

# Exercices sur les intégrales généralisées

## Introduction

- Intégrales généralisées – Convergence, définition, critère de comparaison.

## Exercice 1 – Convergence, définition, critère de comparaison

### Cours

On suppose que  $f$  et  $g$  sont des fonctions localement intégrales sur un intervalle de type  $[a, b[$  fixé.

On suppose que  $f$  et  $g$  sont positives sur cet intervalle.

- Montrer que  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est une fonction croissante sur  $[a, b[$ .
- On suppose que sur  $\forall x \in [a, b[, f(x) \leq g(x)$  et que  $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x g(t) dt$  existe et est finie. En déduire que

$\int_a^b f(t) dt$  est convergente. (cela s'appelle le critère de comparaison... La question consiste à redémontrer ce critère et à refaire le cheminement qui y mène).

### Question 1

- Effectuer le calcul de  $\int_1^t \frac{dx}{x(x^2+1)}$  pour  $t \in [1, +\infty[$ .
- En déduire la nature de  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)}$  (c'est-à-dire si l'intégrale est convergente ou pas).

Remarque : quand l'une des bornes est infinie, l'intégrale est automatiquement impropre en cette borne.

### Question 2

Déterminer la nature de  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

## Exercice 2

Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continue et telle que  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge.

Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  converge.

On pourra pour cela considérer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[1, +\infty[$  et examiner son comportement au voisinage de  $+\infty$ .

## Exercice 3

### 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll} (i) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} & (iii) \text{ pause} & (v) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + x^2 e^{-x}} dx \\ (ii) \int_2^{+\infty} (\ln x)^{-\ln x} dx & (iv) \text{ re-pause} & (vi) \int_0^{+\infty} \frac{x + \sin x}{x^3 + \sin x} dx \end{array}$$

### 2

Déterminer la nature et effectuer le calcul des intégrales suivantes :

$$(i) \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{x} - \operatorname{Arc} \tan \left( \frac{1}{x} \right) \right) dx \quad (iii) \int_0^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$(ii) \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$$

## Exercice 4

1

Montrer la convergence de  $\int_1^{+\infty} \sin(t^2) dt$ .

2

La fonction  $t \mapsto \sin(t^2)$  admet-elle une limite en  $+\infty$  ?

3

Soit une fonction  $f$  telle que  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge et qui admet une limite en  $+\infty$ . Quelle est cette limite ?

4

- Existe-t-il une fonction dont l'intégrale converge sur  $[a + \infty[$  mais qui ne serait pas bornée au voisinage de  $+\infty$  ?
- Existe-t-il un rapport entre la limite éventuelle d'une fonction en  $+\infty$  et le fait que son intégrale sur  $[a + \infty[$  converge ?

## Exercice 5

1

Déterminer la nature des intégrales suivantes et en effectuer le calcul.

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \quad (ii) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}$$

2

Etudier la nature de : (i)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} dx$  (ii)  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$  (iii)  $\int_2^{+\infty} (\ln x)^{-\ln(\ln x)} dx$ .

## Exercice 6

1

Que pensez-vous de la proposition suivante ?

### **Proposition**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions localement intégrables sur  $[a, b[$  telles que  $g = o_b(f)$ .

Si  $\left( \int_a^b f \text{ converge} \right)$  Alors  $\left( \int_a^b g \text{ converge} \right)$ . ■

Cette proposition ne marche qu'avec de la convergence absolue...

2

Déterminer la nature de  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  et de  $\int_1^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) dx$ .

Pour la deuxième intégrale, on pourra s'aider d'un développement asymptotique de l'expression (c'est-à-dire un développement en  $+\infty$ ) puis s'aider de la question 1 pour savoir à quel ordre pousser le développement.

## Exercice 7

Déterminer la nature de l'intégrale suivante et en effectuer le calcul :  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$ .

## Exercice 8

On pose  $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt$ .

