Cours d'équations aux dérivées partielles
M1 de Mathématiques

Raphaël Danchin

Année 2020–2021

Table des matières

Introduction

Avant toute chose, il convient de définir ce qu'est une EDP (équation aux dérivées partielles).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$. Considérons une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^k. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ de $\mathbb{N}^d$ de longueur $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d \leq k$, on note

$$\partial_\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}} \,,$$

avec la convention que $\partial_{x_i}^{\alpha_i}$ est absente de la formule ci-dessus si $\alpha_i = 0$.

Rappelons qu'en vertu du théorème de Schwarz, pour une fonction C^k, la valeur de $\partial_\alpha u$ est *indépendante* de l'ordre dans lequel on calcule les dérivées. On notera $D^k u$ le d^k-uplet constitué de toutes les dérivées de u d'ordre k. Dans le cas particulier où $\alpha = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, on utilisera aussi la notation $\partial_{x_j} u := \frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot$

Définition. On appelle *EDP* d'ordre k toute expression de la forme

$$F(x, u(x), Du(x), \cdots, D^k u(x)) = 0 \tag{1}$$

avec $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^{d^k} \to \mathbb{R}$ donnée.

La fonction u apparaissant dans (1) est l'*inconnue*.

Résoudre l'EDP (1) revient à trouver une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant (1). On dit que u est une *solution classique* si elle est de classe C^k et si (1) est vérifiée en tout x de Ω.

Les premiers exemples d'EDP remontent au XVIIIème siècle avec les travaux d'Euler et de d'Alembert, et servent à décrire des phénomènes provenant de la physique ou de la mécanique (équation d'Euler régissant l'évolution d'un fluide parfait incompressible non visqueux, et équation des ondes). Depuis, des d'EDP sont apparues de façon naturelle dans tous les domaines scientifiques, non seulement en physique, mais aussi en chimie, en biologie et même en économie.

Il n'existe pas de théorie générale permettant de résoudre toutes les EDP. Les méthodes utilisées dépendent fortement du type d'EDP considéré. Les types les plus courants sont :

— Les *EDP linéaires*, c'est-à-dire de la forme $\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x)\, \partial_\alpha u(x) = f(x)$. Comme pour les équations différentielles ordinaires (notée EDO dans la suite), la solution générale d'une EDP linéaire est égale à la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'EDP homogène associée (c'est-à-dire avec $f \equiv 0$).

— Les *EDP semi-linéaires*, c'est-à-dire du type

$$G(x, u(x), \cdots, D^{k-1}u(x)) + \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\partial_\alpha u(x) = 0.$$

Noter que le terme correspondant aux dérivées d'ordre k est linéaire.

— Les *EDP d'évolution* où l'une des variables (souvent appelée la variable de temps et notée t) joue un rôle particulier :

$$\partial_t u + F(t, x, u(t, x), D_x u(t, x), \cdots, D_x^k(t, x)) = 0.$$

Les exemples d'EDP que l'on verra dans en cours ou en TD sont :
- les équations de transport linéaires à coefficients constants : $\partial_t u + \sum_{i=1}^d b_i \partial_{x_i} u = 0$;
- l'équation de Burgers : $\partial_t u + u\partial_x u = 0$;
- l'équation des ondes linéaire en dimension un : $\partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = f$;
- l'équation de Laplace : $\Delta u = 0$ ou, plus généralement, de Poisson $\Delta u = f$ (ainsi que des variantes telles que l'équation de Bessel $u - \Delta u = f$) ;
- l'équation de la chaleur : $\partial_t u - \Delta u = f$;
- l'équation de Schrödinger :$i\partial_t u + \Delta u = f$.

Voici quelques questions typiques que l'on se pose sur les EDP :
- calculer des solutions explicites. Il est exceptionnel que cela soit possible. . .
- Peut-on résoudre l'EDP ? A priori, résoudre signifie trouver toutes les solutions. Mais en en quel sens ? S'il semble naturel de définir une solution comme étant une fonction de classe C^k qui vérifie l'équation en tout point (on parle alors de *solution classique*), cette définition naïve n'est pas la mieux adaptée à l'analyse mathématique. Il existe de nombreuses définitions alternatives "plus souples" qui dépassent le cadre de ce cours (solutions variationnelles, au sens des distributions, etc.)
- Que peut-on imposer comme conditions supplémentaires pour assurer l'unicité ? Un exemple important est le problème de Cauchy pour les équations d'évolution, où l'on impose la valeur de la "donnée initiale".
- Quelles sont les propriétés qualitatives des solutions ? A défaut de pouvoir les calculer, on essaie d'avoir un maximum d'informations sur les solutions.

Les outils permettant d'aborder ces différentes questions relèvent de divers domaines des mathématiques : analyse fonctionnelle, théorie des distributions, calcul des variations, analyse complexe, systèmes dynamiques, analyse de Fourier, etc.

Ce cours vise à donner une courte introduction à quelques méthodes très classiques permettant de résoudre et d'étudier certaines EDP.

Chapitre 1

Equations de transport

Dans tout ce chapitre, on convient que la *variable de temps* t appartient à un intervalle I de $\mathbb{R}$ et que la *variable d'espace* x est dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 1$. La notation ∇_x désigne le gradient par rapport à x, c'est-à-dire $\nabla_x = {}^t(\partial_{x_1}, \cdots, \partial_{x_d})$.

1.1 Equation de transport linéaire

On cherche à résoudre

$$(T) \qquad \partial_t u + b \cdot \nabla_x u = f \quad \text{dans} \quad I \times \mathbb{R}^d$$

avec $b \in \mathbb{R}^d$ et $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ donnés.

On s'intéresse au *problème de Cauchy* associé à (T) au temps $t_0 \in I$: on se donne une fonction $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et l'on cherche toutes les solutions u de (T) telles que $u|_{t=t_0} = u_0$.

1.1.1 Cas homogène

On examine d'abord le cas $f \equiv 0$ qui correspond par exemple à l'équation de conservation de la masse pour un liquide incompressible.

Tout d'abord, par la formule de composition, on remarque que si $u \in \mathcal{C}^1(I \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ alors, pour tout $t \in I$ et $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(u(t, y + bt)\Big) = (\partial_t u + b \cdot \nabla_x u)(t, y + bt).$$

Donc, si u vérifie (T) alors, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, la fonction $t \mapsto u(t, y + bt)$ est constante. On dit que u *est constante le long des caractéristiques*, c'est-à-dire des segments de droites $(t, X(t))$ avec $t \in I$ et $X(t) = y + bt$. Remarquons que X est l'unique solution de l'EDO :

$$\frac{dX}{dt} = b, \qquad X(0) = y.$$

En conséquence, la valeur de u à un instant t_0 de I détermine entièrement u sur $I \times \mathbb{R}^d$, et l'on en déduit facilement le résultat suivant.

Théorème 1.1.1. *Supposons $t_0 = 0$ (pour simplifier). Soit u_0 dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique solution $\mathcal{C}^1$ au problème de Cauchy (T) avec $f \equiv 0$, valant u_0 à l'instant $t = 0$. Il s'agit de la fonction u définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ par*

$$u(t,x) = u_0(x - bt).$$

Démonstration. Si u est solution alors, puisque u est constante le long des caractéristiques,

$$u(t, y + bt) = u(0, y) = u_0(y) \quad \text{pour tout} \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,$$

d'où le résultat en prenant $y = x - bt$.

Réciproquement, un calcul direct évident montre que la formule ci-dessus fournit une solution à (T) avec donnée initiale u_0. □

Remarque 1.1.1. *On remarquera que si* $\operatorname{Supp} u_0 \subset [\alpha, \beta]$ *alors* $\operatorname{Supp} u(t) \subset [\alpha + bt, \beta + bt]$. *On dit que (T) a la propriété de* vitesse finie de propagation. *Dans le cas présent, la vitesse de propagation a pour module $\|b\|$.*

1.1.2 Cas non homogène

Dans le cas général où f est une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}^d$ alors toute solution u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times \mathbb{R}^d$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(u(t, y + bt)\Big) = f(t, y + bt).$$

En supposant pour simplifier que $0 \in I$ et en intégrant de 0 à $t \in I$, il vient donc :

$$u(t, y + bt) = u_0(y) + \int_0^t f(s, y + bs)\, ds. \tag{1.1}$$

En faisant le changement de variable $x = y + bt$, on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.1.2. *Supposons $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ et f continue sur $I \times \mathbb{R}^d$, et $\mathcal{C}^1$ par rapport à x. Alors l'unique solution $\mathcal{C}^1$ de (T) avec donnée u_0 en $t = 0$ est :*

$$u(t,x) := u_0(x - bt) + \int_0^t f(s, x + b(s - t))\, ds.$$

1.2 Equation des ondes en dimension un

On s'intéresse ici à l'EDP suivante :

$$\partial^2_{tt} u - \partial^2_{xx} u = f \quad \text{dans} \quad I \times \mathbb{R} \tag{W}$$

où $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée.

Dans le cas homogène (i.e. $f \equiv 0$), l'équation (W) modélise la propagation sans frottement d'une onde le long d'une corde inélastique.

On remarque que si u est une solution C^2 alors

$$(\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u = f.$$

En conséquence, si $f \equiv 0$ alors d'après la section précédente, la fonction $v := (\partial_t - \partial_x)u$ est constante le long des caractéristiques $(t, y+t)$. Dans le cas général, on a, en appliquant (1.1) avec $b = 1$,

$$v(t, y+t) = v(0, y) + \int_0^t f(s, y+s)\, ds.$$

Notons que la connaissance de $v(0, y)$ nécessite celle de u mais aussi celle de $\partial_t u$ à l'instant $t = 0$. Il faut donc, comme pour les EDO d'ordre 2, avoir une information non seulement sur la donnée initiale u_0 mais aussi sur sa dérivée par rapport au temps u_1 pour pouvoir résoudre le problème de Cauchy associé à (W) au temps $t = 0$ de façon unique. On obtient alors :

$$v(s, y+s) = u_1(y) - u_0'(y) + \int_0^s f(s', y+s')\, ds'$$

et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $s \in I$,

$$\partial_t u(s, x) - \partial_x u(s, x) = u_1(x-s) - u_0'(x-s) + \int_0^s f(s', x+s'-s)\, ds'.$$

On s'est donc ramenés à la résolution d'une équation de transport d'inconnue u, avec $b = -1$ et terme source v. D'après (1.1), on a donc :

$$u(t,x) = u_0(x+t) + \int_0^t \big(u_1(x-2s+t) - u_0'(x-2s+t)\big)\, ds + \int_0^t \int_0^s f(s', x+s'-2s+t)\, ds'\, ds$$

ce qui donne après changement de variable $z = y - 2s + t$ dans la première intégrale et intégration explicite dans le terme contenant u_0' la *formule de d'Alembert* suivante :

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x+t) + u_0(x-t)\Big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(z)\, dz + \int_0^t \int_0^s f(s', x+s'-2s+t)\, ds'\, ds.$$

Réciproquement, si u_0 et u_1 sont suffisamment réguliers, un calcul facile permet de vérifier que u donnée par la formule ci-dessus est bien solution de (W) et l'on en déduit le résultat suivant :

Théorème 1.2.1. *Si u_0 est $\mathcal{C}^2$, u_1 est $\mathcal{C}^1$ et f est continue par rapport à t et $\mathcal{C}^2$ par rapport à x alors (W) a une unique solution u de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $u|_{t=0} = u_0$ et $\partial_t u|_{t=0} = u_1$. Elle est donnée par la formule de d'Alembert.*

Remarque 1.2.1. *Dans le cas $f \equiv 0$, on remarque que toute solution $\mathcal{C}^2$ est de la forme $u(t,x) = F(x+t) + G(x-t)$ avec F et G de classe $\mathcal{C}^2$, la réciproque étant vraie (si l'on ne soucie pas des conditions initiales). De plus, (W) a alors une vitesse de propagation égale à 1 : si u_0 et u_1 sont supportées dans $[\alpha, \beta]$ alors $u(t)$ est supportée dans $[\alpha - |t|, \beta + |t|]$.*

1.3 Equation de Burgers

On cherche à résoudre

$$(B) \qquad \partial_t u + u\partial_x u = 0 \quad \text{dans} \;\; \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

avec $u|_{t=0} = u_0$ et u_0, fonction donnée de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

C'est une équation *non linéaire* qui est souvent utilisée pour modéliser la dynamique des gaz et parfois même le trafic routier !

Supposons que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ soit solution de (B). Alors, par analogie avec le cas linéaire vu précédemment, on définit la caractéristique X^y de u issue de y comme étant la solution de l'EDO :

$$\frac{dX^y}{dt} = u(t, X^y), \qquad X^y(0) = y.$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, cette équation possède une unique solution maximale sur un intervalle semi-ouvert $J^y \subset \mathbb{R}^+$. De plus, par la formule de composition,

$$\frac{d}{dt}\Big(u(t, X^y(t))\Big) = (\partial_t u + u\partial_x u)(t, X^y(t)) = 0.$$

Donc, pour tout $t \in J^y$, on a $u(t, X^y(t)) = u_0(y)$. En réinjectant dans l'ODE définissant X^y, puis par une intégration triviale, on en déduit que

$$\forall t \in J^y, \; X^y(t) = y + tu_0(y).$$

Autrement dit, les courbes caractéristiques sont encore des segments de droites, mais de pente égale à $u_0(y)$ (et donc dépendante de y).

Concentrons-nous sur la résolution de (B) pour les temps positifs. Le raisonnement précédent donne

$$u(t, y + tu_0(y)) = u_0(y).$$

Pour calculer $u(t, x)$ à t fixé pour tout $x \in \mathbb{R}$, il convient donc d'inverser la fonction $X_t : y \mapsto y + tu_0(y)$. Si cela est possible alors on aura, en notant Y_t le difféomorphisme inverse,

$$(1.2) \qquad u(t, x) = u_0(Y_t(x)).$$

Rappelons qu'une fonction $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un difféomorphisme si et seulement si elle tend vers l'infini à l'infini, et sa dérivée est de signe strictement constant. Dans le cas présent, $X_t'(y) = 1 + tu_0'(y)$. En conséquence, si u_0 est une fonction croissante, on est certains que X_t est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $t \geq 0$, et la formule (1.2) donne l'unique solution.

