
*Quelques modèles aléatoires célèbres pour les
sciences de la vie et de la Terre*

Florent MALRIEU

Notes de cours

<http://perso.math.univ-rennes1.fr/florent.malrieu/>

Table des matières

1	Modèles de Wright-Fisher	7
1.1	Modélisation	7
1.2	Lieu d'absorption	8
1.3	Temps d'absorption	8
1.4	Prise en compte de la sélection	10
2	Arbres de Galton-Watson et percolation	15
2.1	Calcul de la probabilité d'extinction	15
2.2	Un mot sur le cas critique	16
2.3	Loi de reproduction binomiale	18
2.4	Lien avec la percolation sur un arbre	19
2.5	Deux mots sur la percolation	19
	Bibliographie	23

Introduction

Les connexions entre biologie et mathématiques n'ont cessé de s'intensifier aux cours des dernières décennies : par exemple les équations aux dérivées partielles permettent de décrire l'évolution spatiale de populations de grande taille et les probabilités parviennent à modéliser une partie de la variabilité extraordinaire de la vie.

Le but de ces notes est de présenter quelques exemples de modèles probabilistes qui sont emblématiques des interactions entre les mathématiques de l'aléatoire et les sciences du vivant ou les sciences de la terre. Le propos est ici introductif. Les modèles évoqués sont donc volontairement classiques, voire naïfs (pour certains au moins).

Le premier modèle présenté illustre le phénomène de perte de diversité allélique au sein d'une population isolée. Si les rois de France avaient fait un petit peu de probabilités, ils auraient sans doute choisi leurs conjoints hors de leurs propres familles...

Nous chercherons dans un second temps à modéliser la lignée mâle d'un noble en quête de successeurs et à contrôler les réactions en chaîne dans un réacteur nucléaire avant de constater que ces questions sont liées à l'étude de nappes phréatiques!!!

Certains résultats ne seront qu'énoncés car leurs démonstrations dépassent de très loin le cadre de ce cours mais ils montrent parfaitement comment théorie et applications peuvent se répondre.

Pour les définitions et résultats classiques de probabilités, on pourra par exemple consulter [\[FF03\]](#).

Chapitre 1

Modèles de Wright-Fisher

Le contenu de ce chapitre est essentiellement tiré des livres [DJ06] et [Dur08].

1.1 Modélisation

On souhaite étudier l'évolution de la fréquence d'un allèle dans une population de petite taille pour un gène se présentant sous deux allèles A et B seulement. On suppose que chaque individu possède un seul exemplaire du gène, sous la forme d'un des deux allèles A ou B et qu'il le transmet à ses descendants (on parle de population haploïde).

Présentons le cadre de notre modèle :

- le gène considéré se présente sous deux allèles distincts A et B ,
- la taille de la population reste constante au cours du temps, égale à N ,
- les générations ne se chevauchent pas : à chaque instant k , la k -ième génération donne naissance aux N individus de la $(k + 1)$ -ième génération et meurt,
- chacun des enfants choisit son parent uniformément parmi tous les individus de la génération précédente et indépendamment des autres,
- la reproduction à l'instant k ne dépend pas des reproductions précédentes.

On note X_n le nombre d'allèles A dans la population à la génération n . Au vu des hypothèses ci-dessus, il paraît naturel de considérer la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, N\}$ construite de la façon suivante : la loi de X_{n+1} sachant $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(N, X_n/N)$.

Remarque 1.1.1. La loi binomiale $\mathcal{B}(N, p)$ est la loi du nombre de succès obtenus lors de la répétition de N expériences indépendantes de même probabilité de succès $p \in [0, 1]$. Si X suit la loi $\mathcal{B}(N, p)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = Np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = Np(1 - p). \quad (1.1)$$

On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j}$ donnée par

$$p_{ij} := \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j} \quad (1.2)$$

pour $0 \leq i, j \leq N$.

Il semble intuitif qu'un allèle puisse finir par disparaître car la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ devient constante dès qu'elle atteint l'une des valeurs 0 ou N . C'est ce phénomène, appelé perte de diversité allélique, qu'il s'agit à présent de décrire et de quantifier.

1.2 Lieu d'absorption

Les états 0 et N sont absorbants (on ne peut les quitter). Tous les autres mènent à $\{0, N\}$, ils sont dits transients (ils n'apparaissent qu'un nombre fini de fois). La première question qui vient à l'esprit est : quel point absorbant sera atteint ?