1

Montrer que  $I$  est convergente.

2

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^n e^{-kt} + \frac{e^{-nt}}{e^t - 1}$ , puis que  $I = \sum_{k=1}^n \left( \int_0^{+\infty} t^2 e^{-kt} dt \right) + \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-nt}}{e^t - 1} dt$ .

3

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} + \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-nt}}{e^t - 1} dt$ .

4

• Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-nt}}{e^t - 1} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

• Conclusion.

## Exercice 9

### Énoncé

Etudier la nature de : (i)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} dx$  (ii)  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$   $a, b \in \mathbb{R}$  (iii)  $\int_2^{+\infty} (\ln x)^{-\ln(\ln x)} dx$

### Correction

(i)

On va utiliser le critère sur les équivalents. La fonction à intégrer est continue sur  $]0, +\infty[$  donc localement intégrable sur cet intervalle. L'intégrale est automatiquement impropre en  $+\infty$ . Il faut faire l'étude en 0.

• En 0

$\sin(3x) = 3x + o(x)$  et  $\sin(5x) = 5x + o(x)$  donc  $\sin(5x) - \sin(3x) = 2x + o(x) \sim 2x$ .

Donc  $\frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} \sim_0 \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}$ . On a donc que les fonctions sont de signe constant au voisinage de 0. On peut donc utiliser le critère sur les équivalents.

$$\left[ \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} \sim_0 \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} \right] \Rightarrow \left[ \int_0^1 \frac{2dx}{x^{\frac{2}{3}}} \text{ et } \int_0^1 \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} dx \text{ sont de même nature} \right]$$

Les fonctions sont de signe constant au voisinage de 0

Comme  $\int_0^1 \frac{2dx}{x^{\frac{2}{3}}}$  converge,  $\int_0^1 \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} dx$  converge. (2)

• En  $+\infty$

$$\left[ \forall x \geq 1, \left| \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} \right| \leq \frac{|\sin 5x| + |\sin 3x|}{x^{\frac{5}{3}}} \leq \frac{2}{x^{\frac{5}{3}}} \right]$$

On travaille avec des fonctions positives  
(ce sont des valeurs absolues)

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^{\frac{5}{3}}} dx \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \left[ \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} \right| dx \text{ converge} \right]$$

critère de comparaison

Donc  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} dx$  converge. (1)

• Conclusion

De (1) et (2), on conclut que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} dx$  converge.

■

(ii)

La fonction à intégrer est continue sur  $]0, +\infty[$  donc localement intégrable sur cet intervalle.

• En 0

$\frac{x}{e^x - 1} \sim 1$  donc  $x \rightarrow \frac{x}{e^x - 1}$  est prolongeable par continuité en 0. Donc l'intégrale en 0 est une intégrale de

Riemann.  $x \rightarrow \frac{x}{e^x - 1}$  est donc localement intégrable sur  $[0, +\infty[$  et l'intégrale n'est impropre qu'en  $+\infty$ .

• En  $+\infty$

Le critère de Riemann devrait bien fonctionner.

$\frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{x^3}{e^x} \frac{1}{(1 - e^{-x})} = x^3 e^{-x} \frac{1}{(1 - e^{-x})}$ . On a  $x^3 e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\frac{x^3}{e^x - 1} = x^3 e^{-x} \frac{1}{(1 - e^{-x})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Le critère de Riemann permet de conclure que  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$  converge.

■

(iii)

$\forall x \in [2, +\infty[, \ln x > 0$  et  $\ln x^{-\ln(\ln x)} = e^{-(\ln(\ln x))^2}$ . Donc  $x \rightarrow (\ln x)^{-\ln(\ln x)}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . L'intégrale n'est donc impropre qu'en  $+\infty$ .

