

Exercices supplémentaires : Suites

Partie A : manipulation de suites

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$.

On considère la suite (S_n) définie par $S_n = u_{n+1} + u_n$ pour tout entier naturel n .

Montrer que (S_n) est géométrique et en déduire l'expression de $u_{n+1} + u_n$ en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3n+1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que (u_n) est majorée par 3.
- 2) En déduire qu'elle est bornée.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 3u_{n-1} - 2u_n$.

- 1) On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel non nul n . Quelle est la nature de (v_n) ?
- 2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) Montrer par récurrence que $u_{n+1} - u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- 4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Déterminer le réel a pour que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$ pour $n \in \mathbb{N}$ soit géométrique.
- 2) Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Calculer les sommes $v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$ puis $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$ pour tout entier naturel n .

- 1) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 4$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est géométrique.
- 2) En déduire l'expression de v_n puis u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 6

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 12$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$ pour tout entier naturel n .

- 1) Démontrer qu'il existe un réel a tel que la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n + a$ soit géométrique.
- 2) Exprimer u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
- 3) On considère la suite (S_n) définie sur \mathbb{N} par $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$ puis la limite de S_n .

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - 2n + 5$.

On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_{n+1} - u_n$.

- 1) Calculer de deux manières différentes $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2^n + 1$.

On considère la suite (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

- 1) Calculer de deux façons différentes $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

Partie B : Limites

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_n)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , u_n est égal à $\sqrt{1 + n}$.
- 2) Etudier la convergence de (u_n) .
- 3) On pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+1}}{u_{n+2}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Etudier la convergence de (v_n) et (w_n) .

Exercice 2

En factorisant le numérateur par 2^n et le dénominateur par 3^n , étudier la convergence de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{2^n + 1}{3^{n+1} - 1}$$

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) On pose $v_n = u_n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est géométrique.
- 2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Etudier la convergence de (v_n) et de (u_n) .

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$

- 1) Etudier la monotonie de (u_n) .
- 2) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
- 3) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
- 4) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$ puis démontrer la propriété conjecturée.

Exercice 5

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4}$ et $v_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) On considère la suite (s_n) définie par $s_n = u_n + v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence que (s_n) est constante.
- 2) On considère la suite (t_n) définie par $t_n = v_n - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (t_n) est géométrique. En déduire l'expression de t_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
- 3) En utilisant les questions précédentes, déterminer l'expression de u_n et de v_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
- 4) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $\ln(3^n u_n) = n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Démontrer que (u_n) est géométrique.
- 2) Donner le sens de variations de (u_n) et sa limite.

Partie C : Convergence monotone

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(2u_n + 1)$.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$.

- 2) Etudier le sens de variation de (u_n) .
- 3) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 3u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$

- 1) Calculer $u_1, u_2, u_3, \dots, u_6$. De quelle valeur L semblent se rapprocher les termes de la suite (u_n) ?
- 2) En étudiant la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - L$, démontrer que (u_n) converge vers L .

Exercice 3

Indiquer en justifiant si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]1; +\infty[$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) (u_n) est minorée par 1.
- 2) (u_n) est monotone.
- 3) Si $u_0 \in]1; 2[$, alors (u_n) converge vers 1.
- 4) Si $u_0 \in]1; 2[$, alors (u_n) converge vers 2.
- 5) Si $u_0 \in]2; +\infty[$, alors (u_n) converge vers 2.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Etudier les variations de la suite (u_n) .
- 2) Montrer par récurrence que $u_n \in [0; 1]$ pour tout entier naturel n .
- 3) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 5

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

- 1) Montrer que (u_n) est majorée par 6.
- 2) Montrer que cette suite est croissante. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?
- 3) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ est géométrique. En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 6

On considère la fonction $g: x \mapsto x^2$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0,7$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Démontrer que $u_n \in]0; 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Démontrer que (u_n) est décroissante.
- 3) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1 - x)^3 + x$.

On définit la suite (a_n) en posant $a_{n+1} = f(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_0 = 0,4$.

- 1) Démontrer que pour tout entier naturel n , $0 < a_n < 1$.
- 2) Démontrer que (a_n) est croissante.
- 3) La suite (a_n) converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1+u_n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que cette suite est strictement positive.
- 2) Déterminer son sens de variations.

- 3) En déduire que cette suite est bornée.
- 4) En conclure que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n - 4}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$.

- 1) Prouver que si cette suite a une limite finie, alors cette limite est 0 ou 3.
- 2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est géométrique.
- 3) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de (u_n) .

