

# OPTIMISATION DIFFERENTIABLE

23 mai 2023

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à l'optimisation</b>	<b>2</b>
1.1	Introduction et Notations . . . . .	2
1.2	Notion d'infimum, supremum, minimum, maximum . . . . .	2
1.3	Notion de programme mathématique . . . . .	4
1.3.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	4
1.3.2	Typologie des programmes mathématiques . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Optimisation sans contraintes</b>	<b>10</b>
2.1	Résultats d'existence et unicité . . . . .	10
2.2	Conditions d'optimalité . . . . .	12
2.2.1	Conditions d'optimalité du premier ordre . . . . .	12
2.2.2	Conditions d'optimalité du second ordre . . . . .	13
2.2.3	Récapitulation des conditions . . . . .	14
2.3	Méthodes numériques . . . . .	15
2.3.1	Algorithmes et vitesse de convergence . . . . .	16
2.3.2	Méthodes de descente . . . . .	16
2.3.3	Méthode de Newton . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Optimisation avec contraintes</b>	<b>19</b>
3.1	Résultats d'existence et d'unicité . . . . .	19
3.2	Conditions d'optimalité . . . . .	20
3.2.1	Cas des contraintes d'égalité . . . . .	20
3.2.2	Problème avec contraintes d'inégalité . . . . .	21
3.2.3	Problème avec contraintes d'égalité et d'inégalité . . . . .	22

# Chapitre 1

## Introduction à l'optimisation

### 1.1 Introduction et Notations

L'optimisation, c'est-à-dire les techniques permettant de chercher les minima ou les maxima de fonctions ou de fonctionnelles intervient dans pratiquement tous les processus de modélisation actuels. Qu'il s'agisse de problèmes directs (ajustement de données, contrôle optimal, résolution des systèmes linéaires par moindres carrés, etc) ou inverses (identification de paramètres), il est rare qu'un problème d'optimisation plus ou moins complexe n'intervienne pas à un stade donné de la modélisation et/ou de la simulation.

### 1.2 Notion d'infimum, supremum, minimum, maximum

On définit ici les notions d'infimum de supremum, minimum et de maximum qui sont des prérequis pour les démonstrations des résultats d'existence et d'unicité d'extrema d'une fonction donnée.

**Définition 1.2.1 (Minorant/Majorant)** Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

$m \in \mathbb{R}$  est un minorant de  $X$  si et seulement si

$$\forall x \in X, \quad m \leq x.$$

$M \in \mathbb{R}$  est un majorant de  $X$  si et seulement si

$$\forall x \in X, \quad x \leq M.$$

**Définition 1.2.2 (Infimum/Supremum)** Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

1) Si  $X$  est non vide et admet des minorants, par définition l'infimum de  $X$  est le plus grand des minorants de  $X$ . On le note  $\inf(X)$  ou  $\inf_{x \in X}(x)$ .

Si  $X$  est non vide et n'admet pas de minorants, par convention, l'infimum de  $X$  est égal à  $-\infty$ .

Si  $X = \emptyset$ , par convention son infimum est égal à  $+\infty$  :  $\inf(\emptyset) = +\infty$

2) Si  $X$  est non vide et admet des majorants, par définition le supremum de  $X$  noté  $\sup(X)$  ou  $\sup_{x \in X}(x)$  est le plus petit des majorants de  $X$ .

Si  $X$  est non vide et n'admet pas de majorants, par convention, le supremum de  $X$  est égal à  $+\infty$ .

Si  $X = \emptyset$ , par convention  $\sup(\emptyset) = -\infty$ .

Ces notions sont aussi caractérisées par :

**Proposition 1.2.1** 1) Si  $X$  est non vide et admet des minorants,

$$m = \inf(X) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x & \forall x \in X \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X : m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon. \end{cases}$$

2) Si  $X$  est non vide et admet des majorants,

$$M = \sup(X) \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq x & \forall x \in X \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X : M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M. \end{cases}$$

On a le résultat suivant.

**Proposition 1.2.2** Pour tout  $X \subset \mathbb{R}$ , on a  $\sup_{x \in X}(x) = -\inf_{x \in X}(-x)$

**Définition 1.2.3 (Suite minimisante/Suite maximisante)** Soit  $X$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

On appelle suite minimisante de  $X$ , toute suite  $\{x_k\}$  d'éléments de  $X$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \inf(X).$$

On appelle suite maximisante de  $X$ , toute suite  $\{x_k\}$  d'éléments de  $X$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \sup(X).$$

On montre que

**Proposition 1.2.3** Si  $X$  est une partie non vide  $\mathbb{R}$ , alors il existe toujours une suite minimisante de  $X$  et une suite maximisante de  $X$ .

**Preuve :** Montrons d'abord l'existence d'une suite minimisante. Comme  $X$  est non vide, alors nécessairement  $\inf(X) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

i)  $\inf(X) \in \mathbb{R}$ . D'après la proposition (1.2.1)

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \exists x_k \in X : \inf(X) \leq x_k \leq \inf(X) + \frac{1}{k}.$$

La suite  $\{x_k\}$  ainsi construite converge vers  $\inf(X)$ .

ii)  $\inf(X) = -\infty$ .  $X$  admet seulement  $-\infty$  comme minorant. Par conséquent pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_k \in X$  tel que

$$x_k \leq -k$$

La suite  $\{x_k\}$  ainsi construite converge vers  $-\infty$ .

On montre de façon analogue l'existence d'une suite maximisante. □

**Définition 1.2.4 (Minimum/Maximum)** Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $X$  a un minimum si  $\inf(X) \in X$ . Dans ce cas, on note  $\min(X) = \inf(X)$ .

On dit que  $X$  a un maximum si  $\sup(X) \in X$ . Dans ce cas, on note  $\max(X) = \sup(X)$ .

## 1.3 Notion de programme mathématique

### 1.3.1 Définitions et premières propriétés

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $D_f$  et  $C$  une partie de  $D_f$ .

**Définition 1.3.1** On dit que la fonction  $f$  atteint un minimum sur  $C$  au point  $x^* \in C$  si on a :

$$\forall x \in C, \quad f(x^*) \leq f(x).$$

Dans ce cas le réel  $\alpha = f(x^*)$  est dit valeur minimale de  $f$  sur  $C$ .

De la même manière, on dit que la fonction  $f$  atteint un maximum sur  $C$  au point  $x^* \in C$  si on a :

$$\forall x \in C, \quad f(x^*) \geq f(x).$$

Dans ce cas,  $\beta = f(x^*)$  est dit valeur maximale de  $f$  sur  $C$ .

