Elément de cours des exercices

Formulaire de trigonométrie

1 Formules élémentaires

- $$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \text{ si } \cos a \neq 0,$$
  c'est à dire si $a \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- $$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$
- $$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

2 Tableau de valeurs

Les valeurs particulières suivantes des fonctions $\sin$, $\cos$ et $\tan$ sont à connaitre absolument :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$	0

3 Formules trigonométriques

A partir des lignes trigonométriques de a, on peut obtenir sans calculs celles de $-a$, $a+\pi$, $\pi - a$, $\frac{\pi}{2} - a$, $\frac{\pi}{2} + a$:

$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(-a) = -\sin a$	$\tan(-a) = -\tan a$
$\cos(a+\pi) = -\cos a$	$\sin(a+\pi) = -\sin a$	$\tan(a+\pi) = \tan a$
$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \dfrac{-1}{\tan a}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \dfrac{1}{\tan a}$

4 Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a\,\cos b + \cos a\,\sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a\,\cos b - \cos a\,\sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\,\tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\,\tan b}$$

En particulier, quand $a = b$, on a :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a,$$

$$\sin 2a = 2\sin a\,\cos a \text{ et } \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

5 Transformation de produits en sommes

En sommant ou en faisant la différence de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ (même chose pour $\sin$), on obtient les formules de transformation de produits en sommes :

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

$$\sin a \times \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

6 Transformation de sommes en produits

En posant $p = a + b$ et $q = a - b)$ dans les formules précédentes, on obtient les formules suivantes de transformation de sommes en produits :

$$\boxed{\begin{array}{cc} \cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\,\sin\dfrac{p-q}{2} & \cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \\[2ex] \sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} & \sin p - \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2} \end{array}}$$

7 Changement de variable $t = \tan\dfrac{a}{2}$

Pour le calcul des primitives de fractions rationnelles en $\sin$ et $\cos$, on a besoin du changement de variable

$$t = \tan\frac{a}{2}.$$

Les fonctions circulaires peuvent s'exprimer en fonction de $t = \tan\dfrac{a}{2}$:

$$\boxed{\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}.}$$