Partie D : Suites adjacentes

Exercice 1

Dans chaque cas suivant, étudier si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Dans l'affirmative, déterminer leur limite commune.

- 1) $u_n = -\frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n+3}$
- 2) $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
- 3) $u_n = 3 - \frac{1}{n^2}$ et $v_n = 3 + \frac{1}{n^3}$

Exercice 2

On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies par $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{2x_n + 3y_n}{5} \end{cases}$ et $\begin{cases} y_0 = 2 \\ y_{n+1} = \frac{3x_n + 2y_n}{5} \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$

- 1) On considère la suite (w_n) définie par $w_n = y_n - x_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (w_n) est géométrique, convergente et déterminer sa limite.
- 2) Etudier le sens de variations des suites (x_n) et (y_n) .
- 3) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite que nous noterons L .
- 4) Calculer $x_n + y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de L .

Exercice 3

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que ces suites sont adjacentes.

Exercice 4

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n \times v_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer que $v_n < u_n$ puis que $u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{u_n - v_n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$
- 2) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 5

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$

- 1) Démontrer qu'il existe un réel k tel que pour tout entier naturel n , on ait $v_{n+1} - u_{n+1} = k(v_n - u_n)$.
- 2) Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.
- 3) Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes.
- 4) On considère la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et la suite (s_n) définie par $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression de w_n en fonction de n puis celle de s_n en fonction de n .
- 5) Exprimer s_n en fonction de u_n et de u_0 pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$
- 6) Quelle est la limite de (u_n) ?

Correction exercices supplémentaires : Suites

Partie A : manipulation de suites

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$

$$S_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} = 8(u_{n+1} + u_n) = 8S_n$$

Donc la suite (S_n) est géométrique de raison 8 et de premier terme $S_0 = u_1 + u_0 = 1$.

On a donc $u_{n+1} + u_n = 8^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2

$$1) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3 \Leftrightarrow \frac{3n+1}{n+1} \leq 3 \Leftrightarrow 3n+1 \leq 3n+3 \text{ car } n+1 > 0$$

$\Leftrightarrow 1 \leq 3$ ce qui est toujours vrai. Donc (u_n) est bien majorée par 3.

$$2) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}, 3n \geq n \text{ donc } 3n+1 \geq n+1 > 0$$

On peut diviser par $n+1 > 0$ et on obtient : $u_n \geq 1$. Ceci montrer que (u_n) est minorée par 1 donc bornée.

Exercice 3

$$1) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^* :$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - u_n = 3u_{n-1} - 2u_n - u_n = 3(u_{n-1} - u_n) = -3(u_n - u_{n-1}) = -3v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison -3 et de premier terme $v_1 = u_2 - u_1 = 1$.

$$2) \text{ On a donc pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_n = (-3)^{n-1}.$$

3) Par récurrence, nous allons montrer que la propriété $P_n : u_{n+1} - u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : on veut montrer que P_1 est vraie, c'est-à-dire que $u_2 - u_1 = v_1$ or ceci est évident par définition.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel strictement positif n , P_n est vraie, c'est-à-dire

$$u_{n+1} - u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n. \text{ On veut montrer que } P_{n+1} \text{ est vraie, c'est-à-dire}$$

$$u_{n+2} - u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + v_{n+1}.$$

$$\text{Or } v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + v_{n+1} = u_{n+1} - u_1 + v_{n+1} = u_{n+1} - u_1 + u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+2} - u_1$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel strictement positif n ,

$$u_{n+1} - u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

$$4) \text{ On a donc pour } n \in \mathbb{N}^* : u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + u_1 = v_1 \times \frac{1 - (-3)^{n-1}}{1 - (-3)} + 2 = \frac{1}{4}[1 - (-3)^{n-1}] + 2$$

Exercice 4

$$1) (v_n) \text{ est géométrique s'il existe un réel } k \text{ tel que } v_{n+1} = kv_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$v_{n+1} = kv_n \Leftrightarrow u_{n+1} + a = k(u_n + a) \Leftrightarrow 2u_n + 1 + a = ku_n + ka$$

$$\text{Par identification, on peut donc choisir } \begin{cases} k = 2 \\ 1 + a = ka \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

On trouve donc que $v_n = u_n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et que (v_n) est alors géométrique de raison 2.

