

M1, Optimisation et éléments finis

Espace d'approximation, élément de référence et fonctions de base

Supposons qu'un maillage de notre domaine de calcul Ω , ici l'intervalle (a, b) , soit donné. Ce maillage est constitué d'un ensemble de cellules $K_{ic} = [s_{ic}, s_{ic+1}]$, $ic = 1, \dots, nb_cells$. Ainsi nous pouvons écrire

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{ic=1}^{nb_cells} K_{ic} = \bigcup_{ic=1}^{nb_cells} [s_{ic}, s_{ic+1}].$$

Les approximations numériques que nous allons étudier par la suite seront des éléments des ensembles suivants

$$V_h^k = \left\{ v \in C^0(\Omega) \text{ tel que } v|_{K_{ic}} \in \mathbb{P}^k, \forall ic = 1, \dots, nb_cells \right\},$$

pour $k = 1$ ou 2 où \mathbb{P}^k est l'ensemble des polynôme de degré inférieur ou égal à k . Nous chercherons donc des fonctions continues polynomiales par morceaux.

Sur chacune des cellules, une fonction de V_h^k est un polynôme de degré k et est ainsi entièrement caractérisée par la donnée de $k + 1$ valeurs réelles. Nous disons qu'il y a $k + 1$ degrés de liberté locaux ('*ddl_loc*' en abrégé). Nous choisissons les degrés de liberté comme les valeurs de la fonction en certains points de chacune des cellules. Nous appelons ces points des noeuds. Il y aura donc '*nb_ddl_loc*' (le nombre de degré de liberté locaux) noeuds par cellules.

Sur le domaine Ω complet, il faut de plus assurer la continuité des fonctions de V_h^k aux interfaces entre deux cellules. Puisque nos fonctions sont caractérisées sur chacune des cellules par leur valeurs aux noeuds, il suffit pour garantir la continuité aux interfaces de placer un noeud sur celles-ci et de choisir la même valeur pour le degré de liberté local associé à chacune des cellules de part et d'autre de l'interface. Ainsi certains noeuds sont partagés entre les cellules et le nombre total de noeuds ou de degré de liberté diffère de '*nb_cells* \times *nb_ddl_loc*'. Nous notons *nb_ddl_glob* le nombre de degré de liberté total ou global (par opposition à local).

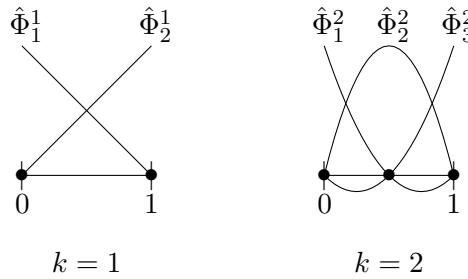
Ainsi, dans le cas $k = 1$, les noeuds x_i , $i = 1, \dots, nb_ddl_glob$, seront placés aux sommets du maillage et pour $k = 2$, il seront placés aux sommets du maillage et aux centres des cellules.

Pour nous aider à décrire V_h^k à l'aide de fonctions de base, nous allons nous placer sur un élément de référence, l'intervalle $\hat{K} = [0, 1]$, et nous obtiendrons les fonctions de base sur chacun des éléments K grâce à un transfert entre ces éléments et l'élément de référence.

Ainsi nous choisissons *nb_ddl_loc* points de \hat{K} , notés \hat{x}_j^k , $j = 1, \dots, nb_ddl_loc$. Pour $k = 1$, nous notons $\hat{x}_1^1 = 0$ et $\hat{x}_2^1 = 1$ les deux extrémités de l'intervalle de référence. Pour $k = 2$, nous notons $\hat{x}_1^2 = 0$, $\hat{x}_2^2 = 0.5$ et $\hat{x}_3^2 = 1$ les deux extrémités et le centre de l'intervalle de référence. Une base de \mathbb{P}^k est alors obtenue en considérant les fonctions $\hat{\Phi}_j^k$ de \mathbb{P}^k telles que

$$\hat{\Phi}_j^k(\hat{x}_i^k) = \delta_{ij}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq nb_ddl_loc.$$

Ces fonctions de base sur l'élément de référence sont représentées sur le graphique ci-dessous pour $k = 1$ et $k = 2$.



