M1 IM/MPA : TD Optimisation et Éléments Finis

Feuille 6 : Approximation par Éléments Finis.

*Les questions ou exercices avec * ne sont pas prioritaires pour les IM.*

Exercice 1 *Approximation en dimension 1.*

On considère le problème suivant $(\mathcal{P}_{a,b,\alpha,\beta,f})$: *Trouver* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *tel que*

$$\begin{aligned} -u''(x) + au'(x) + bu(x) &= f(x), \forall x \in]0,1[, && (1)\\ u(0) &= \alpha, && (2)\\ u(1) &= \beta, && (3) \end{aligned}$$

avec a *et* b *sont deux constantes réelles positives et* α *et* β *deux constantes réelles et* f *une fonction continue sur* $[0,1]$.

On considère le cas où $a = 0$, $b = 1$, $f : x \mapsto 1$ et $\alpha = \beta = 0$. On a vu la formulation variationnelle associée dans la Feuille de TD5. On considère une subdivision uniforme $(x_i)_{i\in\{0,..,N+1\}}$ de $[0,1]$ de pas h. On note pour tout $i \in \{1,..,N\}$, $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ et l'espace $\mathcal{V}_h$ suivant :

$$\mathcal{V}_h := \left\{ u \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ \text{pour tout } i \in \{0,...,N\}, u_{/I_i} \in \mathbb{P}_1, u(0) = u(1) = 0 \right\},$$

(a) Ecrire la formulation variationnelle discrète.

(b) Montrer que trouver $u_h \in \mathcal{V}_h$ solution du problème variationnel discret revient à résoudre un système linéaire que l'on précisera.

(c) Montrer que la matrice associée au système linéaire est inversible.

(d) Détailler le calcul des éléments de la matrice du système linéaire.

Solution exercice 1

On considère le problème suivant $(\mathcal{P})$: *Trouver* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *tel que*

$$\begin{aligned} -u''(x) + au'(x) + bu(x) &= f(x), \forall x \in]0,1[, && (4)\\ u(0) &= \alpha, && (5)\\ u(1) &= \beta, && (6) \end{aligned}$$

avec a *et* b *sont deux constantes réelles positives et* α *et* β *deux constantes réelles et* f *une fonction continue sur* $[0,1]$.

On considère le cas où $a = 0$, $b = 1$, $f : x \mapsto 1$ et $\alpha = \beta = 0$. On a vu la formulation variationnelle associée dans la Feuille de TD5. On considère une subdivision uniforme de $[0,1]$ de pas h et l'espace $\mathcal{V}_h$ suivant :

$$\mathcal{V}_h := \left\{ u \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ \text{ pour tout } i \in \{0,...,N+1\}, u_{/I_i} \in \mathbb{P}_1, u(0) = u(1) = 0 \right\},$$

(a) La formulation variationnelle discrète est simplement donnée par $(\mathcal{F}_h)$: *Trouver* $u_h \in \mathcal{V}_h$ *tel que pour tout* $v_h \in \mathcal{V}_h$, $a(u_h, v_h) = l(v_h)$, où on reprend l'expression de a trouvée dans l'exercice correspondant du TD5.

(b) Montrons que trouver $u_h \in \mathcal{V}_h$ solution de $(\mathcal{F}_h)$ revient à résoudre un système linéaire que l'on précisera.
Tout d'abord, l'espace $\mathcal{V}_h$ proposé est exactement le même que celui utilisé en cours pour développer la méthode d'éléments finis $\mathbb{P}_1$ en dimension 1. Ensuite, on procède exactement comme dans le cours et la preuve de la proposition IV.3.1. Par contre dans la preuve on voit que l'on a besoin de savoir que a est bilinéaire et que l est linéaire. Il faut donc au préalable montrer cela. Pour montrer que l est linéaire, c'est direct : on a bien pour tout $(u,v) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $l(u + \lambda v) = \int_0^1 f(u + \lambda v) = \int_0^1 fu + \lambda \int_0^1 fv = l(u) + \lambda l(v)$ et pour tout $(u,v,w) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a(u, v + \lambda w) = a(u,v) + \lambda a(u,w)$ et $a(u + \lambda w, v) = a(u,v) + \lambda a(w,v)$ (faire les détails). Ce qui donne ce que l'on cherche. Une fois cela fait, il suffit de "recopier" la démonstration de la proposition V.3.1. jusqu'à l'équation (V.36).

