Université Côte d'Azur | Année 2023/2024

M1 MF-MPA / IM Semestre 2

Optimisation et Éléments Finis

Corrigé du Soutien n°5

Annale de l'examen 2022 partie éléments finis

Partie. II : Approximation par Éléments Finis

Exercice1. Soient $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto (x+1)^2$ une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On considère le problème suivant $(\mathscr{P}_\alpha)$: trouver u dans $\mathscr{C}^2[0,1]$ telle que :

$$
\begin{aligned}
-(\alpha u')' &= 1, \text{ sur }]0,1[, &(1)\\
u(0) &= 0, &(2)\\
u(1) &= 0. &(3)
\end{aligned}
$$

La notation $(\alpha u')'$ est à comprendre comme la fonction $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\alpha\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)$. Attention est une fonction !

1. **Montrer que $u : x \mapsto -\ln(x+1) - \dfrac{\ln(4)}{x+1} + \ln(4)$ est solution de cette équation.**

   - La fonction $u : x \mapsto -\ln(x+1) - \dfrac{\ln(4)}{x+1} + \ln(4)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ de dérivée :

   $$u' : x \mapsto -\frac{1}{x+1} + \frac{\ln(4)}{(x+1)^2}.$$

   La fonction $\alpha u' : x \mapsto (\alpha u')(x) = -(x+1) - \ln(4)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ de dérivée :

   $$u' : x \mapsto -1,$$

   donc u vérifie (1).

   - La fonction $u : x \mapsto -\ln(x+1) - \dfrac{\ln(4)}{x+1} + \ln(4)$ satisfait :

   $$
   \begin{aligned}
   &u(0) = -\ln(1) - \ln(4) + \ln(4) = 0,\\
   &u(1) = -\ln(2) - \frac{\ln(4)}{2} + \ln(4) = -\ln(2) + \frac{\ln(4)}{2} = -\ln(2) + \ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = -\ln(2) + \ln(2) = 0.
   \end{aligned}
   $$

   Finalement, u est solution de (1), (2) et (3).

(c). **En s'inspirant de la stratégie proposée en Cours et TD pour obtenir une formulation variationnelle, montrer que u est solution de du problème $(\mathscr{P}_\alpha)$ alors u est solution de du problème $(\mathscr{F}_{var})$:**

   Trouver u dans $\mathscr{V} = \left\{v \in \mathscr{C}^2([0,1]),\ v(0) = v(1) = 0\right\}$ telle que : $a_0(u,v) = \ell_0(v)$, pour tout v dans $\mathscr{V}$, avec

   où

   $$a_0 : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathbb{R},\ (w_1,w_2) \mapsto \int_0^1 \alpha(x) w_1'(s) w_2'(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \ell_0 : \mathscr{V} \to \mathbb{R},\ w \mapsto \int_0^1 w(s)\,\mathrm{d}s$$

   Soit v dans $\mathscr{V}$. On multiplie l'équation (1) par v et on intégre le résultat sur $[0,1]$. On obtient :

   $$-\int_0^1 (\alpha u')'(x) v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Une intégration par partie de $\displaystyle\int_0^1 (\alpha u')'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ conduit à :

$$\int_0^1 (\alpha u')'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = (\alpha(1)u'(1)v(1) - \alpha(0)u'(0)v(0)) - \int_0^1 \alpha(x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \alpha(x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x,$$

car : $v(0) = v(1) = 0$. Ainsi,

$$\int_0^1 \alpha(x)u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x.$$

La formulation variationnelle $(\mathscr{F}_\alpha)$ du problème $(\mathscr{P})$ est ainsi :

$$\text{Trouver } u \text{ dans } \mathscr{V} \text{ telle que :} \quad a_0(u,v) = \ell_0(v), \quad \forall v \in \mathscr{V},$$

où

$$\mathscr{V} = \left\{v \in \mathscr{C}^2([0,1]) \quad v(0) = v(1) = 0\right\},$$

et

$$a_0 : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathbb{R},\ (w_1,w_2) \mapsto a_0(w_1,w_2) = \int_0^1 \alpha(x)w_1'(x)w_2'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \ell_0 : \mathscr{V} \to \mathbb{R},\ w \mapsto \ell_0(w) = \int_0^1 w(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Montrer qu'il existe au plus une solution au problème $(\mathscr{P})$.