Exercice 1 : Compléter le fichier `element_de_reference_1D.sci` en ajoutant les définitions des fonctions de base sur l'élément de référence (leur valeur ainsi que leur dérivée).

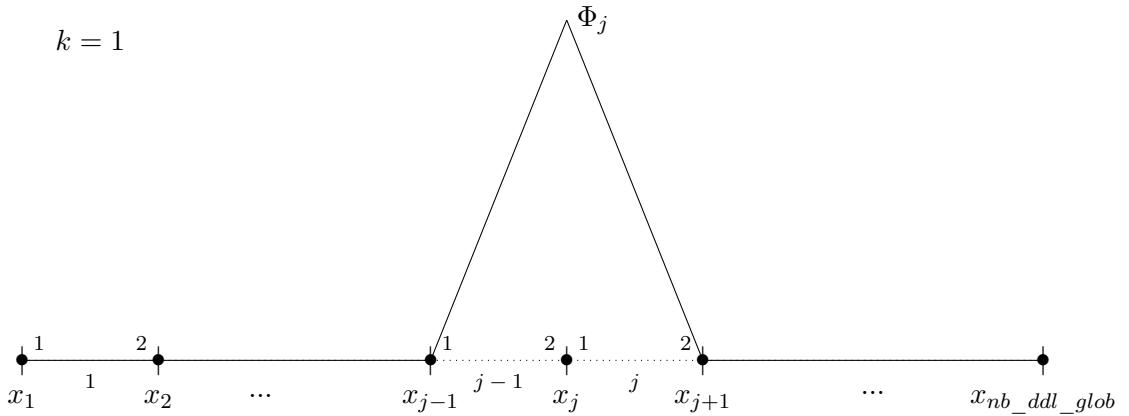
Pour réussir à faire le lien entre l'élément de référence et les autres éléments, entre les degrés de liberté locaux et les degrés de liberté globaux, il faut introduire les outils suivants :

- l'application $F_{ic} : \hat{x} \mapsto (s_{ic+1} - s_{ic})\hat{x} + s_{ic}$ qui envoie l'élément de référence $\hat{K} = [0, 1]$ sur $K_{ic} = [s_{ic}, s_{ic+1}]$.
- une numérotation globale des degrés de liberté. Elle se présente sous la forme d'un tableau $NumGlob$ de taille $nb_ddl_loc \times nb_cells$. $ig = NumGlob(il, ic)$ contient le numéro global du degré de liberté local il de la cellule de numéro ic .

Ceci nous permet de définir des fonctions de base globale. Considérons un noeud du maillage. Notons ig le numéro du degré de liberté global associé. Considérons une cellule K_{ic} (de numéro ic) qui contient ce noeud et notons il le numéro du degré de liberté local associé dans la cellule K_{ic} . Nous définissons Φ_{ig} sur la cellule K_{ic} par

$$\Phi_{ig|K_{ic}} \circ F_{ic} = \hat{\Phi}_{il}.$$

La fonction Φ_{ig} est nulle sur tous les éléments qui ne contiennent pas le noeud. Ceci se comprend bien sur le dessin suivant réalisé pour $k = 1$. Les fonctions de base Φ_i , $i = 1, \dots, nb_ddl_glob$ vérifie $\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}$.



Pour illustrer l'utilisation de l'élément de référence, nous allons calculer une approximation de l'erreur err en norme L^2 entre une fonction donnée uex et une fonction de V_h^k définie par son ensemble de degrés de liberté globaux uu :

$$err^2 = \int_a^b \left| uex(x) - \sum_{ig=1}^{nb_ddl_glob} uu_{ig} \Phi_{ig}(x) \right|^2 dx.$$

Le calcul de err^2 se fait de la manière suivante. L'intégrale sur le domaine $[a, b]$ s'obtient comme la somme des intégrales sur chaque cellule du maillage

$$err^2 = \sum_{ic=1}^{nb_cells} \int_{s_{ic}}^{s_{ic+1}} \left| uex(x) - \sum_{ig=1}^{nb_ddl_glob} uu_{ig} \Phi_{ig}(x) \right|^2 dx.$$

