

Espaces vectoriels

Analysons des sous-espaces

Exercice 1 :

(Q 1) Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 3y - 2z = 0\}$; (d) $\{(x + 2y, y, x - 3y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$;
 (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 1\}$;
 (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \leq z\}$; (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

(Q 2) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ?

- (a) l'ensemble des fonctions paires; (d) l'ensemble des fonctions qui s'annulent;
 (b) l'ensemble des fonctions croissantes; (e) $\{x \rightarrow A \cos(x + \phi), (A, \phi) \in \mathbb{R}^2\}$;
 (c) l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 1; (f) $\{x \rightarrow e^{kx}, k \in \mathbb{Z}\}$.

(Q 3) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'ensemble des suites réelles ?

- (a) l'ensemble des suites convergentes; (d) l'ensemble des suites arithmétiques puis géométriques;
 (b) l'ensemble des suites convergeant vers un réel a ;
 (c) l'ensemble des suites divergentes; (e) $\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$.

(Q 4) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$) ?

- (a) $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0\}$;
 (b) $B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / M \text{ est de rang inférieur ou égal à } 1\}$;
 (c) $C = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad / \quad \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad M = \begin{pmatrix} -x-y & y & x \\ x & -x-y & y \\ y & x & -x-y \end{pmatrix} \right\}$.

Combinaisons linéaires ?

Exercice 2 : [corrigé]

(Q 1) Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \in \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$.(Q 2) Pour $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le vecteur : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Opérations entre sous-espaces vectoriels

Exercice 3 : [corrigé] On définit les vecteurs suivants de \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0, 0, 0), & u_2 &= (1, 1, 0, 0), \\ v_1 &= (1, 1, 1, 0), & v_2 &= (1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

On pose ensuite

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2) \quad G = \text{Vect}(v_1, v_2).$$

Démontrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 4 : [corrigé] Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. On note \mathcal{P} l'ensemble des fonctions paires et \mathcal{I} l'ensemble des fonctions impaires.

(Q 1) Montrer que \mathcal{I} et \mathcal{P} sont des sous-espaces vectoriels de E .

(Q 2) Montrer que $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} = \{0_E\}$.

(Q 3) Soit $f \in E$. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

(Q 4) En déduire que \mathcal{I} et \mathcal{P} sont supplémentaires.

Exercice 5 : [corrigé]

Dans chacun des cas suivants, démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

(Q 1) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont les ensembles des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de E . **Indication : procéder par Analyse-Synthèse.**

(Q 2) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, F est l'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$ et G est l'ensemble des fonctions constantes.

(Q 3) E est l'ensemble des fonctions continues de $[0; \pi]$ dans \mathbb{R} et F est l'ensemble des fonctions f de E vérifiant $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$, $G = \text{Vect}(\cos, \sin)$.

Indication : étant donnée $f \in E$, trouver $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f - \alpha \cos - \beta \sin \in F$.

Famille de vecteurs : génératrice ? libre ou liée ? base ?

Exercice 6 : [corrigé] Déterminer une famille génératrice des sous-espaces vectoriels suivants :

$$(a) F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / 3x - y = 0 \right\}; \quad (b) F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases} \right\};$$

Exercice 7 : [corrigé] Est-ce que $((1; 1; 1), (1; 0; 1), (0; 1; 0))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 ?

Exercice 8 : [corrigé] Donner une famille génératrice des ensembles suivants :

$$\begin{aligned} (a) F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}; \\ (b) F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+b & c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}. \end{aligned}$$

Exercice 9 : Soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0 \right\}, G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 \right\}.$

(Q 1) Montrer que F, G sont des espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice.

(Q 2) Déterminer une famille génératrice de $F \cap G$.

(Q 3) Soit $H = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Montrer que $F \oplus H = G \oplus H = \mathbb{R}^3$.

Exercice 10 : [corrigé]

(Q 1) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - xy = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En déterminer une famille génératrice.

(Q 2) Faire de même pour l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$.

