12/09/2023

UE Equations aux dérivées partielles et Differences finies

Prof : Thomas Rey

Lab Dieudonné : 716 (3^e etage)

* 12 séances de cours (24 h)
* 12 séances de TD (12h)
* 12 séances de TP python (12h)
* Séances de soutien en petit effectifs

Moodle (SMUMA102)

↳ QCM de "placement"

↳ un Controle Continue (CC)

- un DS terminal
- une épreuve de TP

<u>But</u>: Présenter une methode générale d'approximat° d'un classe d'équations fonctionnelles les Equations aux Dérivées partielles (EDP), type d'equat° faisant intervenir plusieurs variables (temps, espace, trait phénotypique, etc ...). Les EDP sont omniprésentes en modelisation mathematique physique, biologie, sociologie, chimie, en proba, médecine, finance, etc ...

Les solutions de ces equations étant generalement pas explicites, on va ~~calculer~~ chercher à les

... numériquement sur ordinateur.

I/ Un exemple venant de la chimie

I.1/ Rappel sur le théorème de Cauchy-Lipschitz

<u>Définition</u> Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $T > 0$. On appelle problème de Cauchy de donnée initiale $y_0 \in \mathbb{R}^m$ le problème : Trouver $y : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ solution de

$$(1) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

<u>Théorème de</u> (Cauchy-Lipschitz en 1820)

Si la fonction f de (1) est localement Lipschitzienne en sa seconde variable ($\forall (t,y) \in [0, T[\times \mathbb{R}^m$, $\exists$ voisinage $J \times V$, $\exists \, \Omega > 0$,

$$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq \Omega \, \|y - z\|, \ \forall \, t \in J, \ y, z \in V)$$

Alors, il existe une unique solution à (1)

<u>Problème</u>

(1) Cette solution y n'est que très rarement explicite. On va dans ce cas chercher à approcher y par un vecteur $y_h \in \mathbb{R}^N$, N grand. Une telle approximation est-elle précise ? facile à calculer ? possible ?

(2) Si l'on rajoute des variables (mettons y dépend de $t \geq 0$ et de $x \in [0,1]$) on n'a en général pas de généralisation du théorème de Cauchy, et donc aucun moyen simple d'assurer l'existence de $y = y(t,x)$.

(3) Si on a l'existence de $y(t,x)$, comment l'approcher ? Est-il facile de trouver une matrice $y_h \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ approchant y_0 ?

But de ce cours : Répondre à (2) et (3) par certaines EDP

I.2/ Equations de Belousov - Zhabotinsky

En 1950, B. Belousov travaillant sur la modélisation de la digestion chez les mammifères mis au point la première description d'une réaction chimique oscillante les réactifs se dégradent puissent se recréent au cours du temps. En 1961 son doctorant A. Zhabo simplifie la réaction et la mise en équation.

En notant $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ les notations des trois réactifs au cours du temps, on suit :

$$\begin{cases} a'(t) = k_1 b(t) + k_5 \cancel{a}(t) - a(t)\left(k_2 b(t) - 2a(t)\right) \\ b'(t) = -k_1 b(t) - k_2 a(t) b(t) + k_7 c(t) \\ c'(t) = k_5 a(t) - k_7 c(t) \end{cases}$$

! de la forme

$$y'(t) = F(t, y(t)) \quad , \quad y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad F\text{- polynôme}$$

Le théorème de C-L, existence et unicité de (a, b, c)

Que se passe t-il si a, b et c ne sont plus homogènes et dependent d'une variable spatiale x ?

On a alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t}(t,x) - D_a \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2}(t,x) = \dfrac{1}{\mu}\left[a(t,x)\left(-b(t,x) - a(t,x)\right) + c(t,x)\right] \\ \dfrac{\partial b}{\partial t}(t,x) - D_b \dfrac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t,x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\left[a(t,x)\left(1 - b(t,x)\right) + b(t,x)\left(1 + b(t,x)\right)\right] \\ \dfrac{\partial c}{\partial t}(t,x) - D_c \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,x) = b(t,x) - c(t,x) \end{cases}$$

$$\mu = 10^{-5} \qquad D_a = 2.10^{-2} \qquad \varepsilon = 10^{-2} \qquad D_b = 5.10^{-2}$$

Le théorème de C-L ne s'applique plus !

Si a, b, c existent ? Comment les approcher ?

II | Stratégie générale d'étude d'EDP dans ce cours sera

1) Etude théorique de l'equation

↳ Existence des solutions !

↳ Unicité des solutions !

↳ propriétés qualitatives !

(régularité ? Comportement oscillatoire)

2) Approximation de cette solution

↳ Développement d'une méthode numérique

↳ Peut-on calculer les solutions de cette méthode numérique ?

↳ Est-ce faisable dans un temps raisonnable ?
⇝ problématique du coût énergétique.

↳ Cette approximation est-elle bonne ? Quelle est sa précision ?