En revanche, si u_0 n'est pas croissante alors il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u_0'(y_0) < 0$ et X_t ne sera pas un difféomorphisme pour $t_0 \geq 0$ vérifiant $1 + t_0 u_0'(y) = 0$ (des caractéristiques se croisent à l'instant t_0). Cela permet de pressentir le résultat suivant :

Théorème 1.3.1. *Supposons* $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

1. *Si* u_0 *est croissante alors le problème de Cauchy (B) avec donnée initiale* u_0 *a une unique solution* $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. *Elle vérifie la formule* (1.2).
2. *Si* u_0 *n'est pas croissante alors le problème de Cauchy (B) avec donnée initiale* u_0 *a une unique solution* $u \in \mathcal{C}^1([0, T^*[\times\mathbb{R})$ *avec*

$$T^* := \inf\big\{-1/u_0'(y),\ y \in \mathbb{R}\ \ t.q.\ \ u_0'(y) < 0\big\}\cdot$$

De plus, il n'existe pas de réel $T > T^*$ *tel que* (B) *ait une solution dans* $\mathcal{C}^1([0, T[\times\mathbb{R})$ *(on dit que la solution "explose" au temps* T^* *).*

Démonstration. Traitons juste le deuxième point, le premier ayant déjà été démontré. Tant que $t < T^*$ alors X_t est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme sur $\mathbb{R}$, et la solution u de (B) est définie par (1.2). En effet, si $x = X_t(y)$ alors, on a

$$(\partial_t u + u\partial_x u)(t, x) = (\partial_t u + u\partial_x u)(t, X_t(y)) = \frac{d}{dt}\Big(u(t, X^y(t))\Big) = \frac{d}{dt}\Big(u_0(y)\Big) = 0.$$

Afin de montrer l'explosion au temps T^*, on considère, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $w_y : t \mapsto \partial_x u(t, X^y(t))$. On suppose pour simplifier que la fonction u est $\mathcal{C}^2$. Alors on a par le théorème de composition et défnition de X^y,

$$w_y'(t) = (\partial^2_{tx} u + u\partial^2_{xx} u)(t, X^y(t)).$$

En dérivant l'équation de Burgers par rapport à x, il vient

$$\partial^2_{tx} u + u\partial^2_{xx} u = -(\partial_x u)^2.$$

En conséquence, w_y vérifie l'*équation de Ricatti* :

$$w_y' = -w_y^2, \qquad w_y(0) = u_0'(y).$$

1. Si $u_0'(y) = 0$ alors l'unique solution de cette équation est la fonction nulle.
2. Si $u_0'(y) < 0$ alors, en vertu de la partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz et du théorème des valeurs intermédiaires, w_y reste strictement négatif, et l'on peut écrire
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{w_y}\right) = 1.$$
En intégrant, on obtient, tant que la solution est définie,
$$\frac{1}{w_y(t)} = t + \frac{1}{u_0'(y)}\cdot$$
En conséquence, w_y explose à l'instant $-1/u_0'(y)$.
3. Si $u_0'(y) > 0$ alors w_y est définie sur $[0, +\infty[$.

En mettant ensemble les différents cas, on peut alors conclure la démonstration de la deuxième partie du théorème. $\square$

Chapitre 2

Equation de Laplace et fonctions harmoniques

2.1 Introduction

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et f une fonction de Ω vers $\mathbb{R}$.

Dans ce chapitre, on cherche à résoudre l'*équation de Laplace* :

$$(L) \qquad \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

et, plus généralement, l'*équation de Poisson* :

$$(P) \qquad -\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

On dira que la fonction u est *harmonique* dans Ω si elle vérifie (L). On s'intéressera principalement à la recherche de solutions classiques de (L) et de (P) c'est-à-dire, vu le contexte, à des fonctions u de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifient les équations en tout point de Ω.

2.1.1 Dimension un

Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}$, une fonction deux fois dérivable est harmonique si et seulement si elle est affine (puisque sa dérivée seconde est nulle). L'ensemble des fonctions harmoniques est donc un sous-espace vectoriel de dimension deux, et la seule fonction harmonique sur $\mathbb{R}$ tendant vers 0 à l'infini est la fonction nulle.

Etudions maintenant (P) dans $\mathbb{R}$ dans le cas où f est continue. La solution générale s'écrit alors (faire une intégration par parties pour obtenir la deuxième égalité) :

$$u(x) = Ax + B - \int_0^x \left(\int_0^y f(z)\,dz \right) dy = Ax + B + \int_0^x (y-x) f(y)\,dy.$$

L'ensemble des solutions de (P) est donc un sous-espace affine de dimension deux, parallèle à l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$, et (P) admet au plus une solution tendant vers 0 à l'infini (car la différence de deux telles solutions est affine et tend vers 0 à l'infini).

Sans hypothèse supplémentaire sur f, il n'y a pas de raison pour qu'il existe une solution de (P) tendant vers 0 à l'infini. Mais si l'on suppose par exemple que f appartient à l'ensemble $\mathcal{C}_c(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω s'annulant en dehors d'un compact de Ω , et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\,dy = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} yf(y)\,dy = 0,$$

alors l'unique solution $\mathcal{C}^2$ de (P) tendant vers 0 en $\pm\infty$ est la fonction :

$$u(x) = \int_x^{\infty} (x-y)f(y)\,dy.$$

Dans le cas $\Omega =]a,b[$, les fonctions harmoniques sont encore nécessairement affines. L'ensemble des fonctions harmoniques est donc le sous-espace vectoriel de dimension deux constitué des fonctions affines.

En ce qui concerne (P), on voit par intégration par parties qu'une fonction u vérifie (P) sur $]a,b[$ si et seulement si il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in]a,b[,\ u(x) = A(x-a) + B + \int_a^x (y-x)f(y)\,dy.$$

Clairement, u s'annule en a si seulement si $B = 0$, et elle s'annule aussi en b si seulement si

$$A(b-a) + \int_a^b (y-b)f(y)\,dy = 0.$$

Il existe donc une unique solution $\mathcal{C}^2$ de (P) sur $]a,b[$ s'annulant à la fois en a et en b.

2.1.2 Dimension deux

On va voir que le cas bi-dimensionnel est beaucoup plus riche et intéressant que le cas uni-dimensionnel. En particulier, l'ensemble des fonctions harmoniques est un sous-espace vectoriel de dimension *infinie.*

Pour étudier les fonctions harmoniques sur le plan, le plus simple est d'identifier $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, et Ω, à un ouvert du plan complexe. On décompose une fonction $U : \Omega \to \mathbb{C}$ en

$$U(x,y) = v(x+iy) + iw(x+iy) \quad \text{avec} \quad v \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{Re} U \quad \text{et} \quad w \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{Im} U.$$

Rappelons que si U est holomorphe, alors les formules de Cauchy-Riemann donnent :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x}\cdot \tag{2.1}$$

En conséquence, comme holomorphe implique $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$), un calcul immédiat donne :

$$\Delta v = 0 \quad \text{et} \quad \Delta w = 0 \quad \text{dans} \ \ \Omega.$$

Donc toute partie réelle ou imaginaire d'une fonction holomorphe est une fonction harmonique. Ainsi, les fonctions

$$(x,y) \mapsto e^x \cos y, \quad (x,y) \mapsto \operatorname{sh} x\, \cos y \text{ et } (x,y) \mapsto x^2 - y^2$$

sont harmoniques sur $\mathbb{R}^2$.

2.2 La solution fondamentale du laplacien

On suppose désormais que $d \geq 2$ et on cherche à calculer des solutions u de (L) dans $\mathbb{R}^d$ invariantes par rotation, c'est-à-dire telles que $u(Rx) = u(x)$ pour toute rotation R de $\mathbb{R}^d$. On peut montrer que de telles fonctions s'écrivent nécessairement sous la forme $u(x) = v(|x|)$ avec $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$. En supposant que v est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, on obtient que u admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, et l'on calcule pour tout $x \neq 0$:

$$\partial_{x_i} u(x) = \frac{x_i}{|x|} v'(|x|) \quad \text{et} \quad \partial^2_{x_i x_i} u(x) = \frac{x_i^2}{|x|^2} v''(|x|) + \frac{v'(|x|)}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3} v'(|x|).$$

Donc

$$\Delta u(x) = v''(|x|) + \frac{d-1}{|x|}\, v'(|x|).$$

On en déduit que

$$\Delta u = 0 \ \text{ sur } \ \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \iff v''(r) + \frac{d-1}{r}\, v'(r) = 0 \ \text{ sur } \ ]0, +\infty[.$$

L'équation différentielle de droite est singulière en 0, mais elle s'intègre à vue. En effet, pour v deux fois dérivable, elle est équivalente à

$$\frac{d}{dr}\big(r^{d-1} v'(r)\big) = 0.$$

Autrement dit, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $v'(r) = C r^{1-d}$ sur $]0, +\infty[$. On en déduit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{aligned} v(r) &= A \log r + B \qquad && \text{si} \quad d = 2,\\ v(r) &= A r^{2-d} + B && \text{si} \quad d \geq 3. \end{aligned}$$

On n'a pas tout à fait réussi à résoudre l'équation de Laplace sur $\mathbb{R}^d$, car la fonction u obtenue à partir de v est singulière en 0. Néanmoins, cette fonction va jouer un rôle important pour résoudre (P). Cela motive la définition suivante.

Définition. On appelle *solution fondamentale du laplacien* la fonction E_d définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par :

$$\begin{aligned} E_d(x) &= -\frac{1}{2\pi} \log |x| && \text{si} \quad d = 2,\\ E_d(x) &= \frac{1}{4\pi |x|} && \text{si} \quad d = 3,\\ E_d(x) &= \frac{1}{d(d-2)|\mathbb{B}^d|\, |x|^{d-2}} && \text{si} \quad d \geq 4, \end{aligned}$$

où $|\mathbb{B}^d|$ désigne la mesure de Lebesgue de la boule unité [1] de $\mathbb{R}^d$.

1. On peut exprimer la solution fondamentale à l'aide de la mesure de la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$ de $\mathbb{R}^d$, en se souvenant que $|\mathbb{S}^{d-1}| = d|\mathbb{B}^d|$.

Avant d'aller plus loin, ouvrons une parenthèse sur les *coordonnées sphériques* dans $\mathbb{R}^d$ et sur la formule d'intégration correspondante : on admet qu'il existe une unique mesure σ définie sur les boréliens de $\mathbb{S}^{d-1}$ et telle que pour toute fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^d$ ou mesurable positive, on ait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} r^{d-1} f(r\sigma)\,d\sigma \right) dr. \tag{2.2}$$

En appliquant cette formule à $f = 1_{\mathbb{B}^d}$, on retrouve que $|\mathbb{B}^d| = \frac{1}{d}|\mathbb{S}^{d-1}|$. De plus, en notant σ_r la mesure image de σ par l'homothétie de rapport r (qui est donc définie sur la sphère $S(0,r)$), la formule ci-dessus se récrit :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{S(0,r)} f(\sigma_r)\,d\sigma_r \right) dr. \tag{2.3}$$

Dans les applications du cours, nous utiliserons principalement ces formules en dimension 2 et 3. Dans le cas $d=2$, les coordonnées sphériques sont aussi appelées coordonnées polaires et correspondent au difféomorphisme [2] :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl}]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \big(\mathbb{R}^- \times \{0\}\big) \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array} \right.$$

La formule de changement de variable dans les intégrales donne :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\!\!\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,d\theta\,dr.$$

En conséquence, la mesure sur $\mathbb{S}^1$ est définie sur les boréliens de $\mathbb{S}^1$ par :

$$\sigma(A) := \int_{-\pi}^{\pi} 1_A(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta.$$

En dimension $d=3$, les coordonnées sphériques correspondent au difféomorphisme [3] :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl}]0,+\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[\times]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus \{x \le 0\} \\ (r,\theta,\varphi) & \longmapsto & (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta). \end{array} \right.$$

La formule de changement de variable dans les intégrales donne :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\!\!\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)\, r^2\cos\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr.$$

En conséquence, la mesure sur $\mathbb{S}^2$ est définie sur les boréliens de $\mathbb{S}^2$ par :

$$\sigma(A) := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_{-\pi}^{\pi} 1_A(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)\,d\theta\,d\varphi.$$

2. Interprétation géométrique : r est la distance à l'origine et θ, l'angle avec l'axe des abscisses.
3. Interprétation géométrique : r est la distance à l'origine, θ est la latitude et φ, la longitude.

Rappelons également que le *produit de convolution* $u \star v$ de deux fonctions intégrables u et v sur $\mathbb{R}^d$ est défini sur $\mathbb{R}^d$ par

$$u \star v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)v(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)v(x-y)\,dy.$$

C'est une application classique du théorème de Fubini que $u \star v$ est elle-même une fonction intégrable.

Théorème 2.2.1. *Soit f une fonction de $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$ (c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^2$ et à support compact). Alors $f \star E_d$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie (P) sur $\mathbb{R}^d$ tout entier.*

Démonstration. Notons $u = f \star E_d$. Il convient tout d'abord de vérifier que u est bien définie sur $\mathbb{R}^d$, et de classe $\mathcal{C}^2$. Par changement de variable, on voit que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,E_d(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,E_d(y)\,dy.$$

Traitons juste le cas $d \geq 3$ (le cas $d = 2$ étant analogue, mais avec des calculs un peu différents). Fixons $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Comme f est continue et à support compact, elle est bornée, et il existe donc $R > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\forall y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ \forall x \in B(x_0,1),\ |f(x-y)\,E_d(y)| \leq C|y|^{2-d} 1_{B(0,R)}(y).$$

La formule d'intégration (2.2) permet de voir que le membre de droite est intégrable. Donc u est bien définie sur $B(x_0,1)$ et, en vertu du théorème de continuité sous le signe intégrale, comme f est continue, u est continue sur $B(x_0,1)$. Comme x_0 est arbitraire, on conclut que u est continue sur $\mathbb{R}^d$.

Pour la différentiabilité, on remarque que, pour tout y fixé dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $x \mapsto f(x-y)\,E_d(y)$ est $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, sa dérivée vaut $\partial_{x_i} f(x-y)\,E_d(y)$. Comme $\partial_{x_i} f$ est continue à support compact, on a encore pour R et C assez grands,

$$\left|\partial_{x_i} f(x-y)\,E_d(y)\right| \leq C|y|^{2-d} 1_{B(0,R)}(y).$$

Le théorème de dérivation (puis de continuité) sous le signe intégrale donne donc u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$ avec, pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$,

$$\partial_{x_i} u = \partial_{x_i} f \star E_d \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^d.$$

Un raisonnement en tout point similaire donne ensuite $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ et, pour tout $(i,j) \in \{1, \cdots, d\}^2$,

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} u = \partial_{x_i}\partial_{x_j} f \star E_d. \tag{2.4}$$

De la même façon, si f est $\mathcal{C}_c^k$, alors on obtient que u est $\mathcal{C}^k$.

Afin de démontrer que $-\Delta u = f$, nous allons utiliser la *formule divergence-flux* dans les cas où Ω est une boule, ou un anneau :

Théorème 2.2.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. Alors on a :*

$$\int_\Omega \operatorname{div} f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \, d\sigma$$

où σ est la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$ et ν, le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega$.

Dans le cas où $\Omega = B(0,R)$, la formule ci-dessus s'écrit :

$$\int_{B(0,R)} \operatorname{div} f \, dx = \int_{S(0,R)} \frac{y \cdot f(y)}{|y|} \, d\sigma_R.$$

Mais revenons à nous moutons. La formule (2.4) donne $\Delta u = E_d \star \Delta f$. Si E_d était intégrable et à dérivées secondes intégrables, alors on aurait aussi $\Delta u = \Delta E_d \star f$ (inverser les rôles de f et de E_d dans la démonstration du théorème 2.2.1). Mais comme $\Delta E_d = 0$ sauf en un point (donc est nulle presque partout), cela donnerait $\Delta u = 0$!!! Mais E_d n'étant pas C^2 sur $\mathbb{R}^d$, ce raisonnement est faux : la singularité en 0 va nous sauver...