$$2) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times 2^n = 3 \times 2^n$$

$$\text{De plus, } u_n = v_n - 1 \text{ donc } u_n = 3 \times 2^n - 1$$

$$3) v_0 + v_1 + \dots + v_{10} = v_0 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = -3(1 - 2^{11}) = -3(1 - 2048) = 6141$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = v_0 - 1 + v_1 - 1 + \dots + v_{10} - 1 = (v_0 + v_1 + \dots + v_{10}) - 11 = 6141 - 11 = 6130$$

Exercice 5

$$1) \text{ Pour } n \in \mathbb{N},$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{3}{4}u_n - 1 + 4 = \frac{3}{4}(v_n - 4) + 3 = \frac{3}{4}v_n - 3 + 3 = \frac{3}{4}v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 4 = 6$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \boxed{6 \left(\frac{3}{4}\right)^n}$ et $u_n = v_n - 4 = \boxed{6 \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4}$

3) (v_n) est une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre -1 et 1 donc elle converge vers 0 . Comme $u_n = v_n - 4$ pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{(u_n) \text{ converge donc vers } -4}$.

Exercice 6

1) (v_n) est géométrique s'il existe un réel k tel que $v_{n+1} = kv_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = kv_n \Leftrightarrow u_{n+1} + a = k(u_n + a) \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n - 3 + a = ku_n + ka$$

Par identification, $\begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ -3 + a = ka \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ a = 6 \end{cases}$ donc $\boxed{v_n = u_n + 6}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2) On a donc $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ avec $v_0 = u_0 + 6 = 18$ donc $v_n = \frac{18}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et donc $\boxed{u_n = \frac{18}{2^n} - 6}$

3) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_0 - 6 + v_1 - 6 + \dots + v_n - 6 = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 6(n+1)$$

$$= v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 6(n+1) = \boxed{36 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - 6(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} -6(n+1) = -\infty \text{ donc par opération } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty}$$

Exercice 7

1) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \dots + u_{n+1} - u_n = \boxed{u_{n+1} - u_0}$$

Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n = -2n + 5$ donc (v_n) est une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $v_0 = 5$. Donc $S_n = \frac{v_0 + v_n}{2} \times (n+1) = \frac{5 - 2n + 5}{2} \times (n+1) = \boxed{(5-n)(n+1)}$

2) On a donc $u_{n+1} - u_0 = (5-n)(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou encore $u_n = u_0 + [5 - (n-1)][n-1+1]$
 $u_n = \boxed{2 + n(6-n)}$

Exercice 8

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \dots + u_{n+1} - u_n = \boxed{u_{n+1} - u_0}$

Par ailleurs, $v_n = u_{n+1} - u_n = 2^n + 1$ donc

$$\text{Donc } S_n = 2^0 + 1 + 2^1 + 1 + 2^2 + 1 + \dots + 2^n + 1 = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + n + 1 = 2^{n+1} - 1 + n + 1 = \boxed{2^{n+1} + n}$$

2) On a donc $u_{n+1} - u_0 = 2^{n+1} + n$ pour $n \in \mathbb{N}$ d'où $u_n = u_0 + 2^n + n - 1 = \boxed{2^n + n}$

Partie B : Limites

Exercice 1

1) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a va montrer que la propriété $P_n : u_n = \sqrt{1+n}$ est vraie.

Initialisation : on veut montrer que P_0 est vraie c'est-à-dire que $u_0 = \sqrt{1+0}$ or $u_0 = 1$ donc c'est vrai.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n = \sqrt{1+n}$.

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} = \sqrt{n+2}$.

$$\text{Or } u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_n)^2} = \sqrt{1 + (1+n)} = \sqrt{n+2} \text{ donc c'est vrai.}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $\boxed{u_n = \sqrt{1+n}}$

2)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ donc par composition } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

Donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

$$3) \text{ Pour } n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2+n}}{\sqrt{1+n}} = \sqrt{\frac{2+n}{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1 \text{ donc par composition } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1}$$

$$w_n = \frac{u_n + u_{n+1}}{u_{n+2}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n+3}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})} = \frac{n+1 - (n+2)}{\sqrt{(n+3)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(n+3)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\sqrt{(n+3)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})} = \boxed{0}$$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2^n + 1}{3^{n+1} - 1} = \frac{(2^n)(1 + \frac{1}{2^n})}{(3^n)(3 - \frac{1}{3^n})} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{3 - \frac{1}{3^n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{3 - \frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{2}{3} < 1 \text{ donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

Exercice 3

1) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 1 - 1 = 2(u_n - 1) = 2v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -0,5$.

$$2) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times 2^n = \boxed{-\frac{1}{2} \times 2^n} \text{ De plus, comme } u_n = v_n + 1, \text{ on a } \boxed{u_n = 1 - \frac{1}{2} \times 2^n}$$

3) Comme $2 > 1$, la suite (v_n) géométrique de raison 2 diverge.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \text{ donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty}$$

$$\text{De même } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty}$$

Exercice 4

1) Pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$

2) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a va montrer que $P_n : u_n > n^2$ est vraie.

