

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit
sur $[0, \pi]$ la fonction f_n

par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x(1+n x)} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

① Montrer que la suite de
fonctions $(f_n)_n$ converge
simplement ~~sur~~ $[0, \pi]$ vers une
fonction f que l'on déterminera.

② Étudier la convergence
uniforme sur $[0, \pi]$.

③ Soit $a \in]0, \pi]$.

Montrer que la suite de fonctions
 $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, \pi]$