# 1 Les processus linéaires générals

Soit $\{Y_t\}$ une série que est observée et une série de bruit $\{e_t\}$ qui n'est pas observée. Le bruit satisfait les hypothèses classiques.

Nous voudrions écrire $\{Y_t\}$ comme une combinaison linéaire, c'est-à-dire que *nous expliquons la série observée par les perturbations aléatoires passées.*

$$Y_t = e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \cdots \tag{1}$$

Si c'est une somme infinie, conditions spécifiques doivent être placés sur les coefficients pour que la somme soit convergeant.

## 1.1 Example

Soit le cas que 1 soit sur la forme

$$Y_t = e_t + \psi e_{t-1} + \psi^2 e_{t-2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i e_{t-i} \quad \psi^0 = 1 \tag{2}$$

Ici, la condition pour 2 soit convergeant est $|\psi| < 1$

- $\mathbb{E}(Y_t) = 0$
- $Var(Y_t) = \frac{\sigma_e^2}{1-\psi^2}$
- $Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{\psi\sigma_e^2}{1-\psi^2}$ et $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \frac{\psi^k\sigma_e^2}{1-\psi^2}$
- $Corr(Y_t, Y_{t-1}) = \psi$ et $Corr(Y_t, Y_{t-k}) = \psi^k$

La processus est stationnaire, l'autocovariance ne dépend pas au temps $t$, seulement à décalage du temps (lag) k

# 2 Les processus Moyen Mobile (Moving Average) MA(q)

En cas général

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q} \tag{3}$$

Nous appelons le grade (rank) du modèle le plus distant indice $q$

## 2.1 Example MA(1)

$$Y_t = e_t - \theta e_{t-1} \tag{4}$$

- $\mathbb{E}(Y_t) = 0$
- $Var(Y_t) = \sigma_e^2(1 + \theta^2)$
- $Cov(Y_t, Y_{t-1}) = -\theta\sigma_e^2$ et $Cov(Y_t, Y_{t-2}) = 0$
- $Corr(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$ et $Corr(Y_t, Y_{t-2}) = 0$

Example 1.1 $\quad Y_t = e_t + \varphi e_{t-1} + \varphi^2 e_{t-2} + \cdots$

- $E[Y_t] = E[e_t] + \varphi E[e_{t-1}] + \varphi^2 E[e_{t-2}] + \cdots$ Nous rappelons que $(e_t)_{t\geq 0}$ bruit blanc $\to \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ $\forall t \geq 0$ $E(e_t) = 0$ donc on peut écrire quelque soit $t \geq 0$ $E[e_t] = E[e_{t-1}] = \cdots = 0$

Donc $E[Y_t] = 0$.

- $V(Y_t) = V(\varepsilon_t) + \varphi^2 V(\varepsilon_{t-1}) + (\varphi^2)^2 V(\varepsilon_{t-2}) + \cdots$

$$+ \underbrace{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})}_{= 0 \text{ car } (\varepsilon)_i \text{ iid}} + \cdots$$

$$= \sigma^2_{\varepsilon_t} + \varphi^2 \sigma^2_{\varepsilon_{t-1}} + \cdots$$

$$= \sigma^2 \underbrace{(1 + \varphi^2 + \cdots)}_{\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{2i} \to \frac{1}{1-\varphi^2}} \Bigg\} \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2}$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[Y_t Y_{t-1}] - \underbrace{E[Y_t]}_{=0}\underbrace{E[Y_{t-1}]}_{=0}$$

$$= E[Y_t Y_{t-1}] =$$

$$E[(e_t + \varphi e_{t-1} + \varphi^2 e_{t-2} + \cdots)(e_{t-1} + \varphi e_{t-2} + \varphi^2 e_{t-2})] =$$

$$E[e_t(e_{t-1} + \varphi e_{t-2} + \varphi^2 e_{t-2} + \cdots) + \varphi e_{t-1}(e_{t-1} + \varphi e_{t-2} + \varphi^2 e_{t-2} + \cdots)$$

$$+ \varphi^2 e_{t-2}(e_{t-1} + \varphi e_{t-2} + \varphi^2 e_{t-3} + \cdots +) + \cdots]$$

$E[e_i e_j] = 0 \quad \forall i \neq j \qquad E[e_i^2] = Var(e_i) = \sigma_\varepsilon^2$

$$= E[\varphi e_{t-1}^2 + \varphi^3 e_{t-2}^2 + \varphi^5 e_{t-3}^2 + \cdots +] = \varphi \sigma_\varepsilon^2 (1 + \varphi^2 + \varphi^4 + \cdots +)$$

$$= \varphi \sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{1-\varphi^2}$$

$$Corr(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-1})}{\sqrt{V(Y_t)}\sqrt{V(Y_{t-1})}}$$

$$= \frac{\varphi \sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{1-\varphi^2}}{\sqrt{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}}\sqrt{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}}} = \frac{\varphi \cancel{\sigma_\varepsilon^2} \cancel{\frac{1}{1-\varphi^2}}}{\cancel{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}}} = \varphi$$