Minimiser la fonction  $f$  sur  $C$  consiste à déterminer la valeur minimale (le minimum) de  $f$  sur  $C$  ainsi que les points de  $C$  où  $f$  atteint cette valeur minimale. Dans ce cas on dit qu'on a résolu un programme de minimisation de  $f$  sur  $C$ . On le note symboliquement :

$$\min_{x \in C} f(x).$$

Les points où la valeur minimale est atteinte (on dit aussi les points qui réalisent le minimum) sont les solutions du programme mathématique de minimisation de  $f$  sur  $C$ . On note cet ensemble  $\arg \min\{f(x) : x \in C\}$ . Compte tenu de ce qui précède, on a :

$$\arg \min\{f(x) : x \in C\} = \{x^* \in C : \forall x \in C, \quad f(x^*) \leq f(x)\}.$$

Maximiser la fonction  $f$  sur  $C$  consiste à déterminer la valeur maximale (le maximum) de  $f$  sur  $C$  ainsi que le ou les point(s) de  $C$  où  $f$  atteint cette valeur maximale. Dans ce cas on dit qu'on a résolu un programme mathématique de maximisation de  $f$  sur  $C$  et on le note symboliquement :

$$\max_{x \in C} f(x).$$

Les points où la valeur maximale est atteinte (on dit aussi les points qui réalisent le maximum) sont les solutions optimales du programme de maximisation de  $f$  sur  $C$ . On note cet ensemble  $\arg \max\{f(x) : x \in C\}$ . On a :

$$\arg \max\{f(x) : x \in C\} = \{x^* \in C : \forall x \in C, \quad f(x^*) \geq f(x)\}.$$

Optimiser  $f$  sur  $C$  consiste à minimiser et à maximiser la fonction  $f$  sur  $C$ . On le note symboliquement :

$$\text{opt}_{x \in C} f(x).$$

Etant donné le programme mathématique "optimiser  $f$  sur  $C$ ", les éléments de  $C$  sont appelés solutions réalisables ou admissibles du programme et la fonction  $f$ , fonction-objectif ou critère du programme. La valeur minimale ou maximale selon qu'il s'agisse d'un problème de minimisation ou de maximisation est dite valeur optimale. Les points de  $C$  qui réalisent cet optimum sont dits solutions optimales.

#### Exemple 1.3.1

1) Considérons le programme de minimisation "minimiser  $f(x) = x^2 + 1$  sur  $\mathbb{R}$ ". On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 1 = f(0).$$

Donc la fonction a un minimum en  $x^* = 0$ .

2) Le programme de maximisation "maximiser  $f(x) = x + 3$  sur  $\mathbb{R}$ " n'a pas de solution. En effet supposons que la fonction  $f$  atteigne son maximum en un point  $x^*$ . On a alors

$$\forall x \in C, \quad f(x^*) \geq f(x).$$

Or la fonction  $f$  est strictement croissante. Ce qui entraîne que :

$$\forall x > x^*, \quad f(x) > f(x^*).$$

Ce qui est contradictoire.

On a alors

$$\arg \max\{f(x) = x + 3 : x \in \mathbb{R}\} = \emptyset.$$

On montre de même que le programme de minimisation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  n'a pas de solution.

A priori, un problème d'optimisation peut n'admettre aucune solution ou en admettre au moins une.

Résoudre le programme de minimisation  $\min_{x \in C} f(x)$  (respectivement de maximisation  $\max_{x \in C} f(x)$ ) consiste à déterminer les points  $x^* \in C$  tels que  $\forall x \in C, f(x^*) \leq f(x)$  (respectivement  $f(x^*) \geq f(x)$ ).

Dans ce cas on dit  $f$  passe par un minimum global (respectivement un maximum global) en  $x^*$  sur  $C$ . Et  $x^*$  est alors dite solution optimale globale du programme d'optimisation.

Outre les solutions optimales globales, on distingue aussi les solutions optimales locales définies comme suit :

**Définition 1.3.2** *Un élément  $x^* \in C$  est dit point de minimum local (respectivement de maximum local) de  $f$  sur  $C$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $x^*$  tel que :*

$$\forall x \in C \cap V, \quad f(x) \geq f(x^*) \text{ (respectivement } f(x) \leq f(x^*)\text{).}$$

Dans la suite on distinguera systématiquement les optima locaux appelés également optima relatifs et les optima globaux appelés également optima absous. Tout optimum global a évidemment les propriétés d'un optimum local alors que la réciproque est fausse ; un optimum local peut ne pas être un optimum global.

Très souvent la nature des problèmes d'optimisation conduit à privilégier la recherche d'optima globaux plutôt que d'optima locaux. On peut penser que pour détecter les minima (resp. maxima) globaux il suffit de déterminer les minima (resp. maxima) locaux puis de repérer le plus petit (resp. le plus grand). Cette stratégie est logique mais parfois difficile à mettre en œuvre surtout dans les problèmes théoriques.

Dans le cas convexe le problème ne se pose pas comme indiqué dans le théorème ci-dessous.

**Théorème 1.3.1** *Si  $C$  est convexe et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe (respectivement concave) sur  $C$ , alors :*

- i) tout minimum (resp. maximum) local de  $f$  sur  $C$  est un minimum (resp. maximum) global de  $f$  sur  $C$ ,
- ii) l'ensemble des solutions optimales globales  $\arg \min\{f(x) : x \in C\}$  (resp.  $\arg \max\{f(x) : x \in C\}$ ) est convexe (il peut être vide).

**Preuve :**

On donne la démonstration pour  $f$  convexe.

1) Montrons d'abord par l'absurde que tout minimum local est nécessairement global.

Soit  $x^*$  un minimum local qui n'est pas un minimum global. Il existe un  $r > 0$  tel que :

$$\forall x \in B(x^*, r) \cap C, \quad f(x) \geq f(x^*).$$

Comme  $x^*$  n'est pas minimum global, il existe  $x^{**}$  tel que  $f(x^{**}) < f(x^*)$ .

Puisque  $C$  est convexe alors,

$$\forall \lambda \in ]0, 1[, (1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**} \in C.$$

Et puisque  $f$  est convexe sur  $C$ , on aura :

$$f((1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**}) \leq (1 - \lambda)f(x^*) + \lambda f(x^{**}),$$

ce qui entraîne que

$$f((1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**}) < f(x^*).$$

Choisissons  $\lambda$  proche de 0 de sorte que  $(1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**}$  soit dans  $B(x^*, r)$ . Alors, on a :

$$f((1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**}) < f(x^*).$$

Ce qui contredit le fait que  $f$  atteint un minimum local en  $x^*$  sur la boule ouverte  $B(x^*, r)$ .

2) Considérons à présent l'ensemble des solutions optimales

$$A = \arg \min \{f(x) : x \in C\}$$

Si  $A$  est vide, alors c'est terminé, il est convexe.

Si  $A$  est réduit à un singleton, là aussi c'est terminé, il est convexe.

Supposons que  $A$  a plus d'un élément, alors notons  $x^*$  et  $x^{**}$  deux éléments distincts quelconques. Si  $\alpha$  est la valeur optimale, on a alors :

$$f(x^*) = f(x^{**}) = \alpha.$$

Comme  $f$  est convexe, on a

$$\forall \lambda \in ]0, 1[, \alpha \leq f((1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**}) \leq (1 - \lambda)f(x^*) + \lambda f(x^{**}) = \alpha.$$

Donc on a

$$\forall \lambda \in ]0, 1[, f((1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**}) = \alpha.$$

Par suite

$$(1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**} \in A, \quad \forall \lambda \in ]0, 1[.$$

D'où le théorème. □

**Définition 1.3.3 (Optimum large)** La fonction  $f$  atteint un minimum (respectivement : un maximum) global au sens large en  $x^*$  sur  $C$  si et seulement si :

$$\forall x \in C, \quad f(x) \geq f(x^*) \text{ (respectivement } f(x) \leq f(x^*)\text{).}$$

La fonction  $f$  atteint un minimum (respectivement : un maximum) local au sens large en  $x^*$  sur  $C$  si et seulement s'il existe un voisinage  $V$  de  $x^*$  tel que :

$$\forall x \in C \cap V, \quad f(x) \geq f(x^*) \text{ (respectivement } f(x) \leq f(x^*)\text{).}$$

**Définition 1.3.4 (Optimum strict)** La fonction  $f$  atteint un minimum (respectivement : un maximum) global strict en  $x^*$  sur  $C$  si et seulement si :

$$\forall x \in C, x \neq x^*, \quad f(x) > f(x^*) \text{ (respectivement } f(x) < f(x^*)\text{).}$$

La fonction  $f$  atteint un minimum (respectivement : un maximum) local strict en  $x^*$  sur  $C$  si et seulement s'il existe un voisinage  $V$  de  $x^*$  tel que :

$$\forall x \in C \cap V, x \neq x^*, \quad f(x) > f(x^*) \text{ (respectivement } f(x) < f(x^*)\text{).}$$

L'hypothèse de convexité ou de concavité stricte de la fonction-objectif sur un domaine convexe garantit l'unicité de la solution globale s'il y en a une.