Initialisation : on veut montrer que P_0 est vraie, c'est-à-dire que $u_0 > 0$ or $u_0 = 1$ donc c'est vrai.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n > n^2$.

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} > (n+1)^2$.

$$\text{Or } u_{n+1} - (n+1)^2 = u_n + 2n + 3 - n^2 - 2n - 1 = u_n - n^2 + 2$$

$u_n - n^2$ est positif par hypothèse donc $u_{n+1} - (n+1)^2$ est positif et $u_{n+1} > (n+1)^2$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $\boxed{u_n > n^2}$

3)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ donc par comparaison } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

$$4) u_0 = 1 ; u_1 = 1 + 0 + 3 = 4 ; u_2 = 4 + 2 + 3 = 9 ; u_3 = 9 + 4 + 3 = 16...$$

Il semble que $u_n = (n+1)^2$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Nous allons démontrer par récurrence que $Q_n : u_n = (n+1)^2$ est vraie.

Initialisation : on veut montrer que Q_0 est vraie, c'est-à-dire que $u_0 = 1^2$ or $u_0 = 1$ donc c'est vraie.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , Q_n est vraie, c'est-à-dire $u_n = (n+1)^2$.

On veut montrer que Q_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} = (n+2)^2$.

$$\text{Or } u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $\boxed{u_n = (n+1)^2}$

Exercice 5

1) Nous allons montrer par récurrence que $P_n : s_n = 2$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : on veut montrer que P_0 est vraie, c'est-à-dire que $s_0 = 2$ or $s_0 = u_0 + v_0 = 0 + 2 = 2$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $s_n = 2$.

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $s_{n+1} = 2$.

$$\text{Or } s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4} + \frac{3v_n+1}{4} = \frac{3}{4}(u_n + v_n) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $\boxed{s_n = 2}$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$

$$t_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4} - \frac{3u_n+1}{4} = \frac{3(v_n - u_n) + 1 - 1}{4} = \frac{3}{4}t_n$$

Donc (t_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $t_0 = v_0 - u_0 = 2$.

$$\text{On a alors, pour tout } n \in \mathbb{N}, t_n = t_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \boxed{2 \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$3) \text{ Pour } n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_n + v_n = 2 \\ v_n - u_n = 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_n = 2 + 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ 2u_n = 2 - 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} v_n = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{cases}}$$

4) Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1} \text{ et } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$

Exercice 6

$$1) \text{ Pour } n \in \mathbb{N} : 3^n u_n = e^{n-1} \text{ donc } u_n = \frac{e^{n-1}}{3^n} = \frac{e^n \times e^{-1}}{3^n} = \left(\frac{e}{3}\right)^n \times \frac{1}{e}$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{e}{3}$ et de premier terme $\frac{1}{e}$.

2) u_0 est positif, tout comme la raison de (u_n) . De plus $\frac{e}{3} < 1$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n = 0 \text{ donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

Partie C : Convergence monotone

Exercice 1

1) On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(2x+1)$ définie sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ car elle est construite à partir de fonctions qui le sont. f est de la forme $\ln(u)$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2}{2x+1} > 0 \text{ donc la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[.$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, nous allons montrer que $P_n : 1 \leq u_n \leq 2$ est vraie.

Initialisation : on veut montrer que P_0 est vraie, c'est-à-dire que $1 \leq u_0 \leq 2$ or $u_0 = 1$ donc c'est vrai.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $1 \leq u_n \leq 2$.

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

Or $1 \leq u_n \leq 2$ et comme f est croissante sur $[1; 2]$, on a $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$.

D'où $\ln(3) \leq u_{n+1} \leq \ln(5)$. De plus, $\ln(3) > 1$ et $\ln(5) < 2$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $\boxed{1 \leq u_n \leq 2}$

2) $u_1 = \ln(3) > 1$ donc $u_1 > u_0$. On va montrer par récurrence que $Q_n : u_{n+1} > u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : on veut montrer que Q_0 est vraie, c'est-à-dire que $u_1 > u_0$ or on vient de le voir.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , Q_n est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.

On veut montrer que Q_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+2} > u_{n+1}$.

