TD 1.

indépendance : • $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$, $\phi_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) = \mathbb{E}[e^{it_1X_1 + it_2X_2}] = \mathbb{E}[e^{it_1X_1}]\mathbb{E}[e^{it_2X_2}]$

• $f_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) = f_{X_1}(t_1) \cdot f_{X_2}(t_2)$ $\quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

• $\mathbb{P}\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = \mathbb{P}\{X_1 \leq x_1\}\,\mathbb{P}\{X_2 \leq x_2\}$

Exercice 1 : 1) $Z = (U,V)$ est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]^2$ $\quad \frac{1}{\lambda([0,1]^2)} \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x) \quad x \in \mathbb{R}^2$

$\mathbb{1}_{[0;1]}(x_1)\,\mathbb{1}_{[0;1]}(x_2)$

$X = \min(U,V)$ et $Y = \max(U,V)$

$\forall t \in [0;1]$, $\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(U \leq t \text{ ou } V \leq t)$
$= 1 - \mathbb{P}(U \geq t \text{ et } V \geq t)$
$= 1 - \mathbb{P}(U \geq t)\,\mathbb{P}(V \geq t)$ (indépendance de U et V)
$= 1 - (1-t)^2$

$F_X(t) = (1-(1-t)^2)\mathbb{1}_{[0;1]} + \mathbb{1}_{]1;+\infty[}$

$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(U \leq t \text{ et } V \leq t)$
$= \mathbb{P}(U \leq t)\,\mathbb{P}(V \leq t)$
$= t^2$

$F_Y(t) = t^2\,\mathbb{1}_{[0;1]} + \mathbb{1}_{]1;+\infty[}$

• $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2} \text{ et } Y < \frac{1}{2}) = 0$

Mais $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2}) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2}) \neq 0$ Donc $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2})\,\mathbb{P}(Y < \frac{1}{2}) \neq 0$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

2) $X \sim \mathcal{U}(\{1,2,3,4,5,6\})$
$Y \sim \mathcal{U}(\{1,2,3,4,5,6\})$ sont indépendants

$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j) = \frac{1}{36}$ $\quad i \in \{1,\dots,6\}, j \in \{1,\dots,6\}$

3) $X = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule est rouge} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $Y = \begin{cases} 1 & \text{si la seconde boule est rouge} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\mathbb{P}(X=1) = \frac{k}{n}$, $X \sim \mathcal{B}(\frac{k}{n})$

$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=1 \mid X=1)\,\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(Y=1 \mid X=0)\,\mathbb{P}(X=0)$
$= \frac{k-1}{n-1} \times \frac{k}{n} + \frac{k}{n-1} \times \frac{n-k}{n} = \frac{k}{n}$, $Y \sim \mathcal{B}(\frac{k}{n})$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$ et $\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1) = \frac{k^2}{n^2}$ donc X et Y ne sont pas indépendantes

Exercice 2 :

1) $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$
$= \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2]$
$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X\mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]^2]$
$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

2) $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i]$
$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$ ($\mathcal{L}$ de $\mathbb{E}$)
$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_1]$ (X_i id)
$= n\,\mathbb{E}[X_1]$

$\left(\mathbb{V}[A+B] = \mathbb{V}[A] + \mathbb{V}[B] + 2\,\mathrm{Cov}(A,B) \right)$

3) $\mathbb{V}[S] = \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$

$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[X_i]$ (ind)

$= n\mathbb{V}[X_1]$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i, X_j)$$

Exercice 3:

1) $X \perp Y \Rightarrow Cov(X,Y) = 0$

$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
$\overset{ind}{=} \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$

2) $\mathbb{E}[X^2] > 0$

$\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$

$\mathbb{E}[|X||Y|] \neq \mathbb{E}[|X|]\mathbb{E}[|Y|]$

On a: $\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X \cdot ZX] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[ZX]$
$= \mathbb{E}[ZX^2] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[ZX]$
$= \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Z](\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2)$
$= \mathbb{E}[Z]\mathbb{V}(X) = 0$ car $\mathbb{E}[Z] = 0$

mais $\mathbb{E}[|X||Y|] = \mathbb{E}[|X| \cdot |ZX|]$
$= \mathbb{E}[|X|^2 \cdot 1] \neq 0$ or $\mathbb{E}[|X|] \cdot \mathbb{E}[|X||X|] = \mathbb{E}[|X|] \cdot \mathbb{E}[|X|] = (\mathbb{E}[|X|])^2$

$\mathbb{V}[X] > 0$

$\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$

$\mathbb{E}[|X||Y|] \neq \mathbb{E}[|X|]\mathbb{E}[|Y|]$ de fait, $\mathbb{V}(X) > 0$

Prenons $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{P}(X \geq 0) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(Y \geq 0) = \frac{1}{2}$

Donc $\mathbb{P}(X \geq 0)\mathbb{P}(Y \geq 0) = \frac{1}{4}$

Mais $\mathbb{P}(X \geq 0$ et $Y \geq 0) = \frac{1}{2}$ Donc X et Y ne sont pas indépendantes

Exercice 4:

1) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X<a} + X\mathbb{1}_{X\geq a}] = \underbrace{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X<a}]}_{\geq 0} + \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X\geq a}]$

$\geq \mathbb{E}[\underbrace{X}_{\geq a}\mathbb{1}_{X\geq a}]$

$\geq a\,\mathbb{P}(X \geq a) \quad \Rightarrow \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$

2) $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]|^2 \geq a^2)$
$\leq \frac{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2]}{a^2} = \frac{\mathbb{V}[X]}{a^2}$

3) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$: $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$: $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} \overset{iid}{=} \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exercice 5: définit.: Un modèle statistique est la donnée de:
- un espace mesurable $(Z, \mathcal{Z})$ tribu sur Z
- une famille de probabilités $\mathcal{E}$ sur $(Z, \mathcal{Z})$ $\rightarrow \mathcal{C}$