On va utiliser le critère de Riemann. Quelques essais permettent de se rendre compte que quelle que soit la puissance de  $x$  utilisée, la limite obtenue est  $+\infty$ . Donc on va montrer que l'intégrale diverge en multipliant par  $x$  et en étudiant la limite.

$$x(\ln x)^{-\ln(\ln x)} = e^{\ln x - (\ln(\ln x))^2} = e^{\ln x \left(1 - \frac{(\ln(\ln x))^2}{\ln x}\right)}.$$

$$\text{Or } \left[ \begin{array}{c} \frac{(\ln u)^2}{u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0 \\ \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{c} \frac{(\ln(\ln x))^2}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{array} \right]. \text{ Donc comme } e^u \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ alors } x(\ln x)^{-\ln(\ln x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Le critère de Riemann permet de conclure que  $\int_0^{+\infty} (\ln x)^{-\ln(\ln x)} dx$  diverge. ■

## Exercice 10

### Énoncé

Déterminer la nature des intégrales suivantes et en effectuer le calcul.

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \quad (ii) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} \quad (iii) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

### Correction

(i)

La fonction à intégrer est continue sur  $\mathbb{R}^+$  donc localement intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  (l'intégrale n'est impropre qu'en  $+\infty$ ).

**Nature**

La fonction à intégrer est positive sur  $\mathbb{R}^+$ . Donc on peut utiliser le critère sur les équivalents.

$$\left[ \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} \sim \frac{1}{x^3} \right] \Rightarrow \left[ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \text{ sont de même nature} \right]$$

Les fonctions sont de signe positif

Comme  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$  converge, donc  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$  converge.

### Conclusion

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \text{ converge.}$$

### Calcul

On effectue une décomposition en éléments simples. Celle-là est aisée puisqu'il n'y a que des pôles simples :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+3} \quad (\text{remarque : il est normal de trouver que la somme des coefficients vaut } 0 \dots \text{ On s'en rendra compte dans la suite des calculs}).$$

Soit  $x \in \mathbb{R} +$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{(t+1)(t+2)(t+3)} &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{t+1} - \int_0^x \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{t+3} = \frac{1}{2} [\ln(1+t)]_0^x - [\ln(2+t)]_0^x + \frac{1}{2} [\ln(3+t)]_0^x \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 + \ln \left( \frac{\sqrt{(1+x)(3+x)}}{2+x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or pour } t > 0, \frac{\sqrt{(1+x)(3+x)}}{2+x} = \frac{x}{x} \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{1+\frac{2}{x}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1.$$

$$\text{Donc en passant à la limite, } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \ln \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

### (ii)

Le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  et la fonction à intégrer est continue sur  $\mathbb{R}$  donc localement intégrable sur  $\mathbb{R}$ . L'intégrale est impropre en les deux bornes.

### En $+\infty$

On va utiliser le critère de Riemann.

$$\frac{x^2}{\cosh x} = \frac{x^2}{e^x + e^{-x}} = x^2 e^{-x} \frac{1}{1 + e^{-2x}}. \text{ Compte tenu des limites usuelles, ce produit tend vers } 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Donc par le critère de Riemann, on conclut que } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\cosh t} \text{ converge.}$$

### En $-\infty$

La fonction est paire donc le changement de variable bijectif et  $C^1$ ,  $x \mapsto -x$  sur  $\mathbb{R} -$  donne la même intégrale

$$\text{que sur } \mathbb{R} +. \text{ Donc } \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\cosh t} \text{ converge.}$$

### Conclusion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\cosh t} \text{ converge.}$$

### Calcul

En effectuant le changement de variable  $x \mapsto -x$ , on en déduit que pour  $x \in \mathbb{R} +$ ,  $\int_{-x}^0 \frac{dt}{\cosh t} \underset{u=-t}{=} \int_0^x \frac{dt}{\cosh t}$ . En

$$\text{passant à la limite, } \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\cosh t} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\cosh t} \text{ d'où } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\cosh t} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\cosh t}.$$

