Convergence.

vendredi 1 décembre 2023 15:13

Idée globale

Supposons que le schéma numérique consiste à trouver $U_h \in \mathbb{R}^J$ tel que

$A_h U_h = B_h$ où $A_h \in M_{J\times J}(\mathbb{R})$ et $B_h \in \mathbb{R}^J$; h pas de la discrétisation
(avec A_h inversible) (J dépend de h !)

* Pour étudier la consistance du schéma en la norme ∞. On considère u_{ex} solution exacte du problème de départ et on note $U_h^{ex} = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_J) \end{pmatrix}$ ((x_i) points de discrétisation)

Ensuite on étudie $\| A_h U_h^{ex} - B_h \|_\infty$. Notons $R_h = A_h U_h^{ex} - B_h$

Si on arrive à montrer que $\|R_h\|_{\boxed{\infty}} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, alors le schéma est dit consistant en norme $\boxed{\infty}$

Si on arrive à montrer qu'il existe $C>0$ (indépendant de h) tel que $\|A_h U_h^{ex} - B_h\|_\infty \leq C h^{\boxed{p}}$, alors on dit que le schéma est consistant à l'ordre $\boxed{p}$.

* Une étude de stabilité en norme ∞, consiste à montrer qu'il existe $C>0$ (indépendant de h) tel que $\|U_h\|_\infty \leq C$.

En particulier, si on a montré qu'il existe $C>0$ (indépendant de h) tel que $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq C$, et si $\|B_h\|_\infty$ est lui aussi borné indépendamment de h, alors puisque $A_h U_h = B_h$, on a $U_h = A_h^{-1} B_h$

norme matricielle

et donc $\|U_h\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|B_h\|_\infty$
$\leq \tilde{C}$
où $\tilde{C}$ est indépendant de h.

On obtient alors la stabilité en norme ∞.

* Montrer la convergence du schéma en norme ∞, revient à montrer que $\|U_h - U_h^{ex}\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

2 ingrédients : consistance et $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq C$ (stabilité cachée).

On sait que :

$A_h U_h = B_h$ (1) <u>et</u> $A_h U_h^{ex} - B_h = R_h$ (2)

(1)-(2) donne :

$A_h U_h - A_h U_h^{ex} = B_h - B_h - R_h$

i.e. $A_h (U_h - U_h^{ex}) = -R_h$

Donc

$U_h - U_h^{ex} = -A_h^{-1} R_h$

D'où

$\|U_h - U_h^{ex}\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|R_h\|_\infty$

norme matricielle — norme vectorielle

Si consistance en norme ∞ + $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \tilde{C}$ (indépendant de h), alors $\|U_h - U_h^{ex}\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Si consistance en norme ∞ à l'ordre p + $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \tilde{C}$ (indépendant de h), alors $\|U_h - U_h^{ex}\|_\infty \leq \tilde{C} C h^p$, le schéma converge à l'ordre p en norme ∞.