Nous notons $(Z, \mathcal{Z}, \mathcal{E})$ le modèle statistique. $\mathcal{C}$

Le modèle est dit paramétrique lorsque $\mathcal{P}$ correspond à une famille $\{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ où Θ est un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

Le modèle est dit identifiable si la fonction $\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta$ est injective i.e : $\mathbb{P}_\theta = \mathbb{P}_{\theta'} \Rightarrow \theta = \theta'$

- $([0;x], \mathcal{B}([0;x]), \{\mathcal{U}([0;x]), x \in \mathbb{R}^{+*}\})$

$\mathcal{B}([0;x]) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [0;x]$

$X \sim \mathcal{U}([0;x])$ et $Y = \mathcal{U}([0;x])$

$\mathbb{P}\{X \leq U\} = \mathbb{P}\{Y \leq U\}$, $U \in [0;x]$, $U \in [0;x']$

or $\mathbb{P}\{X \leq U\} = \frac{U}{x}$ et $\mathbb{P}\{Y \leq U\} = \frac{U}{x'}$ donc $\mathbb{P}(X \leq U) = \mathbb{P}(Y \leq U) \Leftrightarrow \frac{U}{x} = \frac{U}{x'} \Leftrightarrow x = x'$

$\mathbb{P}_\theta = \mathbb{P}_{\theta'} \Leftrightarrow \forall A, (\mathbb{P}_\theta(A) = \mathbb{P}_{\theta'}(A))$ donc est identifiable

- $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{\mathcal{N}(0,\sigma^2), \sigma \in \mathbb{R}\})$ pas identifiable

$\mathbb{P}_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(]-\infty;x]) = \mathbb{P}_{\mathcal{N}(\mu,(\sigma')^2)}(]-\infty;x]) \Rightarrow \sigma = |\sigma'|$ donc pas identifiable

s'obtient en mettant en égalité les 2 densités et en simplifiant

- $(\mathbb{L}^1(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{L}^1(\mathbb{R}))$ mais pas de mesure de probabilité

Donc n'est pas un modèle statistique car il n'y a pas un ensemble de mesure de proba.

- L'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ modèle statistique non paramétrique

$(\mathcal{M}^1(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{M}^1(\mathbb{R})))$ et on peut le munir d'un ensemble de mesure de proba $\mathcal{C} = \{\mathbb{P}, \mathbb{P} \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})\}$

- $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \{\mathcal{N}(\mu,\sigma_0), \mu \in \mathbb{R}_+\})$
- $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \{\mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0\})$

Exercice 6 : - biais d'échantillonnage : amis qui peuvent être fan des Beatles
biais d'âge
biais géographique
biais de réponses multiples
biais de mentir au questionnaire

TD 2 :

$X_1, \dots, X_n \in \{0;1\}^n$ iid

$X_i \sim \mathcal{B}(p)$ on ne connait pas p et on peut l'estimer

On a : $\mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 = 0\} = p(1-p)$

$\mathbb{P}\{X_1 = x_1, X_2 = x_2\} = (p)^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \times p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} = p^{x_1+x_2}(1-p)^{2-(x_1+x_2)}$

$\boxed{\mathcal{L}_\theta(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)}$: fonction de vraisemblance

Exercice 3 : On a : $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$

1) $\mathcal{L}_\lambda(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f_\lambda(X_i) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n X_i} & \text{si } X_1, \dots, X_n > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n X_i} \mathbb{1}_{\{X_1 > 0, \dots, X_n > 0\}}$

La log-vraisemblance s'écrit :

$\ell_\lambda(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n X_i & \text{si } X_1, \dots, X_n > 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

$\lambda \mapsto \ell_\lambda$ est concave comme somme de fonctions qui le sont $\Rightarrow$ Un pt critique est un maximum global

$$\frac{\partial \ell_\lambda(X_1, \dots, X_n)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i$$

maximum de vraisemblance

Estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}_n^{(MV)}$ vérifie $\frac{n}{\hat{\lambda}_n^{MV}} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_n^{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Pour la méthode des moments,

$E[X] = \frac{1}{\lambda}$, on remplace $E[X]$ par $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et on trouve $\overline{X}_n = \frac{1}{\hat{\lambda}_n^{MM}}$ méthode des moments

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_n^{MM} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

2) • $\overline{X}_n \xrightarrow{ps} E[X] = \frac{1}{\lambda} > 0$

$g : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en $\frac{1}{\lambda}$ donc $\hat{\lambda}_n^{MV} \xrightarrow[n\to+\infty]{ps} \lambda$

g est convexe

• $E[\hat{\lambda}_n^{MV}] = n E\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right]$

$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{\lambda}$

$E[\hat{\lambda}_n^{MV}] = E[g(\overline{X}_n)] \geq g(E[\overline{X}_n])$

$\Rightarrow E[\hat{\lambda}_n^{MV}] \geq \lambda$ donc l'estimateur est biaisé supérieurement.

