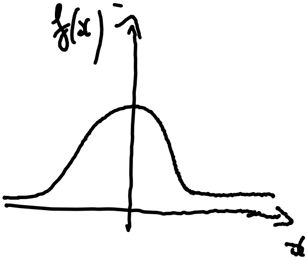
Chap. 2 : Intégration numérique

Problématique : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x^2}$



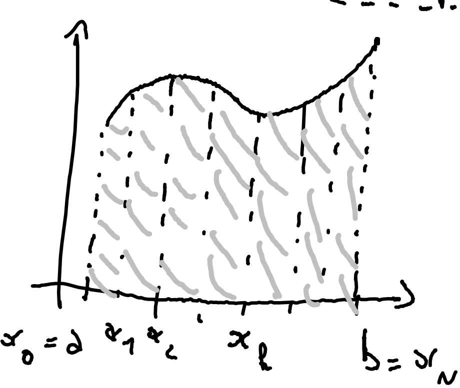
- On peut montrer que la primitive de f ne peut pas s'exprimer à partir de fonctions "usuelles" (élémentaire, mais difficile, cf thm Rosenlicht, 1972)
- Comment calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$?

cf. Chambert-Loir "Algèbre Corporelle"

- Pas d'expression analytique $\Rightarrow$ calcul approché ?

I | Formules de quadratures

I.1) Principe :



Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a<b$, une fonction continue sur $[a,b]$.
On cherche donc à connaître la valeur approchée de

$$I[f] := \int_a^b f(x)\,dx$$

Pour calculer $I[f]$, on commence alors par découper l'intervalle $[a,b]$ en N sous-intervalles, ie on se donne une subdivision de $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b.$$

On note $h_k := x_{k+1} - x_k$ la longueur d'un sous-intervalle, $h := \max\limits_{0 \le k \le N-1} h_k$ le pas de la subdivision.

Rem : Si $h_k = h$ pour tout $0 \le k \le N-1$, on dit que la subdivision est uniforme, et on a alors

$$x_k = a + kh, \quad 0 \le i \le N \quad \text{pour } h = \frac{b-a}{N}.$$

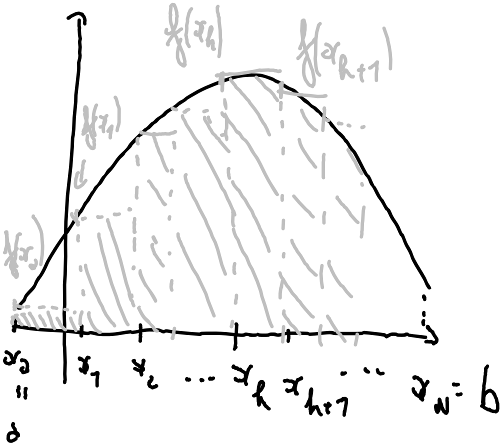
D'après la relation de Chasles, on a toujours

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx.$$

I.2) Exemples fondamentaux :

On va travailler à approcher correctement cette quantité.

- **Méthode des rectangles à gauche** : la plus classique :



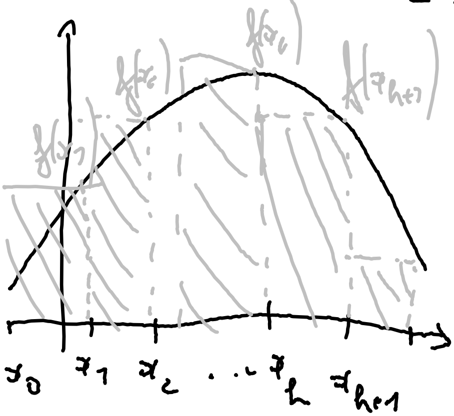
$$I[f] := \int_a^b f(x)\,dx \approx J^{RG}[f]$$