Exercice 11 : [corrigé] Donner une famille génératrice des ensembles suivants :

(Q 1) L'ensemble des matrices symétriques.

(Q 2) L'ensemble des fonction affines définies sur \mathbb{R} .

(Q 3) L'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0$.

Exercice 12 : [corrigé] Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

(Q 1) Dans \mathbb{R}^n

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(Q 2) Dans l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

(a) $(\cos, \sin, x \rightarrow x \cos(x), x \rightarrow x \sin(x))$

(b) $(1, x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{3x})$;

(c) $(x \mapsto x, x \mapsto x + 1, x \mapsto x + 2)$

(Q 3) Dans un espace vectoriel E quelconque.

(a) Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) une famille libre d'éléments de E . On pose $u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ puis $\forall i \in [1, n], y_i = x_i + u$. A quelle condition sur la famille des (α_i) , (y_1, y_2, \dots, y_n) est-elle libre?

(b) Soit (e_1, \dots, e_p) une famille libre de E et $a \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Montrez que $(e_1 + a, e_2 + a, \dots, e_p + a)$ est encore libre. Montrez que l'hypothèse $a \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est indispensable.

Exercice 13 : [corrigé] Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid 3x - y - z = 2y + t = 0\}$$

$$G = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \text{ où } \begin{aligned} u_1 &= (1; -1; 2; 2), \\ u_2 &= (2; 1; 4; -2), \\ u_3 &= (1; 2; 2; -4). \end{aligned}$$

Donner une base des sous-espaces vectoriels $F, G, F \cap G$, et $F + G$.

Indications

Correction de l'exercice 2 :

$$1. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \text{ si et seulement si il existe } x, y, z \in \mathbb{R}, \text{ tels que } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

On est donc amené à étudier un système linéaire avec trois inconnues, quatre équations mais un paramètre. On obtient pour condition $m = 3$ et comme relation

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2. A est combinaison linéaire de ces trois vecteurs si et seulement si il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $A = x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 3 \\ y + z = 4 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ y + z = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ce système est donc incompatible et A ne s'écrit pas comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs.

Correction de l'exercice 3 :

Par propriété, si (u_1, u_2, v_1, v_2) est une base de \mathbb{R}^4 , alors : $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ $G = \text{Vect}(v_1, v_2)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^4 (cf dernier résultat du cours). Pour montrer que cette famille est une base, on montre que c'est une famille génératrice :

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On cherche si il existe $\lambda, \mu, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x, y, z, t) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma v_1 + \theta v_2$$

ce qui équivaut à résoudre le système linéaire de matrice augmentée associée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & t \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & x-t \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & y-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & z-t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & t \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & x-z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & y-z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & z-t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & t \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & x-y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & y-z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & z-t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & t \end{pmatrix}$$

Finalement

$$(x, y, z, t) = (x-y)u_1 + (y-z)u_2 + (z-t)v_1 + tv_2$$

ce qui prouve qu'il s'agit d'une famille génératrice de \mathbb{R}^4 . Par unicité de x, y, z, t , cette famille est de plus libre, c'est donc une base de \mathbb{R}^4 , ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 4 :

- $\mathcal{I} \subset E$.
• La fonction nulle est impaire.
• Soit $\lambda \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{I}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = -\lambda f(x) - g(x) = -(\lambda f + g)(x)$. Ainsi, $\lambda f + g \in \mathcal{I}$.

Par définition, \mathcal{I} est un sous espace vectoriel de E . On effectue la même démarche pour \mathcal{P} .

- En tant que sous espaces vectoriels de E , $0_E \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}$. Soit $f \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) = -f(x)$, soit $f(x) = 0$. On a montré que $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} \subset \{0_E\}$. Par double inclusion, on a le résultat.
- C'est un simple calcul.
- D'après précédemment, nous avons : $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} = \{0_E\}$. Il nous reste donc à montrer que $\mathcal{I} + \mathcal{P} = E$.

