

Nom :

Prénom :

## Contrôle no 2, sujet A (durée 1h30)

*Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que le deuxième exercice.*

**Exercice 1.** Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\mathbb{E}(|g(X, Y)|) < \infty$ . Montrer que

$$\text{Var}(\mathbb{E}(g(X, Y)|X)) \leq \text{Var}(g(X, Y))$$

(on demande de refaire une démonstration du cours).

**Exercice 2.** On s'intéresse à l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-2)^4} dx.$$

- (1) Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer  $I$  (de manière approchée).
- (2) Proposer une méthode de réduction de variance par échantillonage préférentiel.
- (3) Écrire un programme en R qui calcule  $I$  par Monte-Carlo en utilisant cette réduction de variance (dans le petit cadre ci-dessous).

- (4) Écrire un programme en R qui calcule la variance de cette méthode par Monte-Carlo.