$$=: \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1}-x_k)\, f(x_k)$$

gauche de rectangle

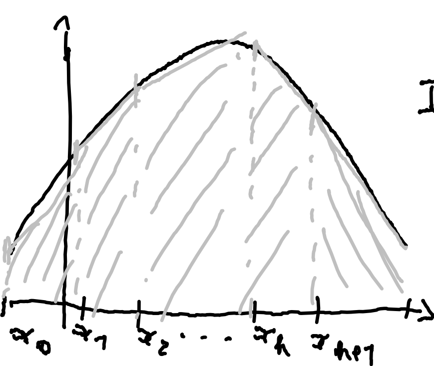
- **Méthode des rectangles à droite** :

droite de rectangle



$$I[f] \approx J^{RD}[f] := \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1}-x_k)\, f(x_{k+1})$$

- **Méthode des trapèzes** :



$$I[f] \approx J^{T}[f] := \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1}-x_k)\, \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$$

Faire points milieux

$$J^{PM} = \sum (x_{k+1}-x_k)\, f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$$

I.3] Formalisme général :

ⓐ Changement de variable pour se ramener à $[-1,1]$

Pour passer de $x \in [x_k, x_{k+1}]$ à $s \in [-1,1]$, on effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2} - \left(\dfrac{x_{k+1} - x_k}{2}\right) s \\[2ex] dx = \dfrac{x_{k+1} - x_k}{2} \end{cases}$$

← interspolant de Lagrange, envoyant $\{-1,1\}$ en $\{x_k, x_{k+1}\}$

Ainsi,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} - \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right) s\right)}_{\varphi_k(s)} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right) ds$$

$$= \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right) \int_{-1}^{1} \varphi_k(s)\, ds$$

On va maintenant chercher des quadratures seulement pour $\int_{-1}^{1} \varphi(s)\, ds$, dites <u>quadratures élémentaires</u>.

⑤ Formule de quadrature élémentaire sur $[-1,1]$:

Déf : Une formule de quadrature élémentaire $J^{QE}[\varphi]$ pour approcher $I[\varphi] := \int_{-1}^{1} \varphi(s)\,ds$ est une formule de la forme

$$J^{QE}[\varphi] = \sum_{j=0}^{\ell} \omega_j \varphi(\tau_j)$$

avec
- $\ell \in \mathbb{N}$,
- $\tau_j \in [-1,1]$ pour $0 \leq j \leq \ell$ (formule à $\ell+1$ points)
- $\omega_j \in \mathbb{R}$ (les poids) et $\sum_{j=0}^{\ell} \omega_j = 2$

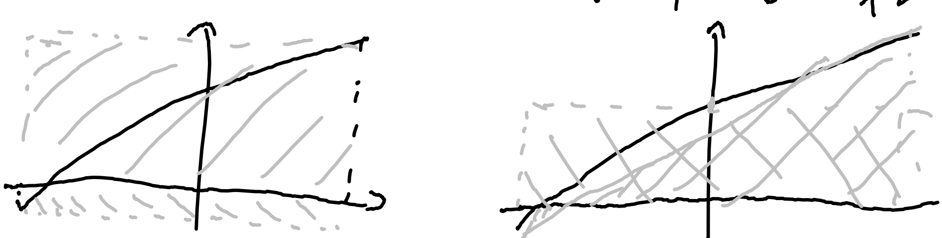
$1-(-1)$
ie longueur de l'interv.

Ex : (1) RG : $\ell = 0$, $\tau_0 = -1$, $\omega_0 = 2$

(2) RD : $\ell = 0$, $\tau_0 = 1$, $\omega_0 = 2$

(3) PM : $\ell = 0$, $\tau_0 = 0$, $\omega_0 = 2$

(4) T : $\ell = 1$, $\tau_0 = -1$, $\tau_1 = 1$, $\omega_0 = \omega_1 = 1$



(c) Formule de quadrature élémentaire sur $[x_k, x_{k+1}]$:

En appliquant la F^{ule} de quadrature élémentaire sur $[-1,1]$ à $\varphi_k(s) = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} s\right)$, on a

$$J^{QE}[\varphi_k] = \sum_{j=0}^{l} \omega_j f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \tau_j\right)$$

