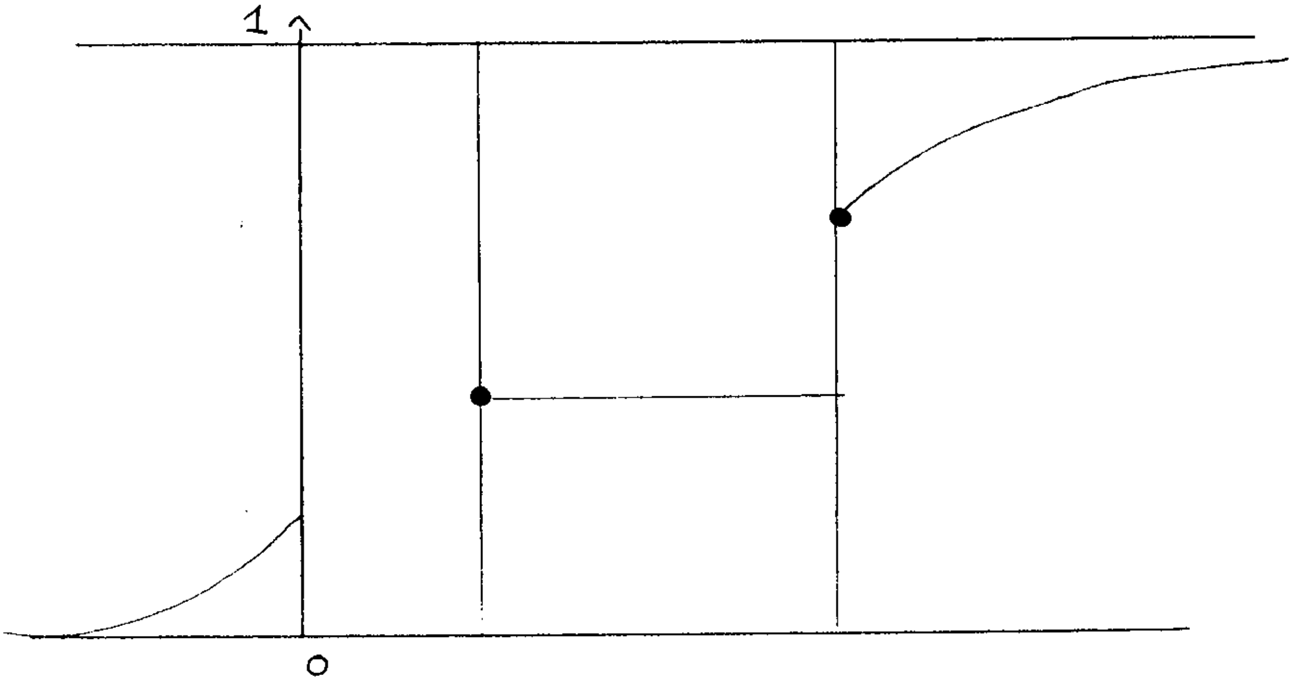
ch. 2. VARIABLES ALEATOIRES (V.A).

(I) Fonction de repartition (f.r).

La loi d'1 v.A X est caracterisée par sa fonct de repartition
$F(x) = P(X \leqslant x)$.



$F(x) = P(X \leqslant x)$.

Proprietes d'1 fonction de répartition.

1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$
2) $F(-\infty) = 0$
3) $F(+\infty) = 1$.
4) $F \nearrow$
5) F continue a droite

(II) V.A discretes fondamentales

Remarques

1) Les v.A. discretes que nous considèrerons prennent leurs valeur dans $\mathbb{Z}$ (entiers).

2) la loi d'1. v.A discrète peut être caractérisée soit par sa Fonction de repartition $P(X \leqslant x)$ (comme toute v.a) soit par sa distribution $P(X = x)$., $x \in \mathbb{Z}$

3) $$\left.\begin{array}{l} P(X = x) \geqslant 0 \\ \sum_{x=-\infty}^{+\infty} P(X = x) = 1 \end{array}\right\}$$

(1) Epreuve et variable aleatoire de BERNOULLI.

Epreuve de Bernoulli = 2 issues $\begin{cases} A & \text{« succès »} \quad P(A) = p \\ \bar{A} & \text{« echec »} \quad P(\bar{A}) = 1 - p = q \end{cases}$

V.A de Bernoulli

X	0	1
	q	p

② <u>Loi geométrique</u> X suit la loi geometrique de parametre p.

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

On repete independamment la m̂ epreuve de Bernoulli de parametre p jusqu'à l'obtention d'1 succes.
X = n° de l'epr ve où apparaît pour la 1er fois le succés
$k \geqslant 1$ $\boxed{P(X = k) = q^{k-1} p}$

- $$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = p + pq + pq^2 \ldots$$
$$= p\,(1 + q + q^2 + \ldots) = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

- $$P(X > k) = q^k p + q^{k+1} p + q^{k+2} p + \ldots =$$
$$= q^k p\,(1 + q + q^2 + \ldots) = q^k p \frac{1}{1-q}$$
$$= q^k \times \frac{p}{p} = q^k.$$

d'ou la fonction de repartition.

$$P(X \leqslant k) = 1 - q^k.$$

$$P(X > k+h / X > h) = \frac{P(X > k+h \text{ et } X > h)}{P(X > h)} = \frac{P(X > k+h)}{P(X > h)}$$

$$= \frac{q^{k+h}}{q^h} = q^k.$$

d'ou $\underline{P(X > k+h / X > h) = P(X > k)}$.