- $\mathcal{I} + \mathcal{P} \subset E$ est évident.
- Montrons que $E \subset \mathcal{I} + \mathcal{P}$. Soit $f \in E$. On cherche l'existence de $f_1 \in \mathcal{I}$ et $f_2 \in \mathcal{P}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. En s'aidant de la question précédente, on pose : $f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$. Alors : $f_2 \in \mathcal{P}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_2(x)$. De la même façon, nous obtenons : $f_1 \in \mathcal{I}$. Pour finir, l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ a été prouvée en question 3, ce qui finit de prouver le résultat.

Correction de l'exercice 5 :

(de Q1 et Q3)

- Montrons que $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont les ensembles des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de E . **Trois points doivent être vérifiés : ce sont des sous espaces vectoriels, leur intersection**

est réduite au vecteur nul, leur somme est égale à l'espace vectoriel.

- (a) Montrons que ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

VERIF (1) Ils sont inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

VERIF (2) La matrice nulle est symétrique et anti-symétrique

VERIF (3) Ils sont stables par combinaison linéaire ($\forall A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda A + \mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t$, par propriété de la transposée, ce qui est égal à $\lambda A + \mu B$; on fait de même pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.)

- (b) Montrons que leur intersection est réduite à la matrice nulle.

VERIF (1) En tant que sous-espaces vectoriels, la matrice nulle appartient à ces sous-espaces, $\{0_{nn}\} \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

VERIF (2) Montrons l'inclusion réciproque, soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $A^t = A$ et $A^t = -A$. Donc $A = 0_{nn}$. Cela montre que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \{0_{nn}\}$.

Ainsi, $\boxed{\{0_{nn}\} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$.

- (c) Montrons que leur somme est égale à l'espace vectoriel.

VERIF (1) Immédiatement $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

VERIF (2) Inclusion réciproque faite par analyse-synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A. ANALYSE. On cherche $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = S + A$. Passons à la transposée pour obtenir $M^t = S - A$. C'est équivalent à $S = \frac{M+M^t}{2}$ et $A = \frac{M-M^t}{2}$.

B. SYNTHÈSE. On pose $S = \frac{M+M^t}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A = \frac{M-M^t}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Et on a $S + A = M$. On a donc montré que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. L'inclusion réciproque est immédiate.

- E est l'ensemble des fonctions continues de $[0; \pi]$ dans \mathbb{R} et F est l'ensemble des fonctions f de E vérifiant $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi), G = \text{Vect}(\cos, \sin)$.

- (a) **Montrons que ces ensembles munis des lois de E sont sous espaces vectoriels.** Par propriété, G est un sous espace vectoriel. De plus :

VERIF (1) La fonction nulle vérifie $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$.

VERIF (2) Soient $f, g \in F, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda f(\frac{\pi}{2}) + g(\frac{\pi}{2}) = (\lambda f + g)(\frac{\pi}{2})$ et de même, $(\lambda f + g)(\pi) =$

$$\lambda f(\frac{\pi}{2}) + g(\frac{\pi}{2}) = \lambda f(\pi) + g(\pi) = (\lambda f + g)(\pi). \text{ Ainsi, } \lambda f + g \in F.$$

- (b) **Montrons que leur intersection est réduit au vecteur nul.**

VERIF (1) En tant que sous-espaces vectoriels, la fonction nulle appartient à ces sous-espaces, $\{0_E\} \subset F \cap G$.

VERIF (2) Soit $f \in F \cap G$. On écrit ce que cela signifie : $f \in F \Leftrightarrow (0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$ et $f \in G \Leftrightarrow f = \lambda \cos + \mu \sin$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Cela donne : $f(0) = \lambda, f(\frac{\pi}{2}) = \mu$ et $f(\pi) = -\lambda$. Ainsi, $\lambda = 0$, soit $f(0) = 0$ et $\mu = f(\frac{\pi}{2}) = f(0) = 0$. Finalement, $f = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$.

On a montré $\boxed{F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}}$.