Soient u_1 et u_2 deux solutions au problème $(\mathscr{P})$. Posons : $U = u_1 - u_2$. La fonction U est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et

$$U(0) = u_1(0) - u_2(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad U(1) = u_1(1) - u_2(1) = 0,$$

c'est-à-dire U appartient à $\mathscr{V}$. Alors,

$$\int_0^1 \alpha(x)u_1'(x)U'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 U(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^1 \alpha(x)u_2'(x)U'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 U(x)\,\mathrm{d}x$$

et par soustraction,

$$\int_0^1 \alpha(x)(u_1' - u_2')(x)U'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^1 \alpha(x)U'(x)U'(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

ou encore

$$\int_0^1 \left(\sqrt{\alpha(x)}U'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

La fonction $\sqrt{\alpha}U'$ est ainsi 0 dans $L^2(0,1)$, donc $\sqrt{\alpha}U' = 0$ p.p., ce qui implique $U = 0$ p.p. car $\sqrt{\alpha(x)} > 0$. Comme U' est continue sur $[0,1]$, $U' = 0$ sur tout $[0,1]$, d'où : $U(x) = U(0) = U(1) = 0$ pour tout x de $[0,1]$. Par conséquent, il existe au plus une solution au problème $(\mathscr{P})$.

Conclusion. D'après 1., l'unique solution de $(\mathscr{P})$ est ainsi la fonction $u : x \mapsto -\ln(x+1) - \dfrac{\ln(4)}{x+1} + \ln(4)$.

On admettra l'existence d'un espace $\widetilde{\mathscr{V}}$, espace de Hilbert, sur lequel a_0 et ℓ_0 sont bien définis. On considère une subdivision uniforme $(x_i)_{i\in[\![0,N+1]\!]}$ de $[0,1]$ de pas $h > 0$. On note pour tout i de $[\![0,N+1]\!]$, $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ et $\mathscr{V}_h$ l'espace suivant :

$$\mathscr{V}_h = \left\{v \in \mathscr{C}^0([0,1]), \quad \forall i \in [\![0,N+1]\!],\ v|_{I_i} \in \mathbb{P}_1,\ v(0) = v(1) = 0\right\}.$$

On admettra que : $\mathscr{V}_h \subset \widehat{\mathscr{V}}$.

4. Écrire la formulation variationnelle discrète.

$$\text{Trouver } u_h \text{ dans } \mathscr{V}_h \text{ telle que :} \quad a(u_h,v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathscr{V}_h.$$

5. **Montrer que trouver u_h dans $\mathscr{V}_h$ solution du problème discret revient à résoudre un système linéaire.**

D'après le cours $\mathscr{V}_h$ est un espace vectoriel de dimension N. Soient $(\varphi_j)_{j\in[\![1,N]\!]}$ une base de $\mathscr{V}_h$ et des nombres réels $(u_h^j)_{j\in[\![1,N]\!]}$ tels : $u_h = \sum_{j=1}^{n} u_h^j \varphi_j$. La formulation variationnelle discrète est alors équivalente à :

$$\text{Trouver } (u_h^j)_{j\in[\![1,N]\!]} \text{ dans } \mathbb{R}^N \text{ tels que : } \quad a\left(\sum_{j=1}^{n} u_h^j\varphi_j, \varphi_i\right) = \ell\left(\varphi_i\right), \quad \text{pour tout } i \text{ de } [\![1,N]\!]$$

ou encore

$$\text{Trouver } (u_h^j)_{j\in[\![1,N]\!]} \text{ dans } \mathbb{R}^N \text{ tels que : } \quad \sum_{j=1}^{n} a\left(\varphi_j, \varphi_i\right)\, u_h^j = \ell\left(\varphi_i\right), \quad \text{pour tout } i \text{ de } [\![1,N]\!]$$

ou bien encore au système linéaire

$$A_h U_h = L_h$$

avec

$$A_h = (a_{ij})_{1\le i,j\le N} \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R}), \qquad U_h = \begin{pmatrix} u_h^1 \\ \vdots \\ u_h^j \\ \vdots \\ u_h^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \qquad L_h = \begin{pmatrix} \ell(\varphi_1) \\ \vdots \\ \ell(\varphi_i) \\ \vdots \\ \ell(\varphi_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N,$$

où : $a_{ij} = a\left(\varphi_j,\, \varphi_i\right)$.