X "temps d'attente sans memoire"

Exercice

3 joueurs, jouent successivement

A B C A B C A B C

à 1 épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Gagne celui qui amène le succès pour la 1er fois
Quelles st les chances des 3 joueurs. ?

A	B	C	A	B	C	A	B	C ...
D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9 ...

$$\begin{aligned} P(A) &= P(D_1) + P(D_4) + P(D_7) + \dots \\ &= p + q^3 p + q^6 p + \dots \\ &= p(1 + q^3 + (q^3)^2 + (q^3)^3 + \dots \\ &= p \times \frac{1}{1-q^3} = \frac{p}{1-q^3}. \end{aligned}$$

$P(B) = q P(A)$
$P(C) = q^2 P(A)$

③ loi binômiale $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On repète independement <u>n fois</u>. la m̂ epreuve de Bernoulli de parametre p.

X = nbre de succés au cours des n tentatives.

$X \sim \mathcal{B}(n,p)$

$k \in \overline{0,n}$ $\qquad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

<u>Exercice</u>

On a $\frac{1}{5}$ de chance de toucher 1 cible

On procède a 5 tirs

X = nbr de tir reussi parmi les 5.

$X \sim \mathcal{B}(5 ; \frac{1}{5})$.

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$$
$$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 \simeq \frac{2}{3}$$

Chercher le nombre minimum n. de tir à effectuer $(X \sim \mathcal{B}(n ; \frac{1}{5}))$

pour que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

$$1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$= 1 - 0,8^n \geqslant 0,99.$$

$$0{,}8^n \leqslant 0{,}01$$

$$n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} = 20{,}6$$

$$n \geqslant 21.$$

La loi binomiale se présente en pratique sous les 2 formes suivantes

a) <u>$\mathcal{B}(n,p)$ approximation d'1 loi hypergeométrique.</u>

on pose $\quad p = \dfrac{M}{N} \qquad q = \dfrac{N-M}{N} \qquad$ N boules $\quad M \;\circ$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad N-M \;\bullet$

on tire en bloc n. boules (« n - echantillon »)
X = nombre de boules blanches ds l'e n - echantillon

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = P(X=k).$$

Hypothese : $n \ll N \quad (n \leqslant M) \quad (n \leqslant N-M)$

n est negligeable par rapport a N

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \underbrace{\frac{\overbrace{M(M-1)\ldots(M-k+1)}^{k}}{N(N-1)\ \ (N-k+1)}}_{\simeq} \times \underbrace{\frac{\overbrace{(N-M)\ldots\ \ (N-M-n+k+1)}^{n-k}}{(N-k)\ldots\ \ (N-n+1)}}_{\simeq}$$

$$= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

7/11

Lorsque la taille de l'echantillon est négligeable par rapport a la taille de la population, on peut approximer 1 loi hypergeométrique X par 1 loi binomiale

$$X \# \mathcal{B}(n.p)$$

(approximée).

Exercice

1 maladie touche 1 personne sur 200

On examine au hasard 200 personnes.

X = nbr. de malades parmi les 200 personnes.

$X \# \mathcal{B}(200, \frac{1}{200})$.

1) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$

$$1 - \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{200} \simeq 1 - e^{-1} \simeq \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Rappel} = \\ \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{x}.\end{array}}$$

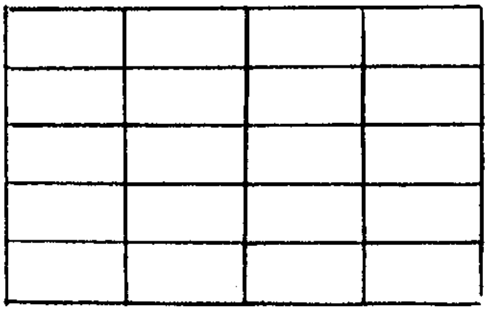
2) n minimun de personne à examiner pour que $P(x \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$

$X \# \mathcal{B}(n, \frac{1}{200})$.

$n \simeq 900$

b) Modèle du cake aux raisins.

On a 1 kg de pâte et on veut faire 20 petits gâteaux



On met au hasard n grains de raisins

X = nbr. de raisins pour chaque part.

On cherche n pour que $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$.

$X \sim \mathcal{B}(n\,;\frac{1}{20})$.

$P(X \geq 1) \geq 0{,}99$ $\quad$ n min $\simeq 90$

X = nbre de trucs par machin $\Rightarrow X \sim \mathcal{B}(T\,;\frac{1}{M})$

CONDITIONS : IID

où T = nbre de trucs.

M = nbre de Machins.