Soit  $x \in \mathbb{R} +$ ,

$$\int_0^x \frac{dt}{\cosh t} = \int_0^x \frac{dt}{e^t + e^{-t}} \underset{\substack{u=e^t \\ du=e^t dt=udt}}{=} \int_1^{e^x} \frac{du}{u \left( u + \frac{1}{u} \right)} = \int_1^{e^x} \frac{du}{u^2 + 1} = [\text{Arc tan } u]_1^{e^x} = \text{Arc tan}(e^x) - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{En faisant tendre } x \text{ vers } +\infty, \text{ on obtient : } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\cosh t} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

### (iii)

Le dénominateur de la fonction à intégrer ne s'annule jamais et celle-ci est continue sur  $\mathbb{R} +$  donc intégrable sur  $\mathbb{R} +$ . L'intégrale n'est impropre qu'en  $+\infty$ .

#### • Nature

La fonction est de signe positif sur  $\mathbb{R} +$  donc on peut utiliser le critère sur les équivalents. Le critère de Riemann marche aussi très bien. Pour changer un peu, on va utiliser le critère sur les équivalents.

$\frac{1}{\sqrt{e^t+1}} = \frac{1}{e^{t/2}} \frac{1}{\sqrt{1+e^{-t}}} \sim e^{-t/2}$ . On a donc que  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$  et  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  sont de même nature.  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  converge

donc  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$  converge.

#### • Calcul

On effectue le changement de variable bijectif de classe  $C^1$ ,  $u : t \rightarrow \sqrt{e^t+1}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R} +$ .

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}} &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{2}{u^2-1} du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{2}{(u-1)(u+1)} du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{du}{u-1} - \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{du}{u+1} = \left[ \ln \left( \frac{u-1}{u+1} \right) \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \\ &= \ln \left( \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} \right) - \ln \left( \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \end{aligned}$$

$\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} = \frac{e^{x/2}}{e^{x/2}} \frac{\sqrt{1+e^{-x}}-e^{-x/2}}{\sqrt{1+e^{-x}}+e^{-x/2}} = \frac{\sqrt{1+e^{-x}}-e^{-x/2}}{\sqrt{1+e^{-x}}+e^{-x/2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ . Par continuité de  $\ln$  en 1 et composition des

limites, on obtient en passant à la limite :  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}} = \ln \left( \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right)$ .

## Problème

### Énoncé

#### Q1

Pour quelle(s) valeur(s) de  $s \in \mathbb{R}$ , l'intégrale suivante est-elle convergente  $\gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$  ?

#### Q2

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , trouver une relation de récurrence entre  $\gamma(k)$  et  $\gamma(k+1)$ .

En déduire la valeur de  $\gamma(k)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .

#### Q3

On note  $E = \mathbb{R}_2[X]$ , le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et de degré inférieur ou égal à 2.

Soit  $u$  l'application définie sur  $E$  par :

$$u : P \mapsto u(P) \text{ telle que } u(P)(x) = \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) e^{-t} P(t) dt$$

1. Montrer que  $u \in L(E)$ .
2. Donner la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $E$ .

#### Q4

Quels sont les éléments propres de  $u$  ? (valeurs, vecteurs, sous-espaces propres) ?

L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

Présenter suivant la valeur du réel  $\lambda$ , un bilan des solutions de l'équation d'inconnue  $P \in E$  :

$$\lambda P(t) = \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) e^{-t} P(t) dt$$

## Correction

La première partie de ce problème est un grand classique.

### Question 1

La fonction à intégrer est continue et positive sur  $]0, +\infty[$ .

- En 0, on va travailler avec les équivalents.
- En  $+\infty$ , le critère de Riemann est très bien adapté à la forme de la fonction à intégrer.

On sépare l'étude car suivant les valeurs de  $s$ ,  $\gamma(s)$  est impropre en 0 et en  $+\infty$  ou seulement en  $+\infty$ .