Chap I Méthode des différences finies (pour les pbmes aux limites)

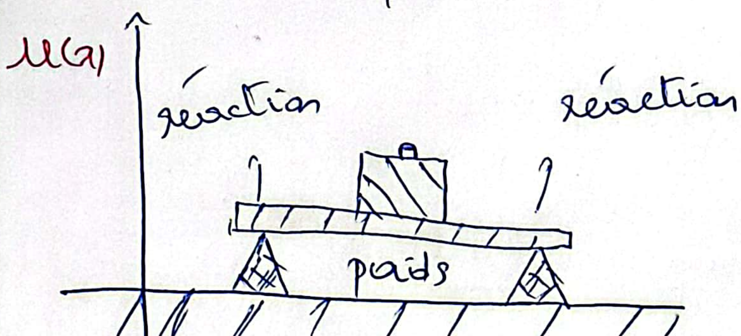
On va considérer un premier exemple d'un problème qui n'est pas un problème de Cauchy pour lequel le thm de C.L. ne vas pas s'appliquer. On va tout de même pouvoir dire des choses théoriques dessus (1) et introduire et analyser une stratégie de résolution numérique (2)

I/ Problème modèle

Soient c et f deux fonctions continues sur $[0,1]$, et deux constantes réelles α et β. On va chercher une fct $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ solution de

$$(M)\begin{cases} -u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x) & x \in]0,1[\\ u(0) = \alpha \quad u(1) = \beta \end{cases}$$

(M) décrit par exemple la déformation d'une poutre soumise à un poids



* $u(x)$ est la hauteur de la poutre
* $c(x)$ la répartition du poids

α, β la hauteur des attaches

f la résistance.

(4)

On va commencer par s'interesser au cas où α et β sont nuls. On cherche donc $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ solution de

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x) \ , & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On parle de condition aux limites de Dirichlet homogèn

<u>Biblio :</u> M. Schatemann "Analyse Numérique, une approche mathématique" Dunod.

F. Filbert "Analyse numérique pour la licence" 2nd édition Dunod.

Sauf dans des cas particulier, ce n'est pas possible d'exprimer u explicitement.

<u>Par ex :</u>

* si $f \equiv 0$ et $c \equiv 0$, trouver $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$,

$$\begin{cases} -u''(x) = 0 \ , & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$u \equiv 0$ convient

* si $c \equiv 0$, l'équation devient :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On peut montrer $u(x) = \int_0^x \int_0^y f(z)\,dz\,dy$ est $\not\exists$

Théorème

Si $c \geq 0$, $c, f \in \mathcal{C}([0,1])$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ solution de (P) avec $\alpha = \beta = 0$

Preuve

* <u>unicité</u> : Supposons qu'il existe u_1, u_2 solution de (P)

$$-u_1''(x) + c(x)u_1(x) = f(x) \quad u_1(0) = u_0$$

$$-u_2''(x) + c(x)u_2(x) = f(x) \quad u_2(0) = u_1(1) = 0$$

$$-u_2''(x) + c(x)u_2(x) = f(x) \quad u_2(0) = u_2(1) = 0$$

u_1, u_2 solution de (P) $\Rightarrow \begin{cases} -u_1''(x) = f(x) \\ u_1(0) = u_1(1) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} -u_2''(x) = f(x) \\ u_2(0) = u_2(1) = 0 \end{cases}$

Posons que $v = u_1 - u_2$ et montrons que $v \equiv 0$, on a déjà que
$$v(0) = u_1(0) - u_2(0) = 0$$
$$v(1) = u_1(1) - u_2(1) = 0$$

De plus par linéarité

$$(*)\ -v''(x) + c(x)v(x) = -u_1''(x) + c(x)u_1(x) - [-u_2''(x) + c(x)u_2(x)]$$
$$= f(x) - f(x) = 0$$

On va voir que $v \equiv 0$ est l'unique solution de ce problème. Multiplions l'identité $(*)$ par $v(x)$ et intégrons entre 0 et 1

(7)

$$-\int_0^1 v''(x)\,v(x)\,dx + \int_0^1 c(x)\,v^2(x)\,dx = 0$$

or $\displaystyle\int_0^1 v''(x)\,v(x)\,dx \overset{IPP}{=} -\int_0^1 (v'(x))^2\,dx + \big[v'(x)\,v(x)\big]_0^1$

$$= -\int_0^1 (v'(x))^2\,dx$$

$\Rightarrow \cancel{\displaystyle\int_0^1 v''(x)\,v(x)\,dx \overset{IPP}{=} -\int_0^1}$

$$\Rightarrow \int_0^1 (v'(x))^2\,dx + \int_0^1 c(x)\,v^2(x)\,dx = 0$$

or $\boxed{\displaystyle\int_0^1 v''(x)\,v(x)\,dx \overset{IPP}{=} -\int_0^1 v'(x)^2\,dx + \big[v'(x)\,v(x)\big]_0^1}$

Ainsi ou que $v \in \mathcal{C}^2$, $c \in \mathcal{C}([0,1])$, $c \geq 0$

$(v'(x))^2 + c(x)\,(v(x))^2 = 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow v(x) = 0$

$$\int_0^1 v''(x)\,v(x)\,dx$$

$u = v(x) \qquad u' = v'(x)$

$v = v''(x) \Rightarrow v = v'(x) \Rightarrow \big[v(x)\,v'(x)\,dx\big]_0^1 - \int_0^1 v'(x)^2$

19/09/25

Théorème

Si $c \geq 0$, $c, f \in \mathcal{C}([0,1])$, alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ solut de (1)

Preuve

Unicité ok

Existence : Considérons l'équation différentielle suivant

Trouver $u \in \mathcal{C}^2([0,2])$ solution de

$$(E) \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \in \mathbb{R} & 0 \leq x \leq 2 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = \alpha & \alpha \in \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$$

. Les fonctions c, f sont étendues à $[0,2]$ de manière $\mathcal{C}^0$

Le problème (E) est un problème de Cauchy. En effet soit $v = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$. Alors, si $x \in [0,2[$ on a :

$$v'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ u''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(x) \\ c(x)u(x) - f(x) \end{pmatrix}$$

Si u solution de (E)

Ainsi $v'(x) = A(x)v(x) + F(x)$ où $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c(x) & 0 \end{pmatrix}$

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix}$$

C'est un problème de Cauchy de donnée initiale

$$v(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Le problème est linéaire, donc si la matrice A est bornée infiniment en x, alors on a une existence et unicité des solutions sur $[0,2[$. Or $\|A\|_\infty = \max(1, \|c(x)\|$

$\leq \max(1, \sup c(x))$

$\leq k$ fini

En conséquence, $\exists!\, u_\alpha$ solution de (E) vérifiant $u'(0)=\alpha$

Un tel $u_\alpha \in \mathcal{C}^2([0,2[)$ dépend continuement de α.

