

Exercices de Mathématiques de Signal Aléatoire MAA104

©(2008) D.GHORBANZADEH
dariush.ghorbanzadeh@cnam.fr

formule de Binôme

Exercice

1

En utilisant la formule de Binôme $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$, calculer les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=0}^n C_n^k & S_2 &= \sum_{k=1}^n k C_n^k \\ S_3 &= \sum_{k=1}^n k(k-1) C_n^k & S_4 &= \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k \end{aligned}$$

combinatoire

Exercice

2

Soit Ω un ensemble fini à N éléments. On désigne par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω . Montrer que $\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^N$.

corrigé 2

L'ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ possède comme éléments tous les sous-ensembles de Ω formé de :

0 élément	il y en a $C_N^0 = 1$ (\emptyset ensemble vide)
1 élément	il y en a $C_N^1 = N$ (les singletons)
2 éléments	il y en a $C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2}$
3 éléments	il y en a $C_N^3 = \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}$
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
N éléments	il y en a $C_N^N = 1$ (Ω lui-même)

Alors, $\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = \sum_{i=0}^N C_N^i = 2^N$.

combinatoire

Exercice

3

Trouver toutes les compositions possibles d'une famille de 4 enfants qui comprend deux filles et deux garçons.

corrigé 3

Il y a $C_4^2 = 6$ possibilités : $\{(ffgg), (fgfg), (fggf), (ggff), (gfgf), (gffg)\}$

partition

Exercice

4

On considère Ω l'ensemble des familles ayant 3 enfants et on désigne par E_1, E_2, E_3, E_4 les évènements suivants :

$$E_1 = \{ \text{la famille a au plus deux filles} \}$$

$$E_2 = \{ \text{la famille n'a pas de fille} \}$$

$$E_3 = \{ \text{la famille a une fille} \}$$

$$E_4 = \{ \text{la famille a deux filles} \}$$

Montrer que E_2, E_3, E_4 forment une partition de E_1 .

corrigé 4

On a :

$$E_1 = \{ (ffg), (f gf), (fgg), (gff), (gfg), (ggf), (ggg) \}$$

$$E_2 = \{ (ggg) \}$$

$$E_3 = \{ (fgg), (gfg), (ggf) \}$$

$$E_4 = \{ (ffg), (f gf), (gff) \}$$

calculs de probabilités

Exercice

5

Lorsque Nicolas joue aux échecs contre Louis, il gagne 5 fois plus souvent que ce dernier. Quelle est la probabilité que Nicolas gagne une partie ?

corrigé 5

Posons $N = \{ \text{Nicolas gagne} \}$ et $L = \{ \text{Louis gagne} \}$. On cherche alors à calculer $\mathbb{P}(N)$ sachant que $\mathbb{P}(N) = 5 \mathbb{P}(L)$.

Or, par définition de la probabilité totale, on a $\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(L) = 1$. donc , $6 \mathbb{P}(L) = 1$ soit $\mathbb{P}(L) = \frac{1}{6}$, on en déduit : $\mathbb{P}(N) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

calculs de probabilités

Exercice

6

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$

1. Montrer que si $A \subset B$, alors, $P(B - A) = P(B) - P(A)$ et $P(A) \leq P(B)$.

2. Montrer que l'on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ et } P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

calculs de probabilités

Exercice

7

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A, B, C trois événements de $\mathcal{P}(\Omega)$.
On donne : $P(A) = 0,65$, $P(A \cap B) = 0,15$, $P(B \cap C) = 0,1$, $P(A \cap C) = 0,1$,
 $P(A \cap B \cap C) = 0,05$.

On pose $H_1 = A \cup (B \cap C)$, $H_2 = A \cap (B \cup C)$ et $H_3 = \{\text{ni } A, \text{ni } B\}$.

1. Calculer $P(H_1)$ et $P(H_2)$.
2. Calculer $P(H_3)$ si $P(B) = 0,35$.

calculs de probabilités

Exercice

8

Un étudiant, soucieux de ses résultats, estime à 60% ses chances de réussir son cours de Mathématiques, à 85% ses chances de réussir son cours d'Informatique et à 50% ses chances de réussir les deux matières. Calculer la probabilité :

1. qu'il réussisse en Mathématiques, mais pas en Informatique
2. qu'il réussisse en Informatique, mais pas en Mathématiques
3. qu'il réussisse dans au moins une de ces deux matières.

calculs de probabilités

Exercice

9

On considère le système d'équations d'inconnus (x, y) , dans lequel a, b, c désignent trois paramètres réels :
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$$

Pour déterminer les coefficients a, b, c l'on lance, trois fois, un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 : le premier numéro sorti donne a , le second b et le troisième c .

1. Calculer les probabilités p_1, p_2, p_3 , pour que le système ainsi obtenu ait respectivement : une infinité de solutions ; aucune solution ; une solution unique.
2. Quelle est la probabilité pour que le système admette la solution unique $(3, 0)$.

calculs de probabilités

Exercice

10

On lance un dé parfait deux fois. Calculer la probabilité que la somme des points obtenus soient supérieure ou égale à 4 et que le premier point soit plus grand ou égal au deuxième point.

corrigé 10

Notons $A = \{(i, j) : i + j \geq 4 \text{ et } i \geq j, 1 \leq i, j \leq 6\}$. On cherche $\mathbb{P}(A)$.

Le dé étant parfait on a donc : $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{36}$. Pour déterminer le cardinal de A on a :

$$\begin{aligned} A &= \{(i, j) : i \geq 4 - j \text{ et } i \geq j, 1 \leq i, j \leq 6\} \\ &= \{(i, j) : \max(4 - j, j) \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\} \end{aligned}$$

On peut donc écrire A sous la forme $A = \bigcup_{j=1}^6 M_j$ avec $M_j = \{i : \max(4 - j, j) \leq i \leq 6\}$.

Du fait que M_1, \dots, M_6 sont disjoints on a : $\text{card}(A) = \sum_{j=1}^6 \text{card}(M_j)$. Or,

$$\text{card}(M_j) = 6 - \max(4 - j, j) + 1$$

En tenant compte de :

$$\max(4 - j, j) = \begin{cases} 4 - j & \text{si } j = 1 \\ j & \text{si } j = 2, \dots, 6 \end{cases}$$

on obtient :

$$\text{card}(A) = \sum_{j=1}^6 (7 - \max(4 - j, j)) = (7 - (4 - 1)) + \sum_{j=2}^6 (7 - j) = 19$$

$$\text{D'où } \mathbb{P}(A) = \frac{19}{36}.$$

Modèles d'urne

Une urne contient n boules, n_1 du type A , n_2 de type B . Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne et à noter son type A ou B ($n \geq 2$, $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$).

On effectue N tirages ; soit $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ événement associé. Parmi les N tirages il y en a N_1 du type A et $N_2 = N - N_1$ du type B .

Notons : $A_i = \{\text{i-ème tirage est du type } A\}$ et $B_i = \{\text{i-ème tirage est du type } B\}$
on a : $\mathbb{P}(A_i) = \frac{n_1}{n}$ et $\mathbb{P}(B_i) = \frac{n_2}{n}$.

• Modèle du tirage avec remise ($N \geq 1$)

Après chaque tirage on remet la boule dans l'urne ; des événements associés à des tirages différents sont mutuellement indépendants.

Toutes les boules présentes dans l'urne ont la même probabilité d'être tirées.

On a donc

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \left(\frac{n_1}{n}\right)^{N_1} \left(\frac{n_2}{n}\right)^{N_2}$$

• Modèle du tirage sans remise ($1 \leq N \leq n$)

Après chaque tirage on ne remet pas la boule dans l'urne. A chaque tirage toutes les boules présentes dans l'urne ont la même probabilité d'être tirées.

On a donc

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{C_{n_1}^{N_1} C_{n_2}^{N_2}}{C_n^N} = \frac{C_{n_1}^{N_1} C_{n-n_1}^{N-N_1}}{C_n^N} \quad \text{avec} \quad \max\{0, N - n_2\} \leq N_1 \leq \min\{N, n_1\}$$

Modèle d'urne

Exercice

11

Un joueur de bridge possède dans sa main 13 cartes d'un jeu de 52 cartes distribuées au hasard. Calculer la probabilité qu'il ait :

1. un as exactement.
2. au moins un as.
3. un as et un roi.
4. au moins un as et au moins un roi.