Théorème 1.2.1. *Sachant que $X_0 = i$, la probabilité que X atteigne N avant 0 est égale à i/N .*

Démonstration. Notons, pour $i = 0, 1, \dots, N$, q_i la probabilité que X atteigne N (avant 0) partant de i . Par définition, on a $q_0 = 0$ et $q_N = 1$. De plus, pour tout $i = 1, 2, \dots, N-1$ on a

$$q_i = \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij} q_j + p_{iN}.$$

On peut vérifier facilement que $q_i = i/N$ pour $i = 1, 2, \dots, N-1$ est bien une solution de ce système puisque

$$\sum_{j=1}^{N-1} p_{ij} \frac{j}{N} + p_{iN} = \dots = \frac{i}{N}.$$

C'est de plus la seule solution...

□

Remarque 1.2.2. On peut aussi remarquer que $\mathbb{E}(X_{n+1} | X_n = i) = i$. Ceci assure par récurrence que $n \mapsto \mathbb{E}(X_n)$ est constante. En passant à la limite, on retrouve

$$0(1 - q_i) + Nq_i = \mathbb{E}(\lim_n X_n) = \lim_n \mathbb{E}(X_n) = i.$$

Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il faut se méfier de ces interversions lorsque les variables aléatoires ne sont pas bornées...

1.3 Temps d'absorption

La question suivante est de mesurer la vitesse de ce phénomène de perte allélique : quel est par exemple le temps moyen de disparition d'un des deux allèles ? Pour le modèle de Wright-Fisher cette question est délicate : il n'existe pas de formule simple

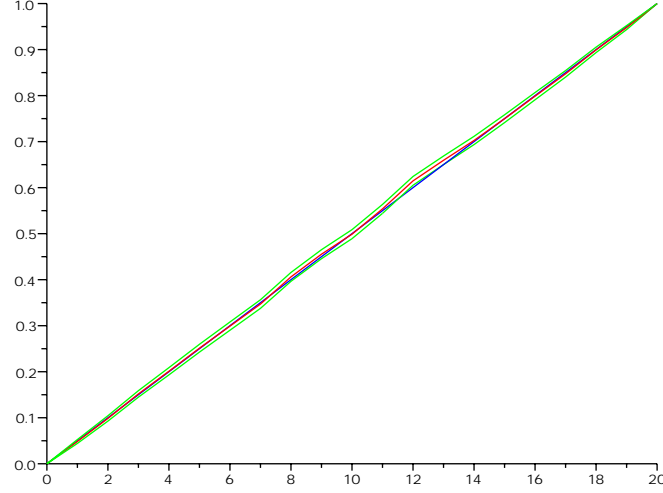


FIGURE 1.1 – Probabilité de fixation de A pour $N = 20$ en fonction du point de départ. La courbe bleue est la fonction exacte, la rouge la valeur approchée par une méthode de Monte-Carlo et les vertes donnent l'intervalle de confiance à 95%.

pour tout N . En effet, si l'on note $m_N(i)$ l'espérance du temps d'absorption de X sachant que $X_0 = i$, on a $m_N(0) = m_N(N) = 0$ et, grâce à la propriété de Markov,

$$m_N(i) = 1 + \sum_{j=0}^N p_{ij} m_N(j).$$

Ce système à $N - 1$ inconnues n'est pas facile à résoudre à la main. Il est possible d'utiliser l'ordinateur pour trouver une valeur approchée déterministe de la solution mais, dès que N est un peu grand, des problèmes dus au fait que les coefficients p_{ij} sont très petits risquent de fausser le résultat. On peut aussi utiliser une méthode probabiliste pour estimer la quantité $m_N(i)$ via une méthode de Monte-Carlo.

Il est toutefois possible de trouver un équivalent de la fonction m_N lorsque la taille N de la population tend vers l'infini. Notons Z la chaîne sur \mathcal{S}/N définie par $Z_n = X_n/N$. C'est la proportion d'allèles A dans la population au temps n . Bien entendu, le temps d'atteinte de $\{0, N\}$ pour X est égal au temps d'atteinte de $\{0, 1\}$ pour Z . Pour tout $z \in \mathcal{S}/N$, notons $t(z)$ l'espérance de T lorsque $Z_0 = z$. On n'oubliera pas que la fonction t dépend de N . Enfin, sachant que $Z_0 = z$, alors Z_1 s'écrit $z + Z$ où Z est tel que $N(Z - z)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, z)$. On a alors, d'après la propriété de Markov et la définition de Z ,