On a donc montrer que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $u_\alpha(1)=0$ et ce u_α sera donc la solution cherchée de (1).

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $\beta > \alpha > 0$, On sait que u_α, u_β solut° de (E) existent. On a :

$$-\left(u''_\beta(x) - u''_\alpha(x)\right) + c(x)\left(u_\beta(x) - u_\alpha(x)\right) = 0$$

sur $x \in [0,2[$

Avec $\begin{cases} u_\beta(0) - u_\alpha(0) = 0 \\ u'_\beta(0) - u'_\alpha(0) = \beta - \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \exists\, x_1 > 0$ tq

$$u_\beta(x) - u_\alpha(x) \geq 0 \text{ sur } x \in [0, x_1[.$$

En particulier $-\left(u''_\beta(x) - u''_\alpha(x)\right) = -c(x)\left(u_\beta(x) - u_\alpha(x)\right) \leq 0$

si $x \in [0, x_1[$.

Donc la fonction $x \longrightarrow u'_\beta(x) - u'_\alpha(x)$ est croissante sur $[0, x_1[$ et vaut $\beta - \alpha$ en 0. En particulier

$$u'_\beta(x) - u'_\alpha(x) - (\beta - \alpha) \geq 0 \text{ si } x \in [0, x_1[.$$

Ainsi $u_\beta(x) - u_\alpha(x) \geq (\beta-\alpha)x$, si $x \in [0, x_1[$.

On peut répéter cet argument sur $[x_1, x_2[$, $[x_2, x_3[$ ... tant que la sol existe, donc en fait sur $[0,2[$.

L'inégalité est donc vraie pour $x = 1$

$$u_\beta(1) - u_\alpha(1) \geq \beta - \alpha, \quad \forall \beta > \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\beta \to +\infty} u_\beta(1) = +\infty \\ \lim\limits_{\alpha \to +\infty} u_\alpha(1) = +\infty \end{cases}$$

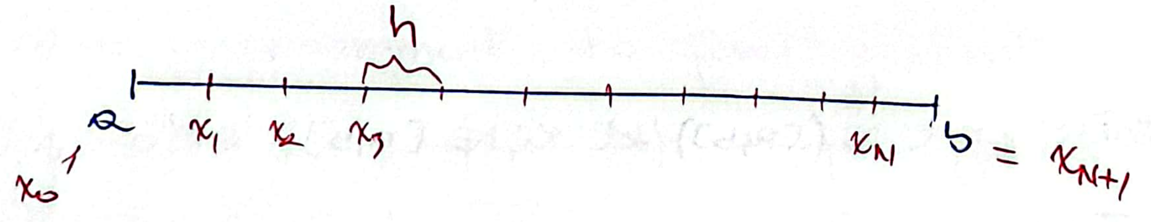
Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists \alpha_0$ tq

$$u_{\alpha_0}(1) = 0 .$$

II | La méthode des Différences finies pour (1)

N'ayant pas de formule explicite pour calculer les solutions de (1), on va chercher à les approcher sur une grille, par la méthode des différences finies.

<u>Définition</u> : On définit un maillage (ou grille) uniforme à $N+2$ points, $N \in \mathbb{N}^*$ de l'intervalle $[a,b] \in \mathbb{R}$ de pas $h = \dfrac{b-a}{N+1}$ comme l'ensemble des $(x_i)_{i=0}^{N+1}$ vérifiant $x_i = a + ih$, $0 \leq i \leq N+1$



Remarque Plus N est grand (et donc h petit), plus le maillage est serré

Definition La methode de difference finie consiste à approcher les valeurs ponctuelles $(u(x_i))_{i=0}^{N+1}$ de la solution ~~exact~~ u de (1) par des réels $(u_i)_{i=0}^{N+1}$ tq

$$\begin{cases} u_0 = u(x_0) = u(a) = \alpha \\ u_{N+1} = u(x_{N+1}) = u(b) = \beta \end{cases}$$

Connaissant α et β comme données du problème, et nous reste donc N-réels $(u_i)_{i=1}^{N}$ à determiner

Premier probleme l'équation (1) fait intervenir $u''(x)$ comment lier $u(x_i)$ à $u''(x_i)$? Il va fallai determiner aussi une approximation de $u''(x)$ sur les points du maillage.

II.1/ Approximation des dérivées en un pt du maillage

Proposition Soient $g \in \mathcal{C}^2([a,b])$, $(x_i)_{i=0}^{N+1}$ en maillage uniforme de $[a,b]$ de pas $h>0$. Alors

$$\left| g'(x_i) = \frac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{h} \right| \leq \frac{h}{2} \sup_{a \leq x \leq b} \|g''(x)|$$

$$\forall i \in \{0, .., N\}$$

Preuve

Par hypothèse, $g \in \mathcal{C}^2([a,b])$ et $x_i \in [a,b]$, $\in \{0, .. N\}$

$\exists\, \tau_i \in]0, h[$ tq

(8)

$$g(x_{i+1}) = g(x_i) + \overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{h} g'(x_i) + \frac{\overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{h}{}^2}{2} g''(x_i + \tau_i)$$

Ainsi $\quad g'(x_i) - \dfrac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{h} = \dfrac{h}{2} g''(x_i + \tau) \quad \forall i, \in \{0,$

Ainsi connaissant la valeur exacte d'une fonction regulière en les points d'un maillage donné, on peut approcher les valeurs de sa dérivée en ces points. Ce faisant on commet une erreur, pas plus grande que Ch, $C>0$. En particulier, si le maillage devient de plus en plus serré ($h \to 0$), l'erreur commise va tendre vers 0

Ici, on est interessé par g'' sur le maillage, Iterons ce que l'on vient de faire.