**Théorème 1.3.2** Si  $C$  est convexe et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement convexe (respectivement strictement concave) sur  $C$ , alors : l'ensemble des solutions optimales globales  $\arg \min\{f(x) : x \in C\}$  (resp.  $\arg \max\{f(x) : x \in C\}$ ) est soit vide soit réduit à un singleton.

On donne à présent deux propriétés très générales des problèmes d'optimisation. En pratique elles peuvent permettre de transformer un problème en un autre problème parfaitement équivalent qui peut être plus simple à résoudre.

**Proposition 1.3.1** On a :

$$\max_{x \in C} f(x) = -\min_{x \in C} (-f)(x).$$

Autrement dit la fonction  $f$  atteint un maximum sur  $C$  en un point  $x^*$  si et seulement si la fonction  $-f$  atteint un minimum sur  $C$  en  $x^*$ .

**Preuve :** Si  $f$  atteint un maximum sur  $C$  en un point  $x^*$ , alors par définition,

$$\forall x \in C, \quad f(x) \leq f(x^*).$$

En multipliant par  $-1$  les deux membres de l'inégalité, on a :

$$\forall x \in C, \quad -f(x) \leq -f(x^*).$$

Ce qui signifie que  $(-f)$  atteint un minimum en  $x^*$ .

La réciproque est immédiate □

D'après cette proposition, les résultats concernant les programmes de maximisation peuvent être transposés dans les programmes de minimisation, à condition bien entendu de changer le signe de la fonction-objectif. Par conséquent, tout programme mathématique peut se ramener à un programme de minimisation.

**Théorème 1.3.3** Soit le programme de minimisation "minimiser  $f$  sur  $C$ " dans lequel l'ensemble-image  $f(C)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue strictement croissante sur  $f(C)$ .

La fonction  $f$  atteint un minimum sur  $C$  en un point  $x^*$  si et seulement si la fonction  $\varphi \circ f$  atteint un minimum sur  $C$  en  $x^*$ .

### Preuve :

Condition nécessaire :

Comme  $x^*$  minimise  $f$  sur  $C$ , on a :

$$\forall x \in C, \quad f(x^*) \leq f(x).$$

Ce qui entraîne (puisque  $\varphi$  est croissante sur  $f(C)$ ) :

$$\forall x \in C, \quad \varphi \circ f(x^*) \leq \varphi \circ f(x).$$

Donc  $x^*$  minimise  $\varphi \circ f$  sur  $C$ .

Condition suffisante :

Si  $x^*$  minimise  $\varphi \circ f$  sur  $C$ , on a :

$$\forall x \in C, \quad \varphi \circ f(x^*) \leq \varphi \circ f(x).$$

Puisque  $\varphi$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $f(C)$ , elle réalise une bijection de  $f(C)$  sur  $\varphi(f(C))$  et admet donc une bijection réciproque  $\varphi^{-1}$  définie sur l'intervalle  $\varphi(f(C))$  et à valeur dans  $f(C)$ . Cette bijection réciproque a même sens de variation que  $\varphi$ . Alors pour tout  $x \in C$  :

$$\varphi \circ f(x^*) \leq \varphi \circ f(x)$$

entraîne que :

$$\varphi^{-1}(\varphi \circ f(x^*)) \leq \varphi^{-1}(\varphi \circ f(x))$$

c'est-à-dire :

$$f(x^*) \leq f(x),$$

donc  $x^*$  minimise  $f$  sur  $C$ .

□

**Remarque 1.3.1** Ce résultat reste valable pour les problèmes de maximisation.

Ce théorème doit être utilisé pour rendre un problème d'optimisation plus maniable. Par exemple il est plus facile de résoudre le problème "maximiser  $f(x, y) = \frac{2}{3} \ln x + \frac{4}{5} \ln y$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ " que celui-ci "maximiser  $g(x, y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{4}{5}}$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ ".

### 1.3.2 Typologie des programmes mathématiques

On distingue plusieurs types de problèmes d'optimisation. Si l'ensemble des solutions réalisables est un sous-ensemble ouvert du domaine de définition de la fonction-objectif on a affaire à un problème d'optimisation sans contraintes ou libre et avec contraintes dans le cas contraire. Dans ce cas des problèmes avec contraintes très souvent l'ensemble des solutions réalisables est défini en compréhension par la donnée d'une liste de contraintes d'égalité ou d'inégalité. Une contrainte d'égalité se présente formellement comme une équation cartésienne du type  $h(x) = 0$  où  $h$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  et une contrainte d'inégalité, comme une inéquation du type  $g(x) \leq 0$  où  $g$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.3.5** - Un programme mathématique sans contraintes est du type  $\text{opt}_{x \in C} f(x)$  où  $C$  est un sous-ensemble ouvert de  $D_f$  ( $D_f$  étant le domaine de définition de  $f$ ).

- Un programme mathématique avec contraintes est de la forme  $\text{opt}_{x \in C} f(x)$  où  $C$  est défini par :

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \\ x \in \Omega. \end{array} \right\}$$

avec  $\Omega$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et les fonctions  $f$ , les  $g_i$  et  $h_j$  définies sur  $\mathbb{R}^n$ .

- Si  $C$  est un polyèdre convexe fermé et  $f$  affine on parle de programme non linéaire.
- Si  $C$  est un polyèdre convexe fermé et  $f$  quadratique, on parle de programme quadratique.

# Chapitre 2

## Optimisation sans contraintes

Dans cette partie nous nous intéressons aux problèmes du type

$$\min_{x \in \Omega} f(x)$$

où  $f$  est une fonction définie sur  $\Omega$  un sous-ensemble ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Ce problème d'optimisation étant donné, deux questions se posent : existe-t-il des solutions ? Et comment détecter les solutions éventuelles ? La théorie de l'optimisation affronte donc deux problèmes classiques en mathématiques : celui de l'existence et celui des méthodes de recherche.

Nous allons considérer et cela sans perdre de généralités que  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Il revient alors à s'intéresser au problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{P}$$

### 2.1 Résultats d'existence et unicité

On considère d'abord la définition suivante.