(c) Montrons que la matrice associée au système linéaire est inversible.
On peut pour cela se référer encore une fois au cours. On peut montrer que cette matrice est inversible. Pour cela, on montre que si $V \in \mathbb{R}^N$ est tel que $\mathcal{A}_h V = 0$, alors $V = 0$. Soit donc $V \in \mathbb{R}^N$ tel que $\mathcal{A}_h V = 0$. Si $\mathcal{A}_h V = 0$, on a ${}^tV \mathcal{A}_h V = 0$. Notons alors $v \in \mathcal{V}_h$, le vecteur de coordonnées V dans la base $(\varphi_i)_{i \in \{1,...,N\}}$. En utilisant que $a(v,v) =^t V \mathcal{A}_h V$, on en déduit que ${}^tV \mathcal{A}_h V = 0$ implique $\displaystyle\int_0^1 v'^2 + \int_0^1 v^2 = 0$, et donc en particulier $v \equiv 0$ ($v = 0$ p.p. puis $v \equiv 0$ par continuité de v). On a donc le résultat. Le système linéaire est inversible, il y a donc existence et unicité d'une solution au problème. Attention, on voit qu'ici, on n'a pas utilisé une hypothèse de coercivité, mais seulement l'expression explicite de a pour conclure.

(d) Détailler le calcul des éléments de la matrice du système linéaire.

Pour le calcul des éléments de la matrice, on doit calculer $a(\varphi_j, \varphi_i)$ pour tout $(i,j) \in \{1,...,N\}^2$. De l'expression de la forme bilinéaire a, on tire

$$a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx + \int_0^1 \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx. \tag{7}$$

Dans ce terme, on remarque qu'en cours on a déjà calculé la première partie, $\int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx$; il ne reste qu'à "recopier" le cours pour cette partie. Il ne reste donc qu'à calculer les termes $\int_0^1 \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx$. Pour cela, on utilise toujours le changement de variable F_i^{-1}.

On commence par calculer les intégrales sur l'élément de référence. On a

$$\int_0^1 (\hat{\varphi}_0(x))^2 dx = \int_0^1 (1-\xi)^2 d\xi, \tag{8}$$

$$= \left[-\frac{(1-\xi)^3}{3} \right]_0^1, \tag{9}$$

$$= \frac{1}{3}, \tag{10}$$

et

$$\int_0^1 (\hat{\varphi}_1(x))^2 dx = \int_0^1 \xi^2 d\xi, \tag{11}$$

$$= \left[\frac{\xi^3}{3} \right]_0^1, \tag{12}$$

$$= \frac{1}{3}, \tag{13}$$

et

$$\int_0^1 \hat{\varphi}_0(x)\hat{\varphi}_1(x) dx = \int_0^1 (1-\xi)\xi d\xi, \tag{14}$$

$$= \left[\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right]_0^1, \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \tag{16}$$

$$= \frac{1}{6}. \tag{17}$$

Ensuite, pour $i \in \{1, ..., N\}$, tous les termes $\int_0^1 \varphi_i \varphi_j$ sont nuls si $j \in \{1, .., N\}$ est tel que $|i-j| \geq 2$, puisque nous avons vu que le support de φ_i est réduit à $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ et que $]x_{i-1}, x_{i+1}[\cap]x_{j-1}, x_{j+1}[= \emptyset$ si $|i-j| \geq 2$. Il n'y a donc à calculer que les termes $(\int_0^1 \varphi_i \varphi_i)_{i \in \{1,...,N\}}$ et $(\int_0^1 \varphi_i \varphi_{i+1})_{i \in \{1,...,N-1\}}$, $(\int_0^1 \varphi_i \varphi_{i-1})_{i \in \{2,...,N\}}$. Plus précisément, on a :

$$\int_0^1 (\varphi_i(x))^2 dx = \int_{I_{i-1}} (\varphi_i(x))^2 dx + \int_{I_i} (\varphi_i(x))^2 dx. \tag{18}$$

Chacun de ces deux termes peut être calculé individuellement. Tout d'abord, on a sur I_i, $\varphi_i = \hat{\varphi}_0 \circ F_i^{-1}$ et $\varphi_{i+1} = \hat{\varphi}_1 \circ F_i^{-1}$. On a donc

$$\int_{I_i} (\varphi_i(x))^2 dx = \int_{I_i} (\hat{\varphi}_0(F_i^{-1}(x))^2 dx. \tag{19}$$

On définit un changement de variable en posant $\xi = F_i^{-1}(x)$, ce qui donne $d\xi = F_i^{-1'}(x)dx$ avec $F_i^{-1'}(x) = \frac{1}{x_{i+1}-x_i} = \frac{1}{h}$.