Proposition Supposons $g \in \mathcal{C}^4([a,b])$, et soit $(x_i)_{i=0}^{N+1}$ un maillage uniforme de pas h de $[a,b]$.

Alors $$\left| g''(x) - \frac{g(x_{i+1}) - 2g(x_i) + g(x_{i-1})}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup |g^{(4)}(x)|$$

$$\forall i \in \{1, .. N\}$$

Preuve

Comme precedemment, la fonct$^{\underline{o}}$ g etant de classe $\mathcal{C}^4([a,b])$, $\forall i \in \{1,..,N\}$, on peut faire sur developpement de Taylor sur $[x_i, x_{i+1}]$ et $[x_{i-1}, x_i]$

Il existe $\tau_1 \in]0,h[$ et $\tau_2 \in]0,h[$ tq

$$g(x_{i+1}) = g(x_i) + h g'(x_i) + \frac{h^2}{2} g''(x_i) + \frac{h^3}{6} g'''(x_i) + \frac{h^4}{24} g^{(4)}(x_i + \tau_i^+)$$

$$g(x_{i-1}) = g(x_i) - h g'(x_i) + \frac{h^2}{2} g''(x_i) - \frac{h^3}{6} g'''(x_i) + \frac{h^4}{24} g^{(4)}(x_i - \tau_i^-)$$

Sommons ces deux identités

(*) $$g(x_{i+1}) + g(x_{i-1}) = 2 g(x_i) + h^2 g''(x_i) + \frac{h^4}{12}\left(g^{(4)}(x_i + \tau_i^+) + g^{(4)}(x_i - \tau_i^-)\right)$$

On peut supposer sans perte de généralité, que $g^{(4)}(x_i + \tau_i^+) \geq g^{(4)}(x_i - \tau_i^-)$. En particulier, on peut ordonner

$$g^{(4)}(x_i - \tau_i^-) \leq \frac{g^{(4)}(x_i - \tau_i^-) + g^{(4)}(x_i + \tau_i^+)}{2} \leq g^{(4)}(x_i + \tau_i^+)$$

Par le théorème des Valeur Intermédiaire (TVI), $g^{(4)}$ étant continue il existe $\tau_i \in]-h, h[$ tq

$$\frac{g^{(4)}(x_i - \tau_i^-) + g^{(4)}(x_i + \tau_i^+)}{2} = g^{(4)}(x_i + \tau_i)$$

D'après (*), on a donc que $\dfrac{g(x_{i+1}) - 2g(x_i) + g(x_{i-1})}{2}$

$$= g^{(4)}(x_i)$$

$$= \frac{h^2}{12} g^{(4)}(\underbrace{x_i + \tau_i}_{\in]a,b[})$$

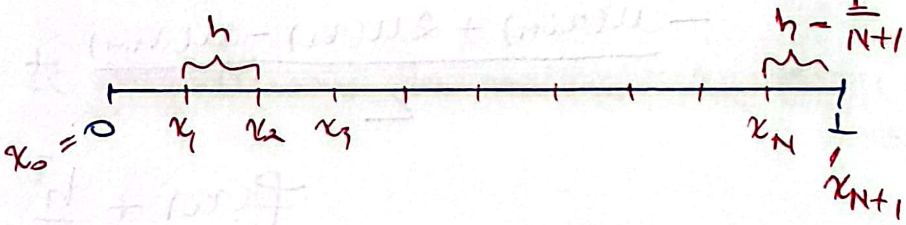
$1 \leq i \leq N$

$\boxtimes$

Ici, l'erreur commise lorsque l'on remplace $g''(x_i)$ par des valeurs de $g(x_i)$ est de l'ordre de ch^2, elle va donc tendre extremment vite vers 0.

II.2/ Approximation par D.F. des solutions de (1)

On cherche une approximation au sens des différences finies des solutions de (1). On va supposer par la suite que $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$. On va donc approcher les valeurs ponctuelles $(u(x_i))_{i=0}^{N+1}$ sur une grille uniforme $(x_i)_{i=0}^{N+1}$ tq $a=0$, $b=1$, $h=\frac{1}{N+1}$ (donc $x_0=0$, $x_{N+1}=1$)



⚠ On va approcher les valeurs de u sur la grille par un vecteur $(u_i)_{i=0}^{N+1} \in \mathbb{R}^{N+2}$ dont chaque composante u_i approchera $u(x_i)$. Etant donné que les valeurs $u(0)$ et $u(1)$ sont présentes par le problème et que $x_0=0$ $x_{N+1}=1$, on commencera par poser

$$\begin{cases} u_0 = u(0) = 0 \\ u_{N+1} = u(1) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ainsi, on en est réduit à chercher } u_i \simeq u(x_i) \quad 1 \leq i \leq N}$

On va donc s'intéresser au problème discret (localement fini) de trouver la valeur $u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$

inconnues, discrete du problème de difference finies. On cherche un "algorithme", c'est-à-dire une methode pour calculer u_h. Utilisons pour cela des resultats de la section II.1. Si $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$ solution de (1), alors