On définit alors la F^{ule} de quadrature élémentaire sur $[x_k, x_{k+1}]$ de $J[f]$ par

$$J^{QE}[f] := \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right) \sum_{j=0}^{l} \omega_j f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \tau_j\right)$$

On pose alors $\lambda_j = \frac{\omega_j}{2}$ et $\tau_{k,j} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \tau_j$

(d) Formule de quadrature composée :

Déf : Une formule de quadrature composée (ou composite) $J^{QC}[f]$ pour approcher $I[f]$ est une F^{ule} de la forme

$$J^{QC}[f] := \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sum_{j=0}^{l} \lambda_j f(\tau_{k,j})$$

avec
- $l \in \mathbb{N}$ ← Formule à $l+1$ points ;
- $\tau_{k,j} \in [x_k, x_{k+1}]$ pour $0 \leq j \leq l$, $0 \leq k \leq N-1$;
- $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $\sum_{j=0}^{l} \lambda_j = 1$.

II / Ordre et estimation d'erreur

II.1 / Ordre d'une méthode d'intégration numérique

Déf : Une méthode de quadrature J est d'ordre $p \in \mathbb{N}$ ssi :

- Elle est exacte pour tous les polynômes de degré $\leq p$:

$x \mapsto Q(x)$

$$J[Q] = I[Q], \quad \forall Q \in \mathbb{R}_p[X];$$

- Elle est inexacte pour au moins un polynôme de degré $p+1$:

$$J[Q] \neq I[Q], \text{ avec } \deg Q = p+1.$$

Rem : En pratique, par linéarité de l'intégrale et des f^ules de quadrature, on vérifie que la formule de quadrature élémentaire

$$J^{QE}[\varphi] := \sum_{j=0}^{\ell} \omega_j \varphi(z_j)$$

est

- exacte pour les monomes $1, X, \dots, X^p$
- inexacte pour X^{p+1}.

Ex : ① RG : $J^{RG}[\varphi] := 2\,\varphi[-1]$.

- $J^{RG}[x \mapsto 1] = 2 = \int_{-1}^{1} 1\,dx =: I[x \mapsto 1]$;
- $J^{RG}[x \mapsto x] = -2 \neq 0 = \int_{-1}^{1} x\,dx =: I[x \mapsto x]$.

$\Rightarrow$ Ordre 0.

② RD : $J^{RD}[\varphi] := 2\,\varphi[1]$.

- $J^{RD}[x \mapsto 1] = 2 = \int_{-1}^{1} 1\,dx =: I[x \mapsto]$;
- $J^{RD}[x \mapsto x] = 2 \neq 0 = \int_{-1}^{1} x\,dx =: I[x \mapsto]$.

$\Rightarrow$ Ordre 0.

③ PM : $J^{PM}[\varphi] := 2\,\varphi[0]$.

- $J^{PM}[x \mapsto 1] = 2 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = I[x \mapsto 1]$;
- $J^{PM}[x \mapsto x] = 0 = \int_{-1}^{1} x\,dx = I[x \mapsto x]$;
- $J^{PM}[x \mapsto x^2] = 0 \neq \frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2\,dx =: I[x \mapsto x^2]$.

$\Rightarrow$ Ordre 1.

④ T : $J^{T}[\varphi] := \varphi[-1] + \varphi[1]$.

- $J^{T}[x \mapsto 1] = 2 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = I[x \mapsto 1]$;
- $J^{T}[x \mapsto x] = 0 = \int_{-1}^{1} x\,dx = I[x \mapsto x]$;

$$J^T[x \mapsto x^2] = 2 \neq \frac{2}{3} = I[x \mapsto x^2].$$

$\Rightarrow$ Ordre 1.