$$t(z) = 1 + \mathbb{E}(t(z + Z)).$$

Supposons que t soit proche d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ . Puisque la variable aléatoire Z est bornée, on peut écrire

$$t(z + Z) = t(z) + t'(z)Z + \frac{t''(z)}{2}Z^2 + O(|Z|^3).$$

Or, d'après (1.1), il est clair que

$$\mathbb{E}(Z) = 0, \quad \mathbb{E}(Z^2) = \frac{z(1-z)}{N}.$$

D'autre part, en vertu du théorème limite central, la loi de $\sqrt{N}Z$ est proche de la loi $\mathcal{N}(0, z(1-z))$ et ainsi, par exemple, $\mathbb{E}(Z^4)$ est de l'ordre de N^{-2} . En résumé, on obtient l'expression suivante :

$$t(z) = 1 + t(z) + \frac{z(1-z)}{2N}t''(z) + O(N^{-3/2}).$$

On pourrait donc dire que la fonction t doit ressembler à la fonction s solution de

$$\forall z \in]0, 1[, \quad s''(z) = \frac{2N}{z(1-z)} \quad \text{et} \quad s(0) = s(1) = 0.$$

On obtient alors l'approximation suivante.

Proposition 1.3.1. *Soit $z \in [0, 1]$ et $(i_N)_{i \geq 0}$ une suite d'entiers telle que i_N/N converge vers z quand N tend vers l'infini. Alors*

$$m_N(i_N) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} -2N(z \ln z + (1-z) \ln(1-z)).$$

1.4 Prise en compte de la sélection

Les différents allèles procurent à l'individu qui en est doté des capacités plus ou moins grandes dans tous les domaines de son développement et de sa reproduction : viabilité, potentiel attractif, fertilité etc. C'est la fameuse sélection naturelle. Tentons de quantifier ceci. Bien que l'adaptation d'un individu à son environnement soit déterminée par de nombreux facteurs, nous supposons ici qu'il n'est déterminé que par le locus qui nous intéresse. Nous supposons de plus que la sélection ne s'opère que sur le critère de viabilité. Supposons que les adaptabilités des deux allèles A et B soient données par $1+s$ et 1 , c'est-à-dire que qu'un individu porteur de l'allèle A a $1+s$ fois plus de chances de survivre qu'un individu porteur de l'allèle B . Pour construire la population à la date $n+1$, sachant que $X_n = k$, tout se passe comme si on tirait des allèles dans une urne qui contient une proportion $(1+s)k/((1+s)k + N - k)$. En d'autres termes, $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov sur \mathcal{S} telle que la loi de X_{n+1} sachant $X_n = k$ est la loi binomiale de paramètres N et $(1+s)k/((1+s)k + N - k)$. Les états 0 et N sont toujours absorbants mais X

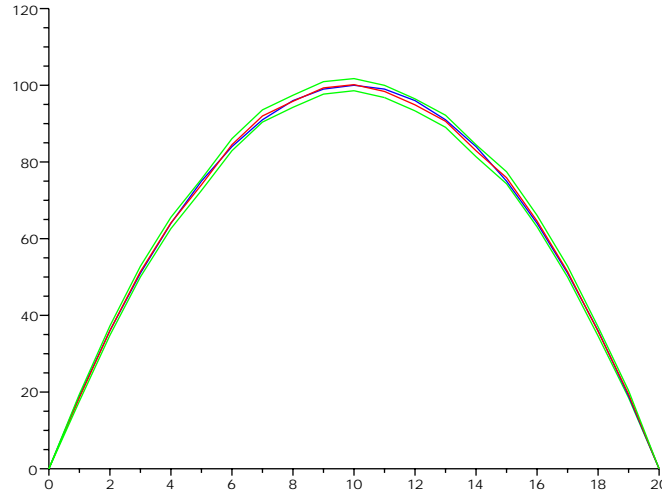


FIGURE 1.2 – Estimation du temps de fixation pour $N = 20$. La courbe bleue est l'approximation de la proposition 1.3.1, la rouge la valeur approchée par une méthode de Monte-Carlo et les vertes donnent l'intervalle de confiance à 95%.

n'est plus une martingale. Ceci complique le calcul des probabilités de fixation des allèles A et B . Notons $(\pi_i)_i$ les probabilités de fixation de la chaîne en N (avant 0) lorsque $X_0 = i$. La propriété de Markov assure que

$$\pi_i = \sum_{j=0}^N p_{ij} \pi_j, \quad \text{avec } \pi_0 = 0 \text{ et } \pi_N = 1.$$

