TP1 - Exercice 3 : Construction détaillée du système linéaire

On cherche les "$u_{i,j}$", approximations des $u(x_i,y_j)$ pour $0 \leq i,j \leq N+1$

On a : $\forall\, 0 \leq i,j \leq N+1$, $u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0$ (Dirichlet)

De plus, $\forall\, 1 \leq i,j \leq N$:

système d'équations (1)

$$\boxed{\frac{4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{h^2} - c_{i,j}u_{i,j} = f_{i,j}} \quad \text{où} \begin{cases} c_{i,j} := c(x_i,y_j) \\ f_{i,j} := f(x_i,y_j) \end{cases}$$

On veut écrire ces $N \times N = N^2$ équations linéaires sous la forme matricielle $A_h U_h = b_h$

On pose
$$U_h = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ \vdots \\ u_{N,1} \\ u_{1,2} \\ \vdots \\ u_{N,2} \\ \vdots \\ u_{1,N} \\ \vdots \\ u_{N,N} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ U_h^{(1)} \\ \\ \\ U_h^{(2)} \\ \\ \vdots \\ \\ U_h^{(N)} \\ \\ \end{array}$$

Remarque, c'est simplement la matrice $\begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{N,1} & \cdots & u_{N,N} \end{pmatrix}$ lue colonne par colonne
$$\begin{array}{ccc} U_h^{(1)} & & U_h^{(N)} \end{array}$$

On pose $\cancel{b_h =}$

$$b_h = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} f_{1,1} \\ \vdots \\ f_{N,1} \end{matrix}\right\} F_h^{(1)} \\ \vdots \\ \left.\begin{matrix} f_{1,N} \\ \vdots \\ f_{N,N} \end{matrix}\right\} F_h^{(N)} \end{pmatrix}$$

Il reste à construire A_h telle que $A_h U_h = b_h \iff (1)$ est vérifié

1) À quelle ligne de U_h trouve-t-on $u_{i,j}$?

$\Rightarrow$ à la ligne $\ell = (j-1)N + i$

De même,
- $u_{i-1,j}$ est le $\underbrace{(j-1)N + i - 1}_{=\boxed{\ell - 1}}$ ème élément de U_h
- $u_{i+1,j}$ est le $\ell + 1$ ème élément de U_h
- $u_{i,j+1}$ est le $jN + i = \boxed{\ell + N}$ ème ———
- $u_{i,j-1}$ est le $(j-2)N + i = \boxed{\ell - N}$ ème ———

La $l=(j-1)N+i$ ème ligne de A_h est donc donnée par

$$\Big(0,\dots,0,\underset{\substack{\text{colonne}\\ \hookrightarrow l-N}}{-\frac{1}{h^2}},0,\dots,0,\underset{\hookrightarrow l-1}{-\frac{1}{h^2}},\underset{\hookrightarrow l}{\frac{4}{h^2}+c_{i,j}},\underset{\hookrightarrow l+1}{\frac{-1}{h^2}},0,\dots,0,\underset{\hookrightarrow l+N}{\frac{-1}{h^2}},0,\dots,0\Big)$$

Remarque, pour les cas particuliers où $i=1$ (resp N), on a la même expression que ci-dessus mais le coefficient $l-1$ (resp. $l+1$) est nul car $u_{0,j}=u_{i-1,j}=0$ (resp. $u_{i+1,j}=0$)

Idem pour les cas particuliers $j=1$ (resp. N), alors le coefficient en position $l-N$ (resp. $l+N$) est nul car $u_{i,j-1}=0$ (resp $u_{i,j+1}=0$)

Finallement

$$A_h=\begin{pmatrix}
\begin{bmatrix}4 & -1 & & 0\\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & & -1 & 4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -1\end{bmatrix} & & 0\\
\begin{bmatrix}-1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4 & -1 & & 0\\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & & -1 & 4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -1\end{bmatrix} & \\
& \ddots & \ddots & \begin{bmatrix}-1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -1\end{bmatrix}\\
0 & & \begin{bmatrix}-1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4 & -1 & & 0\\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & & -1 & 4\end{bmatrix}
\end{pmatrix}+C_h=\begin{pmatrix}\tilde{A} & -I_N & & 0\\ -I_N & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I_N\\ 0 & & -I_N & \tilde{A}\end{pmatrix}+C_h$$

où

$$A_h=\begin{array}{c}\xrightarrow{\quad N\quad}\\ \begin{pmatrix}4 & -1 & & 0\\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & & -1 & 4\end{pmatrix}\end{array}\Big\downarrow N
\quad , \quad
C_h=\begin{array}{c}\xrightarrow{\qquad N^2\qquad}\\ \begin{pmatrix}c_{11} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c_{N,1} & & & & \\ & & & c_{1,2} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & c_{N,2} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & c_{1,N} \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & c_{N,N}\end{pmatrix}\end{array}\Big\downarrow N^2$$

$$\text{et } I_N=\begin{array}{c}\xrightarrow{\quad N\quad}\\ \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\end{array}\Big\downarrow N$$