II.2 / Erreur d'une méthode composée

$\rightarrow$ Principe: Une formule composée est de la forme

$$T_{N,h}(f) = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(\tau_{i,j})$$

où N est le nombre de sous-intervalles et h le pas. Nous allons nous placer dans cette section dans le cas d'une subdivision uniforme:

$$h_i := x_{i+1} - x_i \equiv h := \frac{b-a}{N}.$$

On a alors

$$T_{N,h}(f) = T_h(f) = h \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(\tau_{i,j}).$$

On va chercher à évaluer l'erreur

$$|T_h(f) - I[f]|$$

en fonction de h, pour mq $T_h(f) \xrightarrow{h \to 0} I[f]$.

$\rightarrow$ Erreur des exemples fondamentaux:

Notons $T_h^g(f)$, $T_h^d(f)$, $T_h^m(f)$, $T_h^t(f)$ les formules composées vues plus haut (resp. RG, RD, PM, T).

$M_s := \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(s)}(\xi)|$

<u>Prop</u> : (i) Si f est $\mathcal{C}^1([a,b])$, on a

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_h^{g,d}(f) \right| \leq \frac{b-a}{2} h M_1 = \frac{(b-a)^2}{2N} M_1 .$$

(ii) Si f est $\mathcal{C}^2([a,b])$, on a

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_h^{m}(f) \right| \leq \frac{b-a}{24} h^2 M_2 = \frac{(b-a)^3}{24N^2} M_2$$

$$\left| \int_a^b f(x) - T_h^{r}(f) \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2 = \frac{(b-a)^3}{12N^2} M_2 .$$

On voit donc que PM et T sont plus précises que RG et RD.

<u>Preuve:</u> (i) Pour <u>RG</u>. On constate que

$$\int_a^b f(x)\,dx - T_h^{g}(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1}-x_i) f(x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x) - f(x_i) \right) dx$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange : pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $\exists\, \xi_{i,x} \in]x_i, x[$ tq

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i) f'(\xi_{i,x}) \text{ car } f \in C^1([a,b])$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_i)| \leq M_1 |x - x_i|$$

$$\Rightarrow \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i)) \, dx \right| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} | f(x) - f(x_i) | \, dx$$

$$\leq M_1 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \overbrace{|x - x_i|}^{\geq 0} \, dx$$

$$\leq M_1 \left[\frac{(x-x_i)^2}{2} \right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= M_1 \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} = \frac{M_1}{2} h_i^2$$

et donc $$\left| \int_a^b f(x) \, dx - T_h^g(f) \right| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)| \, dx$$

$$\leq \frac{M_1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} h_i^2 = \frac{h M_1}{2} (b-a)$$

$\square$

(ii) Pour PM, on part de

$$\int_a^b f(x) \, dx - T_h^m(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x) - f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \right] dx.$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $\exists \, \xi = \xi(i,x) \in [x_i, x]$ tq

$$f(x) = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \left(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) f'\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)^2 f''(\xi) \, .$$

Or $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{\left(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)}_{=:\, y \text{, donc } dx = dy} dx = \int_{\frac{-x_{i+1}+x_i}{2}}^{\frac{x_{i+1}-x_i}{2}} y \, dy = 0$, donc

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x) - f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right] dx \right| \leq \frac{M_2}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{M_2}{6} \left[\left(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)^3 \right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$
$$= \frac{2}{6} M_2 \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)^3$$
$$= \frac{M_2}{3}\left(\frac{h_i}{2}\right)^3 = \frac{M_2}{24} h^3 ,$$

et on obtient le résultat annoncé en sommant + inég. triang. $\blacksquare$

II.3) Résultat général :

Pour cette section, si $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ notons

$$E[\varphi] := I[\varphi] - J^{QE}[\varphi]$$
$$= \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx - \sum_{\ell=0}^{p} \omega_\ell\, f(\tau_\ell)$$

