

Nom :

Prénom :

## Contrôle no 1, sujet B (durée 1h30)

*Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que le premier exercice.*

**Exercice 1.** Soient

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\exp(-x^4)}{Z},$$

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\exp(-x^2/(2\sigma^2))}{\sqrt{2\pi\sigma^2}},$$

avec  $Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^4)dx$  et  $\sigma$  une constante  $> 0$ .

- (1) Trouver une constante  $C$  telle que  $f(x) \leq Cg(x)$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .
- (2) Écrire un programme en R qui simule une variable de densité  $f$  (on prendra  $\sigma = 2$ ) (écrire le programme dans le cadre ci-dessous et justifier sur la copie).

- (3) Quel est le nombre moyen de boucle effectuées par ce programme ?
- (4) Trouver  $\sigma$  minimisant le nombre de boucle effectuées par ce programme.

**Exercice 2.** Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F : x \mapsto F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{e^x - 1}{e - 1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

- (1) Calculer le pseudo-inverse  $F^{-1}$  de  $F$ .
- (2) Écrire un programme en R permettant de simuler une variable de fonction de répartition  $F$ .