faut montrer que pour $A \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ l'application $\big(D(\Delta \circ f)\big)(A) : \mathrm{M}(n, \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^p$ est surjective. Pour cela on prend $X \in \mathbf{R}^p$ et on définit la matrice $B \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ par

$$i < j \ \Rightarrow \ B_{ij} = X_{ij} \qquad , \qquad B_{ii} = \tfrac{1}{2}\, X_{ii} \qquad \text{et} \qquad i > j \ \Rightarrow \ B_{ij} = 0 \ .$$

Autrement dit, B est une matrice triangulaire supérieure avec la moitié de X sur la diagonale et X strictement au-dessus de la diagonale. Ensuite on pose $H = AB$ et rappelons que pour $A \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ on a $A^{-1} = {}^tA$. On a donc

$${}^tAH + {}^tHA = {}^tAH + {}^t({}^tAH) = B + {}^tB \ .$$

Selon la définition de B on a :

$$i < j \ \Rightarrow \ (B + {}^tB)_{ij} = B_{ij} + B_{ji} = X_{ij} + 0 \quad \text{et} \quad (B + {}^tB)_{ii} = B_{ii} + B_{ii} = X_{ii} \ .$$

Il s'ensuit qu'on a l'égalité $\Delta(B + {}^tB) = X$ et donc

$$\Big(\big(D(\Delta \circ f)\big)(A)\Big)(H) = \Delta({}^tAH + {}^tHA) = \Delta(B + {}^tB) = X \ ,$$

ce qui montre que $\big(D(\Delta \circ f)\big)(A)$ est surjective et donc $\mathbf{1}$ est une valeur régulière de $\Delta \circ f$. Par [13.12] on en déduit que $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ est une sous-variété de $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ de dimension $\dim\big(\mathrm{M}(n, \mathbf{R})\big) - \dim(\mathbf{R}^p) = n^2 - p = \frac{1}{2}n(n-1)$. De plus, l'espace tangent à $\mathbf{1}$ est donné par

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{1}}\mathrm{O}(n, \mathbf{R}) &= \Big\{\, H \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \ \Big|\ \Big(\big(D(\Delta \circ f)\big)(\mathbf{1})\Big)(H) = \mathbf{0}_{\mathbf{R}^p} \,\Big\} \\ &= \{\, H \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \mid \Delta(H + {}^tH) = \Delta(\mathbf{0}) \,\} \\ &= \{\, H \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \mid H + {}^tH = \mathbf{0} \,\} \ , \end{aligned}$$

où la dernière égalité est une conséquence du fait que Δ est injective sur les matrices symétriques.

Solution de [16.123]. • (i) : Pour calculer $\big(D(f^p)\big)(a)$, il faut évidemment calculer la différentielle générale de f^p. Si on calcule ces résultats pour $p = 1, 2, 3$, on s'aperçoit vite que la réponse devrait être (avec $f^0(x) = x$)

$$\big(D(f^p)\big)(x) = (Df)\big(f^{p-1}(x)\big) \cdot (Df)\big(f^{p-2}(x)\big) \cdots (Df)\big(f(x)\big) \cdot (Df)(x) \ .$$

On le montre par récurrence sur p en commençant avec $p = 1$, auquel cas le résultat est l'identité $(Df)(x) = (Df)(x)$. Ensuite on calcule l'hérédité :

$$\begin{aligned} \big(D(f^{p+1})\big)(x) = \big(D(f \circ f^p)\big)(x) &\overset{[2.14]}{=} (Df)\big(f^p(x)\big) \cdot \big(D(f^p)\big)(x) \\ &\overset{\text{réc.}}{=} (Df)\big(f^p(x)\big) \cdot (Df)\big(f^{p-1}(x)\big) \cdots (Df)\big(f(x)\big) \cdot (Df)(x) \ . \end{aligned}$$

Si on substitue $x = a$ en sachant qu'on a $f(a) = a$ et donc $f^q(a) = a$ pour tout $q \geqslant 1$, on obtient

$$\big(D(f^p)\big)(a) = \big((Df)(a)\big)^p \equiv u^p \ .$$

Si on utilise maintenant le cas $p = n$ avec $f^n = id$ et donc $\big(D(f^n)\big)(x) = id$, on obtient $u^n = id$, ce qui implique que u doit être inversible. Et parce qu'on est en dimension finie, u est même un C^∞ difféomorphisme.

• (ii) : On calcule directement

$$\begin{aligned}(\varphi\circ f)(x) &= \sum_{p=1}^{n} u^{-p}\Big(f^p\big(f(x)\big)\Big) = u\Big(\sum_{p=1}^{n} u^{-p-1}\big(f^{p+1}(x)\big)\Big)\\ &= u\Big(\sum_{p=2}^{n} u^{-p}\big(f^p(x)\big) + u^{-n-1}\big(f^{n+1}(x)\big)\Big)\\ &\overset{f^n = u^n = id}{=} u\Big(\sum_{p=2}^{n} u^{-p}\big(f^p(x)\big) + u^{-1}\big(f(x)\big)\Big) = u\big(\varphi(x)\big) \quad .\end{aligned}$$

• (iii) : La définition de φ s'écrit comme $\varphi = \sum_{p=1}^{n} u^{-p}\circ f^p$. Sanchant que u est linéaire en dimension finie donc continue, on peut appliquer [2.9] et [2.14] (ou directement [7.11]) pour obtenir pour tout $v \in E$:

$$\begin{aligned}\big((D_v\varphi)(a)\big)(v) &= \sum_{p=1}^{n} u^{-p}\Big(\big(D_v(f^p)\big)(a)\Big) = \sum_{p=1}^{n} u^{-p}\bigg(\Big(\big(D(f^p)\big)(a)\Big)(v)\bigg)\\ &= \sum_{p=1}^{n} u^{-p}\big((u^p)(v)\big) = n\,v \quad .\end{aligned}$$

On a donc $(D\varphi)(a) = n\cdot id$, ce qui appartient évidemment à $\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$. On peut donc appliquer le théorème de l'inversion locale [11.3] (un espace vectoriel de dimension finie est complet) et conclure qu'il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage W de $f(a) = a$ tels que $\varphi : V \to W$ est un C^1-difféomorphisme. On peut donc définir l'ouvert U comme $U = f^{-1}(V)$ qui sera un voisinage de a parce que $f(a) = a$. Et parce que f et un C^1-difféomorphisme, $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme et $\varphi\circ f : U \to W$ est un C^1-difféomorphime. L'égalité $u\circ\varphi = \varphi\circ f$ et le fait que u est un C^∞-difféomorphisme impliquent que $\varphi = u^{-1}\circ\varphi\circ f : U \to u^{-1}(W)$ est un C^1-difféomorphisme. Mais on peut aussi composer l'égalité $\varphi\circ f = u\circ\varphi$ (à gauche) avec $\varphi^{-1} : W \to V$ pour obtenir

$$f = \varphi^{-1}\circ\varphi\circ f = \varphi^{-1}\circ u\circ\varphi : U \to V \quad .$$

• (iv) : Pour $x \in U$ on a

$$f(x) = x \quad\iff\quad (\varphi^{-1}\circ u\circ\varphi)(x) = x \quad\iff\quad u\big(\varphi(x)\big) = \varphi(x) \quad ,$$

ce qui montre qu'on a bien $f(x) = x$ si et seulement si $\varphi(x)$ est vecteur propre de u pour la valeur propre 1. Si on définit X comme le sous-espace propre de u pour la valeur propre 1 on a donc montré que $\varphi : U \to u^{-1}(W)$ est un C^1-difféomorphisme vérifiant l'égalité

$$\varphi(U\cap F) = u^{-1}(W)\cap X \quad .$$

Soit maintenant $e_1,\ldots,e_d$ une base de $\mathbf{R}^d$ telle que $e_1,\ldots,e_p$ est une base de X (et donc $p = \dim(X)$). Alors la matrice $P \in \mathrm{M}(d,\mathbf{R})$ formé des d vecteurs e_i est une matrice inversible (donc un C^∞-difféomorphisme) vérifiant

$$P(Z) = X \quad ,$$

où $Z = \{\,(x_1,\dots,x_d) \mid x_{p+1} = \cdots = x_d = 0\,\}$. Si on définit l'ouvert $U' = P^{-1}\big(u^{-1}(W)\big)$, alors l'application $\Phi = \varphi^{-1}\circ P^{-1} : U' \to U$ est un C^1-difféomorphisme vérifiant

$$F \cap U = \Phi(Z \cap U') \ .$$

On a donc montré que pour tout point $a \in F$ il existe un voisinage U de a et un C^1-difféomorphisme $\Phi : U' \to U$ tels que $F \cap U = \Phi(Z \cap U')$.

