MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNA
UNIVERSITE
NANGUI ABROGOUA

Unité de Formation et de Recherche
des Sciences Fondamentales et
Appliquées

LE CHEMIN

EXERCICES & CORRIGES

TOPOLOGIE

LE CHEMIN

FICHE I

« ESPACE METRIQUE ~ESPACE TOPOLOGIQUE»

EXERCICE I

E =([a, b],) l'ensemble des applications continues f : [a, b] .
Soit ω ∈ E tel que ω ne s'annule pas sur [a, b].

1. Les applications suivantes définies par
$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) \quad g(x)|dx \quad et \quad d_\omega(f,g) = sup_{x\in[a,b]}|\omega(t)(f(x) \quad g(x)|$$
sont-elles des distances sur ?
2. A quelle(s) condition(s) sur la fonction f: , l'application définie par
$$d(x, y) = |f(x) \quad f(y)|$$
est-elle une distance sur ?

EXERCICE II

Soit = ∪ { ∞} ∪ {+∞} et soit f : → [1, 1] avec
$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ si x ∈ , f(∞) = 1, f(+∞) = 1.

1. Montrer que d(x, y) = |f(x) f(y)| est une distance sur $\overline{}$.
2. Déterminer pour cette distance $B_f(0, 1)$ et $B(0, \frac{1}{3})$.

EXERCICE III

Soit (E, d) un espace métrique et A et B deux parties non vides de E. La distance entre A et B est définie par :
d(A, B) = d(A,B) = in$f$ {d(a, b) /(a, b) ∈ A B}

1. *Montrer que* si A ∩ B ≠ alors d(A, B) = 0.
2. Trouver dans ^{2} deux parties non vides A et B telles que d(A, B) = 0 et A ∩ B = .
3. Il peut se faire que A∩B = avec A et B fermées mais d(A, B) = 0. On le prouvera dans ^{2}, muni de la distance d définie par
$$d(x,y) = max\{|x_i \quad y_i|\}_{1\le i\le 2} \; avec \; x = (x_1, x_2) \; et \; y = (y_1, y_2),$$
avec
$$A = \{(x,y) : xy \le \quad 1, x < 0\} \; et \; B = \{(x,y) : xy \ge 1, x > 0\}.$$

EXERCICE IV

Soit (E, d) un espace métrique et A et B deux parties non vides de E.

1. Soit $x \in E$, montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement si x est limite d'une suite de points de A.
2. On pose pour $x \in E$, $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.
   Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
3. Montrer que $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.
4. Etudier la continuité de l'application $x \in E \rightarrow d(x, A) \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que $[(\forall x) : d(x, A) = d(x, B)] \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.
6. Si A est compact, montrer qu'il existe $y \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, y)$. Ce résultat demeure t'il vrai si l'on suppose seulement A fermé ?

EXERCICE V

Soit (E, d) un espace métrique. Soit A une partie non vide de E.

On appelle diamètre de A l'élément de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{+} \cup \{+\infty\}$ noté $\delta(A)$ et définie par

$$\delta(A) = \sup \{d(x, y) : (x, y) \in A \times A\}$$

On dit que A est bornée si $\delta(A) \in \mathbb{R}^{+}$ lorsque E lui-même est bornée ,on dit que la distance d est bornée.

1) Montrer que tout élément $x \in E$ et pour tout nombre réel $r \in \mathbb{R}_{+}^{*}$,$\mathcal{B}(x, r)$ est bornée.

2) Montrer que $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$.

3) Montrer que si A est $f$ini alors A bornée et A fermée .

4) Soit B une partie non vide de B . montrer $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + d(A, B) + \delta(B)$.

EXERCICE VI

Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Pour u et v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose

$$d(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{1 + |u_n - v_n|}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
2. Montrer que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ est borné.

EXERCICE VII

Soit (E, d) un espace métrique et $\varphi : \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ une application croissante vérifiant pour tout a et b de $\mathbb{R}^{+}$:

$$\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b) \text{ et } \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

1) Montrons que $\varphi o d$ est une distance.

2) Déduisons que $\forall \alpha \in]0, 1[$, d^{α} est une distance sur E.

Application :

Montrer que $d_1 = \frac{d}{1+d}$, $d_2 = Log(1 + d)$ et $d_3 = inf(1, d)$

Sont des distances sur E.

EXERCICE VIII

Soit (E, d) un espace métrique. On dit que d est ultramétrique si elle vérifie

$$\forall (x, y, z) \in E^3 , d(x, z) \leq \sup(d(x, y), d(y, z)).$$

1. Montrer que l'inégalité précédente entraine l'inégalité triangulaire.
2. Montrer que E muni de l'application d définie par
   $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, x) = 0$
   est un espace ultramétrique.
   On suppose maintenant que (E, d) est ultramétrique.
3. Montrons si $d(x, y) \neq d(y, z)$, on a $d(x, z) = \sup[d(x, y), d(y, z)]$.
4. Montrer qu'une boule ouverte est une partie à la fois ouverte et fermée.
5. Montrer que si deux boules ont un point commun alors l'une est contenue dans l'autre.
6. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy ssi $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

EXERCICE IX

1. Soit X un ensemble et T un ensemble de parties de X.

Rappeler les axiomes qui font de T une topologie.

2. Montrer que dans un espace métrique, toute suite de Cauchy est bornée.

FICHE II

« FONCTION CONTINUE ~ESPACE COMPLET »

EXERCICE I

On considère un espace discret muni de la distance d telle $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$.

1. Déterminons les suites de Cauchy de cet espace métrique.

2.Montrer que (E, d) est complet.

EXERCICE II

Soit $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ un ensemble dénombrable. On pose, pour tout (n, m) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$,

$d(a_n, a_m) = 0$ si $m = n$ et $d(a_n, a_m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ Si $m \neq n$

1. Montrer que d est une distance sur E.
2. Montrer que (E, d) est complet.

EXERCICE III

On considère l'espace des fonctions continues $X = C([a, b])$. Soit $\omega \in X$ une fonction qui ne s'annule pas sur $[a, b]$.

1. Montrer que l'application d_ω définie par

$$d_\omega(f, g) = \sup_{t\in[a,b]}|\omega(t)(f(t) - g(t))|$$

est une distance sur X.

2. Montrer que (X, d_ω) est complet.

EXERCICE IV

Soit $E =]0, \infty[$. Pour x et y dans E, on pose

$$\delta(x, y) = |\ln x - \ln y|.$$

1. Vérifier que δ est une distance sur E.

2. d la distance usuelle sur E. Montrer que d et δ sont deux distances topologiquement équivalentes, c'est-à-dire U est un ouvert de (E, d) si et seulement si U est un ouvert de (E, δ).

3. Montrer que (E, d) n'est pas complet.

4. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq1}$ est-elle convergente dans l'espace métrique (E, δ) ? Est-elle une suite de Cauchy dans (E, δ) ?

5. Montrer que l'espace métrique (E, δ) est complet.

EXERCICE V

Soient $\|.\|$ une norme sur ^{n} et g : $^n \rightarrow$ ^{n} telle que pour tout x,y éléments de ^{n},

$$\|g(x) \quad g(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x \quad y\|.$$

f : $^n \rightarrow$ ^{n} telle que pour tout x, élément de ^{n} par

$$f(x) = x \quad g(x)$$

1. Montrer que pour tous x, y éléments de ^{n},

$$\frac{1}{2}\|x \quad y\| \leq \|f(x) \quad f(y)\| \leq \frac{3}{2}\|x \quad y\|$$

2. *Montre que pour tous $x \in$ ^{n}, il y a exactement un $x \in$ ^{n} tel que $f(x) = x$.*

3) En Déduire que f est un homéomorphisme.

EXERCICE VI

Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$ une bijection continue.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est ouverte ;
2. f est fermée ;
3. f est un homéomorphisme.

EXERCICE VII

Soient E et F deux espaces métriques et f : E $\rightarrow$ F une application.

1.Montrer que f est continue si et seulement si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour toute partie A de E.

2.Montrer que f est fermée si et seulement si si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ pour toute partie A de E.

3.Montrer que f est ouverte si et seulement si $f(\mathring{A}) \subset \widehat{f(A)}$ pour toute partie A de E.

4. Montrons que si f est bijective, alors :

$$f \text{ est ouverte} \Leftrightarrow f \text{ est fermée} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ est continue.}$$

EXERCICE VIII

Soient E et F deux espaces métriques et f : E $\rightarrow$ F une application.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue

(2) L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E

(3) L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.

.

EXERCICE IX

Soit (E, $\|.\|$) un espace de Banach et B : E×E → E une application bilinéaire et continue c'est-à-dire que :

i) $\forall x \in E$, l'application $y \longmapsto B(x,y) est\ linéaire;$

ii) $\forall y \in E$, l'application $x \longmapsto B(x,y) est\ linéaire;$

iii)$\exists C_0 > 0, \forall x, y \in E: \|B(x,y)\| \leq C_0\|x\|\|y\|.$

Soit $a \in E$, tel que $\|a\| < \frac{1}{4C_0}$.

On se propose de démontrer que l'équation

$$x = a + B(x,y) \qquad (*)$$

possède une solution $x \in E$.

1. Montrons $B(x,x) - B(y,y) = \frac{1}{2}[B(x-y;x+y) + B(x+y;x-y)]$.
En déduire que l'application $\varphi: x \longmapsto a + B(x,x)$ est lipschitzienne dans toute boule $\{x \in E: \|x\| \leq r\}$.
2. Résoudre l'inéquation
$$C_o r^2 - r + \|a\| \leq 0.$$
Trouver ensuite $0 < r < 1$ tels que pour tout élément r de l'intervalle $[r_1;\ r_2]$ on ait
$$\|x\| \leq r \Rightarrow \|a + B(x,r)\| \leq r.$$
3. trouver un $r > 0$ tel que ϕ soit une contraction dans la boule $\{x \in E: \|x\| \leq r\}$.
4. En déduisons que l'équation (*) possède une solution $x \in E$.

EXERCICE X

Soient X et Y deux espaces métriques et f : X → Y une application.

1. Montrer que si f est continue et surjective et A est partout dense dans *X*, alors f(A) est partout dense dans Y.
2. Montrer que si f est ouverte et si B est partout dense dans Y, alors f^{-1}(B) est partout dense dans *X*.

EXERCICE XI

Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application. On suppose que l'image par f de toute suite de Cauchy de E est une suite de Cauchy dans F. Montrer que f est continue.

EXERCICE XII

Soit f et g deux fonctions de $\quad^2$ vers $\quad$ telles que pour tout (x, y) et (x', y') de $\quad^2$ on ait

$$|f(x, y) \quad f(x', y')| \leq a\,|x \quad x'| + b\,|y \quad y'|$$

$$|g(x, y) \quad g(x', y')| \leq c\,|x \quad x'| + d\,|y \quad y'|.$$

On munit $\quad^2$ de la distance d_∞ .Montrer que si $a + b < 1$ et $c + d < 1$ alors le système

$$\begin{cases} x = f(x,y) \\ y = g(x,y) \end{cases}$$

admet une unique solution.

EXERCICE XIII

Soit $a \in]0, +\infty[$. On considère l'espace vectoriel normé (E,$\|.\|_\infty$) formé des fonctions continues sur l'intervalle [0, 1] à valeur réelles, muni de la norme de la convergence uniforme.

Soit T E $\quad$ E qui à $f \in E$ associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt \quad \forall x \in [0, a]$$

1. Montrer que l'application T est lipschitzienne pour un certain rapport k.

   Quelle est la valeur minimale possible pour k.

2. On suppose $a \in]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe un élément unique $f \in E$ vérifiant la relation $T(f) = f$.

FICHE 3

« ESPACE COMPACT ~ESPACE CONNEXE »

EXERCICE I

Démontrer chacune des propositions suivantes :

1) Tout espace métrique compact est complet.

2) Toute bijection continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique quelconque est un homéomorphisme.

EXERCICE II

Soit X un espace métrique compact, $f : X \to X$ une application telle que

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

pour tout $x, y \in X, x \neq y$. Montrez que f admet un unique point fixe.

EXERCICE III

Parmi les ensembles suivants, reconnaître celui (ou ceux) qui est (ou qui sont) compact(s).

$$C_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ {x_1}^2 + {x_2}^2 + 3{x_3}^2 = 1\}$$

et

$$C_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | {x_1}^2 - {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}.$$

EXERCICE IV

Soit X un espace métrique muni de deux distances d_1 et d_2.

On suppose que (X, d_1) est compact et que pour toute suite (x_n) d'éléments de X, la convergence de (x_n) dans (X, d_1) entraine la convergence de (x_n) dans (X, d_2) .

1. Démontrer que si F est un fermé dans (X, d_2), alors F est fermé dans (X, d_1).

(On pourra utiliser la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites)

2. Démontrer que (X, d_2) est compact.

3. Démontrer que si F est un fermé dans (X, d_1),alors F est fermé dans (X, d_2).

En déduire que d_1 et d_2 définissent la même topologie.

EXERCICE V

Soit X un espace métrique.

1. Soit A une partie de X connexe. Montrer que pour toute partie B de X vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.
2. Montrer que si B_1 *et* B_2 sont deux parties connexes de *X* telles que $\overline{B_1} \cap B_2 \neq$ alors $B_1 \cup B_2$ est connexe.

EXERCICE VI

Soient E un espace *connexe* et $f : E \rightarrow$ une application continue. S'il existe a et b dans E tels que $f(a)f(b) \leq 0$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in$ E tel que $f(x_0) = 0$.

EXERCICE VII

Soit E un espace de Banach et $f : E \rightarrow E$ une application continue.
On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous x et y dans E,

$$\| f(x) \quad f(y) \| \geq \alpha \| x \quad y \|.$$

1. Montrer que l'application f est fermée.
2. On suppose de plus que f est ouverte.

a) Montrer que f est homéomorphisme.

b) Montrer que si $\alpha > 1$, alors f admet un unioque point fixe dans E.

EXRCICE VIII

Montrer que Les parties connexes de sont les intervalles.

EXERCICE IX

1. Enoncer et démontrons le théorème concernant l'image d'un connexe par une application continue.
2. Montrer que $S = \{(x, y) \in \; ^2 | \; x^2 + y^2 = 1\}$ est une partie connexe de ^{2}.

EXERCICE X

Soit (E, d) un espace métrique et $F \subset E$.

1. Monter que si le sous-espace métrique (F, d) est complet, alors F est un fermé de E.
2. Monter que si E est complet et si F est fermé dans E, alors F est complet.

EXERCICE XI

Soit (X, d) un espace métrique. On appelle que $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue.

Soit $K \subset X, K \neq \emptyset$. Le diamètre de K noté diam(K) est définie par

$$diam(K) = sup\{d(x,y) : (x,y) \in K \times K\}$$

1. Montrons que si K est compact alors le diamètre de K est réalisé c'est-à-dire
$$\exists (x,y) \in K \times K \ tels \ que \ d(x,y) = diam(K).$$
2. Soit $A \subset X$ un ensemble non vide. On suppose que
$$\forall\ (a,a') \in A \times A \text{ avec } a \neq a' \text{ on a } d(a,a') \geq 1.$$

Montrer que A est fermé dans X.

EXERCICE XII

On munit l'espace $E = C([0,\ 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de [0, 1] dans $\mathbb{R}$ de la norme de la convergence uniforme.
Montrer que $S = \{u \in E \mid \|u\|_\infty = 1\}$. est un fermé et borné de E et que S n'est pas compact.
Indication : On pourra considérer la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de S définie par : $f_n(x) = x_n$, $x \in [0,\ 1]$

EXERCICE XIII

Soient E et F deux espaces métriques, où E est un compact, et soit $f : E \rightarrow F$ une application continue. Montrer :
(1) f est une application fermée.
(2) Si f est bijective, alors sa réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est continue.