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in]0,1[$$

En particulier

$$-u''(x_i) + c(x_i)u(x_i) = f(x_i) \quad 1 \leq i \leq N, \text{ or}$$

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{2} + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i + \tau_i)$$

donc

$$-\frac{u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1})}{2} + c(x_i)u(x_i) =$$

$$f(x_i) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i + \tau_i) \quad 1 \leq i \leq N$$

Ainsi vu que $u(x_0) = u$, $u(x_{N+1}) = 0$, on peut ecrire le systeme suivant :

(10)

$$-\frac{u(x_2)+2u(x_1)}{h^2}+c(x_1)u(x_1)=f(x_1)+\frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i+\tau_i)$$

$$-\frac{u(x_3)+2u(x_2)-u(x_1)}{h^2}+c(x_2)u(x_1)=f(x_2)+\frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i+$$

$$-\frac{u(x_N)+2u(x_{N-1})-u(x_{N-2})}{h^2}+c(x_{N-2})u(x_{N-2})$$
$$=f(x_{N-1})+\frac{h^2}{12}u^{(4)}$$

$$\frac{2u(x_N)-u(x_{N-1})}{h^2}+c(x_N)u(x_N)$$
$$=f(x_N)+\frac{h^2}{12}u^{(4)}$$

Notons $c_i=c(x_i)$ et introduisons la matrice $A_N\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ $_{N\in\mathbb{N}}$ comme

$$A_n=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+c_2h^2 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2+c_{N-1}h^2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2+c_Nh^2 \end{pmatrix}$$

et donc $A_n\begin{pmatrix}u(x_1)\\ \vdots \\ u(x_N)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(x_1)\\ \vdots \\ f(x_N)\end{pmatrix}+\frac{h^2}{12}\begin{pmatrix}u^{(4)}(x_1+\tau_i)\\ \vdots \\ u^{(4)}(x_N+\tau_i)\end{pmatrix}$

où l'on aurait supposé que $u\in\mathcal{C}^4([0,1])$

26/09/2023

La fonction $u^{(4)}$ étant bornée sur $[0,1]$, la deuxième partie de membre de droite est majorée par ch^2, et l'on peut donc la négliger si h petit ($\Leftrightarrow N$ grand). Le problème sur différences finies associé à (1) consiste donc à trouver un vecteur $u_h \in \mathbb{R}^N$, $u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ solution de $A_h U_h = b_h$ (2)

III| Résolution du problème sur Différences finies

On va s'interesser à la résolution du problème (2), trouver $u_h \in \mathbb{R}^N$ tq $A_h U_h = b_h$.

Question : • Un tel U_h existe-t-il ? Est-il unique ?

• A-t-on $u_i \approx u(x_i)$, pour tout $i \in \{1, .. N\}$

• A-t-on $\lim_{h \to 0} \|u_h - U\| = 0$, pour une norme bien trouvée ? A quelle vitesse ?

III.1| Propriétés de la matrice A_h

Proposition Supposons que $c \geq 0$ sur $[0,1]$. La matrice A_h est symetrique definie positive

Preuve

* Symétrie c'est clair

* Positivité : Pour $x, y \in \mathbb{R}^N$, notons $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = y^T x$. Une matrice symetri

(11)

est dite positive si $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$

définie si $\langle Ax, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^N}$.

Remarque : Une matrice symétrique est définie positive ssi toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Revenons à la définition. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$.

Calculons $\langle Ax, x\rangle = x^t A x$

$$= \frac{1}{h^2}(x_1, \dots, x_N) \begin{pmatrix} 2+h^2c_1 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 2+h^2c_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$\langle Ax, x\rangle = \frac{1}{h^2}(x_1, \dots, x_N) \begin{pmatrix} (2+h^2c_1)x_1 - x_2 \\ -x_1 + (2+h^2c_2)x_2 - x_3 \\ \vdots \\ -x_{N-2} + (2+h^2c_{N-1})x_{N-1} - x_N \\ -x_{N-1} + (2+h^2c_N)x_N \end{pmatrix}$$

donc $\langle Ax, x\rangle = \frac{1}{h^2}\Big[(2+h^2c_1)x_1^2 - x_1x_2 + \sum_{i=2}^{N-1} x_i\left(-x_{i-1} + (2+h^2c_i)x_i - x_{i+1}\right) + (2+h^2c_N)x_N^2 - x_{N-1}x_N\Big]$

Notons $x_0 = x_{N+1} = 0$

$$\langle Ax, x\rangle = \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N} x_i\left(-x_{i-1} + (2+h^2c_i)x_i - x_{i+1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 c_i + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N} x_i\left(-x_{i-1} + x_i + x_i - x_{i+1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 c_i + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N} x_i (x_i - x_{i-1}) + \underbrace{\frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N} x_i (x_i - x_{i+1})}_{\text{reindiçage } i \to i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 c_i + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N} x_i (x_i - x_{i-1}) - \frac{1}{h^2} \sum_{i=2}^{N+1} x_{i-1} (x_i - x_{i-1})$$

Ainsi, en factorisant, on trouve

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 c_i + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1})^2 + \frac{1}{h^2} (x_1^2 + x_N^2) \geq 0$$

Donc A_h est positive. Montrons que elle est aussi definie.

Soit $x \in \mathbb{R}^N$ tq $\langle Ax, x \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 c_i + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1})^2 + \frac{1}{h^2} (x_1^2 + x_N^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_i^2 c_i = 0 & \forall i \\ x_i = x_{i-1} & \forall i \\ x_1^2 = -x_N^2 \end{cases} \Leftrightarrow x_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

$\boxed{/}$

Corollaire

Si $c \geq 0$, le système (2) admet une unique solution $u_h \in \mathbb{R}^N$. C'est la solution de (1) au sens des différences finies.