Tout d'abord, par théorème de convergence dominée, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$E_d \star \Delta f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} E_d(y) \Delta f(x-y) \, dy = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(x)$$
$$\text{avec} \quad I_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} E_d(y) \Delta f(x-y) \, dy.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}^d$ et utilisons le fait que, comme f est à support compact, on a $f(x-y) = 0$, $\nabla f(x-y)$ et $\Delta f(x-y) = 0$ en dehors d'une boule $B(0,R)$. Cela permet d'affirmer que

$$I_\varepsilon(x) = \int_{B(0,R) \setminus B(0,\varepsilon)} E_d(y) \Delta f(x-y) \, dy.$$

Par la formule de Leibniz, puis la formule divergence-flux appliquée à $\Omega = B(0,R) \setminus B(0,\varepsilon)$, on a donc, en notant $\partial_\nu E_d := \nabla E_d \cdot \nu$,

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x) &= \int_{\varepsilon<|y|<R} \operatorname{div} (E_d(y) \nabla f(x-y)) \, dy - \int_{\varepsilon<|y|<R} \nabla E_d(y) \cdot \nabla f(x-y)) \, dy \\ &= \int_{S(0,R)} E_d(y) \partial_\nu f(x-y) \, d\sigma_R - \int_{S(0,\varepsilon)} E_d(y) \partial_\nu f(x-y) \, d\sigma_\varepsilon \\ &\qquad - \int_{\varepsilon<|y|<R} \nabla E_d(y) \cdot \nabla f(x-y)) \, dy. \end{aligned}$$

La première intégrale est nulle puisque $f(x-y) = 0$ pour $|y| \geq R$. Pour la deuxième intégrale, on a

$$\left| \int_{S(0,\varepsilon)} E_d(y) \partial_\nu f(x-y) \, d\sigma \right| \leq |S(0,\varepsilon)| \sup_{|y|=\varepsilon} |E_d(y)| \max_{z \in \mathbb{R}^d} |\nabla f(z)|.$$

Or, pour $|y| = \varepsilon$, on a $|E_d(y)| = \mathcal{O}(|\log \varepsilon|)$ si $d = 2$, et $|E_d(y)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{2-d})$ si $d \geq 3$. Comme $|S(0,\varepsilon)| = \varepsilon^{d-1} |\mathbb{S}^{d-1}|$, on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S(0,\varepsilon)} E_d(y) \partial_\nu f(x-y) \, d\sigma = 0.$$

On procède de même pour l'intégrale comportant ∇E_d :

$$-\int_{\varepsilon<|y|<R} \nabla E_d(y)\cdot\nabla f(x-y))\,dy = -\int_{S(0,R)} \partial_\nu E_d(y) f(x-y)\,d\sigma_R + \int_{S(0,\varepsilon)} \partial_\nu E_d(y) f(x-y)\,d\sigma_\varepsilon + \int_{\varepsilon<|y|<R} \Delta E_d(y)\,f(x-y)\,dy.$$

Le premier terme de droite est encore nul à cause des propriétés de support de f et le dernier aussi car $\Delta E_d = 0$ en dehors de 0. Enfin, on remarque que

$$\nabla E_d(y) = -\frac{1}{d\,|\mathbb{B}_d|}\frac{y}{|y|^d} = -\frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\frac{y}{|y|^d}.$$

Pour tout $y\in S(0,\varepsilon)$,

$$\partial_\nu E_d(y) = -\frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\frac{1}{\varepsilon^{d-1}} = -\frac{1}{|S(0,\varepsilon)|}.$$

Donc on a, en vertu de la continuité de f en x,

$$-\int_{S(0,\varepsilon)} \partial_\nu E_d(y)\,f(x-y)\,dy = \frac{1}{|S(0,\varepsilon)|}\int_{S(0,\varepsilon)} f(x-y)\,dy \to_{\varepsilon\to+\infty} f(x).$$

On a donc $-\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(x) = f(x)$, ce qui conclut la démonstration. □

Donnons une démonstration élémentaire de la formule divergence-flux pour un disque de $\mathbb{R}^2$. Par changement de variable linéaire, on se ramène au cas $\Omega = B(0,1)$. On utilise alors la formule d'intégration en coordonnées sphériques et la relation suivante :

$$\operatorname{div} f = \frac{1}{r}\partial_r(r\widetilde{f}^r) + \frac{1}{r}\partial_\theta \widetilde{f}^\theta \quad \text{avec} \quad \widetilde{f}^r(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot e_r$$
$$\text{et} \quad \widetilde{f}^\theta(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot e_\theta \quad \text{où} \quad e_r := (\cos\theta,\sin\theta) \quad \text{et} \quad e_\theta := (-\sin\theta,\cos\theta)$$

pour écrire que

$$\begin{aligned}\int_{B(0,1)} \operatorname{div} f\,dx\,dy &= \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{r}\partial_r(r\widetilde{f}^r) + \frac{1}{r}\partial_\theta\widetilde{f}^\theta\Big) r\,d\theta\,dr\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}^r(1,\theta)\,d\theta + \int_0^1 \big(\widetilde{f}^\theta(r,\pi) - \widetilde{f}^\theta(r,-\pi)\big)\,dr\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta + 0\\ &= \int_{\mathbb{S}^1} f\cdot\nu\,d\sigma.\end{aligned}$$

Par une méthode similaire, on laisse au lecteur le soin de démontrer la formule divergence-flux lorsque Ω est un anneau de $\mathbb{R}^2$ (qui peut être vu comme le complémentaire d'un petit disque dans un grand disque) ou une boule de $\mathbb{R}^3$. Dans ce dernier cas, on pourra utiliser le fait que

$$\operatorname{div} f = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\widetilde{f}^r) + \frac{1}{r\cos\theta}\partial_\theta(\cos\theta\,\widetilde{f}^\theta) + \frac{1}{r\cos\theta}\partial_\varphi\widetilde{f}^\varphi$$

où $(\widetilde{f}^r, \widetilde{f}^\theta, \widetilde{f}^\varphi)$ sont les composantes de f en coordonnées sphériques.

Voici deux variantes de la formule divergence-flux à connaître.

Théorème 2.2.3 (Formule de Gauss-Green)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{\Omega}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Alors on a*

$$\int_\Omega \partial_{x_i} f\, dx = \int_{\partial\Omega} f\, \nu \cdot e_i\, d\sigma.$$

Démonstration. On applique la formule divergence flux à $u = (0, \cdots, f, \cdots, 0)$ (la fonction f figure à la i-ième composante), en notant que $\operatorname{div} u = \partial_{x_i} f$. □

Théorème 2.2.4 (Formule d'intégration par parties)**.** *Soit Ω comme ci-dessus. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors on a*

$$\int_\Omega g \operatorname{div} f\, dx = \int_{\partial\Omega} g\, f \cdot \nu\, d\sigma - \int_\Omega f \cdot \nabla g\, dx.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule divergence-flux à la fonction $fg : \Omega \to \mathbb{R}^d$, après avoir remarqué que $\operatorname{div}(fg) = g \operatorname{div} f + f \cdot \nabla g$. □

2.3 Formule de la moyenne et applications

Dans cette section, nous utiliserons la notation

$$\fint_A f\, d\mu := \frac{1}{\mu(A)} \int_A f\, d\mu$$

pour toute mesure μ et fonction intégrable f sur A.

Théorème 2.3.1 (Formule de la moyenne)**.** *Soit u une fonction $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Alors, pour tout x de Ω et $r > 0$ tel que $\bar{B}(x, r) \subset \Omega$, on a*

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u\, dy = \fint_{S(x,r)} u\, d\sigma_r.$$

Démonstration. Par changement de variable et continuité de f, on peut écrire

$$\fint_{S(x,r)} u(\sigma_r)\, d\sigma_r = \fint_{S(0,1)} u(x + r\sigma)\, d\sigma \to_{r\to 0} u(x). \tag{2.5}$$

Par ailleurs, en dérivant la relation ci-dessus, puis par changement de variable, il vient

$$\frac{d}{dr} \fint_{S(x,r)} u(\sigma_r)\, d\sigma_r = \fint_{S(0,1)} \nabla u(x + r\sigma) \cdot \sigma\, d\sigma.$$

On remarque que σ n'est autre que le vecteur unitaire extérieur normal à $S(0,1)$ en σ. En conséquence, la formule divergence-flux (par rapport à la variable y, avec x et r fixés) donne :

$$\fint_{S(0,1)} \nabla u(x + r\sigma) \cdot \sigma\, d\sigma = r \int_{B(0,1)} \Delta u(x + ry)\, dy.$$

Par hypothèse, $\Delta u = 0$. On en conclut que la valeur de $\fint_{S(x,r)} u(\sigma_r)\, d\sigma_r$ est indépendante de r. Cette valeur est $u(x)$, en vertu de (2.5).

La deuxième égalité résulte de la première, de l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation et de (2.3) :

$$\int_{B(x,r)} u(y)\,dy = \int_{B(0,r)} u(x+z)\,dz = \int_0^r \left(\int_{S(0,s)} u(x+\sigma_s)\,d\sigma_s \right) ds = u(x) \int_0^r |S(0,s)|\,ds.$$

La dernière intégrale vaut $|B(x,r)|$, d'où le résultat annoncé. □

On a la réciproque suivante :

Théorème 2.3.2. *Soit u une fonction $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Si u vérifie*

$$\fint_{S(x,r)} u(\sigma)\,d\sigma = u(x)$$

pour tout $x \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\bar{B}(x,r) \subset \Omega$, alors u est harmonique.

Démonstration. Dans le cas contraire, il existerait (quitte à multiplier u par -1) $r > 0$ et $x \in \Omega$ tel que $\bar{B}(x,r) \subset \Omega$ et $\Delta u > 0$ sur $\bar{B}(x,r)$. Le calcul précédent donnerait

$$\frac{d}{dr}\left(\fint_{S(x,r)} u(y)\,dy \right) > 0.$$

La fonction $r \mapsto \fint_{S(x,r)} u(y)\,dy$ ne pourrait donc pas être constante, ce qui contredit les hypothèses. □

Théorème 2.3.3. *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ et u une fonction harmonique dans Ω appartenant à $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ (on dit que "u est continue jusqu'au bord"). Alors on a :*

- *Principe du maximum :* $\max_{x\in\partial\Omega} u(x) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$.
- *Principe du maximum fort : si u atteint son maximum dans Ω, alors u est constante.*
- *Si u est positive au bord, alors u est positive partout.*

Démonstration. Comme $\overline{\Omega}$ et $\partial\Omega$ sont fermés bornés, donc compacts, la fonction u atteint son maximum dans $\overline{\Omega}$ et sa restriction à $\partial\Omega$ atteint son maximum sur $\partial\Omega$. Clairement, $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$ entraîne

$$\max_{x\in\partial\Omega} u(x) \le \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x).$$

Donc, si u atteint son maximum sur $\partial\Omega$ alors il y a égalité. Dans le cas contraire, notons $x_0 \in \Omega$ un point où u atteint son maximum, et $r > 0$ tel que $\bar{B}(x_0,r) \subset \Omega$. Alors la formule de la moyenne donne

$$u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u(y)\,dy.$$

Comme $u \le u(x_0)$ et u est continue, un résultat standard de théorie de l'intégration assure que u vaut $u(x_0)$ sur $B(x_0,r)$. Notons alors $U := \big\{x \in \Omega,\, u(x) = u(x_0)\big\}\cdot$ Le raisonnement précédent assure que U contient x_0 (donc est n'est pas vide), et est ouvert. Par continuité de u, l'ensemble U est fermé. Comme Ω est connexe, on en conclut que u est constante sur Ω.

Le dernier point résulte du premier appliqué à la fonction $-u$. □

Remarque 2.3.1. *On laisse au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer un résulat similaire avec le* min *.*

Corollaire 2.3.1. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^d$*. Considérons le* problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{dans } \ \Omega, \\ u = g & \textit{sur } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

avec f *continue dans* Ω *et* g *continue sur* $\overline{\Omega}$*.*

Alors ce problème admet au plus une solution dans $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$*.*

Démonstration. Le problème de l'unicité dans ce cadre revient à vérifier que l'unique solution $u \in \mathcal{C}^(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \ \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

est la fonction nulle. C'est une conséquence triviale du principe du maximum appliqué à u puis à $-u$. □

2.4 Régularité des fonctions harmoniques

Toutes les fonctions harmoniques vues jusqu'à présent sont $\mathcal{C}^\infty$ (et même analytiques, c'est-à-dire développables en série entière au voisinage de chacun des points de leur domaine de définition). C'est un fait général qui découle du lemme suivant.

Lemme 2.4.1. *Si* $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ *vérifie la formule de moyenne pour toute sphère* $S(x,r)$ *telle que* $\bar{B}(x,r) \subset \Omega$*, alors* $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$*.*

Démonstration. Soit $\phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction paire non nulle, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et supportée [4] dans $[-1,1]$. On définit alors la fonction $\chi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \chi(x) = \frac{1}{c_d}\phi(|x|) \quad \text{avec} \quad c_d := \int_{\mathbb{R}^d} \phi(|y|)\, dy$$

puis, pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\chi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

Par construction, les fonctions χ_ε sont $\mathcal{C}^\infty$, positives, supportées dans $\bar{B}(0,\varepsilon)$ et d'intégrale sur $\mathbb{R}^d$ égale à 1.

On définit ensuite sur $\Omega_\varepsilon := \big\{x \in \Omega,\ d(x,\Omega) > \varepsilon\big\}$ la fonction $u_\varepsilon := \chi_\varepsilon \star u$ (qui peut être vue comme une moyenne pondérée de u).

4. On peut prendre par exemple la fonction $e^{-\frac{1}{1-r^2}}\, 1_{[-1,1]}(r)$.

Comme $\chi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, en appliquant de façon itérée le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on vérifie que u_ε est $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω_ε. De plus, en utilisant le fait que χ_ε est à support dans $B(0,\varepsilon)$, on obtient l'égalité suivante pour tout $x \in \Omega_\varepsilon$:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{B(x,\varepsilon)} \chi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)u(y)\,dy = \int_{B(0,1)} \chi(-z)u(x+\varepsilon z)\,dz.$$

Par la formule d'intégration en coordonnées sphériques, on en déduit que

$$u_\varepsilon(x) = \int_0^1 \Big(\int_{S(0,r)} \chi(-\sigma_r)u(x+\varepsilon\sigma_r)\,d\sigma_r\Big)dr.$$

Vu la définition de χ, on a $\chi(-\sigma_r) = c_d^{-1}\phi(r)$ pour tout $\sigma_r \in S(0,r)$, et donc en utilisant le fait que u vérifie la formule de la moyenne, il vient finalement :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= c_d^{-1}\int_0^1 \phi(r)\Big(\int_{S(0,r)} u(x+\varepsilon\sigma_r)\,d\sigma_r\Big)dr \\ &= u(x)\, c_d^{-1}\int_0^1 \phi(r)\Big(\int_{S(0,r)} d\sigma_r\Big)dr \\ &= u(x)\int_0^1\int_{S(0,r)} \chi(\sigma_r)\,d\sigma_r\,dr \\ &= u(x)\int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)\,dy = u(x). \end{aligned}$$

En conséquence, $u(x) = u_\varepsilon(x)$, et u est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω_ε. Le raisonnement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que u est $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω. □

Corollaire 2.4.1. *Soit u harmonique sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k \geq 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ de longueur k, tout $x \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$, on a*

$$|\partial_\alpha u(x)| \leq \frac{C_k}{r^{d+k}}\int_{B(x,r)} |u(y)|\,dy.$$

De plus, C_k ne dépend que de k et de d.

Démonstration. Comme u est harmonique, elle est $\mathcal{C}^\infty$ et il est évident que toutes ses dérivées sont harmoniques. Pour établir l'inégalité, on raisonne par récurrence sur l'ordre de dérivation.

