M1-EDP Différences Finies.

Soutien : Séries de Fourier et solution de l'équation de la chaleur.

Ex 1. *Schéma de Crank-Nicolson*

On s'intéresse à la résolution du problème discret suivant :

$$C^{CN}_{h,\Delta t}$$

Pour tout $n \in [0, N]$, *trouver* $(u_i^n)_{i\in\{0,\cdots,J+1\}}$ *solution de*

- $\dfrac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = \dfrac{u_{i+1}^{n+1/2} - 2u_i^{n+1/2} + u_{i-1}^{n+1/2}}{h^2}$, pour tout $i \in \{1, \cdots, J\}$,
- $u_0^n = 0$, $u_{J+1}^n = 0$, pour tout $n \in \{0, ..., N\}$,
- $u_i^0 = u_0(x_i)$, pour tout $i \in \{0, ..., J+1\}$.

où $u_i^{n+1/2} = \dfrac{u_i^n + u_i^{n+1}}{2}$, pour tout $i \in \{0, ..., J+1\}$.

1) Ce schéma est il explicite ou implicite ?

2) Étudier la consistance de ce schéma.

3) Étudier la stabilité au sens de Von Neumann.

4) Étudier la stabilité en norme L[illegible] en espace.

5) Que pensez-vous de la convergence ?

Ex 2. *Solution exacte sur* $[0, L]$

1. Rappeler l'expression de la solution exacte de l'équation de la chaleur sur $[0,1]$ avec conditions de Dirichlet homogènes donnée en cours.

2. Quelle est la solution exacte de l'équation de la chaleur sur $[0,1]$ avec conditions de Dirichlet homogènes, associée à la condition initiale $u_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1]$,
   (a) $u_0(x) = 5\sin(\pi x)$,
   (b) $u_0(x) = 3\sin(7\pi x)$
   (c) $u_0(x) = 2\sin(5\pi x) + 10\sin(10\pi x)$

3. Soit $L > 0$. Quelle est la solution exacte de l'équation de la chaleur sur $[0, L]$ avec conditions de Dirichlet homogènes, associée à la condition initiale $u_0 : [0, L] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0, L]$,
   (a) $u_0(x) = 3\sin(\frac{\pi}{L}x)$,
   (b) $u_0(x) = 2\sin(3\frac{\pi}{L}x)$
   (c) $u_0(x) = 2\sin(5\frac{\pi}{L}x) + 10\sin(105\frac{\pi}{L}x)$
   (d) $L = 5$ et $u_0(x) = 2\sin(\pi x) + 10\sin(5\pi x)$.