FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS n° 3
GÉNÉRALITÉS SUR LES PROCESSUS STOCHASTIQUES

Dans tous les exercices, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne l'espace de probabilité sous-jacent. Les astérisques devant les exercices indiquent leur difficulté : ceux sans astérisque sont des exercices essentiels qui doivent être maîtrisés, ceux comportant un astérisque sont plus difficiles et/ou font intervenir des notions avancées de théorie de la mesure.

1. Temps d'arrêt et filtration

Exercice 1.
Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires réelles. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

(1) $X_1^2 + 2X_2$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_1, X_2, X_3)$.
VRAI

(2) $X_1 + 2X_2^6 - \sin(X_3)$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_1, X_2)$.
FAUX

(3) $X_1^2 + 2X_2 - e^{X_3}$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_1, X_2^3, X_3)$.
VRAI

(4) X_1 est mesurable par rapport à $\sigma(\cos(X_1))$.
FAUX

(5) $\sigma(X_1^2, X_2X_1)$ est inclus dans $\sigma(X_1, X_2)$.
VRAI

(6) $\sigma(X_1, X_2)$ est inclus dans $\sigma(X_1, X_2X_1)$.
FAUX

(7) Toute variable aléatoire Y qui est $\sigma(X_1, X_3, X_5)$-mesurable peut s'écrire comme $Y = \varphi(X_1, X_3, X_5)$ pour une certaine fonction φ.
VRAI

Exercice 2.
On considère un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $\forall n \geq 0, S_n = \sum_{k=0}^n X_k$. Les filtrations $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\mathcal{F}_n^S\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles identiques ?

On va montrer l'égalité de deux filtrations. Pour cela, il suffit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma(X_0, \ldots, X_n) = \sigma(S_0, \ldots, S_n)$$

et nous avons donc simplement à vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable S_n s'écrit comme une fonction (mesurable) de $X_0, \ldots, X_n$ et, inversement, que X_n s'écrit comme une fonction (mesurable) de $S_0, \ldots, S_n$. Le premier point est immédiat de par la définition de S_n ; pour le second, il suffit de remarquer que $X_0 = S_0$ et que pour tout $n \geq 1$, $X_n = S_n - S_{n-1}$.

Exercice 3.
Montrer qu'un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $i \leq n$, X_i est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

— Supposons tout d'abord que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cela signifie que pour tout $i \in \mathbb{N}$, X_i est $\mathcal{F}_i$-mesurable. Par croissance de la filtration, $\forall i \leq n$, $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n$ et donc X_i est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

— Supposons maintenant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \leq n$, X_i est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Alors en particulier, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4.
On considère une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit T une v.a. à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(1) T est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

(3) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T \geq n+1\} \in \mathcal{F}_n$.

On montre (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

— Supposons (1) i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et fixons un entier n.

$$\{T = n\} = \{T \leq n\} \cap \{T \geq n\} = \{T \leq n\} \cap \overline{\{T \leq n-1\}}.$$

Or $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$. L'ensemble $\mathcal{F}_n$ étant une tribu, $\{T = n\}$ est donc également un élément de $\mathcal{F}_n$.

— Supposons (2) et fixons un entier n. Alors :

$$\{T \geq n+1\} = \overline{\{T \leq n\}} = \overline{\bigcup_{k=0}^{n} \{T = k\}}.$$

L'hypothèse (2) et les propriétés des tribus montrent qu'on a donc bien $\{T \geq n+1\} \in \mathcal{F}_n$.

— Supposons (3) et fixons un entier n. Alors :

$$\{T \leq n\} = \overline{\{T \geq n+1\}}.$$

L'hypothèse (3) et la stabilité d'une tribu par passage au complémentaire montrent qu'on a bien $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Exercice 5.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que la v.a. T constante égale à n_0 est un temps d'arrêt pour n'importe quelle filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $\{T \leq n\}$ appartient à $\mathcal{F}_n$. Or, $\{T \leq n\} = \{n_0 \leq n\}$ est simplement l'ensemble vide ou Ω, l'univers tout entier, selon que n soit plus petit ou plus grand que n_0. Comme une tribu contient toujours ces deux ensembles, $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et les constantes entières sont bien des temps d'arrêt.

Exercice 6.
On considère un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On se donne également un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^d$ (précisément $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$).

(1) Montrer que le temps d'atteinte de A, $T_A := \inf\{n \geq 0,\ X_n \in A\}$, est un temps d'arrêt pour la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $\{T_A \leq n\}$ appartient à $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{T_A \leq n\} = \{X_0 \in A \text{ ou } \ldots \text{ ou } X_n \in A\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X_k \in A\}.$$

Donc $\{T_A \leq n\} \in \mathcal{F}_n^X$ et T_A est bien un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Montrer que le temps de second passage dans A, $T_A^2 := \inf\{n > T_A,\ X_n \in A\}$ est également un temps d'arrêt pour la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Encore une fois, il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $\{T_A^2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n^X$. On décompose l'événement :

$$\begin{aligned}\{T_A^2 \leq n\} &= \bigcup_{k=0}^{n-1} \{T_A = k, k+1 \leq T_A^2 \leq n\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{n-1} \left(\{T_A = k\} \cap \bigcup_{\ell=k+1} \{X_\ell \in A\} \right)\end{aligned}$$

D'après l'exercice 4, comme T_A est un temps d'arrêt, les ensembles $\{T_A = k\}$ sont bien dans $\mathcal{F}_k$ et donc dans $\mathcal{F}_n$. Ainsi, $\{T_A^2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n^X$ et T_A^2 est bien un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$.
Remarque : de la même manière, on peut montrer récursivement que le temps de k^e passage dans l'ensemble A est un temps d'arrêt quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(3) Le temps de dernier passage dans A, $S_A := \sup\{n \geq 0,\ X_n \in A\}$, est-il un temps d'arrêt pour cette filtration ?