La pression de sélection est très faible en pratique. Supposons que s soit de l'ordre N^{-1} et posons $\alpha = Ns$. Par le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 1.3.1, on peut écrire, pour $x = i/N$

$$\pi(x) = \mathbb{E}(\pi(x + Z)) = \pi(x) + \pi'(x)\mathbb{E}(Z) + \frac{\pi''(x)}{2}\mathbb{E}(Z^2) + O(|Z|^3).$$

En tenant compte de la sélection, on a $Z = Y/N - x$ où Y suit la loi $\mathcal{B}(N, (1 + s)x/(sx + 1))$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \frac{(1 + s)x}{sx + 1} - x = \frac{sx(1 - x)}{sx + 1} = \frac{1}{N}\alpha x(1 - x) + O(N^{-2}), \\ \mathbb{E}(Z^2) &= \frac{1}{N^2}\mathbb{V}(Y) + (\mathbb{E}(Y)/N - x)^2 = \frac{1}{N}x(1 - x) + O(N^{-2}), \\ \mathbb{E}(|Z|^3) &= O(N^{-3/2}). \end{aligned}$$

La fonction π semble donc proche de la solution de l'équation différentielle suivante :

$$z''(x) + 2\alpha z'(x) = 0, \quad \text{avec } z(0) = 0 \text{ et } z(1) = 1,$$

c'est-à-dire

$$\pi(x) \sim z(x) = \frac{1 - e^{-2\alpha x}}{1 - e^{-2\alpha}}.$$

La figure 1.3 page 12 propose une illustration de l'estimation de la probabilité de fixation de l'allèle A pour $N = 30$ et $\alpha = 2$.

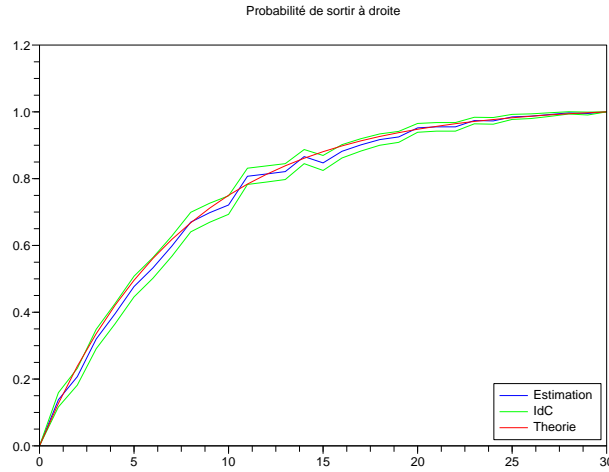


FIGURE 1.3 – Probabilité de fixation de A pour $N = 30$ et $\alpha = 2$.

Supposons que $N = 10^5$, $s = 10^{-4}$ et $x = 0,5$. Alors $\alpha = 20$ et $\pi = 0,999955$. En l'absence de sélection ($s = 0$), on a bien sûr $\pi(0,5) = 0,5$. Même le faible avantage 0,0001 (inobservable en laboratoire ou par des mesures statistiques) est pourtant suffisamment grand pour avoir un effet déterminant sur la fixation des allèles. Bien que cet effet soit imperceptible sur une génération, il l'est jusqu'à l'instant de fixation car le temps de fixation est très grand.

Remarque 1.4.1. Le même type de raisonnement conduirait à approcher l'espérance du temps de fixation par la solution de l'équation différentielle suivante :

$$z''(x) + 2\alpha z'(x) = -\frac{2N}{x(1-x)}, \quad \text{avec } z(0) = 0 \text{ et } z(1) = 0,$$

qui n'est pas facile à résoudre... La figure 1.4 page 13 propose une illustration de l'estimation du temps d'absorption pour $N = 30$ et $\alpha = 10$.

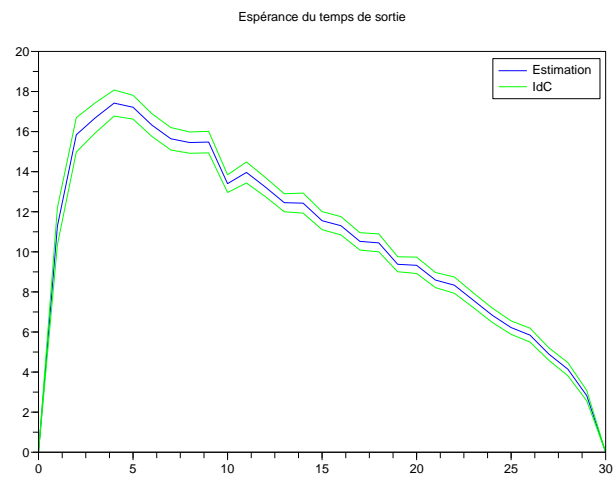


FIGURE 1.4 – Espérance du temps de fixation pour $N = 30$ et $\alpha = 10$.