On peut montrer que la solution u de (1) est positive partout. On appelle cette propriété le principe du maximum. On va montrer que la matrice A_h va preserver cette propriété : les solutions de $A_h U_h = b_h$ sont positives.

Definition On dit qu'une matrice carrée $M \in M_N(\mathbb{R})$ est

positive : si tous ces coefficients sont positives ou nuls,

monotone : si M est inversible et M^{-1} est positive.

Interêt : Si M est monotone, et $b \in \mathbb{R}^N$ positifs, la solution x de $Mx = b$ est $x = M^{-1}b \geq 0$

Proposition Soit $M \in M_N(\mathbb{R})$, La matrice M est monotone ssi $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $(Mx \geq 0 \Rightarrow x \geq 0)$

Preuve

$\Leftarrow$ | Soit $x \in \mathbb{R}^N$ et supposons que $(Mx \geq 0 \Rightarrow x \geq 0)$ on veut montrer M est monotone.

Commençons par montrons que M est inversible,

Soit $v \in \mathbb{R}^N$ tq $Mv = 0$ et mq $v = 0_N$

$$0_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$$

0_N est negative, $-0_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow -Mv = M(-v) \geq 0$

$$\Rightarrow -v \geq 0$$

d'où $v = 0_N$

Montrons maintenant que M^{-1} est positive

Notons $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ on a $e_i \geq 0$

donc $e_i = M(\overbrace{M^{-1}e_i}^{x}) \geq 0$

donc $M^{-1}e_i \geq 0$

Ce vecteur correspond à la $i$ème colonne de M^{-1}.

On repete pour tout i

$\Rightarrow$) Supposons M est monotone. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ tq $Mx \geq 0$

On veut montrer que $x \geq 0$..

On a $x = M^{-1}(Mx)$ et $Mx \geq 0$, $M^{-1} \geq 0$ donc

$$x \geq 0$$

$\boxed{//}$

Il existe d'autres caractérisations du caractère monotone d'une matrice (plus de 40 def équivalente) mais nous allons utiliser celle-ci pour montrer que A_h est monotone.

Proposition. Supposons que $c \geq 0$. Alors, la matrice A_h est monotone.

Preuve

Nous allons utiliser la proposition precedente. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ tq $A_h x \geq 0$. On veut montrer que $x \geq 0$.

Regardons les coefficients du vecteur $A_h x$. Si on suppose $x_0 = x_{N+1} = 0$, on a

$$(A_h x)_i = \frac{-x_{i+1} + (2 + h^2 c_i) x_i + x_{i-1}}{h^2} \geq 0 \qquad 1 \leq i \leq N$$

Réécrivons $(A_h x_i)_i = \frac{x_i - x_{i+1}}{h^2} + c_i x_i + \frac{x_i - x_{i-1}}{h^2} \geq 0$

En particulier, $h^2 c_i x_i \geq (x_{i+1} - x_i) + (x_{i-1} - x_i)$

Soit $p \in \{1, \dots N\}$ tq

$x_p \leq x_i \ \forall i$ (ie $x_p = \min\limits_{1 \leq i \leq N} x_i$). On veut mq $x_p \geq 0$

On a $h^2 c_p x_p \geq (x_{p+1} - x_p) + (x_{p-1} - x_p)$

or $x_p \leq x_i, \forall i$, donc $x_{p+1} \geq x_p$ et $x_{p-1} \geq x_p$

donc $h^2 c_p x_p \geq 0$. Donc $x_i \geq 0 \ \forall i$.

Si $c_p \neq 0$ (si $c_p = 0$, on aura $(x_{p+1} - x_p) + (x_{p-1} - x_p)$

de proche en proche, $x_1 = x_2 = \dots x_{N-1} = x_N = x_{N+1} = 0$) $\boxtimes$

Corollaire

On a un "principe du maximum discret". Si U_h est solution de $A_h U_h = b_h$ avec $b_h \geq 0$, alors $U_h \geq 0$.

III. 2 | Convergence du schéma aux Différences finies

Théorème 1 : Supposons $c \geq 0$ et $f, c \in \mathcal{C}([0,1])$.
si la solution u du problème (1) est de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$, alors on a l'estimation

$$\|U_h - U\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i - u(x_i)| \leq \frac{h^2}{96} \sup_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)| \quad \forall N \geq 1$$

où $U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ est la solution du problème aux D.F (2)

Corollaire

Sous les mêmes hypothèses, $\lim_{N \to +\infty} \|U_h - u\|_\infty = 0$

Ainsi la solution U_h de (2) converge vers la solution u de (1), et elle le fait de manière quadratique en h. C'est une convergence très rapide. Ainsi, à h (ou N) fixé, l'approximation U_h est de bonne qualité et positive.

Introduisons des outils pour cette preuve.

Rappels

Considérons $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^N \end{cases}$

un problème de Cauchy et $y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(t_n, y_n, h_n)$ un schéma à un pas associé.

On dit que ce schéma est :

- stable si "petite erreur sur $y_n \Rightarrow$ petit erreur sur y_{n+1}"
- consistant si "mettre la solution exacte dans $\Phi \Rightarrow$ erreur qui tend vers 0".