**Définition 2.1.1** *La fonction  $f$  est dite coercive (on dit aussi que  $f$  est infinie à l'infini) si on a :  $f(x) \rightarrow +\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$ .*

#### Exemple 2.1.1

- 1)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \|x\|$  est coercive.
- 2)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x, y) = x^2 - y^2$  n'est pas coercive.
- 3)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \langle a, x \rangle + b$  avec  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $b \in \mathbb{R}$  n'est pas coercive.
- 4)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$  est coercive sur  $\mathbb{R}^2$ .
- 5)  $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$  où  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est définie positive et  $b \in \mathbb{R}^n$  est coercive.

Pour montrer que  $f$  est coercive, on utilise souvent la proposition suivante :

**Proposition 2.1.1** *Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une application et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie*

$$f(x) \geq g(\|x\|) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$$

*alors  $f$  est infinie à l'infini.*

**Preuve :** Immédiate □

**Théorème 2.1.1** *Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et coercive (infinie à l'infini), alors il existe un point qui réalise le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Autrement dit, il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que*

$$f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

*C'est-à-dire que le problème (P) admet au moins une solution optimale.*

**Preuve :**

Soit  $\alpha = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) < +\infty$ . Soit  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite minimisante de  $f$  sur  $C$  c'est-à-dire une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^n$  telle que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \alpha < +\infty. \quad (2.1)$$

Montrons que la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée. Par l'absurde, on suppose qu'elle ne l'est pas c'est-à-dire qu'il existe une sous suite notée  $(x_{\varphi(k)})_k$  de  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_{\varphi(k)}\| = +\infty$ . Par coercivité de  $f$ , on a alors :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(k)}) = +\infty$ , ce qui contredit (2.1).

La suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est donc bornée : il existe alors une suite extraite notée  $(x_{\psi(k)})_k$  de  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . En utilisant maintenant la continuité de  $f$ , on a alors :

$$f(\bar{x}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{\psi(k)}) = \alpha.$$

On en déduit alors deux choses :  $\alpha > -\infty$  et  $\bar{x}$  solution du problème (P). □

**Théorème 2.1.2 (Condition suffisante d'existence de solution optimale)** *Considérons le problème (P). Si  $f$  est continue et s'il existe  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(\bar{x})\}$  soit borné alors le problème (P) admet au moins une solution optimale globale. Ce qui est le cas si  $f$  est continue et coercive.*

En ce qui concerne l'unicité de la solution optimale on a le théorème ci-dessous.

**Théorème 2.1.3 (Condition suffisante d'unicité)** *Si  $f$  est strictement convexe, alors le problème (P) a au plus une solution optimale globale.*

Ce théorème n'est pas une condition d'existence de minimum pour la fonction  $f$ . Par exemple la fonction  $f(x) = e^x$  est strictement convexe mais n'atteint pas son minimum sur  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 2.1.4 (Condition d'existence et d'unicité)** *Si  $f$  est continue, coercive et strictement convexe, alors le problème (P) admet une et une seule solution optimale globale.*

## 2.2 Conditions d'optimalité

### 2.2.1 Conditions d'optimalité du premier ordre

Les conditions que nous donnons ici concernent le cas où la fonction-objectif  $f$  est différentiable.  
On définit :

**Définition 2.2.1** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable. On dit que  $x^*$  est un point stationnaire ou critique de  $f$  si  $\nabla f(x^*) = 0$ .

On a le théorème :

**Théorème 2.2.1 (Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre)** On suppose que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction différentiable. Si  $x^*$  réalise un minimum local (global) de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ , alors on a  $\nabla f(x^*) = 0$ .

**Preuve :** Soit  $x^*$  réalisant un minimum local de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Le développement de Taylor au voisinage de  $x^*$  donne :

$$f(x) = f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle + \|x - x^*\| \varepsilon(x)$$

avec  $\lim_{x \rightarrow x^*} \varepsilon(x) = 0$ .

Si  $\nabla f(x^*) \neq 0$ , alors en choisissant  $x = x(\lambda) = x^* - \lambda \nabla f(x^*)$ , on aurait, pour  $\lambda > 0$  suffisamment petit,  $f(x(\lambda)) < f(x^*)$ . Ce qui contredirait le fait que  $x^*$  réalise un minimum local de  $f$ . Donc la condition est nécessaire.  $\square$

**Remarque 2.2.1** 1) Ce théorème n'a pas de sens si la fonction  $f$  n'est pas différentiable en  $x^*$ .

2) Cette condition nécessaire du premier ordre permet de sélectionner un certain nombre de candidats à être des minima locaux ou globaux. La réciproque est fausse. Un point critique n'est pas nécessairement un minimum local (global). Ce peut être un minimum local ou global, un maximum local ou global ou ni l'un ni l'autre. C'est dire que ce résultat n'est en général pas une condition suffisante.

Dans le cas convexe, la condition nécessaire du premier ordre ci-dessus est suffisante.

**Théorème 2.2.2 (Condition nécessaire et suffisante d'optimalité)** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe et différentiable, alors un point  $x^*$  réalise un minimum global de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

**Preuve :** On sait que la condition est nécessaire. Montrons à présent qu'elle est suffisante.

Soit  $x^*$  un point tel que  $\nabla f(x^*) = 0$ . Comme  $f$  est convexe alors, on a :

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Par hypothèse, on a  $\nabla f(x^*) = 0$ ; il vient alors que

$$f(x) \geq f(x^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ce qui termine la démonstration.  $\square$

**Corollaire 2.2.1** Si  $f$  est une fonction quadratique avec  $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$  où  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients réels, symétrique et définie positive, alors il existe un minimum unique  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  de  $f$  et qui est l'unique solution du système  $Ax = b$ .

## 2.2.2 Conditions d'optimalité du second ordre

**Théorème 2.2.3 (Condition nécessaire d'optimalité du second ordre)** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction deux fois différentiable sur  $\mathbb{R}^n$ , une condition nécessaire pour que  $x^*$  soit un minimum local (global) de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  est que :  $\nabla f(x^*) = 0$  et  $\nabla^2 f(x^*)$  est semi défini positif.

**Preuve :** Soit  $x^*$  un minimum local de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On sait que la condition 1) est satisfaite. Il reste à montrer la condition 2). Par définition du minimum local, il existe un voisinage  $V$  de  $x^*$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $f(x) \geq f(x^*)$  pour tout  $x \in V$ .

Soit  $h \in \mathbb{R}^n$ . En utilisant le développement de Taylor au voisinage de  $x^*$ , à l'ordre deux et la condition 1), on a : pour  $t$  suffisamment petit,

$$f(x^* + th) = f(x^*) + \frac{t^2}{2} \langle \nabla^2 f(x^*) h, h \rangle + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th),$$

avec  $\varepsilon$  continue et  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(th) = 0$ .

Pour  $t \neq 0$  suffisamment petit de sorte que  $x^* + th \in V$ , on a :

$$0 \leq \frac{f(x^* + th) - f(x^*)}{t^2} = \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x^*) h, h \rangle + \varepsilon(th).$$

En passant à la limite,  $t$  tendant 0, on obtient :  $\langle \nabla^2 f(x^*) h, h \rangle \geq 0$ . □

On a aussi une condition suffisante d'optimalité.

**Théorème 2.2.4 (Condition suffisante d'optimalité du second ordre)** On suppose que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction deux fois différentiable sur  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x^*$  est tel que  $\nabla f(x^*) = 0$  et  $\nabla^2 f(x^*)$  est défini positif, alors  $x^*$  est un minimum local strict de  $f$ .

