

Nom :

Prénom :

## Contrôle no 1, sujet A (durée 1h30)

*Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que le premier exercice. Barème : 2.1->4, 2.2->4, 2.3->2, 2.4->2, 1.1->3, 1.2->3, 1.3->3.*

**Exercice 1.** On s'intéresse au programme dans le cadre Algorithme 1.

---

### Algorithme 1 Simulation de variable aléatoire

---

```
n=100
tabx=c()
for (i in 1:(n+1))
{
  u=runif(1,0,1); x=-log(u)
  tabx=c(tabx,x)
}
su=sum(tabx) #calcule la somme des éléments de la liste
s=0; k=0
v=runif(1,0,1)
b=0
while (b==0)
{
  s=s+tabx[k+1]
  k=k+1
  if (s/su>v)
    { b=1}
}
print(k)
```

---

- (1) Quelle est la loi des variables  $x$  simulées dans la première boucle ?
- (2) Notons  $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$  les valeurs dans `tabx` après l'exécution de la première boucle. Quelles valeurs peut prendre la variable `s` au cours de l'exécution du programme ?
- (3) Quelle est la loi de la variable `k` affichée en fin de programme, conditionnellement à  $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$  ?

**Exercice 2.** Soient

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\exp(-x^3)}{Z} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x),$$

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\exp(-x^2/(2\sigma^2))}{\sqrt{2\pi\sigma^2}},$$

avec  $Z = \int_0^{+\infty} \exp(-x^3)dx$  et  $\sigma$  une constante  $> 0$ .

- (1) Trouver une constante  $C$  telle que  $f(x) \leq Cg(x)$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .

- (2) Écrire un programme en R qui simule une variable de densité  $f$  (on prendra  $\sigma = 2$ ) (écrire le programme dans le cadre ci-dessous et justifier sur la copie).

- (3) Quel est le nombre moyen de boucle effectuées par ce programme ?  
(4) Trouver  $\sigma$  minimisant le nombre de boucle effectuées par ce programme.