$E[\hat{\theta}] = \int_{\mathbb{R}} x f_\theta(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{\theta^n} x^n \mathbb{1}_{[0;\theta]}(x)\,dx = \int_0^\theta \frac{n}{\theta^n} x^n\,dx = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta$

$E[\hat{\theta}^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_\theta(x)\,dx = \int_0^\theta \frac{n}{\theta^n} x^{n+1}\,dx = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^\theta = \frac{n\theta^2}{n+2}$

$\mathbb{V}[\hat{\theta}] = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2 = \theta^2\left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = \theta^2 \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}$

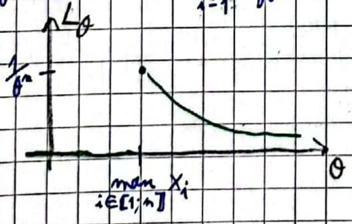
$b(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta = \frac{n}{n+1}\theta - \theta = \theta\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) = \theta\left(\frac{-1}{n+1}\right)$

Exercice 2 :

1) $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $X_i \sim \mathcal{U}[0;\theta]$

$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{\{x \in [0;\theta]\}}$

donc $L_\theta(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} \text{ si } (X_1, \dots, X_n) \in [0;\theta] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} \text{ si } \max_{i\in[1;n]} X_i \leq \theta \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{\{\max_{i\in[1;n]} X_i \leq \theta\}}$



Puisque $\theta \mapsto L_\theta(X_1, \dots, X_n)$ est une fct décroissante $\forall \theta \geq \max_{i\in[1;n]} X_i$ et que $\left(\frac{1}{\theta}\right)^n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on en déduit que l'EMV est donné par $\hat{\theta}_n^{MV} = \max_{i\in[1;n]} X_i$

$F_\theta(x) = \mathbb{P}(\max_{i\in[1;n]} X_i \leq x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x) = (\mathbb{P}(X_1 \leq x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0;\theta] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

la dérivée de $F_\theta(x)$ est donnée par $f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0;\theta] \\ \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} & \text{si } x \in [0;\theta] \end{cases}$

et $\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x)\,dx = 1$ donc $f_\theta(x)$ est la densité de θ

$\mathbb{E}[X] =$

$\mathbb{E}[X^2] =$ (cf. ...)

$\mathbb{V}[X] =$

$b(\theta) = \frac{n}{n+1}\theta - \theta = \left(\frac{-1}{n+1}\right)\theta < 0$

Est-il consistant ?

$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|\max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i - \theta| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|\max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i - \theta| > \varepsilon, \max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i > \theta)$
$+ \mathbb{P}(|\max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i - \theta| > \varepsilon, \max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i \leq \theta)$

Puisque $\mathbb{P}(\max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i > \theta) = 0$,
on a, $\mathbb{P}(|\max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i - \theta| > \varepsilon, \max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i > \theta) \leq \mathbb{P}(\max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i > \theta) = 0$

De plus, $\mathbb{P}(|\max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i - \theta| > \varepsilon, \max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i \leq \theta) = \mathbb{P}(\theta - \max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i > \varepsilon, \max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i \leq \theta)$
$= \mathbb{P}(\max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i \leq \theta - \varepsilon, \max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i \leq \theta)$
$= \mathbb{P}(\max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i < \theta - \varepsilon)$

Soit $\varepsilon > 0$ avec $\theta > \varepsilon$
$\mathbb{P}(\max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i < \theta - \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Si $\varepsilon \geq \theta$, $\theta - \varepsilon < 0$,
$\mathbb{P}(\max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i \leq \theta - \varepsilon) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Si $X \sim \mathcal{U}([0;\theta])$

$\mathbb{E}[X] = \frac{\theta}{2}$ La méthode des moments propose l'estimateur suivant : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{\hat{\theta}_n^{MM}}{2}$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n^{MM} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 2\overline{X_n}$

$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n^{MM}] = 2\mathbb{E}[\overline{X_n}] = 2\mathbb{E}[X_1] = 2\frac{\theta}{2} = \theta$

$\mathbb{V}[\hat{\theta}_n^{MM}] = 4\mathbb{V}(\overline{X_n}) = 4\frac{\mathbb{V}(X_1)}{n} = \frac{4\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$

consistance :

LFGN : $\overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \frac{\theta}{2}$ et $\hat{\theta}_n^{MM} = 2\overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \theta$

Exercice 1 :

Le modèle statistique est $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2), (\mu,\sigma^2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\}^{\otimes n})$

1) La vraisemblance s'écrit avec $\theta = (\mu, \sigma^2)$: $L_\theta(X_1,\dots,X_n) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\exp\left(\frac{-(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

La log-vraisemblance s'écrit : $\ell_\theta(X_1,\dots,X_n) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

Les dérivées partielles s'écrivent : $\frac{\partial \ell_\theta}{\partial\mu}(X_1,\dots,X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}{\sigma^2}$

$\frac{\partial \ell_\theta}{\partial\sigma^2}(X_1,\dots,X_n) = \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{2\sigma^4}$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu} \ell_{\theta_n^{MV}}(X_1,\dots,X_n) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell_{\theta_n^{MV}}(X_1,\dots,X_n) = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu}_n)}{\hat{\sigma}_n^2} = 0 \\ \dfrac{-n}{2(\hat{\sigma}_n^2)} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu}_n)^2}{2\hat{\sigma}_n^4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu}_n^2) \end{cases}$$

Soit le vecteur $\hat{\theta}_n^{MV} = (\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n^2)$

$\mathbb{E}[\hat{\mu}_n] = \mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}[X_1] = \mu$

$\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(X_i - \mu - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)\right)^2\right]$

$= \mathbb{E}[(X_1-\mu)^2] + \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)\right)^2\right] - 2\,\mathbb{E}\left[(X_1-\mu)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)\right)\right]$

$* = \mathbb{E}[(X_1-\mu)^2] + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[(X_j-\mu)^2] - \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\neq j}\mathbb{E}[(X_j-\mu)(X_k-\mu)] - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[(X_1-\mu)(X_j-\mu)]$

Or $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\neq j}\mathbb{E}[(X_j-\mu)(X_k-\mu)] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k\neq j}\mathbb{E}[(X_j-\mu)]\,\mathbb{E}[(X_i-\mu)] = 0$

$* = \mathbb{E}[(X_1-\mu)^2] + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[(X_j-\mu)^2] - \underbrace{\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[(X_i-\mu)(X_j-\mu)]}$

$\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[(X_i-\mu)(X_j-\mu)]$

$= \mathbb{E}[(X_1-\mu)^2] + \underbrace{\sum_{j=2}^{n}\mathbb{E}[(X_1-\mu)]\,\mathbb{E}[(X_j-\mu)]}_{=0}$

D'où $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] = \mathbb{E}[(X_1-\mu)^2] + \frac{1}{n}\mathbb{E}[(X_1-\mu)^2] - \frac{2}{n}\mathbb{E}[(X_1-\mu)^2] = \sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

$\hat{\mu}_n$ est non biaisé mais $\hat{\sigma}_n^2$ est biaisé.