Or $2 \geq u_{n+1} > u_n \geq 1$ et f est croissante sur $[1; 2]$ donc $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ d'où $u_{n+2} > u_{n+1}$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est croissante.

3) (u_n) est une suite croissante majorée par 2 donc elle est convergente.

Exercice 2

$$1) u_1 = \frac{5}{3} ; u_2 = \frac{17}{9} ; u_3 = \frac{53}{27} ; u_4 = \frac{161}{81} ; u_5 = \frac{485}{243} ; u_6 = \frac{1457}{729}$$

Il semble que (u_n) converge vers 2.

2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{u_n + 4}{3} - 2 = \frac{1}{3}(v_n + 2) + \frac{4}{3} - \frac{6}{3} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, (v_n) converge vers 0.

Ceci montre que (u_n) converge bien vers 2.

Exercice 3

1) On considère la fonction $f: x \mapsto \sqrt{3x-2}$ définie sur $[1; +\infty[$. f est de la forme \sqrt{u} avec u strictement positive sur $]1; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} > 0$

Ceci montre que f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on peut montrer que $P_n: u_n \geq 1$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : on veut montrer que P_0 est vraie, c'est-à-dire que $u_0 \geq 1$ or c'est vrai par définition de u_0 .

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n \geq 1$.

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 1$.

Or $u_n \geq 1$ et la fonction f est croissante sur $]1; +\infty[$ donc $f(u_n) \geq f(1)$ d'où $u_{n+1} \geq 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$ donc l'affirmation est **VRAIE**

2) 1^{er} cas : $u_1 \geq u_0$ alors on peut montrer par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$ en utilisant la croissance de f et dans ce cas, (u_n) est croissante.

2^{ème} cas : $u_1 \leq u_0$ alors on peut montrer par récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$ en utilisant la croissance de f et dans ce cas (u_n) est décroissante.

Dans tous les cas, (u_n) est monotone donc l'affirmation est **VRAIE**

$$3) u_1 - u_0 = \sqrt{3u_0 - 2} - u_0 = \frac{3u_0 - 2 - u_0^2}{\sqrt{3u_0 - 2} + u_0} = -\frac{(u_0 - 1)(u_0 - 2)}{\sqrt{3u_0 - 2} + u_0}$$

Comme $u_0 \in]1; 2[$, $u_0 - 1 > 0$ et $u_0 - 2 < 0$ donc $u_1 - u_0 > 0$.

D'après la question précédente, on aura donc (u_n) croissante. De plus elle est majorée par 2 donc elle converge.

f est continue car dérivable donc les seules limites possibles sont les solutions de $f(x) = x$ dans $[1; 2]$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = x \Leftrightarrow 3x-2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2 \text{ car } x > 0.$$

La seule limite qui convient ici est donc 2 et (u_n) converge vers 2. L'affirmation est donc **FAUSSE**.

4) D'après la question précédente, l'affirmation est **VRAIE**

$$5) u_1 - u_0 = -\frac{(u_0 - 1)(u_0 - 2)}{\sqrt{3u_0 - 2} + u_0} \text{ et comme } u_0 \geq 2, \text{ on a donc } (u_0 - 1)(u_0 - 2) \geq 0 \text{ et } u_1 \leq u_0.$$

D'après la question 3, cela indique que la suite (u_n) est décroissante. De plus, elle est minorée par 1 donc elle converge. Les limites possibles sont 1 et 2. Mais on peut aussi montrer par récurrence que $u_n \geq 2$ pour $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la croissance de f . La seule limite qui convient est donc 2. Donc l'affirmation est **VRAIE**

Exercice 4

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -(u_n)^2 \leq 0$ donc **(u_n) est décroissante.**

2) On va montrer par récurrence que $P_n: 0 \leq u_n \leq 1$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $0 \leq u_0 \leq 1$ or $u_0 = \frac{1}{2}$ donc c'est vrai.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq 1$

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

$u_{n+1} = u_n - (u_n)^2 = u_n(1 - u_n)$ or $u_n \geq 0$ et $1 - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq 0$.

Par ailleurs, $u_{n+1} - 1 = -(u_n)^2 + u_n - 1$; on peut donc étudier le polynôme $f: x \mapsto -x^2 + x - 1$
 $\Delta = -3$ donc f est du signe de $a = -1$ donc négatif. Ce qui montre que $u_{n+1} \leq 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 1$.

3) (u_n) est donc une suite décroissante minorée par 0 donc elle converge.