#### En 0

Suivant la valeur de  $s$ , la fonction à intégrer est continue en 0 ou non.  $e^{-t} \sim 1$  donc  $t^{s-1}e^{-t} \sim t^{s-1} = \frac{1}{t^{1-s}}$ . Les fonctions sont positives, donc on peut utiliser le critère sur les équivalents.

$\left(\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-s}} \text{ converge} \right)ssi(1-s < 1)ssi(s > 0)$ . Donc  $\left(\int_0^1 t^{s-1}e^{-t} dt \text{ converge} \right)ssi(s > 0)$ .

#### En $+\infty$

On va utiliser le critère de Riemann.

$\forall s \in \mathbb{R}, t^{s+1}e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ . Donc  $\forall s \in \mathbb{R}, \int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t} dt$  converge.

### Conclusion

$(\gamma(s) \text{ converge})ssi(s > 0)$ . L'ensemble de définition de la fonction  $\gamma$  est  $]0, +\infty[$ .

### Question 2

On va utiliser une intégration par parties. Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ .

$\int_0^x t^k e^{-t} dt = [-t^k e^{-t}]_0^x + k \int_0^x t^{k-1} e^{-t} dt$ . En faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$ ,  $[-t^k e^{-t}]_0^x = -x^k e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc  $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$ . C'est à dire :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \gamma(k+1) = k\gamma(k)$ .

On montre par une récurrence que  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \gamma(k) = (k-1)!\gamma(0)$ . Comme  $\gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ , on conclut :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \gamma(k) = (k-1)!$ .

### Question 3

#### 1

E désigne en fait l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

- Il faut montrer que l'application est bien définie.

Soit P un polynôme de degré 3 :  $P = aX^2 + bX + c$ .

Soit  $z \in \mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned} & \int_0^z (t^2 - 4xt - 2x^2) e^{-t} (at^2 + bt + c) dt \\ &= a \int_0^z t^4 e^{-t} dt + (b - 4xa) \int_0^z t^3 e^{-t} dt + (c - 4xb - 2a) \int_0^z t^2 e^{-t} dt - (4cx + 2bx^2) \int_0^z t e^{-t} dt - 2cx^2 \int_0^z e^{-t} dt \end{aligned}$$

Chaque intégrale dans le deuxième membre converge lorsque  $z \rightarrow +\infty$ . En passant à la limite, on obtient un polynôme du second degré en  $x$ . Donc  $u$  est bien définie en tant qu'application et est à valeurs dans  $\mathbb{R}_2[x]$ .

- Il reste à montrer que c'est une application linéaire. C'est la structure d'espace vectoriel des fonctions localement intégrables sur  $[0, +\infty[$  et dont l'intégrale sur cet intervalle converge, et la linéarité de l'intégrale qui permettent de conclure.

### Conclusion

$u$  est un endomorphisme de  $E$ .

#### 2

On calcule les images des fonctions polynômes  $e_1 : x \rightarrow 1, e_2 : x \rightarrow x, e_3 : x \rightarrow x^2$ . D'après la question précédente et la question 2, on trouve :

$$u(e_1) = \gamma(3) - 4\gamma(2)x - 2\gamma(1)x^2 = 2 - 4x - x^2$$

$$u(e_2) = \gamma(4) - 4\gamma(3)x - 2\gamma(2)x^2 = 6 - 8x - 2x^2$$

$$u(e_3) = \gamma(5) - 4\gamma(4)x - 2\gamma(3)x^2 = 24 - 24x - 4x^2$$

D'où la matrice dans la base canonique de  $u$  :  $\boxed{\text{mat}_{can}(u) \begin{pmatrix} 2 & 6 & 24 \\ -4 & -8 & -24 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}}$ .

#### **Question 4**

Il reste à étudier les éléments propres de la matrice précédente :

- calcul du polynôme caractéristique.
- détermination des racines (valeurs propres).
- Détermination de la dimension des sous espaces propres associés.

■