Modèle d'urne

Exercice

12

Une urne contient n boules dont n_1 rouges, n_2 blanche et n_3 bleues. On en tire 3 boules (sans les remplacer), calculer la probabilité pour que

1. toutes les trois soient rouges ;
2. deux soient rouges et une blanche ;
3. au moins une soit blanche ;
4. il y ait une de chaque couleur ;
5. les boules soient tirées dans l'ordre bleue, blanche et rouge.

probabilité conditionnelle

Exercice

13

Une urne contient 7 boules blanches et 5 boules rouges. On extrait 2 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ? Que la deuxième soit blanche ?

corrigé 13

Notons : $A = \{\text{première boule blanche}\}$ et $B = \{\text{deuxième boule blanche}\}$. Alors

$$\mathbb{P}(\text{2 boules blanches}) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \frac{7}{12} \frac{7-1}{12-1}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{deuxième boule blanche}) &= \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap (A \cup A^c)) = \mathbb{P}((B \cap A) \cup (B \cap A^c)) \\ &= \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^c) \mathbb{P}(B|A^c) = \frac{7}{12} \frac{7-1}{12-1} + \frac{5}{12} \frac{7-0}{12-1} \end{aligned}$$

probabilité conditionnelle

Exercice

14

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Les faces 3 et 6 sont blanches. Les faces 1, 2 et 4 sont rouges. La face 5 est bleue. On suppose que le dé est truqué et on a les probabilités des événements élémentaires suivantes :

$$\mathbb{P}(\{1\}) = 0,1 ; \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = 0,2 ; \mathbb{P}(\{5\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = 0,15$$

Quelle est la probabilité d'obtenir une face avec un numéro pair sachant que la face est blanche ?

corrigé 14

Notons $A = \{\text{face blanche}\}$ et $B = \{\text{numéro pair}\}$. On cherche la probabilité $\mathbb{P}(B|A)$.

On a : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 0,55$ et $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 0,35$.

De plus $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{6\}) = 0,15$ d'où $\mathbb{P}(B|A) = \frac{0,15}{0,35} = \frac{3}{7}$.

probabilité conditionnelle

Exercice

15

Deux familles ont respectivement 3 et 5 enfants. Il y a deux garçons dans chacune des familles. Nous choisissons un enfant au hasard de la façon suivante : un dé est lancé et l'enfant est sélectionné dans la première famille si le résultat est inférieur ou égal à quatre et dans la deuxième sinon. Une fois la famille déterminée, les enfants de cette famille ont tous la même chance d'être sélectionné. Quelle est la probabilité que l'enfant choisi soit un garçon ?

corrigé 15

Notons :

$E = \{\text{l'enfant choisi est un garçon}\}$

$F_1 = \{\text{l'enfant provient de la première famille}\}$

$F_2 = \{\text{l'enfant provient de la deuxième famille}\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E \cap F_1) + \mathbb{P}(E \cap F_2) = \mathbb{P}(E|F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(E|F_2)\mathbb{P}(F_2) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{26}{45} \end{aligned}$$

probabilité conditionnelle

Exercice

16

Il y a 4% d'absenteisme chez les employés travaillant de jour, 8% chez ceux qui travaillent le soir et 22% chez ceux qui travaillent de nuit. Il y a 80% des employés qui travaillent de jour, 10% qui travaillent de soir et 10% qui travaillent de nuit. On choisit un employé, quelle est la probabilité qu'il travaille de jour sachant qu'il était absent du travail.

corrigé 16

Notons :

$E_1 = \{ \text{employé travaille de jour} \}$

$E_2 = \{ \text{employé travaille de soir} \}$

$E_3 = \{ \text{employé travaille de nuit} \}$

$A = \{ \text{employé est absent} \}$

On cherche : $\mathbb{P}(E_1|A)$. Or,

$$\mathbb{P}(A|E_1) = \frac{4}{100} \quad \mathbb{P}(A|E_2) = \frac{8}{100} \quad \mathbb{P}(A|E_3) = \frac{22}{100}$$

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{80}{100} \quad \mathbb{P}(E_2) = \frac{10}{100} \quad \mathbb{P}(E_3) = \frac{10}{100}$$

D'où

$$\mathbb{P}(E_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|E_1) \times \mathbb{P}(E_1)}{\mathbb{P}(A|E_1) \times \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(A|E_2) \times \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(A|E_3) \times \mathbb{P}(E_3)} = 0,51613$$

probabilité conditionnelle

Exercice

17

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non-vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?

Le vaccin est-il efficace ?

probabilité conditionnelle

Exercice

18

1. Une famille a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?
2. Une autre famille a deux enfants, le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ?

loi de probabilité discrète

Exercice

19

Pour $\theta \in]0, 1[$, on définit la suite p_k par :

$$p_k = \begin{cases} C(1 - \theta) \max \{k, k^2 - 5k + 6\} & \text{si } k = 1, \dots, 9 \\ \theta & \text{si } k = 10 \end{cases}$$

où C est une constante positive. Déterminer C de sorte que p_k soit une loi de probabilités sur $\{1, \dots, 10\}$.

corrigé 19

Pour que p_k soit une loi de probabilités sur $\{1, \dots, 10\}$, on doit avoir : $\sum_{k=1}^{10} p_k = 1$.

$$\sum_{k=1}^{10} p_k = C(1 - \theta) \sum_{k=1}^9 \max \{k, k^2 - 5k + 6\} + \theta = 1$$

D'où $\sum_{k=1}^9 \max \{k, k^2 - 5k + 6\} = \frac{1}{C}$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$k^2 - 5k + 6$	2	0	0	2	6	12	20	30	42
$\max \{k, k^2 - 5k + 6\}$	2	2	3	4	6	12	20	30	42

$$\text{Donc } C = \frac{1}{2 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42} = \frac{1}{121}$$

loi de probabilité discrète

Exercice

20

Pour $\theta \in]0, 1[$, on définit la suite p_k par :

$$p_k = \begin{cases} C \theta \min \{k, 8 - k\} & \text{si } k = 1, \dots, 7 \\ 1 - \theta & \text{si } k = 8 \end{cases}$$

où C est une constante positive. Déterminer C de sorte que p_k soit une loi de probabilités sur $\{1, \dots, 8\}$.

Variable aléatoire discrète

Si une variable aléatoire X prend ses valeurs dans un ensemble discret (fini ou infini dénombrable) c'est une variable aléatoire discrète.

• Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire dichotomique définissant le modèle de probabilité :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \theta \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \theta$$

Une telle variable aléatoire est dite variable de Bernoulli de paramètre θ , notée $\mathcal{Ber}(\theta)$.

👉 On utilise la loi de Bernoulli lorsqu'une expérience aléatoire n'a que deux résultats possibles : le succès avec une probabilité de θ , et l'échec avec une probabilité de $1 - \theta$. Les exemples d'utilisation de cette loi sont nombreux. En voici quelques-uns : étude de la composition d'une population (masculin-féminin) ; contrôle de la qualité de certaines marchandises (bonne ou défectueuse) ; le sexe d'un enfant à la naissance.

• Loi binômiale

Considérons un ensemble de n variables aléatoires indépendantes, suivant une loi de Bernoulli de paramètre θ . Soit $X = \sum_{i=1}^n Y_i$, la somme de ces n variables de Bernoulli indépendantes. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binômiale, notée $\mathcal{Bin}(n, \theta)$. Elle est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k \theta^k (1 - \theta)^{n-k} \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Exemple. On lance une pièce de monnaie six fois. La probabilité d'obtenir exactement trois piles est :

$$\mathbb{P}(X = 3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-3} = \frac{C_6^3}{2^6} = 0,3125$$

loi de Bernoulli de paramètre θ

Exercice

21

Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre θ .
Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}[X]$.

corrigé 21

$$\text{On a : } \mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \{0,1\}} k \mathbb{P}(X = k) = 0 \times (1 - \theta) + 1 \times \theta = \theta.$$

$$\text{D'autre part, } \mathbb{E}[X^2] = \sum_{k \in \{0,1\}} k^2 \mathbb{P}(X = k) = 0^2 \times (1 - \theta) + 1^2 \times \theta = \theta.$$

$$\text{D'où : } \text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \theta - \theta^2 = \theta(1 - \theta)$$

variable aléatoire discrète

Exercice

22

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$ de loi :

$$P(X = i) = C i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

où C est une constante.

