

1 Rappel

Soit des variables aléatoires X, Y et les constants $a, b > 0$

1.1 Espérance

- $\mathbb{E}[a + bX] = a + b \cdot \mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{E}[aX + bY] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b \cdot \mathbb{E}[Y]$

1.2 Variance

- $Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
- $Var[a + bX] = b^2 Var[X]$
- $Var[aX + bY] = a^2 \cdot Var[X] + 2ab \cdot Cov(X, Y) + b^2 \cdot Var[Y]$

1.3 Covariance-Corrélation

- $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- $Cov(X, X) = Var(X)$
- $Cov(aX, bY) = ab \cdot Cov(X, Y)$
- $Cov(a + X, b + Y) = Cov(X, Y)$
- $Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$

2 Exercises

Ex1 Soit X, Y, Z, W variables aléatoires et $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ calculer:

1. $Cov(X, Y)$ si X, Y sont indépendantes
2. $Cov(aX + bY, cZ + dW)$

Ex2 Soit $\mathbb{E}[X] = 2$, $Var(X) = 9$, $\mathbb{E}[Y] = 0$, $Var(Y) = 4$ et $Corr(X, Y) = 0.25$, Calculer:

1. $Var(X + Y)$
2. $Cov(X, X + Y)$
3. $Corr(X + Y, X - Y)$

Ex3 Si X et Y sont dépendants mais $Var(X) = Var(Y)$ trouver $Cov(X + Y, X - Y)$