Chapitre 2

Arbres de Galton-Watson et percolation

Le contenu de ce chapitre est essentiellement tiré du livre [DJ06] et des notes de cours de Thierry Lévy [Lév08].

Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{N} . Soit $(Y_{n,i})_{n,i \geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi μ . On définit par récurrence la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 0}$ en posant $Z_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Y_{n,i}.$$

La suite $(Z_n)_{n \geq 0}$ est appelé *processus de Galton-Watson* de loi de reproduction μ . À chaque génération, tout individu vivant donne naissance, indépendamment des autres, à un nombre aléatoire d'individus distribué selon la mesure μ puis meurt immédiatement.

Le processus $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov sur \mathbb{N} et 0 est un point absorbant. L'événement $\{\exists n \geq 0 : Z_n = 0\}$ est appelé l'extinction de la population. La première question qui vient à l'esprit est la suivante : quelle est la probabilité qu'une lignée survive ?

2.1 Calcul de la probabilité d'extinction

On associe à la mesure μ sa fonction génératrice G définie sur $[-1, +1]$ par

$$G(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(\{k\}) s^k.$$

Cette fonction est continue, croissante et convexe sur $[0, 1]$. La dérivée à gauche en 1 de G est la moyenne m (éventuellement infinie) de μ donnée par

$$m = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mu(\{k\}).$$

Théorème 2.1.1. *Soit $(Z_n)_{n \geq 0}$ un processus de Galton-Watson de loi de reproduction μ . Alors la probabilité d'extinction du processus Z est la plus petite solution de l'équation $G(s) = s$ sur l'intervalle $[0, 1]$. En particulier, la population s'éteint avec probabilité 1 si et seulement si $m \leq 1$ et $\mu \neq \delta_1$.*

Démonstration. Notons $p_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$. Remarquons tout d'abord que $p_0 = 0$ car $Z_0 = 1$. De plus, la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ est croissante puisque 0 est un point absorbant. Montrons à présent que cette suite vérifie une relation de récurrence. Pour cela, on introduit la fonction génératrice G_n de la variable aléatoire Z_n . Si $Z_n = k$, alors $Z_{n+1} = Y_{n,1} + Y_{n,2} + \dots + Y_{n,k}$. Or, l'indépendance des variables aléatoires $(Y_{n,i})$ assure que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{Z_n=k\}} s^{Y_{n,1}+Y_{n,2}+\dots+Y_{n,k}}) &= \mathbb{P}(Z_n = k) \mathbb{E}(s^{Y_{n,1}}) \mathbb{E}(s^{Y_{n,2}}) \dots \mathbb{E}(s^{Y_{n,k}}) \\ &= \mathbb{P}(Z_n = k) G(s)^k, \end{aligned}$$

car Z_n ne dépend que des variables $(Y_{j,i})_{1 \leq j \leq n-1, i \geq 1}$. Ceci assure que

$$G_{n+1}(s) = G_n(G(s)) = G(G_n(s)). \quad (2.1)$$

En choisissant $s = 0$, on obtient la relation $p_{n+1} = G(p_n)$. Reste à faire un dessin (voir figure 2.1)... \square

2.2 Un mot sur le cas critique

Le théorème 2.1.1 assure que la population s'éteint avec probabilité 1 dès que la moyenne m de la loi de reproduction est inférieure ou égale à 1. Jetons un léger trouble en calculant l'espérance de Z_n . On peut faire un calcul direct mais la relation (2.1) assure que

$$G'_{n+1}(1) = G'(1) G'_n(G(1)).$$

Puisque $\mathbb{E}(Z_n) = G'_n(1)$, on obtient

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}) = m \mathbb{E}(Z_{n+1}).$$

En particulier, dans le cas critique $m = 1$, l'espérance de Z_n est constante alors que la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0 ! Il faut se méfier de l'interversion d'une limite et d'une série. On souhaiterait écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n)$$

mais ceci est faux si $m = 1$.