1. Déterminer la valeur de la constante C .
2. Déterminer la fonction de répartition de la loi de X .
3. Déterminer la loi de $Y = n - X$.
4. Déterminer la loi de $Z = n + X$.

indication

► On utilisera : $\sum_{k=1}^M k = \frac{M(M+1)}{2}$

variable aléatoire discrète

Exercice

23

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1, 2, \dots, 5\}$ de loi :

$$\mathbb{P}(X = i) = K(7 - i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 5\}$$

où K est une constante.

1. Déterminer la valeur de la constante K .
2. Calculer $\mathbb{P}(X^2 - 5X + 6 = 0)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X^2 - 5X + 6 > 0)$.

calculs de lois

Exercice

24

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes, indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$ de lois respectives :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p_1, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p_1, \mathbb{P}(Y = 1) = p_2, \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - p_2$$

On pose $U_1 = X + Y$ et $U_2 = XY$.

1. Déterminer les lois de U_1 et de U_2 .
2. Calculer $\mathbb{E}[U_1]$, $Var[U_1]$, $\mathbb{E}[U_2]$ et $Var[U_2]$.

calculs de lois

Exercice

25

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes de lois respectives :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{3} & \forall i \in \{1, 2, 3\} \\ \mathbb{P}(Y = j) = \frac{2+j}{10} & \forall j \in \{-1, 0, 1, 2\} \end{cases}$$

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

loi uniforme discrète

Exercice

26

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \dots, 11\}$.

1. Déterminer la loi de : $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
2. Calculer $\mathbb{E}[S]$ et $\mathbb{E}[D]$.
3. Déterminer la loi de : $T = \cos(\pi S)$.

Loi de Poisson

La variable aléatoire X , représentant le nombre de réalisations d'un certain événement par unité de temps, dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

est dite de Poisson de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$. La loi de Poisson de paramètre λ est un exemple de variable aléatoire discrète qui prend ses valeurs dans un ensemble infini dénombrable.

👉 Les applications possibles de la loi de Poisson sont nombreuses et variées, par exemple : le nombre de voitures sur une auto route, le nombre de plantes d'un type donné par unité de surface, le nombre d'appels téléphoniques à un central, le nombre de défauts sur un écran de télévision, le nombre de personnes attendant à un guichet, etc.

Exemple. Le nombre moyen de clients à un guichet par heure est égal à 15, calculons la probabilité d'observer 20 arrivées dans une heure donnée, supposant que les arrivées sont indépendantes les unes des autres. Ici, la valeur de $\lambda = 15$ et on cherche la probabilité $\mathbb{P}(X = 20)$, donc :

$$\mathbb{P}(X = 20) = \frac{e^{-15} 15^{20}}{20!} = 0,042$$

loi de Poisson

Exercice

27

On dit qu'une variable aléatoire discrète Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si la loi de Z est donnée par :

$$\mathbb{P}(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[Z]$ et $\text{Var}[Z]$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer la loi de $S = X + Y$.

indication

► On utilisera : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Loi Géométrique

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre θ , notée $\mathcal{Geo}(\theta)$, si $\mathbb{P}(X = k) = \theta (1 - \theta)^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple (Temps d'attente). On lance une pièce de monnaie (truquée) dont la probabilité d'obtenir pile est θ . On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pile. Alors X suit une loi géométrique de paramètre θ .

loi géométrique

Exercice

28

On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit une loi géométrique de paramètre θ , ($0 < \theta < 1$), si la loi de X est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \theta (1 - \theta)^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* .$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $Var[X]$.
2. Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre θ . Déterminer la loi de $S = Y + Z$.

indication

► Pour $|\eta| < 1$, on a : $\sum_{k=0}^{\infty} \eta^k = \frac{1}{1 - \eta}$

loi géométrique

Exercice

29

Soient X, Y et Z des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre θ . On pose : $S_1 = X$, $S_2 = X + Y$ et $S_3 = X + Y + Z$. Déterminer la loi du vecteur (S_1, S_2, S_3) .

loi de Poisson

Exercice

30

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoires. On suppose que :

- X et $Y - X$ sont indépendantes
- X suit une loi de Poisson de paramètre λ_1
- $Y - X$ suit une loi de Poisson de paramètre λ_2

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Déterminer la loi de Y .

simulation de la loi géométrique

Exercice

31

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoire indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre θ . On définit la variable aléatoire X par :

$$X = \min \{n \geq 1 : U_n = 1\}$$

Déterminer la loi de X .

corrigé 31

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(U_1 = 0, \dots, U_{k-1} = 0, U_k = 1) \\ &= \mathbb{P}(U_k = 1) \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(U_i = 0) = \theta (1 - \theta)^{k-1} \end{aligned}$$

Donc X suit une loi géométrique de paramètre θ .

```
n=10000; m=100;
theta=.45;
X=[];
Bernoulli=(rand(n,m) <=theta);
for j=1:m
X(j)=min(find(Bernoulli(:,j)==1));
end
```


Variables aléatoires continues

Si une variable aléatoire X peut prendre toutes les valeurs réelles d'un intervalle, elle est dite continue. Une variable aléatoire continue X est définie par son domaine (intervalle de variation) (a, b) qui peut ne pas être borné et par la fonction f_X appelée la densité de probabilité de la variable aléatoire X . La probabilité que X appartienne à l'intervalle (x_1, x_2) est donnée par l'intégrale :

$$\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$

- La fonction de densité f_X satisfait les conditions suivantes :

1. $\forall x \in \Omega_X, f_X(x) \geq 0$
2. $\int_{\Omega_X} f_X(x) dx = 1$

- Fonction de répartition de la loi de X est définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

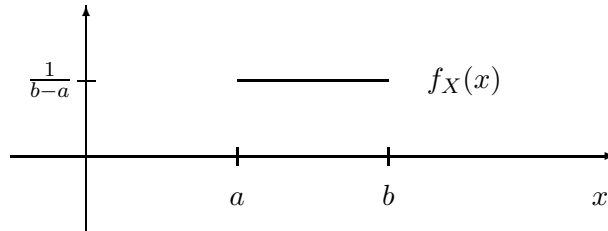
La Fonction de répartition de la loi de X satisfait les conditions suivantes :

1. F_X est une application de \mathbb{R} dans $[0, 1]$.
2. F_X est monotone, non décroissante.
3. F_X est continue à gauche.
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$.
5. Pour tout $a < b$, $\mathbb{P}(X \in [a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$.
6. $\mathbb{P}(X = x_0) = 0$ si et seulement si F_X est continue en x_0 .

Loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$

On dit qu'une variable aléatoire X définie sur l'intervalle $[a, b]$ suit la loi uniforme, notée $\mathcal{U}([a, b])$, si la densité de sa loi est constante sur l'intervalle $[a, b]$:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$



La fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([a, b])$ est définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

👉 En simulation, la loi uniforme est utilisée pour générer des nombres aléatoires issus de n'importe quelle loi de probabilité à l'aide d'une transformation appropriée.

loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$

Exercice

32

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{U}([a, b])$. pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}[X^k]$.

corrigé 32

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^k] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^k dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)} \end{aligned}$$

fonction Gamma

Exercice

33

Pour $\alpha > 0$, on définit la fonction $\Gamma(\alpha)$ par : $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.
Montrer que : $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

corrigé 33

Par définition on a : $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt$. En effectuant l'intégration par parties suivante :

$$\begin{cases} u = t^{\alpha} \\ dv = e^{-t} dt \end{cases} \quad \begin{cases} du = \alpha t^{\alpha-1} dt \\ v = -e^{-t} \end{cases}$$

On obtient :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \underbrace{[-t^{\alpha} e^{-t}]_0^{\infty}}_0 + \alpha \underbrace{\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt}_{\Gamma(\alpha)} = \alpha \Gamma(\alpha)$$

On remarque que $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$. On a : $\Gamma(2) = \Gamma(1 + 1) = 1 \Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(3) = \Gamma(2 + 1) = 2 \Gamma(1) = 2 \times 1$. Donc Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(n) = \Gamma(n - 1 + 1) = (n - 1) \Gamma(n - 1) = (n - 1)(n - 2) \Gamma(n - 2) = (n - 1)!$$

Démontrons la propriété pour $n + 1$. Or, d'après la première partie,

$$\Gamma(n + 1) = n \Gamma(n) = n \Gamma(n - 1) = n(n - 1)! = n!$$

densité de probabilités

Exercice

34

Pour $\theta \in [0, 1]$, on considère la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{2+x} & \text{si } x \leq -2 \\ 0 & \text{si } -2 < x < -1 \\ (1 - \theta) e^{-1-x} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire dont la loi admet la densité f . Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}[X]$.

