Démonstration du théorème pour le cas $n = 1$

Pour $n = 1$, nous considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est deux fois différentiable. Le théorème se reformule comme suit :

Théorème

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0$.

Démonstration

Nous démontrons cette équivalence en deux étapes.

1. Si f est convexe, alors $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

En supposant f convexe, cela signifie que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$, nous avons :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et considérons une perturbation $h \in \mathbb{R}$. En utilisant le développement de Taylor de f autour de x avec un petit déplacement h, on a :

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + o(h^2) \quad \text{quand } h \to 0.$$

Comme f est convexe, l'inégalité

$$f(x + h) \geq f(x) + f'(x)h$$

doit être satisfaite pour des valeurs petites de h. En remplaçant $f(x + h)$ par son développement, nous obtenons :

$$f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + o(h^2) \geq f(x) + f'(x)h.$$

En simplifiant, on trouve que

$$\frac{f''(x)}{2}h^2 + o(h^2) \geq 0.$$

Pour que cette inégalité soit vérifiée quel que soit h, il faut que $f''(x) \geq 0$.

2. Réciproquement, si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors f est convexe

Supposons que $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, en utilisant le théorème de Taylor, on peut écrire $f(y)$ comme suit :

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{f''(z)}{2}(y - x)^2,$$

où z est un point intermédiaire entre x et y. Puisque $f''(z) \geq 0$, il vient que

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x).$$

Cette inégalité est une forme de l'inégalité de Jensen et montre que f est convexe.

Conclusion

Nous avons démontré que f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui conclut la démonstration pour $n = 1$.