FICHE VI

« ESPACE VECTORIEL »

EXERCICE I

Soit E l'espace des fonctions définies et continues sur [0, 1] à valeurs dans muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

1. Etudier la continuité de la $f$orme linéaire $\psi: f \quad f(1) \quad f(0)$.

2) Calculer la norme de ψ.

EXERCICE II

Soit X=$\{f \in C(\ ): (1+x^2)|f(x)|$ soit bornée$\}$ où $C(\ )$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur .On pose :

$$N(f) = sup_{x\in}\ (1+x^2)|f(x)|$$

1. Montrons N est une norme.

2) On considère l'application L :X definie par

$$\mathrm{L}(f) = \int\ f(x)dx$$

Montrer que l'application L est une $f$orme linéaire continue et calculons sa norme.

EXERCICE III

On désigne par $E = C([0,1],\ )$ l'espace des applications continues de [0,1] dans ,muni de la norme $\|f\|_\infty = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$

Pour f et φ éléments de E, on pose

$$T_\varphi(f) = \int_0^1 \varphi(t)f(x)dx$$

1. Montrons T_φ est une $f$orme linéaire continue sur E.

2) calculer la norme de T_φ.

(on pourra introduire les fonctions f_ε: t $\quad \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|+\varepsilon}$).

EXERCICE IV

Soit $E = C([0,1],\ )$ l'espace des applications continues de [0,1] dans ,muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \quad \forall f \in E.$$

On definit l'application linéaire linéaire $\phi: E \longrightarrow E$ par

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \qquad \forall x \in [0,1], \ \forall f \in E.$$

1. montrons que Φ est continue sur E avec $|||\Phi||| \leq 1$, où $|||\Phi|||$ désigne la norme de Φ.

2. Soit f un element de E tel que $f \geq 0$.

Montrez, en utilisant une intégrale par parties, que

$$\|\Phi(f)\|_1 = \int_0^1 (1-x)f(x)dx.$$

3.En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2 x \ \ si \ x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \quad 0 \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Montrer que $|||\Phi||| = 1$.

4. Montrer qu'il n'existe pas de $f$onction f appartenant à E\{0} tel que

$$\|\Phi(f)\|_1 = \|f\|_1.$$

EXERCICE V

Soit L l'espace vectoriel des applications lipschitziennes de [0,1] à valeur dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application une norme sur L.

$$N: f \longmapsto N(f) = |f(0)| + \sup_{\substack{x,y\in[0;1] \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$

définit une norme sur L.

2. montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $f \in L$

$$\|f\|_\infty \leq CN(f).$$

où $\|f\|_\infty = sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

EXERCICE VI

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues de [0,1] à valeur réelles muni de la norme de la convergence uniforme et soit $f \in E$ tel que

$$f(x) > 0, \forall x \in [0,1].$$

1. Montrer que l'application $T_f: E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g \longmapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$$ est linéaire et continue.

2. Calculer la norme de T_f.

EXERCICE VII

Soit $(l^\infty, \|.\|_\infty)$ l'espace vectoriel de suites réelles $x = (x_n)_{n\in}$ convergentes vers 0, muni de la norme $\|x\| = sup_{x\in} \ |x_n|$

1. Montrer que $(l^\infty, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente avec $u_n = \frac{x_n}{2^n}$.

3.Soit f définie sur $(l^\infty, \|.\|_\infty)$ par $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x_n}{2^n}$

a) Montrons f est une application linéaire continue.

b) Calculer la norme de f.

EXERCICE VIII

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de dans .Pour tout P∈E, on pose

$\|P\|_1 = sup_{t\in[0,1]}|p(t)|$ et $\|P\|_2 = sup_{t\in} \ (|P(t)|e^{-|t|})$

1. Montrons que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont des normes sur E.

2. Montrer qu'il existe C> 0 tel que $\forall P \in E, \|.\|_1 \leq C\|.\|_2$

3. Soit $n \geq 0$ un entier .

Calculer $\|P\|_1$et $\|P\|_2$ pour $\mathrm{P}(t) = t^n$.

CORRECTION

EXERCICE I

RAPPEL :

Pour montrer que d est une distance il suffit de vérifier les assertions suivantes :

$\forall f, g \in E, d(f,g) \in \mathbb{R}_+$

$\forall f, g \in E, d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g.$

$\forall f, g \in E, d(f,g) = d(g, f)$

$\forall f, g, h \in E, d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$

1) $d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$ est-elle une distance sur E ?

f et g sont deux éléments de E donc $|f - g| \in E$ .De plus on sait que $|f - g| \geq 0$

donc $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \in IR_+$

Soient $f, g \in E$,

$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = \int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx = d(g, f)$

Soient $f, g \in E$,

$d(f, g) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in [a,b]$, $|f(x) - g(x)| = 0$ car $|f - g| \in E$ et $|f - g| \geq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in [a,b]$, $f(x) - g(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in [a,b]$, $f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow f = g$

- soient $f, g, h \in E$,

$|f(x) - h(x)| = |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)|$

$|f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$

$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \leq \int_a^b |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)|\, dx$

$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \leq \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx + \int_a^b |g(x) - h(x)|\, dx$

$d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$

CONCLUSION : $d(f, g)$ est une distance sur IR.

$d_\omega(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |\omega(x)(f(x) - g(x))|$Est-elle une distance sur E ?

La fonction $h : x \longmapsto |\omega(x)(f(x) - g(x))|$ est positive et continue sur [a,b].

h atteint donc ses bornes sur [a, b]. $\forall x \in [a, b]$, $h(x) \geq 0$ et $\exists c \in [a , b]$ tel que $\sup_{x\in[a,b]} h(x) = h(c)$. Donc $\forall f, g \in E , d_\omega(f, g) \in \mathbb{R}_+$.

Soient $f, g \in E$,

$$d_\omega(f,g) = \sup_{x\in[a,b]}\left|\omega(x)\big(f(x) - g(x)\big)\right|$$
$$= \sup_{x\in[a,b]}\left|\omega(x)\big(g(x) - f(x)\big)\right|$$
$$= d_\omega(g,f).$$

Donc $d_\omega(f,g) = d_\omega(g,f)$

Soient $f, g \in E$,

Supposons $f = g$

$\forall x \in [a, b]$, $|\omega(x)(f(x) - g(x))| = 0$

Donc $\sup_{x\in[a,b]}\left|\omega(x)\big(f(x) - g(x)\big)\right| = 0 \Longrightarrow d_\omega(f, g) = 0$

Supposons $d_\omega(f, g) = 0$

$$d_\omega(f, g) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in[a,b]}|\omega(x)(f(x) - g(x))| = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in [a, b] , |\omega(x)(f(x) - g(x))| = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in [a, b] , \omega(x)(f(x) - g(x)) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in [a, b] , f(x) - g(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in [a, b] , f(x) = g(x)$$
$$\Leftrightarrow f = g$$

Donc $\forall f, g \in E , d_\omega(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$.

Soient $f, g , h \in E$;soit $x \in [a, b]$

$$|\omega(x)(f(x) - h(x))| = |\omega(x)(f(x) - g(x) + g(x) - h(x))|$$
$$= |\omega(x)(f(x) - g(x)) + \omega(x)(g(x) - h(x))|$$
$$\leq |\omega(x)(f(x) - g(x))| +, |\omega(x)(g(x) - h(x))|$$
$$\leq \sup_{x\in[a,b]}|\omega(x)(f(x) - g(x))| + \sup_{x\in[a,b]}|\omega(x)(g(x) - h(x))|$$
$$\leq d_\omega(f, g) + d_\omega(g, h)$$

$$\sup_{x\in[a,b]}|\omega(x)(f(x) - h(x))| \leq d_\omega(f, g) + d_\omega(g, h)$$
$$d_\omega(f, h) \leq d_\omega(f, g) + d_\omega(g, h)$$

CONCLUSION: $d_\omega(f, h)$ est une distance sur IR.

2) Déterminons la condition sur l'application f : IR⟶ IR pourqued$(x, y) = |f(x) - f(y)|$ soit une distance sur IR.

$d(x, y) = |f(x) - f(y)| \in \mathbb{R}_+$.

$\forall x, y \in IR$, $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(y, x)$

Donc $\forall x, y \in IR$, $d(x, y) = d(y, x)$.

soient $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$d(x, z) = |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)|$

$$\leq |f(x) - f(y)| + |f(x) - f(z)|$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(x, z)$$

soient $x, y, \in IR$,

Supposons $x = y$

$$x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$$
$$\Rightarrow f(x) - f(y) = 0$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = 0$$
$$\Rightarrow d(x, y) = 0$$

Supposons $d(x, y) = 0$

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| = 0$$
$$\Rightarrow f(x) - f(y) = 0$$
$$\Rightarrow f(x) = f(y)$$

Si f est injective alors $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Cela montre que si f est injective alors d est une distance sur $\mathbb{R}$.

Supposons que d est une distance, alors $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Or $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = 0$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Donc $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

On en déduit que f est injective.

CONCLUSION : d est une distance ssi f est injective.

EXERCICE II

1) Montrons $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$.

Montrons que $d(x, y)$ est élément de IR_+

Soient $x, y \in \overline{IR}$,

On sait que $f(x), f(y) \in [-1, 1]$

$$f(x) - f(y) \in \mathbb{R}_+$$
$$|f(x) - f(y)| \in \mathbb{R}_+$$
d'où $d(x, y) \in \mathbb{R}_+$

Montrons que $d(x, y) = d(y, x)$.

$\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(y, x)$

Donc $\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $d(x, y) = d(y, x)$.

soient $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = 0$$
$$\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Montrons l'injectivité de f.

Supposons $f(x) = f(y)$

1^er^ cas : $x \in IR$, $y \in IR$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}$$

Remarquons que $\frac{x}{1+|x|}$ et $\frac{y}{1+|y|}$ sont de même signe. De plus $1 + |x| > 0$ et $1 + |y| > 0$

Donc le signe de $\frac{y}{1+|y|}$ est le signe de y et le signe de $\frac{x}{1+|x|}$ est le signe de x. On en déduit que x et y ont le même signe.

$$\frac{|x|}{1+|x|} = \frac{|y|}{1+|y|} \Rightarrow x(1 + |y|) = y(1 + |x|)$$
$$\Rightarrow |x| + |xy| = |y| + |yx|$$
$$\Rightarrow |x| = |y|$$

x et y sont de même signe et $|x| = |y|$ donc $x = y$.

2^e^ cas :$x = -\infty$ et $y = +\infty$

On a $x \neq y$; par suite $f(x) = -1$ et $f(y) = 1$

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

3^e^ cas :$x \in \mathbb{R}$, $y = -\infty$

Supposons $f(x) = f(y)$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{|x|}{1+|x|} = 1$$
$$\Rightarrow |x| = 1 + |x|$$
$$\Rightarrow 1 = 0 \quad \text{absurde}$$

donc $f(x) \neq f(y)$

4^e^ cas : $x \in \mathbb{R}$, $y = +\infty$

Supposons $f(x) = f(y)$

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow \frac{|x|}{1+|x|} = 1$$
$$\Longrightarrow |x| = 1 + |x|$$
$$\Longrightarrow 1 = 0 \quad \text{absurde}$$

donc $f(x) \neq f(y)$

on a montré que $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$

Conclusion : $f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1\,;1]$ est injective.

Donc $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

soient $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$d(x, y) = |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)|$$
$$|f(x) - f(y) + f(y) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(x) - f(z)|$$

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(x, z)$

2) Déterminons pour cette distance $B_f(0, 1)$ et $B(0, \frac{1}{3})$

❖ $B_f(0,1) = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, d(x,0) \leq 1 \}$

$d(x, 0) = |f(x) - f(0)| = |f(x)|$

Donc $B_f(0,1) = \overline{\mathbb{R}}$

❖ $B(0, \frac{1}{3}) = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, d(x,0) < \frac{1}{3} \}$

$= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, |f(x)| < \frac{1}{3}\}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

$$|f(x)| = \left|\frac{x}{1+|x|}\right| < \frac{1}{3} \Longrightarrow |x| < \frac{1}{3}(1 + |x|)$$
$$\Longrightarrow |x| - \frac{1}{3}|x| < \frac{1}{3}$$
$$\Longrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

si $x = -\infty$, $f(x) = -1 \Longrightarrow |f(x)| = 1 > \frac{1}{3}$ donc $-\infty \notin B(0, \frac{1}{3})$

si $x = +\infty$, $f(x) = 1 \Longrightarrow |f(x)| = 1 > \frac{1}{3}$ donc $+\infty \notin B(0, \frac{1}{3})$

donc $B(0, \frac{1}{3}) =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

<u>EXERCICE</u> III

Soit (E, d) un espace métrique et A et B deux parties non vides de E. la distance entre A et B est définie par : $d(A, B) = \inf_{(a,b)\in A*B} d(a, b)$.

1) Montrons que si $A \cap B \neq \phi$ alors $d(A, B) = 0$.

$$f(x) - f(y) \in \mathbb{R}_+$$
$$|f(x) - f(y)| \in \mathbb{R}_+$$
d'où $d(x, y) \in \mathbb{R}_+$

Montrons que $d(x, y) = d(y, x)$.

$d(A,B) = \inf\{d(a,b) / (a,b) \in A * B\}$

$\forall (a,b) \in (A,B)$, $\quad 0 \leq d(a,b)$

$\forall (a,b) \in (A,B)$, on a : $0 \leq d(A,B) \leq d(a,b)$

Soit $a \in A \cap B$, alors $(a,a) \in A \times A$

: $0 \leq d(A,B) \leq d(a,a) = 0$. Donc $d(A,B) = 0$

2) trouvons dans $\mathbb{R}$ deux parties non vides A et B tel que $d(A,B) = 0$ et $A \cap B = \phi$

Soit $A = [1, 2]$; $B =]2, 4]$

on a : $A \cap B = \phi$

$b_n = 2 + \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 + \frac{1}{n} \in]2; 4[$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \in]2; 4[$

$a = 2 \in A$: $0 \leq d(A,B) \leq d(a,b_n) = \left|2 - (2 + \frac{1}{n})\right| = \frac{1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq d(A,B) \leq \frac{1}{n}$

En faisant tendre n vers l'infini $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ donc $d(A,B) = 0$.

3) Montrons que A est un fermé

$A = \{(x, y) : xy \leq -1, x < 0\}$

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'élément de A telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (x_n, y_n)$ avec $x_n y_n \leq -1$ et $x_n < 0$; $b = (b_1, b_2)$

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\exists \eta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta &\Rightarrow d(a_n, b) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \max\{|x_n - b_1|, |y_n - b_2|\} < \varepsilon \\ &\Rightarrow |x_n - b_1| < \varepsilon \text{ et } |y_n - b_2| < \varepsilon\end{aligned}$$

Donc $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b_1$ et $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b_2$

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n y_n \leq -1$, on a $\lim_{n \to +\infty} x_n y_n \leq -1 \Rightarrow b_1 b_2 \leq -1 \qquad (1)$

puisque $x_n < 0$; on a $\lim_{n \to +\infty} x_n \leq 0$ autrement dit $b_1 \leq 0$

Si $b_1 = 0$ alors (1) $\Rightarrow 0 \leq -1$ ce qui est absurde

Donc $b_1 < 0$

Par suite $(b_1, b_2) \in A$, en conclusion A est fermé.