Loi Exponentielle da paramètre $\lambda > 0$

On dit qu'une variable aléatoire X définie sur l'intervalle $]0, \infty[$ suit la loi Exponentielle da paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{Exp}(\lambda)$, si la densité de sa loi est définie par : $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(x)$.

La fonction de répartition de la loi $\mathcal{Exp}(\lambda)$ est définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

👉 La Loi Exponentielle est souvent utilisée pour modéliser la durée de vie ou la fiabilité d'un système.

loi Exponentielle da paramètre λ

Exercice

35

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{Exp}(\lambda)$. pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}[X^k]$.

corrigé 35

$$\text{On a : } \mathbb{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x^k e^{-\lambda x} dx.$$

En effectuant le changement de variable : $u = \lambda x$ ($dx = \frac{du}{\lambda}$), on obtient :

$$\mathbb{E}[X^k] = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^k e^{-u} du = \frac{1}{\lambda^k} \int_0^{\infty} u^k e^{-u} du = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^k} = \frac{k!}{\lambda^k}$$

calculs des moments

Exercice

36

Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet la densité :

$$f_X(x) = C e^{-\lambda|x|} \quad \lambda > 0$$

où C est une constante.

1. Déterminer la valeur de la constante C .
2. Déterminer F_X la fonction de répartition de la loi de X .
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{E}[X^k]$. En déduire $\text{Var}[X]$.
4. Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $P(X > a)$.

fonction indicatrice

Exercice
37

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[-\theta, \theta]$ ($\theta > 0$), de densité : $f_X(x) = \frac{1}{2\theta} \mathbb{1}_{[-\theta, \theta]}(x)$. On définit les variables aléatoires

U et V par : $U = \mathbb{1}_{[-\theta/2, \theta/2]}(X)$ et $V = X \mathbb{1}_{[-\theta, 0]}(X)$.

Déterminer $\mathbb{E}[U]$, $Var[U]$ et $\mathbb{E}[V]$, $Var[V]$.

indication

► On rappelle que :

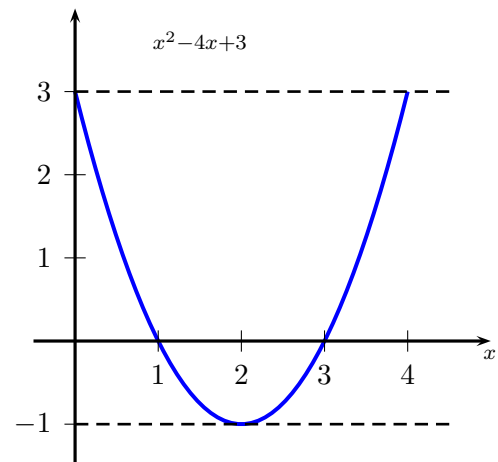
$$\mathbb{1}_A(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Optimisation

Exercice
38

Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 4]$. On définit la variable aléatoire Y par : $Y = X^2 - 4X + 3$.

1. Déterminer f_Y la densité de la loi de Y .
2. Montrer qu'on a : $P(Y \leq 0) = P(Y \geq 0)$.
3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la variable aléatoire Z par : $Z = \begin{cases} \theta & \text{si } Y \leq 0 \\ Y & \text{sinon} \end{cases}$
- 3.1. Déterminer $M(\theta) = \mathbb{E}[Z]$ et $V(\theta) = Var[Z]$.
- 3.2. Déterminer la valeur de θ qui réalise le minimum de $V(\theta)$. (on la notera $\hat{\theta}$).
- 3.3. Calculer $M(\hat{\theta})$. Que constate-on ?



indication

► On utilisera : $E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx$

médiane

Exercice

39

Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet la densité :

$$f_X(x) = \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \mathbb{1}_{[0,a]}(x) \quad a > 0$$

1. Déterminer F_X la fonction de répartition de la loi de X .
2. Calculer $P\left(\frac{a}{2} \leq X \leq a\right)$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $E[X^k]$. En déduire $Var[X]$.
4. Trouver θ tel que $F_X(\theta) = \frac{1}{2}$. (θ s'appelle la *médiane* de la loi de X).

calculs de lois

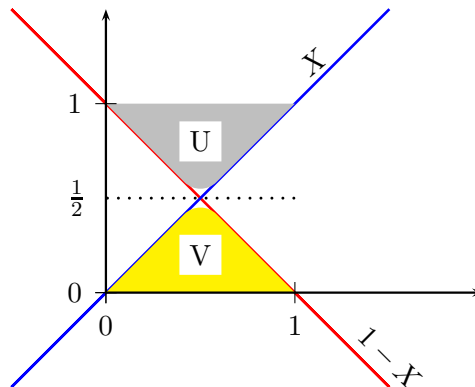
Exercice

40

Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Déterminer la loi de $U = \sup\{X, 1 - X\}$.
2. Déterminer la loi de $V = \inf\{X, 1 - X\}$.

corrigé 40



On remarque que U est à valeurs dans $[\frac{1}{2}, 1]$ et V est à valeurs dans $[0, \frac{1}{2}]$.

Pour toute fonction h continue à support compact on a :

$$\mathbb{E}[h(U)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sup\{x, 1-x\}) f_X(x) dx = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} h(1-x) dx}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 h(x) dx}_{\text{II}}$$

Dans **I** en faisant le changement de variable : $u = 1 - x$ ($dx = -du$), on obtient :

$$\text{I} = \int_1^{\frac{1}{2}} h(u) (-du) = \int_{\frac{1}{2}}^1 h(u) du$$

Dans **II** en faisant le changement de variable : $u = x$ ($dx = du$), on obtient :

$$\text{II} = \int_{\frac{1}{2}}^1 h(u) du$$

$$\text{on en déduit : } \mathbb{E}[h(U)] = \int_{\frac{1}{2}}^1 h(u) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 h(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \underbrace{2\mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}(u)}_{f_U(u)} du$$

On en déduit que U suit une loi uniforme sur $[\frac{1}{2}, 1]$. De même pour V on a :

$$\mathbb{E}[h(V)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\inf\{x, 1-x\}) f_X(x) dx = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-x) dx}_{\text{II}}$$

Dans **I** en faisant le changement de variable : $v = x$ ($dx = dv$), on obtient :

$$\text{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} h(v) dv$$

Dans **II** en faisant le changement de variable : $v = 1 - x$ ($dx = -dv$), on obtient :

$$\text{II} = \int_{\frac{1}{2}}^0 h(v) (-dv) = \int_0^{\frac{1}{2}} h(v) dv$$

$$\text{on en déduit : } \mathbb{E}[h(V)] = \int_0^{\frac{1}{2}} h(v) dv + \int_0^{\frac{1}{2}} h(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \underbrace{2\mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(v)}_{f_V(v)} dv$$

On en déduit que V suit une loi uniforme sur $[0, \frac{1}{2}]$.

calculs de lois

Exercice

41

Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose $Y = X(1 - X)$.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et $\text{Var}[Y]$.

indication

► On utilisera : $E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx$

calculs de lois

Exercice

42

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

Déterminer la loi de la somme $S = X + Y$ si

1. X et Y suivent la même loi uniforme sur $[-1, 0]$.
2. X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y suit la loi uniforme sur $[-3, 2]$.

calculs de lois

Exercice

43

Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On définit

la variable aléatoire X par :
$$X = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-U}{U}} & \text{si } 0 \leq U \leq \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{U}{1-U}} & \text{si } \frac{1}{2} < U \leq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer f_X la densité de la loi de X .
2. Déterminer F_X la fonction de répartition de la loi de X .
3. Déterminer x_0 vérifiant : $F_X(x_0) = \frac{1}{2}$ (x_0 s'appelle la médiane de la loi de X).
4. Calculer la probabilité suivante : $\mathbb{P}(X \leq 2x_0 | X > x_0)$.

polynôme de second degré

Exercice

44

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Déterminer la loi de $Z = X^2 - Y$.
2. On considère le polynôme $Q(t) = t^2 - 2Xt + Y$. Calculer la probabilité que les racines de Q soient complexes.

calculs de lois

Exercice

45

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Déterminer la loi de $U = \frac{X}{X+Y}$.
2. Calculer $\mathbb{E}[U]$ et $\text{Var}[U]$.

indication

► On utilisera : $E[h(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$

calculs de lois

Exercice

46

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives :

$$f_X(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(x) \quad , \quad f_Y(y) = \frac{1}{2} y^2 e^{-y} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(y)$$

On pose : $S = X + Y$ et $U = \frac{X}{Y}$.