Exemple 1 -

Ds 1 livre de 300 pages il y a 120 erreurs d'impression

X = nbr. d'erreurs par pages

$X \sim \mathcal{B}(120, \frac{1}{300})$

Exemple 2.

Durant 6 heures d'observation 1 nuit d'aout.
On a observe 700 étoiles filantes
X = nb d'etoiles filantes par minutes
$X \sim B(700 ; \frac{1}{6 \times 60})$.

$X \sim B(700 ; \frac{1}{360})$.

(4) Loi de poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $\lambda > 0$

$k \geqslant 0$ $\boxed{P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}$

Verification.

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = 1$$

$X_n \sim B(n ; \frac{\lambda}{n})$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

$$= \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \times n \times \dots \times n}}_{\longrightarrow 1} \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}}$$

$$\longrightarrow 1 \times \frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\lambda}$$

Theorème

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = k) = \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right) = P(X = k).$$

En pratique,

Pour n « assez grand $(n \geqslant 100)$ »

$\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n}) \# \mathcal{P}(\lambda)$

on peut remplacer $\mathcal{B}(n; \frac{\lambda}{n})$ par $\mathcal{P}(\lambda)$

Pour n « assez grand » et p « assez petit » une loi binomiale $\mathcal{B}(n.p)$ pourra être remplacée par 1 loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda = n \times p$

<u>Exemple</u>

$X_1 \sim \mathcal{B}(200; \frac{1}{200}) \# \mathcal{P}(1) \sim Y$

$$P(X_1 = 0) = \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{200} \qquad P(Y = 0) = e^{-1} = 0,368$$

$= e^{-1}$

$= (0,995)^{200}$

$= 0,367$

$X_2 \sim \mathcal{B}(100, \frac{1}{100}) \# \mathcal{P}(1) \sim Y$

$$P(X_2 = 0) = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \qquad P(Y = 0) = e^{-1} = 0,368$$

$= (0,99)^{100}$

$= 0,366$

$X_3 \sim B(50; \frac{1}{50})$ # $P(1) \sim Y$

$P(X_3 = 0) = (1 - \frac{1}{50})^{50}$ $\quad P(Y=0) = e^{-1} = 0{,}368$.

$= 0{,}98^{50}$

$= 0{,}364$.

Remarque 2.

En pratique n" est tjs assez grand " dc en fait c'est quand p " sera assez petit " que l'on remplacera 1 loi binômiale par 1 loi de Poisson.

Exemple = Lecture de

$\lambda = 3 \qquad X \sim P(3)$

$P(X=4) = P(X \leqslant 4) - P(X \leqslant 3) = 0{,}815 - 0{,}647 =$

$P(X=0) = 0{,}049 \simeq 5\,\%$

$P(1 \leqslant X \leqslant 5) = P(X \leqslant 5) - P(X \leqslant 0) = 0{,}916 - 0{,}049 = 0{,}867$

Exercice

Avec 100 kg de verre liquide on veut fabriquer 100 bouteilles
Ds les 100 kg de verre, il y a 30 pierres
Toute bouteille contenant au moins 1 pierre est jetée
Calculer le pourcentage de rebut ?

1) X = nbr de pierres par bouteille

$X \sim \mathcal{B}(30, \frac{1}{100}) \quad \# \quad \mathcal{P}(0,3)$

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}74 = 26\% \simeq \frac{1}{4}$

$X \sim \mathcal{B}(30, \frac{1}{100})$, calculer $P(X \geqslant 1)$?

avec $\mathcal{P}(0,3)$

2) 100 kg $\longrightarrow$ B bouteilles

P pierres

$X \sim \mathcal{B}(P ; \frac{1}{B}) . \quad \# \; P(\frac{P}{B})$.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$

$= (1 - e^{-\frac{P}{B}}) \downarrow$ il faut que $e^{-\frac{B}{B}}$ soit la + grande possible

$\downarrow (\frac{P}{B}) = (-\frac{P}{B}) \uparrow = e^{-\frac{P}{B}} \uparrow$

3) 30 pierres

100 kg $\longrightarrow$ 300 bouteilles

$X \sim \mathcal{B}(30 ; \frac{1}{300}) \qquad X \sim P(0,1)$

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$

$= 1 - (0{,}99)^{300}$

$= 0{,}096$

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$

$= 1 - 0{,}904$

$= 0{,}096$

Exercice = Exam partielle 96.

2% des articles defectueux. livrés en caisse de n (≥ 100)

Y_n = nombre d'articles defectueux ds 1 caisse

1) loi de Y_n ?

$Y_n \sim \underline{\mathcal{B}(n, \frac{2}{100})}$. # $P\left(\frac{2n}{100}\right) \sim X_n$

n=100

calculer ?

$$P(Y_{100} = 1) = \binom{n=100}{k=1} \times 0{,}02^{1} \times 0{,}98^{99} = \underline{0{,}27065}.$$

$$P(X_{100} = 1) = e^{-2} \times \frac{2^1}{1!} = \underline{0{,}27067}$$

13/11