

INTRODUCTION AUX DIFFÉRENCES FINIES ET AUX ÉLÉMENTS FINIS

CHAPITRE 2

Différences finies pour les équations différentielles ordinaires

- 1) Schémas aux différences : première approche
- 2) Test des schémas d'Euler explicite, implicite et de Crank Nicolson
- 3) Exemples de méthodes multipas
- 4) Schémas à un pas explicites précis
- 5) Ordre d'un schéma aux différences
- 6) Memorandum

II. DIFFÉRENCES FINIES POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

1) Schémas aux différences : première approche

- On s'intéresse à un modèle différentiel très général, qui peut toujours s'écrire sous la forme :

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = f(u)$$

$$(2) \quad u(0) = u_0$$

où $u(\bullet)$ est une fonction inconnue qui prend ses valeurs dans \mathbb{R}^m (m allant de 1 à plusieurs millions en pratique) et f une fonction donnée, en général non linéaire de u :

$$(3) \quad \mathbb{R}^m \ni u \rightarrow f(u) \in \mathbb{R}^m$$

assez régulière pour que les conditions (1) (2) garantissent existence et unicité d'une solution $u(\bullet)$ pour t appartenant à un intervalle $[0, T[$, avec T égal à $+\infty$ dans de nombreux cas pratiques.

On suppose qu'on ne dispose **pas** de solution "analytique" du modèle (1) (2) et la méthode des différences finies propose une approche pour évaluer en pratique des valeurs voisines des valeurs exactes, représentant une réalité mathématique hors d'atteinte du calcul numérique.

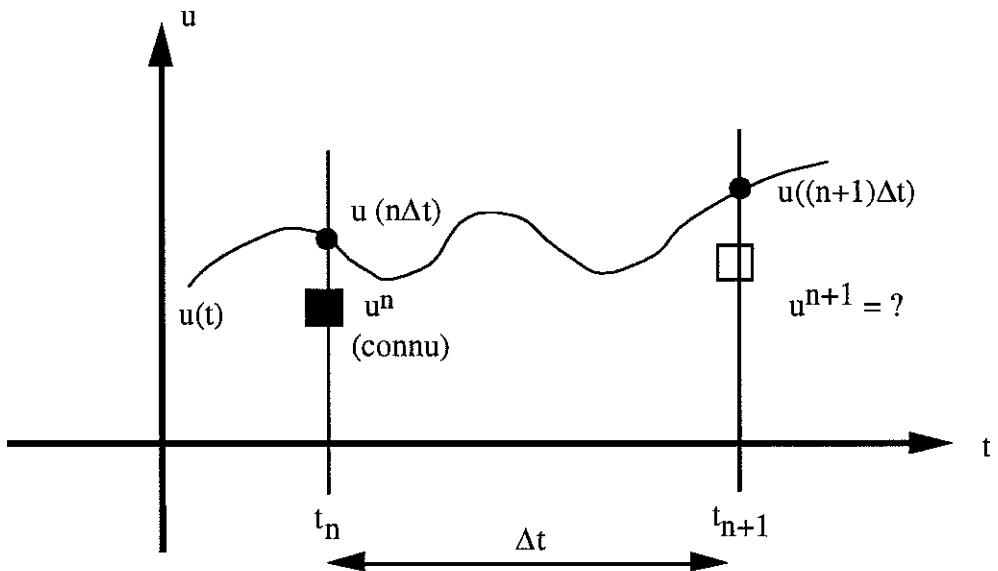
- On se donne un pas de temps $\Delta t > 0$ et la méthode des différences finies consiste à rechercher une solution approchée de $u(\bullet)$ aux **seuls** instants $t_n = n\Delta t$:

$$(4) \quad t_m - t_n = \Delta t \quad n \geq 0 ; \Delta t > 0$$

on introduit la notation classique :

$$(5) \quad u^n \approx u(n\Delta t)$$

Le problème qui se pose est le suivant : connaissant une approximation u^n de $u(t_n)$, comment calculer une nouvelle approximation au pas de temps suivant, pour u^{n+1} ?