Si on savait que la dimension de l'espace X est le même pour tout les points $a \in F$, alors on aurait montré que F est un sous-variété de $\mathbf{R}^d$ de dimension $\dim(X)$. Il faut donc montrer que cette dimension est le même pour tout les points dans une même composante connexe de F, ce qu'on fera en utilisant l'invariance de dimension [13.2]. On commence avec la définition de la fonction $\dim_F : F \to \mathbf{N}$ comme suit. Pour $a \in F$ on choisit un voisinage U de a, un ouvert U' et un difféomorphisme $\Phi : U' \to U$ tels que $\Phi(Z \cap U') = F \cap U$, où $Z \subset \mathbf{R}^d$ est le sous-espace vectoriel de dimension p définit c-dessus. Et on vient de montrer que de tels ingrédients existent. Selon [13.2], si on avait deux jeux (U_i, U_i', Φ_i, p_i), $i = 1, 2$ de tels ingrédients, alors $p_1 = p_2$. On peut donc poser

$$\dim_F(a) = p = \dim(Z) \ .$$

Montrons ensuite que cette fonction $\dim_F$ est continue. Pour cela on prend $p \in \mathbf{N}$ et $a \in \dim_F^{-1}(p)$. Alors par définition il existe un C^1-difféomorphisme $\Phi : U' \to U$ tel que $\Phi(Z \cap U') = F \cap U$ avec $\dim(Z) = p$. Mais alors pour tout $m \in F \cap U$ on peut utiliser ces mêmes ingrédients pour conclure qu'on a $\dim_F(m) = p$, c'est-à-dire $F \cap U \subset \dim_F^{-1}(p)$. Il s'ensuit que $\dim_F^{-1}(p)$ est un ouvert de F et donc (parce que chaque ouvert de $\mathbf{N}$ est une réunion de singletons $\{p\}$) que $\dim_F$ est une fonction continue. Si $F_c \subset F$ est une composante connexe de F, il s'ensuit que son image $\dim_F(F_c)$ est un sous-ensemble connexe de $\mathbf{N}$ (car l'image d'un ensemble connexe par une application continue est connexe). Mais les seuls sous-ensembles connexe de $\mathbf{N}$ sont les singletons, et donc $\dim_F$ est constante sur une composante connexe de F. Avec la définition d'une sous-variété de $\mathbf{R}^d$ on peut donc conclure que chaque composante connexe F_c de F est une sous-variété de $\mathbf{R}^d$ de dimension $\dim_F(F_c)$ (et de classe au moins C^1).

• (v) : Pour trouver la réciproque de g, on résout (x, y) de l'équation $(u, v) = g(x, y)$, ce qui donne les équations

$$\begin{cases} u = x \\ v = y + y^3 - x^2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = u \\ y + y^3 = v + u^2 \end{cases} .$$

Maintenant on remarque que la fonction $h(y) = y + y^3$ est strictement croissante ($h'(y) = 1 + 3y^2$), “donc” une bijection $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. En particulier h' est partout inversible et donc par le théorème de l'inversion globale [11.5], h est un C^∞-difféomorphisme. Il s'ensuit qu'on a

$$g^{-1}(u, v) = \big(u, h^{-1}(v + u^2)\big) \ ,$$

ce qui est donc (comme g) une application de classe C^∞ et donc g est un C^∞-difféomorphisme.

Si on calcule l'ensemble des points fixes, on trouve

$$F = \{\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x, y) = (x, y)\,\} = \{\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^3 = x^2\,\} \ .$$

C'est le sous-ensemble M_3 de [16.121] dont on a montré que ce n'est pas une sous-variété de $\mathbf{R}^2$.

Les solutions de §14

Solution de [16.124]. • (i) : On commence avec le calcul de Df :

$$(Df)(x,y) = (6x^2 + 2y\,,\ -2y + 2x)\ \ ,$$

ce qui donne comme équations pour les poins critiques :

$$y = -3x^2 \quad \text{et} \quad x = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y \quad \text{et} \quad x(3x+1) = 0\ \ ,$$

ce qui a comme solutions les deux points $(0,0)$ et $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

Pour connaître la nature de ces points critiques, on calcul le Hessien :

$$\begin{pmatrix} (\partial_1\partial_1 f)(x,y) & (\partial_1\partial_2 f)(x,y) \\ (\partial_2\partial_1 f)(x,y) & (\partial_2\partial_2 f)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\ \ ,$$

ce qui donne aux points $(0,0)$ et $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ les matrices

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad H(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\ \ .$$

Le polynôme caractéristique du premier est $\lambda^2 + 2\lambda - 4$ qui a un seul changement de signe, donc une valeur propre strictement positive et une strictement négative. Le point $(0,0)$ est donc un point selle. Pour le deuxième on trouve le polynôme $\lambda^2 + 6\lambda + 4$ qui ne présente pas de changements de signes, donc deux valeurs propres strictement négatives (car 0 n'est pas racine de ce polynôme). Le point $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ est donc un maximum local.

• (ii) : On remarque facilement qu'on a les limites

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to\infty} f(0,y) = -\infty\ \ .$$

Il s'ensuit immédiatement que f ne possède pas des extrema globaux.

• (iii) : L'ensemble T est le triangle fermé de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. C'est donc un ensemble fermé et borné, donc un compact (car on est en dimension finie !). La fonction f étant continue, la restriction de f à T atteint ses bornes m et M. Si ces valeurs étaient atteintes sur l'ouvert T^o (l'intérieur de T) définie comme

$$T^o = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\,,\ y > 0\,,\ x + y < 1\,\}\ \ ,$$

alors Df serait nulle en ces points. Mais f n'a pas de points critiques dans T^o, donc les valeurs m et M sont forcément atteint sur le bord de T définie comme

$$\begin{aligned} \partial T = T \setminus T^o = \{\,(x,0) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\,\} \cup \{\,(0,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\,\} \\ \cup \{\,(x, 1-x) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\,\}\ \ . \end{aligned}$$

On calcule donc la variation de f sur chacun des trois parties de ce bord. Pour le premier morceau on regarde donc la fonction

$$h_1(x) = f(x,0) = 2x^3 + 1$$

définie sur $[0,1]$ qui admet un minimum strict en $x = 0$ avec $h_1(0) = 1$ et un maximum strict en $x = 1$ avec $h_1(1) = 3$. Pour le deuxième morceau on regarde la fonction

$$h_2(y) = f(0,y) = 1 - y^2$$

sur $[0,1]$, qui admet un minimum strict en $y=1$ avec $h_2(1)=0$ et un maximum strict en $y=0$ avec $h_2(0)=1$. Et pour le troisième morceau on regarde la fonction

$$h_3(x)=f(x,1-x)=2x^3-(1-x)^2+2x(1-x)+1=2x^3-3x^2+4x$$

sur $[0,1]$, qui admet un minimum strict en $x=0$ avec $h_3(0)=0$ et un maximum strict en $h_3(1)=3$. Il s'ensuit que $f|_T$ a un minimum strict $m=0$ en $(0,1)$ et un maximum strict $M=3$ en $(1,0)$.