$\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] - \sigma^2 = \frac{(n-1)\sigma^2}{n} - \sigma^2 = \frac{-\sigma^2}{n}$

$\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

LFGN: $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mu$

$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$ (rappel: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$)

Par la LFGN. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1^2]$

$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mu}_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 = \sigma^2$

2) $\begin{cases} \mathbb{E}[X] = \mu \\ \mathbb{V}[X] = \sigma^2 \end{cases}$

La méthode des moments donne: $\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{\mu}_n^{MM} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu}_n^{MM})^2 = \hat{\sigma}_n^2 \end{cases}$

Exercice 4:

1) $L_\theta(X_1,\dots,X_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } X_1,\dots,X_n \in [\theta, \theta+1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } \min_{i\in[\![1;n]\!]} X_i \geq \theta \text{ et } \left(\max_{i\in[\![1;n]\!]} X_i\right) - 1 \leq \theta \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$= \mathbb{1}_{\{[(\max X_i)-1;\ \min X_i]\}}$

On a: $\begin{cases} [(\max X_i) - 1;\ \min X_i] = \emptyset \text{ arrive avec Proba } 0 \\ \text{\_\_\_\_\_\_} = \{\cdot\} \text{ \_\_\_\_\_\_} \\ \text{\_\_\_\_\_\_} \neq \emptyset \text{ ou } \{\cdot\} \text{ arrive avec proba } 1 \end{cases}$

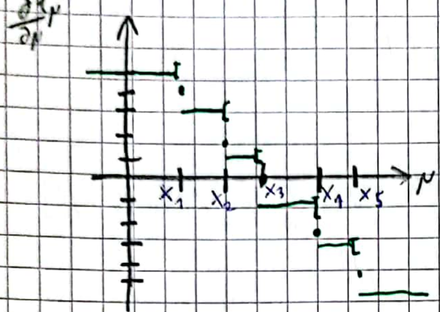
Donc n'importe quel estimateur $\hat{\theta}_n \in [(\max X_i) - 1 ; \min X_i]$ est un estimateur du max de vraisemblance.

2) La vraisemblance s'écrit: $L_\mu(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right) \exp\left(-|X_i - \mu|\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu|\right)$

La log-vraisemblance s'écrit: $\ell_\mu(X_1, \dots, X_n) = -n \ln(2) - \sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu|$

Cette fct est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{X_1, \dots, X_n\}$ et sa dérivée est donnée par:

$$\frac{\partial \ell_\mu}{\partial \mu}(X_1 \dots X_n) = -\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i < \mu\}} - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > \mu\}}\right) = -\#(X_i < \mu) + \#(X_i > \mu)$$



La dérivée de la log-vraisemblance est str positive sur $]-\infty, X_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}]$, ~~[illegible]~~ et str négative sur $(X_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}, +\infty)$ à gauche de $X(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)$ il y a $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1 < \frac{n+1}{2}$ statistiques d'ordre, Il y en a $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor > \frac{n+1}{2}$ à droite. Lorsque cet intervalle est non vide, l'estimateur du max de vraisemblance peut être n'importe quel réel dans $[X_{(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)}, X_{(\lceil \frac{n+1}{2} \rceil)}]$ (autrement dit, n'importe quelle médiane), ce qui est le cas lorsque n est pair.

Digression sur la méthode des moments:

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$\mathbb{E}[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k}$ $\quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ $\quad \mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$

donc 2 estimateurs: $\hat{\lambda}_n^{(1)} = (\overline{X}_n)^{-1}$

$$\hat{\lambda}_n^{(2)} = \left(\frac{2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right)^{1/2}$$

TD3:

Exercice 0:

1) Soient A et B deux v.a., un intervalle de confiance est défini par: $\mathbb{P}(\theta \in [A;B]) \geq 1-\alpha$

Définition (région de confiance)

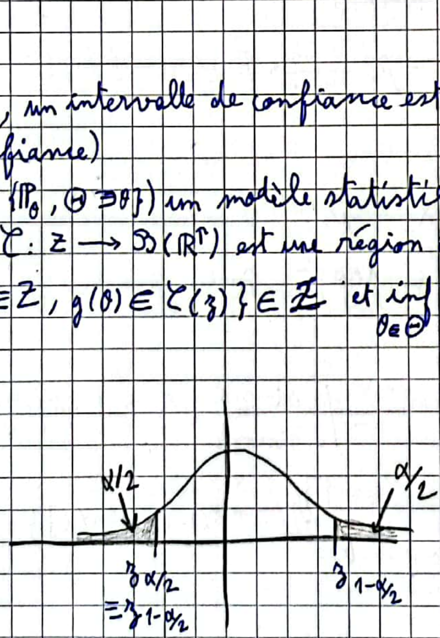
Soient $(Z, \mathcal{Z}, \{\mathbb{P}_\theta, \Theta \ni \theta\})$ un modèle statistique et $g: \Theta \to \mathbb{R}^r$ une fct et $\alpha \in (0,1)$

Une fonction $\mathcal{C}: Z \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$ est une région de confiance de niveau $1-\alpha$ pour $g(\theta)$, $\theta \in \Theta$, $\{z \in Z, g(\theta) \in \mathcal{C}(z)\} \in \mathcal{Z}$ et $\inf_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}_\theta\{z \in Z \mid g(\theta) \in \mathcal{C}(z)\} \geq 1-\alpha$.

