

1/4

Exercice 1

C'est bien!

On donne  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 3x^2 - y^2.$$

On considère le problème de minimisation de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

- 1) Ecrire proprement le problème d'optimisation ; on déterminera notamment la/les variables d'optimisation et la fonction coût

Les variables d'optimisation associées à notre problème sont  $x$  et  $y$ .

L'espace vectoriel dans lequel vivent ces variables est  $V = \mathbb{R}^2$ .

Ainsi la fonction coût  $f$  est donnée par :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 3x^2 - y^2.$$

Le problème d'optimisation s'écrira donc ; trouver  $x^* \in \mathbb{R}^2$  telle que  $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$ . ✓

- 2) Est-ce un problème d'optimisation en dimension finie, avec ou sans contraintes, quadratique ?

Il s'agit d'un problème d'optimisation en dimension finie  $V = \mathbb{R}^2$ , sans contrainte non quadratique. ✓

(2/4)

3) Montrons que  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x,y) = x^2 + (x^2 - 4)^2 + y^2 + (y^2 - 1)^2 - 5$

On a:  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$x^2 + (x^2 - 4)^2 + y^2 + (y^2 - 1)^2 - 5 = x^2 + x^4 + 4 - 4x^2 + y^2 + y^4 + 1 - 2y^2 - 5 \\ = x^4 + y^4 - 3x^2 - y^2.$$

D'où:  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x^2 + (x^2 - 4)^2 + y^2 + (y^2 - 1)^2 - 5 = f(x,y)$ . ✓

4.) a - Calculons  $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , Hess  $f(x_0, y_0)$ , la matrice  
Hessienne de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$ .

La fonction  $(x,y) \mapsto f(x,y)$  est deux fois dérivable  
sur  $\mathbb{R}^2$  et on a:  $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 4x_0^3 - 6x_0 \\ 4y_0^3 - 2y_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi:  $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , Hess  $f(x_0, y_0) = \nabla^2 f(x_0, y_0)$ .

$$\text{or } \nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 12x_0^2 - 6 & 0 \\ 0 & 12y_0^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \text{Hess } f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 12x_0^2 - 6 & 0 \\ 0 & 12y_0^2 - 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

→ C'est pas par définition, mais c'est une conséquence de la caractérisation à l'aide  
de la matrice Hessianne.

b) f est-elle convexe sur  $\mathbb{R}^2$ ?

Par définition,  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice Hessianne de  $f$  en tout point de  $\mathbb{R}^2$  sont positives.

D'après ce qui précède, les valeurs propres de la matrice Hessianne de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$  sont

$$\lambda_1 = 12x_0^2 - 6 \text{ et } \lambda_2 = 12y_0^2 - 2.$$

## 4.b) (suite)

Donc,  $f$  est ~~pas~~ convexe sur  $\mathbb{R}^2$  si  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$ .  
*Mais*

Autrement dit, si  $\lambda_1 = 12x_0^2 - 6 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{ou } x_0 < -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

et  $\lambda_2 = 12y_0^2 - 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} y_0 > \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \text{ou } y_0 < -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$ .

Par conséquent,  $f$  n'est pas convexe sur  $\mathbb{R}^2$ .

## 5.a) Montrons que le problème d'optimisation considéré admet au moins une solution

On a  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x,y) = x^2 + (x^2 - 2)^2 + y^2 + (y^2 - 1)^2 - 5$ .  
 Ainsi, la fonction  $(x,y) \mapsto f(x,y)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^2$  est un fermé non-vide.

D'autre part,  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x,y) \geq x^2 + y^2 - 5 = \| (x,y) \|^2 - 5$  ;  
 où  $\| \cdot \|$  désigne la norme Euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ .

Ainsi, en prenant une suite  $u_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$  telle que  $\| u_n \| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ , on a  $f(u_n) \geq \| u_n \|^2 - 5 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .

Donc,  $f$  est infime à l'infini.

D'après le théorème du cours, le problème d'optimisation considéré admet au moins une solution sur  $\mathbb{R}^2$ . ✓

(4/4)

5-b) Écrivons une condition nécessaire à l'optimalité  
et reliée à ce problème

Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , et une fonction 2 fois dérivable  
sur  $\mathbb{R}^n$ , une condition nécessaire pour que  
 $x^* \in \mathbb{R}^n$  soit un minimum local / global de  $f$   
sur  $\mathbb{R}^n$  est que  $\nabla f(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n}$  et  $\nabla^2 f(x^*)$   
est définie positive.

Dans notre cas,  $n=2$  et on a  $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 6x \\ 4y^3 - 2y \end{pmatrix}$

Donc, une condition nécessaire pour que  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$   
élément de  $\mathbb{R}^2$  soit un minimum global de  $f$   
sur  $\mathbb{R}^2$  est que  $\nabla f(u^*) = 0_{\mathbb{R}^2}$ .

Autrement dit,

$$\begin{cases} 4u_1^{*3} - 6u_1^* = 0 \\ 4u_2^{*3} - 2u_2^* = 0 \end{cases}$$

✓