Solution de [16.125]. Suivant [14.5] on considère la fonction $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ définie par

$$F(x,y,\mu)=x^2+2\,xy+2\,y^2-\mu\cdot(x^2+y^2-1)\ .$$

Les points critiques de cette fonction sont données par les conditions

$$\begin{cases}(\partial_1F)(x,y,\mu)\equiv 2x+2y-2\mu x=0\\(\partial_2F)(x,y,\mu)\equiv 2x+4y-2\mu y=0\\(\partial_3F)(x,y,\mu)\equiv 1-x^2-y^2=0\ ,\end{cases}\ .$$

Il est facile de voir qu'on ne peut avoir ni $x=0$ ni $y=0$. En divisant par x dans la première équation on trouve $\mu=1+y/x$ et en substituant ceci dans la deuxième équation on trouve

$$\frac{x}{y}+2=\frac{y}{x}+1\qquad\Longleftrightarrow\qquad\Big(\frac{y}{x}\Big)^2=\frac{y}{x}+1\ ,$$

ce qui a deux solutions

$$\frac{y}{x}=\frac{1\pm\sqrt5}{2}\ .$$

Substituant ceci dans la troisième équation nous donne quatre solution

$$(x,y)=\pm\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\,,\ \sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}\ \right)\qquad\text{avec}\qquad\mu=1+\frac{y}{x}$$

et

$$(x,y)=\pm\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}\,,\ -\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\ \right)\qquad\text{toujours avec}\qquad\mu=1+\frac{y}{x}\ .$$

Pour les deux premières solutions on a $f(x,y)=\frac32+\frac12\sqrt5$ et pour les deux dernières on a $f(x,y)=\frac32-\frac12\sqrt5$.

Reste à déterminer si ces points critiques sont des extrema. La façon rapide est d'appliquer [14.2] et [14.4] en remarquant que $\operatorname{rang}\big((Dg)(a)\big)=1$ pour tout point $a\in M$ (et donc selon [13.12] $M=g^{-1}(1)$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^2$). Étant donné que M est un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbf{R}^2$, donc un compact, la restriction de f à M atteint ses bornes et admet donc un maximum et un minimum. Selon [14.2] et [14.4] un tel extremum donne forcément naissance à un point critique de notre fonction F. Et donc $\frac32+\frac12\sqrt5$ est la valeur maximale de $f|_M$ et $\frac32-\frac12\sqrt5$ sa valeur minimale.

Une deuxième façon est donnée par l'application complète de [14.5] en déterminant le Hessien partiel H donné par (voir [7.21])

$$H=(D^2f)(x,y)-\mu\,(D^2g)(x,y)=\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2\mu&2\\2&4-2\mu\end{pmatrix}$$

et de le restreindre à $\ker\big((Dg)(x,y)\big)$ donné par

$$\begin{aligned}\ker\big((Dg)(x,y)\big) &= \Big\{\,(u,v)\in\mathbf{R}^2 \mid \big((Dg)(x,y)\big)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0\,\Big\}\\ &= \Big\{\,(u,v)\in\mathbf{R}^2 \mid \big(\,2x\ 2y\,\big)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0\,\Big\}\\ &= \{\,\lambda\cdot(y,-x)\mid \lambda\in\mathbf{R}\,\}\ .\end{aligned}$$

Ce noyau étant uni-dimensionnelle, il suffit de regarder H sur le vecteur de base $(y,-x)$. Sachant que pour tous nos quatre solutions on a $\mu = 1+y/x = 2+x/y$ on trouve (en utilisant l'écriture introduite en [7.21])

$$\begin{aligned}H\big((y,-x),(y,-x)\big) &= (\,y\ ,\ -x\,)\cdot\begin{pmatrix}2-2\mu & 2\\ 2 & 4-2\mu\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}\\ &= 2\big(x^2-4xy-y^2\big)\end{aligned}$$

Pour les deux premières solutions on trouve

$$H\big((y,-x),(y,-x)\big) = 2\Big(\ \frac{5-\sqrt5}{10} - 4\sqrt{\frac15} - \frac{5+\sqrt5}{10}\ \Big) = -2\sqrt5 < 0\ \ ,$$

ce qui veut dire que la restriction de H à $\ker(Dg)$ est définie négative. Selon [14.5.ii] ces deux points sont donc des maxima locaux. Pour les deux dernières solutions on trouve

$$H\big((y,-x),(y,-x)\big) = 2\Big(\ \frac{5+\sqrt5}{10} + 4\sqrt{\frac15} - \frac{5-\sqrt5}{10}\ \Big) = 2\sqrt5 > 0\ \ ,$$

ce qui veut dire que la restriction de H à $\ker(Dg)$ est définie positive et donc, selon [14.5.i], ces points sont des minima locaux. Ces résultats sont en parfait accord avec ce qu'on a trouvé précédemment. Mais pour justifier que ces extrema locaux sont globaux, on a quand même besoin de notre premier argument qui disait que M est compact et que tout point extrémal donne naissance à un point critique de F.

On voit qu'ici l'application complète de [14.5] est moins performante que l'argument avec la compacité. Par contre, dans le cas général avec plus de points critiques on aura besoin des deux arguments : l'argument avec la compacité et [14.2], [14.4] pour pouvoir conclure que certains points critiques sont des extrema globaux, et la classification via le Hessien partiel pour déterminer la nature des autres points critiques.

Solution de [16.126]. • (i) : Avec $z=(xy)^{-1}$ on trouve

$$h(x,y) = f\big(x,y,(xy)^{-1}\big) = \frac{x}{y} + xy^2 + \frac{1}{x^2y}$$

avec

$$(Dh)(x,y) = \Big(\ \frac1y + y^2 - \frac{2}{x^3y}\ ,\ 2xy - \frac{x}{y^2} - \frac{1}{x^2y^2}\ \Big)\ .$$

Les points critiques de h sont donc déterminés par les équations

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x^3y} = \dfrac1y + y^2\\[2mm] 2xy = \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{x^2y^2}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}2 = x^3+(xy)^3\\ 2(xy)^3 = x^3+1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^3+(xy)^3=2\\ 4-2x^3 = x^3+1\end{cases}$$

dont l'unique solution est le point $(1,1)$. Pour déterminer la nature de ce point critique on calcule le Hessien H :

$$\begin{pmatrix} (\partial_1\partial_1 h)(x,y) & (\partial_1\partial_2 h)(x,y) \\ (\partial_2\partial_1 h)(x,y) & (\partial_2\partial_2 h)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{6}{x^4 y} & 2y - \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2}{x^3y^2} \\ 2y - \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2}{x^3y^2} & 2x + \dfrac{2x}{y^3} + \dfrac{2}{x^2y^3} \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qui donne au point $(1,1)$ la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad .$$

Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 12\lambda + 27$ avec valeurs propres 3 et 9 (et deux changement de signes pour la règle des signes de Descartes). Le point $(1,1)$ est donc un minimum local de h, ce qui veut dire que le point $(1,1,1)$ est un minimum local pour $f|_M$.