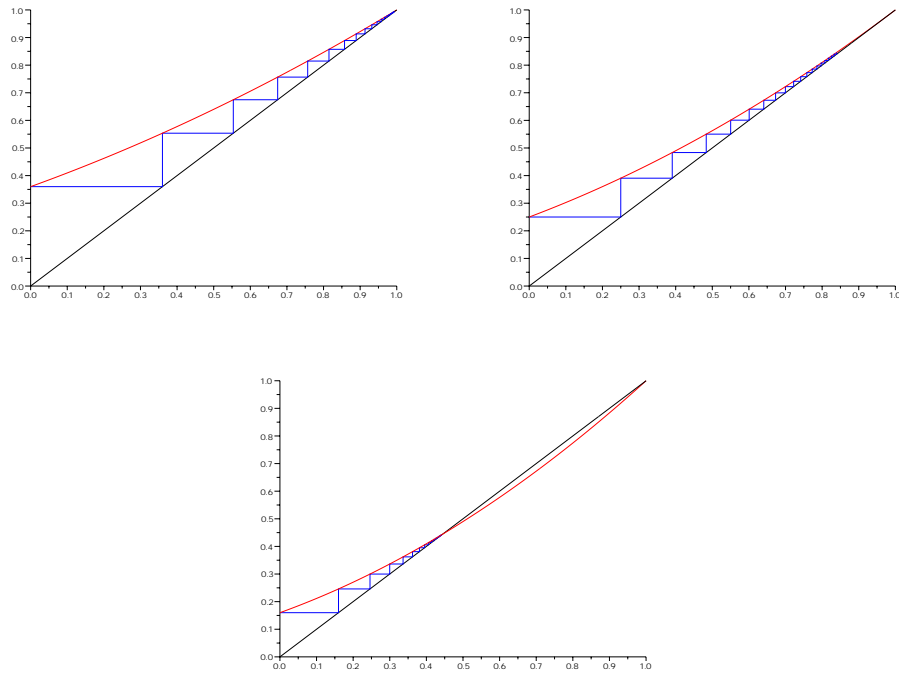


FIGURE 2.1 – Convergence vers le plus petit point fixe de l'équation $G(s) = s$ pour $p = 0.3$, $p = 0.5$ et $p = 0.6$ avec une loi de reproduction binomiale.

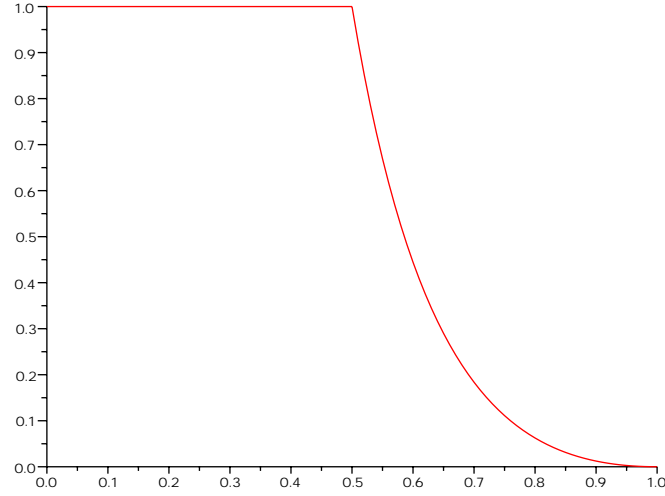


FIGURE 2.2 – Probabilité d’extinction pour une loi de reproduction binomiale $\mathcal{B}(2, p)$ en fonction du paramètre p .

2.3 Loi de reproduction binomiale

Supposons que la loi de reproduction soit la loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$, notée μ_p pour $p \in [0, 1]$, c’est-à-dire que pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$,

$$\mu_p(\{k\}) = \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}.$$

La moyenne de μ_p vaut $m_p = 2p$. La fonction génératrice G_p de μ_p est donnée par

$$G_p(s) = (1 - p + sp)^2.$$

On obtient donc la probabilité d’extinction suivante en fonction de p :

$$\mathbb{P}(\exists n \geq 1 : Z_n = 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq 1/2, \\ \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 & \text{si } p > 1/2. \end{cases}$$

Lorsque p est proche de $1/2$, le processus change complètement de comportement. Pour $p \leq 1/2$, le processus s’éteint avec probabilité 1. Pour $p > 1/2$, il existe une probabilité strictement positive que le processus survive à jamais. De plus, la probabilité d’extinction n’est pas une fonction dérivable du paramètre p à la valeur critique $p = 1/2$. Ce phénomène, appelé *transition de phase* joue un rôle très important en physique, biologie, structure de matériaux (voir ci-dessous)...