Thm : On suppose que J^{QE} est d'ordre p donné.
Si φ est de classe $\mathcal{C}^{p+1}([-1,1])$, alors

$$E[\varphi] = \frac{1}{p!} \int_{-1}^{1} K_p(x)\, \varphi^{(p+1)}(x)\,dx$$

où K_p est une fonction appelée noyau de Péano associé à la méthode, défini par

$$K_p(x) := E[y \mapsto (y-x)_+^p], \quad x \in [-1,1],$$

$x_+ := \max(x, 0)$

Preuve : Comme précédemment, on a que

$$E\left[y \mapsto \int_{-1}^{1} g(x,y)\,dx\right] = \int_{-1}^{1} E[y \mapsto g(x,y)]\,dx$$

$\varphi \in C^{p+1} \Rightarrow$ Taylor avec Reste Intégral donne

$$\varphi(x) = \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}_p[X]}}{P_p}(x) + \int_{-1}^{1} \frac{1}{p!}(x-y)_+^p \, \varphi^{(p+1)}(y)\,dy$$

Comme J^{OE} est d'ordre p, $E[P_p] = 0$, et donc

$$E[\varphi] = E\left[x \longmapsto \int_{-1}^{1} \frac{1}{p!}(x-y)_+^p \, \varphi^{(p+1)}(y)\,dy\right]$$

$$= \frac{1}{p!}\int_{-1}^{1} \varphi^{(p+1)}(y) \underbrace{E[x \mapsto (x-y)_+^p]}_{K_p(y)}\,dy$$

■

<u>Corollaire</u> : Sous les mêmes hypothèses, on a

$$|E[\varphi]| \leq \frac{1}{p!} \|\varphi^{(p+1)}\|_\infty \int_{-1}^{1} |K_p(y)|\,dy.$$

On peut alors montrer grâce à une étude précise des propriétés de K_p le résultat suivant (admis)

Théorème : Soit $T_h(f)$ une formule composée d'intégration numérique, dont la formule élémentaire est d'ordre p. Si $f \in \mathcal{C}^{p+1}([a,b])$, alors il existe une constante C indépendante des x_i tq

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_h(f) \right| \leq C h^{p+1}$$

Rem : (i) On retrouve les résultats précédents ;
(ii) Avoir $\sum_{i=0}^{p} \omega_i = 2$ est nécessaire pour la convergence

III / Obtention de formules de quadratures :

III.1 / Choix des poids d'une formule élémentaire :

Problème : Les points $(\tau_j)_{0 \leq j \leq p}$ étant donnés, trouver la méthode élémentaire J^{QE}, et donc les poids ω_j tq $J^{QE}[\varphi] := \sum_{j=0}^{p} \omega_j \varphi(\tau_j)$ soit d'ordre maximal.

Calcul pratique:

* Ecrire que $J^{QE}[x \mapsto x^k] = I[x \mapsto x^k], \forall 0 \leq k \leq l$

système linéaire

$$\iff \sum_{j=0}^{l} \omega_j \tau_j^k = \int_{-1}^{1} x^k dx = \begin{cases} \frac{2}{k+1}, \forall 0 \leq k \leq l \text{ si } k \text{ pair} \\ 0 \text{ si } k \text{ impair} \end{cases}$$

$$\iff (*) \; V\omega = b, \text{ où}$$

- $\omega \in \mathbb{R}^{l+1}$ est l'inconnue (les poids),
- $b = \begin{cases} \left(\frac{2}{k+1}\right)_{0 \leq k \leq l}, k \text{ pair} \\ 0 \quad k \text{ impair} \end{cases} \in \mathbb{R}^{l+1}$ est donné,
- $$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_l \\ \tau_0^2 & \tau_1^2 & \tau_2^2 & \cdots & \tau_l^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tau_0^l & \tau_1^l & \tau_2^l & \cdots & \tau_l^l \end{pmatrix}.$$

* La matrice V est la matrice de Vandermonde associée au vecteur $(\tau_0, \ldots, \tau_l)$.

Rappel: $\det V = \prod_{i<j} (\tau_i - \tau_j)$

Donc le système (*) possède une unique solution <u>ssi</u>

$\tau_i \neq \tau_j$ si $i \neq j$.

* Par construction, la formule de quadrature obtenue sera d'ordre au moins ℓ.