- L'idée la plus simple consiste à écrire la formule de Taylor autour de $u(t_n)$ pour développer $u(t_{n+1})$ autour du point précédent :

$$(6) \quad u(t_{n+1}) = u(t_n) + \Delta t \frac{du}{dt}(t_n) + O(\Delta t^2).$$

Compte tenu de l'équation différentielle (1), la formule de Taylor peut encore s'écrire :

$$(7) \quad u(t_{n+1}) = u(t_n) + \Delta t f(u(t_n)) + O(\Delta t^2).$$

Le schéma d'**Euler explicite** (forward Euler en anglais) consiste à remplacer la relation (7), exacte pour la solution du problème différentiel (1) (2), par la relation obtenue en tronquant le développement (7) au premier ordre en temps. On pose :

$$(8) \quad u^{n+1} = u^n + \Delta t f(u^n) \quad \text{Euler explicite.}$$

Nous disons (et justifierons plus loin cette expression) que le schéma numérique est du premier ordre en temps. Par ailleurs, il est **explicite**, ce qui signifie que si u^n est connu (ce qui est le cas à l'instant initial $n = 0$; il suffit de prendre $u^0 = u_0$), alors u^{n+1} est calculé très simplement à partir de celui-ci et de la fonction f .

On peut aussi écrire la formule de Taylor "à l'envers" (backward), c'est-à-dire essayer de retrouver la valeur (supposée connue) u^n à partir de la valeur (supposée inconnue) u^{n+1} :

$$(9) \quad u(t_n) = u(t_{n+1}) - \Delta t f(u(t_{n+1})) + O(\Delta t^2)$$

Si on tronque ce développement, on définit un nouveau schéma aux différences pour calculer u^{n+1} à partir de la valeur u^n :

$$(10) \quad u^{n+1} - \Delta t f(u^{n+1}) = u^n \quad \text{Euler implicite.}$$

Ce schéma, encore du premier ordre de précision, est un schéma dit **implicite** ; en effet, il ne fournit qu'une **équation** (qu'il faut ensuite résoudre numériquement à l'aide de techniques classiques comme l'algorithme de Newton par exemple) relative à l'inconnue u^{n+1} , et non une "formule" comme à la relation (8). Nous verrons que ce défaut pratique est en fait compensé par d'autres propriétés (stabilité).

- Si on essaie de construire un schéma numérique plus précis, l'idée naturelle est de pousser plus loin les développements de Taylor (7) et (9) :

$$(11) \quad u(t_{n+1}) = u(t_n) + \Delta t f(u(t_n)) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{d^2 u}{dt^2}(t_n) + O(\Delta t^3)$$

$$(12) \quad u(t_n) = u(t_{n+1}) - \Delta t f(u(t_{n+1})) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{d^2 u}{dt^2}(t_{n+1}) + O(\Delta t^3)$$

On remarque alors que pour la dérivée seconde, on a le développement très simple :

$$(13) \quad \frac{d^2 u}{dt^2}(t_{n+1}) = \frac{d^2 u}{dt^2}(t_n) + O(\Delta t)$$

qu'on reporte dans la relation (12) pour obtenir :

$$(14) \quad u(t_n) = u(t_{n+1}) - \Delta t f(u(t_{n+1})) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{d^2 u}{dt^2}(t_n) + O(\Delta t^3)$$

on retranche alors la relation (14) de la relation (12), ce qui nous donne, au troisième ordre près :

$$(15) \quad 2 [u(t_{n+1}) - u(t_n)] = \Delta t [f(u(t_n)) + f(u(t_{n+1}))]$$

Si on décide de tronquer ce développement de Taylor, on obtient un schéma numérique, dit de **Crank-Nicolson**, précis à l'**ordre deux**.