6. **Montrer que la matrice associée au système linéaire obtenue est inversible.**

Soit U_h dans $\mathbb{R}^N$. On va montrer que

$$A_h U_h = 0 \quad \text{implique} \quad U_h = 0.$$

• Soient $U_h = \begin{pmatrix} u_h^1 \\ \vdots \\ u_h^j \\ \vdots \\ u_h^N \end{pmatrix}$ et $V_h = \begin{pmatrix} v_h^1 \\ \vdots \\ v_h^i \\ \vdots \\ v_h^N \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^N$. On pose $u_h = \sum_{j=1} u_h^j \varphi_j$ et $v_h = \sum_{j=1} v_h^j \varphi_j$. Les fonctions u_h et v_h appartiennent à $\mathscr{V}_h$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle A_h U_h, V_h\rangle = {}^t(A_h U_h)\, V_h &= \sum_{i=1} \left({}^t(A_h U_h)\right)_i (V_h)_i = \sum_{i=1} \left(\sum_{j=1} (A_h)_{ij}\, (U_h)_j\right) (V_h)_i \\
&= \sum_{i=1} \left(\sum_{j=1} a(\varphi_j, \varphi_i)\, u_h^j\right) v_h^i = \sum_{i=1} a\!\left(\sum_{j=1} u_h^j \varphi_j, \varphi_i\right) v_h^i \\
&= a\!\left(\sum_{j=1} u_h^j \varphi_j, \sum_{i=1} v_h^i \varphi_i\right) = a(u_h, v_h).
\end{aligned}$$

• Soit U_h dans $\mathbb{R}^N$ tel que :

$$A_h U_h = 0$$

Le produit scalaire par U_h de cette relation conduit à

$$\langle A_h U_h, U_h\rangle = 0$$

ou encore

$$0 = \langle A_h U_h, U_h\rangle = a(u_h, u_h) = \int_0^1 \alpha(x)(u_h'(x))^2\, \mathrm{d}x.$$

D'après ce qui a été fait à la question **3.**, on obtient : $u_h = 0$, c'est-à-dire :

$$U_h = 0.$$

Par conséquent, la matrice A_h est inversible.

On choisit maintenant pour base de $\mathscr{V}_h$ la base des éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange (comme dans le cours).

7. Rappeler l'expression des fonctions de base sur I_i pour i dans $\{0, \cdots, N\}$.

Soit i dans $\{0, \cdots, N\}$. Pour tout j de $\{1, \cdots, N\}$, pour tout x dans I_i, l'expression des fonctions de base φ_j sur I_i est donnée par :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } \ j = i, \\ \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } \ j = i+1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{h}(x - x_i) & \text{si } \ j = i, \\ \dfrac{1}{h}(x - x_i) & \text{si } \ j = i+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

car

$$\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} = \frac{(x_{i+1} - x_i) - (x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} = 1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = 1 - \frac{1}{h}(x - x_i).$$

8. Expliciter et calculer numériquement les valeurs des termes de la matrice du système.

• La matrice A_h est symétrique car pour tous i et j de $[\![1, N]\!]$,

$$(A_h)_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 \alpha(x)\varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \alpha(x)\varphi_i'(x)\,\varphi_j'(x)\,\mathrm{d}x = a(\varphi_j, \varphi_i) = (A_h)_{ji}.$$

• Pour tout i de $[\![1, N]\!]$, le support de la fonction φ_i est dans $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, donc $a(\varphi_j, \varphi_i) = 0$ pour tous i et j dans $[\![1, N]\!]$ tels que $|i - j| \geq 2$. On a ainsi calculer les termes $(a(\varphi_i, \varphi_i))_{i\in[\![1,N]\!]}$, $(a(\varphi_{i+1}, \varphi_i))_{i\in[\![1,N-1]\!]}$ et $(a(\varphi_{i-1}, \varphi_i))_{i\in[\![2,N]\!]}$. Par symétrie de la matrice A, les termes à calculer sont finalement $(a(\varphi_i, \varphi_i))_{i\in[\![1,N]\!]}$, $(a(\varphi_{i+1}, \varphi_i))_{i\in[\![1,N-1]\!]}$ puisque

$$a(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = a(\varphi_i, \varphi_{i-1}), \ \text{ pour tout } i \text{ de } [\![2, N]\!],$$

ou encore

$$a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = a(\varphi_{i+1}, \varphi_i), \ \text{ pour tout } i \text{ de } [\![1, N-1]\!].$$

• L'expression des fonctions de base élémentaires des éléments finis sur l'intervalle de référence $[0, 1]$ est donnée par :

$$\widehat{\varphi_0}(\xi) = 1 - \xi, \quad \widehat{\varphi_1}(\xi) = \xi, \ \ \forall \xi \in [0, 1].$$

• Pour i dans $[\![1, N-1]\!]$, on introduit le changement de variable affine bijective

$$F_i : [0, 1] \to I_i = [x_i, x_{i+1}], \quad \xi \mapsto x = x_i + (x_{i+1} - x_i)\xi = x_i + h\xi$$

qui transforme l'intervalle de référence $[0, 1]$ en la maille $[x_i, x_{i+1}]$, de jacobien $F_i'(\xi) = h$ pour tout ξ de $[0, 1]$. L'application récriproque de F_i est donc :

$$F_i^{-1} : I_i = [x_i, x_{i+1}] \to [0, 1], \quad x \mapsto \xi = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{h},$$

transforme la maille $[x_i, x_{i+1}]$ en l'intervalle de référence $[0, 1]$, de jacobien $\left(F_i^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{h}$ pour tout x de $[x_i, x_{i+1}]$.

