Vendredi

IV. Rappels d'analyse

A. Deux séries

1. Série géométrique

$$\boxed{s(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{pour } -1 < x < 1}$$

Exercice : $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots$

$$= s'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = -\frac{u'}{u^2}$$

2. Série exponentielle

$$\boxed{S_1(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = e^x \quad (x \in \mathbb{R})}$$

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \frac{nx^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (e^x)' = e^x$$

en dérivant, on obtient la m̂ suite.

(B) Une limite

$$(x \in \mathbb{R}) \quad \boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x}$$

On considèrera la limite pr "n assez grd" ($n \geq 100$) :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \simeq e^x$$

(ie x = qqs unités
(>0 ou <0))

Ex : $\left(1 - \frac{1}{200}\right)^{200} \simeq e^{-1}$

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{200} \simeq e^2 \qquad \left(1 + \frac{\cancel{2}}{\cancel{1}200}\right)^{200}$$

(C) Méthodes d'intégration

(1) Par parties

!! → **Ex** : $\alpha > 0$: $\boxed{\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha-1}\,dx}$

$*\ \Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha}\,dx$

$$\left.\begin{cases} u' = e^{-x} & v = x^{\alpha} \\ u = -e^{-x} & v' = \alpha x^{\alpha-1} \end{cases}\right\} \int_a^b u'v\,dt = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha}\,dx = \left[-e^{-x} \cdot x^{\alpha}\right]_0^{+\infty} \underbrace{+\alpha}_{-(-1)\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha-1}\,dx$$

qd $x \to \infty$ $-e^{-x} \to 0$

$\Rightarrow \left[-e^{-x} \cdot x^{\alpha}\right]_0^{+\infty} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)}$

$*\ \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \underbrace{-e^{-\infty}}_{0} \underbrace{+e^{0}}_{1} = 1$

$\Rightarrow \boxed{\Gamma(1) = 1}$

$*\ \Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2) = \dots$

$= n(n-1)(n-2)(n-3)\dots[n-(n-1)]\,\Gamma(1)$

$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)(n-3)\dots \times 1\,\Gamma(1)$

$= n!\,\Gamma(1)$

$$\boxed{\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{n}\,dx = n!}$$

② Changement de variables

$I = \int_a^b f(x)\,dx$

$u = u(x)$ bijectᵒ de (a,b) ds $(u(a), u(b))$

↑ 1 seule image, 1 seul antécédent

$u = u(x) \Leftrightarrow x = x(u)$

$$\frac{dx}{du} = x'(u) \Leftrightarrow dx = x'(u)\,du$$

$$I = \int_{u(a)}^{u(b)} f[x(u)] \cdot x'(u)\,du$$

! <u>Ex</u> : cf TD n°3 exo 2a)