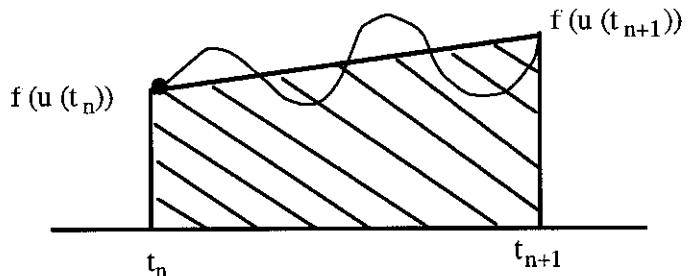
$$(16) \quad u^{n+1} - \frac{1}{2} \Delta t f(u^{n+1}) = u^n + \frac{1}{2} \Delta t f(u^n) \quad \text{Crank-Nicolson.}$$

La relation (16) est une équation d'inconnue u^{n+1} qui, comme pour le schéma d'Euler implicite, ne fournit pas une formule directement calculable pour la valeur approchée à l'instant intérieur. Le schéma de Crank-Nicolson est **implicite**.

- Une autre façon, plus directe, pour trouver facilement la relation (16), consiste à écrire la différence finie $u(t_{n+1}) - u(t_n)$ sous forme intégrale, compte tenu de la relation (1) :

$$(17) \quad u(t_{n+1}) = u(t_n) + \Delta t \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(\theta)) d\theta \right]$$

et de calculer l'intégrale au second membre de (17) par la formule du trapèze (on remplace $f(u(\theta))$ par son interpolé affine entre t_n et t_{n+1}) :



$$(18) \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(\theta)) d\theta = \frac{1}{2} [f(u(t_n)) + f(u(t_{n+1}))] + O(\Delta t^2).$$

Le schéma de Crank-Nicolson consiste alors simplement à tronquer la relation (18) et à injecter la formule approchée du trapèze au second membre de la relation (17). On retrouve alors la relation (16) qui définit le schéma numérique.

2) Test des schémas d'Euler explicite, Euler implicite et Crank-Nicolson pour le modèle $\frac{du}{dt} + \lambda u = 0 (\lambda > 0)$

Comme toujours devant une nouvelle approche, il est bon de critiquer les résultats obtenus sur une base de connaissances bien assises sur l'expérience. On considère donc le modèle différentiel très simple (mais fondamental !).

$$(19) \quad \frac{du}{dt} + \lambda u = 0 \quad (\lambda > 0)$$

dont la solution au temps $(n+1)\Delta t$ est bien connue en fonction de la solution à l'instant $n\Delta t$:

$$(20) \quad u(t_{n+1}) = u(t_n) e^{-\lambda \Delta t}.$$

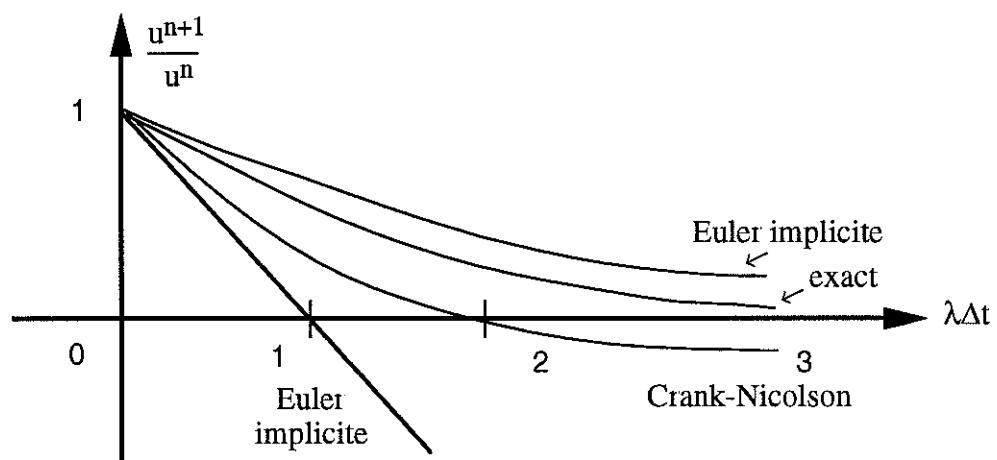
En remplaçant $f(u)$ par sa valeur $-\lambda u$ dans les relations (8), (10) et (16), on calcule les approximations fournies par les trois schémas introduits jusqu'ici :