• (ii) : Selon [14.5] il faut calculer les points critique de la fonction $F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda \cdot \big(g(x,y,z) - 1\big)$. Ayant

$$(DF)(x,y,z,\lambda) = \Big(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2} - \lambda yz \ , \ \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} - \lambda xz \ , \ \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} - \lambda xy \ , \ xyz - 1 \Big) \quad ,$$

il faut donc résoudre le système de quatre équations

$$\begin{cases} \lambda yz = \dfrac{1}{y} - \dfrac{z}{x^2} \\ \lambda xz = \dfrac{1}{z} - \dfrac{x}{y^2} \\ \lambda xy = \dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{z^2} \\ xyz = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{x}{y} - \dfrac{z}{x} \\ \lambda = \dfrac{y}{z} - \dfrac{x}{y} \\ \lambda = \dfrac{z}{x} - \dfrac{y}{z} \\ xyz = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\lambda = 0 \\ \lambda = \dfrac{y}{z} - \dfrac{x}{y} \\ \lambda = \dfrac{z}{x} - \dfrac{y}{z} \\ xyz = 1 \end{cases}$$

dont la seule solution est le point $(1,1,1,0)$. Ensuite il faut déterminer le Hessien partiel, pour lequel on calcule (en tenant compte du fait qu'on a $\lambda = 0$) :

$$\begin{pmatrix} (\partial_1\partial_1 f)(x,y) & (\partial_1\partial_2 f)(x,y) & (\partial_1\partial_3 f)(x,y) \\ (\partial_2\partial_1 f)(x,y) & (\partial_2\partial_2 f)(x,y) & (\partial_2\partial_3 f)(x,y) \\ (\partial_3\partial_1 f)(x,y) & (\partial_3\partial_2 f)(x,y) & (\partial_3\partial_3 f)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2z}{x^3} & -\dfrac{1}{y^2} & -\dfrac{1}{z^2} \\ -\dfrac{1}{y^2} & \dfrac{2x}{y^3} & -\dfrac{1}{z^2} \\ -\dfrac{1}{x^2} & -\dfrac{1}{z^2} & \dfrac{2y}{z^2} \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qui donne au point $(1,1,1)$ la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Il faut aussi calculer une base de $\ker\big((Dg)(1,1,1)\big)$:

$$(Dg)(x,y,z) = (yz, xz, xy) \quad \Rightarrow \quad (Dg)(1,1,1) = (1,1,1) \quad \Rightarrow$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{et} \ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ \text{base de} \ \ker\big((Dg)(1,1,1)\big) \quad .$$

Et finalement on calcule la matrice $\widehat{H}_{st}$ de la restriction de H à $\ker\big((Dg)(1,1,1)\big)$:

$$(\widehat{H}_{st}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad .$$

Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 12\lambda + 27$ avec valeurs propres 3 et 9 (et deux changements de signes pour la règle des signes de Descartes). Selon [14.5], le point $(1,1,1)$ est donc un minimum local pour $f|_M$, confirmant ainsi le résultat obtenu en (i).

Solution de [16.137]. Selon la théorie des extrema liés, il faut déterminer les points critiques de la fonction $F : (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$F(x,y,\lambda) = \frac{x^2\, y}{x^4 + y^2} - \lambda(x^2 + y^2 - R^2) \quad .$$

On calcule donc :

$$(DF)(x,y,\lambda) = \Big(\ \frac{2xy(y^2 - x^4)}{(x^4+y^2)^2} - 2\lambda x \ ; \ \frac{x^2(x^4 - y^2)}{(x^4+y^2)^2} - 2\lambda y \ ; \ R^2 - x^2 - y^2 \ \Big)$$

et l'équation $(DF)(x,y,\lambda) = (0;0;0)$ se traduit donc par le système de trois équations

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2xy(y^2 - x^4)}{(x^4+y^2)^2} &= 2\lambda x \\ \frac{x^2(x^4 - y^2)}{(x^4+y^2)^2} &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= R^2 \quad . \end{aligned} \right.$$

Si on veut résoudre λ de l première équation, il faut écarter le cas $x = 0$. Mais dans ce cas les deux autres équations réduisent à $\lambda y = 0$ et $y^2 = R^2$, ce qui donne les deux points critiques

$$(0, \pm R, 0) \quad .$$

Dans le cas $x \neq 0$ on peut résoudre λ de la première équation et le substituer dans le deuxième qui nous donne le système

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{y(y^2 - x^4)}{(x^4+y^2)^2} = \lambda \\ &\frac{x^2(x^4 - y^2)}{(x^4+y^2)^2} = 2y\frac{y(y^2 - x^4)}{(x^4+y^2)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{(x^2 + 2y^2)(x^4 - y^2)}{(x^4+y^2)^2} = 0 \\ &x^2 + y^2 = R^2 \quad . \end{aligned} \right.$$

Parce que l'origine est exclue, on se retrouve avec les deux équations

$$x^4 = y^2 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 = R^2 \quad ,$$

ce qui implique automatiquement $\lambda = 0$. On a donc

$$0 = x^4 - y^2 = x^4 + x^2 - R^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4R^2}}{2} \quad .$$

On a donc, x^2 étant positive,

$$x = \pm\, x_o \qquad \text{et} \qquad y = \pm\, y_o \quad ,$$

avec

$$x_o = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4R^2}-1}{2}} \qquad \text{et} \qquad y_o = \frac{\sqrt{1+4R^2}-1}{2} \quad .$$

Au final on trouve donc 6 points critiques :

$$(0, \pm R, 0) \qquad , \qquad (\pm x_o \, , \, \pm y_o) \quad .$$

Pour ces points critiques il faut vérifier si Dg a bien rang 1. Pour cela on calcule donc Dg :

$$(Dg)(x, y) = (2x \, , \, 2y) \tag{17.46}$$

et on constate directement que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ on a $\operatorname{rang}\big((Dg)(x, y)\big) = 1$ (car le seul point avec rang égal 0 est l'origine $(0, 0)$).

Les conditions de [14.5] sont donc remplies, ce qui nous amène (sachant que $\lambda = 0$ pour nos points critiques) à calculer la matrice du Hessien

$$H(v, w) = \big((D^2 f)(x, y)\big)(v, w) \quad ,$$

quand $(x, y, 0)$ désigne un des points critiques. Cette matrice est donnée par

$$H_{ij} = H(e_i, e_j) = \big((D^2 f)(x, y)\big)(e_i, e_j) = \begin{pmatrix} (\partial_1\partial_1 f)(x, y) & (\partial_1\partial_2 f)(x, y) \\ (\partial_2\partial_1 f)(x, y) & (\partial_2\partial_2 f)(x, y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2y(y^4 - 12x^4y^2 + 3x^8)}{(x^4 + y^2)^3} & \dfrac{-2x(y^4 - 6x^4y^2 + x^8)}{(x^4 + y^2)^3} \\ \dfrac{-2x(y^4 - 6x^4y^2 + x^8)}{(x^4 + y^2)^3} & \dfrac{2x^2y(y^2 - 3x^4)}{(x^4 + y^2)^3} \end{pmatrix} \quad .$$

• Pour les deux points critiques $(0, \epsilon R, 0)$ avec $\epsilon = \pm 1$, on trouve

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} 2\epsilon R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Suivant [14.6] on doit déterminer une base de $\ker\big((Dg)(0, \epsilon R)\big)$ dont la matrice est $(0, 2\epsilon R)$ (17.46). Le vecteur $f_1 = (1, 0)$ est une telle base, ce qui donne pour la matrice $\widehat{H}_{st}$ (de taille 1×1) :

$$\widehat{H}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\epsilon R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2\epsilon R^{-1}) \quad .$$

Pour $\epsilon = 1$ ceci est strictement positif et donc le point $(0, R)$ est un minimum local de $f|_M$. Pour $\epsilon = -1$ c'est strictement négatif et donc le point $(0, -R)$ est un maximum local de $f|_M$.