2) $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$z_{1-\alpha/2}$, $z_{\alpha/2}$

$z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$



$\mathbb{P}\{-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}\} = \mathbb{P}\{Z \leq z_{1-\alpha/2}\} - \mathbb{P}\{Z \leq -z_{1-\alpha/2}\}$
$= 1-\alpha/2 - \alpha/2$
$= 1-\alpha$

$\mathcal{E}(\lambda)$

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$\mathcal{L}(X) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda X_i} \mathbb{1}_{\{X_i>0\}}$

$\mathbb{P}\{\mu \in [A;B]\} = 1-\alpha$

On veut un estimateur de la moyenne: $\hat{\mu}_n = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ $\hat{\lambda}_n^{MV} = \frac{1}{\overline{X}_n}$

donc $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$

- $\mathbb{P}\{-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma^2}}(\overline{X}_n - \mu) \leq z_{1-\alpha/2}\} = 1-\alpha$

$\Rightarrow \mathbb{P}\{\overline{X}_n - \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \overline{X}_n + \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\} = 1-\alpha$

$\Rightarrow \mathbb{P}\{\mu \in [\overline{X}_n \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{1-\alpha/2}]\} = 1-\alpha$

- $\mathbb{P}\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma^2}}(\overline{X}_n - \mu) \leq z_{1-\alpha}\} = 1-\alpha$

$\Rightarrow \mathbb{P}\{\mu \geq \overline{X}_n - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{1-\alpha}\} = 1-\alpha$

$\Rightarrow \mathbb{P}\{\mu \in \underbrace{[\overline{X}_n - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{1-\alpha}, +\infty)}_{\text{unilatéral à droite}}\} = 1-\alpha$

- $\mathbb{P}\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma^2}}(\overline{X}_n - \mu) \geq -z_{1-\alpha}\} = 1-\alpha$

$\Rightarrow \mathbb{P}\{\mu \in (-\infty ; \overline{X}_n + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{1-\alpha}]\} = 1-\alpha$

3) $\mathbb{P}\{-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq z_{1-\alpha/2}\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\{-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}\}$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

d'où $\mathbb{P}\{-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}\} = 1-\alpha$

car $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

donc $\mathbb{P}\{\overline{X}_n - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \overline{X}_n + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{1-\alpha/2}\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\alpha$

Exercice 1. $1-\mathbb{P}\{\frac{1}{\lambda} \in [-\varepsilon+\overline{X}_n, \varepsilon+\overline{X}_n]\} = 1-(1-\alpha) = \alpha$

1) $\hat{\lambda}_n^{MV} = \frac{1}{\overline{X}_n}$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\{\frac{1}{\lambda} \in [-\varepsilon+\overline{X}_n, \varepsilon+\overline{X}_n]\} = 1-\alpha \overset{?}{\Leftrightarrow} \mathbb{P}\{\frac{1}{\lambda} \notin [\varepsilon+\overline{X}_n ; \varepsilon+\overline{X}_n]\} \leq \frac{1}{n\lambda_0^2\varepsilon^2} = \alpha$?

$\mathbb{P}\{|\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{n\lambda^2\varepsilon^2} \leq \cancel{\frac{1}{n\lambda_0^2\varepsilon^2}}$ or $\lambda > \lambda_0 > 0$

2) a) $\mathbb{P}\{|X_1 - \mathbb{E}[X_1]| > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{V}(X_1)}{\varepsilon^2}$

$\varepsilon^2 = \frac{1}{n\lambda_0^2\alpha}$

$\mathbb{P}\{|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]| > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2}$

on a: $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \frac{1}{\lambda}$

et $\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n} = \frac{1}{n\lambda^2}$

$\varepsilon = \pm \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}$

encadrement de $1/\lambda$: $[\frac{-1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}} + \overline{X}_n ; \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}} + \overline{X}_n]$?

$\mathbb{P}\{|\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{n\lambda^2\varepsilon^2} \leq \frac{1}{n\lambda_0^2\varepsilon^2}$ car $\lambda > \lambda_0 > 0$

$\mathbb{P}\{|\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}| > f(n,\lambda_0,\alpha)\} \leq \alpha \qquad \alpha \in [0,\frac{1}{2}]$

$$\frac{1}{n\lambda_0^2\varepsilon^2} = \alpha \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}$$

$$1-\mathbb{P}\{|\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}| \leq \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}\} \leq \alpha \Rightarrow \mathbb{P}\{|\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}| \leq \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}\} \geq 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\{\frac{1}{\lambda} \in [\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}, \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}]\} \geq 1-\alpha$$

Si $\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}} < 0$, puisque $\frac{1}{\lambda} > 0$, on a : $\mathbb{P}\{\frac{1}{\lambda} \in]0, \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}]\} \geq 1-\alpha$

Si $\overline{X}_n > \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}$, $\mathbb{P}\{\frac{1}{\lambda} \in [\overline{X}_n \pm \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}]\} \geq 1-\alpha$

b) cas $\overline{X}_n < \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}$, en inversant $\mathbb{P}\{\frac{1}{\lambda} \in]0, \overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}]\} \geq 1-\alpha$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\{\lambda \in [\frac{1}{\overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}}, \infty[\} \geq 1-\alpha$$

cas $\overline{X}_n > \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}$, en inversant on a : $\mathbb{P}\{\lambda \in [\frac{1}{\overline{X}_n + \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}}, \frac{1}{\overline{X}_n - \frac{1}{\sqrt{n\lambda_0^2\alpha}}}]\} \geq 1-\alpha$