De la même manière on montre que B est fermé .De plus on a $A \cap B = 0$

montrons que $d(A, B) = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, X = (x_1, x_2) = (-\frac{1}{n}, n) \in A$ car $-\frac{1}{n} < 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, Y = (y_1, y_2) = (\frac{1}{n}, n) \in A$ car $\frac{1}{n} > 0$

$$\begin{aligned}d(X,Y) &= \max\{|x_i - y_i| / i = 1, 2\} \\ &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}\end{aligned}$$

$= max\left\{\left|-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right|, |n-n|\right\}$

$d(X,Y) = \frac{2}{n}$

$0 \leq d(A,B) \leq d(x,y) = \frac{2}{n}$

En *f*aisant tendre vers l'in*f*ini, on a d(A,B) = 0.

EXERCICE IV

1) Montrons si $x \in \bar{A}$ si, seulement si, x est limite d'une suite de points de A.

Supposons que x est limite d'une suite de points de A.

Soit $\varepsilon > 0$,

$\exists \eta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \eta \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$

par suite $x_{\eta+1} \in B(x, \varepsilon) \cap A$

Donc $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

D'où $x \in \bar{A}$.

Supposons que $x \in \bar{A}$

Montrons qu'il existe une suite de points de A qui converge vers x.

$x \in \bar{A}$, alors $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists\, x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists\, x_n \in A$ et $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists\, x_n \in A$ et $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$

En *f*aisant tendre n vers l'in*f*ini on a : $d(x_n, x) = 0$

Ce qui prouve que la suite converge vers x.

2)Montrons que $d(x, A) = 0$ ssi $x \in \bar{A}$

Supposons $x \in \bar{A}$

On a : $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists\, x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists\, x_n \in A$ et $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$

comme $x_n \in A$, alors $0 \leq d(x, A) \leq d(x_n, x)$

en *f*aisant tendre n vers l'in*f*ini, on a : $d(x, A) = 0$

Supposons $d(x, A) = 0$

$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon$élément de A tel que $0 \leq d(a_\varepsilon, x) < \varepsilon$

$\forall\, \varepsilon > 0, a_\varepsilon \in A$ et $a_\varepsilon \in B(x, \varepsilon)$

$\forall\, \varepsilon > 0, a_\varepsilon \in B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Donc $x \in \overline{A}$

Conclusion : $d(x, A) = 0$ ssi $x \in \overline{A}$

3)Montrons $d(x, A) = d(x, \overline{A})$

On sait que $A \subset \overline{A}$

$A \subset \overline{A} \Longrightarrow d(x, \overline{A}) \leq d(x, A)$

Montrons que $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$.

Soit b un élément de $\overline{A}$, $\exists$ une suite $(b_n)_n$ de l'élément de A tel que $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$

$$\begin{aligned} d(x, A) &\leq d(x, b_n) \\ &\leq d(x, b) + d(b, b_n) \end{aligned}$$

En $f$aisant tendre n vers l'in$f$ini on a : $d(x, A) \leq d(x, b)$

Donc $d(x, A)$ est le minorant de $\{d(x, b)/b \in \overline{A}\}$

D'où $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$.

Conclusion : $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

4) Etudions la continuité de l'application $x \in E \to d(x, A) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto d(x, A) \end{aligned}$$

soint x et y deu$x$ elements de E

$\mathbb{R}^+$ est muni de la topologie induite par $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

soit $a \in A$,

$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$

$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$

$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$

$d(x, A) - d(x, y)$ est le minorant de $\{d(y, a)/a \in A\}$.

$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$

$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$

en échangeant le rôle de x et y on a :

$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$

$|d(y, A) - d(x, A)| \leq d(x, y)$

$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq d(x, y)$

Donc φ est lipschitzienne

D'où φ est continue.

2) Montrons que $[\ \forall x: d(x,A) = d(x,B)] \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$

Supposons que $\overline{A} = \overline{B}$

D'après la question (3)

$$\overline{A} = \overline{B} \Rightarrow d(x,A) = d(x,\overline{A}) = d(x,\overline{B}) = d(x,B)$$

$$\overline{A} = \overline{B} \Rightarrow d(x,A) = d(x,B)\ .$$

montrons que $d(x,A) = d(x,B) \Rightarrow \overline{A} = \overline{B}$

D'après 2) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$

$x \in \overline{A} \Rightarrow d(x, A) = 0 = d(x, B) \Rightarrow x \in \overline{B}$

Cela montrons que $\overline{A} \subset \overline{B}$

de la même manière on montre que $\overline{B} \subset \overline{A}$

donc $[\ \forall x: d(x,A) = d(x,B)] \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$

3) Montrons qu'il existe $y \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, y)$

$\psi_x: E \to \mathbb{R}^+$

$y \longmapsto d(x,y)$ est continue car ψ_x est lipschitzienne.

ψ_x est continue sur A qui est compact. Donc ψ_x est bornée et attient ses bornes. ψ_x admet un maximum et un minimum sur A.

$d(x,A) = \inf\{d(x,y)/y \in A\}$

$\psi_x(A) = \{d(x,y)/y \in A\}$

$\exists\, y_0 \in A$ tel que $\min \psi_x(A) = d(x, y_0) = \psi_x(y_0)$

mais $\min \psi_x(A) = \inf\{d(x,y)/y \in A\} = d(x,A)$.

donc $d(x, A) = d(x, y_0)$ avec $y_0 \in A$

en faisant tendre n vers l'infini on a: $d(x, A) \leq d(x, b)$

donc $d(x, A)$ est un minorant de $\{d(x, b) / b \in \overline{A})$

d'où $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$.

<u>EXERCICE</u> V

1) Montrons que $\forall\, x \in E$ et $\forall\, r \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{B}(x,r)$ est bornée.

Soint y et $z \in \mathcal{B}(x,r)$

On a : $0 \leq d(x,y) \leq d(y,x) + d(x,z)$

$$0 \leq d(y,z) \leq 2r$$

$$\Rightarrow \delta(\mathcal{B}(x,r)) \leq 2r$$

D'où $\delta(\mathcal{B}(x,r)) \in \mathbb{R}_+$.donc $\mathcal{B}(x,r)$ est bornée.

2) Montrons que $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$.

On a : $A \subset \overline{A} \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(\overline{A})$ (1)

Montrons que $\delta(\overline{A}) \subseteq \delta(A)$

Soient x et y deux éléments de A . Alors $\exists\ (x_n) \in A$ tel que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\exists\ (y_n) \in A$ tel que $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$.

On a $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$

$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(y_n, y) + \delta(A)$

qd $n \to +\infty$ on a : $d(x, y) \leq \delta(A)$

$\delta(A)$ est donc un majorant de $\sup\{d(x, y) ,(x, y) \in \overline{A} * \overline{A}\}$

d'où $\delta(\overline{A}) \leq \delta(A)$

Conclusion : $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$.

3) Montrons A est $fini \Rightarrow$ A fermé et A borné.

Supposons que A $fini$.

Montrons A est $fermé$.

(E, d) est un espace topologique.

$\forall x \in A$, $\{x\}$ est un $fermé$

$A = \cup_{x\in A}\{x\}$

Comme A est $fini$ et que la réunion d'un nombre $fini$ de $fermé$ est $fermé$, alors A est $fermé$.

Montrons A est $fini \Rightarrow$ A borné.

$\{d(x, y) /(x, y)\in A^2\}$ est $fini$

$\sup\{d(x, y)/(x, y)\in A^2\} = \max\{d(x, y)\}$

$\exists (x_0, y_0) \in A^2$ tel que $\sup\{d(x, y)/(x, y) \in A^2\} < +\infty$

donc $0 \leq \delta(A) < +\infty$

Comme $0 \leq \delta(A) < +\infty$ $\quad alors\ d(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^+$

D'où A borné.

4) Soit B une partie non vide de B . montrons $\delta(AUB) \leq \delta(A) + d(A, B) + \delta(B)$.

Soit a, b $\in$ AUB .

$\delta(A) = \sup\{d(a, b)/(a, b) \in A^2\}$

$\delta(B) = \sup\{d(x, y)/(x, y) \in B^2\}$

$\delta(AUB) = \sup\{d(n, m)/(n, m) \in (AUB)^2\}$

$\delta(AUB) = \sup\{d(n, m)/(n \in AUB$ et $m \in AUB\}$

- si a, b $\in$ A. on a : $d(a, b) \leq \delta(A)$ et $\delta(AUB) \leq \delta(A) + d(A, B) + \delta(B)$.
- si a, b $\in$ B. on a : $d(a, b) \leq \delta(A)$ et $\delta(AUB) \leq \delta(A) + d(A, B) + \delta(B)$.
- si a $\in$ A et b $\in$ B. $d(a, b) \leq d(a, a^2) + d(a^2, b^2) + d(b^2, b)$.

EXERCICE 6

$$d(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{1+|u_n - v_n|}$$

1) Montrons que d est une distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Montrons que $d(u, v) \in \mathbb{R}^+$

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

on a $|u_n - v_n| \geq 0$

$1 + |u_n - v_n| \geq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - v_n| \leq 1 + |u_n - v_n|$

$0 \leq \frac{|u_n - v_n|}{1+|u_n - v_n|} \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{1+|u_n - v_n|} \leq \frac{1}{2^n}$

$0 \leq d(u,v) \leq 2$

donc $d(u,v) \in \mathbb{R}^+$.

Montrons $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.

Supposons $u = v$, Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{1+|u_n - v_n|} = 0$

$d(u,v) = 0$

Réciproquement supposons que $d(u,v) = 0$

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{1+|u_n - v_n|} = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{1+|u_n - v_n|} = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - v_n| = 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n$

$\Rightarrow u = v$

Donc $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.

Montrons que $d(u,v) = d(v,u)$.

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{1+|u_n - v_n|} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|v_n - u_n|}{1+|v_n - u_n|}$

Donc $d(u, v) = d(v, u)$

– Montrons que $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^+$,

Si $a \leq b + c$ alors $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$

$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$x \longmapsto \frac{x}{1+x}$$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, $\varphi' > 0$ donc φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On a $|u - w| \leq |u - v| + |v - w| \Rightarrow \varphi(|u - w|) \leq \varphi(|u - v| + |v - w|)$

$$\Rightarrow \frac{|u-w|}{1+|u-w|} \leq \frac{|u-v|+|v-w|}{1+|u-v|+|v-w|}$$

$$\leq \frac{|u-v|}{1+|u-v|+|v-w|} + \frac{|v-w|}{1+|u-v|+|v-w|}$$

Or $1 + |u - v| \leq 1 + |u - v| + |v - w|$

Alors $\frac{1}{1+|u-v|+|v-w|} \leq \frac{1}{1+|u-v|}$

$$\frac{|v-w|}{1+|u-v|+|v-w|} \leq \frac{|v-w|}{1+|v-w|}$$

$$\frac{|u-w|}{1+|u-w|} \leq \frac{|u-v|}{1+|u-v|} + \frac{|v-w|}{1+|v-w|}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - w_n|}{1+|u_n - w_n|} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{1+|u_n - v_n|} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|v_n - w_n|}{1+|v_n - w_n|}$$

Donc $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

D'où d est une distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2) Montrons que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ est borné.

D'après la question 1) on a $0 \leq d(u, v) \leq 2$

$$0 \leq \sup\{d(u, v) : (u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\} \leq 2$$

$$\sup\{d(u, v) : (u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\} < +\infty$$

Donc $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ est borné.

EXERCICE VII

1) Montrons que $\varphi o d$ est une distance.

$\forall x, y \in E$, $\varphi o d(x, y) = \varphi[d(x, y)] \in \mathbb{R}^+$

car $\varphi:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et d est une distance (puisque (E, d) est un espace métrique) $\Rightarrow d(x, y) \in \mathbb{R}^+$.

$\forall x, y \in E, \varphi o d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall x, y \in E, \varphi[d(x, y)] = 0$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in E, d(x, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in E, x = y.$$

$\forall x, y \in E, \varphi o d(x, y) = \varphi o d(y, x)$ car $d(x, y) = d(y, x)$.

$\forall x, y, z \in E, \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$\varphi[d(x, z)] \leq \varphi[d(x, y) + d(y, z)] \leq \varphi[d(x, y)] + \varphi[d(y, z)]$

Donc $\forall x, y, z \in E, \varphi o d(x, z) \leq \varphi o d(x, y) + \varphi o d(y, z)$

Conclusion : $\varphi o d$ est une distance.

2) Déduisons que $\forall\ \alpha \in]0, 1[$, d^α est une distance sur E.

Soit $\varphi:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$x \longmapsto x^\alpha$

- A-t-on φ croissante ?

$\varphi:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$x \longmapsto x^\alpha$

$\varphi'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+$, donc φ est croissante.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x^\alpha = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^+$, A-t-on $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$?

Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$, tel que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

On a $\varphi(x) = x^\alpha \geq x \qquad \forall x \in]\,0,1[$

$$\left.\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x}{x+y}\right) &= \frac{x^\alpha}{(x+y)^\alpha} \geq \frac{x}{x+y} \\ \varphi\left(\frac{y}{x+y}\right) &= \frac{y^\alpha}{(x+y)^\alpha} \geq \frac{y}{x+y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi\left(\frac{x}{x+y}\right) + \varphi\left(\frac{y}{x+y}\right) = \frac{x^\alpha}{(x+y)^\alpha} + \frac{y^\alpha}{(x+y)^\alpha}$$

$\frac{x^\alpha + y^\alpha}{(x+y)^\alpha} \geq 1 \Leftrightarrow (x + y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha$

Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ alors $x + y = 0$ et on a

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x + y) = \varphi(0) = 0 \\ \varphi(x) = 0;\ \varphi(y) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{aussi que } \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Ainsi $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$,on a $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$

Conclusion $\varphi:\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \longmapsto x^\alpha \Leftrightarrow x = 0$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, on a $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

Donc φ est un jauge .Ainsi $\varphi o d = d^\alpha$ est une distance si $\alpha \in]\,0{,}1[$.

EXERCICE VIII

1) montrons que l'inégalité précédente ⇒ l'inégalité triangulaire.

❖ Si $\sup[d(x, y), d(y, z)] = d(x, y)$ alors on :

$\forall\, x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) \;\Rightarrow d(x, z)) \leq d(x, y) + d(y, z)$

❖ Si $\sup[d(x, y), d(y, z)] = d(y, z)$ alors on :

$\forall\, x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(y, z) \;\Rightarrow d(x, z)) \leq d(x, y) + d(y, z)$

dans toutes les cas , on a :

$\forall\, x, y, z \in E, d(x, z) \leq \sup[d(x, y), d(y, z)] \Rightarrow \forall\, x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

qui est l'inegalité triangulaire .

ou encore

$\forall\, x, y, z \in E, d(x, z) \leq \sup[d(x, y), d(y, z)] + \inf\,[d(x, y), d(y, z)] = d(x, y) + d(y, z)$.

2) Montrons que E muni de l'application d $déf$inie par $\begin{cases} d(x,y) = 1 \text{ si } x \neq y \\ d(x,y) = 0 \text{ si } x = y \end{cases}$ est un espace métrique ultramétrique.

D'après le cours (E, d) est un espace métrique.

❖ si $x \neq y \neq z$, on a : $\begin{cases} d(x,z) = 1 \\ d(x,y) = 1 \\ d(y,z) = 1 \end{cases} \Rightarrow \sup[d(x, y), d(y, z)] = 1.$

Donc $d(x, z) \leq \sup[d(x, y), d(y, z)]$

❖ si $x = y \neq z$, on a: $\begin{cases} d(x,z) = 1 \\ d(x,y) = 0 \\ d(y,z) = 1 \end{cases} \Rightarrow \sup[d(x, y), d(y, z)] = 1.$

Donc $d(x, z) \leq \sup[d(x, y), d(y, z)]$

❖ si $x \neq y = z$, on a: $\begin{cases} d(x,z) = 1 \\ d(x,y) = 1 \\ d(y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \sup[d(x, y), d(y, z)] = 1.$

Donc $d(x, z) \leq \sup[d(x, y), d(y, z)]$

❖ si $x = y = z$, on a: $\begin{cases} d(x,z) = 0 \\ d(x,y) = 0 \Rightarrow \sup[d(x,y), d(y,z)] = 0 \\ d(y,z) = 0 \end{cases}$

Donc $d(x,z) \leq \sup[d(x,y), d(y,z)]$

Dans tous les cas $d(x,z) \leq \sup[d(x,y), d(y,z)]$, alors (E, d) est un métrique ultramétrique .