**Preuve :** La matrice étant définie positive, il existe  $\lambda > 0$  tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \langle \nabla^2 f(x^*) h, h \rangle \geq \lambda \|h\|^2.$$

D'après la formule de Taylor on a :

$$f(x) - f(x^*) = \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x^*)(x - x^*), x - x^* \rangle + \|x - x^*\|^2 \varepsilon(x - x^*)$$

avec  $\varepsilon$  continue et  $\lim_{x \rightarrow x^*} \varepsilon(x - x^*) = 0$ .

On a alors

$$f(x) - f(x^*) \geq \|x - x^*\|^2 \left( \frac{\lambda}{2} + \varepsilon(x - x^*) \right)$$

Pour  $x$  suffisamment proche de  $x^*$ ,  $\frac{\lambda}{2} + \varepsilon(x - x^*)$  est du signe de  $\lambda$  c'est-à-dire strictement positif. □

### Point méthode

Pour trouver les extrema locaux de  $f$  une fonction réelle de  $n$  variables réelles de classe  $C^2$  sur un ou

Pour voir si la matrice hessienne  $\nabla^2 f(x)$  est définie positive ou définie négative on peut appliquer la définition ou bien calculer les valeurs propres de la matrice et examiner leur signe ou encore utiliser le critère des déterminants des sous-matrices.

On rappelle qu'une matrice symétrique est définie positive (respectivement définie négative) si, et seulement si, ses valeurs propres sont strictement positives (respectivement négatives)

Elle est semi-définie positive (respectivement semi-définie négative) si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives ou nulles (respectivement négatives ou nulles).

Donc si on trouve une valeur propre nulle on ne peut pas conclure quant à l'optimalité du point étudié.

Dans le cas d'une fonction de deux variables, le signe des valeurs propres peut être déterminé en calculant le déterminant et la trace de la matrice. Le déterminant étant égal au produit des deux valeurs propres et la trace égale à la somme des deux valeurs propres, si le déterminant est strictement positif les deux valeurs propres sont du même signe et dans ce cas, si la trace est strictement positive, les deux valeurs propres sont strictement positives et si la trace est strictement négative, les deux valeurs propres sont strictement négatives. Si le déterminant est nul alors l'une des valeurs propres est nulle. Par contre si le déterminant est strictement négatif les deux valeurs propres sont de signes contraires. Attention : ceci n'est valable que pour des matrices symétriques d'ordre 2. Pour des fonctions de plus de deux variables il faut calculer les valeurs propres de la matrice hessienne au point candidat pour trouver leur signe ou bien utiliser le critère des déterminants des sous-matrices.

**Corollaire 2.2.2** *Si  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  (c'est-à-dire que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 qui sont continues), si  $x$  est un point critique de  $f$  tel que la matrice hessienne de  $f$  en  $x$  (qui est une matrice carrée d'ordre  $n$  symétrique) a pour valeurs propres (qui sont réelles) ordonnées  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , alors :*

- Si  $\lambda_i > 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f$  admet un minimum local en  $x$ .
- Si  $\lambda_i < 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f$  admet un maximum local en  $x$ .
- Si  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_n > 0$ ,  $f$  n'admet pas d'extremum en  $x$ .
- S'il existe un  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\lambda_i = 0$  et les autres valeurs propres sont de même signe, on ne peut pas conclure.

**Corollaire 2.2.3 (cas de dimension deux)** *Si  $x$  est un point critique de  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , on définit les coefficients  $r, s, t$  par :*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x).$$

Alors

- Si  $rt - s^2 > 0$  et  $r > 0$ ,  $f$  admet un minimum local en  $x$ .
- Si  $rt - s^2 > 0$  et  $r < 0$ ,  $f$  admet un maximum local en  $x$ .
- Si  $rt - s^2 < 0$ ,  $f$  n'admet pas d'extremum en  $x$ , c'est un point selle.
- Si  $rt - s^2 = 0$ , on ne peut pas conclure.

### 2.2.3 Récapitulation des conditions

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , et  $a \in \Omega$  :

- $f$  quelconque

**Condition nécessaire du premier ordre (CN1) et du second ordre (CN2) :**

$f$  admet un minimum local en  $a \implies \nabla f(a) = 0$  et  $\nabla^2 f(a)$  semi-définie positive

$f$  admet un maximum local en  $a \implies \nabla f(a) = 0$  et  $\nabla^2 f(a)$  semi-définie négative

**Condition suffisante du second ordre (CS2) :**

$\nabla f(a) = 0$  et  $\nabla^2 f(a)$  définie positive  $\implies f$  admet un minimum local strict en  $a$

$\nabla f(a) = 0$  et  $\nabla^2 f(a)$  définie négative  $\implies f$  admet un maximum local strict en  $a$

On suppose de plus  $\Omega$  convexe

- $f$  convexe

**Condition nécessaire et suffisante :**  $\nabla f(a) = 0 \iff f$  admet un minimum global en  $a$

- $f$  strictement convexe

**Condition nécessaire et suffisante**  $\nabla f(a) = 0 \iff f$  admet un minimum global strict en  $a$

- $f$  concave

**Condition nécessaire et suffisante :**  $\nabla f(a) = 0 \iff f$  admet un maximum global en  $a$

- $f$  strictement concave

**Condition nécessaire et suffisante :**  $\nabla f(a) = 0 \iff f$  admet un maximum global strict en  $a$

### Point méthode

Soit  $f$  de classe  $C^2$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Pour étudier les extrema de  $f$  sur  $\Omega$ , on procède de la façon suivante :

On cherche les candidats en résolvant  $\nabla f(x) = 0$ . Soit  $a \in \Omega$  un candidat :

- On calcule  $\nabla^2 f(x)$ .

**Si  $\nabla^2 f(x)$  n'est pas de même nature sur  $\Omega$**  alors on étudie la nature de  $\nabla^2 f(a)$  :

- si  $\nabla^2 f(a)$  est définie positive, alors  $f$  admet un minimum local strict en  $a$  ;
- si  $\nabla^2 f(a)$  est définie négative, alors  $f$  admet un maximum local strict en  $a$  ;
- si  $\nabla^2 f(a)$  est semi-définie positive ou semi-définie négative, alors on ne peut pas conclure ;
- si  $\nabla^2 f(a)$  est indéfinie alors  $f$  n'admet pas d'extremum en  $a$ .

**Si  $\nabla^2 f(x)$  est de même nature sur  $\Omega$  et  $\Omega$  convexe :**

- si  $\nabla^2 f(x)$  est semi-définie positive  $\forall x \in \Omega$ , alors  $f$  est convexe sur  $\Omega$  d'où  $f$  admet un minimum global en  $a$  ;
- si  $\nabla^2 f(x)$  est définie positive  $\forall x \in \Omega$ , alors  $f$  est strictement convexe sur  $\Omega$  d'où  $f$  admet un minimum global strict en  $a$  ;
- si  $\nabla^2 f(x)$  est semi-définie négative  $\forall x \in \Omega$ , alors  $f$  est concave sur  $\Omega$  d'où  $f$  admet un maximum global en  $a$  ;
- si  $\nabla^2 f(x)$  est définie négative  $\forall x \in \Omega$ , alors  $f$  est strictement concave sur  $\Omega$  d'où  $f$  admet un maximum global strict en  $a$ .

