DS 8 CORRIGÉ VERSION B

X-ENS PSI - 2012

Préambule.

1. Par définition des limites, la propriété de corecivité s'écrit
$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists B \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$$
Utilisons cette propriété avec $A = |f(0)| + 1$. On trouve alors un réel M qui convient.
2. La boule fermée de centre l'origine de rayon M , $\bar{B_M} = \{x \in \mathbb{R}^n / \ \|x\| \leq M\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ (elle est évidemment bornée et fermée comme image réciproque du segment $[0, M]$ par la fonction continue car 1-lipschitzienne $x \mapsto \|x\|$) dans un espace de dimension finie. La fonction continue f est bornée et atteint ses bornes (et en particulier son minimum) sur ce compact. Il existe donc $x^* \in B_M$ tel que $\forall x \in B_M, \ f(x^*) \leq f(x)$.

   D'après la première question, à l'extérieur de ce compact, lorsque $\|x\| > M$, $f(x) \geq |f(0)| + 1 > f(0) \geq f(x^*)$. On a donc
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ f(x^*) \leq f(x)$$
ce qui signifie que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ et qu'il est atteint.
3. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ étant un ouvert, et f étant de classe C^1 sur cet ouvert, les extrema sont à prendre parmi les points critiques, autrement dit
$$\nabla f(x^*) = 0$$

Partie 1.

4. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|< b \, , x >| \leq \|x\| \|b\|$. On a donc
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ g(x) \geq \frac{1}{2} < Ax \, , x > - < b \, , x > \geq \frac{C}{2} \|x\|^2 - \|b\|.\|x\|$$
Comme $C > 0$ et $\|x\| = o\left(\|x\|^2\right)$, le minorant est de limite infinie, et par encadrement, quand $\|x\| \to +\infty$, la fonction g tend vers $+\infty$. La fonction g est bien coercive.
5. La fonction g est combinaison linéaire de deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
La première est la forme linéaire $g_1 : x \mapsto < x \, , b > = b \, {}^t x$ (si l'on confond les vecteurs, écrits en lignes, avec leurs composantes dans la base canonique).
C'est donc une application $\mathcal{C}_1$ dont la différentielle est g_1.
La seconde g_2 est l'application $x \mapsto < Ax \, , x >$ obtenue par composition de $u : x \mapsto (Ax, x)$ linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{2n}$, avec l'application bilinéaire $v : \ (x, y) \mapsto < x \, , y >$, elle aussi $\mathcal{C}_1$. La composée est donc $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}^n$ et par la règle de la chaîne
$$dg_2(x) \, (h) = d_v(u(x) \, (du(x)(h)) = d_v((Ax, x))(Ah, h) = < Ax \, , h > + < Ah \, , x > = 2 < Ax \, , h >$$
puisque A est une matrice symétrique.
La fonction $g = \frac{1}{2} g_2 - g_1$ est donc $\mathcal{C}_1$ et par linéarité du passage à la différentielle, on a, pour tout x réel, et pour tout $h \in \mathbb{R}$
$$dg(x)(h) = \frac{1}{2} dg_2(x) \, (h) - dg_1(x) \, (h) = < Ax \, , h > - < h \, , b > = < h \, , Ax - b >$$

par unicité, ceci signifie que $\nabla g(x) = Ax - b$.

Certains ont souhaité travailler uniquement sur le développement limité. C'est possible puisqu'une fois qu'on a démontré que la fonction était $\mathcal{C}_1$ on peut écrire son développement à l'ordre 1.

Hélas je n'ai pas montré dans le cours que ce développement était unique, et c'est cette propriété qui sert pour en tirer honnêtement le gradient.

Il est faux de dire f admet un DL1 donc (?) f est de classe $\mathcal{C}_1$, car nous avons seulement donné une condition suffisante "*f est de classe $\mathcal{C}_1$ donc elle admet un DL1*. L'étude complète des fonctions qui admettent un DL1, c'est-à-dire l'étude des fonctions *différentiables* ne figure pas à notre programme.

Je n'ai donc pas démontré cette unicité il me semblait que ce n'était plus dans l'esprit du programme, mais à titre d'exercice, montrons le.

Soit $f(a+h) = f(a) + < V_a\,, h > + o(h)$ et $f(a+h) = f(a) + < W_a\,, h > + o(h)$ deux développements en a de f, $\mathcal{C}_1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, à l'ordre 1.

On en tire, par différence, $\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad < W_a - V_a\,, h > + o(h) = 0$.