3) Montrons si $d(x,y) \neq d(y,z)$, on a $d(x,z) = \sup[d(x,y), d(y,z)]$.

Supposons que $d(x,y) < d(y,z)$.

$d(x,z) \leq d(y,z)$. (1)

montrons que $d(y,z) \leq d(x,z)$

on a $d(x,y) < d(y,z)$ par hypothèse donc $\sup[d(x,y), d(y,z)] = d(x,z)$.

Car $d(y,z) \leq \sup[d(x,y), d(y,z)]$ donc $d(y,z) \leq d(x,z)$.

Conclusion : $d(x,z) = \sup[d(x,y), d(y,z)]$.

4) Montrons qu'une boule ouverte est une partie à la $f$ois ouverte et $f$ermée.

➢ montrons qu'une boule ouverte est une partie ouverte.

Soit B(a, r) une boule ouverte . Montrons B(a, r) est une partie ouverte.

$\forall x \in B(a,r), \exists ?\, \alpha > 0$ *tel que* $B(x,\alpha) \subset B(a,r)$.

soit $x \in B(a,r)$. Par dé$f$inition $d(x,a) < r$ i.e $r - d(x,a) > 0$

posons $\alpha = r - d(x,a)$.

soit $y \in B(x,\alpha) \Rightarrow d(x,y) < \alpha = r - d(x,a)$

$\Rightarrow d(x,a) + d(x,y) < r$

Or $d(a,y) < d(x,a) + d(x,y)$

Donc $d(a,y) < r \Rightarrow y \in B(a,r)$

Donc $\forall y \in B(x,\alpha)$, $y \in B(a,r) \Rightarrow B(x,\alpha) \subset B(a,r)$.

D'où $\forall x \in B(a,r)\ \exists\ \alpha = r - d(x,a) > 0$ tel que $B(x,\alpha) \subset B(a,r)$.

Conclusion : B(a, r) est une partie ouverte (i.e une boule ouverte est une partie ouverte).

5) Montrons que si deux boules ont un point en commun alors l'un est contenu dans l'autre.

Soit les boules $B(x,\alpha)$ et $B(y,\varepsilon)$ tel que $y_0 \in B(x,\alpha) \cap B(y,\varepsilon)$ $\forall x, y \in E$ et $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

➢ Si $\alpha < \varepsilon$

Soit $z \in B(x,\alpha)$.

$d(y,z) \leq \sup[d(x,y_0), d(y_0,z)] < \varepsilon$

car $d(y,y_0) < \varepsilon$, $d(y_0,z) \leq \sup[d(x,y_0), d(y_0,z)]$ et $\begin{cases} d(x,y_0) < \alpha < \varepsilon \\ d(x,z) < \alpha < \varepsilon \end{cases}$

Donc $d(y,z) < \varepsilon$

D'où $d(y,z) < \varepsilon \Rightarrow z \in B(y,\varepsilon) \Rightarrow B(x,\alpha) \subset B(y,\varepsilon)$

- Si $\alpha = \varepsilon$

Soit $z \in B(x,\alpha)$.

$d(y,z) \le \sup[d(y,y_0), d(y_0,z)] < \varepsilon$ car $\begin{cases} d(y,y_0) < \alpha = \varepsilon \\ d(y_0,z) \le \sup[d(y_0,x), d(x,z)] \end{cases}$ et

$\begin{cases} d(x,y_0) < \alpha = \varepsilon \\ d(x,z) < \alpha = \varepsilon \end{cases}$ donc $d(y_0,z) < \varepsilon$

D'où $d(y,z) < \varepsilon \Rightarrow z \in B(y,\varepsilon) \Rightarrow B(x,\alpha) \subset B(y,\varepsilon)$.

De la même manière on montre si $\varepsilon < \alpha$ ou $\alpha = \varepsilon$ alors $B(x,\alpha) \subset B(y,\varepsilon)$.

Conclusion : si deux boules ont un point en commun alors l'un est contenu dans l'autre.

6) montrons qu'une suite $(x_n)_{n\ge 0}$ est de Cauchy ssi $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* / \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \ge N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}, n \ge N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$

Donc $\lim_{n\to+\infty} d(x_n + x_{n+1}) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n + x_{n+1}) = 0$.

soit $\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}, n > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > N_\varepsilon$.

On sait que $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$.

Supposons que pour un certain rang $p \ge 1$, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$.

$d(x_n, x_{n+p+1}) \le \sup[d(x_{n+p+1}, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_n)] < \varepsilon$.

Donc $\forall\ p \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$

D'où (x_n) est de Cauchy.

EXERCICE IX

1) Rappelons les axiomes qui font de T une topologie.

$T \subset P(X)$ est une topologie si et seulement si T vérifie les axiomes suivants :

- ✓ $\emptyset$ et X sont éléments de T,
- ✓ Toute réunion quelconque d'éléments de T est élément de T,
- ✓ Toute intersection finie d'éléments de T est élément de T.

REMARQUE :les éléments de T sont appelés ouverts de T.

2) Montrons que dans un espace métrique, toute suite Cauchy est bornée.

Rappel : Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (X, d) est bornée ssi $\exists A \in X, \exists r > 0$ tel que

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in B(a,r).$

Soit (x_n) une suite de Cauchy de (X, d).

Soit $\varepsilon > 0$,

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p > q > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$

En particulier pour $\varepsilon = 3$

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_{N_\varepsilon+1}) < \varepsilon$

Max $\{ d(x_k, x_{N_\varepsilon+1}) / 0 \leq k \leq N_\varepsilon \} = R$

$\forall k, \quad 0 \leq k \leq N_\varepsilon \qquad d(x_k, x_{N_\varepsilon+1}) \leq R < R+1$

Posons $\varepsilon = Max\,\{3, R+1\}$

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in B(x_{\varepsilon+1}, \varepsilon).$

Donc la suite (x_n) est bornée.

FICHE II

EXERCICE I

1) Déterminons les suites de Cauchy de cet espace métrique.

Une suite est de Cauchy ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* / \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n \geq N_\varepsilon \text{ et } p \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_p) < \varepsilon$$

Or ceci n'est possible que si $d(x_n, x_p) = 0$ i.e $x_n = x_p$ car $\varepsilon > 0$.

Conclusion :les suites de Cauchy de cet espace métrique sont donc les suites stationnaires à partir d'un certain rang.

2) montrons que (E, d) est complet.

D'après 1) toute suite de Cauchy de (E, d) est stationnaire à partir d'un certain rang donc converge.

D'où (E, d) est complet.

EXERCICE II

1) montrons que d est une distance sur E.

➤ Montrons $d(a_n, a_m) \in \mathbb{R}^+$,

$\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1$

$\forall m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{m} \leq 1$

$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, 0 < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 3$

Si m = n

$d(a_n, a_m) = 0 \in \mathbb{R}^+$.

$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, 0 < d(a_n, a_m) \leq 3$.

Donc $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, d(a_n, a_m) \in \mathbb{R}^+$.

➤ Montrons $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, d(a_n, a_m) = d(a_m, a_n)$.

Si m = n ,

$d(a_n, a_m) = 0 = d(a_m, a_n)$

Si $m \neq n$

$d(a_n, a_m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = d(a_m, a_n)$

➢ Montrons $\forall (m,n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $d(a_n,a_m) \leq d(a_n,a_p) + d(a_p,a_m)$.

1er cas : $m = n$.

$d(a_n,a_m) = 0$ or $0 \leq d(a_n,a_p) + d(a_p,a_m)$.

Donc $d(a_n,a_m) \leq d(a_n,a_p) + d(a_p,a_m)$.

2ième cas : $m \neq n$.

- $n = p$, $d(a_n,a_m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$

$d(a_n,a_p) = 0$ et $d(a_m,a_p) = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$

$d(a_n,a_m) \leq d(a_n,a_p) + d(a_p,a_m)$

- $m = p$, $d(a_n,a_m) \leq d(a_n,a_p) + d(a_p,a_m)$

3ième cas: $n \neq p$ et $m \neq p$,

$d(a_n,a_m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$

$d(a_n,a_p) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$

$d(a_p,a_m) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{m}$

$$d(a_n,a_p) + d(a_p,a_m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + (1 + \frac{2}{p})$$

d'où $d(a_n,a_m) \leq d(a_n,a_p) + d(a_p,a_m)$.

Conclusion : dans tous les cas, l'inégalité triangulaire est vérifiée.

a-t-on $d(a_n,a_m) = 0 \Leftrightarrow a_n = a_m$?

supposons $a_n = a_m$.

$d(a_n,a_m) = d(a_m,a_m) = 0$.

Montrons $d(a_n,a_m) = 0 \Rightarrow a_n = a_m$

$d(a_n,a_m) = 0 \Rightarrow a_n = a_m$ par définition de d.

donc $d(a_n,a_m) = 0 \Leftrightarrow a_n = a_m$

conclusion : (E, d) est un espace métrique.

2) montrons que (E, d) est complet.

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy de E.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* / \forall (q,p) \in \mathbb{N}^2, p \geq N$ et $q \geq N \Rightarrow d(x_p,x_q) < \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$, , $\exists N \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}$, $p \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p,x_{N+1}) < \frac{1}{4}$

$d(x_p,x_{N+1}) < \frac{1}{4} \Rightarrow d(x_p,x_{N+1}) = 0$

$\Rightarrow x_p = x_{N+1}$

– La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est constante à partir d'un certain rang et sa limite est x_{N+1}. Donc $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans E d'où (E, d) est complet.

EXERCICE III.

1) montrons que d_ω est une distance sur X.

(voir exercice 1 de la *fiche* 1)

2) montrons que (X, d_ω) est complet.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de *f*onction qui est de Cauchy dans (X, d_ω).

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon > 0, \forall m,n \in \mathbb{N},\ m > N_\varepsilon$ et $n > N_\varepsilon \Rightarrow d_\omega(f_n,f_m) < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$,

$\exists\, N_\varepsilon > 0, \forall m,n \in \mathbb{N}, m > N_\varepsilon$ et $n > N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{t\in[a,b]}|\omega(t)(f_n(t) - f_m(t))| < \varepsilon$

$\exists\, N_\varepsilon > 0, \forall m,n \in \mathbb{N}, m > N_\varepsilon$ et $n > N_\varepsilon \Rightarrow \forall\, t \in [a,b], |\omega(t)(f_n(t) - f_m(t))| < \varepsilon$

$\exists\, N_\varepsilon > 0, \forall m,n \in \mathbb{N}, m > N_\varepsilon$ et $n > N_\varepsilon \Rightarrow \forall\, t \in [a,b], |\omega(t)||f_n(t)-f_m(t)| < \varepsilon$

$|\omega|$ est continue et non nulle sur $[a,b]$; il $\exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $\alpha \leq |\omega(t)| \leq \beta$

Alors $\frac{1}{|\omega(t)|} \leq \frac{1}{\alpha}$.

Donc $\exists\, N_\varepsilon > 0, \forall m,n \in \mathbb{N}, m > N_\varepsilon$ et $n > N_\varepsilon \Rightarrow \forall\, t \in [a,b], |f_n(t)-f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$.

Donc $\forall\, t \in [a,b]$, $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\,..\,|)$ or $(\mathbb{R}, |\,..\,|)$ est complet. Donc $\forall\, t \in [a,b]$, $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(t) \in (\mathbb{R}, |\,..\,|)$.

Considérons la *f*onction f dé*f*inie sur $[a,b]$ par $f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t)$.

Montrons $\lim_{n\to+\infty} d_\omega(f_n, f) = 0$

Soit $\varepsilon > 0$,

$\exists\, N_\varepsilon > 0, \forall\, p,n \in \mathbb{N},\ n > N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{t\in[a,b]}|\omega(t)(f_n(t) - f_{n+p}(t))| < \varepsilon$

$\exists\, N_\varepsilon > 0, \forall\, p,n \in \mathbb{N},\ n > N_\varepsilon \Rightarrow \forall\, t \in [a,b], |\omega(t)(f_n(t) - f_{n+p}(t))| < \varepsilon$

En *f*aisant tendre p vers l'in*f*ini on a :

$\exists\, N_\varepsilon > 0, \forall\, p,n \in \mathbb{N},\ n > N_\varepsilon \Rightarrow \forall\, t \in [a,b], |\omega(t)(f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$

$\exists\, N_\varepsilon > 0, \forall\, p,n \in \mathbb{N},\ n > N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{t\in[a,b]}|\omega(t)(f_n(t) - f(t))| < \varepsilon$

$\exists\, N_\varepsilon > 0, \forall\, p,n \in \mathbb{N},\ n > N_\varepsilon \Rightarrow d_\omega(f_n, f) < \varepsilon$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} d_\omega(f_n, f) = 0$.

Montrons $f \in X$.

Soit $\varepsilon > 0$,

Nous avons déjà vu que

$\exists\ N_\varepsilon > 0, \forall\, p, n \in \mathbb{N},\ n > N_\varepsilon$ et $p > N_\varepsilon \Rightarrow \forall\, t \in [a,b], |\omega(t)(f_n(t) - f_{n+p}(t))| < \frac{\omega}{\alpha}$

Donc (f_n) converge uniformément vers f. Or $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$ donc f est continue sur $[a,b]$.

Ainsi $f \in X$.

Conclusion : (X, d_ω) est complet.

EXERCICE IV

1) Vérifions que δ est une distance sur E.

(Evident)

2) Montrons que d et δ sont deux distances topologiquement équivalentes.

$f : (F, d) \to (G, \delta)$

f est continue au point $x_0 \in F$ *ssi*

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall x \in D_f,\ d(x_0, x) < \alpha \Rightarrow\ \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

$Id_E : (E, d) \to (E, \delta)$

$x \longmapsto x$

$f : E \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \ln(x)$ est continue sur $E = \mathbb{R}^*_+$.

Soit $x_0 \in E$,

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall x \in E,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |\ln x - \ln x_0| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall x \in E, d(x_0, x) < \alpha \Rightarrow\ \delta(x_0, x) < \varepsilon$

Donc Id_E est continue.

$Id_E : (E, \delta) \to (E, d)$

$x \longmapsto x$

$g : \mathbb{R} \to E$

$x \longmapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in E$,

g est continue en $\ln(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall y \in E,\ |y - x_0| < \alpha \Rightarrow |g(y) - g(\ln x_0)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \ln(x) \in \mathbb{R}, |lnx - lnx_0| < \alpha \Rightarrow |g(\ln x) - g(lnx_0)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall x \in E, , |lnx - lnx_0| < \alpha \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall x \in E, , \delta(x_0, x) < \alpha \Rightarrow d(x_0, x) < \varepsilon$

$Id_E: (\mathrm{E}, \delta) \to (E, d)$

$x \longmapsto x$ est continue.

De plus Id_E est bijective et ${Id_E}^{-1} = Id_E$ .par conséquent Id_E est un homéomorphisme.

Conclusion : d et δ sont deux distances topologiquement équivalentes.

3) montrons que (E, d) n'est pas complet.

$(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $(\mathbb{R}, d)$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \in \mathbb{R}$.

Donc $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{N}_\varepsilon > 0, \forall p, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{n} > \mathrm{N}_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right| < \varepsilon.$

Comme $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in E$ donc $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de (E, d)

mais $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin E.$

Donc (E, d) n'est pas complet.

