ENSEA
Mise à Niveau : ISE2

Année Académique
2021 / 2022

Théorie de Probabilités

Exercice 1.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes distribuées respectivement suivant les lois de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On pose $S = X + Y$.

1. *Déterminer la loi de S.*
2. *Pour tout $s \in \mathbb{N}$ déterminer la loi conditionnelle de X sachant $S = s$.*
3. *Donner $\mathbb{E}(X \mid S)$.*

Exercice 2.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Pareto de paramètre 2 c'est-à-dire qui possède la densité $p(x) = \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{\{x>1\}}$. On pose

$$(Z, W) = \left(\ln(X), 1 + \frac{\ln(Y)}{\ln(X)}\right)$$

1. *Quelle est la loi du couple (Z, W) ? Les variables Z et W sont-elles indépendantes ?*
2. *Quelle est la loi de W ?*
3. *Quelle est la loi de Z ?*

Exercice 3.
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \mid x \mid \exp\left(-\frac{x^2(1 + y^2)}{2}\right).$$

1. *Calculer la loi de X et la loi de Y . Est-ce que X et Y sont indépendantes ?*
2. *Est-ce que X et XY sont indépendantes ? Calculer la loi de XY.*
3. *Quelle est la loi de $Z = X(1 + Y)$?*

Exercice 4.
Soient X et Y deux v.a.r. On suppose que la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est la densité $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) y^2 x e^{-xy}$ que la loi de Y est de densité $\frac{1}{y^2} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(y)$.
On pose $T = XY$.

1. *Trouver la loi du couple (T, Y). Qu'en déduit-on ?*
2. *Trouver la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.*
3. *Calculer $\mathbb{E}(Y \mid X)$.*

Exercice 5.
Le cycle d'un feu de circulation est le suivant : le feu est vert sur l'intervalle $[0, v]$ et orange ou rouge sur $[v, v + r]$ avec $v, r > 0$. l'instant d'arrivé U d'un automobiliste est supposé uniformement réparti sur le cycle $[0, v + r]$

1. *Exprimer en fonction de U le temps T d'attente de cet automobiliste au feu dans le cas où aucun véhicule ne se trouve devant le feu à l'instant où il arrive.*
2. *Montrer que pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée*
$$\mathbb{E}(f(T)) = \frac{v}{r+v} f(0) + \frac{1}{r+v} \int_0^r f(s) ds.$$
3. *Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(T = 0)$ pour que l'automobiliste passe immédiatement.*
4. *Montrer que si $t \neq 0, \quad \mathbb{P}(T = t) = 0$.*
5. *Conclure que le temps d'attente T n'est ni une variable aléatoire discrète, ni une variable aléatoire à densité.*

Exercice 6.
Soient X, Y deux variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. *Déterminer la loi de $\dfrac{X}{Y}$.*
2. *En déduire la loi de $\dfrac{1}{Z}$ si Z suit la loi de Cauchy de paramètre 1.*
3. *On définit les variables aléatoires R et Θ par $X = R\cos\Theta;\ Y = R\sin\Theta,\ R > 0$ et $\Theta \in [0, 2\pi[$. Montrer que R et Θ sont des variables aléatoires indépendantes et déterminer leur loi respective.*

Exercice 7.

1. *Déterminer l'espérance de la loi $\Gamma(a, \lambda)$.*
2. *Soit $V_1, V_2, ..., V_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi du vecteur $(V_1, V_1 + V_2, ..., V_1 + ... + V_n)$ et en déduire la loi de $V_1 + ... + V_n$.*
3. *Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\Gamma(a, \lambda)$.*
4. *Déterminer la loi de λX.*
5. *Montrer que $X + Y$ et X/Y sont des variables aléatoires indépendantes dont on calculera les lois.*

Exercice 8.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $\alpha > 0$. Montrer que
$$\mathbb{E}(X^\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \mathbb{P}(X > t) dt.$$

Exercice 9.
Pour une famille $(X_i)_{1 \leq i \leq}$ une suite de variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre respectifs λ_i, on pose $Y = \inf_{1 \leq j \leq}(X_j)$, et on note J la variable aléatoire telle que $X_J = Y$.