En particulier, pour $h = te_i$ (t réel, et e_i le i ème vecteur de la base canonique), on a, une fois simplifié par t $\forall t \in \mathbb{R}, \quad < W_a - V_a\,, e_i > + o(1) = 0$ par unicité du développement limité des fonctions numériques de variable réelle ceci donne $< W_a - V_a\,, e_i >= 0$ et comme ceci est vrai pour tout i, le vecteur $W_a - V_a$ est orthogonal à une base de $\mathbb{R}^n$ donc à tout l'espace, et donc il est nul. CQFD.

On a montré à la question 4 que g était coersive, et grâce au préambule, puisqu'elle est continue, elle possède donc un minimum global. Comme elle est, de surcroît de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}^3$, ce minimum global est un point critique (préambule 3). On a donc $Ax^* = b$. Mais A est inversible car si $Ax = 0$ alors $C\|x\|^2 \leq (Ax, x) = 0$ et donc (comme $C > 0$) $\|x\|^2 \leq 0$ et ainsi $x = 0$ (ce qui donne $\ker(A) = \{0\}$).

On a donc $x^* = A^{-1}b$, ce qui fournit l'existence et l'unicité du minimum x^*.

6. Avec les expressions de ∇g et de x^*, on a

$$\begin{aligned} u_{k+1} - x^* &= u_k - \alpha(Au_k - b) - x^* \\ &= (u_k - x^*) - \alpha(Au_k - Ax^*) \\ &= (I_3 - \alpha A)(u_k - x^*) \end{aligned}$$

7. On suppose que $\alpha \in]0, 2/L[$.
   Essayons de comprendre un peu d'où vient ce choix.
   - ◇ La forme $x \mapsto < Ax\,, x >$ est positive et même définie positive par l'hypothèse donnée par le texte sur $C > 0$. Par routine, on sait donc que toutes les valeurs propres réelles de la matrice A symétrique (qui existent par le théorème spectral) sont toutes strictement positives.
   - ◇ Quite à reclasser les valeurs propres dans l'ordre croissant, on a pour tout j

   $$0 < \alpha < \frac{2}{L} = \frac{2}{\lambda_3} \leq \frac{2}{\lambda_j}$$

   et donc, en multipliant par un réel strictement positif

   $$0 < \alpha\lambda_j < \frac{2\lambda_j}{\lambda_3} < 2.$$

   Comme les nombres de 1 à $\alpha\lambda_j$ sont toujours entre 0 et $\frac{2\lambda_1}{\lambda_3} < 2$, la distance de 1 à $\alpha\lambda_j$ est toujours strictement inférieure à $K = \left|1 - \frac{2\lambda_1}{\lambda_3}\right| < 1$.
   - ◇ La question 6 exprimée en termes de norme de $\mathbb{R}^3$ donne pour tout entier k

   $$\|u_{k+1} - x^*\| \leq \|(I_3 - \alpha A)(u_k - x^*)\|.$$

Or $(I_3-\alpha A)$ agit sur les vecteurs comme une application linéaire, ici continue et même lipschitzienne en dimension finie.
Il existe $\rho>0$ tel que, pour tout y

$$\|(I_3-\alpha A)(y)\| \leq \rho\|y\|$$

et le plus petit ρ possible est le $\mathrm{Sup}\frac{\|(I_3-\alpha A)(y)\|}{\|y\|}$ pour $y\neq 0$ (c'est-à-dire la norme triple de l'application linéaire), ou encore $\mathrm{Sup}\|(I_3-\alpha A)(y)\|$, sur la sphère unité.

- ◇ Or la matrice symétrique $(I_3-\alpha A)^2$, polynôme de αA, est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et ses valeurs propres sont les polynômes des valeurs propres de αA, c'est-à-dire les réels $\mu_j=(1-\lambda_j\alpha)^2$ $(1\leq j\leq 3)$.
- ◇ Or, pour $\|y\|=1$, en posant $z={}^tPy$ avec y la matrice de passage de la base canonique à une base orthonormée des vecteurs propres (théorème spectral)

$$\|(I_3-\alpha A)(y)\|^2=\sum_{j=1}^{3}\mu_j z_j^2$$

et comme la matrice P est orthogonale, le changement de base est isométrique, et $\sum_{j=1}^{3} z_j^2=\sum_{j=1}^{3} y_j^2=1$

et

$$\|(I_3-\alpha A)(y)\|^2\leq\sum_{j=1}^{3}\mu_j z_j^2\leq \mathrm{Max}(\mu_j)\sum_{j=1}^{3} z_j^2=\mathrm{Max}(\mu_j)$$

$$\|(I_3-\alpha A)(y)\|^2\leq \mathrm{Max}(1-\alpha\lambda_j)^2\leq K^2<1.$$

- ◇ On a bien

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \|u_{k+1}-x^*\|\leq K\|u_k-x^*\|$$

et on montre, ensuite par récurrence que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \|u_k-x^*\|\leq K^k\|u_0-x^*\|$$

La suite majorante est géométrique de raison $0<K<1$, donc elle converge vers 0. Par encadrement la suite (u_k) converge donc vers x^*.