<u>Thm</u> : Soient • $(\tau_j)_{0 \leq j \leq \ell}$ $(\ell+1)$ points distincts de $[-1,1]$

• $(L_k)_{0 \leq k \leq \ell}$ la base de polynômes de Lagrange associée aux $(\tau_j)_{0 \leq j \leq \ell}$.

Alors, la formule de quadrature élémentaire

$$J^{QE}[\varphi] := \sum_{j=0}^{\ell} \omega_j \varphi(\tau_j)$$

est d'ordre au moins ℓ <u>ssi</u>

$$\omega_j = \int_{-1}^{1} L_j(s)\, ds, \quad 0 \leq j \leq \ell.$$

Dans ce cas, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0([-1,1])$, on a

$$J^{QE}[\varphi] = \int_{-1}^{1} P_\varphi(s)\, ds,$$

avec P_φ le polynôme d'interpolation de Lagrange de φ aux points $(\tau_j)_{0 \leq j \leq \ell}$.

Preuve : $\Rightarrow$ Si J^{QE} est d'ordre au moins ℓ, elle est en particulier exacte sur les $(L_k)_{0\le k\le \ell}$, et donc

$$\int_{-1}^{1} L_k(s)\,ds = J^{QE}[L_k] := \sum_{j=0}^{\ell} \omega_j \underbrace{L_k(\tau_j)}_{\delta_{kj}} = \omega_k .$$

$\Leftarrow$ Si $\omega_k = \int_{-1}^{1} L_k(s)\,ds$, $0\le k\le \ell$, prenons $P\in\mathbb{R}_\ell[X]$. Alors $P=\sum_{j=0}^{\ell}\alpha_j L_j$, et donc

$$P(\tau_k) = \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_j L_j(\tau_k) = \alpha_k ,$$

ie $\quad P = \sum_{k=0}^{\ell} P(\tau_k) L_k$. Ainsi,

$$\int_{-1}^{1} P(s)\,ds = \sum_{k=0}^{\ell} P(\tau_k)\int_{-1}^{1} L_k(s)\,ds$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell} \omega_k P(\tau_k) =: J^{QE}[P],$$

donc la méthode est d'ordre au moins ℓ.

Finalement, si $\varphi\in\mathcal{C}^0([-1,1])$, notons P_φ son poly d'interpolation en $(\tau_k)_{0\le k\le \ell}$. Alors

$$P_\varphi = \sum_{j=0}^{\ell} L_j\,\varphi(\tau_j) \quad \text{et donc}$$

$$\int_{-1}^{1} P_\varphi(s)\,ds = \sum_{j=0}^{\ell}\varphi(\tau_j)\int_{-1}^{1} L_j(s)\,ds = \sum_{j=0}^{\ell}\varphi(\tau_j)\,\omega_j$$

$$= J^{QE}[\varphi]$$

$\blacksquare$

Application : Calcul de l'erreur de la méthode des trapèzes

C'est une méthode à 1 points, d'ordre 1, donc on est dans les hyp. du thm. précédent ($\ell = 1$) et on a

$$J^T[\varphi] = \varphi(-1) + \varphi(1) = \int_{-1}^{1} P_\varphi(s)\,ds.$$

Or, d'après le théorème d'erreur d'interpolation de Lagrange on a si $s \in [-1,1]$:

$$|\varphi(s) - P_\varphi(s)| \leq \frac{1}{2} M_2 \,|(s+1)(s-1)| \quad \text{pour } M_2 = \max_{[-1,1]} |\varphi''|$$

$$\leq \frac{M_2}{2}(1-s^2)$$

d'où

$$\int_{-1}^{1} |P_s(s) - \varphi(s)|\,ds \leq \frac{M_2}{2}\int_{-1}^{1}(1-s^2)\,ds$$

$$= M_2 \int_0^1 (1-s^2)\,ds$$

$$= M_2 \left[s - \frac{s^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2M_2}{3}.$$

