

C'est bien!

4/4

### Exercice 1

On donne

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 3x^2 - y^2.$$

On considère le problème de minimisation de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

1) Ecrire proprement le problème d'optimisation; on déterminera notamment la/les variables d'optimisation et la fonction coût

Les variables d'optimisation associées à notre problème sont  $x$  et  $y$ .

L'espace vectoriel dans lequel vivent ces variables est  $V = \mathbb{R}^2$ .

Ainsi la fonction coût  $f$  est donnée par :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 3x^2 - y^2.$$

Le problème d'optimisation s'écrit donc; trouver

$$x^* \in \mathbb{R}^2 \text{ telle que } f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x).$$

2) Est-ce un problème d'optimisation en dimension finie, avec ou sans contraintes, quadratique?

Il s'agit d'un problème d'optimisation en dimension finie  $V = \mathbb{R}^2$ , sans contrainte non quadratique.

(2/4)

3) Montrons que  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x,y) = x^2 + (x^2-2)^2 + y^2 + (y^2-1)^2 - 5$

On a:  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} x^2 + (x^2-2)^2 + y^2 + (y^2-1)^2 - 5 &= x^2 + x^4 + 4 - 4x^2 + y^2 + y^4 + 1 - 2y^2 - 5 \\ &= x^4 + y^4 - 3x^2 - y^2. \end{aligned}$$

D'où:  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x^2 + (x^2-2)^2 + y^2 + (y^2-1)^2 - 5 = f(x,y)$ . ✓

4.) a - Calculons  $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , Hess  $f(x_0, y_0)$ , la matrice Hessienne de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$ .

La fonction  $(x,y) \mapsto f(x,y)$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}^2$  et on a:  $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 4x_0^3 - 6x_0 \\ 4y_0^3 - 2y_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , Hess  $f(x_0, y_0) = \nabla^2 f(x_0, y_0)$ .

$$\text{or } \nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 12x_0^2 - 6 & 0 \\ 0 & 12y_0^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc Hess } f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 12x_0^2 - 6 & 0 \\ 0 & 12y_0^2 - 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

ce n'est pas par définition, mais c'est une conséquence de la caractérisation à l'aide de la matrice Hessienne.

b)  $f$  est-elle convexe sur  $\mathbb{R}^2$ ?

Par définition,  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice Hessienne de  $f$  en tout point de  $\mathbb{R}^2$  sont positives.

D'après ce qui précède, les valeurs propres de la matrice Hessienne de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$  sont  $\lambda_1 = 12x_0 - 6$  et  $\lambda_2 = 12y_0 - 2$ .



3/4

4. b) (suite)

Donc,  $f$  est  $\nabla$  convexe sur  $\mathbb{R}^2$  si  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$ .  
 $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

~~Autrement dit, si~~  $\lambda_1 = 12x_0^2 - 6 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{ou } x_0 < -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

et  $\lambda_2 = 12y_0^2 - 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} y_0 > \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \text{ou } y_0 < -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$ .

Par conséquent,  $f$  n'est pas convexe sur  $\mathbb{R}^2$ .

5. a) Montrons que le problème d'optimisation considéré admet au moins une solution

On a  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = x^2 + (x^2 - 2)^2 + y^2 + (y^2 - 1)^2 - 5$ .

Ainsi, la fonction  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^2$  est un fermé non-vide.

D'autre part,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) \geq x^2 + y^2 - 5 = \|(x, y)\|^2 - 5$ ;  
puisque  $(x^2 - 2)^2 + (y^2 - 1)^2 \geq 0$ .  
où  $\|\cdot\|$  désigne la norme Euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ .

Ainsi, en prenant une suite  $u_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$  telle que  $\|u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , on a  $f(u_n) \geq \|u_n\|^2 - 5 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Donc,  $f$  est infimée à l'infini.

D'après le théorème du cours, le problème d'optimisation considéré admet au moins une solution sur  $\mathbb{R}^2$ . ✓

(4/4)

5-b) Écrivons une condition nécessaire d'optimalité  
et reliee à ce problème

Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , et une fonction 2 fois dérivable  
sur  $\mathbb{R}^n$ , une condition nécessaire pour que  
 $x^* \in \mathbb{R}^n$  soit un minimum local / global de  $f$   
sur  $\mathbb{R}^n$  est que  $\nabla f(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n}$  et  $\nabla^2 f(x^*)$   
est définie positive.

Dans notre cas,  $n=2$  et on a  $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 6x \\ 4y^3 - 2y \end{pmatrix}$

Donc, une condition nécessaire pour que  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$   
élément de  $\mathbb{R}^2$  soit un minimum global de  $f$   
sur  $\mathbb{R}^2$  est que  $\nabla f(u^*) = 0_{\mathbb{R}^2}$ .

Autrement dit, 
$$\begin{cases} 4u_1^{*3} - 6u_1^* = 0 \\ 4u_2^{*3} - 2u_2^* = 0 \end{cases}$$