4) Etudions la convergence de $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans (E, δ)

Supposons que $\exists a \in E\ tel\ que\ \lim_{n\to+\infty} \delta(\frac{1}{n}, a) = 0$

$\lim_{n\to+\infty} \delta(\frac{1}{n}, a) = \lim_{n\to+\infty} \left|\ln(\frac{1}{n}) - \ln(a)\right| = 0 = \lim_{n\to+\infty} |\ln(n) + \ln(a)|$

Ce qui est absurde.

Donc $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans (E, δ).

Supposons que $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy .

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{N}_\varepsilon > 0, \forall m, p \in \mathbb{N},\ \mathrm{m} > N_\varepsilon$ et $\mathrm{p} > \mathrm{N}_\varepsilon \Rightarrow \delta(x_\mathrm{p}, x_\mathrm{m}) < \varepsilon$.

$\delta\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{m}\right) < \varepsilon \Rightarrow \left|\ln(\frac{1}{p}) - \ln(\frac{1}{m})\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow |\ln(p) + \ln(m)| < \varepsilon$

La suite $(\ln (n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$,ce qui est absurde car $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet et $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$.

Conclusion : $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy de (E, δ).

5) Montrons l'espace métrique (E, δ) est complet.

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy de (E, δ).

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon > 0, \forall m, p \in \mathbb{N},\ m > N_\varepsilon$ et $p > N_\varepsilon \Rightarrow \delta(x_p, x_m) < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon > 0, \forall m, p \in \mathbb{N},\ m > N_\varepsilon$ et $p > N_\varepsilon \Rightarrow |\ln(x_p) - \ln((x_m)| < \varepsilon$

La suite $(\ln(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$ or $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet

donc $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \ln(x_n) = a$.

Posons $y_n = \ln(x_n)$ et $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$

$x \mapsto e^x$

$\lim_{n\to+\infty} (x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} y_n)$ car f est continue.

$\lim_{n\to+\infty} (x_n) = e^a \in]0, +\infty[$

Donc (E, δ) est complet.

EXERCICE V

1) Montrons que pour tous x, y éléments de $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{2}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{3}{2}\|x - y\|$$

Soit x, y éléments de $\mathbb{R}^n$. $x - y = (f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) = (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))$

$\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| + \|g(x) - g(y)\|$

$\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| + \frac{1}{2}\|x - y\| \Rightarrow \frac{1}{2}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|$ (1)

$f(x) - f(y) = (x - g(x)) - (y - g(y)) = (x - y) + (g(y) - g(x))$

$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| + \|g(x) - g(y)\|$

$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| + \frac{1}{2}\|x - y\| = \frac{3}{2}\|x - y\|$

$donc\ \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{3}{2}\|x - y\|$ (2)

De (1) et (2) ,on déduit que $\frac{1}{2}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{3}{2}\|x - y\|$.

2) Montrons que pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, il y a exactement un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = x$.

➢ montrons que f est injective.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = f(y)$

$f(x) = f(y) \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\|x - y\| = 0$

$\Rightarrow \|x - y\| = 0$

$\Rightarrow x = y$

Donc f est injective.

➢ montrons que f est surjective.

F étant injective, elle sera *f*orcement une bijection de $\mathbb{R}^n \longrightarrow f(\mathbb{R}^n)$ or on a :

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$x \longmapsto f(x) = x - g(x)$ $\quad$ *i.e* $f = Id_{\mathbb{R}^n} - g$ donc $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$

d'où f est surjective.

Conclusion : f est bijective.

3) Déduisons-en que f est un homéomorphisme.

L'application f étant $\frac{3}{2} -$ *lipschitzienne*, elle est continue .de plus, elle est bijective .Il nous *f*aut donc montrer que sa bijection réciproque est continue.

Soit f^{-1} cette bijection réciproque.

$x = f^{-1}((fx))$

donc $\frac{1}{2}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \Rightarrow \frac{1}{2}\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\|$.

Autre méthode

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{2}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|$

Donc $\frac{1}{2}\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq \|x - y\| \Rightarrow \|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq 2\|x - y\|$

D'où f^{-1} est continue car elle est $2-$*lipschitzienne*.

Conclusion : f est un homéomorphisme.

EXERCICE VI

Montrons que les assertions suivantes équivalentes :

1. f est ouverte ;
2. f est *f*ermée ;
3. f est un homéomorphisme.

➡ f est ouverte $\Rightarrow$ f est fermée .

Supposons que f est ouverte et montrons que f est *f*ermée.

Soit H un *f*ermé de E ; on a : A= C_E^H qui est un ouvert .

$f(H) = f(C_E^A) = C_F^{f(A)}$

$f(\mathrm{A})$ est un ouvert car f est ouverte. Donc $C_F^{f(A)}$ est fermé.

D'où $f(\mathrm{H})$ est fermée ; En conclusion, f est fermée.

➨ f est fermée $\Rightarrow f$ est un homéomorphisme.

Supposons que f est fermée et montrons f est un homéomorphisme.

Soit Ω un fermé de E.

$(f^{-1})^{-1}(\Omega) = \mathrm{f}(\Omega)$. $\mathrm{f}(\Omega)$ étant un fermé alors $(f^{-1})^{-1}(\Omega)$ est un fermé. Par conséquent, f^{-1} est continue puisque f est bijective continue, on en déduit que f est un homéomorphisme.

➨ f est un homéomorphisme $\Rightarrow f$ est ouverte .

soit O un ouvert de E. $(f^{-1})^{-1}(O) = \mathrm{f}(O)$ est un ouvert alors f est ouverte.

Conclusion : les assertions sont équivalentes.

EXERCICE VII

1) Montrons que f est continue si et seulement si $f(\overline{\mathrm{A}}) \subset \overline{f(\mathrm{A})}$ pour toute partie A de E.

Supposons que f continue.

soit $\mathrm{y} \in f(\overline{\mathrm{A}})$,

$\exists\, x \in \overline{\mathrm{A}}$ tel que $\mathrm{y} = f(x)$. $\exists$ aussi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Puisque f est continue, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x) = \mathrm{y}$, si bien que $\mathrm{y} \in \overline{f(\mathrm{A})}$.

On a donc $f(\overline{\mathrm{A}}) \subset \overline{f(\mathrm{A})}$.

Réciproquement, supposons que pour toute partie A de E, On ait $f(\overline{\mathrm{A}}) \subset \overline{f(\mathrm{A})}$.

Soit Ω un fermé de F. Il s'agit de prouver que $f^{-1}(\Omega)$ est un fermé de E.

Posons $\mathrm{A} = f^{-1}(\Omega)$; on a $f(\overline{\mathrm{A}}) \subset \overline{f(\mathrm{A})}. \subset \overline{\Omega} = \Omega$

Donc $\overline{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A}$ et par suite A est un fermé de E. La fonction f est donc continue sur E.

2) Montrons que f est fermée si et seulement si $\overline{f(\mathrm{A})} \subset f(\overline{\mathrm{A}})$ pour toute partie A de E.

Supposons que f est une application fermée.

$$\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{A}} \Rightarrow \overline{f(\mathrm{A})} \subset \overline{f(\overline{\mathrm{A}})} .$$

Comme $\overline{\mathrm{A}}$ est un fermé de E, $f(\overline{\mathrm{A}})$ est un fermé de F, c'est-à-dire $\overline{f(\overline{\mathrm{A}})} = f(\overline{\mathrm{A}})$.

Il en résulte que $\overline{f(\mathrm{A})} \subset f(\overline{\mathrm{A}})$.

Réciproquement, supposons que $\overline{f(\mathrm{A})} \subset f(\overline{\mathrm{A}})$ pour toute partie A de E .

Montrons que f est fermée.

Soit A un fermé de E,

On a $\overline{f(\mathrm{A})} \subset f(A)$ et par suite on a l'égalité $\overline{f(\mathrm{A})} = f(\mathrm{A})$, c'est-à-dire que $f(\mathrm{A})$ est un fermé.

3) Montrons que f est ouverte si et seulement si $f(\mathring{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$ pour toute partie A de E.

Supposons que f soit ouverte.

On a : $\mathring{A} \subset A$ donc $f(\mathring{A}) \subset f(A)$ et par suite $\overset{\circ}{\widehat{f(\mathring{A})}} \subset \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$.

Comme f est ouverte, $\overset{\circ}{\widehat{f(\mathring{A})}} = f(\mathring{A})$, ce qui implique $f(\mathring{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f(\mathring{A})}}$

Supposons que $f(\mathring{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f(\mathring{A})}}$ pour toute partie A de E.

Soit A un ouvert de E. On a $\mathring{A} = A$ et donc $f(A) \subset \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$.

On a nécessairement l'égalité $\overset{\circ}{\widehat{f(A)}} = f(A)$

Donc $f(A)$ est un ouvert de F.

4) Montrons que si f est bijective, alors :

$$f \text{ est ouverte} \Leftrightarrow f \text{ est fermée} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ est continue.}$$

➢ Montrons que si f est ouverte alors elle est fermée.

Soit A un fermé de E. Puisque $C_E^{f(A)} = C_E^{A}$ est un ouvert, il s'ensuit que $f(A)$ est un fermé.

➢ Montrons que si f est fermée alors f^{-1} est continue.

Soit A un fermé de E, $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ est un fermé de F, donc f^{-1} est continue.

➢ montrons que si f^{-1} continue alors f est ouverte.

Soit U un ouvert de E, l'égalité $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ montre que $f(U)$ est un ouvert.

Donc f est ouverte.

EXERCICE VIII

Montrons que les propriétés suivantes sont équivalentes

1) f est continue
2) L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E
3) L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.

(1) ⇒ (2) : Supposons f continue et soit Ω un ouvert de F.

On doit montrer que l'ensemble $f^{-1}(\Omega) = \{x \in E \mid f(x) \in \Omega\}$ est un ouvert de E.

Soit $a \in f^{-1}(\Omega)$.

Puisque $f(a)$ est dans l'ouvert Ω et puisque f est continue, il existe donc un ouvert U de E contenant a tel que $f(U) \subset \Omega$.

Par suite $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(\Omega)$

Ainsi, il existe un ouvert U contenant a tel que $U \subset f^{-1}(\Omega)$.

Cela prouve que $f -1(\Omega)$ est un ouvert de E.

(2) ⇒ (1) : Montrons que f est continue en tout point $a \in E$.

Soit V un voisinage ouvert de F contenant $f(a)$. L'ensemble $U = f^{-1}(V)$ est un ouvert contenant a et $f(U) \subset V$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) : L'équivalence résulte de la relation $f^{-1}(C^A) = C^{f^{-1}(A)}$.

EXERCICE IX

1) *Montrons* $B(x,x) - B(y,y) = \frac{1}{2}[B(x-y;x+y) + B(x+y;x-y)]$

$$B(x-y;x+y) = B(x,x+y) - B(y,x+y)$$
$$= B(x,x) + B(x,y) - B(y,x) - B(y,y)$$
$$B(x+y;x-y) = B(x,x-y) - B(y,x-y)$$
$$= B(x,x) - B(x,y) + B(y,x) - B(y,y)$$

On a alors $B(x-y;x+y) + B(x+y;x-y) = 2B(x,x) - 2B(y,y)$

D'où $B(x,x) - B(y,y) = \frac{1}{2}[B(x-y;x+y) + B(x+y;x-y)]$.

Déduisons que l'application $\varphi : x \longmapsto a + B(x,x)$ est lipschitziènne dans toute boule $\{x \in E : \|x\| \leq r\}$.

Soient $x, y \in E$ tels que $\|x\| \leq r$ et $\|y\| \leq r$

On a $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|a + B(x,x) - (a - B(y,y))\|$

$$= \|B(x,x) - B(y,y)\|$$
$$= \left\|\frac{1}{2}[B(x-y;x+y) + B(x+y;x-y)]\right\|$$
$$\leq \frac{1}{2}(\|B(x-y;x+y)\| + \|B(x+y;x-y)\|)$$
$$\leq \frac{1}{2}[C_o\|x-y\|\|x+y\| + C_o\|x+y\|\|x-y\|]$$
$$\leq C_o\|x-y\|\|x+y\|$$
$$\leq C_o\|x-y\|(\|x\| + \|y\|)$$

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq 2rC_o\|x-y\|$$

Ainsi φ est lipschitziènne dans toute boule $\{x \in E : \|x\| \leq r\}$.

2) Résolvons $C_o r^2 - r + \|a\| \leq 0$.

Résolvons $C_o r^2 - r + \|a\| = 0$

$\Delta = 1 - 4C_o\|a\|$ or $\|a\| \leq \frac{1}{4C_o}$

D'où $4C_o\|a\| < 1$ cela implique $1 - 4C_o\|a\| > 0$

Donc le polynôme admet deux racines distinctes

$r_1 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2C_o}$ $\qquad$ $r_2 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2C_o}$

$S_{\mathbb{R}} = [r_1;\ r_2]$.

Trouvons ensuite $0 < r < 1$ tels que pour tout élément r de l'intervalle $[r_1;\ r_2]$ on ait

$$\|x\| \leq r \Rightarrow \|a + B(x,r)\| \leq r.$$

Soit r > 0 et soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq r$

$\|a + B(x,r)\| \leq \|a\| + \|B(x,r)\|$

$\|a + B(x,r)\| \leq \|a\| + C_o\|x\|\|x\|$

$\leq \|a\| + C_o r^2$

Pour que $\|a + B(x,r)\| \leq r$ il $suffit$ que $\|a\| + C_o r^2 \leq r$

$\|a\| + C_o r^2 - r \leq 0$, $r \in [r_1;\ r_2]$ or $r_1 > 0\ et\ r_2 > 0$

Donc $0 < r_1 \leq r \leq r_2$.

3) trouvons un $r > 0$ tel que ϕ soit une contraction dans la boule $\{x \in E : \|x\| \leq r\}$.

ϕ est une contraction dans la boule de centre 0 et de rayon r ssi

$$0 < 2rC_o < 1 \Rightarrow 0 < r < \frac{1}{2C_o}$$

Remarque $0 < r_1 < \frac{1}{2C_o} < r_2$

Il existe belle et bien un r tel que $r_1 < \frac{1}{2C_o} < r_2$.

4) Déduisons que l'équation (*) possède une solution $x \in E$.

(*) admet une solution ssi ϕ admet un point $fixe$.

$\phi : B_f(0,r) \longrightarrow B_f(0,r)$

$x \longmapsto \phi(x) = a + B(x,x)$

ϕ est contractante.

$B_f(0,r)$ est complet car $f$ermé d'un espace complet.

Donc d'après le théorème du point $fixe$, $\exists x_0 \in B_f(0,r)$ tel que $\phi(x_0) = x_0$.

Donc (*) admet une solution dans (E). Mais la solution n'est pas unique dans (E).

EXERCICE X

1) Montrons que si f est continue et surjective et A est partout dense dans X, alors f(A) est partout dense dans Y.

Rappel :soit X un espace topologie

Soit $A \subset X$

A est partout dense dans X si $\overline{A} = X$

$f(A) \subset Y \Rightarrow \overline{f(A)} \subset Y$ (1)

Montrons que $Y \subset \overline{f(A)}$

$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ donc $Y \subseteq \overline{f(A)}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow Y = \overline{f(A)}$

2) Montrons que si f est ouverte et si B est partout dense dans Y, alors $f^{-1}(B)$ est partout dense dans X.

Définition : « soient X et Y deux espaces topologique et $f : X \longrightarrow Y$ une application .

f est dite ouverte (rep. $f$ermé) si pour tout O ouvert de X (resp. F $f$ermé de X), $f(O)$ est un ouvert de Y ($f(F)$ est un $f$ermé de Y) ».

on a $f^{-1}(B) \subset X$. Donc $\overline{f^{-1}(B)} \subset X$ (1)

soit $x \in X$. Soit V un ouvert de X contenant x.