- (c) **Montrons que leur somme est égale à E .**

VERIF (1) En tant que sous-espaces vectoriels, $F + G \subset E$.

VERIF (2) Soit $h \in E$.

A. ANALYSE. On cherche $f \in F, \lambda \cos + \mu \sin \in G$ telles que $h = f + \lambda \cos + \mu \sin$. En utilisant les conditions qui définissent F , nous avons :

$$\begin{aligned} h(0) &= f(0) + \lambda \\ h(\frac{\pi}{2}) &= f(\frac{\pi}{2}) + \mu = f(0) + \mu \\ h(\pi) &= f(\pi) - \lambda = f(0) - \lambda \\ \lambda &= \frac{h(0) - h(\pi)}{2} \\ \Leftrightarrow f(0) &= \frac{h(0) + h(\pi)}{2} \\ \mu &= h(\frac{\pi}{2}) - \frac{h(0) + h(\pi)}{2} = \frac{2h(\frac{\pi}{2}) - h(0) - h(\pi)}{2} \end{aligned}$$

B. SYNTHÈSE. On pose :

$$h = \underbrace{\left(h - \frac{h(0) - h(\pi)}{2} \cos - \frac{2h(\frac{\pi}{2}) - h(0) - h(\pi)}{2} \sin \right)}_{=f} + \underbrace{\left(\frac{h(0) - h(\pi)}{2} \cos - \frac{2h(\frac{\pi}{2}) - h(0) - h(\pi)}{2} \sin \right)}_g$$

Clairement, $g \in G$. On calcule :

$$\begin{aligned} f(0) &= h(0) - \frac{h(0) - h(\pi)}{2} = \frac{h(0) + h(\pi)}{2} \\ f(\frac{\pi}{2}) &= h(\frac{\pi}{2}) - \frac{2h(\frac{\pi}{2}) - h(0) - h(\pi)}{2} = \frac{h(0) + h(\pi)}{2} \\ f(\pi) &= h(\pi) + \frac{h(0) - h(\pi)}{2} = \frac{h(0) + h(\pi)}{2} \end{aligned}$$

Cela démontre que $f \in F$.

En conclusion, toute fonction de E est la somme d'une fonction de F avec une fonction de G , ce qui s'écrit encore : $E \subset F + G$. L'autre inclusion étant évidente, on en déduit : $E = F + G$.

C. Par le théorème de caractérisation des espaces supplémentaires, on a montré : $E = F \oplus G$.

Correction de l'exercice 6 :

On utilise l'algorithme de Gauss-Jordan.

- (a) Soit $(x, y, z) \in F$. Ici, le système est de rang 1, x incon-

nue principale, y, z secondaires.

$$(x, y, z) = (y/3; y; z) = y(1/3, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Par définition, une famille génératrice de F est $\left((1/3; 1; 0); (0; 0; 1)\right)$.

(b) Soit $(x, y, z) \in F$.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5z \\ y = 3z \end{cases}$$

Ici, le système est de rang 2, x, y inconnues principales, z secondaire.

$$(x, y, z) = z(-5, 3, 1)$$

Par définition, une famille génératrice de F est $\left((-5, 3, 1)\right)$.

Correction de l'exercice 7 :

Soit $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche $\lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x, y, z) = \lambda(1; 1; 0) + \mu(1; -1; 1) + \alpha(0; 0; 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = (x+y)/2 \\ \mu = (x-y)/2 \\ \alpha = z \end{cases}$$

Finalement,

$$(x, y, z) = (x+y)/2(1; 1; 0) + (x-y)/2(1; -1; 1) + z(0; 0; 1)$$

Par définition, cette famille est donc génératrice de \mathbb{R}^3 .

Étudions la liberté de cette famille. Soit $\lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$(0; 0; 0) = \lambda(1; 1; 0) + \mu(1; -1; 1) + \alpha(0; 0; 1)$$

On reprend le système précédent (PAS DE travail INUTILE), et on obtient $\lambda = \alpha = \mu = 0$. Par définition, cette famille est libre.