— Si $|\alpha| = 0$ alors on a le résultat voulu puisque, par la formule de la moyenne,

$$|u(x)| = \Big|\fint_{B(x,r)} u(y)\,dy\Big| \leq \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |u(y)|\,dy \quad \text{et} \quad |B(x,r)| = r^d|\mathbb{B}^d|.$$

— Pour $|\alpha| = 1$, on applique la formule de la moyenne à $\partial_{x_j}u$ sur la boule $B(x,r/2)$, puis la formule de Green. Il vient :

$$\partial_{x_j}u(x) = \fint_{B(x,r/2)} \partial_{x_j}u(y)\,dy = \frac{1}{|B(x,r/2)|}\int_{S(x,r/2)} u\nu_j\,d\sigma,$$

d'où, en vertu de la première étape,

$$\begin{aligned}|\partial_{x_j}u(x)| &\leq \frac{|S(x,r/2)|}{|B(x,r/2)|}\|u\|_{L^\infty(S(x,r/2))}\\ &\leq \frac{|S(x,r/2)|}{|B(x,r/2)|}\frac{\|u\|_{L^1(B(x,r))}}{|B(x,r/2)|}\\ &\leq \frac{d\,2^{d+1}}{r^{d+1}|\mathbb{B}^d|}\|u\|_{L^1(B(x,r))}.\end{aligned}$$

— Le cas $|\alpha| = k+1$ se démontre à partir du cas $|\alpha| = k$ par un argument en tout point similaire.

On conclut par récurrence. □

Remarque 2.4.1. *En majorant précisément C_k, on peut montrer qu'une fonction harmonique est développable en série entière au voisinage de chacun de ses points. La notion de fonction harmonique peut donc être vue comme une généralisation de celle de fonction holomorphe, valable en toute dimension.*

Théorème 2.4.1 (de Liouville)**.** *Les seules fonctions harmoniques et bornées sur $\mathbb{R}^d$ sont les fonctions constantes.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Le corollaire précédent peut s'appliquer avec $k = 1$ et tout $r > 0$: il existe donc $C > 0$ tel que

$$\forall r > 0,\ |\nabla u(x)| \leq \frac{C}{r^{d+1}}\int_{B(x,r)}|u(x)|\,dx \leq \frac{C|\mathbb{B}^d|\|u\|_{L^\infty}}{r}.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $\nabla u(x) = 0$. Donc u doit être constante sur $\mathbb{R}^d$. □

Corollaire 2.4.2. *Si $d \geq 2$ alors toutes les solutions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d$ et bornées de (P) avec $f \in \mathcal{C}^2_c(\mathbb{R}^d)$ sont du type $E_d \star f + A$, avec $A \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Posons $u = E_d \star f + A$. On a vu précédemment que $E_d \star f$ était $\mathcal{C}^2$ et vérifiait $-\Delta(E_d \star f) = f$. Donc u est $\mathcal{C}^2$ et vérifie (P). De plus, si $B(0,R)$ contient le support de f, alors

$$u(x) = \int_{B(0,R)} f(y)E_d(x-y)\,dy.$$

Supposons pour simplifier que $d \geq 3$. Alors comme f est bornée, en utilisant l'expression de E_d, on voit qu'il existe $C \geq 0$ telle que

$$|u(x)| \leq C\int_{B(0,R)}\frac{dy}{|x-y|^{d-2}} = C\int_{B(x,R)}\frac{dz}{|z|^{d-2}}.$$

Si $|x| \leq 2R$ alors $B(x,R) \subset B(0,3R)$, et l'on obtient alors

$$\int_{B(x,R)}\frac{dz}{|z|^{d-2}} \leq \int_{B(0,3R)}\frac{dz}{|z|^{d-2}} = |\mathbb{S}^{d-1}|\int_0^{3R}\frac{r^{d-1}}{r^{d-2}}\,dr = \frac{9}{2}|\mathbb{S}^{d-1}|R^2.$$

Si $|x| \geq 2R$ alors on a toujours $|z| \geq R$ pour $z \in B(x,R)$, d'où

$$\int_{B(x,R)} \frac{dz}{|z|^{d-2}} \leq \frac{|B(x,R)|}{R^{d-2}} = C_d R^2$$

avec $C_d \geq 0$ ne dépendant que de d. En conséquence, $|u(x)| \leq CR^2$ avec C ne dépendant que de f, et donc u est bornée.

Enfin, il n'existe pas d'autre type de solution bornée au problème car si v bornée vérifie $-\Delta v = f$ alors $-\Delta(v - E_d \star f) = 0$. Donc par le théorème de Liouville, $v - E_d \star f$ est constante. □

On termine cette section en énonçant un résultat disant qu'une fonction harmonique ne peut pas avoir de variations trop rapides.

Théorème 2.4.2 (Inégalité de Harnack)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et V un sous-ensemble borné de Ω, connexe et tel que $\overline{V} \subset \Omega$. Il existe une constante C ne dépendant que de V et de Ω telle que pour toute fonction u harmonique $\mathcal{C}^2$ et positive sur Ω on ait :*

$$\sup_{x \in V} u(x) \leq C \inf_V u(x).$$

Démonstration. Soit $x \in V$. Comme $x \notin \partial\Omega$, on peut affirmer que $d(x, \partial\Omega) > 0$ (exo : le prouver). Prenons alors $r = \frac{1}{4} d(x, \partial\Omega)$ et considérons $y \in V$ tel que $|x - y| \leq r$. La définition de r nous permet d'affirmer que $B(x, 2r) \subset \Omega$. On peut donc appliquer la formule de la moyenne suivante :

$$u(x) = \fint_{B(x,2r)} u(z)\, dz.$$

Comme u est positive, et $B(y,r) \subset B(x,2r)$, on en déduit que

$$u(x) \geq \frac{1}{|B(x,2r)|} \int_{B(y,r)} u(z)\, dz = \frac{|B(y,r)|}{|B(x,2r)|}\, u(y) = 2^{-d} u(y).$$

On a donc montré que

$$\Big\{ (x,y) \in V^2 \;\text{ et }\; |x - y| \leq r \Big\} \Longrightarrow u(x) \geq 2^{-d} u(y).$$

Comme $\overline{V}$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini N de boules B_i de rayon $r/2$, et la connexité assure que pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, il existe $j \in \{1, \cdots, N\}$ tel que $B_i \cap B_j \neq \emptyset$. Quitte à renuméroter ces boules, on peut supposer que $B_i \cap B_{i+1} \neq 0$, et il est alors possible d'itérer l'argument précédent pour finalement obtenir $u(x) \geq 2^{-Nd} u(y)$. □

2.5 Hypothèses plus générales et solutions faibles

La fonction $E_d \star f$ reste bien définie sous des hypothèses bien plus faibles que $f \in \mathcal{C}^2_c$. En effet, en dimension $d \geq 3$ et pour f dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, on peut écrire

$$E_d \star f = E_d^1 \star f + E_d^2 \star f \quad \text{avec} \quad E_d^1 = E_d\, 1_{B(0,1)} \quad \text{et} \quad E_d^2 = E_d\, 1_{{}^c B(0,1)}.$$

Il est clair que E_d^1 est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et que E_d^2 est bornée. Donc, comme le produit de convolution est continu de $L^1 \times L^1$ dans L^1 (conséquence du théorème de Fubini) et de $L^1 \times L^\infty$ dans L^∞ (trivial), on conclut que $E_d \star f$ est définie presque partout, en tant que somme d'une fonction L^1 et d'une fonction bornée. Mais peut-on pour autant affirmer que $E_d \star f$ vérifie (P) ? Certainement pas au sens classique puisque supposer juste f intégrable n'assure pas que $E_d \star f$ est deux fois dérivable. On se propose de généraliser la notion de solution afin que $E_d \star f$ vérifie (P) en un sens plus faible.

Supposons donc connue une solution $\mathcal{C}^2$ de (P) et considérons une *fonction test* $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$. Soit $R > 0$ tel que $\operatorname{Supp} \varphi$ soit inclus dans $B(0, R)$ (donc en particulier φ et ses dérivées d'ordre 1 et 2 sont nulles sur $S(0, R)$).

En remarquant que $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$ et en appliquant la formule d'intégration par parties aux fonctions ∇u et φ, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Delta u \, \varphi \, dx = \int_{B(0,R)} \Delta u \, \varphi \, dx = \int_{S(0,R)} \partial_\nu u \, \varphi \, d\sigma - \int_{B(0,R)} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Comme $\varphi = 0$ sur $S(0, R)$, l'intégrale sur $S(0, R)$ est nulle. On applique alors à nouveau la formule d'intégration par parties, mais avec les fonctions $\nabla \varphi$ et u, et il vient

$$\int_{B(0,R)} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{S(0,R)} \partial_\nu \varphi \, u \, d\sigma - \int_{B(0,R)} u \, \Delta \varphi \, dx.$$

A nouveau, l'intégrale sur $S(0, R)$ est nulle. Enfin, on a par hypothèse $-\Delta u = f$. On a donc montré que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d), \; -\int_{\mathbb{R}^d} u \, \Delta \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \, \varphi \, dx.$$

Définition. Soit f une fonction *localement intégrable* sur $\mathbb{R}^d$ (i.e. intégrable sur toute boule de $\mathbb{R}^d$). On dit que u est *solution faible* de (P) si u est localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et vérifie

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d), \; -\int_{\mathbb{R}^d} u \, \Delta \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \, \varphi \, dx.$$

Le théorème suivant (énoncé seulement pour $d \geq 3$ pour simplifier) donne une réponse satisfaisante à notre question initiale.

Théorème 2.5.1. *Si $d \geq 3$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $E_d \star f$ est solution faible de (P).*

Démonstration. Nous allons tout d'abord établir que $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour ce faire, considérons une fonction g de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et la famille d'approximations de l'identité $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ utilisée précédemment. Comme application immédiate du théorème de dérivation sous le signe intégrale, on obtient que la fonction $\chi_\varepsilon \star g$ est $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ (en fait $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$). De plus, comme χ_ε et g sont à support compact, il en est de même pour $\chi_\varepsilon \star g$. Montrons ensuite que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\chi_\varepsilon \star g - g\|_{L^1} = 0. \tag{2.6}$$

On écrit pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, grâce à un changement de variable dans le produit de convolution et au fait que χ est d'intégrale 1,

$$\chi_\varepsilon \star g(x) - g(x) = \int_{B(0,1)} \chi(y) \big(g(x - \varepsilon y) - g(x) \big) dy.$$

La continuité de g et le théorème de convergence dominée assurent que $\lim_{\varepsilon\to 0} \chi_\varepsilon \star g(x) - g(x) = 0$. De plus, il existe $R > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, la fonction $\chi_\varepsilon \star g - g$ soit supportée dans $B(0,R)$ et l'on a

$$\forall x \in B(0,R),\ |\chi_\varepsilon \star g(x) - g(x)| \le 2\|g\|_{L^\infty}.$$

Comme le terme de droite est intégrable sur $B(0,R)$, on peut conclure par convergence dominée à (2.6).

On sait par ailleurs que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ (résultat fondamental de la théorie de l'intégration). Soit alors $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\eta > 0$. Il existe donc $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f - g\|_{L^1} \le \eta/2$. Puis, grâce à (2.6), il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|\chi_\varepsilon \star g - g\|_{L^1} \le \eta/2$. On a donc $\|\chi_\varepsilon \star g - f\|_{L^1} \le \eta$, d'où la densité de $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Passons à la démonstration du théorème proprement dit. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $f_n \to f$ dans L^1. Les résultats sur les solutions classiques assurent que $f_n \star E_d$ est solution classique, donc faible de (P). Cela signifie que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d),\ -\int_{\mathbb{R}^d} (E_d \star f_n)\, \Delta\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \varphi\, dx.$$

Le membre de droite tend vers $\int_{\mathbb{R}^d} f\, \varphi\, dx$ car

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f_n\, \varphi\, dx - \int_{\mathbb{R}^d} f\, \varphi\, dx \right| \le \|\varphi\|_{L^\infty} \|f_n - f\|_{L^1}.$$

Pour le membre de gauche, on décompose E_d en $E_d^1 + E_d^2$ comme plus haut, puis on écrit

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}^d} (E_d^1 \star f_n)\, \Delta\varphi\, dx - \int_{\mathbb{R}^d} (E_d^1 \star f)\, \Delta\varphi\, dx \right| &\le \|E_d^1 \star f_n - E_d^1 \star f\|_{L^1} \|\Delta\varphi\|_{L^\infty} \\ &\le \|E_d^1\|_{L^1} \|f_n - f\|_{L^1} \|\Delta\varphi\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}^d} (E_d^2 \star f_n)\, \Delta\varphi\, dx - \int_{\mathbb{R}^d} (E_d^2 \star f)\, \Delta\varphi\, dx \right| &\le \|E_d^2 \star f_n - E_d^2 \star f\|_{L^\infty} \|\Delta\varphi\|_{L^1} \\ &\le \|E_d^2\|_{L^\infty} \|f_n - f\|_{L^1} \|\Delta\varphi\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Comme $f_n \to f$ dans L^1, les termes de droite ci-dessus tendent vers 0, et l'on conclut que

$$-\int_{\mathbb{R}^d} (E_d^1 \star f + E_d^2 \star f)\, \Delta\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f\varphi\, dx.$$

Donc $E_d \star f$ est bien solution faible de (P). □

Chapitre 3

Transformation de Fourier et EDP

Dans ce chapitre, on présente quelques situations où la théorie de la transformation de Fourier permet de résoudre une EDP.

3.1 Propriétés classiques de la transformée de Fourier

La *transformée de Fourier* d'une fonction f de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx, \tag{3.1}$$

où $x \cdot \xi$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

La fonction $\widehat{f}$ est alors continue sur $\mathbb{R}^d$ (conséquence du théorème de continuité sous le signe intégrale) et converge vers 0 à l'infini (théorème de Riemann-Lebesgue qui se démontre en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$).

De plus, la fonction $f \mapsto \widehat{f}$ est une application linéaire continue (on parle aussi d'opérateur borné) de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Théorème 3.1.1 (d'inversion)**.** *Pour toute fonction f de L^1 avec transformée de Fourier dans L^1, on a la* formule d'inversion *suivante pour presque tout x dans $\mathbb{R}^d$:*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{ix\cdot\xi}\mathcal{F}f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x) \quad \text{avec } \overline{\mathcal{F}}g(\xi) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}g(-\xi) \tag{3.2}$$

Théorème 3.1.2 (Fourier-Plancherel)**.** *La transformation de Fourier s'étend par densité de $L^1\cap L^2$ dans L^2 en un automorphisme sur L^2, d'inverse $(2\pi)^{-d}\overline{\mathcal{F}}$. De plus, pour tout couple (f,g) de functions de L^2, on a l'*égalité de Parseval *suivante :*

$$\int \widehat{f}\,\overline{\widehat{g}}\,d\xi = (2\pi)^d \int f\,\overline{g}\,dx.$$

A titre d'exercice, on démontrera les propriétés suivantes de la transformation de Fourier pour toute fonction f de L^1 :

— Si $\lambda > 0$ alors on a $\mathcal{F}(f(\lambda\cdot)) = \lambda^{-d}\mathcal{F}f(\lambda^{-1}\cdot)$.

— Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, on a $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\cdot\xi}\mathcal{F}f(\xi)$, où τ_a désigne l'*opérateur de translation* $f \mapsto f(\cdot - a)$ (i.e. $\tau_a f(x) \overset{\text{déf}}{=} f(x-a)$).

