Université Côte d'Azur | Master Maths 1^e année 2021-2022

PROCESSUS STOCHASTIQUES
EXAMEN PARTIEL

Durée : *2 heures*

Calculatrices, calculettes, notes de cours et téléphones portables sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. La clareté de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1 *(3 points)* Questions de cours

1) Rappeler à quelles conditions un processus stochastique $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable E est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P.
2) Compléter la matrice suivante pour en faire une matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène puis représenter le processus associé par un graphe.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \cdot & \cdot \\ 1/4 & 0 & \cdot & 1/4 \\ 1/5 & \cdot & 0 & 1/5 \\ \cdot & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 *(5 points)* On considère une suite de v.a.i.i.d. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(U_n = 2) = \mathbb{P}(U_n = 1/4) = \frac{1}{2}.$$

On considère alors le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$X_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \prod_{i=1}^{n} U_i.$$

(1) Montrer que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement strictement positif.

(2) (a) Montrer que le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ défini par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{\log X_n}{n}$, converge presque sûrement vers $-\frac{1}{2}\log 2$.

(b) En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 0.

(3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X\right] = \frac{9}{8}X_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_n] = \left(\frac{9}{8}\right)^n$. Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-il en norme $\mathbb{L}^1$ vers 0 ?

Exercice 3 *(13 points) On rappelle la densité p_λ de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$:*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{]0;\infty[}(x).$$

Un étudiant doit prendre le bus tous les matins pour se rendre à l'université, mais les horaires de passage du bus sont approximatifs et l'étudiant doit attendre chaque jour à l'arrêt avant que le bus n'arrive. On modélise la suite des temps d'attente chaque jour, en minutes, par une suite de v.a.i.i.d. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.

(1) L'étudiant se demande tout d'abord quel est le temps d'attente maximal qu'il devra supporter sur n jours de cours. On pose ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(M_n \leq t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que $\frac{M_n}{\ln n}$ converge en probabilité vers $1/\lambda$.

(c) Montrer que $M_n - \frac{1}{\lambda}\ln n$ converge en loi vers une variable Z de fonction de répartition vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_Z(t) = e^{-e^{-\lambda t}}.$$

(2) L'étudiant s'intéresse maintenant au temps total qu'il aura perdu à attendre le bus au bout de n jours : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \geq 1$.

(a) Calculer la fonction caractéristique de S_n.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x).$$

Montrer que f_n est une densité de probabilité.
On pourra montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathrm{d}x$.

(c) Soit Y_n une v.a. de de densité f_n. Calculer la fonction caractéristique de Y_n. En déduire la densité de S_n.
On pourra montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\phi_{Y_{n+1}}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}\phi_{Y_n}(t)$.

(3) Notre étudiant se demande finalement au bout de combien de jours, il aura perdu une journée entière à attendre le bus et pose donc $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \geq 1440\}$.

(a) Montrer que T est un temps d'arrêt pour le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. L'est-il pour le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et pour le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

(b) Montrer que $\mathbb{E}[T] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq n)$.

(c) Exprimer, pour $n \geq 2$, l'événement $\{T \geq n\}$ en fonction de S_{n-1}. Que peut-on dire de l'événement $\{T \geq 1\}$?

(d) En déduire $\mathbb{E}[T]$.