Quelques propriétés des lois exponentielles

1 Rappels sur la loi exponentielle

Soit X une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

- densité : $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$;
- fonction de répartition : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$;
- espérance : $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$;
- variance : $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$;
- simulation : si U suit la loi uniforme sur $]0, 1]$, $\dfrac{-\ln(U)}{\lambda}$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Une propriété caractéristique de la loi exponentielle est la propriété dite « d'absence de mémoire ».

Lemme 1 : Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de fonction de répartition F_X continue. Alors X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si et seulement si pour t et s deux réels positifs quelconques

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

Preuve : Commençons par supposer que X est une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Alors pour tout $u \geq 0$, $\mathbb{P}(X > u) = e^{-\lambda u}$. On en déduit

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s).$$

Réciproquement, on suppose maintenant que X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de fonction de répartition F_X continue, et qui vérifie pour $t, s \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

On introduit la *fonction de survie* de X, G, qui est définie par $G(u) = \mathbb{P}(X > u) = 1 - F_X(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, puisque $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > t + s)/\mathbb{P}(X > t)$, G vérifie

$$G(t + s) = G(t)G(s), \tag{1}$$

pour tout $t, s \geq 0$. Une récurrence immédiate basée sur cette relation permet d'établir que

$$G(n) = G(1)^n,$$

pour tout entier $n \geq 1$. En remplaçant s et t par 0 dans (1), on obtient que $G(0)^2 = G(0)$, donc $G(0) = 0$ ou $G(0) = 1$. Mais $G(0) = 0$ équivaut à $F_X(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = 1$, et comme X est supposée à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on aurait alors $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. Ceci est impossible, puisque F_X est supposée continue. On a donc nécessairement $G(0) = 1$. On utilise encore (1) pour obtenir les égalités

$$G\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q}\right) = G\left(\frac{1}{q}\right)^2 \quad \text{et} \quad G\left(\frac{p}{q}\right) = G\left(\frac{1}{q}\right)^p,$$

où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. En particulier, $G(1) = G\left(\frac{1}{q}\right)^q$, d'où $G\left(\frac{1}{q}\right) = G(1)^{1/q}$ et

$$G\left(\frac{p}{q}\right) = G(1)^{p/q} = \mathrm{e}^{\frac{p}{q}\ln G(1)}.$$

En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, et la continuité de G (découlant de celle de F_X), on obtient que pour tout $t \geq 0$,

$$G(t) = \mathrm{e}^{t \ln G(1)} = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

où l'on a posé $\lambda = -\ln G(1) > 0$ car $G(1) < 1$; en effet, $G(1) \leq 1$ est immédiat, et on ne peut avoir $G(1) = 1$, car alors on aurait $G(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$, d'après ce qui précède. Mais pour tout $t \geq 0$, $G(t) = 1$ équivaut à $F_X(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, ce qui est impossible car X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Au total, X suit bien la loi exponentielle de paramètre $-\ln G(1)$. □

Pour clore cette partie, on énonce un petit résultat technique, dont la preuve est laissée au lecteur ou à la lectrice.

Lemme 2 : Si X est une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre 1, et λ un réel strictement positif, alors X/λ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

2 Lois exponentielles et indépendance

Un premier résultat concernant n v.a.r. i.i.d. de loi exponentielle concerne la loi de leur somme.

Lemme 3 : Soient $X_1, \ldots, X_n$ n v.a.r. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La loi de la somme $X_1 + \cdots + X_n$ est la loi $\Gamma(n, \lambda)$.

Preuve : On va établir cette égalité en loi en montrant l'égalité des transformées de Laplace. Si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, sa transformée de Laplace est donnée, pour $t \geq 0$, par

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-tX}] = \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-tx} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \lambda \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-(t+\lambda)x}\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda + t}.$$

On en déduit la transformée de Laplace de $X_1 + \cdots + X_n$, où les X_i sont indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-t(X_1+\cdots+X_n)}\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-tX_1} \ldots \mathrm{e}^{-tX_n}\right] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-tX_1}] \ldots \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-tX_n}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda + t}\right)^n.$$

Calculons maintenant la transformée de Laplace de Y, de loi $\Gamma(n,\lambda)$:

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-tY}] = \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-ty}\, \frac{\lambda^n y^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda y}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}y = \lambda^n \int_{\mathbb{R}_+} \frac{y^{n-1}\mathrm{e}^{-(\lambda+t)y}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}y = \frac{\lambda^n}{(\lambda+t)^n},$$

la dernière égalité provenant du fait que la deuxième intégrale est celle de la densité de la loi $\Gamma(n,\lambda+t)$, à la constante de normalisation $(\lambda+t)^n$ près.
En conclusion, $X_1+\cdots+X_n$ et Y ayant même transformée de Laplace, elles ont même loi, autrement dit $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi $\Gamma(n,\lambda)$. □

Après s'être intéressé-e à la loi de la somme de n v.a.r. indépendantes de même loi exponentielle, on s'intéresse maintenant à la loi du minimum de n v.a.r. indépendantes de loi exponentielle.