$$(21) \quad u^{n+1} = u^n (1 - \lambda \Delta t) \quad \text{Euler explicite}$$

$$(22) \quad u^{n+1} = u^n \frac{1}{1 + \lambda \Delta t} \quad \text{Euler implicite}$$

$$(23) \quad u^{n+1} = u^n \frac{1 - \frac{\lambda \Delta t}{2}}{1 + \frac{\lambda \Delta t}{2}} \quad \text{Crank-Nicolson}$$

Il est intéressant de représenter sur une même graphe le rapport $\frac{u^{n+1}}{u^n}$ en fonction de la variable $x = \lambda \Delta t$.



- Il saute aux yeux que le quotient $\frac{u^{n+1}}{u^n}$ reste **positif** pour la solution exacte (20), quelle que soit la valeur de $\lambda \Delta t$, ce qui n'est **pas** le cas pour le schéma d'Euler explicite si $\lambda \Delta t > 1$ ou le schéma de Crank-Nicolson pour $\lambda \Delta t > 2$; nous voyons un champ $u(t)$ "physiquement" toujours positif qui devient négatif, ce qui n'est pas admissible ! Nous devons donc imposer une **condition de stabilité** sur le pas de temps, pour garantir cette cohérence :

- (24) Euler explicite $\lambda\Delta t \leq 1$
- (25) Euler implicite rien, pas de condition
- (26) Crank-Nicolson $\lambda\Delta t \leq 2$

Le schéma d'Euler implicite reste toujours utilisable quelle que soit la valeur du pas de temps selon le critère de maintien de la positivité qui nous a servi ici ; toutefois la propriété d'être implicite n'est pas un gage de stabilité pour tout pas de temps, ainsi qu'en témoigne le schéma de Crank-Nicolson à la relation (26).

- **Définition - Méthode à un pas**

Une méthode à un pas est une méthode de calcul de la solution approchée u^{n+1} au temps $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ telle que **seule** la donnée u^n , approximation de la solution au temps t_n , suffit pour définir la méthode. Dans le cas contraire, on parle d'une méthode multipas.

3) Exemples de méthodes multipas

- **Schéma instable**

On expose d'abord un mauvais choix qui conduit à une **instabilité numérique**, c'est-à-dire un comportement de la méthode d'approximation incompatible avec le comportement attendu de l'équation différentielle ordinaire $\frac{du}{dt} = f(u)$.

L'idée de la construction de ce schéma est identique à l'approche déjà vue plus haut ; on développe par la formule de Taylor u autour de t_n jusqu'aux instants t_{n-1} et t_{n+1} :

$$(27) \quad u(t_{n+1}) = u(t_n) + \Delta t f(u(t_n)) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{d^2 u}{dt^2}(t_n) + O(\Delta t^3)$$

$$(28) \quad u(t_{n-1}) = u(t_n) - \Delta t f(u(t_n)) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{d^2 u}{dt^2}(t_n) + O(\Delta t^3)$$

On retranche ensuite la relation (28) de (27), ce qui donne le développement limité suivant :

$$(29) \quad u(t_{n+1}) = u(t_{n-1}) + 2\Delta t f(u(t_n)) + O(\Delta t^3)$$

Le schéma numérique résulte alors de cette dernière relation : on néglige le reste, quitte à remplacer les valeurs $u(t_k)$ de la solution exacte par des valeurs approchées u^k :

$$(30) \quad u^{n+1} = u^n + 2\Delta t f(u^n).$$

Ce schéma est à **deux pas** puisqu'il faut connaître à la fois u^{n-1} et u^n pour calculer u^{n+1} , il est explicite [la relation (30) est une formule de calcul de u^{n+1} en fonction des données u^{n-1} et u^n] et il est d'ordre deux de précision.