• Pour les quatre points critiques $(\epsilon_1 x_o, \epsilon_2 y_o, 0)$ avec $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$ on rappelle d'abord que les nombres positifs x_o et y_o vérifient les équations

$$x_o^4 = y_o^2 \qquad \text{et} \qquad x_o^2 + y_o^2 = R^2 \quad .$$

Pour la matrice H_{ij} dans ces points on trouve donc

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\epsilon_2 y_o(-8y_o^4)}{(2y_o^2)^3} & \dfrac{-2\epsilon_1 x_o(-4y_o^4)}{(2y_o^2)^3} \\ \dfrac{-2\epsilon_1 x_o(-4y_o^4)}{(2y_o^2)^3} & \dfrac{2\epsilon_2 y_o^2(-2y_o^2)}{(2y_o^2)^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2\epsilon_2}{y_o} & \dfrac{\epsilon_1 x_o}{y_o^2} \\ \dfrac{\epsilon_1 x_o}{y_o^2} & \dfrac{-\epsilon_2}{2y_o^2} \end{pmatrix} \quad .$$

Toujours suivant [14.6] on détermine une base de $\ker\big((Dg)(\epsilon_1 x_o, \epsilon_2 y_o)\big)$ dont la matrice est $(2\epsilon_1 x_o, 2\epsilon_2 y_o)$ (17.46). Le vecteur $f_1 = (\epsilon_2 y_o, -\epsilon_1 x_o)$ est une base pour cette sous-espace, ce qui nous donne pour la matrice $\widehat{H}_{11}$:

$$\widehat{H}_{11} = \begin{pmatrix}\epsilon_2 y_o & -\epsilon_1 x_o\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{-2\epsilon_2}{y_o} & \dfrac{\epsilon_1 x_o}{y_o^2} \\ \dfrac{\epsilon_1 x_o}{y_o^2} & \dfrac{-\epsilon_2}{2y_o^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_2 y_o \\ \\ -\epsilon_1 x_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon_2 \dfrac{(2y_o+1)^2}{2y_o} \end{pmatrix} \ .$$

Il s'ensuit que les points $(\pm x_o, y_o)$ sont des maxima locaux pour $f|_M$ et que les points $(\pm x_o, -y_o)$ sont des minima locaux pour $f|_M$.

Pour déterminer si ces extrema locaux sont globaux, on calcule la valeur en chaque point :

$$f(0, \epsilon R) = 0 \qquad , \qquad f(\epsilon_1 x_o, \epsilon_2 y_o) = \frac{\epsilon_2\, y_o^2}{2\, y_o^2} = \tfrac{1}{2}\,\epsilon_2 \ .$$

Si on ne réfléchit pas trop, on en tire la conclusion que les points $(\pm x_o, -y_o)$ sont deux minima globaux pour $f|_M$, que les points $(\pm x_o, y_o)$ sont deux maxima globaux, que $(0, -R)$ est un maximum local et $(0, R)$ un minimum local (toujours pour $f|_M$). **Mais** … il y a deux phénomènes qui pourraient invalider cette conclusion. Comme déjà remarqué dans [14.6], l'analyse des extrema de la restriction $f|_M$ via les points critiques de F se fait sous l'hypothèse qu'on a $\mathrm{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$. Il est donc tout-à-fait possible qu'il existe un extremum local de $f|_M$ dans un point a pour lequel on n'a pas $\mathrm{rang}\big((Dg)(a)\big) = p$. Heureusement pour nous, cela ne peut pas arriver dans le cas en considération : un point (x, y) vérifiant $g(x, y) = R^2$ ne peut pas être l'origine $(0, 0)$ et donc dans un tel point on aura forcément $\mathrm{rang}\big((Dg)(x, y)\big) = \mathrm{rang}(2x, 2y) = 1$ (autrement dit, 0 est une valeur régulière de$g$ et M est une sous-variété de $\mathbf{R}^2$). La conclusion que si $f|_M$ admet un extremum en a, alors c'est un des 6 points trouvés est donc justifié.

Pour autant, on n'est toujours pas sûr que la conclusion concernant la globalité est justifié ! Il suffit de penser à la fonction $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x+1)^2$ qui admet trois points critiques : $x = \pm 1$, où c'est un minimum local, et $x = 0$, où c'est un maximum local. On a évidemment $1 = f(0) > f(\pm 1) = 0$, mais $x = 0$ n'est pas un maximum global, car on a $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$. Pour écarter une telle possibilité, on remarque que l'ensemble M est borné (car pour tout $(x, y) \in M$ on a $\|(x, y)\|_2 = R$) et fermé (comme image réciproque du fermé $\{0\} \subset \mathbf{R}$ par l'application continue g). M est donc un compact. La fonction f étant continue, l'application $f : M \to \mathbf{R}$ atteint ses bornes : il exists $a_\pm \in M$ tel que pour tout $b \in M$ on a

$$f(a_-) \leqslant f(b) \leqslant f(a_+) \ .$$

C'est avec cette remarque qu'on peut finalement conclure que oui, $(\pm x_o, -y_o)$ sont deux minima globaux et $(\pm x_o, y_o)$ sont deux maxima globaux pour $f|_M$.

Si on veut trouver les extrema de $f|_M$ en résolvant l'équation $g(x, y) = R^2$, il faut faire un choix. Commençons avec le choix $x = \epsilon\sqrt{R^2 - y^2}$ ($\epsilon = \pm 1$), ce qui n'est pas le plus judicieux vu les résultats précédents, car les points $(0, \pm R)$ ont $y = \pm R$, donc ce sont des points où la fonction $\sqrt{R^2 - y^2}$ n'est pas différentiable. Par contre, ce choix semble plus facile, car il évite des racines carrées dans la fonction h définie par

$$h(y) = f(\epsilon\sqrt{R^2 - y^2}, y) = \frac{(R^2 - y^2)y}{(R^2 - y^2)^2 + y^2} = \frac{R^2\, y - y^3}{y^4 + (1 - 2R^2)\, y^2 + R^4} \quad .$$

On calcule donc

$$\begin{aligned} h'(y) &= \frac{(R^2 - 3y^2)\big(y^4 + (1 - 2R^2)\, y^2 + R^4\big) - (R^2\, y - y^3)\big(4y^3 + (2 - 4R^2)y\big)}{\big(y^4 + (1 - 2R^2)\, y^2 + R^4\big)^2} \\ &= \frac{y^6 - (R^2 + 1)y^4 - R^2(R^2 + 1)y^2 + R^6}{\big(y^4 + (1 - 2R^2)\, y^2 + R^4\big)^2} \\ &= \frac{(y^2 + R^2)\big(y^4 - (2R^2 + 1)y^2 + R^4\big)}{\big(y^4 + (1 - 2R^2)\, y^2 + R^4\big)^2} \quad . \end{aligned}$$

L'équation $h'(y) = 0$ se réduit donc à l'équation

$$y^4 - (2R^2 + 1)y^2 + R^4 = 0 \quad ,$$

ce qui donne

$$y^2 = \frac{2R^2 + 1 \pm \sqrt{(2R^2 + 1)^2 - 4R^4}}{2} = \left(\frac{\sqrt{1 + 4R^2} \pm 1}{2}\right)^2 \quad .$$

Étant donné qu'on doit avoir $x^2 = R^2 - y^2 \geqslant 0$, les solutions

$$y = \pm\, \frac{\sqrt{1 + 4R^2} - 1}{2} \equiv \pm y_o$$

s'imposent.

