

TRAVAUX DIRIGÉS : SÉRIES NUMÉRIQUES

Les différents exercices doivent être préparés par les étudiants avant les séances de travaux dirigés.

Exercice 1

Étudier la convergence des séries suivantes, puis en cas de convergence, calculer leur somme.

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$3) \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right).$$

$$4) \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Exercice 2

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$,

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \left(\frac{1}{n} \right).$$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right).$$

$$5) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n.$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}.$$

$$6) \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1 - \cos \left(\frac{1}{n} \right)}.$$

Exercice 3

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$,

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}.$$

$$3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}.$$

$$4) \sum_{n=0}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right).$$

Exercice 4

1. Déterminer l'ensemble des triplets (a, b, c) de nombres réels tels que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ de terme

général $u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}$ soit convergente. Déterminer alors sa somme.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

(a) Montrer que la suite $(a_n)_n$ est convergente.

(b) En déduire la nature de la série numérique $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$.