M1 IM/MPA : TD Optimisation et Éléments Finis

Feuille 5 : Mise sous forme variationnelle.

Exercice 1

On notera $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de carré intégrable sur Ω.

On considère l'espace des fonctions de carré intégrable sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. On note $\|\cdot\|_{L^2}$ la norme canonique L^2 sur cet espace, i.e. pour tout $f \in L^2(\Omega)$, $\|f\|_{L^2}^2 = \int_\Omega |f(x)|^2 dx$. On rappelle que $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$ est un espace vectoriel normé complet (voir Feuille de rappel pour le rappel de la définition d'un espace complet).

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_\Omega f(x)g(x)dx$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire sur $L^2(\Omega)$.

2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique définie positive.

3. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est continue sur $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$.

On retiendra en conclusion que $(L^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert : c'est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, complet pour la norme canoniquement associée au produit scalaire (ici $\|\cdot\|_{L^2}$).

Exercice 2

Mise sous forme variationnelle en dimension 1.

On considère le problème suivant $(\mathcal{P})$: *Trouver $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ tel que*

$$\begin{aligned} -u''(x) + au'(x) + bu(x) &= f(x), \forall x \in]0,1[, & (1)\\ u(0) &= \alpha, & (2)\\ u(1) &= \beta, & (3) \end{aligned}$$

avec a et b sont deux constantes réelles positives et α et β deux constantes réelles et f une fonction continue sur $[0,1]$.

1. On considère la cas où $a = 0$ et $b = 0$.

(a) Supposons qu'une solution au problème $(\mathcal{P})$ existe. Montrer qu'elle est alors unique. *On pourra par exemple supposer que deux solutions existent et manipuler la formulation variationnelle vérifiée par la différence de ces deux solutions.*

(a) Peut-on donner l'expression d'une solution dans le cas où $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$.

(c) On pose $u^0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \beta x + \alpha(1-x)$. Montrer que $\tilde{u} := u - u^0$ est solution du problème $(\mathcal{P})$, avec $a = 0$, $b = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et le second membre f. Établir alors la formulation variationnelle vérifiée par $\tilde{u}$.

2. On considère maintenant le cas où $a = 0$, $b = 1$, $f : x \mapsto 1$ et $\alpha = \beta = 0$.

(a) Montrer que $u : x \mapsto 1 - \dfrac{e^x + e^{(1-x)}}{e+1}$ est solution de cette équation.

(b) Montrer que la solution est unique.

(c) En s'inspirant de la stratégie proposée en cours pour obtenir une formulation variationnelle, identifier une forme bilinéaire a et une forme linéaire l telle que si u est solution du problème précédent, alors

$$a(u,v) = l(v),\ \forall v \in V,$$

où l'on précisera un espace V possible.

3. On considère le cas où $a = 1$, $b = 0$, $f \equiv 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

(a) Montrer que $u : x \mapsto \dfrac{1}{e-1}\left(e^x - 1\right)$ est solution de cette équation.

(b) Montrer que la solution est unique.

(c) On pose $\tilde{u}^0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \beta x$. Montrer que $\tilde{u} := u - \tilde{u}^0$ est solution du problème $\mathcal{P}$, avec $a = 1$, $b = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et le second membre $\tilde{f} \equiv \beta$. Établir alors la formulation variationnelle vérifiée par $\tilde{u}$.

Exercice 3

Mise sous forme variationnelle en dimension 1, bis.

On considère le problème suivant $(\mathcal{P})$: *Trouver* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *tel que*

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x),\ \forall x \in]0,1[, && (4)\\ u'(0) &= 0, && (5)\\ u'(1) &= 0, && (6) \end{aligned}$$

avec f *une fonction continue sur* $[0,1]$.

1. Étudier l'unicité de la solution.

2. On remplace l'équation $u'(1) = 0$ par $u(1) = 0$.

(a) Que dire de l'unicité dans ce cas ?

(b) Écrire une formulation variationnelle dans ce cas.

Exercice 4
Mise sous forme variationnelle en dimension 2

On se place dans $\Omega =]0, L[\times]0, L[\subset \mathbb{R}^2$. On considère $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.

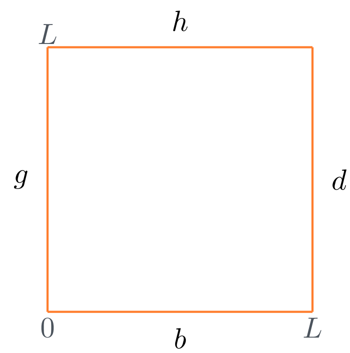

FIGURE 1. Le carré, nom des bords (haut, bas, gauche, droit).

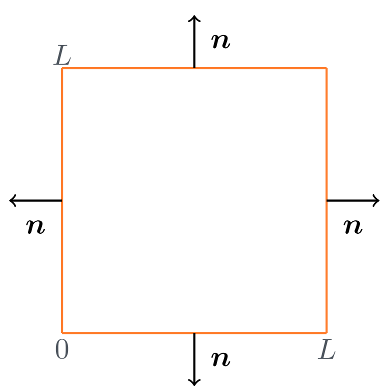

FIGURE 2. Illustration des normales extérieures aux bords.

1. Montrer que

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\varphi dx_1 dx_2 = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \int_h \frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi ds - \int_b \frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi ds,$$

et

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\varphi dx_1 dx_2 = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_d \frac{\partial u}{\partial x_2}\varphi ds - \int_g \frac{\partial u}{\partial x_2}\varphi ds.$$

2. En déduire que

$$\int_\Omega \Delta u\, \varphi dx_1 dx_2 = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx_1 dx_2 + \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n\, \varphi ds,$$

si n désigne la normale extérieure au bord de Ω (voir illustration). Ici on a noté $\cdot$ le produit scalaire euclidien de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

On admettra que ce résultat est valable pour des ouverts Ω bien plus généraux et des espaces de fonctions plus généraux. On retiendra la formule sous le nom de formule de Green.

3. On considère maintenant l'équation aux dérivées partielles (EDP) sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$: *Trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, \ \textit{sur } \Omega, \qquad (7) \\ u &= 0, \ \textit{sur } \partial\Omega. \qquad (8) \end{aligned}$$

(a) En généralisant l'approche du cours présentée en dimension un, et en utilisant la formule de Green, déterminer une forme bilinéaire a et une forme linéaire l permettant d'écrire une formulation variationnelle.

Cet exercice peut se généraliser à une dimension $d > 2$ et d'autres EDP. On fait là encore appel aux espaces de Sobolev pour donner un cadre Hilbertien propre.

(b) Soient $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On choisit $f : (x, y) \to (k^2 + l^2)\pi^2 \sin(k\pi x) \sin(l\pi y)$.

Montrer que $u : (x, y) \to \sin(k\pi x) \sin(l\pi y)$ est solution du problème posé.

(c) Peut-on montrer l'unicité de la solution ?