La transformation de Fourier transforme le produit de convolution en produit. Par exemple, comme conséquence classique du théorème de Fubini, on a l'identité suivante :

$$\forall (f,g) \in L^1(\mathbb{R}^d) \times L^1(\mathbb{R}^d),\ \mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}f\, \mathcal{F}g. \tag{3.3}$$

A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il n'est pas difficile de montrer que le produit de convolution est continu de $L^1 \times L^2$ dans L^2 (avec norme 1) ce qui, en combinant avec un argument de densité permet d'obtenir encore (3.3) si f est dans L^1 et g dans L^2.

3.2 L'espace de Schwartz et les distributions tempérées

Un des intérêts de la transformée de Fourier dans la résolution des EDP est qu'elle transforme les dérivées de fonctions suffisamment régulières et décroissantes à l'infini en multiplication par un monôme. Par exemple, pour f de classe C^1, intégrable et telle que $\partial_{x_j} f$ soit intégrable, on a

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}f(\xi).$$

De façon analogue, si f et xf sont intégrables, alors $\mathcal{F}f$ est $\mathcal{C}^1$, et l'on a

$$\mathcal{F}(x_j f) = i\partial_{\xi_j} \mathcal{F}f.$$

Lorsque l'on étudie des EDP d'ordre quelconque, il est agréable de pouvoir utiliser ces deux formules à tout ordre et sans se poser de question. C'est la raison pour laquelle on va introduire un espace de fonctions infiniment régulières, et décroissantes à l'infini comme suit :

Définition. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions u de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$\|u\|_{k,\mathcal{S}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{|\alpha| \leq k \\ x \in \mathbb{R}^d}} (1+|x|)^k |\partial^\alpha u(x)| < \infty.$$

L'espace de Schwartz est un espace vectoriel, mais on ne peut pas le munir d'une norme pour lequel il soit complet. Un substitut acceptable est de le munir de la suite de normes $(\|\cdot\|_{k,\mathcal{S}})_{k\in\mathbb{N}}$. A partir de ces normes, il est possible de définir une distance qui rende $\mathcal{S}$ complet (on parle d'*espace de Fréchet*), ce qui, en pratique est suffisant pour la plupart des manipulations que l'on fait dans l'étude des EDPs. Mais l'intérêt de cet espace réside en premier lieu dans le fait que, pour toute fonction f de $\mathcal{S}$ et pour tout multi-indice α de $\mathbb{N}^d$, on a

$$(i\partial)^\alpha \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(x^\alpha \phi)(\xi) \quad \text{et} \quad (i\xi)^\alpha \widehat{\phi}(\xi) = \mathcal{F}(\partial^\alpha \phi)(\xi). \tag{3.4}$$

Cela entraîne le résultat fondamental suivant :

Théorème 3.2.1. *La transformation de Fourier est continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ au sens suivant : pour tout entier k, il existe un nombre C_k et un entier N_k tels que*

$$\forall \phi \in \mathcal{S},\ \|\widehat{\phi}\|_{k,\mathcal{S}} \leq C_k \|\phi\|_{N_k,\mathcal{S}}.$$

Définition. On appelle *distribution tempérée* sur $\mathbb{R}^d$ toute forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ [1]. L'ensemble des distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

L'image d'une fonction ϕ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par une distribution tempérée u est notée $\langle u, \phi\rangle$.

Comme conséquence du théorème de Banach-Steinhaus généralisé aux espaces de Fréchet (voir par exemple [1]), on établit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distributions tempérées converge vers une distribution tempérée u si et seulement si pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la suite $(\langle u_n, \phi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, on a

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\,,\ \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \phi\rangle = \langle u, \phi\rangle.$$

Exemple fondamental de distribution tempérée : Soit L^1_M l'ensemble des fonctions f mesurables sur $\mathbb{R}$ telles qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $(1 + |\cdot|)^{-k} f$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit alors l'opérateur T_f sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par :

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle T_f, \phi\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f\,\phi\,dx.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que T_f est une distribution tempérée. On peut de plus montrer que l'application $f \longmapsto T_f$ est injective. De ce fait, la connaissance de T_f détermine de façon unique la fonction intégrable f, ce qui autorise un abus de notation courant, que l'on adoptera dans la suite du cours, consistant à désigner par f la distribution T_f, bien que ces deux objets mathématiques ne soient pas du tout de même nature !

Lien entre mesures et distributions tempérées : Soit μ une mesure bornée sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. Alors on définit l'opérateur T_μ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par :

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle T_\mu, \phi\rangle := \int \phi\,d\mu.$$

Comme dans l'exemple précédent, c'est une distribution tempérée (que l'on note souvent μ).

A tout opérateur borné (i.e. forme linéaire continue) $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, on peut associer l'*opérateur transposé* via la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *Soit $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ linéaire continu* [2]. *Alors, la formule*

$$\langle {}^t\!Au, \phi\rangle \stackrel{déf}{=} \langle u, A\phi\rangle$$

définit une distribution tempérée ${}^t\!Au$. De plus, ${}^t\!A : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ est linéaire continu au sens suivant : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{S}'$ qui converge vers u dans $\mathcal{S}'$, alors $({}^t\!Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ${}^t\!Au$ dans $\mathcal{S}'$.

1. Autrement dit, u est une distribution tempérée s'il existe une constante C et un entier k tels que $|\langle u, \phi\rangle| \le C\|\phi\|_{k,\mathcal{S}}$ pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

2. i.e. pour tout entier k, il existe une constante C et un entier N tels que $\|A\phi\|_{k,\mathcal{S}} \le C\|\phi\|_{N,\mathcal{S}}$ pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 1. Prenons le cas où A est l'opérateur de multiplication par la fonction x_j. Si u est une fonction intégrable, on voit que ${}^tA$ est encore la multiplication par x_j, et il est donc naturel d'étendre A sur $\mathcal{S}'$ en le prenant égal à ${}^tA$. Autrement dit,

$$\forall u \in \mathcal{S}',\, \forall \phi \in \mathcal{S},\ \langle x_j u, \phi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle u, x_j \phi \rangle.$$

On démontrerait exactement de la même façon que pour toute fonction f de classe C^∞ et à croissance au plus polynômiale, l'opérateur de multiplication M_f défini de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ par $M_f(\phi) \stackrel{\text{déf}}{=} f\phi$ peut s'étendre de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$ par :

$$\forall u \in \mathcal{S}',\, \forall \phi \in \mathcal{S},\ \langle M_f u, \phi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle u, f\phi \rangle.$$

Exemple 2. Si l'on prend l'opérateur de dérivation ∂_j, une intégration par parties montre que dans le cas où u est $\mathcal{C}^1$ et à support compact,

$$\forall \phi \in \mathcal{S},\ \langle \partial_j u, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u\, \phi\, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} u\, \partial_j \phi\, ds = -\langle u, \partial_j \phi \rangle.$$

En conséquence, dans ce cas, on a ${}^T\partial_j = -\partial_j$, et il devient naturel d'étendre ∂_j à $\mathcal{S}'$ en posant :

$$\forall u \in \mathcal{S}',\, \forall \phi \in \mathcal{S}, \langle \partial_j u, \phi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} -\langle u, \partial_j \phi \rangle.$$

Exemple 3. Considérons le cas $A = \mathcal{F}$. On définit donc ${}^t\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ par

$$\langle {}^t\mathcal{F} f, \phi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle f, \mathcal{F}\phi \rangle.$$

On remarque que, si f est L^1 alors, en vertu du théorème de Fubini et de la définition de la transformée de Fourier sur L^1, on a, pour tout $\phi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
\langle {}^t\mathcal{F} f, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{\phi}(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi} \phi(\xi)\, dx\, d\xi \\
&= \langle \mathcal{F} f, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Donc, ${}^t\mathcal{F}$ restreint aux fonctions L^1 coïncide avec la transformée de Fourier des fonctions, et on la note donc encore $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$.

A titre d'exercice, le lecteur pourra établir les formules utiles suivantes :

Proposition 3.2.2. *Pour tout* (u, θ) *dans* $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$, $\lambda > 0$ *et* $(a, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, *on a*

$$(i\partial)^\alpha \widehat{u} = \mathcal{F}(x^\alpha u)\,, \quad (i\xi)^\alpha \widehat{u} = \mathcal{F}(\partial^\alpha u)\,, \tag{3.5}$$

$$e^{-ia\cdot\xi} \widehat{u} = \mathcal{F}(\tau_a f)\,, \quad \tau_\omega \widehat{f} = \mathcal{F}(e^{ix\cdot\omega} f)\,, \quad \lambda^{-d} \widehat{f}(\lambda^{-1}\xi) = \mathcal{F}(f(\lambda x)) \tag{3.6}$$

$$\textit{et} \quad \mathcal{F}(u \star \theta) = \widehat{\theta}\, \widehat{u}. \tag{3.7}$$

Démonstration. Le cas où u et θ sont dans $\mathcal{S}$ est immédiat. La généralisation à $u \in \mathcal{S}'$ découle de la définition de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}'$. $\square$

3.3 L'équation de Bessel

On cherche à résoudre l'*équation de Bessel* suivante :

$$(B_\lambda) \qquad -\Delta u + \lambda u = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^d$$

où $\lambda > 0$ est donné, et la fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est connue.

3.3.1 Cas $d = 1$

Il s'agit de l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$\lambda u - u'' = f.$$

Cette équation peut se résoudre explicitement (à quadrature près) par la méthode de variation de la constante, ou par factorisation. Si f est continue, l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de dimension 2.

3.3.2 Le cas général

Si l'on suppose connue une solution u dans $\mathcal{S}$ de (B_λ) (ce qui implique que f doit être dans $\mathcal{S}$), on trouve

$$\lambda\widehat{u} + |\xi|^2\widehat{u} = \widehat{f},$$

d'où

$$\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,\widehat{E}_d^\lambda(\xi) \quad \text{avec} \quad \widehat{E}_d^\lambda(\xi) := \frac{1}{\lambda + |\xi|^2}.$$

Réciproquement, si f est dans $\mathcal{S}$, alors il en est de même pour $\widehat{f}$, et la formule ci-dessus entraîne que $\widehat{u}$ est dans $\mathcal{S}$. Comme $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est une isométrie, on conclut que u est dans $\mathcal{S}$. Dans la suite, on aimerait affaiblir les hypothèses sur f.

Théorème 3.3.1. *Supposons $d \in \{1,2,3\}$ et soit E_d^λ la distribution tempérée de transformée de Fourier $\widehat{E}_d^\lambda$. Notons $\widetilde{H}^2 := \{z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d),\ z, Dz, D^2z \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$, la fonction $u := E_d^\lambda \star f$ est l'unique solution $\widetilde{H}^2$ vérifiant (B_λ).*

Démonstration. Existence : Pour $d = 1,2,3$, la fonction $\widehat{E}_d^\lambda$ est $L^2(\mathbb{R}^d)$, donc il en est de même pour E_d^λ. Comme f est intégrable, les inégalités de convolution vues en TD assurent que u est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Pour x_0 fixé, on peut trouver $R > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, 1)$, la fonction $f(x_0 - \cdot)$ soit supportée dans $B(0, R)$, et l'on a donc

$$u(x) = \int_{B(0,R)} f(x-y)E_d^\lambda(y)\,dy. \tag{3.8}$$

Comme E_d^λ est intégrable sur tout borné (car L^2) et f est $\mathcal{C}^2$, les théorèmes de dérivation et de continuité sous le signe intégrale donnent $u \in \mathcal{C}^2$ avec de plus,

$$Du = Df \star E_d^\lambda \quad \text{et} \quad D^2u = D^2f \star E_d^\lambda.$$

Les dérivées d'ordre 1 et 2 de f étant intégrables (car continues à support compact), on en conclut que Du et D^2u sont aussi L^2.

Enfin, $\mathcal{F}(\lambda u - \Delta u)(\xi) = (\lambda + |\xi|^2)\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$, dans L^2, donc l'équation est vérifiée dans L^2. Il y a égalité en tout point car les deux membres sont continus.

Unicité : Cela revient à vérfier que l'unique solution dans $\widehat{H}^2$ de (B_λ) avec $f = 0$ est la fonction nulle. Le calcul ci-dessus donne,

$$(\lambda + |\xi|^2)\widehat{u}(\xi) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Donc $\widehat{u} = 0$, et comme u est en particulier L^2, on conclut que $u = 0$. □

Remarque. A l'aide des coordonnées sphériques, on peut démontrer que

$$E_3^\lambda(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,|x|}}{|x|} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

3.3.3 Retour à l'équation de Poisson

Formellement, si u_λ est la solution de (B_λ), on s'attend à ce que u_λ tende vers une solution de (P) quand $\lambda \to 0$. Pour justifier ce résultat, il sera commode d'introduire la notion de solution faible pour (B_λ) inspirée de celle donnée pour (P).

Définition. Supposons $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On dit que u est *solution faible* de (B_λ) si

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} u\,(\lambda\varphi - \Delta\varphi)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f\,\varphi\,dx.$$

Théorème 3.3.2. *Si f est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $E_d^\lambda \star f$ est solution faible de (B_λ).*

Démonstration. Les solutions fortes construites précédemment sont solutions faibles. Pour démontrer le théorème, on utilise alors un argument de densité similaire à celui du chapitre précédent : on approche $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ au sens L^1 par une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$, et on note $u_n := E_d^\lambda \star f_n$. A l'aide du théorème précédent et d'intégrations par parties, on obtient :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} u_n\,(\lambda\varphi - \Delta\varphi)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f_n\,\varphi\,dx.$$

Comme $f_n \to f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $E_d^\lambda \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a $u_n \to u$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et on peut alors passer à la limite dans l'égalité ci-dessus. □

Comme conséquence, on obtient le résultat suivant que l'on n'énonce que pour $d = 3$ pour simplifier.

Théorème 3.3.3. *Supposons $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^3)$. Alors $u := E_3 \star f$ est solution classique de l'équation de Poisson (P).*

Démonstration. On remarque que $E_3^\lambda \to E_3$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et dans $L_M^1(\mathbb{R}^3)$. En calculant la solution u_λ de (B_λ) à l'aide de (3.8), on en déduit que $u_\lambda \to E_3 \star f$ en tout point lorsque $\lambda \to 0$ et, de même, $\Delta u_\lambda \to E_3 \star \Delta f$. En conséquence, $\lambda u_\lambda - \Delta u_\lambda \to -E_3 \star \Delta f = -\Delta(E_3 \star f)$. Vu la définition de u_λ, on conclut que $E_3 \star f$ vérifie (P) en tout point. □

Corollaire 3.3.1. *La transformée de Fourier de la solution fondamentale du laplacien E_3 est égale à $\xi \to |\xi|^{-2}$.*

Démonstration. Pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ et en vertu du théorème de convergence dominée, on peut écrire que

$$\langle \widehat{E}_3^\lambda, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\xi)}{\lambda + |\xi|^2}\, d\xi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^2}\, d\xi \quad \text{pour} \quad \lambda \to 0.$$

Par ailleurs, on constate en écrivant $E_3^\lambda = E_3^\lambda 1_{B(0,1)} + E_3^\lambda 1_{{}^cB(0,1)}$ que $E_3^\lambda \to E_3$ dans $L^1 + L^\infty$, donc dans l'espace L^1_M, et donc a fortiori dans $\mathcal{S}'$. Comme $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ est continue, on peut donc affirmer que $\widehat{E}_3^\lambda \to \widehat{E}_3$ dans $\mathcal{S}'$, et la relation ci-dessus permet de conclure que $\widehat{E}_3$ peut être identifée à la fonction $\xi \mapsto |\xi|^{-2}$. □

3.4 L'équation de la chaleur

Il s'agit maintenant de résoudre l'*équation de la chaleur* suivante :

$$(C) \qquad \partial_t u - \Delta u = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$$

où la fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est donnée.