3) a) $\mathbb{E}[X_i^2] < +\infty$, X_i iid,

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_i]) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2), \quad \mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathbb{E}[f(X)]$$

b) $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\frac{1}{\lambda^2})$

rappel : Δ-méthode : si f est différentiable au point $\frac{1}{\lambda}$,
alors $\sqrt{n}(f(\overline{X}_n) - f(\frac{1}{\lambda})) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} f'(\frac{1}{\lambda})\mathcal{N}(0,\frac{1}{\lambda^2})$

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto 1/x$; f est différentiable au point $\frac{1}{\lambda} > 0$, $f'(\frac{1}{\lambda}) = -\lambda^2$

donc par la Δ-méthode : $\sqrt{n}(\hat{\lambda}^{MV} - \lambda) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} -\lambda^2\mathcal{N}(0,\frac{1}{\lambda^2}) = \mathcal{N}(0,\lambda^2)$

donc $\sigma(\lambda) = \lambda$

c) On sait que $\hat{\lambda}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \lambda$ par la Q2 b)

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda}^{MV}_n - \lambda)}{\lambda} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda}^{MV}_n - \lambda)}{\hat{\lambda}^{MV}_n} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda}^{MV}_n - \lambda)}{\lambda}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)} \times \underbrace{\frac{\lambda}{\hat{\lambda}^{MV}_n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1} \xrightarrow[\text{Slutsky}]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)\times 1$$

$$\mathbb{P}\{-z_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\left(\frac{\hat{\lambda}^{MV}_n - \lambda}{\hat{\lambda}^{MV}}\right) \leq z_{1-\alpha/2}\} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathbb{P}\{-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}\} = 1-\alpha$$

$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left\{ \hat{\lambda}_n^{MV}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) \leq \lambda \leq \hat{\lambda}_n^{MV}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right)\right\}$

Exercice 2 : La probabilité de n'avoir que des échecs est $(1-p)^n$ pour n lancers.
D'où la probabilité d'avoir au moins un succès est $1-(1-p)^n$

1) $(1-p)^n \geq 1-\alpha \iff (1-p)^n \leq \alpha \iff n\ln(1-p) \leq \ln(\alpha) \iff n \geq \dfrac{\ln(\alpha)}{\ln(1-p)}$

2) $(X_i)_{i=1}^n$ indépendants et $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $a_i \leq X_i \leq b_i$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$
Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \geq t\right) \leq \exp\left(-\dfrac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2}\right)$ Hoeffding

3) $\forall t \in \mathbb{R}_+$
$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i \leq t\right\} = \mathbb{P}\left\{-np + \sum_{i=1}^n X_i \leq t - np\right\}$
Pour appliquer Hoeffding, il faut que $t < np$ $\leq \exp\left\{-\dfrac{2(np-t)^2}{n}\right\}$
On prend $t = k-1$, pour répondre à la question de l'exercice.

$\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i \geq k\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n X_i \leq k-1\right\} \geq 1 - \exp\left\{-\dfrac{2(np-(k-1))^2}{n}\right\}$

$1-\exp\left\{-\dfrac{2(np-(k-1))^2}{n}\right\} \geq 1-\alpha \iff$

$\exp\left\{-\dfrac{2(np-(k-1))^2}{n}\right\} \leq \alpha$

$\Rightarrow -\dfrac{2(np-(k-1))^2}{n} \leq \ln\alpha$

On veut chercher n t.q. $\dfrac{(np-(k-1))^2}{n} - \dfrac{n\ln(\alpha)}{2} \geq 0$

$(np-(k-1))^2 + \dfrac{n\ln(\alpha)}{2} = (np)^2 - 2(k-1)np + (k-1)^2 + n\dfrac{\ln\alpha}{2}$ suite ?

Exercice 3 :

1) On connaît Hoeffding : X_i ind, $a_i \leq X_i \leq b_i$

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])\right| \geq t\right\} \leq 2\exp\left(\dfrac{-2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2}\right)$

X_i iid donc on a : $\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^n \dfrac{X_i}{n} - \mathbb{E}[X_i]\right| \geq t\right\} \leq 2\exp(-2t^2 n)$

$\hat{p}_j = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_{ij}$ où $X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la personne } i \text{ répond oui à la question } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\mathbb{P}\{|\hat{p}_j - p_j| > t\} \leq 2\exp(-2t^2 n) = \alpha$

$\ln\left(\dfrac{2}{\alpha}\right) = 2t^2 n$

en choisissant $t = \sqrt{\dfrac{\ln(2/\alpha)}{2n}}$, on a $\mathbb{P}\left\{|\hat{p}_j - p_j| \geq \sqrt{\dfrac{\ln(2/\alpha)}{2n}}\right\} \leq \alpha$

$\mathbb{P}\left(p_j \in \left[\hat{p}_j - \sqrt{\dfrac{\ln(2/\alpha)}{2n}}, \hat{p}_j + \sqrt{\dfrac{\ln(2/\alpha)}{2n}}\right]\right) \geq 1-\alpha$

2) On a : $\mathbb{P}(p_1 \notin I_1) \leq \beta$

$\vdots$

$\mathbb{P}(p_k \notin I_k) \leq \beta$ $\quad \beta > 0$

et $C = I_1 \times \cdots \times I_k$

$\mathbb{P}(p \notin C) = \mathbb{P}((p_1, \dots, p_k) \notin I_1 \times \dots \times I_k)$

$= \mathbb{P}(\exists j \in \{1, \dots, k\} \text{ tq } p_j \notin I_j) \leq \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(p_j \notin I_j) \leq k\beta$ car $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$

On en déduit en prenant $\beta = \frac{\alpha}{k}$, la région de niveau de confiance $1-\alpha$, en utilisant la question une pour construire les intervalles de confiance