- **Schéma d'Adams-Bashford**

Le choix qui conduit à une méthode stable a été proposé par **Adams-Bashford**. On part encore du développement de Taylor (27) mais on essaie alors d'exprimer la dérivée seconde $\frac{d^2u}{dt^2}(t_n)$ à l'aide de dérivées premières :

$$(31) \quad \frac{d^2u}{dt^2}(t_n) = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{du}{dt}(t_n) - \frac{du}{dt}(t_{n-1}) \right\} + 0(\Delta t)$$

$$(32) \quad \frac{d^2u}{dt^2}(t_n) = \frac{1}{\Delta t} (f(u(t_n)) - f(u(t_{n-1}))) + 0(\Delta t)$$

Quand on reporte la relation (32) dans le développement (27), on obtient la relation suivante :

$$(33) \quad u(t_{n+1}) = u(t_n) + \frac{3}{2} \Delta t f(u(t_n)) - \frac{\Delta t}{2} f(u(t_{n-1})) + 0(\Delta t^3)$$

qui, une fois tronquée, définit un schéma qui a exactement les mêmes caractéristiques que le schéma en plus haut à la relation (30), à deux pas, du second ordre de précision en temps, explicite ; c'est le schéma d'**Adams-Bashford d'ordre 2** (AB2 en abrégé) :

$$(34) \quad u^{n+1} = u^n + \frac{3}{2} \Delta t f(u^n) - \frac{1}{2} \Delta t f(u^{n-1}) \quad \text{Adams-Bashford d'ordre 2.}$$

Pour étudier de façon plus approfondie ces deux schémas, on les teste sur le modèle différentiel exponentiel très simple : $\frac{du}{dt} + \lambda u = 0$, avec λ strictement positif. Les relations (30) et (34) prennent alors la forme de deux **suites récurrentes linéaires à coefficients constants** :

$$(35) \quad u^{n+1} + 2\lambda\Delta t u^n - u^{n-1} = 0$$

$$(36) \quad u^{n+1} - \left(1 - \frac{3}{2}\lambda\Delta t\right) u^n - \frac{1}{2} \lambda\Delta t u^{n-1} = 0 \quad (\text{AB2})$$

on sait alors que l'ensemble des solutions de (35) [respectivement (36)] est un espace vectoriel de dimension deux, engendré par les solutions exponentielles de la forme :

$$(37) \quad u^n = s^n$$

où s est un nombre solution de l'équation (38) [respectivement (39)] :

$$(38) \quad s^2 + 2(\lambda\Delta t)s - 1 = 0$$

$$(39) \quad s^2 - \left(1 - \frac{3}{2}\lambda\Delta t\right)s - \frac{1}{2}\lambda\Delta t = 0 \quad (\text{AB2})$$

et dans le membre de droite de la relation (37), s^n désigne effectivement s , à la puissance n .

- Le calcul des racines de la relation (38) est élémentaire :

$$(40) \quad s_+ = \sqrt{1 + (\lambda\Delta t)^2} - \lambda\Delta t = 1 - \lambda\Delta t + O(\Delta t^2)$$

$$(41) \quad s_- = -\sqrt{1 + (\lambda\Delta t)^2} - \lambda\Delta t$$

et l'on remarque que le module de s_- est toujours strictement supérieur à 1 dès que $\lambda\Delta t > 0$:

$$(42) \quad |s_-| > 1 \quad \forall \Delta t > 0, \quad \text{si } \lambda > 0.$$