L'inconnue est la fonction $u = u(t, x)$, et la notation Δ désigne ici le laplacien par rapport aux variables $(x_1, \cdots, x_d)$.

Supposons que f soit dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ et que u soit une solution $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ de (C). On prend la transformée de Fourier (encore notée $\mathcal{F}$) par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^d$ seulement, et l'on obtient pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ l'EDO

$$\partial_t \mathcal{F}u + |\xi|^2 \mathcal{F}u = \mathcal{F}f, \qquad \mathcal{F}u(0, \xi) = \mathcal{F}u_0(\xi)$$

qui s'intègre en

$$(3.9) \qquad \mathcal{F}u(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F}u_0(\xi) + \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \mathcal{F}f(\tau, \xi)\, d\tau.$$

En introduisant le semi-groupe de la chaleur définit par $e^{t\Delta} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F}\cdot)$, on obtient la *formule de Duhamel*

$$u(t, \cdot) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} f(\tau, \cdot)\, d\tau.$$

On remarque que pour tout $t > 0$, la fonction G_t de transformée de Fourier $e^{-t|\xi|^2}$ est définie par

$$G_t(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Comme G_t est une fonction de $\mathcal{S}$, on peut écrire

$$e^{t\Delta} u_0 = G_t \star u_0.$$

Théorème 3.4.1. *Si $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ alors la* formule de Duhamel *ci-dessus donne l'unique solution $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ de (C), prenant la valeur u_0 pour $t = 0$.*

Démonstration. En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle et le fait que

$$\mathcal{F}(e^{t\Delta}u_0)(\xi) = e^{-t|\xi|^2}\mathcal{F}u_0(\xi),$$

il est facile de voir que $t \mapsto \mathcal{F}(e^{t\Delta}u_0)$ est continue au sens de toutes les normes $\|\cdot\|_{k,\mathcal{S}}$. Donc, comme $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, on a $t \mapsto e^{t\Delta}u_0$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\mathcal{S})$. Un argument similaire donne $t \mapsto \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}f(\tau)\,d\tau$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\mathcal{S})$.

Ensuite, par théorème de dérivation et formule d'inversion de Fourier, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big(e^{t\Delta}u_0\Big)(x) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}e^{-t|\xi|^2}\widehat{u}_0(\xi)\frac{d\xi}{(2\pi)^d}\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}e^{-t|\xi|^2}|\xi|^2\widehat{u}_0(\xi)\frac{d\xi}{(2\pi)^d}\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\mathcal{F}\big(\Delta e^{t\Delta}u_0\big)(\xi)\,\frac{d\xi}{(2\pi)^d}\\ &= \Delta e^{t\Delta}u_0(x).\end{aligned}$$

Un calcul similaire donne

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}f(\tau)\,d\tau\right) = f + \Delta\left(\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}f(\tau)\,d\tau\right)\cdot$$

Les deux expressions sont dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+;\mathcal{S})$, donc u est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+;\mathcal{S})$, et les calculs ci-dessus montrent que u vérifie (C).

Enfin, la définition de $\mathcal{F}u(t,\xi)$ donnée en (3.9) assure que $\mathcal{F}u(0,\xi) = u_0(\xi)$ en tout point. Comme les deux membres sont des fonctions de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est un isomorphisme, on conclut que $u|_{t=0} = u_0$. □

Nos hypothèses sont très fortes, mais en multipliant par une fonction test $\mathcal{C}^1$ en t, $\mathcal{C}^2$ en x et à support compact en x, puis en intégrant sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, on peut proposer la définition suivante de *solution faible :*

Définition. Supposons $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+;L^1(\mathbb{R}^d))$. On dit que u est solution faible de (C) avec donnée initiale u_0 si pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)$ à support compact en x et de classe $\mathcal{C}^2$ en x, et pour tout $T \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} u(T,x),\phi(T,x)\,dx - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\,(\partial_t\phi(t,x) + \Delta\phi(t,x))\,dx\,dt&\\ = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\,\phi(0,x)\,dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\,\phi(t,x)\,dx\,dt.&\end{aligned}$$

On peut démontrer que, sous les hypothèses précédentes, la formule de Duhamel garde un sens et fournit l'unique solution $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+;L^1(\mathbb{R}^d))$ du problème de Cauchy (C) avec donnée initiale u_0.

Chapitre 4

Le problème de Dirichlet

4.1 Présentation du problème

Etant donnée une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, on veut résoudre :

$$(D) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où l'on note $\partial\Omega$ la frontière de Ω.

Sauf dans quelques cas très particuliers (par exemple lorsque Ω est l'espace entier, le demi-espace ou une boule), on ne sait pas calculer des solutions explicites pour (D). S'il est clair que la fonction $E_d \star f$ vérifie bien la première ligne de (D), elle n'a aucune raison de s'annuler sur $\partial\Omega$.

On va donc être moins ambitieux et se limiter à rechercher des conditions sur f et un cadre fonctionnel assurant l'existence et l'unicité de la solution (problème que l'on a déjà résolu dans le cas $d = 1$ et Ω intervalle). Pour ce faire, la notion de solution classique n'est pas la mieux adaptée et l'on va, comme dans les chapitres précédents utiliser une *formulation faible.* Cette formulation est basée sur le fait que si $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue, de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, vérifie la première ligne de Ω (ce qui force f à être continue) et est nulle sur $\partial\Omega$, alors la formule de Green implique que

$$(4.1) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega),\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \, \varphi \, dx.$$

La formule ci-dessus garde un sens pour f seulement localement intégrable sur Ω et u de classe $\mathcal{C}^1$, d'où la définition suivante :

Définition (Solution faible)**.** Supposons f localement intégrable sur Ω. On dira qu'une fonction $u \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$ est *solution faible* de (D) si (4.1) est vérifiée.

Intéressons-nous maintenant a une autre question a priori indépendante. Soit

$$F : \begin{cases} \mathcal{C}_c^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu\Big) dx. \end{cases}$$

On considère le "problème variationnel" consistant à "minimiser F" c'est-à-dire à trouver le minimum de F (s'il existe) et à en étudier les propriétés. On remarque que F est strictement convexe et tend vers l'infini à l'infini. En conséquence, si $\mathcal{C}^1_c(\Omega)$ était un espace vectoriel *de dimension finie*, alors un résultat classique de niveau licence permettrait d'affirmer l'existence et l'unicité d'un minimum global pour F. Malheureusement, $\mathcal{C}^1_c(\Omega)$ n'est pas de dimension finie, et il va falloir trouver un autre cadre pour démontrer le résultat (d'où quelques rappels d'analyse hilbertienne dans la section suivante).

Le lien entre le problème de minimisation associé à F et (4.1) se fait de la manière suivante. Supposons que F soit minimale en $u \in \mathcal{C}^1_c(\Omega)$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega)$, la fonction $t \mapsto F(u + t\varphi)$ est minimale en 0. Si elle est dérivable en 0, alors sa dérivée doit être nulle. Or,

$$\frac{F(u+t\varphi)-F(u)}{t} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx - \int_\Omega f\varphi\,dx + \frac{t}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx.$$

La limite de l'expression de droite quand t tend vers 0 existe et vaut

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx - \int_\Omega f\varphi\,dx.$$

Puisque cette expression doit être nulle, on en déduit que (4.1) est vérifiée. Autrement dit, u est solution faible de (D). La réciproque est vraie car si (4.1) est vérifiée alors le calcul ci-dessus redonne $F(u+t\varphi) \geq F(u)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $t \in \mathbb{R}$.

Les deux problèmes sont donc équivalents, et il ne reste plus qu'à trouver un bon cadre mathématique pour résoudre celui qui semble le plus accessible. Malheureusement, même si l'espace $\mathcal{C}^1_c(\Omega)$ semble être le choix naturel, il ne permet pas de donner de réponse optimale et précise. Nous allons devoir le "compléter" pour une norme adéquate, afin de travailler dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ que nous définirons précisément dans la suite. Mais il convient avant tout de faire quelques rappels d'analyse hilbertienne.

4.2 Un peu d'analyse hilbertienne

Dans toute cette partie, H désigne un espace de Hilbert réel (pour simplifier) a priori quelconque, et l'on note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire sur H et $\|\cdot\|$, la norme associée. On commence par des rappels sur les bases hilbertiennes qui constituent la généralisation naturelle des bases orthonormales dans les espaces de dimension infinie.

Définition. Soit H un Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H. On dit que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *base hilbertienne* de H si

1. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de H,
2. l'ensemble $\{e_n\,,\, n\in\mathbb{N}\}$ est total, i.e. $\overline{\mathrm{Vect}\,\{e_n,\, n\in\mathbb{N}\}} = H$.

Quelques remarques :

1. Une base hilbertienne n'est jamais une base algébrique.
2. Si H admet une base hilbertienne, alors $\dim H = +\infty$.
3. Exemple type : base canonique de l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$.

On peut se demander si un espace de Hilbert admet toujours une base hilbertienne.

— Si H est de dimension finie, la réponse est non, mais H admet une base orthonormale, ce qui est encore mieux !
— Si $\dim H = +\infty$ et H est séparable, alors H admet une base hilbertienne qui peut être obtenue à partir du procédé d'orthonormalisation de Schmidt et de n'importe quelle suite libre et dense de H.
— Si H n'est pas séparable (donc forcément de dimension infinie) alors H n'a pas de base hilbertienne, mais ce n'est pas grave, car les espaces de Hilbert que l'on rencontre dans les applications sont toujours séparables.

L'intérêt des bases hilbertienne réside dans la proposition suivante.

Proposition 4.2.1. *Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Alors tout $x \in H$ se décompose en $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x \mid e_n)e_n$ et l'on a l'*égalité de Parseval *suivante :*

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big|(x \mid e_n)\big|^2.$$

Réciproquement, si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\ell^2(\mathbb{N})$ alors $\sum \alpha_n e_n$ converge dans H et l'on a

$$\forall m \in \mathbb{N}, \ \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n \,\Big|\, e_m\Big) = \alpha_m.$$

Démonstration. Soit $x \in H$. Posons $x_n = \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k)e_k$. On a, d'après le théorème de Pythagore,

$$(x \mid x_n) = \sum_{k=0}^{n} \big|(x \mid e_k)\big|^2 = \|x_n\|^2.$$

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que $\|x_n\|_H \le \|x\|_H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En conséquence, la série $\sum \big|(x \mid e_k)\big|^2$ est convergente, ce qui entraıne, vu la complétude de H la convergence de $\sum (x \mid e_k)e_k$. En notant y la somme de cette série, on a

$$\|y\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big|(x \mid e_n)\big|^2.$$

Il est aussi clair que $(y - x \mid e_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale, on en conclut que $y - x = 0$.

Reste à démontrer la réciproque. La convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ s'obtient en remarquant que la suite des sommes partielles est de Cauchy. Ensuite, sachant que la série converge, on a, par continuité du produit scalaire, et grâce à $(e_k \mid e_m) = \delta_{km}$,

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k e_k \,\Big|\, e_m\Big) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \,\Big|\, e_m\Big) = \alpha_m,$$

d'où le résultat voulu. □

Théorème 4.2.1 (de représentation de Riesz-Fréchet)**.** *Soit L une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique u dans H tel que*

$$\forall \varphi \in H,\ L(\varphi) = (u|\varphi).$$

De plus, $\|L\|_{H'} = \|u\|_H$ *avec* $\|L\|_{H'} := \sup_{\varphi \in H,\, \|\varphi\|_H = 1} L(\varphi)$.

Démonstration. Existence : Si un tel u existe alors, nécessairement $u \in (\ker L)^\perp$. On distingue alors deux cas.

- Cas $L = 0$. Alors $u = 0$ convient.
- Cas $L \neq 0$. Alors $\ker L$ est un fermé non dense de H et il existe donc un élément non nul u_0 de $(\ker L)^\perp$. On pose alors $u = \alpha u_0$ avec α à déterminer. Avec ce choix, on voit que
$$L(u_0) = (u_0|u) = \alpha \|u_0\|^2.$$
Donc $\alpha = L(u_0)/\|u_0\|^2$. Réciproquement, u ainsi choisi convient (calcul facile basé sur la décomposition de φ sur $\ker L$ et $(\ker L)^\perp$).

Unicité : Si u_1 et u_2 conviennent, alors $u_1 - u_2$ est orthogonal à tout élément de H, donc nul.

Egalité des normes : le cas $L = 0$ étant évident, supposons que $L \neq 0$ (et donc $u \neq 0$ en vertu du résultat d'unicité). Par définition de la norme de L et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a
$$\|L\|_{H'} = \sup_{\|\varphi\|_H = 1} (u|\varphi) \leq \|u\|,$$
et le sup est atteint pour $\varphi = u/\|u\|$. □

Théorème 4.2.2 (de Lax-Milgram)**.** *Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire continue et* coercive*, c'est-à-dire telle qu'il existe $c_0 > 0$ vérifiant :*

$$a(u,u) \geq c_0 \|u\|^2 \quad \textit{pour tout} \ \ u \in H.$$

Alors, pour toute forme linéaire L continue sur H, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall \varphi \in H,\ a(u,\varphi) = L(\varphi).$$

Démonstration. L'unicité revient à démontrer que si $a(u,\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in H$ alors $u = 0$. Pour le voir, on prend $\varphi = u$, et on utilise la coercivité.

Pour l'existence, on associe à tout $u \in H$ l'unique élément A_u de H (donné par Riesz-Fréchet) tel que
$$\forall \varphi \in H,\ a(u,\varphi) = (A_u|\varphi)$$
ainsi que l'unique $u_0 \in H$ tel que

$$\forall \varphi \in H,\ L(\varphi) = (u_0|\varphi).$$

Notre problème se réduit alors à la résolution de l'équation (d'inconnue u) :

$$A_u = u_0. \tag{4.2}$$

Soit $A : u \mapsto A_u$. C'est une application linéaire (car a est bilinéaire) et continue car, en notant M la norme de a,

$$\|A_u\|^2 = (A_u|A_u) = a(A_u, u) \leq M\|A_u\|\,\|u\|.$$

Pour tout $t > 0$, on définit alors

$$S_t : \left\{ \begin{array}{lll} H & \longmapsto & H \\ u & \longrightarrow & u + t(u_0 - Au). \end{array} \right.$$

Résoudre (4.2) revient à démontrer que S_t a un point fixe. Pour cela, on fait le calcul suivant utilisant la définition de A :

$$\begin{aligned} \|S_t(v) - S_t(u)\|^2 &= \|v-u\|^2 + t^2\|Av - Au\|^2 - 2ta(v-u, v-u) \\ &\leq (1 - 2tc_0)\|v-u\|^2 + t^2M^2\|v-u\|^2. \end{aligned}$$

Pour $t > 0$ suffisamment petit, on aura $1 - 2tc_0 + t^2M^2 < 1$. En conséquence, S_t est strictement contractante, et le théorème du point fixe de Picard assure l'existence de u vérifiant $S_t(u) = u$, et donc (4.2). □

Une des difficultés que l'on rencontre en dimension infinie est que les ensembles bornés ne sont pas d'adhérence compacte et que, de façon générale, il y a très peu d'ensembles compacts, d'où des difficultés pour démontrer des propriétés de convergence des suites et l'existence de valeurs d'adhérence.

