Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Résoudre $\mathrm{E}(2x-1) = \mathrm{E}(x-4)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Etudier $\lim\limits_{\infty} [u_n]$ si $\lim\limits_{\infty} u_n = \ell$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}([x] + [2x] + \cdots + [nx])$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient x un réel, et n un entier naturel non nul.
On note $t \mapsto [t]$ l'opération "partie entière".

1. Montrer que pour tout entier relatif k, $\left[\dfrac{x+k}{n}\right] = \left[\dfrac{[x]+k}{n}\right]$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{x+k}{n}\right] = [x]$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Montrer que tout rationnel r de $[0,1[$ s'écrit d'une manière unique :

$$r = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \cdots + \frac{a_n}{n!} + \cdots$$

les entiers a_i (nuls à partir d'un certain rang) vérifiant $0 \leq a_i < i$.

Mettre sous cette forme le rationnel $\dfrac{5}{7}$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Calculer $\lambda = \displaystyle\inf_{t\in\mathbb{R}} \left\{ \sup_{x\in[0,1]} |x^2 + tx| \right\}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Noter $k = [x]$, et discuter suivant le placement de x par rapport à $k + \frac{1}{2}$.
L'ensemble des solutions est l'intervalle $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}[$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

- Si $\ell = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n] = \ell$:
- Si ℓ n'est pas entier, la suite $([u_n])$ est stationnaire donc convergente en $[\ell]$.
- Si ℓ est un entier, alors plusieurs cas sont possibles. . .,

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $kx \leq [kx] < kx + 1$. On trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \dfrac{x}{2}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. Si $q = \left[\dfrac{x+k}{n}\right]$, $qn - k \leq x < (q+1)n - k \Rightarrow qn - k \leq [x] < (q+1)n - k \Rightarrow \ldots$
2. On suppose d'abord que $x \in Z$. Soit $x = qn + r$ la division de x par n.
   Pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, discuter suivant la position de $r + k$ par rapport à n.
   Si x est un réel quelconque, utiliser la question (1).

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

- On commence par l'unicité des (a_n). On note : $s_n = \sum\limits_{k=2}^{n-1} \dfrac{a_k}{k!}$ et $r_n = \sum\limits_{k\geq n+1} \dfrac{a_k}{k!}$.
  Prouver $a_n = [n!(r - s_n)] = [n!r] - n!s_n$.
- Réciproquement, on a $0 \leq a_n \leq n - 1$ (récurrence). Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N!r$ soit entier. Prouver que pour tout $n \geq N$, on a $a_{n+1} = 0$, donc $s_{n+1} = r$.
- La décomposition de $r = \dfrac{5}{7}$ est : $\dfrac{5}{7} = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{4}{6!} + \dfrac{2}{7!}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

- Traiter le cas $t \geq 0$.
- Si $t < 0$, étudier $x \mapsto |x(x + t)|$.
  Il apparaît alors les cas $t \leq -2$, $-2 \leq t \leq -1$, $-1 \leq t \leq 0$.
- La borne inférieure λ est obtenue en supposant $-1 \leq t \leq 0$.
  Plus précisément, elle est obtenue quand $t = 2 - 2\sqrt{2}$ et elle vaut $3 - 2\sqrt{2}$.