Lemme 4 : Soient $X_1,\dots,X_n$ n v.a.r. indépendantes, de lois exponentielles de paramètre respectif $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, et soit $Y=\min(X_1,\dots,X_n)$. Alors

1. Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1+\cdots+\lambda_n$;
2. $\mathbb{P}(Y=X_i) = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$, pour $i=1,\dots,n$.

Preuve : Pour montrer 1., on calcule la fonction de survie de Y, qui caractérise sa loi, puisque la fonction de répartition la caractérise. Pour tout $u\in\mathbb{R}$,

$$G_Y(u) = \mathbb{P}(Y>u) = \mathbb{P}(\min(X_1,\dots,X_n)>u) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i>u\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i>u),$$

et pour poursuivre le calcul, il faut distinguer deux cas selon le signe de u. Si $u<0$, alors $\mathbb{P}(X_i>u)=1$ pour $i=1,\dots,n$ et $G_Y(u)=1$. Si $u\geq 0$, $\mathbb{P}(X_i>u)=\mathrm{e}^{-\lambda_i u}$ et

$$G_Y(u) = \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{-\lambda_i u} = \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)u}.$$

Au total, on identifie G_Y à la fonction de survie de la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1+\cdots+\lambda_n$.
Calculons maintenant la probabilité du point 2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=X_i) &= \mathbb{P}(X_i\leq X_k,\ \forall k=1\dots n)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{1}_{\{x_i\leq x_k,\ \forall k=1\dots n\}}\ \lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x_1}\dots\lambda_n\mathrm{e}^{-\lambda_n x_n}\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n\\
&= \int_{\mathbb{R}_+}\left(\prod_{k=1,k\neq i}^n \int_{x_i}^{+\infty}\lambda_k\mathrm{e}^{-\lambda_k x_k}\,\mathrm{d}x_k\right)\lambda_i\mathrm{e}^{-\lambda_i x_i}\,\mathrm{d}x_i\\
&= \int_{\mathbb{R}_+}\left(\prod_{k=1,k\neq i}^n \mathrm{e}^{-\lambda_k x_i}\right)\lambda_i\mathrm{e}^{-\lambda_i x_i}\,\mathrm{d}x_i\\
&= \lambda_i\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x_i}\,\mathrm{d}x_i\\
&= \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n},
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de ce lemme. $\square$

Lemme 5 : Soient T une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et R une v.a.r. positive, indépendante de T. Alors

$$\mathbb{P}(T > R) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda R}].$$

De plus, si $T_1, \ldots, T_n$ sont n v.a.r. indépendantes de lois exponentielles de paramètre respectif $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, indépendantes d'une v.a.r. positive R, alors, conditionnellement à $\bigcap_{i=1}^{n} \{T_i > R\}$, les v.a.r. $T_1 - R, \ldots, T_n - R$ sont indépendantes, de lois exponentielles de paramètre respectif $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Preuve : Les v.a.r. T et R étant indépendantes, la loi du couple (T, R) est donc $\mathbb{P}_T \otimes \mathbb{P}_R$, ce qui permet d'écrire, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > R) &= \int \mathbf{1}_{\{t>r\}} \,\mathrm{d}(\mathbb{P}_T \otimes \mathbb{P}_R)(t, r) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_r^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\mathbb{P}_R(r) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-\lambda r} \,\mathrm{d}\mathbb{P}_R(r) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda R}].
\end{aligned}$$

Montrons le deuxième résultat. Soient $t_1, \ldots, t_n$, n réels positifs, grâce à l'indépendance entre R et $T_1, \ldots, T_n$, et à celle des $T_1, \ldots, T_n$ entre elles, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{T_i > R + t_i\} \right) &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{T_i > r + t_i\} \right) \mathrm{d}\mathbb{P}_R(r) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i > r + t_i) \,\mathrm{d}\mathbb{P}_R(r) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda_i (r+t_i)} \,\mathrm{d}\mathbb{P}_R(r) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda_i t_i} \int_{\mathbb{R}_+} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda_i r} \,\mathrm{d}\mathbb{P}_R(r) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda_i t_i} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{T_i > R\} \right).
\end{aligned}$$

Il est alors immédiat que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{T_i - R > t_i\} | \bigcap_{i=1}^{n} \{T_i > R\} \right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda_i t_i},$$

ce qui est bien le résultat annoncé. $\square$

Lemme 6 : Soit $(T_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes, de lois exponentielles de paramètre respectif $\lambda_i > 0$. Il y a équivalence entre les trois points suivants :

(i) $\mathbb{P}(\sum_{i \geq 1} T_i = +\infty) = 1$,
(ii) $\mathbb{P}(\sum_{i \geq 1} T_i = +\infty) > 0$,
(iii) $\sum_{i \geq 1} 1/\lambda_i = +\infty$.