La solution générale du schéma (30) s'écrit donc :

$$(43) \quad u^n = \alpha(s_+)^n + \beta(s_-)^n$$

où α et β sont des nombres réels fixés. Pour $\lambda\Delta t$ assez petit, le module de s_+ reste inférieur à 1 (cf la relation (40)) alors que $(s_-)^n$ converge vers l'infini ($+\infty$ et $-\infty$ puisque $s_- < 0$), ce qui entraîne que la suite u^n définie par (43) est **non bornée** et prend des valeurs alternativement positives et négatives si n devient assez grand. Ceci contredit bien sûr le comportement exponentiellement décroissant de u^n au fur et à mesure que le temps $t_n = n\Delta t$ croît. Même si on choisit le couple (u^0, u^1) de sorte que le coefficient β soit nul, les **erreurs d'arrondis** qu'effectue la calculatrice électronique imposent de voir β comme une variable aléatoire, ce qui montre que, quitte à attendre assez longtemps, β est non nul et le terme $3(s_-)^n$ dans la relation (43) devient finalement dominant, et a le comportement décrit plus haut. Nous concluons que **le schéma (30) est instable** lorsqu'on essaie de l'utiliser sur l'équation modèle $\frac{du}{dt} + \lambda u = 0$, ce quelle que soit la valeur du pas de temps $\Delta t > 0$!

- On procède de façon analogue pour l'équation du second degré (39). Les racines de cette équation sont données par les relations :

$$(44) \quad s_+ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \lambda \Delta t \right) + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \lambda \Delta t + \frac{9}{4} (\lambda \Delta t)^2} = 1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t^2)$$

$$(45) \quad s_- = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \lambda \Delta t \right) + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \lambda \Delta t + \frac{9}{4} (\lambda \Delta t)^2} = -\frac{1}{2} \lambda \Delta t + O(\Delta t^2)$$

Le mode s_+ correspond au "mode physique" : si on prend $\beta = 0$ dans la relation (43), le rapport $\frac{u^{n+1}}{u^n}$ vaut s_+ qui est une approximation au premier ordre de $\exp(-\lambda \Delta t)$, compte tenu du développement limité proposé à la relation (44). Le mode s_- donné par la relation (45) est un **mode numérique parasite**, qui s'amortit tant que s_- reste de module strictement inférieur à 1, ce qui, si on se contente du développement donné à la relation (45), prend la forme :

$$(46) \quad \lambda \Delta t < 2.$$

Cette condition est en fait générale : il est clair, en prenant $s = 0$ dans la relation (39), que 0 est entre les deux racines s_- et s_+ , puis en prenant $s = -1$, que -1 est extérieur aux deux racines tant que $1 + \left(1 - \frac{3}{2} \lambda \Delta t \right) - \frac{1}{2} \lambda \Delta t > 0$, ce qui exprime la condition de stabilité générale.

$$(47) \quad \lambda \Delta t < 1.$$

Le schéma d'Adams Bashford est **conditionnellement stable** et une condition de type (47) relie le pas de temps à la dynamique du système différentiel étudié (constante de temps $1/\lambda$).

- Les schémas multipas souffrent des deux défauts suivants : d'une part l'**initialisation** demande, pour un schéma à deux pas, de connaître u^0 et u^1 , c'est-à-dire plus d'information que la seule condition initiale (2). D'autre part, il n'est pas possible, pour garder la précision du schéma, d'introduire un pas de temps variable Δt_n , avec :

$$(48) \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$$

et le pas de temps Δt **reste fixe** pour toute la simulation numérique. Ces défauts nous incitent à approfondir l'étude des schémas à un pas, en construisant des schémas à un pas, explicites et du second ordre de précision.

