

Nom :

Prénom :

## Contrôle no 2, sujet B (durée 1h30)

*Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que le deuxième exercice.*

**Exercice 1.** Soit  $U$  une variable aléatoire à valeurs dans  $[0; 1]^d$  ( $d \in \mathbb{N}^*$ ). Soit  $f$  une fonction bornée de  $[0; 1]^d$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que

$$\text{Var}\left(\frac{f((1, 1, \dots, 1) - U) + f(U)}{2}\right) \leq \text{Var}(f(U))$$

(on demande de refaire une démonstration du cours).

**Exercice 2.** On s'intéresse à l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} x^{3/2} e^{-x} dx.$$

- (1) Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer  $I$  (de manière approchée).
- (2) Proposer une méthode de réduction de variance par variable de contrôle.
- (3) Écrire un programme en R qui calcule  $I$  par Monte-Carlo en utilisant cette réduction de variance (dans le petit cadre ci-dessous).

- (4) Écrire un programme en R qui calcule la variance de cette méthode par Monte-Carlo.