Ainsi,

$$\left|\int_{-1}^{1}\varphi(s)\,ds - J^T(\varphi)\right| = \left|\int_{-1}^{1}(\varphi(s) - P_\varphi(s))\,ds\right|$$

$$\leq 2M_2/3.$$

Si $0 \leq i \leq \ell$, cela donne

$$\left|\int_{-1}^{1}\varphi_i(s) - (\varphi_i(-1) + \varphi_i(1))\right| \leq \frac{2}{3} M_2^i, \text{ où } \quad \left| \begin{array}{l} M_2^i := \max_{[-1,1]} |\varphi_i''| \\ \varphi_i(s) = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + s\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) \end{array}\right.$$

donc $M_2^i \le \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^2 \underset{[x_i, x_{i+1}]}{\mathrm{Max}} |f''|$

$\le \left(\frac{h_i}{2}\right)^2 M_2^f$, où $M_2^f = \underset{[a,b]}{\mathrm{Max}} |f''|$

Ainsi, $\left| \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \int_{-1}^{1} \varphi_i(s)\,ds - \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) \right|$

$\le \frac{2}{3}\left(\frac{h_i}{2}\right)^3 M_2^f = \frac{M_2^f}{12} h_i^3$

Finalement, en sommant sur i on a

$$|I[f] - J^T[f]| \le \sum_{i=0}^{N-1} \frac{M_2^f}{12} h_i^3 = \frac{b-a}{12} M_2^f h^2 \quad \blacksquare$$

Rem : ① Grâce au thm. sur l'erreur d'interpolation de Lagrange, on peut donc calculer la vitesse de cv des quadratures à poids optimaux

② Choix des (τ_j) ?

III.2 Les Formules de Newton-Cotes :

Déf : Les formules de Newton-Cotes sont les méthodes d'intégration numériques $J^{QE}[\varphi] = \sum_{j=0}^{\ell} \omega_j \varphi(\tau_j)$ d'ordre maximal obtenues avec des points équidistants sur $[-1,1]$, ie

• $x_j = -1 + \frac{2}{\ell} j$, $0 \le j \le \ell$,

• $\omega_j = \int_{-1}^{1} L_j(s)\,ds$.

On les note NC_ℓ.

Ex : • $\ell = 0$: point milieu (ordre 1).

• $\ell = 1$: trapèzes (ordre 1)

• $\ell = 2$: Formule de Simpson (ordre 3) :

$$J^{QE}[\varphi] := \frac{1}{3}\varphi(-1) + \frac{4}{3}\varphi(0) + \frac{1}{3}\varphi(1)$$

• $\ell = 4$: Formule de Boole-Villarceau (ordre 5) :

$$J^{QE}[\varphi] = \frac{7}{45}\varphi(-1) + \frac{32}{45}\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{15}\varphi(0) + \frac{32}{45}\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{45}\varphi(1)$$

Prop : NC_ℓ est d'ordre : • ℓ si ℓ est impair

• $\ell + 1$ si ℓ est pair

Preuve : Symétries des Formules... cf Demailly p. 62

Rem : $\ell \geq 8 \Rightarrow \omega_\ell < 0 \Rightarrow$ instabilités numériques...

III.3) Méthodes de Gauss-Legendre :

Problème : On a vu que si les points $(\tau_j)_{0 \leq j \leq \ell}$ sont fixés, le choix $\omega_j := \int_{-1}^{1} L_j(s)\,ds$ garantit une formule d'ordre maximal. L'objectif des méthodes gaussiennes est de choisir les (τ_j) qui induisent un ordre maximal.