Pour savoir s'il concerne un maximum ou minimum local, il faut calculer $h''(y)$ en ces deux points. Calculer la dérivée seconde est un travail longue, mais ... il nous faut seulement sa valeur au deux points critiques ! On remarque donc qu'on peut écrire

$$h(y) = \frac{u(y) \cdot v(y)}{w(y)^2}$$

avec

$$u = y^2 + R^2 \quad , \quad v = y^4 - (2R^2 + 1)y^2 + R^4 \quad , \quad w = y^4 + (1 - 2R^2)\, y^2 + R^4$$

et que nos deux points critiques sont des solutions de l'équation $v(y) = 0$. Le calcul de h'' donne

$$h'' = \frac{(u'\, v + u\, v')\, w - 2w'\, u\, v}{w^3}$$

et donc pour nos deux points critiques on trouve

$$h''(\epsilon y_o) = \frac{u(\epsilon y_o) \cdot v'(\epsilon y_o)}{w(\epsilon y_o)^2} \quad .$$

Mais u et w sont positives et c'est seulement le signe de $h''(\epsilon y_o)$ qui nous intéresse. Autrement dit, on s'intéresse au signe de

$$v'(\epsilon y_o) = 4(\epsilon y_o)^3 - (4R^2 + 2)(\epsilon y_o) = (2\epsilon y_o)(2y_o^2 - 2R^2 - 1) = -2\epsilon y_o\sqrt{4R^2 + 1} \quad .$$

Pour $\epsilon = 1$ le signe est négatif, donc il s'agit d'un maximum local et pour $\epsilon = -1$ ce signe est positif et donc il s'agit d'un minimum local. En se rappelant qu'on a $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$, on retrouve le résultat que les points $(\pm x_o, y_o)$ sont des maxima locaux et que les points $(\pm x_o, -y_o)$ sont des minima locaux pour $f|_M$.

Mais notre analyse ne couvre pas les points $(0, \pm R)$ et donc il est possible que ces points sont aussi des extrema ! On est donc obligé de faire “aussi” le choix $y = \epsilon\sqrt{R^2 - x^2}$, ce qui nous amène à considérer la fonction

$$h(x) = f\big(x, \epsilon\sqrt{R^2 - x^2}\,\big) = \frac{\epsilon x^2\sqrt{R^2 - x^2}}{x^4 - x^2 + R^2} \ .$$

Si on ne réfléchit pas, on entame donc le calcul de $h'(x)$, on cherche les zéros de h' et on termine avec le calcul de h'' pour les points critiques trouvés. À cause de la racine carrée, ce travail risque d'être plus long que le travail précédent. Si on réfléchit bien, on sait déjà que pour $x \neq 0$ on aura $y \in \,]-R, R[$ et pour ces points on connaît déjà les points critiques par notre analyse précédente. C'est donc seulement le point $x = 0$ qui nous intéresse et plus précisément la question si c'est un extremum. Et pour cela, un “simple” développement limité suffit ! La fonction

$$z \mapsto \frac{\sqrt{R^2 - z}}{z^2 - z + R^4}$$

étant de classe C^∞ dans un voisinage de $z = 0$, il est (presque) immédiat qu'on a

$$h(x) = \frac{\epsilon x^2}{R} + x^2\,\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Il s'ensuit immédiatement que h présente un minimum local en $x = 0$ pour $\epsilon = 1$ et un maximum local dans le cas $\epsilon = -1$. Ce qui dit que $(0, R)$ est un minimum local pour $f|_M$ et que $(0, -R)$ est un maximum local, conformément au résultats trouvés précédemment.

Solution de [16.138]. • (i) : Si on considère la fonction $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $g(x, y, z) = xyz$, alors selon [13.12] S sera une sous-variété de dimension 2 de $\mathbf{R}^3$ si 1 est une valeur régulière de g. Si on calcule Dg on trouve

$$(Dg)(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

et pour que le rang de $(Dg)(x, y, z)$ soit 0, il faut avoir $xy = xz = yz = 0$. Mais ceci entraîne qu'on a $xyz = 0$, et donc la seule valeur non-régulière est 0. Ainsi S est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ de dimension $2 = 3 - 1$.

• (ii) : Pour $(x, y, z) \in S$ on a forcément $x \neq 0$ et $y \neq 0$, ainsi que $z = (xy)^{-1}$. On peut donc définir l'application $\psi : S \to \{\pm 1\}^2 \times \mathbf{R}^2$ par

$$\psi(x, y, z) = \Big(\ \frac{x}{|x|}\ ,\ \frac{y}{|y|}\ ,\ \ln(\,|x|\,)\ ,\ \ln(\,|y|\,)\ \Big) \ .$$

Cette application est bijective et sa réciproque $\varphi : \{\pm 1\}^2 \times \mathbf{R}^2 \to S \subset \mathbf{R}^3$ est donnée par

$$\varphi(\epsilon_1, \epsilon_2, u, v) = (\epsilon_1\ \mathrm{e}^u, \epsilon_2\ \mathrm{e}^v, \epsilon_1\,\epsilon_2\ \mathrm{e}^{-u-v}) \ .$$

Il s'ensuit immédiatement que les quatre application $\varphi_{\epsilon_1,\epsilon_2} : \mathbf{R}^2 \to S$, $\varepsilon_i = \pm 1$ définies comme $\varphi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(u, v) = \varphi(\epsilon_1, \epsilon_2, u, v)$ sont continues. L'image d'un ensemble connexe (à savoir $\mathbf{R}^2$) par une application continue (à savoir $\varphi_{\epsilon_1,\epsilon_1}$) étant connexe, on en déduit que les quatre parties $\varphi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(\mathbf{R}^2)$ de S sont connexes.

D'autre part, les 8 ouverts $U_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3} \subset \mathbf{R}^3$, $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ définis comme

$$U_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3} = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \epsilon_1 x > 0\,,\ \epsilon_2 y > 0\,,\ \epsilon_3 z > 0\,\}$$

sont 2 à 2 disjoints et on a l'inclusion $\varphi_{\epsilon_1,\epsilon_1}(\mathbf{R}^2) \subset U_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_1\epsilon_2}$. Étant donné qu'on a $S = \varphi_{1,1}(\mathbf{R}^2) \cup \varphi_{-1,1}(\mathbf{R}^2) \cup \varphi_{1,-1}(\mathbf{R}^2) \cup \varphi_{-1,-1}(\mathbf{R}^2)$, il s'ensuit que ces 4 images forment les 4 composantes connexes de S. Pour simplifier (un peu) la notation, on introduit les quatre ensembles S_+, S_x, S_y, S_z (deux à deux disjoints) comme

$$S_+ = \varphi_{1,1}(\mathbf{R}^2) \quad , \quad S_x = \varphi_{1,-1}(\mathbf{R}^2) \quad , \quad S_y = \varphi_{-1,1}(\mathbf{R}^2) \quad , \quad S_z = \varphi_{-1,-1}(\mathbf{R}^2) \ ,$$

de sorte qu'on a

$$(1,1,1) \in S_+ \qquad S = S_+ \cup S_x \cup S_y \cup S_z \ .$$

On remarquera que les éléments de $\mathbf{R}^3$ dans S_+ ont leurs trois composantes positives, ceux de S_x on seulement la première composante positive, ceux de S_y seulement la deuxième composante positive et ceux de S_z seulement la troisième composante positive.