1. *Montrer que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ (avec la convention qu'une variable aléatoire Y suit la loi exponentielle de paramètre $+\infty$ si $\mathbb{P}(Y = 0) = 1$.*

2. *Montrer que si $\lambda < +\infty$, J est bien défini, indépendant de Y et pour tout i*

$$\mathbb{P}(J = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}.$$

Exercice 10.
Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien, centrer de matrice de dispersion

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Trouver la loi de $U = X + 2Y - Z$.*
2. *Trouver la loi de $Y^2/2 + Z^2/3$.*
3. *Donner la densité du vecteur aléatoire $(X + Y, Y - Z)$.*

Exercice 11.
Soit X une variable aléatoire réelle (v.a.r.) de loi gaussienne centrée réduite et Z une v.a.r., indépendante de X, uniformément distribuée sur $\{-1, 1\}$.

1. *Vérifier que ZX estr gaussienne.*
2. *En considérant la somme $X + ZX$, montrer que le couple (X, ZX) n'est pas gaussien.*
3. *Montrer que X et ZX ne sont pas indépendantes.*

Exercice 12.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, X étant de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et Z de loi définie par $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = 1/2$. On pose $Y = ZX$.

1. *Déterminer la loi de Y.*
2. *Calculer $cov(X, Y)$.*
3. *Le vecteur (X, Y) est-il gaussien ? Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*

Exercice 13.
Soit N une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $(X_k,\ k \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires continues de même loi, indépendantes et indépendantes de N.
On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. *Calculer $\mathbb{E}(S_N)$ et $Var(S_N)$.*
2. *Calculer la fonction caractéristique de S_N et retrouver les résultats précédents.*

Exercice 14. *Soit (X_n) une suite de variables aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p/n. Que dire de la convergence en loi de X_n/n ?*
Indication : Utiliser la fonction caractéristique.

Exercice 15.
On définit la fonction réelle f_n par $f_n(x) = \dfrac{n}{\pi(1 + n^2x^2)}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *Démontrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire X_n.*

2. *Que peut-on dire de* $\mathbb{E}(X_n)$ *et* $\mathbb{V}(X_n)$ *?*
3. *Etudier la convergence en loi de* (X_n).
4. *Montrer que* X_n *converge en probabilité vers* 0 *lorsque* $n \to \infty$.

Exercice 16.

Soit $X_1, ..., X_n$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi* $\mathcal{B}(n,p)$.
Montrer que $\dfrac{X_n - np}{\sqrt{p(1-p)}}$ *converge en loi vers* $\mathcal{N}(0,1)$ *lorsque* $n \to \infty$.

Exercice 17.

Soit X_n *une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi* $\mathcal{P}(1)$.

1. *Quelle est la loi de* $X_1 + ... + X_n$ *?*
2. *Que vaut* $\mathbb{P}(X_1 + ... + X_n \leq n)$ *?*
3. *Utiliser le théorème central limite pour montrer que la limite de* $\left(\exp(-n)\sum_{k=1}^{n} n^k/k!\right)$ *lorsque* $n \to \infty$ *est égale à* $1/2$.

Exercice 18. *Une suite de variables aléatoires* X_n *converge en loi vers une variable aléatoire* X *et une autre suite* Y_n *indépendante des* X_n *converge en probabilité vers la variable certaine égale à* $a \in \mathbb{R}$.

1. *On pose, pour tout entier* $n,\ Z_n = X_n + Y_n$. *Quelle est la limite en loi de la suite* Z_n *?*
2. *Soit* Y_n *une suite de variables aléatoires dont la loi est définie par* $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - 1/n$ *et* $\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1/n$.

   Montrer que la suite Y_n *converge en probabilité vers* 0.