2.4 Lien avec la percolation sur un arbre

Considérons un arbre binaire enraciné T . Il y a un sommet spécial : la racine qui n'a que deux voisins. Tous les autres sommets ont exactement trois voisins. On associe à chaque sommet sa profondeur dans l'arbre : c'est le nombre (minimal) d'arêtes qu'il faut parcourir pour atteindre la racine. Pour tout $n \geq 0$, il y a exactement 2^n sommets à la profondeur n .

Soit $p \in [0, 1]$ fixé. Choisissons, indépendamment pour chaque arête, de la laisser avec probabilité p ou de l'effacer avec probabilité $1 - p$. On obtient alors un sous-graphe K de l'arbre original. Considérons à présent la composante connexe C de la racine dans K , c'est-à-dire l'ensemble des sommets reliés à la racine. Enfin, définissons le processus $(W_n)_{n \geq 0}$ en choisissant pour tout $n \geq 0$, W_n égal au nombre de sommets de profondeur n dans C .

Le processus $(W_n)_{n \geq 0}$ est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction $\mathcal{B}(2, p)$. D'après le théorème 2.1.1, le sous-arbre (aléatoire) C est fini avec probabilité 1 si $p \leq 1/2$ et infini avec probabilité strictement positive sinon. On dit dans le second cas qu'il y a percolation avec probabilité strictement positive.

2.5 Deux mots sur la percolation

On munit \mathbb{Z}^d , pour $d \geq 2$, d'une structure de graphe (non orienté) en donnant l'ensemble des arêtes :

$$\mathcal{A} = \{(x, y) : |x - y| = 1\}$$

Deux éléments x et y de \mathbb{Z}^d sont dits voisins s'ils sont reliés par une arête (*i.e.* si $|x - y| = 1$). Tout point de \mathbb{Z}^d a donc exactement $2d$ voisins.

Soit $p \in [0, 1]$. Chaque arête de \mathcal{A} est conservée avec probabilité p (on dira qu'elle est ouverte) et effacée avec probabilité $1 - p$ (on dira qu'elle est fermée). On note \mathcal{O} l'ensemble des arêtes ouvertes.

Pour chaque point $x \in \mathbb{Z}^d$ on définit la composante connexe de x dans $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{O})$ comme l'ensemble des points de \mathbb{Z}^d pour lesquels il existe un chemin reliant x et y par des arêtes de \mathcal{O} .

Remarque 2.5.1. Il est facile de calculer la probabilité que la composante connexe d'un point ne compte qu'un point (lui-même) ou deux points (lui-même et un voisin). Soit $x \in \mathbb{Z}^d$. Alors

$$\mathbb{P}_p(C(x) = \{x\}) = (1 - p)^{2d} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_p(|C(x)| = 2) = 2dp(1 - p)^{4d-2}.$$

Le calcul se complique monstrueusement ensuite...

On s'intéresse alors à l'existence d'une composante infinie. Une première observation importante est que cet événement est d'autant plus probable que p est grand.

Proposition 2.5.2. *La fonction $p \mapsto \mathbb{P}_p(\exists \text{ une composante infinie})$ est croissante.*

Démonstration. La preuve repose sur un argument probabiliste élégant et souvent précieux appelé couplage. On peut comparer deux grilles de percolation de paramètres respectifs p et q avec $p < q$ en les construisant à partir du même aléa. Par exemple, on se donne pour chaque arête une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$ puis on dit que l'arête est ouverte pour la première grille si $U < p$ et pour la seconde si $U < q$. L'arête est bien ouverte avec probabilités respectives p et q et si elle est ouverte dans la grille 1, elle l'est aussi dans la grille 2. Par conséquent, si la grille 1 possède une composante infinie, la grille 2 aussi. \square

Théorème 2.5.3. *Pour tout $d \geq 2$, il existe un paramètre critique $p_c(d) \in (0, 1)$ tel que*

$$\mathbb{P}_p(\exists \text{ une composante infinie}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < p_c(d), \\ 1 & \text{si } p > p_c(d). \end{cases}$$

Ce théorème assure l'existence d'une véritable transition de phase : si p est proche de 0, il n'y a que des composantes finies, si p est proche de 1, il existe (au moins) une composante infinie. On ne sait pas ce qui se passe pour $p = p_c(d)$.