• (iii) : Soit $M > 0$ arbitraire. Alors il faut montrer l'existence d'un $R > 0$ tel que

$$(x,y,z) \in S_+ \quad \text{et} \quad \|(x,y,z)\| > R \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x,y,z)| > M \ .$$

On commence avec la remarque qu'on a pour tout $(x,y,z) \in S_+$ la propriété $x,y,z > 0$. Ensuite, en utilisant la norme $\|\cdot\|_\infty$, on remarque qu'on a l'implication

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in S_+ \quad \text{et} \quad \|(x,y,z)\|_\infty \equiv \max(x,y,z) \geqslant R& \\ \Longrightarrow \qquad \min(x,y,z) \leqslant R^{-1/2}& \ , \end{aligned}$$

simplement parce qu'on a, pour $x,y,z > 0$ vérifiant $xyz = 1$, l'inégalité

$$1 = xyz \geqslant \big(\min(x,y,z)\big)^2 \cdot \max(x,y,z) \ .$$

Et finalement on constate qu'on a, toujours pour $x,y,z > 0$ vérifiant $xyz = 1$, l'inégalité

$$f(x,y,z) = xyz \cdot \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{\min(x,y,z)} \ .$$

Il s'ensuit qu'on a montré l'implication

$$(17.47) \qquad (x,y,z) \in S_+ \quad \text{et} \quad \|(x,y,z)\|_\infty \geqslant R \qquad \Longrightarrow \qquad f(x,y,z) > \sqrt{R} \ .$$

Pour le $M > 0$ arbitraire, il suffit donc de prendre $R = M^2$ pour pouvoir conclure qu'on a bien $\lim_{\|v\|\to\infty} |f(v)| = \infty$.

• (iv) : Le fait que 1 est une valeur régulière pour la fonction g définie ci-dessus implique (en utilisant [14.2] et [14.4]) que tout point extrémal de $f|_{S_+}$ est un point critique de la fonction $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ définie par

$$F(x,y,z,\lambda) = xy + yz + xz - \lambda(xyz - 1) \ .$$

On a

$$(DF)(x,y,z,\lambda) = (y + z - \lambda yz, x + z - \lambda xz, x + y - \lambda xy, 1 - xyz) \ ,$$

et donc les points critiques de F sont les solutions du système d'équations

$$\begin{cases} y + z = \lambda yz \\ x + z = \lambda xz \\ x + y = \lambda xy \\ \quad xyz = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad \lambda = y^{-1} + z^{-1} \\ x^{-1} = y^{-1} \\ x^{-1} = z^{-1} \\ xyz = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \ . \end{cases}$$

La fonction f restreinte à S n'a donc qu'un seul point critique $(1,1,1)$ qui appartient à S_+.

Pour en déduire que ce point critique est un minimum global pour $f|_{S_+}$ on raisonne comme suit. L'ensemble $S = g^{-1}(1)$ est un fermé comme image réciproque du fermé $\{1\} \subset \mathbf{R}$ par l'application continue g, donc sa composante connexe S_+ est aussi un fermé, et donc $S_+ \cap \overline{B_{16}(0)}$ est fermé et borné, donc un compact. Il s'ensuit que l'application continue f restreinte à $S_+ \cap \overline{B_{16}(0)}$ atteint sa valeur minimale en un point $a \in S_+ \cap \overline{B_R(0)}$. D'autre part, dans (iii) on a montré en particulier que pour $(x, y, z) \in S_+$ avec $\|(x, y, z)\|_\infty = 16$ on a $f(x, y, z) > 4 > 3 = f(1, 1, 1)$ (17.47). Il s'ensuit que le point a appartient à la boule ouverte $B_{16}(0)$. Mais 1 est une valeur régulière pour g, donc $\mathrm{rang}\big((Dg)(a)\big) = 1$. Selon [14.2] et [14.4] (avec l'ouvert $U = B_{16}(0)$) il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que (a, λ) est un point critique de F. On a donc forcément $a = (1, 1, 1)$. Et on conclut en invoquant encore une fois l'implication (17.47), qui nous dit que pour $b \in S_+$ avec $\|b\|_\infty > 16$ on a forcément $f(b) > f(1, 1, 1)$, ce qui montre que ce minimum est global sur S_+.

Si on veut déterminer la nature de ce point critique $(1, 1, 1, \lambda = 2)$ par [14.6], on calcule la matrice du Hessien partiel

$$
\begin{aligned}
H_{ij} = H(e_i, e_j) &= \big((D^2 f)(x, y, z)\big)(e_i, e_j) - 2 \cdot \big((D^2 g)(x, y, z)\big)(e_i, e_j) \\
&= \begin{pmatrix}
\big(\partial_1\partial_1(f-2g)\big)(x,y,z) & \big(\partial_1\partial_2(f-2g)\big)(x,y,z) & \big(\partial_1\partial_3(f-2g)\big)(x,y,z) \\
\big(\partial_2\partial_1(f-2g)\big)(x,y,z) & \big(\partial_2\partial_2(f-2g)\big)(x,y,z) & \big(\partial_2\partial_3(f-2g)\big)(x,y,z) \\
\big(\partial_3\partial_1(f-2g)\big)(x,y,z) & \big(\partial_3\partial_2(f-2g)\big)(x,y,z) & \big(\partial_3\partial_3(f-2g)\big)(x,y,z)
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1-2z & 1-2y \\ 1-2z & 0 & 1-2x \\ 1-2y & 1-2x & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Au point $(1, 1, 1)$ on trouve donc la matrice

$$
H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .
$$

Il faut aussi calculer une base de $\ker\big((Dg)(1, 1, 1)\big)$:

$$
(Dg)(x, y, z) = (yz, xz, xy) \quad \Rightarrow \quad (Dg)(1, 1, 1) = (1, 1, 1) \quad \Rightarrow
$$

$$
f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ base de } \ker\big((Dg)(1, 1, 1)\big) .
$$

Et finalement on calcule la matrice $\widehat{H}_{st}$:

$$
(\widehat{H}_{st}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .
$$

Ses valeurs propres sont 1 et 3, ce qui implique que $\widehat{H}$ est définie positive et donc ce point critique est un minimum local de $f|_S$. (On remarquera que la matrice H a comme valeurs propres 1, 1 et -2, et donc H elle-même n'est pas définie positive. On remarquera aussi que le critère de Sylvester ne permet pas de conclure pour H, car on aura $M_1 = 0$, $M_2 = -1$ et $M_3 = -2$. Par contre, le polynôme caractéristique de H est $-\lambda^3 + 3\lambda - 2$ qui a 2 changement de signes dans ses coefficients ; la règle des signes de Descartes nous dit donc qu'il y a deux valeurs propres strictement positives. Étant donné que 0 n'est pas racine, la troisième valeur propre est strictement négative.)

• (v) : Pour $(x, y, z) \in S$ on a $f(x, y, z) = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$. Pour la composante connexe $S_y\varphi_{-1,1}(\mathbf{R}^2)$ (voir (ii)) on prend d'abord $x = -M$, $y = M^{-1}$ et $z = -1$, ce qui nous donne

$$f(x, y, z) = -M^{-1} + M - 1 \quad .$$

En prenant la limite $M \to \infty$ on a directement le résultat

$$\sup \{ f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in S' \} = +\infty \quad .$$

En prenant $x = -M$, $y = M^{-1}$ et $z = -1$ et en prenant la limite $M \to \infty$, on trouve de la même façon

$$\inf \{ f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in S' \} = -\infty \quad .$$

Les deux autres composantes connexes S_X et S_z se traitent de la même manière.

Étant donné que S' est connexe, l'image $f(S') \subset \mathbf{R}$ est aussi connexe, c'est-à-dire, un intervalle. Par le résultat qu'on vient de montrer, on doit donc avoir $f(S') = \mathbf{R}$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il s'ensuit que $f^{-1}(0) \cap S'$ n'est pas vide. D'autre part, S' est un fermé, étant une composante connexe de l'ensemble fermé S.