On a donc une famille libre et génératrice de \mathbb{R}^3 . C'est donc une base de \mathbb{R}^3 . De plus, les composantes de $(x; y; z)$ dans cette base sont $((x+y)/2; (x-y)/2; z)$.

Correction de l'exercice 8 :

1. Soit $\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in F$. Alors

$$\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont clairement des éléments de F . Ainsi, par définition, ces deux matrices forment une famille génératrice de F .

2. De même,

$$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Correction de l'exercice 10 :

(Q 1) Par propriété, l'ensemble des solutions de l'équation $y' - xy = 0$ est

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{-\int (-x) dx}; \lambda \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \lambda e^{x^2/2}; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Montrons que c'est un sous espace vectoriel :

VERIF (1) \mathcal{S} est un sous ensemble de fonctions.

VERIF (2) La fonction nulle appartient à cet ensemble.

VERIF (3) Soit deux fonctions $f_1 : x \mapsto \lambda_1 e^{x^2/2}; f_2 : x \mapsto \lambda_2 e^{x^2/2}$ et $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f_1 + \mu f_2)(x) = (\lambda \lambda_1 + \mu \lambda_2) e^{x^2/2}$$

Ainsi, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{S}$.

Enfin par définition, $(x \mapsto e^{x^2/2})$ est une famille génératrice.

(Q 2) L'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$ est

$$\{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\cos; \sin).$$

C'est donc un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions, et une famille génératrice est (\cos, \sin) .

Correction de l'exercice 11 :

(Q 1) $(E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n} \cup (E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$

(Q 2) L'ensemble des fonction affines définies sur \mathbb{R} : $\text{Vect}(x \mapsto 1; x \mapsto x)$.

(Q 3) L'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0$ Équation caractéristique : $r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r+2)^2 = 0$. Par propriété, $\forall n \geq 0, u_n = \lambda(-2)^n + \mu n(-2)^n$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par définition, une famille génératrice est : $((-2)^n)_{n \geq 0}; (n(-2)^n)_{n \geq 0}$.

Correction de l'exercice 12 :

(Q 1) Dans \mathbb{R}^3 . $\mathcal{F} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$;

Soit $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 1, 0) + \gamma(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0$$

La famille est libre par définition.

(Q 2) Dans $\mathcal{M}_{41}(\mathbb{R})$. $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

Soit $\lambda, \mu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice augmentée associée à ce système est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système est homogène de rang 4, le nombre d'inconnues. Par propriété, il admet une unique solution $\lambda = \mu = \gamma = \delta = 0$. Par définition, la famille est donc libre.

(Q 3) Dans l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

(a) $(\cos, \sin, x \rightarrow x \cos(x), x \rightarrow x \sin(x))$. Soit $\lambda, \alpha, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \cos(x) + \alpha \sin(x) + \mu x \cos(x) + \gamma x \sin(x) = 0$$

C'est vrai pour tous les réels x , donc pour $x \in \{0; \pi/2; \pi; 3\pi/2\}$ (Pourquoi 4 valeurs, car on a 4 inconnues). Ces valeurs injectées donnent :

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha + \gamma\pi/2 = 0 \\ -\lambda - \pi\mu = 0 \\ \lambda\sqrt{2}/2 + \alpha\sqrt{2}/2 + \mu(\pi/8) + \gamma(\pi/8) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \alpha + \gamma\pi/2 = 0 \\ \alpha\sqrt{2}/2 + \gamma(\pi/4) \times \sqrt{2}/2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille est donc libre par définition.

(b) $(1, x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{3x})$;

Soit $\lambda; \mu; \gamma; \delta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda + \mu e^x + \gamma e^{2x} + \delta e^{3x} = 0$$

Un premier passage à la limite lorsque $x \rightarrow -\infty$ offre $\lambda = 0$. La condition devient

$\forall x \in \mathbb{R}, \mu e^x + \gamma e^{2x} + \delta e^{3x} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \mu + \gamma e^x + \delta e^{2x} = 0$ Un second passage à la limite lorsque $x \rightarrow -\infty$ offre $\mu = 0$. De même, nous obtenons $\gamma = \delta = 0$ et la famille est libre.