$I_1, \dots I_k$ est : $\left[\hat{p}_1 - \sqrt{\frac{\ln(2^k/\alpha)}{2n}}, \hat{p}_1 + \sqrt{\frac{\ln(2^k/\alpha)}{2n}}\right], \dots\dots, \left[\hat{p}_k - \sqrt{\frac{\ln(2^k/\alpha)}{2n}}, \hat{p}_k + \sqrt{\frac{\ln(2^k/\alpha)}{2n}}\right]$

suite exo 2 : $t > 0$

$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \geq t\right) \leq \exp\left(\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}\right)$

$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \leq -t\right) \leq \exp\left(\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}\right)$

On a : $X_1, \dots, X_n \in [0;1]$ ps

$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - np \leq t - np\right)$

Pour appliquer Höffding, il faut que $-(t-np) > 0 \iff np > t$

$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - np \leq t - np\right) \leq \exp\left(-2\frac{(t-np)^2}{n}\right)$

Ce qu'on veut répondre : trouver une borne sur n tq $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k\right) \geq 1-\alpha$

$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq k-1\right) \geq 1 - \exp\left(-2\frac{(k-1-np)^2}{n}\right)$

Je veux trouver n tq : $1 - \exp\left(-2\frac{(k-1-np)^2}{n}\right) \geq 1-\alpha \iff \exp\left(-2\frac{(k-1-np)^2}{n}\right) \leq \alpha$

$\iff (k-1-np)^2 \geq n\left(\frac{-\ln\alpha}{2}\right)$

$\iff (k-1-np)^2 - n\left(\frac{-\ln\alpha}{2}\right) \geq 0$

Le terme de gauche vaut :

$(k-1)^2 + (np)^2 - 2(k-1)np - n\left(\frac{-\ln\alpha}{2}\right) = \left(np - (k-1) - \left(\frac{-\ln\alpha}{4p}\right)\right)^2 + (k-1)^2 - \left((k-1) + \frac{-\ln\alpha}{4p}\right)^2$ (1)

En prenant $np \geq k-1 + \left(\frac{-\ln\alpha}{4p}\right) + \sqrt{\left((k-1) + \left(\frac{-\ln\alpha}{4p}\right)\right)^2 - (k-1)^2} = A$

$n \geq \frac{A}{p}$

Si $n \geq \frac{A}{p}$, alors (1) est positive. Et puisque $p \geq p_0$, on choisit $n \geq \frac{A}{p_0}$

Exercice 4 :

1) Par le TCL : $\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \mu^2 + \sigma^2 \end{pmatrix}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 2\mu\sigma^2 \\ 2\mu\sigma^2 & 2\sigma^4 + 4\mu^2\sigma^2 \end{pmatrix}\right)$

2) On a : $\frac{n-1}{n} S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $(x, y) \longmapsto y - x^2$ f est différentiable partout donc en particulier au point $(\mu, \mu^2 + \sigma^2)$.

Donc par la delta-méthode :

$\sqrt{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - f(\mu, \mu^2 + \sigma^2)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \nabla f(\mu, \mu^2 + \sigma^2) \cdot \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 2\mu\sigma^2 \\ 2\mu\sigma^2 & 2\sigma^4 + 4\mu^2\sigma^2 \end{pmatrix}\right)$

Or $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = S_n^2 \frac{n-1}{n}$ et $f(\mu, \mu^2+\sigma^2) = \sigma^2$

La variance asymptotique est donnée par : $\begin{pmatrix} -2\mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 2\mu\sigma^2 \\ 2\mu\sigma^2 & 2\sigma^4+4\mu^2\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\sigma^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\mu \\ 1 \end{pmatrix}$

$= 2\sigma^4$

On a : $\mathbb{V}(X)$ variance de X

$\mathbb{V}(AX) = A\,\mathbb{V}(X)\,A^t$

$X \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \Sigma\right)$ $\qquad AX \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, A\Sigma A^t\right)^2$

Σ est la matrice de variance-covariance

3) On a : $\sqrt{n}\left(\frac{n-1}{n} S_n^2 - \sigma^2\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 2\sigma^4)$

$\frac{n}{n-1} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ par Slutsky

$\sqrt{n}\left(S_n^2 - \frac{n}{n-1}\sigma^2\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 2\sigma^4)$ $\quad$ De même, $\sqrt{n}\frac{n}{n-1}\sigma^2 - \sqrt{n}\sigma^2 \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{P}} 0$

Donc d'après Slutsky :

$\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) = \sqrt{n}\left(S_n^2 - \frac{n}{n-1}\sigma^2\right) + \sqrt{n}\left(\frac{n}{n-1}\sigma^2\right) - \sigma^2\sqrt{n} \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 2\sigma^4)$

4) On a $\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 2\sigma^4)$

$S_n^2 \xrightarrow[n\infty]{ps} \sigma^2$, $\quad \dfrac{\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2)}{\sqrt{2 S_n^4}} \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Autrement dit, $\sqrt{\frac{n}{2}}\left(1 - \frac{\sigma^2}{S_n^2}\right) \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ et donc un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ de σ^2 est $\left[S_n^2\left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}\, q_{1-\alpha/2}\right), S_n^2\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\, q_{1-\alpha/2}\right)\right]$

$q_{1-\alpha/2}$ quantile d'ordre $1-\alpha/2$

TD4 :

$\Theta = \Theta_0 \sqcup \Theta_1$ $\qquad H_0 : \theta \in \Theta_0$

$H_1 : \theta \in \Theta_1$

$\phi : \mathcal{Z}^n \longrightarrow \{0;1\}$

décision \ réalité	$\theta \in \Theta_0$	$\theta \in \Theta_1$
$\phi = 0$	$1-\alpha$	β ← risque de seconde espèce : faux positif
$\phi = 1$	α	$(1-\beta)$ ← puissance du test

α : risque de 1ère espèce : faux négatif

par précaution, prendre toujours H_0 l'hypothèse la plus défavorable

Exercice 2 :