• (vi) : Pour montrer que Γ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbf{R}^3$, on regarde l'application $G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$G(x, y, z) = (xyz, xy + yz + xz)$$

et on constate qu'on a $\Gamma = G^{-1}(1, 0)$. Selon [13.12], il suffit donc de vérifier que $(1, 0)$ est une valeur régulière pour G. On calcule donc :

$$(DG)(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ y + z & x + z & x + y \end{pmatrix}$$

et il faut vérifier que son rang est toujours 2 sur Γ. Mais pour que son rang soit 2, il suffit que ses deux lignes ne soient pas proportionnelles. La première ligne ne pouvant pas être le "vecteur" nul, il faut donc vérifier que pour un point de Γ il n'existe pas $\lambda \in \mathbf{R}$ tel qu'on a

$$(y + z, x + z, x + y) = \lambda \cdot (yz, xz, xy) \quad .$$

Mais avec la condition $xyz = 1$ on se retrouve avec le système d'équations pour un point critique de F en (iv). L'unique solution de ce système est le point $(1, 1, 1)$ qui n'appartient pas à Γ. Il s'ensuit que pour tout point $(x, y, z) \in G^{-1}(1, 0)$ on a $\operatorname{rang}\big((DG)(x, y, z)\big) = 2$, ce qui montre avec [13.12] que Γ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbf{R}^3$.

• (vii) : L'ensemble Γ est déterminé par les deux équations

$$xyz = 1 \qquad \text{et} \qquad xy + yz + xz = 0 \quad .$$

Si on résout y et z en fonction de x, on obtient

$$y = \frac{-1 + \epsilon\sqrt{1 - 4x^3}}{2x^2} \quad , \qquad z = \frac{-1 - \epsilon\sqrt{1 - 4x^3}}{2x^2} \quad ,$$

valable pour tout $x \leqslant 4^{-1/3}$, $x \neq 0$, $\epsilon = \pm 1$. On obtient donc quatre (bouts de) courbes :

$$\gamma_\epsilon^+ :]0, 2^{-2/3}] \to \mathbf{R}^3 \quad , \quad \gamma_\epsilon^+(t) = \left(t \ , \ \frac{-1+\epsilon\sqrt{1-4t^3}}{2t^2} \ , \ \frac{-1-\epsilon\sqrt{1-4t^3}}{2t^2} \right)$$
$$\gamma_\epsilon^- :]-\infty, 0[\to \mathbf{R}^3 \quad , \quad \gamma_\epsilon^-(t) = \left(t \ , \ \frac{-1+\epsilon\sqrt{1-4t^3}}{2t^2} \ , \ \frac{-1-\epsilon\sqrt{1-4t^3}}{2t^2} \right) \ .$$

Il est quasi-immédiat qu'on a les inclusions

$$\gamma_\epsilon^+\big(\,]0, 2^{-2/3}]\,\big) \subset S_x \quad , \quad \gamma_1^-\big(\,]-\infty, 0[\,\big) \subset S_y \quad , \quad \gamma_{-1}^-\big(\,]-\infty, 0[\,\big) \subset S_z \ .$$

Un intervalle étant connexe, ces images sont aussi connexes et donc (parce que S_x, S_y est S_z sont des fermés disjoints) les images $\gamma_\epsilon^-\big(]-\infty, 0[\big)$ forment deux composantes connexes de Γ. Leur première composante n'étant pas bornée (t tend vers $-\infty$), ces deux composantes connexes de Γ ne sont pas bornées.

Le deux images connexes $\gamma_\epsilon^+\big(\,]0, 2^{-2/3}]\big)$ ne sont pas disjoints : ils ont le point $\gamma_1^+(2^{-2/3}) = (2^{-2/3}, -2^{1/3}, -2^{1/3}) = \gamma_{-1}^+(2^{-2/3})$ en commun. Il s'ensuit que la réunion

$$\gamma_1^+\big(\,]0, 2^{-2/3}]\big) \cup \gamma_{-1}^+\big(\,]0, 2^{-2/3}]\big) \subset S_x$$

est la troisième composante connexe de Γ (forcément disjointe des deux autres, car contenue dans S_x qui est disjoint de S_y et S_z). Pour montrer qu'elle aussi n'est pas bornée, on peut vérifier que

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{-1-\sqrt{1-4t^3}}{2t^2} = -\infty \ .$$

Mais on peut aussi faire la remarque que les équations qui déterminent Γ sont symétrique dans les trois variables et qu'on peut donc aussi bien résoudre x et z en fonction de y, et cela avec les mêmes formules. Ainsi on montre facilement que les trois composantes connexes de Γ sont données par les images des trois courbes définies sur $]-\infty, 0[$ par

$$\begin{aligned}
\gamma_1^-(t) \equiv \gamma_1(t) &= \left(t \ , \ \frac{-1+\sqrt{1-4x^3}}{2x^2} \ , \ \frac{-1-\sqrt{1-4x^3}}{2x^2} \right) \in S_y \\
\gamma_2(t) &= \left(\frac{-1-\sqrt{1-4x^3}}{2x^2} \ , \ t \ , \ \frac{-1+\sqrt{1-4x^3}}{2x^2} \right) \in S_z \\
\gamma_3(t) &= \left(\frac{-1+\sqrt{1-4x^3}}{2x^2} \ , \ \frac{-1-\sqrt{1-4x^3}}{2x^2} \ , \ t \right) \in S_x \ .
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que ces trois courbes ne sont pas bornées.

Bibliographie

Pour écrire ce texte, j'ai consulté plusieurs ouvrages pour en copier ce qui me convenait. La liste complète se trouve ci-dessous. C'est L. Blanc-Centi et E. Fricain qui m'ont fourni la plupart des exercices. J'ai aussi profité de nombreux conseils de V. Thilliez, que je remercie chaleureusement..

[Ber13] Patrick Bernard, *Calcul différentiel*, polycopié, ENS Paris, 2013.

[Car67] Henri Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1967.

[Don00] Paul Donato, *Calcul différentiel pour la licence*, Dunod, Paris, 2000.

[Duv12] A. Duval, *Calcul différentiel et équations différentielles*, polycopié, Université de Lille I, 2012.

[Gen84] Angelo Genocchi, *Calcolo differentiale e principii di calcolo integrale,* publicato con aggiunte del Dr. Giuseppe Peano, Fratelli Bocca, Torino, 1884.

[HW96] E. Hairer and G. Wanner, *Analysis by its history*, UTM, Springer-Verlag, New York, 1996.

[Kom06] Vilmos Komornik, *Another short proof of Descartes' rule of signs*, The Am. Math. Monthly **113** (2006), 829–830.

[Lan97] Serge Lang, *Undergraduate analysis*, second ed., UTM, Springer, New York, 1997.

[LFA77] Jacqueline Lelong-Ferrand and Jean-Marie Arnaudiès, *Cours de mathématiques tome 2 : Analyse*, 4e ed., Dunod, Paris, 1977.

[Pea57] Giuseppe Peano, *« Annotazioni » al trattato di calcolo del 1884*, Opere scelte I, Analisi Matematica - Calcolo Numerico (Roma) (a cura dell'UMI, Ugo Cassina, Giovanni Sansone, and Alessandro Terracini, eds.), Edizioni Cremonese, 1957, pp. 47–73.

[Wan04] Xiaoshen Wang, *A simple proof of Descartes' rule of signs*, The Am. Math. Monthly **111** (2004), 525–526.

Index