## Example 2

$Y_t = e_t - \theta e_{t-1}$

- $\mathbb{E}[Y_t] = 0$
- $Var(Y_t) = \mathbb{E}[Y_t^2] - \underbrace{\mathbb{E}[Y_t]}_{=0}^2 = \mathbb{E}[(e_t - \theta e_{t-1})^2]$

$$= \mathbb{E}[e_t^2 - 2\theta e_t e_{t-1} + \theta^2 e_{t-1}^2]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[e_t^2]}_{=Var[e_t]} - 2\theta \underbrace{\mathbb{E}[e_t e_{t-1}]}_{=Cov[e_t, e_{t-1}] = 0} + \theta^2 \underbrace{\mathbb{E}[e_{t-1}^2]}_{=Var[e_{t-1}]}$$

$$= \sigma_e^2 + \theta^2 \sigma_e^2 = \sigma_e^2(1+\theta^2)$$

- $Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \mathbb{E}[Y_t \cdot Y_{t-1}] - \mathbb{E}[Y_t] \cdot \mathbb{E}[Y_{t-1}]$

or $\mathbb{E}[Y_t] = 0$ donc $\mathbb{E}[Y_t] \cdot \mathbb{E}[Y_{t-1}] = 0$

$$cov(Y_t, Y_{t-1}) = \mathbb{E}[Y_t \cdot Y_{t-1}] = \mathbb{E}[(e_t - \theta e_{t-1})(e_{t-1} - \theta e_{t-2})]$$

$$= \mathbb{E}[e_t e_{t-1} - \theta e_t e_{t-2} - \theta e_{t-1}^2 + \theta^2 e_{t-1} e_{t-2}]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[e_t e_{t-1}]}_{0} - \theta \underbrace{\mathbb{E}[e_t e_{t-2}]}_{0} - \theta \mathbb{E}[e_{t-1}^2] + \theta^2 \underbrace{\mathbb{E}[e_{t-1} e_{t-2}]}_{0}$$

$$= -\theta \sigma_e^2$$

$$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) = \mathbb{E}[Y_t \cdot Y_{t-2}] - \underbrace{\mathbb{E}[Y_t]}_{\overset{\shortparallel}{0}} \underbrace{\mathbb{E}[Y_{t-2}]}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$$= \mathbb{E}\left[(e_t - \theta e_{t-1})(e_{t-2} - \theta e_{t-3})\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e_t e_{t-2} - \theta e_t e_{t-3} - \theta e_{t-1} e_{t-2} + \theta^2 e_{t-1} e_{t-3}\right]$$

$$= \mathbb{E}[e_t e_{t-2}] - \theta \mathbb{E}[e_t e_{t-3}] - \theta \mathbb{E}[e_{t-1} e_{t-2}] + \theta^2 \mathbb{E}[e_{t-1} e_{t-3}]$$

$$= 0.$$

$$\mathrm{Corr}(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1})}{\sqrt{\mathbb{V}[Y_t]}\sqrt{\mathbb{V}[Y_{t-1}]}} = \frac{-\theta \sigma_\varepsilon^2}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2)}\sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2)}}$$

$$= \frac{-\theta \cancel{\sigma_\varepsilon^2}}{\cancel{\sigma_\varepsilon^2}(1+\theta^2)} = \frac{-\theta}{(1+\theta^2)}$$

# 3 Les processus autogrégressifs (Autoregressive) AR(p)

Ici, nous expliquons la série ses valeurs précédents et une perturbation aléatoire.

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + e_t \tag{5}$$

$e_t$ est un bruit et nous pouvons l'imaginer comme une innovation à la série, il n'est pas explicable par rapport aux valeurs précédents de la série. Ainsi, à chaque instante de temps $t$ on suppose que c'est indépendant de $Y_{t-1}, Y_{t-2}, ..etc.$

## 3.1 Example AR(1)

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t \tag{6}$$

**Nous supposons que la série est stationnaire, et de moyenne zéro**

- $Var(Y_t) = \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2}$
- $Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{\phi\sigma_e^2}{1-\phi^2}$ et $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \phi^k \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2}$
- $Corr(Y_t, Y_{t-1}) = \phi$ et $Corr(Y_t, Y_{t-k}) = \phi^k$

**Remarque**
De la variance on pourrais suspecter la condition $|\phi| < 1$ mais pour le justifier rigoureusement on doit d'aller plus loin sur les propriétés d'un modèle AR.

## 3.2 L'inversion d'un modèle AR(1) et la condition pour la stationnarité

Nous rendrons le modèle AR(1) sous la forme rétroactif (c'est à dire, nous chercherons à faire la recursion sur les valeurs précédents de la série)

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t = e_t + \phi \underbrace{(\phi Y_{t-2} + e_{t-1})}_{Y_{t-1}}$$

Si nous répétons la substitution $k-1$ fois, nous arrivons à

$$Y_t = e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \cdots + \phi^{k-1} e_{t-k+1} + \phi^k e_{t-k} \tag{7}$$

Ce qui resemble à le modèle 2, et en plus, si nous laisserions $k \to \infty$, alors nous récupérons modèle 2 et la condition pour la stationnarité.

Example 3 $\quad Y_t = \varphi Y_{t-1} + e_t \qquad E[Y_t] = 0$

$$Y_{t-1} = \varphi Y_{t-2} + e_{t-1}$$

- $Var(Y_t) = \mathbb{E}[Y_t^2] - \underbrace{\mathbb{E}[Y_t]^2}_{=0}$

$$= \mathbb{E}[Y_t^2] = \mathbb{E}[(\phi Y_{t-1} + e_t)^2]$$

$$= \mathbb{E}[\phi^2 Y_{t-1}^2 + 2\phi Y_{t-1} e_t + e_t^2]$$

$$= \phi^2 \mathbb{E}[Y_{t-1}^2] + 2\phi \underbrace{\mathbb{E}[Y_{t-1} e_t]}_{=0} + \mathbb{E}[e_t^2]$$

$$= \phi^2 \mathbb{E}[Y_{t-1}^2] + \sigma_e^2$$

$$= \phi^2 \mathbb{E}[(\phi Y_{t-2} + e_{t-1})^2] + \sigma_e^2$$