Les changements de variable $x = F_{ic}(\hat{x})$ permettent de ramener chacune des intégrales à une intégrale sur l'élément de référence $[0, 1]$

$$err^2 = \sum_{ic=1}^{nb_cells} (s_{ic+1} - s_{ic}) \int_0^1 \left| uex(F_{ic}(\hat{x})) - \sum_{ig=1}^{nb_ddl_glob} uu_{ig} \Phi_{ig}(F_{ic}(\hat{x})) \right|^2 d\hat{x}.$$

Ensuite, il faut noter que la fonction de base Φ_{ig} est nulle sur toutes les cellules qui ne contiennent pas le noeud x_{ig} . Autrement dit, sur chacune des cellules, seul les noeuds contenus dans cette cellule apportent une contribution à la somme. Il est possible de remplacer la somme sur l'ensemble des degrés de liberté globaux par une somme sur les degrés de liberté locaux à la cellule. Nous obtenons

$$err^2 = \sum_{ic=1}^{nb_cells} (s_{ic+1} - s_{ic}) \int_0^1 \left| uex(F_{ic}(\hat{x})) - \sum_{il=1}^{nb_ddl_loc} uu_{NumGlob(il,ic)} \hat{\Phi}_{il}(\hat{x}) \right|^2 d\hat{x}.$$

Enfin, pour finir une règle de quadrature associée aux points ξ_i et aux poids ω_i est utilisée pour approcher les intégrales sur l'élément de référence

$$err^2 \sim \sum_{ic=1}^{nb_cells} (s_{ic+1} - s_{ic}) \sum_{i=1}^n \omega_i \left| uex((s_{ic+1} - s_{ic})\xi_i + s_{ic}) - \sum_{il=1}^{nb_ddl_loc} uu_{NumGlob(il,ic)} \hat{\Phi}_{il}(\xi_i) \right|^2.$$

Exercice 2 : Compléter la fonction *ErreurL2* dans le fichier *assemblage_1D.sci*. Elle permet d'effectuer le calcul expliqué ci-dessus. Ses paramètres d'entrée sont dans l'ordre *ueexact* la fonction *uex*, *uu* le vecteur des degrés de liberté *uu*, *degre_EF* le degré de l'élément fini $k = 1$ ou 2 , *degre_quadrature* le degré de la règle de quadrature utilisée, *Sommets* le tableau des coordonnées des sommets du maillage, *nb_cells* le nombre de cellules contenues dans le maillage, *Cellule* le tableau indiquant les numéros des deux sommets de chacune des cellules, *NumGlob* la numérotation globale des noeuds du maillage.

Pour tester cette fonction, implémenter, dans un fichier *TestErreurL2.sce*, le calcul de la valeur suivante

$$I = \int_0^{0.5} |4x(1-x) - 2x|^2 dx + \int_{0.5}^1 |4x(1-x) - (2-2x)|^2 dx.$$

Pour cela, il est possible d'utiliser un maillage avec 2 cellules et *degre_EF* = 1 : *Sommets* = $[0, 0.5, 1]$, *nb_cells* = 2, *Cellules* = $[1, 2; 2, 3]$, *NumGlob* = $[1, 2; 2, 3]$. Comme les fonctions à intégrer sont polynomiales de degré 4, *degre_quadrature* = 4 conduira à un calcul exact. Il vous reste à identifier les valeurs à donner à *ueexact* et *uu* pour effectuer le calcul de *I*. Comparer la valeur obtenue à la valeur exacte $I = 1/30$.

Que pensez-vous obtenir dans le cas particulier où $\Omega =]0, 1[$, où le maillage possède seulement deux cellules comme ci-dessus mais $k = 2$, $ue(x) = 4x(1-x)$ et $uu = [0, 0.75, 1, 0.75, 0]$? Vérifier ce résultat à l'aide de la fonction *ErreurL2*.