Comme f est ouverte ,$f(V)$ est un ouvert de Y.

Etant donné que $x \in V, f(x) \in Y = \overline{B}$

$f(V)$ est un voisinage de $f(x) \in \overline{B}$ donc $f(V) \cap B \neq \emptyset$

$$
\begin{aligned}
a \in f(V) \cap B &\Leftrightarrow a \in f(V) \; et \; a \in B \\
&\Leftrightarrow \exists v \in V \; tel \; que \; a = f(v) \in B \\
&\Rightarrow \exists v \in V \; tel \; que \; v \in f^{-1}(B) \\
&\Rightarrow V \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

Par suite $x \in f^{-1}(B)$. d'où $X \subset \overline{f^{-1}(B)}$ (2)

De (1) et (2) on a $X = \overline{f^{-1}(B)}$

EXERCICE XI

Soit $a \in E$ et (x_n) une suite de E qui converge vers a.

Montrons que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

On définit la suite (y_n) par $y_{2n} = x_n$ et $y_{2n+1} = a$

La suite (y_n) converge vers a, c'est donc une suite de Cauchy dans E et $(f(y_n))$ est de Cauchy dans F . Par ailleurs, $f(a)$ est une valeur d'adhérence de la suite $(f(y_n))$, puisque $f(y_{2n+1}) = f(a)$, donc $(f(y_n))$, converge vers $f(a)$. En particulier $(f(y_{2n})) = (f(x_n))$ converge vers $f(a)$. Ainsi, f est continue au point a.

EXERCICE XIII

RAPPEL : $E = \{f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$

$\|f\|_\infty = sup_{x\in[0,a]}|f(x)|$

$(E, \|f\|_\infty)$ est complet.

T est lipschitzienne ;$\forall f, g \in E, \exists k > 0$ tel que $\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq k\|f - g\|_\infty$

$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x f(s)ds \qquad \forall\, x \in [0,a]$$

$$\begin{aligned} T(f)(x) - T(g)(x) &= \int_0^x f(s)ds - \int_0^x g(s)ds \\ &= \int_0^x (f(s) - g(s))ds \\ &= \int_0^x (f-g)(s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |T(f)(x) - T(g)(x)| &= \left|\int_0^x (f-g)(s)ds\right| \\ &\leq \int_0^x |(f-g)(s)|\,ds \\ &\leq x\|f-g\|_\infty \\ &\leq a\|f-g\|_\infty \end{aligned}$$

Donc T est a-lipschiztienne.

2) Montrons qu'il existe un élément unique $f \in E$ verifiant la relation $\text{T}(f) = f$ $a \in]0,1[$

Donc T est une contraction.

$(E, \|f\|_\infty)$ est complet.

D'après le théorème du point fixe $\exists!\, f \in E, T(f) = f$.

FICHE III

EXERCICE I

Démontrons chacune des propositions suivantes :

1) Tout espace métrique compact est complet.

Soit (E, d) un espace métrique.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. D'après le théorème de Bolzano Weierstrass, il $\exists\ \varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E.

Autrement dit : $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = a \in E$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E.

Soit $\varepsilon > 0$,

$\exists\ \mathrm{N}_1 > 0, \forall m, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{m} > N_1$ et $\mathrm{n} > \mathrm{N}_1 \Rightarrow \mathrm{d}(x_\mathrm{n}, x_\mathrm{m}) < \varepsilon$.

$\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = a$

$\exists\ \mathrm{N}_2 > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{n} > \mathrm{N}_2 \Rightarrow \mathrm{d}\big(x_{\varphi(n)}, \mathrm{a}\big) < \varepsilon$

Posons $\mathrm{N} = \max\{\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2\}$

$\forall n > N$ i.e $\mathrm{n} > N_1$ et $\mathrm{n} > \mathrm{N}_1$

$\mathrm{d}(x_\mathrm{n}, \mathrm{a}) \leq\ \mathrm{d}\big(x_\mathrm{n}, x_{\varphi(n)}\big) +\ \mathrm{d}\big(x_{\varphi(n)}, \mathrm{a}\big) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$.

2) Toute bijection continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique quelconque est un homéomorphisme.

f : (E, d)$\longrightarrow (F, \delta)$ tel que f soit bijective et continue et E compact.

Soit H un $f$ermé de E.

H $f$ermé dans E, donc H est un compact.

f étant continue, alors f(H) est un compact de F. Donc f(H) est $f$ermé de F.

Par conséquent, f est un homéomorphisme.

EXERCICE II

Pour tout x, y $\in X$, $x \neq$ y. Montrons f admet un unique point $f$ixe.

Soit φ une application telle que $\varphi\colon X \to \mathbb{R}_+$

$$x \longmapsto d(x, f(x))$$

φ est continue comme composée d'application continue.

$f: X \longrightarrow X$ et $\delta_x: X \to \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto f(x)$ $x \longmapsto d(x,y)$

$\varphi = \delta_x o f$

X = compact $\Rightarrow \varphi(X)$ est un compact dans $\mathbb{R}_+$.

Donc φ atteint ses bornes ;

$\exists x_0 \in X$ tel que $\varphi(x_0) = \min_{x \in X} d(x, f(x))$

$d(x_0, f(x_0)) = \min_{x \in X} d(x, f(x))$

➢ Montrons que $f(x_0) = x_0$.

Supposons que $f(x_0) \neq x_0$.

Alors $d(f(x_0), f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0))$ qui est absurde car $d(x_0, f(x_0)) \leq d(x, f(x))$ $\forall x \in X$.

Donc $f(x_0) = x_0$.

Ainsi x_0 est un point $fixe$.

➢ Montrons l'unicité du point $fixe$.

Soit $a \in X$ tel que $f(a) = a$.

Supposons que $x_0 \neq a$.

$d(f(a), f(x_0)) < d(x_0, a) \Rightarrow d(x_0, a) < d(x_0, a)$ ce qui absurde.

Donc $x_0 = a$

D'où l'unité du point $fixe$.

EXERCICE III

❖ C_1 est - il un compact de $\mathbb{R}^3$?

Dé$f$inissons une distance sur $\mathbb{R}^3$.

$x = (x_1, x_2, x_3)$ *et* $y = (y_1, y_2, y_3)$

$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$

Considérons l'application suivante :

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto {x_1}^2 + {x_2}^2 + 3{x_3}^2$ f est continue car c'est un polynôme.

Soit $x \in C_1$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

$x \in C_1 \Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = 1$

$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in f^{-1}\{1\}$

Donc $C_1 = f^{-1}\{1\}$

$\{1\}$ est un $f$ermé de $(\mathbb{R}, |.|)$

Puisque f est continue, alors $f^{-1}(\{1\})$ est un $f$ermé de $\mathbb{R}^3$.

C_1 est –il bornée ?

$C_1 \subset B(\alpha, r)$

On a $x = (x_1, x_2, x_3) \in C_1$, alors ${x_1}^2 + {x_2}^2 + 3{x_3}^2 = 1$

$$\begin{cases} {x_1}^2 < 1 \\ {x_2}^2 < 1 \\ 3{x_3}^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_1}^2 < 1 \\ {x_2}^2 < 1 \\ {x_3}^2 < 1 \end{cases}$$

$({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{3}$

$d(x, 0) < \sqrt{3} \quad \forall x \in C_1$.

$x \in B(o, \sqrt{3})$. Donc C_1 est bornée.

Puisque C_1 est un $f$ermé et bornée de $\mathbb{R}^3$, alors C_1 est un compact de $\mathbb{R}^3$.

❖ C_2 est – il un compact de $\mathbb{R}^3$?

Contre exemple

Soit $x_n = (n, n, 1) \in \mathbb{R}^3$.

On a : $n^2 - n^2 + 1 = 1$ donc $x_n \in C_2$

$d(x_n, 0) = \sqrt{2n^2 + 1}$ et $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{2n^2 + 1} = +\infty$

donc C_2 n'est pas borné de $\mathbb{R}^3$.

D'où C_2 n'est pas un compact de $\mathbb{R}^3$.

Autre méthode

Soit A un ensemble quelconque.

A est borné $\Leftrightarrow \exists x_0 \in E, \exists\, r > 0 \text{ tel que } A \subset B(x_0, r)$

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in E, \exists\, r > 0 \text{ tel que } \forall y \in A, d(x_0, y) < r$

A n'est pas borné $\Leftrightarrow \forall x_0 \in E, \forall\, r > 0 \text{ tel que } \exists (y_n) \in A, d(x_0, y) \geq r$

Le caractère quelconque de x_0 nous permet de prendre $x_0 = 0$ et ça marche lorsque A n'est pas borné.

EXERCICE IV

1) Montrons que F est $f$ermé dans (X, d_2) ssi $\bar{F}^{d_2} = F$.

Montrons $\bar{F}^{d_1} = F$

D'après le cours, $F \subset \bar{F}^{d_1}$.

Soit $x \in \bar{F}^{d_1}$,$\exists une\ suite\ (x_n)_n$d'éléments de F telle que $\lim_{n\to+\infty} d_1(x_n, x) = 0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} d_2(x_n, x) = 0$.(car il y a convergence vers la même limite).

Donc $x \in \bar{F}^{d_2} = F$; par suite, $\bar{F}^{d_1} \subset F$.

Ainsi $\bar{F}^{d_1} = F$.

D'où F est $f$ermé dans (X, d_2) ssi $\bar{F}^{d_2} = F$.

2) Montrons (X, d_2) est compact.

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X.

Comme (X, d_1) est compact alors $\exists\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $x_{\varphi(n)} \overset{d_1}{\to} a$.

Par hypothèse, $x_{\varphi(n)} \overset{d_2}{\to} a$. Donc (X, d_2) est compact.

3) Montrons que F $f$ermé dans $(X, d_1) \Rightarrow F$ fermé dans (X, d_2).

Supposons F $f$ermé dans (X, d_1) et montrons que F fermé dans (X, d_2).

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de F.

Montrons que si $x_n \longrightarrow \alpha$ alors $\alpha \in F$

F est compact donc $\exists\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $x_{\varphi(n)} \overset{d_1}{\to} \beta \in F$.

Alors $x_{\varphi(n)} \overset{d_2}{\to} \beta$. Il vient que $\alpha = \beta$. (unicité de la limite).

D'où F $f$ermé dans $(X, d_1) \Rightarrow F$ fermé dans (X, d_2).

<u>EXERCICE</u> V

1) soit A une partie connexe de X. Montrons toute parie B de X véri$f$iant A$\subset B \subset \bar{A}$ est connexe.

Soit $f: B \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue.

Comme A $\subset$ B alors $f_{/A}$ est continue.

Par conséquent $\exists\alpha \in \{0,1\}$ tel que $\forall x \in A, f(x) = \alpha$ (car A est connexe).

Soit b $\in B$ alors b $\in \bar{A}$ (car $B \subset \bar{A}$).

Par conséquent $\exists$ une suite (a_n) d'éléments de A tel que $\lim_{n\to+\infty} a_n = b$.

f est continue, alors $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) = f(b)$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) = \alpha$ donc $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \alpha = f(b)$.

Ainsi f est continue sur B.

On en déduit que B est connexe.

2) Montrons que si B_1 et B_2 sont deux parties connexes de X telles que $\overline{B_1} \cap B_2 \neq \emptyset$ alors $B_1 \cup B_2$ est connexe.

Soit $f: B_1 \cup B_2 \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue.

$f_{/B_1} et\ f_{/B_2}$ sont continues alors $\exists \alpha, \beta \in \{0,1\}$ tel que $f_{/B_1} = \alpha\ et\ f_{/B_2} = \beta$.

$\forall x \in B_1, f(x) = \alpha\ ; \forall y \in B_2, f(y) = \beta$ (car B_1 et B_2 sont connexes).

Soit b $\in \overline{B_1} \cap B_2$ alors b $\in B_2$. Par suite $f(b) = \beta$.

Comme b $\in \overline{B_1}$ alors $\exists$ une suite (b_n) d'éléments de $\overline{B_1}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$.

Etant donné que f est continue sur $B_1 \cup B_2$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right) = f(b)$

Or $f(b_n) = \alpha\ \forall n \in \mathbb{N}$, Donc $\alpha = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(b) = \beta$.

Ainsi $\forall x \in B_1 \cup B_2, f(x) = \alpha$.

D'où $B_1 \cup B_2$ est connexe.

EXERCICE VI

Montrons qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 0$.

Supposons que $f(a) < f(b)$

Comme $[f(a), f(b)] \subset f(E)$ et $f(a).f(b) \leq 0$ alors $0 \in [f(a), f(b)]$.

Donc $0 \in f(E)$

Par conséquent, il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 0$.

EXERCICE VII

1) Montrons que l'application f est $f$ermée.

Soit A un $f$ermé de E et montrons que f(A) est encore un $f$ermé de E.

Soit (y_n) une suite de f(A) qui converge vers y $\in$ E. Il s'agit de prouver que y est dans f(A).

Il existe une suite (a_n) de A telle que $(y_n) = f(a_n)$, pour tout n.

Pour n et m dans N, on a : $\alpha\|a_n - a_m\| \leq \|f(a_n) - f(a_m)\| = \|y_n - y_m\|$.

La suite (y_n) étant convergente est de Cauchy et l'inégalité ci-dessus montre qu'il en ait de même de la suite (a_n).
Comme E est complet, la suite (a_n) converge vers un élément a qui est forcément dans A, car celui-ci est un fermé de E. Par continuité de f, la suite (y_n) converge vers $f(a)$
Par suite $y = f(a) \in f(A)$.

D'où l'application f est fermée.

2-a) Montrons que f est homéomorphisme.

Montrons f est injective

L'application f est injective. En effet, si $f(x) = f(y)$, on aura $0 \geq \alpha\|x - y\|$ et par suite $x = y$.

Montrons que f est surjective, ou encore que $f(E) = E$.

L'application f étant à la fois ouverte et fermée, $f(E)$ est à la fois un ouvert et un fermé non vide du connexe E. Il en résulte que $f(E) = E$.

Ainsi, f est une bijection de E sur E.

Montrons que f^{-1} est continue.

Soit A un fermé de E.

On a $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ est un fermé de E, il s'ensuit que f^{-1} est continue.

D'où f est homéomorphisme.

2-b) montrons que si $\alpha > 1$, alors f admet un unique point fixe dans E.
On a pour tous $x, y \in E$, $\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x - y\|$
si bien que, si $\alpha > 1$, alors f-1 est une application contractante de l'espace de Banach E dans lui-même.
Donc f^{-1} admet un unique point fixe dans E. Celui-ci est encore l'unique point fixe de f.

EXERCICE VIII

Soit I un intervalle de R. Soit $f : I \to \{0, 1\}$ une fonction continue.

Montrons par l'absurde qu'elle est constante.
Supposons qu'il existe a et b dans I tels que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$.
Quitte à remplacer f par $1 - f$, on peut supposer que $a < b$.
L'ensemble $A = \{t \in [a, b] \mid f(t) = 0\}$ est un fermé non vide de R majoré, donc il admet une borne supérieure $t_0 \in A$, i.e $f(t_0) = 0$.

Puisque f est continue et à valeurs dans $\{0, 1\}$, l'ensemble A est aussi un ouvert de [a, b]. Il existe alors $t_1 \in$ A tel que $t_0 < t_1 <$ b. Cela contredit le $f$ait que t_0 est la borne supérieure de A.

Réciproquement, soit I un connexe non vide de $\mathbb{R}$.

Montrons que I est un intervalle.

Soient a et b, a < b, deux points de I et c $\in]$a, b[. On doit montrer que c appartient à I.

Supposons le contraire et posons

$$I_1 = I \cap]-\infty, c[\text{ et } I_1 = I \cap]c, +\infty[$$

Il est clair que I_1 et I_2 constituent une partition de I en deux ouverts de I.