Variante

Les copies qui ont le mieux réussi ont éviter d'aller tout de suite vers la norme et c'est judicieux. Car si $\delta_k=u_k-x^*$, on reconnaît une suite géométrique matricielle qui s'écrit $\delta_{k+1}=M\delta_k$, avec $M=I-\alpha A$.

Par recurrence on montre facilement que $\delta_k=M^k\delta_0$. Il ne reste plus qu'à diagonaliser la matrice symétrique M comme précédemment. On retrouve des valeurs propres $1-\alpha\lambda_j$ qui *en valeur absolues* sont toutes strictement inférieures à 1 (tous les arguments sont donnés ci-dessus), si bien que $M^k=P\mathrm{diag}(\mu_1^k,\mu_2^k,\mu_3^k)^tP$ converge bien vers 0, par continuité de l'application $M\mapsto PM^tP$ (souvent fait).
Enfin $M^k\delta_0$ converge bien également vers 0 par continuité de l'application (linéaire) $M\mapsto M\delta_0$.

$$\lim_{k\to+\infty}u_k=x^*$$

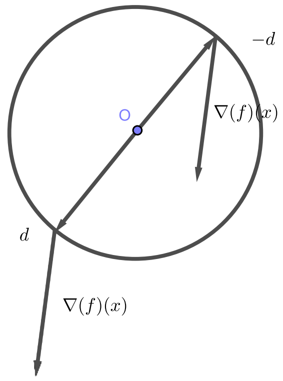
Partie 2.

8. C'est connu, la fonction h est strictement croissante sur $[0,\infty[$ et strictement décroissante sur le complémentaire et paire
Si on suppose que $x_k > 0$, alors on aura $x_{k+1} \in]-x_k, x_k[$ puisqu'on soustrait un réel compris entre 0 et le double de x_k.
   - ◇ Si $x_{k+1} \in]0, x_k[$, par stricte croissance de h on a
$$h(x_{k+1}) \leq h(x_k)$$
   - ◇ Si $-x_{k+1} \in]0, x_k[$, par parité et stricte croissance de h on a
$$h(x_{k+1}) = h(-x_{k+1}) \leq h(x_k)$$
   - ◇ Si $x_{k+1} = 0$
$$0 = h(x_{k+1}) < h(x_k)$$

   On fait de même à partir d'un réel strictement négatif. Le cas $x_k = 0$ étant évident.
9. Posons, pour tout k, $\varepsilon_k = -1$ et $t_k = \frac{1}{2^{k+1}}$. Les v_k étant tous strictement positifs, la suite (ε_k) vérifie les bonnes relations. Comme $2|v_k| = 2 + \frac{1}{2^{k-1}} > 2 \geq t_k > 0$, la suite (t_k) vérifie aussi les bonnes relations. (v_k)
Pour tout $n \geq 0$,
$$v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2^n}.$$
Cette suite converge vers 1 et donc v_n vers 3. On a construit une suite de descente par gradient pour h.
La suite (v_k) est convergente de limite 3 mais ce réel n'est pas le minimum global de h (car ce dernier est nul).
10. En procédant de la même façon on a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{2^n}$$
Comme $w_{2k} > 0$ et $w_{2k+1} < 0$, on pose $\varepsilon_k = (-1)^{k+1}$ et $t_k = 2 + \frac{3}{2^{k+1}}$.
On a alors $w_{k+1} = w_k + \varepsilon_k t_k$ pour tout k, la suite (ε_k) qui vérifie les bonnes relations.
Il en va de même pour la suite (t_k) puisque, pour tout k,
$$0 < t_k < 2|w_k| = 2 + \frac{1}{2^{k-1}}$$
car $3 < 4$.
La suite (w_n) est ainsi une suite de descente par gradient pour h.
Comme $w_n \cong (-1)^n$ cette suite (w_n) ne converge pas.

Partie 3.

