REGLES DE BIOCHE

MP 13-14

Calcul de primitives de $R(\sin(x), \cos(x))$ avec R fonction rationnelle

1. **R est un polynôme**

   Par linéarité, on se ramène au calcul de $\displaystyle\int \sin^p(x)\, \cos^q(x)\, dx\,, p, q \in \mathbb{N}$.

- p et q impairs : on pose $u = \cos(2x)$
- p (resp. q) impair : on pose $u = \cos(x)$ (resp. $u = \sin(x)$)
- p et q pairs : on linéarise.

2. **R n'est pas un polynôme**

   (a) <u>*Méthode générale :*</u> On utilise le changement de variable $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   On est ramené au calcul de $\displaystyle\int R\left(\frac{2\,t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$, c'est-à-dire celui de primitives d'une fonction rationnelle. Ce changement de variable peut conduire à des calculs assez longs.

   Ce changement de variable ne peut être utilisé que sur des intervalles de la forme $](2\,m-1)\,\pi, (2\,m+1)\,\pi[\ \ (m \in \mathbb{Z})$ ne contenant pas de singularité de la fonction à intégrer. De plus, les primitives calculées peuvent être continues aux points de la forme $(2\,m+1)\,\pi$ et il faut "raccorder" les restrictions obtenues sur deux intervalles consécutifs.

   Exemple : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > |\beta|$. Sur $]-\pi, +\pi[$, on a

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta\,\cos(x)} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c^{te}$$

   La fonction intégrée étant continue sur $\mathbb{R}$, ses primitives sont définies continues sur $\mathbb{R}$. On obtient par exemple

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{\alpha + \beta\,\cos(x)} = 2\int_0^{+\pi} \frac{dx}{\alpha + \beta\,\cos(x)} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$$

   (b) <u>*Changements de variables simplificateurs : Règles de Bioche.*</u>

   Posons $R(X,Y) = \dfrac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}$. En écrivant

   $Q\,(\sin(x), \cos(x)) = Q_0\,(\cos(x)) + \sin(x)\,Q_1\,(\cos(x))$ on aboutit (en multipliant par la quantité "conjuguée") à

$$f(x) = R\,(\sin(x), \cos(x)) = \frac{P_1\,(\sin(x), \cos(x))}{Q_2\,(\cos(x))}$$

   Ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit impaire est que l'on puisse écrire $f(x) = \sin(x)\,R_1\,(\cos(x))$. Dans ce cas, on effectue le changement de variable $u = \cos(x)$.

De même une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $\forall x,\ f(\pi - x) = -f(x)$ est que l'on puisse écrire $f(x) = \cos(x)\, R_2\,(\sin(x))$. Dans ce cas, on effectue le changement de variable $u = \sin(x)$.
Une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $\forall x,\ f(\pi + x) = f(x)$ est que l'on puisse écrire $f(x) = R_3\,(\tan(x))$. Dans ce cas, on effectue le changement de variable $u = \tan(x)$ (ou $u = \text{cotan}(x)$).Pour cela, on peut penser à écrire (sachant que l'on a $\sin = \tan\cos$)

$$\begin{aligned} f(x) &= R\,(\sin(x), \cos(x)) = R_1\,(\cos x, \tan x) \\ &= \frac{P_1\,(\tan x) + \cos x\, P_2\,(\tan x)}{P_3\,(\tan x) + \cos x\, P_4\,(\tan x)} = R_1\,(\tan x) + \cos x\, R_2\,(\tan x) \end{aligned}$$

(en multipliant par la quantité "conjuguée").
En conclusion, si l'élément différentiel $R\,(\sin(x), \cos(x))\ dx$ est invariant en remplaçant x par :
• $-x$ on peut effectuer le changement de variable $u = \cos(x)$
• $\pi - x$ on peut effectuer le changement de variable $u = \sin(x)$
• $\pi + x$ on peut effectuer le changement de variable $u = \tan(x)$ (ou $u = \text{cotan}(x)$).
Remarque : lorsqu'il existe un entier naturel non nul N tel que f soit périodique de période $\frac{2\,\pi}{N}$ on peut penser au changement de variable $u = N\,x$.
Exemple : calcul de

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} \qquad \int \frac{dx}{\cos(x)}$$

Les calculer à l'aide du changement de variable défini par $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On obtient

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + c^{te}$$

sur tout intervalle de la forme $]m\,\pi, (m+1)\,\pi[$ sans raccordement possible. De même on trouve

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right) + c^{te}$$

sur tout intervalle de la forme $]m\,\pi - \frac{\pi}{2}, m\,\pi + \frac{\pi}{2}[$ sans raccordement possible.

3. **Primitives de $R(\text{sh}(x), \text{ch}(x))$ avec R fonction rationnelle**
On remplace les fonctions hyperboliques par les fonctions trigonométriques correspondantes et on effectue un changement de variable analogue parmi les suivants

$$u = \text{th}\left(\frac{x}{2}\right) \quad u = \text{sh}(x) \quad u = \text{ch}(x) \quad u = \text{th}(x) \quad u = \text{coth}(x).$$

On peut retenir que le changement de variable $u = e^x$ permet de se ramener au calcul de primitives d'une fonction rationnelle.