On note L sa limite. Comme $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g: x \mapsto x - x^2$ qui est continue sur $[0; 1]$, L est solution de $g(L) = L : g(L) = L \Leftrightarrow L - L^2 = L \Leftrightarrow L^2 = 0 \Leftrightarrow L = 0$

Donc (u_n) converge vers 0.

Exercice 5

1) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on va montrer que $P_n: u_n \leq 6$ est vraie.

Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $u_0 \leq 6$ or $u_0 = -2$ donc c'est vrai.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq 6$

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 6$.

Or $u_n \leq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n + 3 \leq 6 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq 6$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $\boxed{u_n \leq 6}$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = 3 - \frac{1}{2}u_n$ or $u_n \leq 6 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}u_n \geq -3 \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{2}u_n \geq 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et (u_n) est croissante. (u_n) est donc une suite croissante et majorée par 6 donc elle converge.

3) Pour $n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}(v_n + 6) - 3 = \frac{1}{2}v_n + 3 - 3 = \frac{1}{2}v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -8$.

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, la suite (v_n) converge vers 0 ce qui montre que (u_n) converge vers 6.

Exercice 6

1) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on va montrer que $P_n : 0 < u_n < 1$ est vraie.

Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $0 < u_0 < 1$ or $u_0 = 0,7$ donc c'est vrai.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $0 < u_n < 1$.

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $0 < u_{n+1} < 1$.

Or $0 < u_n < 1$ et la fonction g est strictement croissante sur $[0; 1]$ donc $g(0) < g(u_n) < g(1)$ d'où $0 < u_{n+1} < 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $\boxed{u_n \in]0; 1[}$

2) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on va montrer que $Q_n: u_{n+1} < u_n$

Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $u_1 < u_0$ or $u_1 = 0,7^2 = 0,49$ et $u_0 = 0,7$ donc c'est vrai.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+2} < u_{n+1}$.

Or $u_{n+1} < u_n$ et la fonction g est croissante sur $[0; 1]$ donc $g(u_{n+1}) < g(u_n)$ d'où $u_{n+2} < u_{n+1}$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est décroissante.

3) (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. On note L sa limite. Alors, comme g est continue sur $[0; 1]$, on a $g(L) = L$ ou encore $L^2 - L = 0$ ce qui donne $L = 0$ ou $L = 1$.

Comme (u_n) est décroissante, la limite ne peut pas être 1 donc $L = 0$.

Exercice 7

1) L'étude de la fonction f ne peut pas être utile car f n'est pas monotone sur $[0; 1]$.

Nous allons tout de même montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $P_n: 0 < a_n < 1$ est vraie.

Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $0 < a_0 < 1$ or $a_0 = 0,4$ donc c'est vrai.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $0 < a_n < 1$

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $0 < a_{n+1} < 1$.

Or $a_{n+1} = (1 - a_n)^3 + a_n$:

$0 < a_n < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - a_n < 1 \Leftrightarrow 0 < (1 - a_n)^3 < 1$ car la fonction cube est croissante sur \mathbb{R}

En ajoutant terme à terme, on a : $0 < (1 - a_n)^3 + a_n$

Par ailleurs $a_{n+1} - 1 = (1 - a_n)^3 + a_n - 1 = (1 - a_n)^3 - (1 - a_n) = (1 - a_n)[(1 - a_n)^2 - 1]$
 $= (1 - a_n)(1 - a_n + 1)(1 - a_n - 1) = -a_n(1 - a_n)(2 - a_n)$ avec $a_n > 0$; $1 - a_n > 0$ et $2 - a_n > 0$ donc
 $a_{n+1} - 1 < 0$ et on a bien $0 < a_{n+1} < 1$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $\boxed{0 < a_n < 1}$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} - a_n = (1 - a_n)^3$ or $1 - a_n > 0$ donc $(1 - a_n)^3 > 0$ et (a_n) est croissante.

3) La suite (a_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge. On note L sa limite. Comme f est continue sur \mathbb{R} car dérivable, on a $f(L) = L$.

$f(L) = L \Leftrightarrow (1 - L)^3 + L = L \Leftrightarrow (1 - L)^3 = 0 \Leftrightarrow L = 1$

Exercice 8

1) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que $P_n : u_n > 0$ est vraie.

Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $u_0 > 0$ or $u_0 = 1$

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n > 0$

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$

Or $u_n > 0$ donc $u_n^2 > 0$ et $1 + u_n^2 > 0$ d'où $u_{n+1} > 0$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $\boxed{u_n > 0}$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{1+u_n^2} - u_n = u_n \left[\frac{u_n}{1+u_n^2} - 1 \right] = \frac{u_n(-u_n^2+u_n-1)}{1+u_n^2}$

u_n est positif, tout comme le dénominateur. Donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $-u_n^2 + u_n - 1$. On considère le polynôme $-x^2 + x - 1$: $\Delta = -3$ donc ce polynôme est du signe de $a = -1$. Donc $-u_n^2 + u_n - 1$ est négatif tout comme $u_{n+1} - u_n$ donc (u_n) est décroissante.

3) Comme (u_n) est décroissante, elle est majorée par $u_0 = 1$ et comme elle est minorée par 0, elle est bornée.

4) (u_n) est une suite décroissante minorée par 0 donc elle converge. On note L sa limite. Comme la fonction

$f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ est continue sur \mathbb{R} , L est solution de l'équation $f(x) = x$.

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2}{1+x^2} = x \Leftrightarrow x^2 = x(1+x^2) \Leftrightarrow x^2 = x + x^3 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 - x + 1 = 0$ La seconde équation n'a pas de solution donc $\boxed{L = 0}$

Exercice 9

1) On suppose que (u_n) a une limite finie et on note L cette limite. Comme $f : x \mapsto \frac{5x}{3x-4}$ est continue sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$, L est solution de l'équation $f(x) = x$.

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{5x}{3x-4} = x \Leftrightarrow 5x = 3x^2 - 4x \Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$

La limite de (u_n) , si elle existe, est donc 0 ou 3.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} = \frac{\frac{5u_n}{3u_n-4} - 3}{\frac{5u_n}{3u_n-4}} = \frac{5u_n - 3(3u_n-4)}{5u_n} = \frac{5u_n - 9u_n + 12}{5u_n} = \frac{-4u_n + 12}{5u_n} = -\frac{4(u_n-3)}{5u_n} = -\frac{4}{5}v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $-\frac{4}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{5u_0}{3u_0-4} = -5$

3) On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \left(-\frac{4}{5}\right)^n = -5 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^n$.

Or $v_n = \frac{u_n-3}{u_n} \Leftrightarrow u_n \times v_n = u_n - 3 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -3 \Leftrightarrow u_n = \frac{-3}{v_n-1} = \frac{3}{1-v_n}$ d'où

$$u_n = \frac{3}{1 + 5\left(-\frac{4}{5}\right)^n}$$

Comme $-1 < -\frac{4}{5} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n = 0$ et donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3}$

Partie D : Suites adjacentes

Exercice 1

1) Pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{-(n+1)+(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante.}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+3} = \frac{n+3-(n+4)}{(n+3)(n+4)} = -\frac{1}{(n+3)(n+4)} < 0 \text{ donc } (v_n) \text{ est décroissante.}$$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+1} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+1} = 0$$

donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Leur limite commune est 0.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{-n+(n+1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante.}$$

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - 1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Or $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$ et la fonction sinus est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) < \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ d'où (v_n) décroissante

$$v_n - u_n = 1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{n} = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \sin(0) = 0 \text{ donc par composition et somme } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$$

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Par calcul de limite simple, elles convergent vers 1.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{1}{(n+1)^2} - 3 + \frac{1}{n^2} = \frac{-n^2+(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante.}$$

$$v_{n+1} - v_n = 3 + \frac{1}{(n+1)^3} - 1 - \frac{1}{n^3} = \frac{n^3-(n+1)^3}{n^3(n+1)^3} = \frac{-3n^2-3n-1}{n^3(n+1)^3} < 0 \text{ donc } (v_n) \text{ est décroissante.}$$

$v_n - u_n = 3 + \frac{1}{n^3} - 3 + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}$ et un calcul de limite simple montre que $v_n - u_n$ converge vers 0 donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Leur limite commune est 3 et s'obtient par calcul de limite simple.

Exercice 2

1) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{3x_n + 2y_n}{5} - \frac{2x_n + 3y_n}{5} = \frac{x_n - y_n}{5} = \frac{1}{5} w_n$$

Donc (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $w_0 = y_0 - x_0 = 1$.

