Solution de l'Exercice 1

Exercice 1

Données de l'exercice :

- μ : mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.
- ν : mesure de Borel définie par :

$$\int_{[0,1]} f(y)\nu(dy) = (1-\alpha)\int_0^1 f(y)dy + \alpha f(1), \quad \forall f \in C(\mathbb{R}),$$

avec $\alpha \in [0,1]$.

Questions :

1. Trouver l'application de transport optimale T qui envoie μ sur ν.
2. Identifier les valeurs de α pour lesquelles $T : [0,1] \to [0,1]$ est :
   - **lisse (smooth)**,
   - **injective (one-to-one)**.

1. Construction de l'application de transport optimale T

L'application optimale T est obtenue en résolvant le problème de Monge avec un coût quadratique $c(x,y) = |x-y|^2$. Cela revient à garantir que la mesure image ν par T vérifie ($T_{\#}\mu = \nu$).

Étape 1 : Distribution cumulative (C_μ et C_ν)

La mesure μ est uniforme sur $[0,1]$, donc sa fonction de répartition cumulative est :

$$C_\mu(x) = \int_0^x 1\,dt = x, \quad x \in [0,1].$$

Pour ν, nous avons :

$$\nu([0,y]) = (1-\alpha)\int_0^y 1\,dt + \alpha \cdot 1_{\{y=1\}},$$

donc :

$$C_\nu(y) = \begin{cases} (1-\alpha)y & \text{si } y \in [0,1), \\ 1 & \text{si } y = 1. \end{cases}$$

Étape 2 : Relation entre C_μ et C_ν

Le transport optimal satisfait $C_\nu(T(x)) = C_\mu(x)$. Cela implique :

$$C_\nu(T(x)) = x.$$

Étape 3 : Inversion de C_ν pour déterminer T

- Si $y < 1$, $C_\nu(y) = (1-\alpha)y$, donc $y = \frac{C_\nu(y)}{1-\alpha}$.
- Si $y = 1$, $C_\nu(y) = 1$.

En inversant, on obtient $T(x)$:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\alpha} & \text{si } x \in [0, 1-\alpha), \\ 1 & \text{si } x \in [1-\alpha, 1]. \end{cases}$$

2. Analyse de T

(a) Lissité (smoothness)

T est lisse si elle est continue et dérivable sur $[0,1]$. Analysons $T(x)$:

- Pour $x \in [0, 1-\alpha)$, $T(x) = \frac{x}{1-\alpha}$, qui est lisse.
- À $x = 1-\alpha$, il y a un saut :

$$\lim_{x \to (1-\alpha)^-} T(x) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1 \quad \text{et} \quad T(1-\alpha) = 1.$$

  La continuité n'est pas garantie si $\alpha > 0$.

Ainsi, T est lisse uniquement pour $\alpha = 0$.

(b) Injectivité (one-to-one)

$T(x)$ est injective si elle ne mappe pas deux valeurs x_1, x_2 distinctes vers la même y.

- Si $\alpha = 1$, $T(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$, donc T n'est pas injective.
- Si $0 \leq \alpha < 1$, $T(x)$ est strictement croissante sur $[0, 1-\alpha)$, et la portion $[1-\alpha, 1]$ est injectivement mappée à 1.

Ainsi, T est injective pour $0 \leq \alpha < 1$.

Conclusion

1. **Application de transport optimale :**

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\alpha} & \text{si } x \in [0, 1-\alpha), \\ 1 & \text{si } x \in [1-\alpha, 1]. \end{cases}$$

2. **Valeurs de α :**
   - T est **lisse** : $\alpha = 0$.
   - T est **injective** : $0 \leq \alpha < 1$.