1. Déterminer la loi du couple (S, U) .
2. Déterminer la loi marginale de U .
3. S et U sont-elles indépendantes ?

indication

► On utilisera : $E[h(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$

Loi Normale da paramètres (μ, σ^2)

On dit qu'une variable aléatoire X définie sur \mathbb{R} suit la loi Normale da paramètres (μ, σ^2) , notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si la densité de sa loi est définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

👉 L'utilisation de la loi Normale est très vaste. Par exemple :

- en physique, de la vitesse d'une molécule de gaz (loi de Maxwell), des erreurs de mesures dans les expériences ;
- en industrie, des charges de ruptures lors d'essais de traction, de durée de vie de cathodes de cellules d'électrolyse pour la production d'aluminium, de durée de vie de pièces automobiles soumises à l'usure mécanique ;
- en géographie, de débits de rivières coulant dans un bassin d'aire importante ;
- dans des modèles économétriques.

simulation de la loi normale

Exercice

47

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives :

$$f_X(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(y).$$

On pose $U = \sqrt{X} \cos Y$ et $V = \sqrt{X} \sin Y$.

Montrer que U et V sont indépendantes et suivent la même loi.

indication

► On utilisera : $E[h(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$

```
n=10000;
X=-log(rand(n,1));
Y=2*pi*rand(n,1);
U=[]; V=[];
U=sqrt(X).*cos(Y);
V=sqrt(X).*sin(Y);
```

loi Normale

Exercice

48

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer la loi de $Y = |X|$.
2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer la loi de $Z = |X| + \theta$.
3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer la loi de $U = \theta - |X|$.

loi Normale

Exercice

49

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer la loi de $U = X - Y$.
2. Déterminer la loi de $V = X + Y$.

loi Normale

Exercice

50

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On pose : $U = X^2 + Y^2$ et $V = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) .
2. U et V sont-elles indépendantes ?

coefficient de corrélation

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On définit le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y par :

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var[X] Var[Y]}} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{Var[X] Var[Y]}}$$

Exercice

51

Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

On pose : $U = a \cos(X + \theta_1)$ et $V = a \sin(X + \theta_2)$ où $a > 0$, θ_1 et θ_2 sont des réels fixés.

1. Calculer $E[U]$ et $Var[U]$.
2. Calculer ρ le coefficient de corrélation linéaire entre U et V .

coefficient de corrélation

Exercice

52

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi admet la densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = C \mathbb{1}_{\{a < x < y < b\}}(x, y)$$

où $a < b$ et C est une constante.

1. Exprimer C en fonction de a et b .
2. Calculer ρ le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .

coefficient de corrélation

Exercice

53

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On pose : $U = X - Y$ et $V = X + Y$.

Calculer ρ le coefficient de corrélation linéaire entre U et V .

coefficient de corrélation

Exercice

54

Soient X et U deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives :

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x), \quad f_U(u) = \frac{1}{2\theta} \mathbb{1}_{[-\theta,\theta]}(u) \quad (0 < \theta < 1)$$

On définit la variable aléatoire Y par : $Y = \begin{cases} X & \text{si } X \leq \theta \\ X + U & \text{si } X > \theta \end{cases}$

Déterminer ρ le coefficient de corrélation entre X et Y .

coefficient de corrélation

Exercice

55

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi Exponentielle de paramètre λ . On pose : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $U_n = \sum_{i=2}^n (X_i - X_{i-1})$

1. Déterminer $Var[U_n]$.
2. Déterminer le coefficient de corrélation entre S_n et U_n .
3. S_n et U_n sont-ils indépendants ?

coefficient de corrélation

Exercice

56

Soit U une variable aléatoire telle que $\mu = E[U] < \infty$ et $\sigma^2 = Var[U] < \infty$.

Pour $\theta \neq 0$, on considère les variables aléatoires X et Y ; et on suppose que X et $Y - \theta X$ sont indépendantes et suivent la même loi que U .

1. Déterminer $E[Y]$. On suppose $\mu \neq 0$, pour quelle(s) valeur(s) de θ la loi de Y est centrée ?
2. Déterminer $Cov(X, Y)$.
3. Déterminer $Var[Y]$. Pour quelle(s) valeur(s) de θ la loi de Y est réduite ?
4. Déterminer ρ le coefficient de corrélation entre X et Y .
5. On pose : $\theta = \tan(\alpha)$. Exprimer ρ en fonction de α .

Lois conditionnelles

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoires. On définit la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ par :

• cas discret $P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$

• cas continu $f_X(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$

lois conditionnelles

Exercice

57

On suppose que le nombre de passages de véhicules en un point de l'autoroute **A6** pendant un intervalle de temps I suit une loi de *Poisson* de paramètre λ_1 dans le sens Paris-Provence et une loi de *Poisson* de paramètre λ_2 dans le sens Province-Paris.

1. Déterminer la loi du nombre total de passages (quelle que soit la direction prise par les véhicules) en ce point de l'autoroute **A6** pendant un intervalle de temps I .
2. Déterminer la probabilité p que, sur un nombre total égal à N , il y ait M dans le sens Province-Paris.

lois conditionnelles

Exercice

58

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi *géométrique* de paramètre θ , i.e. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \theta(1 - \theta)^{k-1}$.

1. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{X + Y = m\}$.
2. Déterminer $\mathbb{E}[X | X + Y = m]$ et $\text{Var}[X | X + Y = m]$.

lois conditionnelles

Exercice

59

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi admet la densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = C \mathbb{1}_{\{0 < x < y < \theta\}}(x, y)$$

où $\theta > 0$ et C est une constante.

1. Exprimer C en fonction de θ .
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$.
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$.

lois conditionnelles

Exercice

60

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi admet la densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = C x e^{-y} \mathbb{1}_{\{0 < x < y < \infty\}}(x, y)$$

où C est une constante.

1. Calculer C .
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$.
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$.

lois conditionnelles

Exercice

61

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi admet la densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = C \mathbb{1}_{\{0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}}(x, y)$$

où C est une constante.

1. Calculer C .
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$.
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$.

lois conditionnelles

Exercice

62

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On suppose que :

- la loi de Y admet la densité : $f_Y(y) = y e^{-y} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(y)$
- conditionnellement à $\{Y = y\}$, X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[\theta - y, \theta + y]$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

1. Déterminer f_X la densité de probabilité de la loi de X .
2. Déterminer $\mathbb{E}[X]$ et $Var[X]$.

Fonction caractéristique

Soit X une variable aléatoire. On définit la fonction caractéristique de la loi de X par :

- cas discret $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_X(k) e^{itk}$
- cas continu $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{itx} dx$

fonction caractéristique

Exercice

63

Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet la densité

$$f(x) = \frac{1}{2} (1 + \cos x) \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$$

Déterminer φ_X la fonction caractéristique de la loi de X .

fonction caractéristique

Exercice

64

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On suppose que :

- X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(]0, 1[)$.
- Conditionnellement à $\{X = x\}$, Y suit la loi :

$$\mathbb{P}(Y = -2|X = x) = \frac{x}{2}, \quad \mathbb{P}(Y = 0|X = x) = 1 - x, \quad \mathbb{P}(Y = 2|X = x) = \frac{x}{2}$$

1. Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et $\text{Var}[Y]$.
2. Déterminer φ_Y la fonction caractéristique de la loi de Y .

indication

► On utilisera : $\mathbb{E}[h(Y)] = \mathbb{E}_X [\mathbb{E}[h(Y)|X]]$

statistiques d'ordre

Exercice

65

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la loi admet la densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = \theta^2 e^{-\theta y} \mathbb{1}_{\{0 < x < y\}} \quad (\theta > 0) .$$