La fonction de base φ_i de support $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ s'exprime comme :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \widehat{\varphi_1} \circ F_{i-1}^{-1}(x) & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \widehat{\varphi_0} \circ F_i^{-1}(x) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \varphi_i'(x) &= \begin{cases} \left(\widehat{\varphi_1}' \circ F_{i-1}^{-1}\right)(x) \; \left(F_{i-1}^{-1}\right)'(x) & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \left(\widehat{\varphi_0}' \circ F_i^{-1}\right)(x) \; \left(F_i^{-1}\right)'(x) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -\frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}]. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

• Pour i dans $[\![1, N]\!]$, on a :

$$a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_0^1 \alpha(x) \left(\varphi_i'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \alpha \left(\varphi_i'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \alpha(x) \left(\varphi_i'(x)\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha(x) \left(\varphi_i'(x)\right)^2 \mathrm{d}x.$$

•• Par substitution et changement de variable $\xi = F_{i-1}^{-1}(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \alpha(x) \left(\varphi_i'(x)\right)^2 \mathrm{d}x &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \alpha(x) \left(\left(\widehat{\varphi_1}' \circ F_{i-1}^{-1}\right)(x) \; \left(F_{i-1}^{-1}\right)'(x) \right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \alpha(x) \left(\left(\widehat{\varphi_1}' \circ F_{i-1}^{-1}\right)(x) \right)^2 \; \left(F_{i-1}^{-1}\right)'(x) \; \left(F_{i-1}^{-1}\right)'(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \alpha\left(F_{i-1}(\xi)\right) \left(\widehat{\varphi_1}'(\xi)\right)^2 \frac{1}{h} \, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^1 \left(1 + F_{i-1}(\xi)\right)^2 \left(\widehat{\varphi_1}'(\xi)\right)^2 \frac{1}{h} \, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^1 \left(1 + x_{i-1} + h\xi\right)^2 \left(\widehat{\varphi_1}'(\xi)\right)^2 \frac{1}{h} \, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^1 \left(1 + x_{i-1} + h\xi\right)^2 \, 1^2 \, \frac{1}{h} \, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^1 \left(1 + x_{i-1} + h\xi\right)^2 \frac{1}{h} \, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 \left(1 + x_{i-1} + h\xi\right)^2 \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Le changement de variable $\zeta \mapsto \xi = \dfrac{\zeta - (1 + x_{i-1})}{h}$ de jacobien $\dfrac{1}{h}$ donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(1 + x_{i-1} + h\xi\right)^2 \mathrm{d}\xi = \frac{1}{h} \int_{1+x_{i-1}}^{1+x_{i-1}+h} \zeta^2 \, \mathrm{d}\zeta &= \frac{1}{3h} \left((1 + x_{i-1} + h)^3 - (1 + x_{i-1})^3 \right) \\ &= \frac{1}{3h} \left((1 + x_i)^3 - (1 + x_i - h)^3 \right), \end{aligned}$$

d'où :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \alpha(x) \left(\varphi_i'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3h^2} \left((1 + x_i)^3 - (1 + x_i - h)^3 \right).$$

•• De même par substitution et changement de variable $\xi = F_i^{-1}(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha(x)\left(\varphi_i'(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha(x)\left(\left(\widehat{\varphi_0}' \circ F_i^{-1}\right)(x)\ \left(F_i^{-1}\right)'(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha(x)\left(\left(\widehat{\varphi_0}' \circ F_i^{-1}\right)(x)\right)^2\ \left(F_i^{-1}\right)'(x)\ \left(F_i^{-1}\right)'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \alpha\left(F_i(\xi)\right)\left(\widehat{\varphi_0}'(\xi)\right)^2\ \frac{1}{h}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^1 \left(1+F_i(\xi)\right)^2\left(\widehat{\varphi_0}'(\xi)\right)^2\ \frac{1}{h}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^1 \left(1+x_i+h\xi\right)^2\left(\widehat{\varphi_0}'(\xi)\right)^2\ \frac{1}{h}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^1 \left(1+x_i+h\xi\right)^2\ (-1)^2\,\frac{1}{h}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^1 \left(1+x_i+h\xi\right)^2\ \frac{1}{h}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{h}\int_0^1 \left(1+x_i+h\xi\right)^2\ \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Le changement de variable $\zeta \mapsto \xi = \dfrac{\zeta-(1+x_i)}{h}$ de jacobien $\dfrac{1}{h}$ donne :