(c) $(x \mapsto x, x \mapsto x+1, x \mapsto x+2)$ Cette famille est liée. On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha x + \beta(x+1) + \gamma(x+2) = 0.$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients le sont aussi. Par conséquent

$$\alpha + \beta + \gamma = 0; \beta + 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \beta = -2\gamma; \alpha = \gamma.$$

Nous prenons, par exemple, $\gamma = 1$ et nous observons la relation de liaison suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1).x + (-2).(x+1) + (1).(x+2) = 0.$$

Correction de l'exercice 13 :

- On cherche une famille génératrice de F .

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2y + t = 0 \end{cases} \text{ Or :}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}z - \frac{1}{6}t \\ y = -t/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}z - \frac{1}{6}t \\ -\frac{1}{2}t \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = z \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \in \text{Vect}(e_1, e_2), e_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où : $F = \text{Vect}(e_1, e_2) \Leftrightarrow (e_1, e_2)$ est une famille génératrice de F . De plus, cette famille est libre car : $ae_1 +$

$$be_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/3a - b/6 = 0 \\ -b/2 = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ainsi, (e_1, e_2) est une base de F .

- Puisque : $G = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$, (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de G . On étudie donc la liberté de cette famille de vecteurs.

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \\ 2a + 4b + 2c = 0 \\ 2a - 2b - 4c = 0 \end{cases}$$

Or :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -c \end{cases} \text{ Il y a une infinité}$$

de solutions donc la famille est liée. De plus, pour $c = 1$, nous obtenons : $a = 1$ et $b = -1$, ce qui donne :

$$u_1 - u_2 + u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u_3 = u_2 - u_1.$$

Par conséquent : $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \text{Vect}(u_1, u_2)$ car $u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$. D'où : $G = \text{Vect}(u_1, u_2)$. (u_1, u_2) est donc encore une famille génératrice de G ! L'étude de sa liberté correspond à la résolution du système précédent avec $c = 0$, ce qui donne : $a = c = 0$ et $b = -c = 0$. Donc, la famille est libre ! Au final, (u_1, u_2, u_3) est une base de G .

$$\begin{aligned} \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2y + t = 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3(a + 2b) - (-a + b) - (2a + 4b) = 0 \\ 2(-a + b) + (2a - 2b) = 0 \\ x = a + 2b \\ y = -a + b \\ z = 2a + 4b \\ t = 2a - 2b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ x = a + 2b \\ y = -a + b \\ z = 2a + 4b \\ t = 2a - 2b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ x = -3a \\ y = -3a \\ z = -6a \\ t = 6a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \vec{u} = a \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \in \text{Vect}(e) \end{aligned}$$

$$\text{avec } e = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $F \cap G = \text{Vect}(e)$ donc que (e) est une

famille génératrice de $F \cap G$. Toute famille constituée d'un seul vecteur non nul est bien évidemment libre. (e) est donc une base de $F \cap G$.

- Par propriété : $F + G = \text{Vect}(e_1, e_2, u_1, u_2)$. (e_1, e_2, u_1, u_2) est donc une famille génératrice de $F + G$. On remarque rapidement que $u_1 + u_2 = 6e_1$ donc : $u_2 = 6e_1 - u_1 \in \text{Vect}(e_1, e_2, u_1)$ ce qui assure que : $\text{Vect}(e_1, e_2, u_1)$, et donc : $F + G = \text{Vect}(e_1, e_2, u_1)$. Nous avons donc une (e_1, e_2, u_1) qui est une famille génératrice de $F + G$. Le calcul est laissé au lecteur mais cette famille est libre. Au final : (e_1, e_2, u_1) est une base de $F + G$.