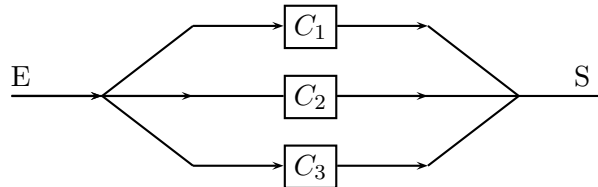
1. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}[X^k Y^s]$.
2. Calculer ρ le coefficient de corrélation entre X et Y .
3. On pose : $U = X + Y$ et $V = Y - X$.
 - 3.1. Déterminer la loi du couple (U, V) .
 - 3.2. U et V sont-elles indépendantes ?
 - 3.3. Déterminer F_V la fonction de répartition de la loi de V .
4. Soit V_1, \dots, V_n des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que V . On pose : $Z_n = \inf\{V_1, \dots, V_n\}$ et $T_n = \sup\{V_1, \dots, V_n\}$.
 - 4.1. Déterminer les lois marginales de Z_n et de T_n .
 - 4.2. Calculer $E[Z_n]$ et $Var[Z_n]$.

durée de vie

Exercice

66

Un système électronique, ayant une entrée E et une sortie S est constitué de trois composantes C_1 , C_2 et C_3 montés en parallèle selon le schéma suivant :



Le système cesse de fonctionner quand il n'y a plus de chemin entre E et S . Soit T_1 , T_2 et T_3 les durées de vie respectives des composantes C_1 , C_2 et C_3 . On suppose que ce sont des variables aléatoires réelles indépendantes de lois :

$$f_j(x_j) = \lambda_j e^{-\lambda_j x_j} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(x_j) \quad j = 1, 2, 3 \quad (\lambda_j > 0)$$

Déterminer la loi de la durée de vie du système.

vecteurs gaussiens

Exercice
67

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2)$ un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \mathbf{I}_2)$ où \mathbf{I}_2 désigne la matrice identité de dimension 2.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, l'on définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2)$ par :

$$\begin{cases} Y_1 = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2 \\ Y_2 = -\sin\theta X_1 + \cos\theta X_2 \end{cases}$$

Déterminer la loi de \mathbf{Y} . Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

vecteurs gaussiens

Exercice
68

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_3(\mathbf{0}, \mathbf{I}_3)$ où \mathbf{I}_3 désigne la matrice identité de dimension 3. On définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$ par :

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_2 - X_1 \\ Y_3 = X_3 - X_2 \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de \mathbf{Y} . Y_1 , Y_2 et Y_3 sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi de Y_3 , sachant $\{(Y_1, Y_2) = (y_1, y_2)\}$.

vecteurs gaussiens

Exercice
69

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3, X_4)$ un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_4(\mathbf{M}_\mathbf{X}, \mathbf{V}_\mathbf{X})$ où $\mathbf{M}_\mathbf{X} = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{V}_\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \theta & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \theta & 2 & 2 \\ 1 & 2 & \theta & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \theta \end{pmatrix} \quad (\theta > 3)$$

On définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2)$ par :
$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - X_2 + 2X_4 \\ Y_2 = 3X_1 - 2X_2 - \theta X_3 + X_4 \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de \mathbf{Y} .
2. Déterminer θ_0 de sorte que Y_1 et Y_2 soient indépendantes.
3. On suppose $\theta = 5$. Déterminer la loi conditionnelle de Y_1 sachant $\{Y_2 = y_2\}$ et puis calculer $\mathbb{E}[Y_1 | Y_2]$ et $\text{Var}[Y_1 | Y_2]$.

vecteurs gaussiens

Exercice

70

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_3(\mathbf{M}_\mathbf{X}, \mathbf{V}_\mathbf{X})$ où $\mathbf{M}_\mathbf{X} = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{V}_\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$ par :

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_3 \\ Y_2 = \alpha X_1 + 2X_2 + \beta X_3 \\ Y_3 = -X_1 - X_2 + X_3 \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de \mathbf{Y} .
2. Pour quelles valeurs de α et β , $(Y_1 \text{ et } Y_2)$ et $(Y_2 \text{ et } Y_3)$ sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi du couple (Y_1, Y_3) .
En déduire la loi conditionnelle de Y_1 sachant $\{Y_3 = y_3\}$ et puis calculer $\mathbb{E}[Y_1 | Y_3]$ et $\text{Var}[Y_1 | Y_3]$.

vecteurs gaussiens

Exercice

71

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_3(\mathbf{M}_\mathbf{X}, \mathbf{V}_\mathbf{X})$ où $\mathbf{M}_\mathbf{X} = {}^t(1, -3, 1)$ et

$$\mathbf{V}_\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$ par :

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - X_2 - 4X_3 \\ Y_2 = 3X_1 - X_2 + 5X_3 \\ Y_3 = 2X_1 - X_2 + X_3 \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de \mathbf{Y} .
2. Y_1 , Y_2 et Y_3 sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{E}[X_1 X_2]$, $\mathbb{E}[X_1 X_3]$ et $\mathbb{E}[X_2 X_3]$.

vecteurs gaussiens

Exercice

72

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien $\mathcal{N}_3(\mathbf{M}_\mathbf{X}, \mathbf{V}_\mathbf{X})$ avec $\mathbf{M}_\mathbf{X} = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{V}_\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 2 \\ -2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$ par $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{X}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & -2\alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \gamma & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0)$$

1. Montrer que Y_1, Y_2 et Y_3 sont indépendantes.
2. Dans la suite on pose : $\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}, \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 - 2.1. Calculer le produit $\mathbf{A} {}^t\mathbf{A}$. (${}^t\mathbf{A}$ désigne la transposée de \mathbf{A}).
 - 2.1. On pose : $Q(\mathbf{X}) = {}^t\mathbf{X} \mathbf{V}_\mathbf{X} \mathbf{X}$. Calculer $E[Q(\mathbf{X})]$ et $Var[Q(\mathbf{X})]$.

On rappelle que si U suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad E[U^{2k}] = \frac{(2\sigma^2)^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma(k + \frac{1}{2})$$

avec $\forall a > 0 \quad \Gamma(1 + a) = a \Gamma(a)$.

vecteurs gaussiens

Exercice

73

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3, X_4)$ un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_4(\mathbf{M}_\mathbf{X}, \mathbf{V}_\mathbf{X})$ où $\mathbf{M}_\mathbf{X} = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{V}_\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$ par :

$$\begin{cases} Y_1 = 5X_1 + X_2 + \beta X_3 + \alpha X_4 \\ Y_2 = X_1 - X_2 + X_4 \\ Y_3 = -X_1 - X_2 + X_3 \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de \mathbf{Y} .
2. Pour quelles valeurs de α et β , Y_1, Y_2, Y_3 sont-elles indépendantes ?
Sous cette condition, calculer $\mathbb{E}[Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2]$.

Théorème Central-Limite

Exercice

74

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi :

$$\forall x = -1, 0, 1, \dots \quad P(X_i = x) = \frac{e^{-1}}{(x+1)!}.$$

On pose : $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Déterminer la loi de S_n .
2. En utilisant le *Théorème Limite Centrale* montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq 0) = \frac{1}{2}$.

convergence en probabilité

Exercice

75

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi *Bernoulli* de paramètre p ($0 < p < 1$). On pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

1. Déterminer la loi de Y_n . En déduire $\mathbb{E}[Y_n]$ et $Var[Y_n]$.
2. Soit $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$.
 - 2.1. Calculer $\mathbb{E}[T_n]$ et $Var[T_n]$.
 - 2.2. Montrer que T_n converge en probabilité vers la variable presque sûrement égale à $2p$.

Etude asymptotique

Exercice

76

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes (pour tout i , X_i et Y_i indépendantes entre elles) de lois respectives :

$$\forall i, P(X_i = -1) = p, \quad P(X_i = 1) = 1 - p \quad (0 < p < 1)$$

$$\forall i, \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y_i = k) = (1 - \theta) \theta^k \quad (0 < \theta < 1).$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$.

1. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et $Var[S_n]$.
2. On suppose $p = \frac{1}{2}$. Montrer que pour tout réel $\eta > 0$, les limites :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| < n\eta) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| < \eta\sqrt{n})$$

existent et trouver leurs valeurs.

convergence en loi

Exercice

77

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi :

$$P(X_n = \pm \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}. \text{ On pose : } S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

1. Déterminer φ_{X_k} la fonction caractéristique de X_k .
2. Montrer que S_n converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.

Théorème Central-Limite

Exercice

78

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi

de *Poisson* de paramètre 1. On pose : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Déterminer la loi de S_n .
2. En utilisant le *Théorème Central-Limite* montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=1}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

Etude asymptotique

Exercice

79

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de densité : $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \forall x \in \mathbb{R}$.