11. On suppose $\nabla f(x) \neq 0$.



Le réel $(\nabla f(x)\,,d)$ représente le produit des normes des deux vecteurs (non nuls) que multiplie le cosinus de l'angle entre ces deux vecteurs lorsque d décrit la sphère unité S. S'il existe un d tel que $(\nabla f(x)\,,d) > 0$ (cas de la figure) alors le symétrique $-d$ fait un angle aigu avec $\nabla f(x)$. La seule situation où D_x serait vide serait que $\forall d \in S, \quad (\nabla f(x)\,,d) = 0$. Mais comme la sphère unité contient la base canonique, le nabla serait orthogonal à toute une base, et par conséquent, serait nul c'est exclu. L'ensemble D_x est non vide.

Soit maintenant $d \in D_x$. On a donc $\nabla f(x) \neq 0$ car sinon $(d, \nabla f(x)) = 0$.

Pour tout vecteur x fixé, la fonction f, de classe $\mathcal{C}_1$ et par composition avec la fonction (vectorielle) affine $\alpha : t \mapsto x + td$, $f \circ \alpha$ est $\mathcal{C}_1$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet un developpement limité en 0 $(f \circ \alpha)(0+t) = (f \circ \alpha)(0) + t(f \circ \alpha)'(0) + o(t)$, or par la règle de la chaîne

$$(f \circ \alpha)'(0) = (\nabla(f)(\alpha(0))\,, \alpha'(0)) = (\nabla(f)(x)\,, d) < 0$$

et, comme $(f \circ \alpha)(0) = f(x)$ et $(f \circ \alpha)(0+t) = f(x+dt)$ le réel $f(x+dt) - f(x)$ prend localement le signe négatif (partie principale du développement limité) quand t est assez petit.

Ceci signifie que l'ensemble $T_{d,x}$ est non vide.

12. On est dans le cas où $n = 1$, $\nabla h(x) = h'(x) = 2x$.
    - Si $x_k = 0$ alors $\nabla h(x_k) = 0$ et $t_k = d_k = 0$ (ce qui correspond à $t_k = \varepsilon_k = 0$ dans la partie 2).
    - Si $x_k > 0$ alors $D_{x_k} = \{-1\}$ donc $d_k = -1$ et $T_{d_k,x_k} = \{t > 0/\ t(-2x_k + t) < 0\} =]0, 2x_k[=]0, 2|x_k|[$.
    - Si $x_k < 0$ alors $D_{x_k} = \{1\}$ donc $d_k = 1$ et $T_{d_k,x_k} = \{t > 0/\ t(2x_k + t) < 0\} =]0, -2x_k[=]0, 2|x_k|[$.

    On retrouve donc exactement la situation de la partie 2.
13. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $\nabla f(x_k) \neq 0$ alors, par définition de T_{d_k,x_k}, on a

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + t_k d_k) < f(x_k)$$

Si $\nabla f(x_k) = 0$ on a $f(x_{k+1} = f(x_k)$. On a donc, de façon générale,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$$

et la suite $(f(x_k))$ est décroissante. Quand f est coercive, le préambule montre que f est minorée et donc $(f(x_k))$ l'est aussi. C'est finalement une suite convergente par théorème de convergence monotone.

Si, par l'absurde, la suite (x_k) n'était pas bornée, on pourrait en extraire une suite $(x_{\psi(k)})$ telle que $\|x_{\psi(k)}\| \to +\infty$ et on aurait alors $f(x_{\psi(k)}) \to +\infty$ (composition de limites). Ceci est impossible car la suite $(f(x_k))$ qui converge est nécessairement bornée. On a démontré que (x_k) était bornée.

14. Soit $k \in \mathbb{N}$ et on pose $r_k = \nabla g(u_k) = Au_k - b$; on a

$$\begin{aligned}
g(u_{k+1}) - g(u_k) &= g(u_k - \alpha r_k) - g(u_k) \\
&= -\frac{\alpha}{2}(Au_k, r_k) - \frac{\alpha}{2}(Ar_k, u_k) + \frac{\alpha^2}{2}(Ar_k, r_k) + \alpha(b, r_k) \text{ par développement} \\
&= -\alpha(Au_k, r_k) + \frac{\alpha^2}{2}(Ar_k, r_k) + \alpha(b, r_k) \text{ par symétrie de } A \\
&= -\alpha(r_k + b, r_k) + \frac{\alpha^2}{2}(Ar_k, r_k) + \alpha(b, r_k) \text{ car } Au_k = b + r_k \\
&= -\alpha\|r_k\|^2 + \frac{\alpha^2}{2}(Ar_k, r_k)
\end{aligned}$$