1) H_0 : la personne est saine $\qquad H_1$: la personne est malade

2) $\phi = 1$: test positif $\qquad \phi = 0$: test négatif

$\mathbb{P}_{H_0}(\text{sain})$

$\mathbb{P}\{\text{sain} \mid \text{positif}\} \leq \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}\{\text{positif}\} = \dfrac{\mathbb{P}\{\text{positif} \mid \text{malade}\} \times \mathbb{P}\{\text{malade}\}}{\mathbb{P}\{\text{malade} \mid \text{positif}\}}$

$$\mathbb{P}\{\text{positif} \mid \text{sain}\} = \frac{\mathbb{P}\{\text{positif} \cap \text{sain}\}}{\mathbb{P}\{\text{sain}\}} = \frac{\mathbb{P}\{\text{sain} \mid \text{positif}\} \times \mathbb{P}\{\text{positif}\}}{\mathbb{P}\{\text{sain}\}}$$

$$\mathbb{P}\{\text{positif}\} = \frac{\mathbb{P}\{\text{positif} \mid \text{malade}\} \times \mathbb{P}\{\text{malade}\}}{\mathbb{P}\{\text{malade} \mid \text{positif}\}} \; *$$

$$\mathbb{P}\{\text{malade} \mid \text{positif}\} = 1 - \mathbb{P}\{\text{sain} \mid \text{positif}\} \geq \frac{1}{2}$$

Donc $* \leq \dfrac{\frac{9}{10} \times \frac{1}{10\,000}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{18}{100\,000}$

$$\mathbb{P}\{\text{positif} \mid \text{sain}\} \leq \frac{\frac{1}{2} \times \frac{18}{100\,000}}{\frac{9999}{10\,000}} = \frac{1}{11\,110}$$

$1-\beta = \mathbb{P}\{\phi = 1 \mid \text{malade}\} = \frac{9}{10} \Rightarrow \beta = \frac{1}{10}$

3) Mq $\mathbb{P}(Z \geq x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\lambda > 0$, $\mathbb{P}(Z \geq x) = \mathbb{P}(e^{\lambda Z} \geq e^{\lambda x}) \overset{\text{Markov}}{\leq} \mathbb{E}[e^{\lambda Z}] \times e^{-\lambda x} = e^{\frac{\lambda^2}{2} - \lambda x}$

$\mathbb{P}(Z > x) \leq e^{\inf_{\lambda > 0}\left(\frac{\lambda^2}{2} - \lambda x\right)} = e^{-\frac{x^2}{2}}$

car $f(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} - \lambda x$

$\Rightarrow f'(\lambda) = \lambda - x$ donc $f'(\lambda) = 0 \Rightarrow x = \lambda$

donc $f(x) = \frac{x^2}{2} - x^2 = -\frac{x^2}{2}$

on évalue en x

$V(X)$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq t\right) \leq e^{-\frac{t^2}{2}} \Rightarrow \mathbb{P}(X \geq \mu + \sigma t) \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$

On pose $1-\alpha = e^{-\frac{t^2}{2}} \Leftrightarrow t = \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \Rightarrow \mathbb{P}\left(X \geq \mu + \sigma\sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \leq 1-\alpha$ (1)

Par définition d'un quantile: $q_{1-\alpha} = \inf_{q \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(X \geq q) \leq 1-\alpha$

Ce qui implique avec (1), $q_{1-\alpha} \leq \mu + \sigma\sqrt{2\ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}$

$q_\alpha \leq \mu + \sigma\sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$

$\alpha \in [0,1]$

4) Si la personne est saine, $X \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$

Si la personne est malade, $X \sim \mathcal{N}(\mu_0 + \Delta, \sigma^2)$, $\Delta > 0$

Donc on prend une région de test $R = [t_\alpha, +\infty[$

$\Phi(X) = \mathbb{1}_{\{X \geq t_\alpha\}}$

$\mathbb{P}_{H_0}\{\Phi(X) = 1\} = \mathbb{P}_{X \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)}(X \geq t)$. si $t_\alpha = \mu_0 + \sigma\sqrt{2\ln(11\,110)}$, alors $\mathbb{P}_{H_0}(\Phi(X) = 1) \leq \frac{1}{11\,110}$

Le second critère à vérifier est la puissance:

$\mathbb{P}_{H_1}(\Phi(X) = 1) = \frac{9}{10}$

ie: $\mathbb{P}\left(X \geq \mu_0 + \sigma\sqrt{2\ln(11110)}\right) = \mathbb{P}_{X \sim \mathcal{N}(-\mu_0-\Delta,\sigma^2)}\left(X \leq -\mu_0 - \sigma\sqrt{2\ln(11110)}\right)$

Pour simplifier, je demande $\mathbb{P}_{H_1}(\phi(X)=1) \geq 9/10$

Or $\mathbb{P}_{X\sim\mathcal{N}(-\mu_0-\Delta,\sigma^2)}(X \geq t) \geq \frac{9}{10}$ correspond au quantile d'ordre $\frac{1}{10}$ de la loi $\mathcal{N}(-\mu_0-\Delta,\sigma^2)$

Et on sait que: $q_{9/10} \leq -\mu_0 - \Delta + \sigma\sqrt{\ln(10)}$

D'où $\frac{9}{10} = \mathbb{P}_{X\sim\mathcal{N}(-\mu_0-\Delta,\sigma^2)}(X \leq q_{1/10}) \leq \mathbb{P}_{X\sim\mathcal{N}(-\mu_0-\Delta,\sigma^2)}\left(X \leq -\mu_0 - \Delta + \sigma\sqrt{2\ln(10)}\right)$

Il suffit de prendre donc $-\mu_0 - \sigma\sqrt{2\ln(11110)} = -\mu_0 - \Delta + \sigma\sqrt{2\ln(10)}$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{2\ln(11110)} + \sqrt{2\ln(10)}}$$