

TRAVAUX DIRIGÉS : INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Les différents exercices doivent être préparés par les étudiants avant les séances de travaux dirigés.

Exercice 1

Montrer que les intégrales généralisées $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x+2} dx$ et $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx$ sont divergentes. Que peut-on dire de l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x+2} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx$?

Exercice 2

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x}} dx. \quad 2) \int_{-1}^0 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} dx. \quad 3) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} dx. \quad 4) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

Exercice 3

Étudier la convergence des intégrales généralisées dépendantes d'un paramètre suivantes :

$$1) \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha (1-x)^\beta} dx \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad 3) \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(x) dx \text{ avec } t \in \mathbb{R}. \\ 2) \int_1^{+\infty} \frac{a^x}{1+a^{2x}} dx \text{ avec } a \in [0, +\infty[. \quad 4) \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

Montrer la convergence et calculer les intégrales généralisées suivantes :

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x}} dx. \quad 3) \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx. \\ 2) \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx. \quad 4) \int_{-1}^1 \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Exercice 5

I. Étudier la convergence $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$ et la calculer en cas de convergence.

II. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx$

III. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de l'intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} x^\alpha \left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) dx$.