## 2.3 Méthodes numériques

Dans cette partie nous nous intéressons aux méthodes numériques pour résoudre le problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (P)$$

où  $f$  est une fonction définie et différentiable sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Les principales méthodes de résolution connues ne permettent pas la détermination d'un minimum global. Il faut alors parfois se contenter d'optimum locaux.

Les algorithmes les plus utilisés sont des procédures itératives où l'on engendre une suite de points  $x^0, x^1, \dots, x^k, \dots$  convergeant vers un optimum local.

### 2.3.1 Algorithmes et vitesse de convergence

**Définition 2.3.1** Un algorithme est défini par une application  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  permettant la génération d'une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^n$  par la formule :

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné } k := 0 & \text{Etape d'initialisation} \\ x^{k+1} = \mathcal{A}(x^k) \quad k := k + 1 & \text{Itération } k \end{cases}$$

Ecrire un algorithme c'est se donner une suite  $\{x^k\}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Etudier la convergence de cet algorithme c'est étudier la convergence de la suite  $\{x^k\}$ .

**Définition 2.3.2** On dit que l'algorithme  $\mathcal{A}$  converge si la suite  $\{x^k\}$  engendrée par l'algorithme converge vers une limite  $x^*$ .

La convergence est dite locale si elle n'a lieu que pour des points de départ  $x^0$  dans un voisinage de  $x^*$ . Dans le cas contraire la convergence est globale.

**Définition 2.3.3** Soit  $\{x^k\}$  une suite de limite  $x^*$  définie par la donnée d'un algorithme convergent  $\mathcal{A}$ . On dit que la convergence de  $\mathcal{A}$  est :

- linéaire si l'erreur  $e_k = \|x^k - x^*\|$  décroît linéairement i.e

$$\exists C \in [0, 1[, \exists k_0 : \forall k \geq k_0, e_{k+1} \leq C e_k.$$

- superlinéaire si l'erreur  $e_k = \|x^k - x^*\|$  décroît de la manière suivante :  $e_{k+1} \leq \alpha_k e_k$  où  $\alpha_k$  est une suite positive qui converge vers 0.

Si  $\alpha_k$  est une suite géométrique, la convergence de l'algorithme est dite géométrique.

- superlinéaire d'ordre  $p > 1$  si l'erreur  $e_k = \|x^k - x^*\|$  décroît de la manière suivante :

$$\exists C \geq 0, \exists k_0 : \forall k \geq k_0, e_{k+1} \leq C [e_k]^p.$$

Dans le cas  $p = 2$ , la convergence de l'algorithme est dite quadratique.

### 2.3.2 Méthodes de descente

A chaque étape  $k$ ,  $x^{k+1}$  est défini par :

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$$

où  $d^k$  est une direction de déplacement et  $\lambda_k$  le pas de déplacement.

La plupart des méthodes numériques usuelles sont des méthodes de descente c'est-à-dire que la direction de déplacement à chaque étape  $x^k$  est une direction de descente pour la fonction en ce point.

**Définition 2.3.4** On dit qu'une direction  $d$  est une direction de descente pour  $f$  en  $x$ , si

$$\exists \bar{\alpha} > 0 : f(x + \alpha d) < f(x) \quad \forall \alpha \in ]0, \bar{\alpha}[.$$

On montre facilement que :

**Proposition 2.3.1** Soit  $f$  différentiable en  $x$ , si  $d$  est telle que  $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$  alors  $d$  est une direction de descente pour  $f$  en  $x$ .

**Corollaire 2.3.1** Soit  $f$  différentiable en  $x$ . Si  $\nabla f(x) \neq 0$ , alors  $d = -\nabla f(x)$  est une direction de descente pour  $f$  en  $x$ .

Le principe des méthodes à directions de descente est le suivant :

0) Choix d'un itéré initial  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  ;

Initialisation :  $k := 0$  ;

1) Arrêt de l'algorithme si test d'arrêt vérifié ;

2) Choix d'une direction de descente  $d^k$  ;

3) Détermination d'un pas de déplacement  $\lambda_k > 0$  le long de  $d^k$  de manière à "faire décroître  $f$  suffisamment" ;

4)  $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$ ,  $k := k + 1$  et aller en 1.

## Méthodes du gradient

Il s'agit d'une famille de méthodes itératives qui s'appliquent à des fonctions différentiables et qui utilisent l'opposé du gradient comme direction de déplacement c'est-à-dire : à l'étape  $k$ , on prend comme pas de déplacement,  $d^k = -\nabla f(x^k)$ . Il reste ensuite le choix du pas de déplacement, c'est la phase de recherche linéaire. Ce choix détermine la méthode. Il existe plusieurs possibilités :

- prendre un pas constant, on parle alors d'algorithme à pas constant ;

- prendre un pas optimal, i. e.  $\lambda_k$  qui minimise  $\varpi(\lambda) = f(x^k - \lambda \nabla f(x^k))$ , ( $\lambda \geq 0$ ), on parle alors d'algorithme du gradient à pas optimal ;

- prendre un pas qui respecte certaines règles tout en nécessitant peu de calculs au niveau de la recherche linéaire.

Nous nous intéressons ici à l'algorithme du gradient à pas optimal on dit aussi de la plus forte pente qui est le suivant :

### a) Algorithme du gradient à pas optimal

0) Choix d'un itéré initial  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  initialisation :  $k := 0$  ;

1) Arrêt de l'algorithme si test d'arrêt vérifié ;

2) Prendre  $d^k = -\nabla f(x^k)$  ;

3) Déterminer  $\lambda_k > 0$  tel que  $f(x^k + \lambda_k d^k) = \min_{\lambda \geq 0} f(x^k + \lambda d^k)$  ;

4)  $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$ ,  $k := k + 1$  et aller en 1.

Le test d'arrêt peut être par exemple :

- le gradient est très petit :  $\|\nabla f(x^k)\| \leq \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est un paramètre donné ;

- la suite  $\{x^k\}$  est "presque" stationnaire :  $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| \leq \varepsilon$ , ( $\varepsilon$  donné).

On peut aussi exiger que l'un de ces tests soit vérifié sur plusieurs itérations ou que plusieurs tests soient satisfaits simultanément.

On montre que dans la méthode du gradient à pas optimal, les directions de déplacement successives sont orthogonales :

**Théorème 2.3.1** Etant donné l'algorithme du gradient à pas optimal, on a pour tout  $k$ ,  $\langle d^k, d^{k+1} \rangle = 0$ .

On a le résultat de convergence suivant :

**Théorème 2.3.2** Si la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  et coercive, alors pour tout point de départ  $x^0$ , la méthode du gradient à pas optimal converge vers un point stationnaire de  $f$ .

On remarque que dans la pratique, pour certaines fonctions comme la fonction banane de Rosenbrock, la convergence est très lente, par exemple, les fonctions mal conditionnées du type vallée étroite et allongée. Il existe des techniques d'accélération de la convergence.

### 2.3.3 Méthode de Newton

La méthode de Newton permet de construire un algorithme permettant de résoudre le système d'équation non linéaire

$$g(x) = 0$$

où  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable : on se donne  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  et on fait les itérations

$$x^{k+1} = x^k - [g'(x^k)]^{-1}g(x^k) \quad (2.2)$$

où  $g'(x)$  est la dérivée (ou jacobienne) de  $g$  au point  $x$ .

