# CONTRÔLE FINAL – PARTIE SUR PAPIER

*Préliminaire.* Durée : 1h30. Documents non autorisés.

**Exercice 1.** On considère la densité suivante (on ne cherchera pas à démontrer qu'il s'agit d'une densité) :

$$f(x) = (1 - |x|)\mathbf{1}_{]-1,1[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) (a) Montrer que la fonction de répartition $F$ de la loi de densité $f$ est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)^2, & x \in [-1, 0], \\ 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \in ]-\infty, -1[, \\ 1, & x \in ]1, +\infty[. \end{cases}$$

On pourra commencer par calculer $F(-x)$ pour $x \in [0, 1]$. On pourra vérifier ensuite que $F(x) = 1 - F(-x)$ si $x \in [0, 1]$.

(b) En utilisant la question précédente, démontrer que la fonction quantile $F^{-1}$ de la loi de densité $f$ est donnée par

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \sqrt{2u} - 1, & u \in ]0, \frac{1}{2}], \\ 1 - \sqrt{2(1-u)}, & u \in ]\frac{1}{2}, 1[. \end{cases}$$

(c) En déduire une première méthode de simulation de la loi de densité $f$.

(2) (a) Trouver une constante $k$ telle que

$$f(x) \leq kg(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où $g$ est la densité de la loi uniforme sur $]-1, 1[$. On commencera par rappeler la forme de $g$ avant de donner la valeur de $k$.

(b) Donner une méthode de simulation de type rejet pour la loi de densité $f$. On donnera les étapes clés de la méthode.

(3) On considère maintenant $S, U$ et $V$ trois variables aléatoires indépendantes, $S$ de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ (c'est-à-dire $\mathbb{P}(\{S = 1\}) = \mathbb{P}(\{S = -1\}) = 1/2$) et $U$ et $V$ de loi uniforme sur $]0, 1[$.

(a) Démontrer que la loi conditionnelle de $SU$ sachant $U < V$ est la loi de densité $f$. On pourra chercher à calculer $\mathbb{P}(\{SU \in A, U < V\})$ pour $A$ borélien de $\mathbb{R}$.

(b) En déduire une troisième méthode de simulation de la loi de densité $f$. On donnera les étapes clés de la méthode.

**Exercice 2.** On rappelle la définition de la fonction $\Gamma$ :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x) dx, \quad \alpha > 0,$$

dont on admet qu'elle satisfait la relation

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

En particulier, $\Gamma(n + 1) = n!$.

Dans la suite, on cherche à étudier une méthode de Monte-Carlo pour l'approximation de $I = \Gamma(\alpha + 1)$, pour $\alpha \geq 1$.

(1) On commence par étudier la représentation suivante (que l'on ne cherchera pas à démontrer) :

$$I = \mathbb{E}\big[X^\alpha\big],$$

où $X$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

(a) Démontrer que la variance associée à l'estimateur Monte-Carlo étudié dans cette question s'écrit :

$$\mathbb{V}\big(X^\alpha\big) = \Gamma(2\alpha+1) - I^2.$$

(b) En appelant $n$ la partie entière de $\alpha$ et en posant $r = \alpha - n$, démontrer que

$$\Gamma(2\alpha+1) = (2n+2r)\dots(1+2r)\Gamma(1+2r),$$

(2) On met, maintenant, en place une méthode d'échantillonnage préférentiel. Pour $\alpha$ et $n$ comme dans la question précédente, on écrit $I$ sous la forme

$$I = n!\mathbb{E}\big[\ Y^{\alpha-n}\big],$$

où $Y$ suit une loi de densité $x \mapsto (n!)^{-1}x^n \exp(-x)$.

(a) On admet que $Y$ peut s'écrire comme la somme de $n+1$ variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. Donner une méthode de simulation de $Y$.

(b) On calcule maintenant la variance associée à cette nouvelle écriture de $I$. Démontrer que

$$\mathbb{V}\big(n!Y^{\alpha-n}\big) = n!\Gamma(2\alpha-n+1) - I^2.$$

(c) Démontrer que

$$\Gamma(2\alpha-n+1) = (n+2r)\cdots(1+2r)\Gamma(1+2r),$$

(3) On conserve, dans cette question, les notations des questions précédentes.

(a) Démontrer que

$$\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha-n+1)} \geq \frac{(2n)!}{n!}.$$

(b) On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$. En déduire un équivalent du terme de droite ci-dessus quand $n$ est grand.

(c) En utilisant les conclusions des questions 1c) et 2c), comparer les deux méthodes étudiées.