On trouve alors

$$\int_{I_i} (\varphi_i(x))^2 dx = h\int_0^1 (\hat{\varphi}_0(\xi))^2 d\xi = \frac{h}{3}. \tag{20}$$

De même,

$$\int_{I_{i-1}} (\varphi_i(x))^2 dx = \int_{I_{i-1}} (\hat{\varphi}_1(F_{i-1}^{-1}(x))dx = h\int_0^1 (\hat{\varphi}_1(\xi))^2 d\xi = \frac{h}{3}. \tag{21}$$

Donc

$$\int_0^1 (\varphi_i(x))^2 dx = \frac{2h}{3}. \tag{22}$$

Ensuite de la même façon, puisque l'intersection du support de φ_i et φ_{i-1} est I_{i-1}, on a

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)dx = \int_{I_{i-1}} \varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)dx. \tag{23}$$

Ce qui donne

$$\int_{I_{i-1}} \varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)dx = \int_{I_{i-1}} \hat{\varphi}_1(F_{i-1}^{-1}(x))\hat{\varphi}_0(F_{i-1}^{-1}(x))dx. \tag{24}$$

Et en passant à l'élément de référence, on a

$$\int_{I_{i-1}} \varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)dx = h\int_0^1 \hat{\varphi}_1(\xi)\hat{\varphi}_0(\xi)d\xi = \frac{h}{6}. \tag{25}$$

De façon analogue, on a

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)dx = \frac{h}{6}. \tag{26}$$

Finalement,

$$\mathcal{A}_h = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & ... & ... & ... & -1 & 2 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & ... & ... & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & ... & ... & ... & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{27}$$

Exercice 2 *Approximation en dimension 1 bis.*

On considère le problème suivant $(\mathcal{P})$: *Trouver* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *tel que*

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \forall x \in]0,1[, && (28) \\ u'(0) &= 0, && (29) \\ u(1) &= 0, && (30) \end{aligned}$$

avec f une fonction continue sur $[0,1]$.

On a vu la formulation variationnelle associée dans la Feuille de TD5. On considère une subdivision uniforme $(x_i)_{i\in\{0,..,N+1\}}$ de $[0,1]$ de pas h. On note pour tout $i \in \{1,..,N\}$, $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ et l'espace $\tilde{\mathcal{V}}_h$ suivant :

$$\tilde{\mathcal{V}}_h := \left\{ u \in \mathcal{C}^0([0,1]), \text{ pour tout } i \in \{0,...,N\}, u_{/I_i} \in \mathbb{P}_1, u(1) = 0 \right\},$$

1. Écrire la formulation variationnelle discrète associée dans l'espace $\tilde{\mathcal{V}}_h$.

2. Que dire de la dimension de $\tilde{\mathcal{V}}_h$ (on pourra raisonner formellement comme dans le cours).

3. Sur le même principe qu'en cours donner les fonctions de base de Lagrange de $\tilde{\mathcal{V}}_h$ associées aux degrés de liberté et les fonctions de base élémentaires.

4. Former le système linéaire et donner l'expression de la matrice (on calculera les termes avec la même méthode que dans le cours et on pointera sur les différences avec celui-ci).

Solution exercice 2

1. Comme dans la Feuille de TD5, on pose donc $\mathcal{V} := \left\{ v \in \mathcal{C}^2([0,1]), \, v(1) = 0 \right\}$, $a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}, (w,v) \mapsto \int_0^1 u'v'$ et $l : \mathcal{V} \to \mathbb{R}, v \mapsto \int_0^1 fv$ et la formulation variationnelle continue s'écrit $(\mathcal{F})$: *Trouver $u \in \mathcal{V}$ tel que pour tout $v \in \mathcal{V}$,*

$$a(u,v) = l(v).$$

La formulation variationnelle discrète est donc $(\mathcal{F}_h)$: *Trouver $u_h \in \tilde{\mathcal{V}}_h$ tel que pour tout $v_h \in \tilde{\mathcal{V}}_h$,*

$$a(u_h, v_h) = l(v_h).$$

2. On remarque ici que, contrairement au cas du cours, la valeur de u en 0 est inconnue (on ne connait que la valeur de $u'(0)$). On a donc une inconnue de plus en x_0, ce qui augmente la dimension de $\tilde{\mathcal{V}}_h$ de 1 ; on a donc que $\tilde{\mathcal{V}}_h$ est de dimension $N+1$ (sans que cela constitue une démonstration).

3. Par rapport au cours, il suffit de rajouter un degré de liberté (associé à x_0) et la fonction de base associée au point x_0, φ_0 qui prend la valeur 1 en x_0 et 0 en les autres degrés de liberté $((x_i)_{i\in\{1,...,N\}})$. On a donc les mêmes fonctions de base plus la fonction de base φ_0. Les fonctions de base élémentaires restent les mêmes.

4. Le seul changement par rapport à la situation du cours est le rajout d'une ligne et d'une colonne dans la matrice, mais la matrice reste la même au sens où on ne rajoute que les termes $\int_0^1 (\varphi_0')^2 = \frac{1}{h}$, $\int_0^1 \varphi_0'\varphi_1' = \int_0^1 \varphi_1'\varphi_0' = -\frac{1}{h}$, .