L'application de cette méthode au problème d'optimisation

$$\alpha = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (P)$$

consiste à l'utiliser pour résoudre le système d'optimalité du problème  $(P)$ , c'est-à-dire que l'on pose  $g(x) = \nabla f(x)$  dans (2.2). Cela suppose donc que  $f$  est deux fois différentiable et que l'on sait calculer ses dérivées secondes. On obtient les itérations

$$x^{k+1} = x^k - [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k) \quad (2.3)$$

On remarque qu'il est nécessaire qu'en  $x^k$ ,  $\nabla^2 f(x^k)$  soit inversible : ce qui est le cas si  $\nabla^2 f(x^k)$  est défini positif.

La méthode de Newton est intéressante car sa convergence est quadratique au voisinage de la solution  $x^*$  si  $\nabla^2 f(x^*)$  est défini positif c'est-à-dire que l'on a

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \gamma \|x^k - x^*\|^2, \quad \gamma > 0.$$

Mais cette convergence n'est assurée que si  $x^0$  est suffisamment proche de  $x^*$ , ce qui limite l'intérêt. On pourra éventuellement appliquer d'abord une autre méthode pour s'approcher de  $x^*$ , puis appliquer la méthode de Newton.

Pour améliorer la précision de la méthode de Newton, on peut penser à lui ajouter une phase de recherche linéaire dans la direction  $d^k = -[\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$ .

Cela est possible uniquement si  $d^k$  est une direction de descente pour  $f$  en  $x^k$ , soit

$$\langle \nabla f(x^k), d^k \rangle = -\langle \nabla f(x^k), [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k) \rangle < 0$$

ce qui sera le cas si  $\nabla^2 f(x^k)$  est une matrice définie positive. L'algorithme s'écrit alors :

- 0) Choix d'un itéré initial  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , initialisation :  $k := 0$  ;
- 1) Arrêt de l'algorithme si test d'arrêt vérifié ;
- 2) Prendre  $d^k = -[\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$  ;
- 3) Déterminer  $\lambda_k > 0$  tel que  $f(x^k + \lambda_k d^k) = \min_{\lambda \geq 0} f(x^k + \lambda d^k)$  ;
- 4)  $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$ ,  $k := k + 1$  et aller en 1.

# Chapitre 3

## Optimisation avec contraintes

Dans ce chapitre on s'intéresse au problème

$$\alpha = \min_{x \in C} f(x) \quad (P)$$

où  $C$  est une partie non ouverte de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 3.1 Résultats d'existence et d'unicité

On considère tout d'abord la définition suivante :

**Définition 3.1.1** *On appelle suite minimisante de  $f$  sur  $C$  toute suite  $\{x^k\}$  de  $C$  telle*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^k) = \inf_{x \in C} f(x).$$

On montre le résultat d'existence suivant dans le cas où  $C$  est borné.

**Théorème 3.1.1 (Théorème de Weierstrass)** *Si  $f$  est continue et  $C$  est compact non vide, alors le problème (P) admet au moins une solution optimale.*

Pour le cas où  $C$  est non borné, on considère d'abord les définitions suivantes.

**Théorème 3.1.2** *Si  $f$  est continue, coercive,  $C$  est non vide, fermé alors le problème (P) admet au moins une solution optimale.*

**Preuve :**

Soit  $\{x^k\}$  une suite minimisante de  $f$  sur  $C$ .

La suite  $\{x^k\}$  est bornée. En effet si ça n'était pas le cas, il existerait une sous suite  $\{x^{k_l}\}$  de  $\{x^k\}$  telle que  $\|x^{k_l}\| \rightarrow +\infty$ . Comme  $f$  est coercive, cela impliquerait que  $\alpha = \lim_l f(x^{k_l}) = +\infty$ . Ce qui est impossible car  $f$  est finie en au moins un point de  $C$  car non vide.

La suite  $\{x^k\}$  étant bornée, il existe une sous suite  $\{x^{k_l}\}$  de  $\{x^k\}$  qui converge vers un point  $\bar{x}$  de  $C$  car  $C$  est fermé.

Comme  $f$  est continue, alors on a

$$\alpha = \lim_l f(x^{k_l}) = f(\lim_l x^{k_l}) = f(\bar{x}).$$

Donc  $\alpha = f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ . □

On a le résultat sur l'unicité de la solution optimale.

**Théorème 3.1.3** Si  $C$  est convexe et  $f$  strictement convexe sur  $C$  alors  $(P)$  admet au plus une solution optimale.

La démonstration est immédiate.

## 3.2 Conditions d'optimalité

### 3.2.1 Cas des contraintes d'égalité

On suppose ici que :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : h_j(x) = 0, j = 1, \dots, q\}$$

où les fonctions  $h_j, j = 1, \dots, q$  sont définies sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On considère la définition suivante :

**Définition 3.2.1** Soit  $x \in C$ . On suppose que les fonctions  $h_j (j = 1, \dots, q)$  sont différentiables dans un voisinage de  $x$ . On dira que le point  $x$  est qualifié ou que les contraintes sont qualifiées en  $x$ , si le système  $\{\nabla h_j(x), j = 1, \dots, q\}$  est libre.

On a les conditions nécessaires d'optimalité.

**Théorème 3.2.1 (Conditions Nécessaires d'optimalité du premier ordre)** Soit  $x^* \in C$ . On suppose que  $f$  est différentiable en  $x^*$ , que les fonctions  $h_j, j = 1, \dots, q$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  dans un voisinage de  $x^* \in C$  et que  $x^*$  est qualifié. Alors une condition nécessaire pour que  $x^*$  soit une solution optimale locale de  $(P)$  est que :

$$\exists! \mu^* \in \mathbb{R}^q \text{ tel que } \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0.$$

(le vecteur  $\mu^*$  est appelé vecteur multiplicateur de Lagrange)

On peut reformuler ces résultats en considérant la fonction de Lagrange.

**Définition 3.2.2** On appelle lagrangien associé au problème  $(P)$  avec contraintes d'égalité, c'est-à-dire

$$\min [f(x) : h_j(x) = 0, j = 1, \dots, q]$$

la fonction

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \mu) &\longmapsto f(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x). \end{aligned}$$

Les conditions nécessaires du premier ordre s'écrivent alors avec la fonction de Lagrange de la façon suivante.

**Proposition 3.2.1** On suppose qu' $f$  est différentiable en  $x^* \in C$ , que les fonctions  $h_j, j = 1, \dots, q$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  dans un voisinage de  $x^*$  et que le point  $x^*$  est qualifié. Alors une condition nécessaire pour que  $x^*$  soit une solution optimale locale de  $(P)$  est que :

$$\exists! \mu^* \in \mathbb{R}^q \text{ tel que } \begin{cases} \nabla_x L(x^*, \mu^*) = 0 \\ \nabla_\mu L(x^*, \mu^*) = 0 \end{cases}$$

Y a-t-il des situations où la condition nécessaire du théorème (3.2.1) ci-dessus est suffisante pour que  $x^*$  minimise  $f$  sur  $C$ ? Oui.

**Théorème 3.2.2 (CNS d'optimalité du premier ordre)** *Supposons  $f$  convexe sur un ouvert contenant  $C$  et les  $h_j$  affines (i.e. de la forme  $x \mapsto h_j(x) = \langle a_j, x \rangle - b_j$ ) linéairement indépendantes. Alors, un élément  $x^* \in C$  pour lequel*

$$\exists \mu^* \in \mathbb{R}^q \text{ tel que } \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

est un minimum global de  $f$  sur  $C$ .