4) Schémas à un pas explicites précis

- Schéma d'Euler modifié

On part de la forme intégrale (17) de l'équation différentielle (1) entre les instants t_n et t_{n+1} , puis on calcule l'intégrale par une formule de quadrature précise au second ordre :

$$(49) \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(\theta)) d\theta = f\left(u(t_{n+\frac{1}{2}})\right) + O(\Delta t^2)$$

La valeur de u à l'instant intermédiaire $n + \frac{1}{2}$ est prédite par un développement de Taylor :

$$(50) \quad u(t_{n+\frac{1}{2}}) = u(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t f(u(t_n)) + O(\Delta t^2)$$

Si on tronque maintenant les relations (49) et (50), on définit le schéma d'Euler modifié :

$$(51) \quad \tilde{u}^{n+\frac{1}{2}} = u^n + \frac{1}{2} \Delta t f(u^n)$$

$$(52) \quad u^{n+1} = u^n + \Delta t f\left(\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}}\right).$$

Ce schéma est **explicite, d'ordre deux, et à un pas** : en remplaçant la relation (51) au sein de la relation (52), on a :

$$(53) \quad u^{n+1} = u^n + \Delta t f\left[u^n + \frac{1}{2} \Delta t f(u^n)\right]$$

ce qui montre que seule la connaissance de u^n est nécessaire pour calculer u^{n+1} .

- Schéma de Heun

L'idée est très voisine de celle qui a conduit au schéma de Crank-Nicolson. On développe l'intégrale du membre de droite de la relation (17) à l'aide de la formule des trapèzes (18) mais on remplace dans cette dernière relation u^{n+1} par la relation prédite à l'aide du schéma d'Euler explicite. Avec des formules algébriques, on a donc :

$$(54) \quad \tilde{u}^{n+1} = u^n + \Delta t f(u^n)$$

$$(55) \quad u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{2} (f(u^n) + f(\tilde{u}^{n+1}))$$

soit sous forme équivalente :

$$(56) \quad u^{n+1} = u^n + \frac{1}{2} \Delta t [f(u^n) + f(u^n + \Delta t f(u^n))]$$

Le schéma de Heun (56) est **explicite, à un pas et d'ordre deux**.

• Schéma de Runge-Kutta

Nous terminons cette introduction aux méthodes à un pas précises par le schéma de **Runge et Kutta d'ordre 4**, très populaire, malgré des défauts que le lecteur ne pourra juger qu'avec sa propre pratique.

On commence par développer l'intégrale au membre de droite de la relation (17) à l'aide de la formule de Simpson, qui consiste à remplacer la fonction à intégrer par un interpolé polynomial de degré deux :

$$(57) \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(\theta)) d\theta = \frac{1}{6} f(u(t_n)) + \frac{2}{3} f\left(u(t_{n+\frac{1}{2}})\right) + \frac{1}{6} f(u(t_{n+1})) + O(\Delta t^4)$$

Comme pour le schéma de Heun (qui est en fait un schéma de Runge et Kutta d'ordre deux), on remplace aux temps $t_{n+\frac{1}{2}}$ et t_{n+1} la fonction u par des approximations

calculées à l'aide du schéma d'Euler explicite et Euler modifié. Nous donnons les relations de définition de ces états intermédiaires sans commentaire particulier.

$$(58) \quad \tilde{u}^{n+\frac{1}{2}} = u^n + \frac{1}{2} \Delta t f(u^n)$$

$$(59) \quad \tilde{u}^{n+\frac{1}{2}} = u^n + \frac{1}{2} \Delta t f(\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}})$$

$$(60) \quad \tilde{u}^{n+1} = u^n + \Delta t f(\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}})$$

$$(61) \quad u^{n+1} = u^n + \frac{1}{6} \Delta t [f(u^n) + 2 f(\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}}) + 2 f(\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}}) + f(\tilde{u}^{n+1})]$$

Le schéma défini par les relations (58)-(61) est explicite, d'ordre 4 et conditionnellement stable (le pas de temps Δt doit être limité par une condition de type (47) pour garantir que les valeurs numériques calculées à l'aide de l'approximation gardent quel que soit $n \geq 0$ un sens physique).