Théorème (Alt.) Consistance + stabilité $\Rightarrow$ Convergence

$$\lim_{n \to +\infty} |y(t_n) - y_n| = 0$$

Pour le problème (1), on a besoin d'autres définitions de consistance et stabilité pour montrer la convergence (i.e thm 1)

Définition : On dit qu'une méthode aux Différences finies pour approcher les solutions de (1) est consistante si l'erreur de consistante de cette méthode tend vers 0, où on a définit l'erreur de consistance comme la quantité obtenue en insérant la solution exacte en les points $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ dans le schéma

ex Dans le cas du schéma (2), l'erreur de consistance (R) s'écrit :

$$R_i = \frac{-u(x_{i+1}) + (2+ch^2)u(x_i) - u(x_{i-1})}{h^2} - f(x_i)$$

Corollaire

Si le schéma (2) est consistant, on aura

$$\lim_{h \to 0} \max_{1 \le i \le N} |R_i| = 0$$

Definition On dit qu'un schéma aux D.F. consistant est d'ordre $p \geq 0$ si il existe une constante $c \geq 0$ ne dépendent que de la solution exacte u de (1) et vérifiant $\max_{1 \le i \le N} |R_i| \le ch^p$

Ex On va mq le schéma (2) est d'ordre 2

La notion de stabilité va elle être totalement différente de celle des schémas à un pas

Definition On dit que le schéma aux Diff. finies. (2) est stable si il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de f tq $\|U_h\|_\infty \le c$

Grâce à ces 3 déf, la preuve du théorème va essentiellement être " Stabilité + Consistance "

$\Rightarrow$ Convergence à l'ordre à l'ordre 2

Proposition

Soit $N \subset \mathbb{N}^*$, $h = \frac{1}{N+1}$, $c \geq 0$ Alors

$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$ — cette estimation est indépendante de h (et donc de N)

Rappel : Si $M \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$, $\|M\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq j} \sum\limits_{j=1} |M_{ij}|$

Demonstration

Decomposer $A_h = \frac{1}{h^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A_{0h}} + \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_N \end{pmatrix}}_{D}$

La matrice A_h est inversible car on a montré que c'était le cas de A_k dès que $c \geq 0$, et A_{0h} correspond à $c = 0$

Maintenant $A_{0h}^{-1} - A_h^{-1} = A_{0h}^{-1} A_h A_h^{-1} - A_{0h}^{-1} A_{0h} A_h^{-1}$

$$= A_{0h}^{-1} [A_h - A_{0h}] A_h^{-1}$$

$$= A_{0h}^{-1} D A_h^{-1} \geq 0$$ — car A_h, A_{0h} sont monotones et $c \geq 0$

En particulier, $A_{0h}^{-1} \geq A_h^{-1}$ (composante par composant positive, donc pas de valeur absolue.

et $\|A_h\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq N} \sum\limits_{j}^{N} (A_h^{-1})_{ij}$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^{N} (A_{0h}^{-1})_{ij} = \|A_{0h}^{-1}\|_\infty$$

Remarque : dès que la fonction c n'influe que très peu la norme de A_h^{-1}.

Il nous reste donc à estimer ce dernier terme.

Remarquons que $\|A_{0h}^{-1}\|_\infty = \|A_{0h}^{-1}e\|_\infty$; $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$

Ainsi, si $d = A_{0h}^{-1} e \in \mathbb{R}^N$, alors de manière équivalente, (*) $A_{0h} d = e$ et l'on cherche donc la norme infinie de ce vecteur d. Mais ce système (*) est le schéma aux Diff. finies associé au problème

Trouver $u \in \hat{\mathcal{C}}([0,1])$ sol de

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 & \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Clairement $u(x) = \dfrac{x(1-x)}{2}$ est solution (unique) et on a même $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$, et $u^{(4)} \equiv 0$. Ainsi, la solution d de (*) est exactement donnée par

$d = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{pmatrix}$. On a finalement

$$\|d\|_\infty \leq \sup_{x \in [0,1]} |u(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{x(1-x)}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{8}$$

$\boxed{/\!/}$

Corollaire

Si $A_h u_h = b_h$, alors $\|u_h\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|f\|_\infty$ et le schéma (2) est stable

Preuve

$$\|u_h\|_\infty = \|A_h^{-1} b_h\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|b_h\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|b_h\|_\infty$$

car $\|A_h\|_\infty$ est une norme subordonnée

$$\leq \frac{1}{8} \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$$

$\boxtimes$

On est maintenant en mesure de montrer le théorème 2 — convergence à l'ordre 2 du schéma

Preuve

On a déjà vu que si $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$, solution de (1) alors l'erreur de consistance $(R)_{1\leq i\leq N}$ vérifie

$$|R_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{0\leq x\leq 1} |u^{(4)}(x)| \qquad 1\leq i\leq N$$

ce qui est la consistance à l'ordre (2). La stabilité va nous permettre de conclure. Pour cela comparons la solution exacte à l'approchée en sortant $E_i = u(x_i) - u_i$ l'erreur de discrétisation $1\leq i\leq N$. Remarquons que

$$\begin{cases} A_h U_h = b_h \\ A_h U_{*} = b_h + R \end{cases} \quad \text{où } R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix} \text{ erreur de consistante.}$$

Par linéarité, on a que :

$$A_h(u-u_h) = R \quad \text{d'où} \quad \varepsilon = u - u_h = A_h^{-1}R \quad \text{et on a}$$

$$\|\varepsilon\|_\infty = \|A_h^{-1}R\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|R\|_\infty$$

$$\leq \frac{h^2}{8\,12} \sup |u^{(4)}(x)| \sup |f(x)|$$

⚠ Dans l'énoncé du théorème 2, la bonne estimation est

$$\max_{1\leq i\leq N} |u_i - u(x_i)| \leq \frac{h^2}{96} \sup_{0\leq x\leq 1} |u^{(4)}(x)| \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$$

L'ordre de la méthode est 2 car $\|u - u_h\| \leq \frac{C}{N^2}$

car $h = \frac{1}{N+1}$, $C = \frac{\|u^{(4)}\|_\infty \|f\|_\infty}{96}$

IV/ Pour aller plus loin

VI.1/ Conditions aux limites

On a considéré que des cas simples de conditions aux bords, mais cela est aussi dû au fait que le problème continue devient extrêmement différent dans le cas de condition plus complexes, par exple considérons

Trouver $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ sol de

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in]0,1[\quad f \in \mathcal{C}^0([0,1]) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Il est facile de voir que les solutions de ce problème si elles existent, ne sont pas uniques. En effet, si u_0 est solution, $u_0 + c$ est aussi solution $\forall c \in \mathbb{R}$

De plus $\int_0^1 f(x)\,dx \neq 0$, il n'existe aucune solution!

