

NOM : PRÉNOM :

## Interrogation no. 1

*Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants entre eux. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barème. **Attention : une réponse non justifiée n'a pas de valeur ! Justifiez vos réponses.***

### Exercice 1 Correction de copie

Un étudiant de M1, assidu au cours d'optimisation et éléments finis (...) a énoncé et rédigé la preuve du théorème de convergence de l'algorithme de gradient à pas variable. La copie est donnée à la page suivante. Corrigez, commentez et complétez la démonstration partout là où cela est nécessaire. Vous pouvez utiliser la numérotation des lignes pour préciser les endroits concernés. Vous pouvez aussi corriger directement sur la copie.

### Exercice 2 Position d'un fil élastique suspendu.

On travaille dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Deux points fixés  $P$  et  $Q$  du plan sont connectés par une chaîne constituée de  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) masses reliées par un fil élastique. Chaque masse a une masse  $m$ , et la constante d'élasticité du fil est  $K > 0$ . L'énergie potentielle de la chaîne comporte des termes d'élasticité et des termes de gravité. Au total, pour une chaîne avec  $n$  masses placées aux points  $A_i$  de coordonnées  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , l'énergie potentielle est donnée par l'expression

$$\frac{K}{2} \sum_{i=0}^n \|A_{i+1} - A_i\|^2 + mg \sum_{i=1}^n y_i, \quad (1)$$

avec la convention  $A_0 = P$  et  $A_{n+1} = Q$  et où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne usuelle. On suppose que la chaîne ne rencontre aucun obstacle. On peut représenter tout cela par le dessin de la Figure 1. On cherche à déterminer **la position d'équilibre de la chaîne (au sens position de chaque points  $A_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) qui minimise l'énergie potentielle.**

**Dans toute la suite, on considère le cas particulier où  $n = 2$  et les points  $P = (0, 1)$  et  $Q = (1, 0)$ .** On notera donc  $A_0 = P$ ,  $A_3 = Q$  et  $A_1$  et  $A_2$  représentent les emplacements des deux masses dont on cherche la position.

1. En notant  $(x_i, y_i)$  les coordonnées de  $A_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$  exprimer l'énergie potentielle (1) comme une fonction qui dépend des variables  $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$ ,  $\mathcal{E} : (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mapsto \mathcal{E}(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}$  et montrer que  $\forall u \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{E}(u) = \frac{K}{2} \langle Au, u \rangle + \langle b, u \rangle + K, \quad (2)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Fil élastique.

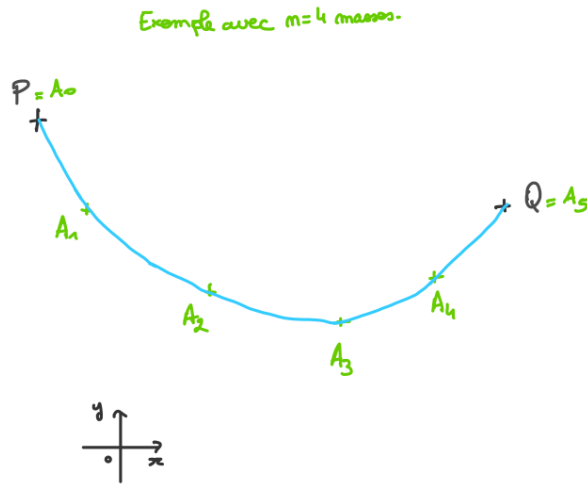


FIGURE 1 – Illustration fil élastique suspendu.

et

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -K \\ mg - K \\ mg \end{pmatrix}. \quad (4)$$

En déduire que  $\mathcal{E}$  est une fonctionnelle quadratique.

2. Écrire le problème d'optimisation considéré, préciser la/les variable/s d'optimisation et la fonction coût et donner les caractéristiques usuelles du problème d'optimisation.

3. Montrer que  $\mathcal{E}$  est  $\alpha$ -convexe et déterminer  $\alpha > 0$ . *Indication : on pourra par exemple montrer que pour tout  $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}^4$ ,  $\langle Aw, w \rangle = \|w\|^2 + (w_1 - w_2)^2 + (w_3 - w_4)^2$ .*

4. Montrer que le problème de minimisation admet un unique point de minimum.

5. Résoudre ce problème d'optimisation. Représenter ensuite sur un dessin la configuration de l'élastique au point de minimum en prenant  $m = g = K = 1$ .

6. Vérifiez si l'algorithme de gradient à pas optimal converge pour cette fonctionnelle.