Propriété de Martingale :

La propriété de martingale stipule que, pour tout n, l'espérance conditionnelle de $u(X_{n+1})$ sachant $\mathcal{F}_n^X$ doit être égale à $u(X_n)$. Cela s'exprime comme suit :

$$E(u(X_{n+1})|\mathcal{F}_n^X) = u(X_n)$$

Dans le cas présent, $u(X_n) \in E1$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, ce qui signifie que $Pu(X_n) = u(X_n)$. Nous pouvons donc écrire la propriété de martingale comme suit :

$$E(u(X_{n+1})|\mathcal{F}_n^X) = Pu(X_n) = u(X_n)$$

$\mathcal{T}$

Intégrabilité Uniforme :

Pour montrer que le processus est uniformément intégrable, nous devons vérifier que $\sup_n E(\|u(X_n)\|) < \infty$. Cela signifie que l'espérance du module du processus est bornée pour tout n.

$$\sup_n E(\|u(X_n)\|) < \infty$$

Puisque $u(X_n)$ est un vecteur, on considère la norme euclidienne pour mesurer la "taille" du vecteur. La propriété devient donc :

$$\sup_n E(\|Pu(X_n)\|) < \infty$$

Ce qui est vrai puisque P est une matrice de transition et la norme des vecteurs reste bornée lors de l'application de P.

En conclusion, le processus $(u(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale uniformément intégrable par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n^X$. $\mathbb{R}$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x \in X \mid P_i(x)\}$$

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$$

$$\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} B_{ij}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x \in X \mid f_i(x) = 0\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x \in X \mid f_i(x) = 0\}$$