Pour convaincre le lecteur, remarquons que si $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne d'un espace de Hilbert séparable de dimension infinie H, alors $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de valeur d'adhérence, bien qu'elle soit bornée. En effet, d'après l'égalité de Parseval, pour tout élément x de H, la suite $(x|e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est de carrés sommables. Donc son terme général tend vers 0. Donc, seul le vecteur nul de H peut être valeur d'adhérence de $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$, mais cela contredit le fait que $\|e_j\| = 1$ pour tout j.

Cette observation motive la définition suivante.

Définition. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H et x un élément de H. On dit que la $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement* vers x si

$$\forall h \in H\,,\ \lim_{n\to\infty} (x_n|h) = (x|h).$$

On utilise alors la notation $x_n \rightharpoonup x$.

Exemple. Si l'on considère à nouveau une base hilbertienne $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, alors la discussion ci-dessus montre que $e_j \rightharpoonup 0$.

A titre d'exercice, le lecteur pourra montrer l'unicité de la limite faible. Voici d'autres propriétés fondamentales de la convergence faible.

Théorème 4.2.3. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un espace de Hilbert H et x, y deux éléments de H. On a alors :*

$$x_n \rightharpoonup x \implies (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée et } \|x\| \leq \liminf \|x_n\|\,; \tag{4.3}$$

(4.4) $$x_n \to x \implies x_n \rightharpoonup x \quad \textit{et la réciproque est vraie si} \quad \dim H < \infty;$$

(4.5) $$x_n \rightharpoonup x \ \textit{et} \ \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\| \implies \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

(4.6) $$\big(x_n \to x \quad \textit{et} \quad y_n \rightharpoonup y\big) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n|y_n) = (x|y).$$

Démonstration. La preuve du premier point du théorème découle du théorème de Banach-Steinhaus. En effet, notons T_n l'application définie sur H par $T_n(h) = (x_n|h)$. Il s'agit clairement d'une forme linéaire continue sur H. Par ailleurs, pour h fixé, la suite de terme général $(T_n)(h)$ est convergente. En conséquence, un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus assure que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que l'application linéaire limite T : $h \mapsto (x|h)$ est continue et vérifie

$$\|T\|_{H'} \leq \liminf \|T_n\|_{H'}.$$

Mais, d'après le théorème de Riesz-Fréchet, on a $\|T\|_{H'} = \|x\|_H$ et $\|T_n\|_{H'} = \|x_n\|_H$, ce qui achève la démonstration de la première propriété.

Le deuxième point résulte simplement du fait que

$$|(x_n|h) - (x|h)| \leq \|h\| \, \|x_n - x\|.$$

Pour la réciproque en dimension finie, on se donne une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_p)$ de H, et on remarque que la converge faible assure que $(x_n|e_j) \to (x|e_j)$ pour tout $j \in \{1, \cdots, p\}$, c'est-à-dire la convergence des coordonnées par rapport à $(e_1, \cdots, e_p)$.

Pour le troisième point, il suffit d'écrire que

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x_n|x) + \|x\|^2.$$

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers x, on a

$$-2 \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,(x|x_n) = -2\|x\|^2.$$

Cela assure (4.5).

La démonstration de la dernière propriété est très simple. Il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &\leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \, \|y_n\| + |(x|y_n - y)|. \end{aligned}$$

Le théorème précédent affirme que la $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, on a

$$|(x_n|y_n) - (x|y)| \leq C\|x_n - x\| + |(x|y_n - y)|,$$

d'où la proposition. □

En dimension finie, le théorème de Riesz assure que toute suite bornée admet une sous-suite convergente. Cela est faux en dimension infinie, mais devient vrai *pour la convergence faible.*

Théorème 4.2.4 (de compacité faible). *De toute suite bornée d'un espace de Hilbert, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de l'espace de Hilbert H. Notons M une borne strictement positive de la suite. Pour simplifier, on ne traite que le cas séparable, et on écarte le cas de la dimension finie qui est couvert par le théorème de Riesz. Fixons donc une base hilbertienne $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de H. Pour montrer la convergence faible de la suite, nous allons faire appel au *procédé d'extraction diagonal de Cantor.*

La suite $(x_n|e_0)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Il existe donc un élément λ_0 de $\mathbb{R}$ et une extraction φ_0 de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tels que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty}(x_{\varphi_0(n)}|e_0) = \lambda_0.$$

Supposons construites une suite finie $(\varphi_j)_{0\leq j\leq m}$ de fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et une suite finie $(\lambda_j)_{1\leq j\leq m}$ de scalaires telles que, pour tout $j\leq m$, on ait

$$\lim_{n\to+\infty}(x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_j(n)}|e_j) = \lambda_j.$$

La suite $(x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_m(n)}|e_{m+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$. Il existe donc une fonction strictement croissante φ_{m+1} de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et un élément λ_{m+1} de $\mathbb{R}$ tels que

$$\forall j\leq m+1\,,\ \lim_{n\to\infty}(x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_{m+1}(n)}|e_j) = \lambda_j.$$

Finalement, on fait une *extraction diagonale* en posant $\psi(n) = \varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(n)$, ce qui assure que toutes les suites $(x_{\psi(n)}|e_j)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Soit V le sous-espace vectoriel engendré par tous les e_j, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) de e_j. Puisque $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H, l'ensemble V est dense dans H. Considérons l'application linéaire L définie par

$$L\ :\ \left\{\begin{array}{ccl} V & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_{\psi(n)}|y). \end{array}\right.$$

La définition de L ne pose pas de problème puisque tout élément de V est combinaison linéaire finie des e_j et que la suite $(x_{\psi(n)}|e_j)$ converge pour chaque $j\in\mathbb{N}$. De plus, L est continue car, pour tout y de V, nous avons

$$|L(y)|\leq(\sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|)\|y\|\leq M\|y\|.$$

La densité de V nous autorise à prolonger la forme linéaire L à l'espace H tout entier. Notons $\widetilde{L}$ la forme linéaire continue sur H ainsi obtenue. D'après le théorème de Riesz-Fréchet, il existe un élément x de H tel que

$$\forall y\in H,\ \widetilde{L}(y) = (x|y).$$

Ainsi nous avons en particulier que

$$\forall y\in V,\ \lim_{n\to\infty}(x_{\psi(n)}|y) = (x|y).$$

Il reste à démontrer la convergence pour tout $z \in H$. Fixons donc $z \in H$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de V dans H, il existe $y \in V$ tel que $2(M + \|x\|)\|y - z\| \leq \varepsilon$. En écrivant que $(x_{\psi(n)} - x|z) = (x_{\psi(n)} - x|y) + (x_{\psi(n)} - x|z - y)$, et en se souvenant que la suite est bornée par $M > 0$, on obtient

$$|(x_{\psi(n)} - x|z)| \leq |(x_{\psi(n)} - x|y)| + \varepsilon/2.$$

Pour n assez grand, on aura donc $|(x_{\psi(n)} - x|z)| \leq \varepsilon$. Cela achève la démonstration de la convergence faible de $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers x. □

Théorème 4.2.5. *Soit H un espace de Hilbert et A un convexe fermé non vide de H. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(A; \mathbb{R})$. On suppose que φ est convexe et vérifie*

$$\lim_{\substack{x\in A \\ \|x\|\to+\infty}} \varphi(x) = +\infty.$$

Alors φ est minorée et atteint son minimum absolu : il existe $a \in A$ tel que

$$\forall x \in A,\ \varphi(x) \geq \varphi(a).$$

Démonstration. Soit $m = \inf_{x\in A} \varphi(x)$. Supposons par l'absurde que

$$\forall x \in A,\ \varphi(x) > m.$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = m.$$

Comme φ tend vers l'infini à l'infini, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc admet une sous-suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ faiblement convergente en vertu de théorème de compacité faible. Notons a la limite de cette sous-suite.

Pour $x \in A$ notons $A_x = \{y \in A \,|\, \varphi(y) \leq \varphi(x)\}$. Cet ensemble est convexe fermé car φ est convexe continue, et il contient les termes de la suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang, donc a. En effet, si l'on note $p(a)$ la projection orthogonale de a sur le convexe fermé A alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (a - p(a)|x_{\psi(n)} - p(a)) \leq 0,$$

et le passage à la limite (faible) donne $\|a - p(a)\|^2 = 0$, d'où $a = p(a) \in A$.

On a donc en particulier $\varphi(a) \leq \varphi(x)$. En d'autres termes, φ atteint sa borne inférieure. Cela achève la preuve du théorème. □

4.3 L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Dans cette partie, on introduit le cadre fonctionnel qui va nous permettre de résoudre le problème de Dirichlet (D) et le problème de minimisation associé.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Sur $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$, on définit la *norme de Sobolev* suivante :

$$\|u\|_{H^1} := \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2}.$$

Il est clair que la quantité ci-dessus est bien une norme (associée à un produit scalaire), mais $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ n'est pas complet pour cette norme. Cela motive l'introduction d'un espace plus gros, selon la définition suivante.

Définition (espace de Sobolev)**.** On note $H_0^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions u de $L^2(\Omega)$ telles qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

1. u_n est dans $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
2. $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ (i.e. $\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{L^2} = 0$) ;
3. $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

Par définition, pour tout élément u de $H_0^1(\Omega)$, il existe $v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ tel que $\nabla u_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$. On ne peut pas affirmer pour autant que $v = \nabla u$ *au sens classique* car une fonction de $L^2(\Omega)$ n'a pas de raison d'être différentiable. Cela nous amène à introduire la notion de *dérivée faible* suivante :

Définition. Soit $(e_1, \cdots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On dit que la fonction u de $L^2(\Omega)$ admet une *dérivée faible* dans la direction e_j $(j \in \{1, \cdots, d\})$ s'il existe une fonction $u^{(j)}$ de $L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega), \int_\Omega u^{(j)}\, \varphi\, dx = -\int_\Omega u\, \partial_j \varphi\, dx.$$

La dérivée faible, si elle existe, est forcément unique (exo : pourquoi ?)

Exemple 1. Si u est $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ avec Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière $\mathcal{C}^1$, alors $\partial_j u$ est la dérivée partielle 'habituelle' (intégrer contre φ et utiliser la formule d'intégration par parties). De ce fait, *on utilisera désormais la notation $\partial_j u$ pour la dérivée faible suivant la direction e_j.*

Exemple 2. Pour $\alpha \in]1/2, 1]$, la fonction $u :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = |x|^\alpha$ admet pour dérivée faible la fonction $x \mapsto \alpha |x|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} x$.

En pratique, on utilise souvent le critère d'existence de dérivée faible suivant.

Proposition 4.3.1. *Une fonction u de $L^2(\Omega)$ admet une dérivée faible $\partial_j u$ si et seulement si il existe $C \geq 0$ vérifiant :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega), \left| \int_\Omega u\, \partial_j \varphi\, dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2}.$$

Démonstration. Vu les hypothèses, la fonction $\varphi \mapsto -\int_\Omega u\, \partial_j \varphi\, dx$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$. Elle se prolonge donc de façon unique sur $L^2(\Omega)$. Par le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il existe une unique fonction $\partial_j u$ de L^2 qui vérifie

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega), \int_\Omega u\, \partial_j \varphi\, dx = -\int_\Omega u\, \partial_j \varphi\, dx \quad \text{et} \quad \|\partial_j u\|_{L^2} \leq C.$$

La réciproque résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Théorème 4.3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les éléments de $H_0^1(\Omega)$ admettent des dérivées faibles dans toutes les directions, et $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)_{H^1}$ est un espace de Hilbert. Enfin, $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. Soit u dans $H_0^1(\Omega)$. Alors il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ elle que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy dans $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Par complétude de $L^2(\Omega)$, il existe donc des fonctions $u^{(1)},\cdots,u^{(d)}$ de $L^2(\Omega)$ telles que

$$\forall j \in \{1,\cdots,d\},\ \partial_j u_n \to u^{(j)} \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

Or, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, par intégration par parties,

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega),\ \int_\Omega u_n\,\partial_j\varphi\,dx = -\int_\Omega \partial_j u_n\,\varphi\,dx.$$

Donc, par passage à la limite,

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega),\ \int_\Omega u\,\partial_j\varphi\,dx = -\int_\Omega u^{(j)}\,\varphi\,dx.$$

Autrement dit, $u^{(j)}$ est la dérivée faible de u dans la direction e_j.

L'existence de dérivées partielles dans toutes les directions permet de donner un sens à $(\cdot|\cdot)_{H^1}$ pour tout élément de $H_0^1(\Omega)$, et il est évident qu'il s'agit bien d'un produit scalaire. Pour démontrer la complétude de $H_0^1(\Omega)$, considérons une suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans cet espace. Alors, par définition de $H_0^1(\Omega)$, il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction v_n de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ telle que $\|u_n - v_n\|_{H^1} \leq 2^{-n}$. L'espace $L^2(\Omega)$ étant complet, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite u de $L^2(\Omega)$. Comme de plus $(\nabla v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ (car $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est), on peut conclure que u est dans $H_0^1(\Omega)$.

Il est alors également clair que $\|v_n - u\|_{H^1} \to 0$, d'où la densité de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. □

4.4 Résolution du problème de Dirichlet

Le cadre fonctionnel introduit dans la section précédente va nous permettre de faire le lien avec la formulation faible du problème de Dirichlet, en introduisant l'application a définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ par

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx.$$

Il est clair que a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Afin de pouvoir résoudre (D) à l'aide du théorème de Lax-Milgram, il faut d'une part interpréter le membre de droite de (4.1) en termes d'application linéaire continue, d'autre part démontrer que a est coercive. Vérifier ce deuxième point revient à démontrer *l'inégalité de Poincaré* suivante :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega),\ \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq c_0\|u\|_{L^2}^2. \tag{4.7}$$

Théorème 4.4.1 (Inégalité de Poincaré)**.** *Si l'ouvert Ω est borné dans une direction, alors il existe $c_0 > 0$ tel que (4.7) soit vraie pour tout u dans $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1} \cap]a, a+R[$ pour un $a \in \mathbb{R}$ et un $R > 0$ adéquats. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$ (prolongée par 0 en dehors de Ω), le théorème fondamental de l'analyse permet d'écrire, sachant que $\varphi(a) = 0$:

$$\forall x_d \in \mathbb{R},\ \varphi(x', x_d) = \int_a^{x_d} \partial_{x_d}\varphi(x', y_d)\, dy_d.$$

Donc, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $x_d \in [a, a+R]$,

$$|\varphi(x', x_d)|^2 \leq \sqrt{x_d - a} \int_a^{x_d} |\partial_{x_d}\varphi(x', y_d)|^2\, dy_d \leq \sqrt{R} \int_a^{a+R} |\partial_{x_d}\varphi(x', y_d)|^2\, dy_d,$$

d'où

$$\int_a^{a+R} |\varphi(x', x_d)|^2\, dx_d \leq R^2 \int_a^{a+R} |\partial_{x_d}\varphi(x', y_d)|^2\, dy_d.$$

Il ne reste plus qu'à intégrer par rapport à la variable x' sur $\mathbb{R}^{d-1}$ pour conclure à l'inégalité voulue pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, le cas général s'en déduisant pas densité. □

Corollaire 4.4.1. *Si Ω est borné dans une direction alors les normes $\|\cdot\|_{H^1}$ et $\|\nabla\cdot\|_{L^2}$ sont équivalentes, et a est coercive.*

Pour donner un sens au terme de droite de (4.1) dans un contexte qui soit compatible avec le théorème de Lax-Milgram, on introduit l'espace de Sobolev $H^{-1}(\Omega)$ des formes linéaires continues sur $H_0^1(\Omega)$.

