Université des Lagunes
Licence 2 Faculté de Sciences et Technologie AU:2021/2022

Série 1: Résolution numérique des équations non linéaires

Janvier 2022

Exercice 1:
Soit $f(x) = x^2 - \exp(-1 - x^2)$ une fonction définie sur $[0, 5]$.

(1) Montrer qu'il existe une racine unique α de f sur $[0, 5]$.
(2) Appliquer la méthode de Newton avec $x_0 = 5$ à 10^{-3} prés.
(3) Est ce que la méthode de Newton converge pour $x_0 = 0$ à 10^{-3} prés. Que remarquez-vous?
(4) Trouvez une fonction g tel que $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$ qui assure les conditions du théorème du point fixe.

Exercice 2:
Soit l'équation:

$$x(1 + \exp(x)) = \exp(x). \tag{0.1}$$

(1) Montrer que l'équation (0.1) admet une racine unique s sur $[0, 1]$.
(2) Proposer une itération de point fixe pour l'équation (0.1).
(3) Montrer que cette itération converge vers la solution s.
(4) Ecrire la méthode de Newton pour cette équation en précisant un bon choix de l'initialisation en x_0.
(5) Appliquer la méthode de Newton avec une précision de 10^{-3} et à partir de x_0.

Exercice 3:
On se propose de résoudre numériquement l'équation:

$$(E_1) : f(x) \equiv x^3 + x - 1 = 0$$

(1) Montrer que l'équation (E_1) admet une solution réelle unique α et que $\alpha \in]0, 1[$.
(2) L'équation (E_1) est équivalente à l'équation:

$$(E_2) : x = g(x)$$

où $g(x) = x^3 + 2x - 1$, $g(x) = (1 - x^3)$, $g(x) = (1 - x)^{1/3}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

(a) Etudier dans chacun des quatre cas la convergence de la méthode de point fixe pour la recherche de α.
(b) Au cas où il y a convergence, donner un intervalle I tel que la méthode converge pour tout choix de $x_0 \in I$.

Exercice 4:
Soit a un réel strictement positif.

(1) Décrire la méthode de Newton, pour la recherche de la racine carrée de a. ($\alpha = \sqrt{a} > 0$ tel que $\alpha^2 - a = 0$)
(2) Calculer une valeur approchée de $\sqrt{3}$ par la méthode de Newton. On donne nombre d'itération égal à 4 et $x_0 = 3$.

Exercice 5:
Soit la fonction $F(x) = 2x^3 - x - 2$.
On se propose de déterminer les racines réelles de F.

(1) Montrer qu'il existe une unique racine x^* de F dans $[1, 2]$.
(2) Sans appliquer la méthode de Newton dites s'il y a convergence pour $x_0 = 1$ puis pour $x_0 = 2$.
(3) Appliquer la méthode de Newton avec une précision de 10^{-2} et à partir de $x_0 = 2$.

(4) Soient les trois schémas itératifs suivants:

$$x_{n+1} = 2x_n^3 - 2,\ x_{n+1} = \frac{2}{2x_n^2 - 1} \text{ et } x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + \tfrac{1}{2}x_n}.$$

(a) Etudier la convergence des trois schémas par la méthode de point fixe.

(b) Dans le cas de convergence appliquer le schéma itératif pour déterminer le point fixe c de la fonction utilisée à partir de $x_0 = 1$ et avec une précision de 10^{-2}.