Théorème 2.5.4. *En dimension 2, le paramètre de percolation critique est*

$$p_c(2) = \frac{1}{2}.$$

On peut déterminer le nombre de composantes infinies dans le régime sur-critique.

Théorème 2.5.5. *Pour tout $d \geq 2$ et tout $p > p_c(d)$, avec probabilité 1, il existe une et une seule composante infinie.*

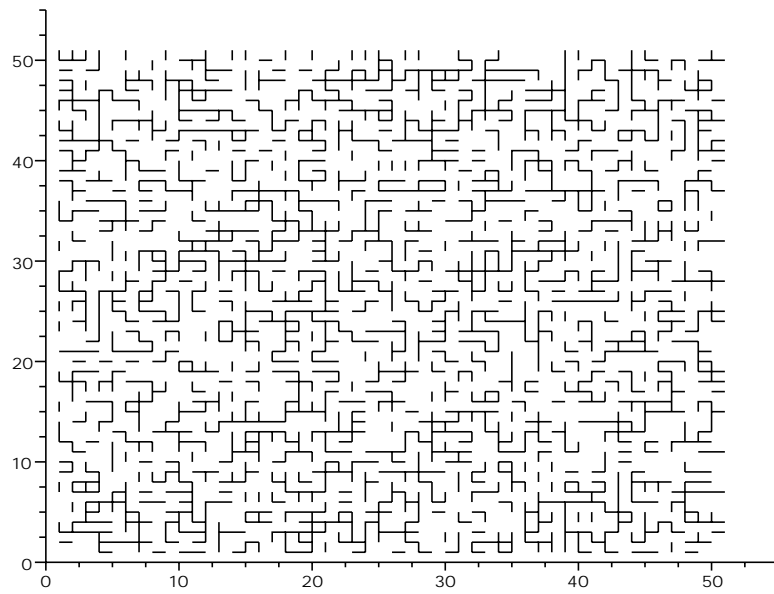


FIGURE 2.3 – Graphe de percolation sous-critique avec $p = 0.4$ dans une boîte de côté $N = 50$.

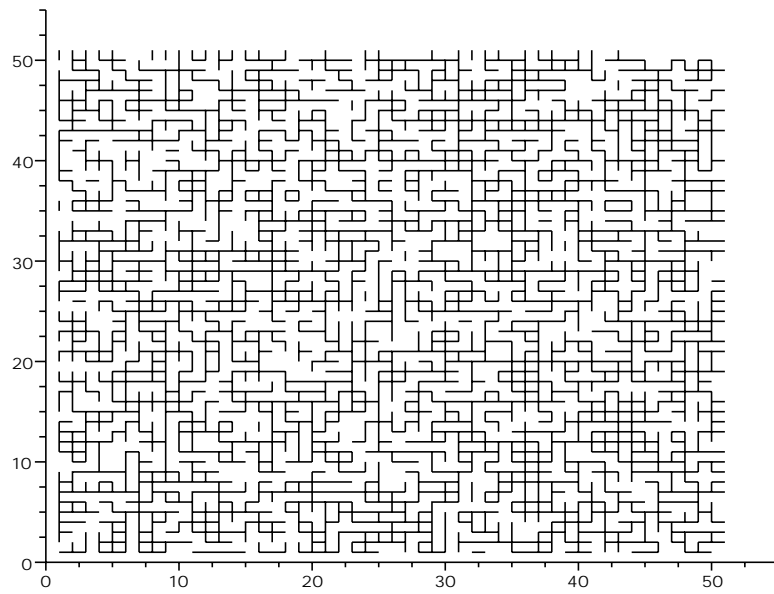


FIGURE 2.4 – Graphe de percolation sur-critique avec $p = 0.6$ dans une boîte de côté $N = 50$.

Bibliographie

- [DJ06] J.-F. DELMAS et B. JOURDAIN – *Modèles aléatoires : applications aux sciences de l'ingénieur et du vivant*, Mathématiques & Applications, vol. 57, Springer-Verlag, Berlin, 2006. 7, 15
- [Dur08] R. DURRETT – *Probability models for DNA sequence evolution*, Probability and its Applications (New York), Springer, New York, 2008. 7
- [FF03] D. FOATA et A. FUCHS – *Calcul des probabilités*, Dunod, 2003. 5
- [Lév08] T. LÉVY – « Probabilistic methods in statistical physics », notes de cours, [http ://www.math.ens.fr/ levy/](http://www.math.ens.fr/levy/), 2008. 15