On pose : $M_n = \sup\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

1. Déterminer la loi de M_n .
2. Pour $\eta > 0$ donné, calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n > n\eta)$.

On rappelle que , $\forall \theta > 0$, $\text{Arctg}\theta + \text{Arctg}\frac{1}{\theta} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice

80

Etude asymptotique

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la loi admet la densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} (x^2 + y^2) \exp \left(-\frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right) \quad \forall x > 0, y > 0.$$

1. On pose : $U = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

1.1. X et Y sont-elles indépendantes ?

1.2. Déterminer la loi du couple (X, U) .

1.3. Déterminer la densité de la loi conditionnelle de X sachant $\{U = u\}$.

On la notera $f_u(x) = f_X(x | u)$

1.4. Calculer $\mu_u = E[X | U = u]$ et $\sigma_u^2 = Var[X | U = u]$.

2. Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de densité $f_u(x)$.

On pose : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$.

2.1. Étudier la convergence en *moyenne quadratique* de \bar{X}_n .

2.2. Montrer que $\sqrt{n} \left(\bar{X}_n - \frac{2u}{\pi} \right)$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

On rappelle que :

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \text{Arcsin} \lambda + C^{te}$$

$$\int \sqrt{1-\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{2} \left(\text{Arcsin} \lambda + \lambda \sqrt{1-\lambda^2} \right) + C^{te}.$$

signal analogique

Exercice

81

On considère le signal analogique X défini par : $X(t, \omega) = tU_1(\omega) + (1-t)U_2(\omega)$ où U_1 et U_2 sont des variables aléatoires indépendantes, centrées et réduites. Calculer La moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction autocorrélation de X .

signal analogique

Exercice

82

On considère le signal analogique X défini par : $X(t, \omega) = \sin(tU(\omega))$, où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$. Calculer La moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction autocorrélation de X .

signal numérique

Exercice

83

On considère le signal numérique X défini par : $X(n, \omega) = V(\omega) \sin(na + U(\omega))$, où a est une constante connue, U et V sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$. Calculer La moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction autocorrélation de X .

signal numérique

Exercice

84

On considère le signal numérique X défini par : $X(n, \omega) = a \cos(bn + U(\omega))$, où a et b sont des constantes connues et U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$. Calculer La moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction autocorrélation de X .

signal numérique

Exercice

85

On considère le signal numérique X défini par : $X(n, \omega) = U(\omega) \sin(an + b)$, où a et b sont des constantes connues et U est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Calculer La moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction autocorrélation de X .

signal numérique

Exercice

86

On considère le signal numérique X défini par : $X(n, \omega) = a \cos(U(\omega)n + b)$ où a et b sont des constantes connues et U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\theta, \theta]$ ($\theta > 0$). Calculer La moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction autocorrélation de X .

Exercice
87

signal stationnaire au second ordre

Soit (Y, Z) un couple de variables aléatoires indépendantes. On suppose que : Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 2\pi])$ et que la loi de Z admet la densité f_Z .

On définit le signal analogique X par :

$$X(t, \omega) = \cos(Y(\omega)) e^{2i\pi t Z(\omega)} + \sin(Y(\omega)) e^{-2i\pi t Z(\omega)}$$

1. Démontrer que X est stationnaire au second ordre.
2. Calculer P_X la puissance de X .
3. Déterminer S_X la densité spectrale de puissance de X .

Exercice
88

signal stationnaire au second ordre

Soient U et V deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que U suit une loi uniforme sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, V suit une loi exponentielle de paramètre 1 et on définit le signal analogique X par :

$$X(t, \omega) = \cos(U(\omega)) \exp(-2i\pi t V(\omega))$$

1. Démontrer que X est stationnaire au second ordre.
2. Déterminer P_X la puissance de X .
3. Déterminer S_X la densité spectrale de puissance de X .

Exercice
89

signal stationnaire au second ordre

1. Soit Y et Z deux variables aléatoires vérifiant :
 - la loi de Z admet la densité : $f_Z(z) = e^{-z} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(z)$
 - la loi conditionnelle de Y sachant $\{Z = z\}$ a pour densité :

$$f_Y(y | Z = z) = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{|y|}{z}\right) \mathbb{1}_{[-z, z]}(y) .$$

Calculer $\mathbb{E}[Y | Z]$ et $\mathbb{E}[Y^2 | Z]$.

2. On considère le signal analogique X défini par :

$$X(t, \omega) = \sqrt{3} Y(\omega) \exp(-2i\pi t Z(\omega))$$

- 2.1. Démontrer que X est stationnaire au second ordre.
- 2.2. Calculer P_X la puissance de X .
- 2.3. Déterminer S_X la densité spectrale de puissance de X .

Exercice

90

signal stationnaire au second ordre

On considère X le processus à temps discret, défini par :

$$X(n, \omega) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^N Y(n-k, \omega) \sin(2\pi Z_k(\omega)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

où $N \geq 1$, Z_1, \dots, Z_N sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$ et Y est un processus à temps discret, stationnaire au second ordre indépendant de Z_1, \dots, Z_N .

Dans la suite on notera : R_Y , P_Y et S_Y la fonction autocorrélation, la puissance et le spectre de puissance de Y .

1. Démontrer que X est stationnaire au second ordre.
2. Calculer P_X la puissance de X .
3. Déterminer S_X le spectre de puissance de X .

signal stationnaire au second ordre

Exercice

91

Soit (U, V) un couple de variables aléatoires. On suppose que :

- U suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$
- conditionnellement à $\{U = u\}$, la loi de V admet la densité :

$$f_V(v|u) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{(1 + (v - u)^2)^2}$$

1. Déterminer $\mathbb{E}[V|U]$ et $\mathbb{E}[V^2|U]$.
2. On définit le signal analogique $X(t, \omega)$ par :

$$X(t, \omega) = (U(\omega) + V(\omega)) e^{-2i\pi t}$$

- 2.1. Démontrer que X est stationnaire au second ordre.
- 2.2. Calculer P_X la puissance de X .
- 2.3. Déterminer S_X le spectre de puissance de X .

On rappelle que : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{2}$

signal stationnaire au second ordre

Exercice

92

Soit (Y, Z) un couple de variables aléatoires. On suppose que :

- la loi de Z admet la densité : $f_Z(z) = \frac{1}{6} z^3 e^{-z} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(z)$
- conditionnellement à $\{Z = z\}$, la loi de Y admet la densité :

$$f_Y(y|z) = \frac{3}{4z^3} (z^2 - y^2) \mathbb{1}_{[-z, z]}(y)$$

1. Déterminer $\mathbb{E}[Y|Z]$ et $\mathbb{E}[Y^2|Z]$.
2. On définit le signal analogique $X(t, \omega)$ par :

$$X(t, \omega) = Y(\omega) e^{(-2i\pi t + 1) Z(\omega)}$$

- 2.1. Démontrer que X est stationnaire au second ordre.
- 2.2. Calculer P_X la puissance de X .
- 2.3. Déterminer S_X le spectre de puissance de X .

filtre numérique

Exercice

93

On considère un filtre numérique d'entrée X et la sortie Y :

$Y(n, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(n - k) X(k, \omega)$, où X est centré, stationnaire au second ordre de fonction d'autocorrélation R_X , de spectre de puissance S_X et la réponse impulsionnelle h est définie par :

$$h(n) = \begin{cases} \theta & \text{si } n \in \{1, 2\} \\ 1 - 4\theta & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

1. Déterminer le spectre de puissance de Y . En déduire R_Y .
2. Déterminer la fonction d'intercorrélation entrée/sortie : R_{XY} .