5) Ordre d'un schéma aux différences

La notion d'ordre d'un schéma aux différences finies, employée jusque là de façon intuitive, admet une définition précise qui n'est pas très simple à exprimer ; c'est la raison pour laquelle elle intervient si tard dans ce chapitre.

On envisage une forme très générale de schéma pour approcher numériquement les solutions de l'équation (1), forme qui contient tous les exemples vus jusqu'ici.

$$(62) \quad \frac{1}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) = \phi_f (u^{n+1}, u^n, u^{n-1}, \dots, u^{n-p})$$

Les points de suspension indiquent que le schéma utilise les p instants précédents (schéma multipas d'ordre $p+1$, à un pas si $p = 0$). De plus, sous la forme (62) le schéma est implicite. A titre d'exercice, nous invitons le lecteur à expliciter la fonction ϕ_f pour le schéma de Runge-Kutta (58)-(61).

L'erreur de troncature $\tau(\Delta t)$ est obtenue en remplaçant dans la relation (62) les valeurs approchées u^{n+j} par les valeurs exactes $u(t_{n+j})$ de la solution de (1) aux différents instants.

Comme la solution exacte ne vérifie pas a priori la relation (62), celle-ci n'est plus vérifiée dans le remplacement proposé. Aussi on définit l'erreur de troncature $\tau(\Delta t)$ par la relation suivante :

$$(63) \quad \tau(\Delta t) \equiv \frac{1}{\Delta t} [u(t_{n+1}) - u(t_n)] - \phi_f(u(t_{n+1}), u(t_n), u(t_{n-1}), \dots, u(t_{n-p}))$$

On remarque que, sauf cas exceptionnel où l'équation (1) possède une solution analytique, l'erreur de troncature (63) ne peut pas se calculer par une formule analytique. Toutefois, on peut faire un développement limité de $\tau(\Delta t)$ quand Δt tend vers zéro. Lorsque $\tau(\Delta t)$ est de l'ordre de 0 (Δt^k) pour un certain entier k , ie :

$$(64) \quad \tau(\Delta t) = O(\Delta t^k) \quad \text{ordre } k,$$

on dit que le schéma numérique (62) est d'**ordre k** de précision.

A titre d'exercice, nous invitons le lecteur à vérifier que les différents schémas introduits dans ce chapitre ont bien l'ordre (au sens de la définition ci-dessus) annoncé dans le cours du texte.

6) Mémorandum

schéma	formule (1)	nombre de pas	explicite ou implicite	ordre	condition de stabilité
Euler explicite	$u^{n+1} = u^n + \Delta t f(u^n)$	1	explicite	1	$\lambda \Delta t < 1$
Euler implicite	$u^{n+1} - \Delta t f(u^{n+1}) = u^n$	1	implicite	1	-
Crank-Nicolson	$u^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} f(u^{n+1}) = u^n + \frac{\Delta t}{2} f(u^n)$	1	implicite	2	$\lambda \Delta t < 2$
Adams-Bashford à 2 pas	$u^{n+1} = u^n + \frac{3}{2} \Delta t f(u^n) - \frac{1}{2} \Delta t f(u^{n+1})$	2	explicite	2	$\lambda \Delta t < 1$
Euler modifié	$\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}} = u^n + \frac{\Delta t}{2} f(u^n)$ $u^{n+1} = u^n + \Delta t f(\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}})$	1	explicite	2	$\lambda \Delta t < 2$
Heun	$\tilde{u}^{n+1} = u^n + \Delta t f(u^n)$ $u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{2} [f(u^n) + f(\tilde{u}^{n+1})]$	1	explicite	2	$\lambda \Delta t < 2$
Runge-Kutta	$k_1 = f(u^n)$ $k_2 = f(u^n + \frac{\Delta t}{2} k_1)$ $k_3 = f(u^n + \frac{\Delta t}{2} k_2)$ $k_4 = f(u^n + \Delta t k_3)$ $u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{6} \{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\}$	1	explicite	4	$\lambda \Delta t < 2,8$