Preuve : Il est évident que **(i)** entraîne **(ii)**. Pour montrer que **(ii)** implique **(iii)**, on suppose que cette dernière assertion est fausse, autrement dit que la série des $(1/\lambda_i)_{i \geq 1}$ converge. Mais, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\mathbb{E}[\sum_{i \geq 1} T_i] = \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}[T_i] = \sum_{i \geq 1} 1/\lambda_i < +\infty,$$

ce qui entraîne que la v.a.r. $\sum_{i\geq 1} T_i$ est finie p.s., autrement dit $\mathbb{P}(\sum_{i\geq 1} T_i = +\infty) = 0$. On a donc bien montré que **(ii)** implique **(iii)**.
Supposons pour finir que **(iii)** est vraie. On s'intéresse au calcul de $\mathbb{E}[\exp(-\sum_{i\geq 1} T_i)]$. La suite $(\exp(-\sum_{i=1}^n T_i))_{n\geq 1}$ étant décroissante et positive, nous savons qu'elle converge, et que l'on peut lui appliquer le lemme de Fatou :

$$\mathbb{E}[\exp(-\sum_{i\geq 1} T_i)] = \mathbb{E}[\liminf_{n\to+\infty} \exp(-\sum_{i=1}^n T_i)] \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\exp(-\sum_{i=1}^n T_i)]. \tag{2}$$

Le calcul de cette dernière espérance se fait en utilisant l'indépendance des T_i, ainsi que l'égalité $\mathbb{E}\left[\exp(-T_i)\right] = \lambda_i/(\lambda_i+1)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(-\sum_{i=1}^n T_i)] &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\exp(-T_i)\right] = \prod_{i=1}^n \lambda_i/(\lambda_i+1)\\ &= \prod_{i=1}^n \exp\left(-\ln(1+1/\lambda_i)\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \ln(1+1/\lambda_i)\right).\end{aligned}$$

À ce stade, il suffit alors de remarquer que la série des $(\ln(1+1/\lambda_i))_{i\geq 1}$ diverge vers $+\infty$. En effet, le terme général est positif, et soit il ne tend pas vers 0 (dans ce cas, divergence grossière de la série vers $+\infty$), soit il tend vers 0, mais alors il est équivalent à $1/\lambda_i$, qui est par hypothèse le terme général d'une série divergeant vers $+\infty$. On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\exp(-\sum_{i=1}^n T_i)] = 0,$$

ce qui entraîne, *via* (2), que $\mathbb{E}[\exp(-\sum_{i\geq 1} T_i)] = 0$. La v.a.r. dont on prend l'espérance ici étant positive, elle est donc nécessairement nulle p.s., ce qui implique **(i)**, et achève la preuve de ce lemme. $\square$

Lemme 7 : Soit $(T_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes, de lois exponentielles de paramètre respectif $\lambda_i > 0$. On définit, pour $n \geq 1$ et $t \geq 0$,

$$S_n = T_1 + \cdots + T_n \quad \text{et} \quad \tilde{N}_t = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}.$$

Alors

$$\mathbb{P}(\tilde{N}_t = 1) = \lambda_1 t + o(t) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\tilde{N}_t \geq 2) = o(t).$$

Preuve : Par définition du processus $(\tilde{N}_t)_{t\geq 0}$, $\tilde{N}_t = 1$ ssi $S_1 \leq t < S_2$, autrement dit ssi $T_1 \leq t < T_1 + T_2$. Ceci permet d'écrire, en utilisant l'indépendance de T_1 et T_2,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tilde{N}_t = 1) &= \mathbb{P}(T_1 \leq t < T_1 + T_2)\\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}T_1 \leq t\mathrm{e}^{-\lambda_2(t-T_1)}]\\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_2(t-u)}\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 u}\,\mathrm{d}u\\ &= \lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\int_0^t \mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)u}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}).\end{aligned}$$

Pour terminer le calcul, on utilise le DL à l'ordre 1 de la fonction exponentielle au voisinage de 0, ce qui conduit à

$$\mathbb{P}(\tilde{N}_t = 1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(1 - \lambda_1 t - 1 + \lambda_2 t + o(t)) = \lambda_1 t + o(t).$$

La preuve de la deuxième égalité s'appuie sur ce premier résultat :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tilde{N}_t \geq 2) &= 1 - (\mathbb{P}(\tilde{N}_t = 0) + \mathbb{P}(\tilde{N}_t = 1)) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(T_1 > t) + \lambda_1 t + o(t)) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 t + o(t) \\
&= o(t),
\end{aligned}$$

la quatrième égalité reposant sur le fait que $\mathrm{e}^x = 1 + x + o(x)$. □

Références

[1] J.-F. Delmas et B. Jourdain. *Modèles aléatoires. Applications aux sciences de l'ingénieur et du vivant.* Springer, 2006.

[2] B. Ycart. *Modèles et Algorithmes Markoviens.* Springer, 2000.