Calcul pratique : $\Rightarrow$ $\ell = 1$: On cherche $\tau_0, \tau_1, \omega_0, \omega_1$ tels que

$$J^{QE}[\varphi] := \tau_0 \varphi(\omega_0) + \tau_1 \varphi(\omega_1)$$

soit d'ordre maximal. On va pour simplifier prendre $\tau_0 = -\tau_1 = \tau > 0$. On a donc

$$J^{QE}[\varphi] = \omega_0 \varphi(-\tau) + \omega_1 \varphi(\tau).$$

Or, • $J^{QE}[x \mapsto 1] = I[x \mapsto 1] \Leftrightarrow \omega_0 + \omega_1 = 2$;

• $J^{QE}[x \mapsto x] = I[x \mapsto x] \Leftrightarrow -\omega_0 \tau + \omega_1 \tau = 0$

$\Leftrightarrow \omega_0 = \omega_1 = \omega$

• $J^{QE}[x \mapsto x^2] = I[x \mapsto x^2] \Leftrightarrow 2\omega\tau^2 = \frac{2}{3}$

• $J^{QE}[x \mapsto x^3] = I[x \mapsto x^3] \Leftrightarrow -\omega\tau^3 + \omega\tau^3 = 0$ ✓

• $J^{QE}[x \mapsto x^4] = I[x \mapsto x^4] \Leftrightarrow 2\omega\tau^4 = \frac{2}{5}$

En résolvant le système donné par les 3 premières équations, on trouve

$$\omega_0 = \omega_1 = 1 \quad \text{et} \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\tau > 0)$$

La méthode obtenue (dite quadrature élémentaire de Gauss-Legendre) est donc d'ordre exactement 3 (car la 4ème équation n'est alors pas vérifiée), et donnée par

$$J^{QE}[\varphi] := \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Thm : Soit $\ell \geq 0$. Il existe un unique choix des points $(\tau_j)_{0 \leq j \leq \ell}$ et $(\omega_j)_{0 \leq j \leq \ell}$ de sorte que la méthode $J^{QE}[\varphi] = \sum_{j=0}^{\ell} \omega_j \varphi(\tau_j)$ soit d'ordre $2\ell+1$. Il s'agit du choix suivant :

(*) Les points $(\tau_j)_{0 \leq j \leq \ell}$ sont les zéros du polynôme de Legendre $\mathcal{L}_{\ell+1}$. En particulier, $\tau_i \neq \tau_j$ si $i \neq j$.

(*) $\omega_j = \int_{-1}^{1} \mathcal{L}_j(s)\, ds$.

Rem : Les polynômes de Legendre $(\mathcal{L}_n)_n$ sont obtenus via la récurrence suivante :

- $\mathcal{L}_0 = 1$
- $\mathcal{L}_1 = X$
- $(n+1)\,\mathcal{L}_{n+1}(X) = (2n+1)X\,\mathcal{L}_n(X) - n\,\mathcal{L}_{n-1}(X)$

En particulier, $\deg \mathcal{L}_n = n$.

Preuve : cf. Schatzmann chap. 5 ou mon cours de M_1CS : Méthodes spectrales et Fourier

$\boxtimes$

Ex : • $l = 0$, $\mathcal{L}_1(X) = X \Rightarrow \tau_0 = 0$

$\Rightarrow$ Point milieu, ordre $2\cdot 0+1 = 1$

• $l = 1$, $2\mathcal{L}_2(X) = 3X\,\mathcal{L}_1(X) - \mathcal{L}_0(X) = 3X^2 - 1$

$\Rightarrow \mathcal{L}_2(X) = \frac{3}{2}\left(X - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(X + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow \tau_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ok, c'est la méthode précédente.

$$\bullet\ \ell = 2 : \quad 3\mathcal{L}_3(X) = 5X\mathcal{L}_2(X) - 2\mathcal{L}_1(X)$$

$$= \frac{15}{2}X\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) - 2X$$

$$= X\left[\frac{15}{2}X^2 - \frac{5}{2} - 2\right]$$

$$= X\left[\frac{15}{2}X^2 - \frac{9}{2}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{L}_3(X) = X\left[\frac{5}{2}X^2 - \frac{3}{2}\right]$$

$$= \frac{5}{2}X\left[X^2 - \frac{3}{5}\right]$$

Donc $\tau_0 = -\frac{\sqrt{3}}{5}$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \frac{\sqrt{3}}{5}$, et la méthode est d'ordre $2 \cdot 2 + 1 = 5$.