Cela contredit le $f$ait que I est connexe.

D'où les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

EXERCICE IX

1) énonçons et démontrons le théorème concernant l'image d'un connexe par une application continue.

Théorème : Soient E et F deux espaces métriques et f : E → F une application continue. Alors pour toute partie connexe A de E, l'image $f(A)$ est une partie connexe de F.

Preuve : Supposons que f : E → F une application continue.

Soit g : f(A) → $\{0, 1\}$ une application continue. On doit montrer qu'elle est constante.

L'application g ∘ f :A → $\{0, 1\}$ est continue sur le connexe A, donc elle est constante sur A.

Cela implique que g est constante sur f(A).

D'où f(A) est une partie connexe de F.

2) montrons que $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

Soit f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dé$f$inie par

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ étant connexe, on en déduit que $f(\mathbb{R}) = S$ est connexe.

EXERCICE X

1) Montrons que si le sous-espace métrique (F, d) est complet, alors F est un $f$ermé de E.

Soit (x_n) une suite d'éléments de F qui converge dans E.

La suite (x_n) est donc de Cauchy dans E, donc aussi dans F . Celui-ci étant par hypothèse complet, on en déduit que (x_n) converge vers un élément de F . Ainsi F est un fermé de E.

2) Montrons que si E est complet et si F est fermé dans E, alors F est complet.
Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (F, d). Elle est de Cauchy dans (E, d) qui est complet, donc elle converge dans E. Mais F est, par hypothèse, un fermé de E, la limite de (x_n) est donc dans F.
Ainsi, (F, d) est complet.

EXERCICE XI

1. Montrons que si K est compact alors le diamètre de K est réalisé c'est-à-dire

$$\exists (x, y) \in K \times K \text{ tels que } d(x, y) = diam(K).$$

Le théorème de Weierstrass affirme que toute fonction continue $f : X \to \mathrm{R}$ définie dans un espace métrique compact possède minimum et maximum absolu :

$\exists\, a, b \in X$ tels que $f(a) = inf_{x\in X} f(x)$ et $f(b) = sup_{x\in X} f(x)$.

On applique ceci à la fonction d: $K \times K \to \mathbb{R}$, que l'on sait être continue lorsqu'on munit $K \times K$ de la distance produit. On sait également que $K \times K$ est compact. Il existe alors

$b = (x_0, y_0) \in K \times K$ tel que $d(x_0, y_0) = sup_{x,y\in K}\, d(x, y) = \mathrm{diam}(K)$.

2.Montrons que A est fermé dans X.

Soit $x \in A$. Alors il existe $(a_n) \subset$ A telle que $a_n \to x$.

En particulier, (a_n) est de Cauchy, et donc $\exists\ n_0 \in$ N tel que $d(a_{n_0}, a_n) < 1$ pour tout n $\geq n_0$. Cela implique $a_n = a_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$ et donc $x = a$
$n_0 \in$ A. Cela montre que A est fermé.

EXERCICE XII

L'application $u \longmapsto \|u\|_\infty$ est continue de E dans $\mathbb{R}$. L'ensemble S est l'image réciproque de $\{1\}$ par cette application, il est donc fermé dans E.
Soit (f_n) la suite de S définie par

$$f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$$

Supposons que (f_n) contient une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge uniformément vers un élément f de E. Cette sous-suite converge donc simplement vers la fonction f. Mais la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Cela est impossible car f est continue sur [0,1].

Ainsi, la suite (f_n) n'admet pas de sous-suite convergente dans S.

Donc, S n'est pas compact.

EXERCICE XIII

(1) Soit A un fermé de E. Comme E est compact, A est compact. Par suite, f(A) est compact, donc un fermé de F .

(2) Si A est un fermé de E, alors d'après (1), $(f^{-1})^{-1}$ (A) $= f(A)$ est un fermé de F. Cela prouve que l'image réciproque par f^{-1} de tout fermé de E est un fermé de F.

FICHE 4

EXERCICE I

1) Etudions la continuité de la $f$orme linéaire $\psi: f \longmapsto f(1) - f(0)$.

ψ: E$\longrightarrow \mathbb{R}$

$f \longmapsto \psi(f) = f(1) - f(0)$.

Soit $f \in E$

On a $|\psi(f)| = |f(1) - f(0)| \leq |f(1)| + |f(0)|$

De plus on a $\|f\|_\infty \geq |f(1)|$ et $\|f\|_\infty \geq |f(0)|$

Ainsi on a $|\psi(f)| \leq 2\|f\|_\infty$

D'où ψ est continue sur E.

2) Calculons la norme de ψ.

$\forall f \in E, \ |\psi(f)| \leq 2\|f\|_\infty$

En particulier, si $\|f\|_\infty = 1$; on a $sup_{\|f\|_\infty=1}|\psi(f)| \leq 2$

Donc $\|\psi\| \leq 2$.

Soit $f: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2x - 1$ continue et non nul.

On a $\|f\|_\infty = sup_{x\in[0;1]}|f(x)|$

On a $\forall x \in [0;1]$; $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 2$

$\Rightarrow -1 \leq 2x - 1 \leq 1$

$\Rightarrow |2x - 1| \leq 1$

On a $sup_{x\in[0;1]}|f(x)| \leq 1 \quad \Rightarrow \|f\|_\infty \leq 1$

$\psi(f) = f(1) - f(0) = 1 - (-1) = 2$

$|\psi(f)| = 2$

Donc $\|\psi(f)\| = 2$.

EXERCICE II

1) montrons N est une norme.

- Montrons $N(f) \in \mathbb{R}_+$

Soit $f \in X$.

On a $N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)|$ or $x \longmapsto (1+x^2)|f(x)|$ prend les valeurs positives et $x \longmapsto (1+x^2)|f(x)|$ est bornée .

Donc $N(f) \in \mathbb{R}_+$

➢ Montrons que $\forall f \in X, N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Supposons $N(f) = 0$

Soient $f \in X$ *et* $x \in \mathbb{R}$.

On a $0 \leq (1+x^2)|f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)|$

$0 \leq (1+x^2)|f(x)| \leq N(f)$

$N(f) = 0 \Rightarrow (1+x^2)|f(x)| = 0$

comme $x \longmapsto (1+x^2)$ ne s'annule pas, alors $|f(x)| = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ainsi $f = 0$.

Réciproquement, supposons $f = 0$.

On a $\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x^2)|f(x)| = 0$

Donc $\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)| = 0$

D'où $N(f) = 0$.

➢ Montrons que $\forall f \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

soient $f \in X, \lambda \in \mathbb{R}$,

$N(\lambda f) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|\lambda f(x)|$ or $\forall x \in \mathbb{R},\ |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)|$

Donc $N(\lambda f) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|\lambda||f(x)|$

$N(\lambda f) = |\lambda| \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)|$

D'où $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

➢ Montrons que $\forall f, g \in X, N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.

Soient $f, g \in X$

$N(f+g) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)+g(x)|$

$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2) > 0$ alors ,

$$(1+x^2)|f(x)+g(x)| \leq (1+x^2)|f(x)| + (1+x^2)|g(x)|$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x^2)|f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|g(x)|$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|g(x)|$$

D'où $\forall f, g \in X, N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.

Conclusion : N est une norme.

2) montrons que l'application L est une $f$orme linéaire continue et calculons sa norme.

Considérons l'application L : X → $\mathbb{R}$ dé$f$inie par :

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

➢ Montrons L est une $f$orme linéaire.

Montrons que $L(f) \in \mathbb{R}$

$$L(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)f(x)}{1+x^2}dx$$

$$|L(f)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)f(x)}{1+x^2}dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)|f(x)|}{1+x^2}dx$$

$$\leq (1+x^2)|f(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\leq N(f) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\leq N(f)[Arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty}$$

Donc $|L(f)| \leq \pi N(f)$ (1)

D'où $L(f) \in \mathbb{R}$.

La linéarité de L provient de la linéarité de l'intégrale.

D'après (1) L est continue.

➢ Calculons la norme.

$\forall f \in X$, on a $|L(f)| \leq \pi N(f)$

Donc $\|L\| \leq \pi$

Montrons $\|L\| = \pi$

Choisissons $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est bien continue car la $f$onction est rationnelle.

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)|f(x)| = 1$

Donc $\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)| = 1$

D'où $f \in X$.

On a $\|f\|_\infty = 1$ (car $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| = 1$ dans notre car).

On a : $\|L\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \frac{|L(f)|}{\|f\|_\infty} = \sup_{\|f\|_\infty = 1}|L(f)|$.

$$|L(f)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx\right| = |\pi| = \pi$$

Donc : $\|L\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1}|L(f)| = \pi$

D'où $\|L\| = \pi$

EXERCICE III

1) Montrons T_φ est une $f$orme linéaire continue sur E.

Puisque f et φ sont continues sur [0 ; 1] , alors la $f$onction $f.\varphi$ est continue sur [0 ; 1].

Donc $\int_0^1 f(t)\varphi(t)dt$ est élément de $\mathbb{R}$.

D'où T_φ est une application de E dans $\mathbb{R}$.

La linéarité T_φ provient de la linéarité de l'intégrale.

Ainsi T_φ est une $f$orme linéaire.

Montrons que T_φ est continue.

Soit $f \in E$,

$$|T_\varphi(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)dt\right|$$
$$\leq \int_0^1 |f(t)||\varphi(t)|dt$$
$$\leq \|f\|_\infty \int_0^1 |\varphi(t)|dt$$

$|T_\varphi(f)| \leq k_\varphi \|f\|_\infty$ avec $k_\varphi = \int_0^1 |\varphi(t)|dt$

Donc T_φ est une $f$orme linéaire continue.

2) calculons la norme de T_φ.

NB : **lorsqu'on majore et que la valeur de k est la plus $f$ine positive, alors la norme de $T_\varphi = k$.**

$f_\varepsilon(t) = \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|+\varepsilon}$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}_+{}^*$

Remarque: $f_\varepsilon \in E$. Soit $t \in [0;1]$

$$|f_\varepsilon(t)| = \left|\frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|+\varepsilon}\right| = \frac{|\varphi(t)|}{|\varphi(t)|+1} < 1$$

$$\sup_{t\in[0;1]}|\varphi(t)| \leq 1$$

$$\left.\begin{matrix} \|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1 \\ |T_\varphi(f_\varepsilon)| \leq k_\varphi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \|T_\varphi\| \leq k_\varphi$$

$$\left||T_\varphi(f_\varepsilon)| - \int_0^1|\varphi(t)|dt\right| = \left|\frac{\varphi^2(t)}{|\varphi(t)|+\varepsilon} - \int_0^1|\varphi(t)|dt\right|$$
$$= \left|\int_0^1 \frac{|\varphi(t)|^2 - |\varphi(t)|^2 - \varepsilon|\varphi(t)|}{|\varphi(t)|+\varepsilon}dt\right|$$
$$= \left|\int_0^1 \frac{-\varepsilon|\varphi(t)|}{|\varphi(t)|+\varepsilon}dt\right|$$

$$\leq \varepsilon \int_0^1 \frac{|\varphi(t)|}{|\varphi(t)|+\varepsilon} dt$$

$$|T_\varphi(f_\varepsilon) - k_\varphi| \leq \varepsilon$$

Donc $|T_\varphi(f_\varepsilon)| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} k_\varphi$

$|T_\varphi(f_\varepsilon)| \leq \|T_\varphi\| \|f_\varepsilon\|_\infty$

$|T_\varphi(f_\varepsilon)| \leq \|T_\varphi\|$

$\lim_{\varepsilon\to 0}|T_\varphi(f_\varepsilon)| \leq \|T_\varphi\|$

Cela implique que $k_\varphi \leq \|T_\varphi\|$ or $k_\varphi \geq \|T_\varphi\|$

Donc $\|T_\varphi\| = k_\varphi$

EXERCICE IV

1) montrons que Φ est continue sur E avec $|||\Phi||| \leq 1$.

Soit $f \in E$. Alors, par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|\Phi(f)\|_1 = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)dt\right| dx$$

$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\, dt\right) dx$$

$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\, dt\right) dx$$

$\|\Phi(f)\|_1 \leq \|f\|_1$

Donc l'application Φ est continue sur E et $|||\Phi||| \leq 1$.

2) montrons, en utilisant une intégrale par parties, que $\|\Phi(f)\|_1 = \int_0^1 (1-x) f(x)dx$.

Soit $f \in E, avec\ f \geq 0$.

On a par intégrale par parties,

$$\|\Phi(f)\|_1 = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)dt\right) dx$$

$$= \left[-(1-x) \int_0^x f(t)dt\right]_0^1 + \int_0^1 (1-x) f(x)dx$$

$$\|\Phi(f)\|_1 = \int_0^1 (1-x) f(x)dx$$

3) montrons que $|||\Phi||| = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* ; f_n \geq 0$.

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|\, dt = \int_0^{1/n} (n - n^2 x)\, dx$$

$$= \left[nx - \frac{n^2}{2}x^2\right]_0^{1/n}$$

$$\|f_n\|_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\|\Phi(f_n)\|_1 = \int_0^{1/n}(1-x)f_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^{1/n}(1-x)(n-n^2x)\,dx$$

$$= \int_0^{1/n}(n-(n^2+n)x+n^2x^2)\,dx$$

$$= [nx - \left(\frac{n^2+n}{2}\right)x^2 + \frac{x^3}{3}n^2]_0^{1/n}$$

$$= 1 - \frac{n^2+n}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{n^2}{3}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n}$$

$$\|\Phi(f_n)\|_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6n}$$

Quand $\|\Phi(f_n)\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ or $|||\Phi||| > \frac{\|\Phi(f_n)\|}{\|f_n\|_1}$ et $|||\Phi||| \geq \frac{1/2}{1/2} = 1$

Ainsi $|||\Phi||| = 1$.

4) montrons qu'il n'existe pas de $fonction$ f appartenant à E\{0} tel que

$$\|\Phi(f)\|_1 = \|f\|_1.$$

Supposons qu'il existe une $fonction$ f appartenant à E\{0} tel que $\|\Phi(f)\|_1 = \|f\|_1$.

$$\int_0^1|f(x)|\,dx = \int_0^1\left|\int_0^x f(t)dt\right|dx$$

$$\leq \int_0^1\left(\int_0^x|f(t)|\,dt\right)dx$$

$$\leq \int_0^1(1-x)|f(x)|\,dx$$

$\int_0^1|f(x)|\,dx - \int_0^1(1-x)|f(x)|\,dx \leq \int_0^1 x|f(x)|\,dx \leq 0$ ce qui est impossible.

Puisque la $fonction$ $x \longmapsto x|f(x)|$ est continue et positive pour $x \in [0;1]$ et non identiquement nulle sur $[0;1]$ (car f n'est pas $fonction$ nulle).

Par conséquent, il n'existe pas de $fonction$ f appartenant à E\{0} tel que $\|\Phi(f)\|_1 = \|f\|_1$.

5) montrons que l'application N dé$finie$ par

$$N(f) = \|\Phi(f)\|_1 \quad \text{pour tout } f \in E.$$

est une norme sur E.

On sait que $\|.\|_1$ est une norme sur E donc $N(f) \in \mathbb{R}_+$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}, (f, g) \in E^2$.

$$N(\lambda f + g) = \|\Phi(\lambda f + g)\|_1$$

$$= \|\lambda\Phi(f) + \Phi(g)\|_1$$

$$N(\lambda f + g) \leq |\lambda| N(f) + N(g)$$

$$N(f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)dt\right| dx = 0$$

$$N(f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt = 0$$

En dérivant $\int_0^x f(t)dt$, on obtient $f(x) = 0 \;\; \forall x \in [0; 1]$

$N(f) = 0 \Leftrightarrow f$ est une application nulle.