### 3.2.2 Problème avec contraintes d'inégalité

On suppose ici que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, p\}$$

où les fonctions  $g_i, i = 1, \dots, m$  sont définies sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 3.2.3** Soit  $\bar{x} \in C$ . On dit que la contrainte d'inégalité  $g_i(x) \leq 0$  est active en  $\bar{x}$ , si on a  $g_i(\bar{x}) = 0$ .

Pour  $x \in C$  on note  $I(x) = \{i \in \{1, \dots, p\} : g_i(x) = 0\}$  l'ensemble des indices des contraintes actives en  $x$ .

**Définition 3.2.4** On dira que les contraintes sont qualifiées en un point  $\bar{x}$  de  $C$ , si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- **Condition de qualification globale de Karlin** : toutes les fonctions  $g_i$  sont affines et  $C$  non vide.

- **Condition de qualification globale de Slater** : toutes les fonctions  $g_i$  sont convexes et différentiables sur un ouvert contenant  $C$ , et  $\exists \tilde{x} \in C$  tel que :  $g_i(\tilde{x}) < 0$  pour tout  $i$ , c'est-à-dire que  $C$  est d'intérieur non vide.

- **Condition de qualification locale d'indépendance linéaire** : les fonctions  $g_i$  sont toutes différentiables dans un voisinage de  $\bar{x}$  et le système formé des gradients des contraintes actives en  $\bar{x}$  est libre.

On a les conditions d'optimalité :

### Théorème 3.2.3 (CN d'optimalité de Kuhn-Tucker)

Soit  $x^* \in C$ . On suppose que pour tout  $i$ , les  $g_i$  sont toutes différentiables dans un voisinage de  $x^*$  et que les contraintes sont qualifiées en  $x^*$ . Alors une condition nécessaire pour  $x^*$  soit une solution optimale locale de  $(P)$  est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^p \text{ tel que :} \\ \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}. \end{array} \right.$$

Dans le cas où le problème  $(P)$  est convexe, la condition nécessaire d'optimalité de Kuhn-Tucker est aussi suffisante.

### 3.2.3 Problème avec contraintes d'égalité et d'inégalité

On s'intéresse ici au

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, q \end{array} \right\}$$

où les fonctions  $g_i, i = 1, \dots, p$  et  $h_j, j = 1, \dots, q$  sont définies sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Comme dans le cas précédent, pour  $x \in C$  on note  $I(x) = \{i \in \{1, \dots, p\} : g_i(x) = 0\}$  l'ensemble des indices des contraintes actives en  $x$ .

On définit ici aussi les conditions de qualification.

**Définition 3.2.5** On dira que les contraintes sont qualifiées en un point  $\bar{x}$  de  $C$ , si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- **Condition de qualification globale de Karlin** : toutes les fonctions  $g_i$  et  $h_j$  sont affines et  $C$  non vide.

- **Condition de qualification globale de Slater** : toutes les fonctions  $g_i$  sont convexes et différentiables sur un ouvert contenant  $C$ , les fonctions  $h_j$  sont affines linéairement indépendantes, et  $\exists \tilde{x} \in C$  tel que :  $g_i(\tilde{x}) < 0$  pour tout  $i$ .

- **Condition de qualification locale d'indépendance linéaire** : les fonctions  $g_i$  et  $h_j$  sont toutes différentiables dans un voisinage de  $\bar{x}$  et le système formé des gradients de toutes les contraintes actives en  $\bar{x}$  est libre c'est-à-dire :  $\{\nabla g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x}), j = 1, \dots, q\}$  est libre.

**Théorème 3.2.4** Soit  $x^* \in C$ . On suppose que les fonctions  $f$ ,  $g_i$  et les  $h_j$  sont continûment différentiables dans un voisinage de  $x^*$  et que les contraintes sont qualifiées en  $x^*$ . Alors une condition nécessaire pour que  $x^*$  soit une solution optimale locale de  $(P)$  est que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad \mu_j^* \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, q \\ \text{tels que} \\ \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0, \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, p. \end{array} \right.$$

Dans le cas convexe la condition nécessaire devient aussi suffisante.

**Théorème 3.2.5 (CNS d'optimalité de Kuhn-Tucker)**

Soit  $x^* \in C$ . On suppose que les fonctions  $f$ ,  $g_i$  sont convexes et continûment différentiables dans un voisinage de  $x^*$ , les  $h_j$  sont affines et que les contraintes sont qualifiées en  $x^*$ . Alors  $x^*$  est une solution optimale globale de  $(P)$  si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad \mu_j^* \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, q \\ \text{tels que} \\ \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0, \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, p. \end{array} \right.$$

Comme dans les cas précédents, on définit la fonction de Lagrange.

**Définition 3.2.6** *On appelle lagrangien associé au problème  $(P)$  avec contraintes d'égalité et d'inégalité, c'est-à-dire*

$$\min [f(x) : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, p, h_j(x) = 0, j = 1, \dots, q]$$

*la fonction*

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \lambda, \mu) &\longmapsto f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x). \end{aligned}$$

On montre alors

**Proposition 3.2.2** *Soit  $x^* \in C$ , on suppose que les fonctions  $f$ , les  $g_i$  et les  $h_j$  sont continûment différentiables dans un voisinage de  $x^*$  et que les contraintes sont qualifiées en  $x^*$ . Alors une condition nécessaire pour qu'il soit une solution optimale locale de  $(P)$  est :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda^* \in \mathbb{R}_+^p, \mu_j^* \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, q \text{ tel que :} \\ \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}. \end{array} \right.$$

# Bibliographie

- [1] Bazaraa, Mokhtar S. and Shetty, C. M., 1979. Nonlinear Programming Theory and Algorithms, *John Wiley and Sons*.
- [2] Bazaraa, Mokhtar S. and Shetty, C. M., 1976. Foundations of Optimization, *Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems, No 122, Springer-Verlag New-York*.
- [3] Bergounioux Maïtine, 2001. Optimisation et Contrôle des systèmes linéaires, *Donod*.
- [4] Bertsekas, Dimiri P. 1995. Non Linear Programming, *Athena Scientific*.
- [5] Bonnans, J. Frédéric and Shapiro, Alexander 2000. Perturbations Analysis of Opimization Problems, *Springer*.
- [6] Culioli, Jean-Christophe, 1994. Introduction à l'optimisation, *Ellipses*.
- [7] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste, 1998. Optimisation et Analyse Convexe, *Presse Universitaire de France*.
- [8] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste and Lemaréchal, Claude, 1993. Convex Analysis and Minimization algorithms, *Vol I et II Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 305 and 306, Springer-Verlag*.
- [9] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste, 1996. L'Optimisation, in collection "Que sais-je?", *Presse Universitaire de France*.
- [10] Minoux, Michel, 1983. Programmation mathématique : Théorie et Algorithmes, Vol I, *Dunod*.
- [11] Rockafellar, R. Tyrrel, 1970. Convex Analysis, *Princeton University Press, Princeton N. J.*.
- [12] Roberts, A. Wayne and Varberg, Dale E., 1973. Convex Functions, *Academic Press*.