Si $r_k \neq 0$, on pose $t_k = \alpha\|r_k\|$ et $d_k = -\frac{r_k}{\|r_k\|}$; sinon, on pose $d_k = 0$ et $t_k = 0$. Dans les deux cas, on a $u_{k+1} = u_k + t_k d_k$. De plus, dans le cas où $r_k \neq 0$, on a

- $\|d_k\| = 1$ et $(d_k|r_k) = -\|r_k\| < 0$;
- $g(u_k + d_k t_k) - g(u_k) = g(u_{k+1}) - g(u_k) = -\alpha\|r_k\|^2 + \frac{\alpha^2}{2}(Ar_k, r_k)$. Comme en fin de partie 1, on a $(Ar_k, r_k) \leq L\|r_k\|^2$ où L est le maximum des modules des valeurs propres de A et ainsi

$$g(u_k + d_k t_k) - g(u_k) \leq -\alpha\left(1 - \frac{\alpha L}{2}\right)\|r_k\|^2$$

Si $\alpha \in]0, 2/L[$, cette quantité est < 0. Comme $t_k > 0$, on a finalement $t_k \in T_{d_k, x_k}$.

Si $\alpha \in]0, 2/L[$, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de descente par gradient pour la fonction g.

Partie 4.

15. On a, en sommant les inégalités (2)

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ f(x_k) - f(x_0) \leq m_1 \sum_{i=0}^{k-1} t_i(d_i, \nabla f(x_i))$$

Comme f est coercive, la question 13. indique que la suite $(f(x_k))$ est bornée (puisque convergente). La suite $(f(x_k) - f(x_0))$ est donc minorée, et un minorant minore aussi les sommes partielles de la série de terme général $t_k(d_k, \nabla f(x_k))$ est minorée. Comme le terme général de cette série est négatif, la série des opposés $\sum -t_i(d_i, \nabla f(x_i))$ est à termes positifs et majorée par l'opposé du minorant précédent, elle est donc convergente. Son terme général tend vers 0 et aussi son opposé, donc

$$\lim_{k \to +\infty} t_k(d_k, \nabla f(x_k)) = 0$$

16. Soit $k \in \mathbb{N}$; distinguons deux cas

- Si $C_1 \leq C_2|(d_k, \nabla f(x_k))|$ alors $t_k \geq C_1$ et donc $|t_k(d_k, \nabla f(x_k))| \geq C_1|(d_k, \nabla f(x_k))|$.
- Sinon, $t_k \geq C_2|(d_k, \nabla f(x_k))|$ et donc $|t_k(d_k, \nabla f(x_k))| \geq C_2|(d_k, \nabla f(x_k))|^2$.

Dans le cas général, on a donc

$$|(d_k, \nabla f(x_k))| \leq \frac{b_k}{C_1} + \frac{\sqrt{b_k}}{\sqrt{C_2}} \ \text{ où } \ b_k = |t_k(d_k, \nabla f(x_k))|$$

Comme on a vu que $b_k \to 0$, on en déduit que

$$\lim_{k \to +\infty} (d_k, \nabla f(x_k)) = 0$$

17. B étant symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base diagonalisation et λ_i la valeur propre associée à e_i. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $x_1, \ldots, x_n$ ses coordonnées dans la base des e_i. Comme en question 7, on a

$$(Bx, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq \mu \|x\|^2 \text{ et } \|Bx\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \right)^{1/2} \leq \lambda \|x\|$$

où $\mu > 0$ et $\lambda > 0$ sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de B. On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \ \frac{\mu}{\lambda} \|x\| \leq \frac{(Bx, x)}{\|Bx\|}$$

En particulier, avec $x = \nabla f(x_k)$ (quand $\nabla f(x_k) \neq 0$), on obtient $\frac{\mu}{\lambda} \|\nabla f(x_k)\| \leq |(d_k|\nabla f(x_k))$. L'inégalité reste vraie quand le gradient est nul. Comme le majorant est de limite nulle, on en déduit que

$$\lim_{k \to +\infty} \nabla f(x_k) = 0$$

18. f étant coercive, elle admet au moins un minimum global. Supposons, par l'absurde, qu'il existe deux mimina globaux $x_1^* < x_2^*$. Par convexité, le graphe de la courbe sur $]x_1^*, x_2^*[$ est strictement sous la corde reliant $(x_1^*, f(x_1^*))$ et $(x_2^*, f(x_2^*))$. Mais comme $f(x_1^*) = f(x_2^*)$ cela signifie que f prend des valeurs strictement plus petite qu'au point où elle est minimale ce qui est une contradiction. Il y a donc un unique minimum global.