Par conséquent N est une norme sur E.

EXERCICE V

1) montrons que l'application N est une norme sur L.

$$N: f \longmapsto N(f) = |f(0)| + \sup_{\substack{x,y \in [0;1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$

➢ Montrons que $\forall f \in L, \;\; N(f) \in \mathbb{R}_+$.

On sait que f est une application lipschitzienne,

$$\Rightarrow \exists k > 0, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \;, \forall\, x \neq y$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq k, \quad \forall\, x \neq y$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sup_{\substack{x,y \in [0;1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq k$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f(0)| + \sup_{\substack{x,y \in [0;1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq k + |f(0)|$$

$$\Rightarrow 0 \leq N(f) \leq k + |f(0)|$$

Donc $N(f) \in \mathbb{R}_+$.

➢ Montrons que $\forall\, f \in L, N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.

Soit $f \in L$,

$$N(f) = 0 \Rightarrow |f(0)| + \sup_{\substack{x,y \in [0;1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = 0$$

$$\Rightarrow |f(0)| = 0 \text{ et } \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = 0 \qquad \forall\, x \neq y\,; \;\; x, y \in [0; 1]$$

$$\Rightarrow f(0)=0 \text{ et } f(x)-f(y)=0 \quad \forall x \neq y\,;\ x,y \in [0;1]$$

$$\Rightarrow f(0)=0 \text{ et } f(x)=f(y) \quad \forall x \neq y\,;\ x,y \in [0;1]$$

$$\Rightarrow f(0)=0 \text{ et } f(x)=f(0) \quad \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow f(0)=0 \text{ et } f(x)=0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x)=0 \quad \forall x \in [0;1]$$

Donc f est la $f$onction nulle sur $[0; 1]$.

➢ Montrons que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in L,\ N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

$$N(\lambda f) = |(\lambda f)(0)| + \sup_{\substack{x,y\in[0;1]\\ x\neq y}} \frac{|(\lambda f)(x)-(\lambda f)(y)|}{|x-y|}$$

$$= |\lambda f(0)| + \sup_{\substack{x,y\in[0;1]\\ x\neq y}} \frac{|\lambda(f(x)-f(y))|}{|x-y|}$$

$$= |\lambda||f(0)| + \sup_{\substack{x,y\in[0;1]\\ x\neq y}} \frac{|\lambda||f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$

$$= |\lambda| \left(|f(0)| + \sup_{\substack{x,y\in[0;1]\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \right)$$

Donc $N(\lambda f) = |\lambda|\, N(f)$

➢ Montrons que $\forall f,g \in L, N(f+g) \leq N(f)+N(g)$.

$$N(f+g) = |(f+g)(0)| + \sup_{\substack{x,y\in[0;1]\\ x\neq y}} \frac{|(f+g)(x)-(f+g)(y)|}{|x-y|}$$

Soient $x,y \in [0;1]$ tel que $x \neq y$,

$$|(f+g)(x)-(f+g)(y)| = \big|\big(f(x)-f(y)\big)+\big(g(x)-g(y)\big)\big|$$

$$\leq |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)|$$

$$\frac{|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|}{|x-y|} \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}$$

$$\sup_{\substack{x,y\in[0;1]\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + \sup_{\substack{x,y\in[0;1]\\ x\neq y}} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|} \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}$$

De plus $|(f+g)(0)| \leq |f(0)| + |g(0)|$

Donc $\forall f,g \in L, N(f+g) \leq N(f)+N(g)$.

D'où N est une norme sur L.

2) montrons qu'il existe C$\in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|f\|_\infty \leq CN(f)$.

On a $|f(x)| - |f(0)| \leq |f(x)-f(0)|$

On a $\qquad 1 \leq \frac{1}{|x|}, \quad \forall x \neq 0$

En $f$aisant le produit membre à membre, on obtient

$$|f(x)| - |f(0)| \leq \frac{|f(x)-f(0)|}{|x|}, \quad \forall x \neq 0$$

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \frac{|f(x)-f(0)|}{|x|}, \quad \forall x \neq 0$$

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \sup_{\substack{x,y \in [0;1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x)-f(0)|}{|x-y|} \quad (1)$$

(1) reste vraie pour $x = 0$

$$\sup_{x \in [0;1]} |f(x)| < |f(0)| + \sup_{\substack{x,y \in [0;1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x)-f(0)|}{|x-y|}$$

Donc $\|f\|_\infty \leq N(f)$

D'où C = 1.

EXERCICE VI

1) Montrons que l'application $T_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g \longmapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$$ est linéaire et continue.

Soit $g \in E$.

Alors on a la linéarité de T_f est évidente à cause de la linéarité de l'intégrale.

$$\begin{aligned} \left|T_f(g)\right| &= \left|\int_0^1 f(x)g(x)dx\right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x)||g(x)|dx \\ &\leq \sup_{x \in [0;1]} |g(x)| \int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$

$\left|T_f(g)\right| \leq \|g\|_\infty \int_0^1 f(x)dx \qquad$ posons $\quad k = \int_0^1 f(x)dx > 0$

Donc $\left|T_f(g)\right| \leq k\|g\|_\infty$

D'où $\forall g \in E, T_f$ est une application linéaire et continue sur E.

2) calculons la norme de T_f.

On a $\|g\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |g(x)| \leq 1$

Donc $\|T_f\| \leq \int_0^1 f(x)dx$ (1)

Soit g :$[0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto g(x) = 1$

Alors $g \in E$ et $\|g\|_\infty = 1$

$|T_f(\mathrm{g})| = \int_0^1 f(x)dx \leq \|T_f\|$

$|T_f(\mathrm{g})| \leq \|T_f\|$ (2)

En comparant (1) et (2) on a :

$\|T_f\| = \int_0^1 f(x)dx$.

EXERCICE VII

1) montrons que $(l^\infty, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Soit $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suit de Cauchy de $(l^\infty, \|.\|_\infty)$.

Rappel :$\forall k \in \mathbb{N}, a^k = (a_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $\varepsilon > 0$,

$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq q \geq k_0 \Rightarrow \|a^p - a^q\| \leq \varepsilon$

$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq q \geq k_0 \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n^p - a_n^q| \leq \varepsilon$

$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq q \geq k_0 \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, |a_n^p - a_n^q| \leq \varepsilon$

Il vient que pour n $f$ixé, la suite $(a_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, |.|)$ or $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet. Donc $\lim_{k\to+\infty} a_n^k = l_n \in \mathbb{R}$.

En $f$aisant varié n, on obtient une suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$.

Montrons que $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers (l_n) pour $\|.\|_\infty$
Montrons $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n^p - l_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall\, p \in \mathbb{N}, p \geq k_0 \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, |a_n^p - l_n| \leq \varepsilon$

$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall\, p \in \mathbb{N}, p \geq k_0 \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n^p - l_n| \leq \varepsilon$

Donc $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers (l_n) pour $\|.\|_\infty$.

Montrons $\lim_{n\to+\infty} l_n = 0$.

$|l_n| = |l_n + a_n^k - a_n^k|$

$\leq |a_n^k| + |l_n - a_n^k|$

$|l_n| \leq |a_n^k| + \varepsilon \qquad \forall\, k \geq k_0$

$\lim_{n\to+\infty}|l_n| \leq \lim_{n\to+\infty}|a_n^k| + \varepsilon$

$\lim_{n\to+\infty}|l_n| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad$ car $\lim_{n\to+\infty}|a_n^k| = 0$

Donc $\lim_{n\to+\infty} l_n = 0$.

La suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}} = l \in (l^\infty, \|.\|_\infty)$.

$\exists k_0 \in \mathbb{N}, k \geq k_0, \|a^k - l\| \leq \varepsilon$

$\lim\limits_{k\to+\infty} a^k = l$ dans $(l^\infty, \|.\|_\infty)$.

D'où $(l^\infty, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

2) montrons que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente avec $u_n = \frac{x_n}{2^n}$.

$u_n = \frac{x_n}{2^n} \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$|u_n| = \frac{1}{2^n}|x| \leq \frac{1}{2^n}\|x\|$ or $\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{2^n})$ est convergente

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente.

3-a) montrons f est une application linéaire continue.

- montrons f est une application linéaire.

Soient $x, y \in l^\infty$,

$f(x+y) = \sum_{n\geq 0}\frac{x_n+y_n}{2^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{x_n}{2^n} + \sum_{n\geq 0}\frac{y_n}{2^n}$ car chacune des séries est convergente.

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}, x \in l^\infty$,

$f(\lambda x) = \sum_{n\geq 0}\frac{\lambda x_n}{2^n} = \lambda\sum_{n\geq 0}\frac{x_n}{2^n} = \lambda f(x)$

Donc $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

D'où f est une application linéaire.

- montrons f est une application continue.

$|f(x)| = \left|\sum_{n\geq 0}\frac{x_n}{2^n}\right| \leq \sum_{n\geq 0}\left|\frac{x_n}{2^n}\right|$

$$\leq \|x\| \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$$

Donc $|f(x)| \leq 2\|x\|$

f est une application continue.

Conclusion : f est une application linéaire continue.

3-b) Calculons la norme de f.

On a : $|f(x)| \leq 2\|x\|$ donc $\|f\| \leq 2$

Considérons la suite (x_n) dé$f$inie par : $(x_n) = 1$

$x_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a $\|x\| = 1$ et $|f(x)| = 2$

Il vient que $2 \leq \|f\|$

D'où $\|f\| = 2$.

EXERCICE VIII

1.Montrons que $\|.\|_1$ est une norme sur E.

$\forall t \in [0,1], |p(t)| \geq 0$

t$\longmapsto$ $|p(t)|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,1]$. Or $[0,1]$ est compact .

Donc $\exists \mathbb{R}_*^+$ tel que, $\forall t \in [0,1], |p(t)| \leq M$

$$0 \leq sup_{t\in[0,1]}|p(t)| \leq M$$

$-\|p+q\|_1 \leq \|p\|_1 + \|q\|_1$

$-\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda p\|_1 = |\lambda|\|p\|_1$

$-\|p\|_1 = 0 \Leftrightarrow p = 0$

- Si $p = 0$ alors $\forall t \in [0,1]\,, p(t) = 0$
  $$\forall t \in [0,1], |p(t)| = 0$$
  $$sup_{t\in[0,1]}|p(t)| = 0$$
- Montrons que $\|p\|_1 = 0 \Rightarrow p = 0$
  $$\|p\|_1 = 0 \Rightarrow sup_{t\in[0,1]}|p(t)| = 0$$
  $$\Rightarrow \forall t \in [0,1], |p(t)| = 0$$
  $$\Rightarrow \forall t \in [0,1]\,, p(t) = 0$$

P est un polynôme qui admet une infinité de racines donc P= 0

- Montrons que $\|.\|_2$ est une norme.

  (même raisonnement que $\|.\|_1$)

2) Montrons qu'il existe C> 0 tel que $\forall P \in E, \|.\|_1 \leq C\|.\|_2$

$\forall t \in [0,1]$, on a $0 \leq |t| \leq 1$

$$-1 \leq -|t| \leq 0$$

$$e^{-1} \leq e^{-|t|} \leq 1$$

$\forall t \in [0,1], \quad |P(t)|e^{-1} \leq |P(t)|e^{-|t|}$

$\forall t \in [0,1], \quad |P(t)| \leq e|P(t)|e^{-|t|}$

$\forall t \in \mathbb{R}, |P(t)|e^{-|t|} \leq sup_{t\in\mathbb{R}}|P(t)|e^{-|t|}$

En particulier, $\forall t \in [0,1], \; |P(t)|e^{-|t|} \leq sup_{t\in\mathbb{R}}|P(t)|e^{-|t|}$

$\forall t \in [0,1], \quad |P(t)| \leq e \, sup_{t\in\mathbb{R}}|P(t)|e^{-|t|}$

$sup_{t\in\mathbb{R}}|P(t)|e^{-|t|} \leq e \, sup_{t\in\mathbb{R}}|P(t)|e^{-|t|}$

Donc $\|P\|_1 \leq e \, \|P\|_2$

3) Calculons $\|P\|_1$ et $\|P\|_2$ pour $\mathrm{P}(t) = t^n$

$\|P\|_1 = sup_{t\in[0,1]}|t^n|$

$\|P\|_1 = 1$

$\|P\|_2 = sup_{t\in\mathbb{R}}(|t^n|e^{-|t|})$

Posons $f(t) = |t^n|e^{-|t|}$

REMARQUE : $\forall t \in \mathbb{R}, f(-t) = f(t)$ donc f est paire.

$$f:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto e^{-t}t^n$$

$f(t) = e^{-t}e^{nlnt} = e^{nlnt-t}$

$f'(t) = (-1 + \frac{n}{t}) \, e^{nlnt-t}$

$= (\frac{n-t}{t}) \, e^{nlnt-t}$

$\forall n \in \mathbb{N},$

t	0		n		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(n)$	$\searrow$	0

$f(n) = e^{n(\ln n - 1)}$

$\|P\|_2 = e^{n(\ln n - 1)}$

$\forall n \in \mathbb{N}, e^{n(\ln n - 1)} \leq C.$

Université Nangui Abrogoua

Licence 3 Maths

Année : 2015 / 2016

Examen de Topologie ($1^{ère}$ session)

Durée : 3 h 00

(Sans documents ni calculatrices)

Exercice 1 (3 points)

1. Soit X un ensemble et τ un ensemble de parties de X.
   Rappeler les axiomes qui font de τ une topologie.
2. Montrer que dans un espace métrique, toute suite de Cauchy est bornée.

Exercice 2 (5 points)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $P \in E$, on pose

$$\|P\|_1 = \sup_{t\in[0,\,1]} |P(t)| \quad \text{et} \; \|P\|_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} (e^{-|t|}|P(t)|)$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes sur E.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $P \in E$, $\|P\|_1 \leq C\|P\|_2$.
3. Soit $n \geq 0$ un entier.
   Calculer $\|P\|_1$ et $\|P\|_2$ pour $P(t) = t^n$.
   Que peut-on dire sur l'équivalence des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$?

Exercice 3 (4 points)

Soit $a \in]0, +\infty[$. On considère l'espace vectoriel $(E, \|\cdot\|_\infty)$ formé des fonctions continues sur l'intervalle $[0, a]$ à valeurs réelles, muni de la norme de la convergence uniforme.
Soit $T : E \longrightarrow E$ qui à $f \in E$ associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x f(s)ds, \qquad \forall x \in [0,\, a].$$

1. Montrer que l'application T est lipschitzienne pour un certain rapport k.
   Quelle est la valeur minimale possible pour k?
2. On suppose $a \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe un élément unique $f \in E$ vérifiant la relation $T(f) = f$.

Exercice 4 (4 points)

On note l^∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. On munit l^∞ de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|x\| = \sup\{|x_n| \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

bornée : $|a_n| \leq |x_n^p - a_n| + |x_n^p|$
$\leq \varepsilon + |x_n^{N+\varepsilon}|$

Démontrer que $(l^\infty, \|\cdot\|)$ est complet.

Exercice 5 (4 points)

Soit (X, d) un espace métrique. On rappelle que $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue.
Soit $K \subset X$, $K \neq \emptyset$. Le diamètre de K noté $diam(K)$ est définie par

$$diam(K) = \sup\{d(x, y) \ : \ (x, y) \in K \times K\}.$$

1. Montrer que si K est compact alors le diamètre de K est réalisé c'est-à-dire

$$\exists (x, y) \in K \times K \quad \text{tels que} \quad d(x, y) = diam(K).$$

2. Soit $A \subset X$ un ensemble non vide. On suppose que

$$\forall (a, a') \in A \times A \quad \text{avec } a \neq a' \quad \text{on a} \quad d(a, a') \geq 1.$$

Montrer que A est fermé dans X.