$$\int_0^1 \left(1+x_i+h\xi\right)^2\ \mathrm{d}\xi = \frac{1}{h}\int_{1+x_i}^{1+x_i+h} \zeta^2\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{3h}\left(\left(1+x_i+h\right)^3-\left(1+x_i\right)^3\right),$$

d'où :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha(x)\left(\varphi_i'(x)\right)^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3h^2}\left(\left(1+x_i+h\right)^3-\left(1+x_i\right)^3\right).$$

En conséquence, pour tout i de $[\![1,N]\!]$,

$$\begin{aligned}
a(\varphi_i,\varphi_i) &= \frac{1}{3h^2}\left(\left(1+x_i\right)^3-\left(1+x_i-h\right)^3\right) + \frac{1}{3h^2}\left(\left(1+x_i+h\right)^3-\left(1+x_i\right)^3\right). \\
&= \frac{1}{3h^2}\left(\left(1+x_i+h\right)^3-\left(1+x_i-h\right)^3\right).
\end{aligned}$$

• Pour i dans $[\![1,N-1]\!]$, on a :

$$a(\varphi_{i+1},\varphi_i) = \int_0^1 \alpha(x)\varphi_{i+1}'(x)\,\varphi_i'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha(x)\varphi_{i+1}'(x)\,\varphi_i'(x)\,\mathrm{d}x.$$

•• On a par substitution et changement de variable $\xi = F_i^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha(x)\varphi_{i+1}'(x)\,\varphi_i'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha(x)\left(\left(\widehat{\varphi_1}' \circ F_i^{-1}\right)(x)\ \left(F_i^{-1}\right)'(x)\right)\left(\left(\widehat{\varphi_0}' \circ F_i^{-1}\right)(x)\ \left(F_i^{-1}\right)'(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha(x)\left(\left(\widehat{\varphi_1}' \circ F_i^{-1}\right)(x)\right)\ \left(\left(\widehat{\varphi_0}' \circ F_i^{-1}\right)(x)\right)\ \left(F_i^{-1}\right)'(x)\ \left(F_i^{-1}\right)'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \alpha\left(F_i(\xi)\right)\widehat{\varphi_1}'(\xi)\ \widehat{\varphi_0}'(\xi)\ \frac{1}{h}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^1 \left(1+x_i+h\xi\right)^2\widehat{\varphi_1}'(\xi)\ \widehat{\varphi_0}'(\xi)\ \frac{1}{h}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{h}\int_0^1 \left(1+x_i+h\xi\right)^2\ (-1)\times(1)\ \mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{1}{h}\int_0^1 \left(1+x_i+h\xi\right)^2\ \mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{1}{3h^2}\left(\left(1+x_i+h\right)^3-\left(1+x_i\right)^3\right),
\end{aligned}$$

d'après ce qui a été fait ci-dessus.
Par conséquent, pour tout i dans $[\![1, N-1]\!]$:

$$a(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = -\frac{1}{3h^2}\left((1+x_i+h)^3 - (1+x_i)^3\right).$$

Finalement, par symétrie, pour tout i de $[\![2, N]\!]$:

$$a(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = -\frac{1}{3h^2}\left((1+x_{i-1}+h)^3 - (1+x_{i-1})^3\right) = -\frac{1}{3h^2}\left((1+x_i)^3 - (1+x_i-h)^3\right).$$

9. On souhaite estimer l'erreur entre u et u_h dans la norme considérée sur $\widetilde{\mathscr{V}}$, que l'on notera $\|\cdot\|$. Quels sont les ingrédients de la preuve ?

Il s'agit de la coercivité et continuité de la forme bilinéaire a.

10. Donner les étapes de construction d'un code de calcul pour résoudre numériquement le problème par une méthode d'éléments finis $\mathbb{P}_1$.

Elles sont les suivantes :

- maillage ;
- assemblage de la matrice et du second membre du système linéaire formés à l'aide des fonctions de base de $\mathbb{P}_1$;
- résolution du système linéaire.