Exemple. Toute fonction u de $L^2(\Omega)$ peut être identifiée à un élément de $H^{-1}(\Omega)$. En effet, on définit sur $H_0^1(\Omega)$ la forme linéaire continue (au sens de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$) :

$$\langle u, \cdot\rangle : \varphi \longmapsto \int_\Omega u\varphi\, dx.$$

Théorème 4.4.2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, et $f \in L^2(\Omega)$. Alors le problème de Dirichlet (D) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ au sens* (4.1).

Démonstration. Les considérations précédentes assurent que la forme linéaire a ci-dessus est bilinéaire continue et coercive sur l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. Par ailleurs, la fonction f peut être identifiée à l'élément $\langle f, \cdot\rangle$ de $H^{-1}(\Omega)$ comme dans l'exemple ci-dessus. En conséquence, le théorème de Lax-Milgram donne l'existence d'un unique élément u de $H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega),\ a(u, \varphi) = \langle f, \varphi\rangle. \tag{4.8}$$

Cela signifie que

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega f\,\varphi\, dx, \tag{4.9}$$

et l'on a donc résolu la formulation faible du problème de Dirichlet. □

Le cadre fonctionnel Sobolev permet également de résoudre le problème de minimisation associé à (D). Pour ce faire, on prolonge F par densité à l'espace $H_0^1(\Omega)$, ce qui revient à considérer

$$F(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \langle f, u\rangle.$$

C'est-à-dire que l'intégrale a été remplacée par le crochet de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$, et le gradient classique par le gradient faible.

Dans ce nouveau cadre, on souhaite démontrer que F admet un unique minimum (et qu'il est strict). Vu que F est manifestement strictement convexe, que, si Ω est borné, alors F tend vers l'infini à l'infini (utiliser l'inégalité de Poincaré) et que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, c'est une conséquence directe du théorème de minimisation des fonctions convexes énoncé plus haut. On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 4.4.3. *Supposons que Ω soit un ouvert borné. Alors, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, la fonction F définie ci-dessus admet un unique minimum global. De plus, ce minimum est aussi solution faible du problème de Dirichlet.*

4.5 Un problème aux valeurs propres

On s'intéresse au *problème du tambour* suivant : soit Ω un ouvert borné $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^d$, quels sont les nombres réels λ tels qu'il existe une solution u *non nulle* à

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Omega. \end{cases}$$

Clairement, à λ fixé, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel. Toute la question est de déterminer λ afin qu'il soit non réduit à $\{0\}$ (il y a donc deux inconnues : λ et u).

On commence par le cas de la dimension 1 où tous les calculs sont explicites : on suppose que $\Omega =]a, b[$. Il s'agit donc de résoudre

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

— Cas $\lambda < 0$: la solution générale de l'équation de la première ligne s'écrit $Ae^{\sqrt{|\lambda|}\,x} + Be^{-\sqrt{|\lambda|}\,x}$. La condition aux limites impose $A = B = 0$. Il n'y a donc pas de solution non triviale.

— Cas $\lambda = 0$: la solution générale est $Ax + B$. A nouveau, pas de solution non triviale.

— Cas $\lambda > 0$: la solution générale est $A\sin(\sqrt{\lambda}\,(x - \varphi))$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in]-\pi, \pi]$. Les conditions aux limites correspondent à

$$\sqrt{\lambda}(a - \varphi) \equiv 0[\pi] \quad \text{et} \quad \sqrt{\lambda}(b - \varphi) \equiv 0[\pi].$$

Cela n'est possible que si

$$\lambda = \frac{k^2\pi}{(b-a)^2}, \qquad k \in \mathbb{N}^*,$$

et les fonctions u correspondantes sont $A\sin(\sqrt{\lambda}(x - a))$, $A \in \mathbb{R}$.

A partir de la dimension $d \geq 2$, sauf dans des cas très particuliers (e.g. Ω boule ou rectangle), il n'y a pas de solution explicite, et il est judicieux de mettre le problème sous forme faible afin de pouvoir le traiter à l'aide d'outils d'analyse hilbertienne. On cherche donc l'ensemble des réels λ tels qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ vérifiant

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega),\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda \int_\Omega u \, \varphi \, dx. \tag{4.10}$$

Pour résoudre (4.10), nous allons faire appel à des résultats classiques sur les opérateurs auto-adjoints compacts dans les espaces de Hilbert.

4.5.1 Opérateurs auto-adjoints compacts

Dans toute cette section, H est un espace de Hilbert.

Définition. On appelle *opérateur compact* sur H toute application linéaire continue (ou *opérateur borné*) de H dans H qui transforme les suites bornées en suites ayant des valeurs d'adhérence *pour la convergence forte.*

Exemple. Les applications linéaires continues de rang fini ou, plus généralement, les limites de telles applications, sont des opérateurs compacts.

Définition. Une application linéaire continue A est dite *auto-adjointe* (on parle aussi d'opérateur borné auto-adjoint) si

$$\forall (x,y) \in H^2,\ (Ax|y) = (x|Ay).$$

Définition. Le *spectre* d'un opérateur borné A sur H est

$$\sigma(A) := \big\{\lambda \in \mathbb{R},\ A - \lambda \mathrm{Id} \quad \text{non inversible}\big\}\cdot$$

Le *spectre ponctuel* est

$$\sigma_p(A) := \big\{\lambda \in \mathbb{R},\ \ker(A - \lambda \mathrm{Id}\,) \neq \{0\}\big\}\cdot$$

On prendra garde au fait qu'en dimension infinie, l'inversibilité d'une application linéaire n'est pas équivalente à sa surjectivité (pas de théorème du rang). En conséquence, $\sigma_p(A)$ peut être strictement inclus dans $\sigma(A)$.

Le but principal de cette partie est de démontrer pour les opérateurs auto-adjoints compacts un analogue du théorème de diagonalisation des endomorphismes symétriques dans les espaces euclidien. Pour ce faire, nous aurons besoin au préalable du résultat suivant.

Lemme 4.5.1. *Soit A un opérateur auto-adjoint compact sur H. Alors*

$$M_0 := \sup_{\|x\|=1} |(Ax|x)|$$

est atteint, et l'un des deux nombres M_0 ou $-M_0$ est valeur propre de A (et donc $\sigma_p(A)$ est non vide).

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante associée au problème ci-dessus. On peut, quitte à changer A en $-A$, supposer que

$$\lim_{n\to+\infty}(Ax_n|x_n) = M_0 \quad \text{avec} \quad \|x_n\| = 1.$$

En combinant le théorème de compacité faible avec le fait que A est compact, on peut supposer de plus (quitte à extraire) qu'il existe $(x,y)\in H^2$ tels que

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{et} \quad Ax_n \to y.$$

En vertu des propriétés de la convergence faible et de la définition de M_0, on peut affirmer que

$$M_0 = \lim_{n\to+\infty}(Ax_n|x_n) = (y|x).$$

Pour conclure la première partie du lemme, il ne reste plus qu'à vérifier que $y = Ax$ et que $\|x\| = 1$. Pour avoir $y = Ax$, on utilise le fait que pour tout z dans H,

$$(x_n|Az) \to (x|Az) = (Ax|z) \quad \text{et} \quad (x_n|Az) = (Ax_n|z) \to (y|z).$$

Pour démontrer que $\|x\| = 1$, on écarte le cas trivial $M_0 = 0$ (équivalent à $A = 0$) et on utilise le fait que l'on a alors nécessairement $x \neq 0$ (sinon $(Ax|x) = 0$). La convergence faible donne $\|x\| \leq 1$, et l'on sait aussi par la définition de M_0 que $(Ax'|x') \leq M_0$ avec $x' = x/\|x\|$. En conséquence $M_0 = (Ax|x) \leq M_0\|x\|^2$, d'où $\|x\| = 1$. Donc la borne supérieure est bien atteinte en x.

Pour montrer que M_0 est valeur propre, on considère $F(z) := M_0\|z\|^2 - (Az|z)$ pour $z \in H$. C'est une forme quadratique qui atteint son minimum en x. Elle y est différentiable, et

$$\forall h \in H,\ [DF(x)](h) = 2(M_0x|h) - 2(Ax|h) = 0.$$

En conséquence, $M_0x = Ax$. □

Théorème 4.5.1. *Soit A un opérateur auto-adjoint compact sur H (supposé séparable de dimension infinie). Alors on a les résultats suivants :*

- *(i) l'un des nombres M_0 ou $-M_0$ avec $M_0 := \sup_{\|x\|=1}(Ax|x)$ est valeur propre de A ;*
- *(ii) le spectre $\sigma(A)$ est inclus dans $[-M_0, M_0]$;*
- *(iii) $\sigma_p(A)$ est fini ou dénombrable, et seul 0 peut être point d'accumulation ;*
- *(iv) si λ est une valeur propre non nulle de A alors sa multiplicité est finie ;*
- *(v) il existe une base hilbertienne de H constituée de vecteurs propres pour A.*

Démonstration. Le premier point a été établi dans le lemme précédent. Démontrons *(ii)*. Tout d'abord, si $\lambda > M_0$, alors $a : (x,y) \mapsto \lambda(x|y) - (Ax|y)$ est bilinéaire coercive. Donc, par Lax-Milgram, pour tout $z \in H$, il existe un unique $x \in H$ tel que

$$\forall y \in H,\ \big((\lambda\mathrm{Id} - A)x|y\big) = (z|y).$$

Cela entraîne que $\lambda\mathrm{Id} - A$ est bijective, et donc $\lambda \notin \sigma(A)$. Un raisonnement similaire donnerait que si $\lambda < -M_0$ alors $\lambda \notin \sigma(A)$. Enfin, on sait d'après le lemme précédent que $-M_0$ ou M_0 est valeur propre.

Supposons $\sigma_p(A)$ infini, et considérons une suite normalisée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs propres de A pour des valeurs propres $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux à deux distinctes. On note λ une valeur d'adhérence de cette suite. Comme en dimension finie, les x_n sont orthogonaux deux à deux, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite orthonormale. Cela entraîne (utiliser Parseval) que $x_n \rightharpoonup 0$. Par compacité de A, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(Ax_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement, et la limite ne peut être que 0 vu que $x_n \rightharpoonup 0$. Sachant que $\|x_n\| = 1$ et que $Ax_n = \lambda_n x_n$, on conclut que $\lambda = 0$. Donc seul 0 peut être point d'accumulation. Un exercice classique de topologie (le faire) montre qu'un ensemble borné n'ayant qu'un seul point d'accumulation est au plus dénombrable.

Notons E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ. Si $\lambda \neq 0$, considérons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E_λ. Alors $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence, et il en est donc de même pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le théorème de Riesz implique que E_λ est de dimension finie.

Pour terminer, on choisit dans tout E_λ avec $\lambda \in \sigma_p(A)\setminus\{0\}$ (E_λ est donc de dimension finie) une base orthonormale et, si 0 est valeur propre, on ajoute une base orthonormale de E_0 (si $\dim E_0 < \infty$) ou une base hilbertienne (cas $\dim E_0 = \infty$ sachant que $E_0 \subset H$ est forcément séparable). Comme en dimension finie, on montre que $\lambda \neq \mu$ entraîne $E_\lambda \perp E_\mu$. La famille ainsi obtenue est orthonormale et au plus dénombrable. On note F l'adhérence du sous-espace vectoriel qu'elle engendre. Comme il s'agit d'un sous-espace vectoriel fermé de H, on a $H = F \oplus F^\perp$. On vérifie facilement que F et $F^\perp$ sont stables par A. Si $F^\perp = \{0\}$, alors le dernier point est démontré. Sinon on considère B l'opérateur borné induit par A sur l'espace de Hilbert $F^\perp$. C'est encore un opérateur auto-adjoint compact, et le lemme précédent donne l'existence d'une vecteur propre pour B (qui est forcément aussi vecteur propre pour A). Cela contredit le fait que F contient tous les espaces propres de A. $\square$

4.5.2 Application au problème du tambour

Notre but est de trouver tous les réels λ tels que (4.10) admette une solution non nulle dans $H_0^1(\Omega)$. Cela sera basé sur le théorème spectral précédent. On suppose que Ω est un ouvert borné, ce qui assure (inégalité de Poincaré) que

$$\widetilde{(u|v)}_{H^1} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

est un produit scalaire équivalent au produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ défini précédemment.

Il s'agit de montrer que notre problème peut être énoncé en termes d'opérateur auto-adjoint compact sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$. Pour ce faire, on définit $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ par Af est l'unique solution faible du problème de Dirichlet (4.1) : c'est-à-dire :

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), (Af|\varphi)_{H^1} = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

L'opérateur A est auto-adjoint : prendre $f = u$ et $\varphi = Av$ puis $f = v$ et $\varphi = Au$ dans l'identité précédente pour obtenir

$$\int_\Omega u \, Av \, dx = \int_\Omega Au \, v \, dx.$$

Il est borné car

$$|(Au|v)_{H^1}| = \left|\int_\Omega uv\,dx\right| \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

On admet qu'il est compact : c'est dû au fait que l'image de A est incluse dans $H_0^1(\Omega)$, et que l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte (théorème de Kato-Rellich).

Enfin, A est défini positif car pour tout f dans $L^2(\Omega)$, on a

$$(Af|f)_{L^2} = \int_\Omega \nabla Af \cdot \nabla Af\,dx \geq 0,$$

et le membre de droite est nul si et seulement si $Af = 0$, ce qui est équivalent à $f = 0$. En conséquence, toutes les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs. En admettant que $L^2(\Omega)$ est un espace séparable de dimension infinie, le théorème spectral assure l'existence d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ constituée de vecteurs propres pour A, associée à une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeurs propres strictement positives. Quitte à renuméroter les termes de la suite, on peut supposer cette suite décroissante. Elle ne peut pas être stationnaire à partir d'un certain rang sinon la valeur atteinte étant strictement positive et les sous-espaces propres associés à une valeur propre non nulle étant de dimension finie, l'espace $L^2(\Omega)$ serait de dimension finie. En conséquence, cette suite converge vers 0.

De plus, par construction et définition de A, on a, du fait que $Ae_n = \lambda_n e_n$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla\varphi\,dx = \frac{1}{\lambda_n}\int_\Omega e_n\,\varphi\,dx.$$

Cela montre que $(\sqrt{\lambda_n}\,e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$ (qui est donc aussi séparable de dimension infinie). Enfin, en admettant que e_n est de classe C^2 (ce qui est toujours vrai si l'ouvert Ω est suffisamment régulier), on voit que

$$-\Delta e_n = \lambda_n^{-1}\,e_n.$$

La suite $(\lambda_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, comme dans le cas $\Omega =]a, b[$.

Bibliographie

[1] J.-M. Bony : Cours d'analyse, théorie des distributions et analyse de Fourier, Éditions de l'École Polytechnique.

[2] H. Brezis : *Analyse fonctionnelle.* Théorie et applications, Masson.

[3] L.C. Evans : *Partial Differential Equations*, Second Edition, Graduate Studies in Mathematics, **vol. 19**, American Mathematical Society, 2010.

Index