Comme sa raison est strictement comprise entre -1 et 1, (w_n) converge vers 0.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n + 3y_n}{5} - x_n = \frac{2x_n + 3y_n - 5x_n}{5} = \frac{3(y_n - x_n)}{5} = \frac{3}{5} w_n$$

Or (w_n) est géométrique de premier terme positif et de raison positive donc w_n est positif. Ce qui montre que (w_n) est croissante.

$$y_{n+1} - y_n = \frac{3x_n + 2y_n}{5} - y_n = \frac{3(x_n - y_n)}{5} = -\frac{3}{5} w_n < 0 \text{ donc } (y_n) \text{ est décroissante.}$$

Par ailleurs, la limite de $(y_n - x_n)$ est nulle donc (x_n) et (y_n) sont adjacentes. Elles convergent donc et ont la même limite.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{2x_n + 3y_n}{5} + \frac{3x_n + 2y_n}{5} = \frac{5x_n + 5y_n}{5} = x_n + y_n = x_0 + y_0 = 3$$

On a donc $\boxed{x_n + y_n = 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on a donc $2L = 3$ d'où $\boxed{L = \frac{3}{2}}$

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante.}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0 \text{ donc } (v_n) \text{ est décroissante.}$$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$$

Ceci montre que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 4

1) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que $P_n : v_n < u_n$ est vraie.

Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $v_0 < u_0$ or $v_0 = 1$ et $u_0 = 2$

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $v_n < u_n$

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $v_{n+1} < u_{n+1}$.

$$\text{Or } v_{n+1} < u_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{u_n \times v_n} < \frac{u_n + v_n}{2} \Leftrightarrow u_n \times v_n < \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 \text{ car la fonction carrée est croissante sur } [0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow 4u_n v_n < u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 \Leftrightarrow 0 < (u_n - v_n)^2 \text{ or ceci est vrai car } v_n < u_n.$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $\boxed{v_n < u_n}$

Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} - \frac{u_n - v_n}{2} &= \frac{2u_{n+1} - 2v_{n+1} - u_n + v_n}{2} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n} - u_n + v_n}{2} = v_n - \sqrt{u_n v_n} \\ &= \sqrt{v_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) > 0 \text{ car } v_n < u_n \text{ donc } \sqrt{v_n} < \sqrt{u_n} \end{aligned}$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} < 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est décroissante.}$$

$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n v_n} - v_n = \sqrt{v_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) > 0 \text{ car } u_n > v_n \text{ donc } \sqrt{u_n} > \sqrt{v_n} \text{ donc } (v_n) \text{ est croissante.}$$

On considère la suite (x_n) définie par $x_n = u_n - v_n$. Alors $x_{n+1} \leq \frac{1}{2}x_n$.

Par récurrence, on montre que la propriété $P_n : x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $x_0 \leq 1$ or $x_0 = u_0 - v_0 = 1$

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $x_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$\text{Or } x_{n+1} \leq \frac{1}{2}x_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, la limite de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est égale à 0 donc (x_n) converge aussi vers 0 (ses termes sont positifs).

Ceci montre que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 5

1) Pour $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = k(v_n - u_n) \Leftrightarrow \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} = k(v_n - u_n) \Leftrightarrow \frac{u_n + v_n}{2} + v_n - (u_n + v_n) = 2k(v_n - u_n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_n - u_n}{2} = 2k(v_n - u_n) \Leftrightarrow 2k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{1}{4}}$$

2) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on va montrer que $P_n : u_n < v_n$

Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $u_0 < v_0$ or $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n < v_n$

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} < v_{n+1}$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - u_n) > 0 \text{ car } v_n > u_n. \text{ Donc } v_{n+1} > u_{n+1}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $\boxed{u_n < v_n}$

3) Pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} > 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante.}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \frac{1}{2} \times \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{1}{2} v_n = \frac{u_n - v_n}{4} < 0 \text{ donc } (v_n) \text{ est décroissante.}$$

De plus, la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ donc elle converge vers 0.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes et donc sont convergentes.

4) D'après la première question (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = 1$ donc pour

$$n \in \mathbb{N}, \boxed{w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

s_n est la somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$s_n = w_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)} = \boxed{\frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]}$$

5) Par ailleurs, pour $n \geq 1$

$$w_n = v_n - u_n = \frac{u_n + v_{n-1}}{2} - \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} = \frac{u_n - u_{n-1}}{2}$$

$$s_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n = w_0 + \frac{u_1 - u_0}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} + \dots + \frac{u_n - u_{n-1}}{2} = 1 + \frac{u_n - u_0}{2} = 1 + \frac{u_n - 1}{2} = \frac{u_n + 1}{2}$$

$$\text{D'où } u_n = 2s_n - 1 = \frac{8}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] - 1 = \boxed{\frac{5}{3} - \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}$$

6) Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0 \text{ donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{3}}$$