Par l'absurde, considerons u une telle solution.

On a $\quad 0 = u'(0) - u'(1) = -\int_0^1 u''(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \neq 0$

Les mêmes phenomenes se passent en niveau discret.

Considerons une discretisation au diff. finies.

A l'interieur du domaine, si $u_i \simeq u(x_i)$, on a :

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f_i \quad , \quad 2 \leq i \leq N-1$$

Aux bords, on approche

$$0 = u'(0) = \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} - h\,u''(x_0 + \tau_0)$$

$$0 = u'(1) = \frac{u(x_{N+1}) - u(x_N)}{h} - h\,u''(x_N + \tau_N)$$

On pose donc si l'on neglige u'' $\quad u_0 = u_1$ et $u_{N+1} = u_N$

Le problème s'ecrit donc $\tilde{A}_h u_h = b_h$ par

$$\tilde{A}_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problème : $\tilde{A}_h$ n'est pas inversible

en effet $\tilde{A}_h \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

En particulier, si u_h est sol, alors $u_h + c\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi solution $\forall c \in \mathbb{R}$. En fait, pour que u_h existe, il faut que $b_h \in \operatorname{Im}(\tilde{A}_h) = \ker(\tilde{A}_h)^\perp$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \|$

{ Vecteur dont la somme vaut 0 }

$\approx \int f = 0$

<u>Definition</u>

On appelle conditions aux bords / conditions aux limites de

- Dirichlet : si $u(0) = a$, $u(1) = b$
- Neumann : si $u'(0) = a$, $u'(1) = b$
- Mixtes : si $u'(0) = a$, $u(1) = b$ (Combinaison Neumann / Dirichlet
- Robin : si $u(0) - u'(0) = a$

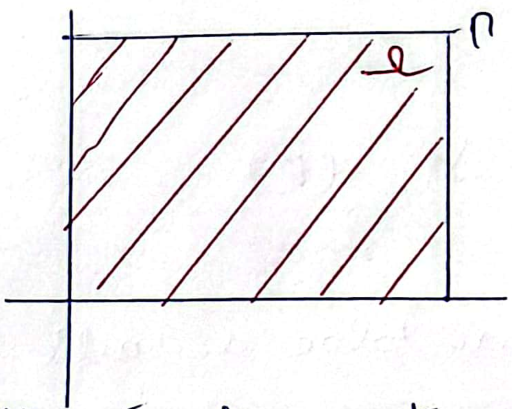
  $u'(1) = b$

IV.2 Et en 2 dimension ?

Mettons que $(x,y) \in [0,1]\times[0,1] = \Omega$ et que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. L'equation (1) s'écrivait

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + c(x,y)\,u(x,y) = f(x,y), \\ u|_\Gamma = 0 \;,\; \Gamma = \partial\Omega = \{(x,0) \;\; x\in[0,1]\} \cup \{(x,1),\, x\in[0,1]\} \\ \qquad \cup \{(0,y),\; y\in[0,1]\} \cup \{(1,y),\, y\in[0,1]\} \end{cases}$$

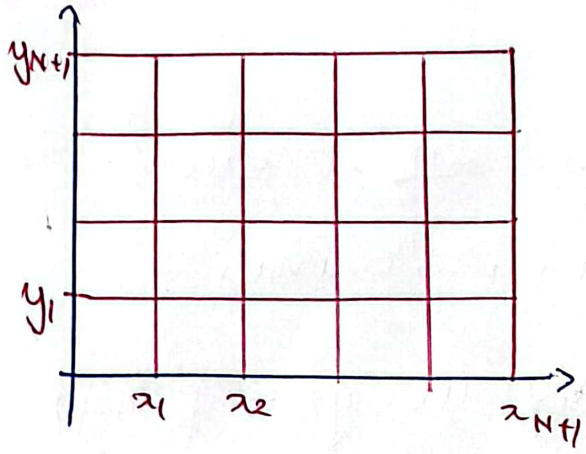
$$(x,y) \in \mathring{\Omega} =]0,1[\times]0,1[$$



Cette équation est appelée equation de Poisson. Elle verifie les proprietés d'existences, unicité, principe de max similaire à (1). Les preuves sont beaucoup plus techniques.

Comment discretiser un tel probleme ? Pareil que precedemment ! Posons $\begin{cases} x_i = ih \\ y_j = jh \end{cases}$ $h = \dfrac{1}{N+1}$ $1 \leq i \leq N$

$1 \leq j \leq N$



On va noter $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ et on va faire des dev de Taylor en chacun des var des dérivées partielles.

Notons $U_h = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{iN} \\ u_{NN} \\ \vdots \\ u_{NN} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N^2}$

Par ces dev de Taylor on peut mq U_h est sol de $A_h U_h = b_h$

$$A_h = \begin{pmatrix} B & -I_{NN} & & (0) \\ -I_{NN} & B & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I_{NN} \\ (0) & & -I_{NN} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N^2,N^2}(\mathbb{R})$$

par bloc de taille $N \times N$

et $B = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 4+h^2c & -1 & & 0 \\ -1 & 4+h^2c & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots\ 0 & -1 & 4+h^2c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$