corrigé 93

1) On a : $S_Y(\nu) = |H(\nu)|^2 S_X(\nu)$ avec

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-2ik\pi\nu} = \sum_{k \in \{0,1,2\}} h(k) e^{-2ik\pi\nu} \\ &= (1 - 4\theta) + \theta (e^{-2i\pi\nu} + e^{-4i\pi\nu}) \end{aligned}$$

d'où

$$S_Y(\nu) = [1 - 8\theta + 18\theta^2 + 2\theta(1 - 3\theta) \cos(2\pi\nu) + 2\theta(1 - 4\theta) \cos(4\pi\nu)] S_X(\nu)$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned} R_Y(n) &= \int_{-1/2}^{1/2} S_Y(\nu) e^{2in\pi\nu} d\nu = (1 - 8\theta + 18\theta^2) \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} e^{2in\pi\nu} S_X(\nu) d\nu}_{R_X(n)} \\ &\quad + 2\theta(1 - 3\theta) \int_{-1/2}^{1/2} \cos(2\pi\nu) e^{2in\pi\nu} S_X(\nu) d\nu \\ &\quad + 2\theta(1 - 4\theta) \int_{-1/2}^{1/2} \cos(4\pi\nu) e^{2in\pi\nu} S_X(\nu) d\nu \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \cos(2\pi\nu) e^{2in\pi\nu} S_X(\nu) d\nu &= \frac{1}{2} (R_X(n-1) + R_X(n+1)) \\ \int_{-1/2}^{1/2} \cos(4\pi\nu) e^{2in\pi\nu} S_X(\nu) d\nu &= \frac{1}{2} (R_X(n-2) + R_X(n+2)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} R_Y(n) &= (1 - 8\theta + 18\theta^2) R_X(n) + \theta(1 - 3\theta) (R_X(n-1) + R_X(n+1)) \\ &\quad + \theta(1 - 4\theta) (R_X(n-2) + R_X(n+2)) \end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned} R_{XY}(n) &= h * R_X(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(n-k) R_X(k) = \sum_{n-k \in \{0,1,2\}} h(n-k) R_X(k) \\ &= h(0) R_X(n) + h(1) R_X(n-1) + h(2) R_X(n-2) \\ &= (1 - 4\theta) R_X(n) + \theta (R_X(n-1) + R_X(n-2)) \end{aligned}$$

Annexe A

Intégrales doubles

Calculer les intégrales doubles suivantes :

$$I_1 = \iint_{\{0 < x < 1, -1 < y < 1\}} (x + y^2) dx dy$$

$$I_2 = \iint_{\{-2 < x < y < 1\}} (y - x)^2 dx dy$$

$$I_3 = \iint_{\{0 < x < y < 2\}} (y - x) dx dy$$

$$I_4 = \iint_{\{0 < x < y < \infty\}} e^{-y} dx dy$$

$$I_5 = \iint_{\{0 < x < 1, -2 < x+y < 1\}} x dx dy$$

$$I_6 = \iint_{\{0 < x < y < \infty\}} x e^{-2y} dx dy$$

$$I_7 = \iint_{\{0 < x < y < \infty\}} y e^{-3y} dx dy$$

$$I_8 = \iint_{\{0 < x < y < \infty\}} e^{-(2x+3y)} dx dy$$

$$I_9 = \iint_{\{0 < x < y < \infty\}} (y - x)^\alpha e^{-y} dx dy \quad (\alpha > 0)$$

$$I_{10} = \iint_{\{0 < x < 1, x+y < 3, y > 1\}} (x + y) dx dy$$

$$I_{11} = \int_0^\infty \int_0^\infty |y - x| e^{-\sup(x,y)} dx dy$$

$$I_{12} = \iint_{\{0 < x < 1, -1 < y < 2, 0 < x+y < 2\}} xy dx dy$$

$$I_{13} = \iint_{]0,1[\times]0,1[} \frac{x}{1+x^2y^2} dx dy$$

$$I_{14} = \iint_{\{0 < x < y < \infty\}} \frac{e^{-x}}{1+(y-x)^2} dx dy$$

$$I_{15} = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \frac{e^{-|x|}}{e^{x+y} + e^{-(x+y)}} dx dy$$

$$I_{16} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha+1}} (\alpha > 0)$$

$$I_{17} = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-x^2+2xy} dx dy$$

$$I_{18} = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} x e^{-x^2+xy-y^2} dx dy$$

$$I_{19} = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} x y e^{-x^2 \pm xy - y^2} dx dy$$

$$I_{20} = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} (x+y) e^{-x^2 \pm 2xy - y^2} dx dy$$

Annexe B

Suites numériques réelles

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant la relation :

$$\alpha u_n = \beta u_{n-1} \quad (E_1)$$

avec la condition initiale u_0 .

On cherche une solution de E_1 sous la forme $u_n = R^n$ avec $R \neq 0$. L'équation E_1 devient donc $R^{n-1}(\alpha R - \beta) = 0$, ce qui donne $R = \frac{\beta}{\alpha}$. Donc la solution générale de E_1 est donnée par : $u_n = A \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$. La constante A est déterminée par la condition initiale u_0 , soit $A = u_0$. Donc

$$u_n = u_0 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$$

2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant la relation :

$$\alpha u_n = \beta u_{n-1} + \gamma \quad (E_2)$$

avec la condition initiale u_0 .

Posons $u_n = v_n + \lambda$. L'équation E_2 devient donc

$$\alpha v_n + \alpha \lambda = \beta v_{n-1} + \beta \lambda + \gamma$$

$$\alpha v_n = \beta v_{n-1} + \lambda(\beta - \alpha) + \gamma \quad (E'_2)$$

On choisit λ de sorte que $\lambda(\beta - \alpha) + \gamma = 0$, soit $\lambda = \frac{\gamma}{\alpha - \beta}$

Donc, l'équation E'_2 devient $\alpha v_n = \beta v_{n-1}$ ce qui est de la forme E_1 . on a donc

$$v_n = v_0 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$$

avec $v_0 = u_0 - \lambda = u_0 - \frac{\gamma}{\alpha - \beta}$. Donc

$$u_n = \left(u_0 - \frac{\gamma}{\alpha - \beta}\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n + \frac{\gamma}{\alpha - \beta}$$

3. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant la relation :

$$\alpha u_n = \beta u_{n-1} + \gamma u_{n-2} \quad (E_3)$$

avec les conditions initiales u_0 et u_1 .

On cherche une solution de E_3 sous la forme $u_n = R^n$ avec $R \neq 0$. L'équation E_3 devient donc $R^{n-2} (\alpha R^2 - \beta R - \gamma) = 0$, soit

$$\alpha R^2 - \beta R - \gamma = 0 \quad (E'_3)$$

Notons $\Delta = \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}$.

1. Si $\Delta > 0$, alors E'_3 admet deux racines distinctes :

$$R_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Donc, la solution générale de E_3 est donnée par :

$u_n = A R_1^n + B R_2^n$. Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales u_0 et u_1 , soit

$$\begin{cases} A = \frac{\alpha(u_0 R_2 - u_1)}{\Delta} \\ B = \frac{\alpha(u_1 - u_0 R_1)}{\Delta} \end{cases}$$

2. Si $\Delta = 0$, alors E'_3 admet une racine double : $R_0 = \frac{\beta}{2\alpha}$ et donc, la solution générale de E_3 est donnée par :

$u_n = A R_0^n + B n R_0^n$. Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales u_0 et u_1 , soit

$$\begin{cases} A = u_0 \\ B = \frac{2\alpha(u_1 - u_0)}{\beta} \end{cases}$$

4. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant la relation :

$$\alpha u_n = \beta u_{n-1} + \gamma u_{n-2} + \delta \quad (E_4)$$

avec les conditions initiales u_0 et u_1 .

Posons : $u_n = v_n + \lambda$. L'équation E_4 devient donc

$$\alpha v_n = \beta v_{n-1} + \gamma v_{n-2} + \lambda(\beta + \gamma - \alpha) + \delta \quad (E'_4)$$

On choisit λ de sorte que $\lambda(\beta + \gamma - \alpha) + \delta = 0$ soit, $\lambda = \frac{\delta}{\alpha - \beta - \gamma}$

Donc, l'équation E'_4 devient $\alpha v_n = \beta v_{n-1} + \gamma v_{n-2}$ ce qui est de la forme E_3 .



Références



- [1] **Ghorbanzadeh.D.** (1998). Probabilités. Exercices corrigés.
Éditions Technip, Paris.
- [2] **Ghorbanzadeh.D.** , **Marry.P.** , **Point.N.**, **Vial.D.** (2008). Éléments de Mathématiques du Signal. Exercices résolus. (3^e édition). *Dunod, Paris.*
- [3] **Reinhard.H.** (1996).Éléments de Mathématiques du Signal.
Tome 2. Signaux Aléatoires. *Dunod, Paris.*
- [4] **Billinsley.P.** (1979). Probability and Measure. *Wiley, New York.*
- [5] **Feller.W.** (1966 et 1971). An introduction to probability and its Applications. Volumes *I* et *II*. *Wiley, New York.*

D.
G
H
O
R
B
A
N
Z
A
D
E
H