Une v.a. T à valeurs entières est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $\{T \leq n\}$ ne dépend que des v.a. $X_0, \ldots, X_n$. Or, l'événement

$$\{S_A \leq n\} = \{\forall k > n, X_k \notin A\} = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \{X_k \notin A\}$$

n'est a priori pas dans $\sigma(X_0, \ldots, X_n)$ car il dépend des v.a. suivantes. Donc, de manière générale, S_A n'est pas un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7.
Soit T_1 et T_2 deux temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Montrer que $\min(T_1, T_2)$ est encore un temps d'arrêt pour cette filtration. La variable aléatoire $\max(T_1, T_2)$ est-elle également un temps d'arrêt ?

La v.a. $U = \min(T_1, T_2)$ est encore un temps d'arrêt pour cette filtration car :

— U est p.s. à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$.

— comme T_1 et T_2 sont deux t.a. pour la filtration, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\{U \leq n\} = \{T_1 \leq n\} \cup \{T_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

De même, la v.a. $V = \min(T_1, T_2)$ est encore un temps d'arrêt pour la filtration car :

— V est p.s. à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$.

— pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\{V \leq n\} = \{T_1 \leq n\} \cap \{T_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

(2) Les variables aléatoires $T_1 + 1$ et $T_1 - 1$ sont-elles des temps d'arrêt ?

(3) La variable aléatoire $T_1 + T_2$ est-elle un temps d'arrêt ?

* **Exercice 8.** *Loi binomiale négative.*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0,1[$. On définit $T_1 = \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = 1\}$, et récursivement pour $k \in \mathbb{N}^*$, $T_{k+1} = \inf\{n > T_k,\ X_n = 1\}$, avec la convention que $\inf \varnothing = \infty$.

(1) Montrer que les T_k sont des temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les T_k sont les temps de k^e passage dans l'ensemble $\{1\}$ pour le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, d'après la question (2) de l'exercice 6, les T_k sont des temps d'arrêt pour la filtration naturelle du processus.

(2) (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \leq n$,

$$\sum_{\ell=k}^{n} \binom{\ell}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \text{et que} \quad \forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

— On va démontrer le premier résultat par récurrence sur n. L'égalité est évidente pour $n = k$. Et si on la suppose vraie pour un $n \geq k$, on a :

$$\sum_{\ell=k}^{n+1} \binom{\ell}{k} = \sum_{\ell=k}^{n} \binom{\ell}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1},$$

la dernière égalité étant l'égalité de Pascal. Cela conclut la récurrence et démontre l'égalité pour tout $k \leq n$.

— Pour le second résultat, on remarque que pour tout $n \geq k$, la fonction $x \mapsto \binom{n}{k} x^{n-k}$ est la dérivée k^e de $x \mapsto x^n/k!$. Comme la série entière $f : x \to \sum_{n\geq 0} x^n/k!$ a pour rayon de convergence 1 (attention, on somme sur n et non sur k), cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et la dérivée k^e de f est la série des dérivées k^e, i.e.

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

Comme, par ailleurs, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \frac{1}{k!(1-x)}$, on a donc $f^{(k)}(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$. D'où le résultat recherché.

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T_k est $\mathbb{P}$-p.s. finie et suit la loi de Pascal $\mathcal{P}(k,p)$ (ou loi binomiale négative) i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

avec la convention $\binom{n}{\ell} = 0$ pour $\ell > n$.

On montre le résultat par récurrence.

— pour $k = 1$, on sait que T_1 suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et est donc $\mathbb{P}$-p.s. finie. De plus, on voit que cette loi est identique à la loi $\mathcal{P}(1,p)$.

— Supposons maintenant que, pour un k donné, T_k est $\mathbb{P}$-p.s. finie et suit la loi de Pascal $\mathcal{P}(k,p)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{k+1} = n) &= \sum_{\ell < n} \mathbb{P}(T_{k+1} = n | T_k = \ell)\, \mathbb{P}(T_k = \ell) \\ &= \sum_{\ell = k}^{n-1} \mathbb{P}(X_{\ell+1} = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1 | T_k = \ell)\, \mathbb{P}(T_k = \ell)\end{aligned}$$

Comme les v.a. X_i, pour $i > \ell$, sont indépendantes entre elles et indépendantes de $\mathcal{F}_\ell^X$ et que $\{T_k = \ell\}$ est $\mathcal{F}_\ell^X$ mesurable, T_k étant un temps d'arrêt, on a :

$$\mathbb{P}(X_{\ell+1} = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1 | T_k = \ell) = \mathbb{P}(X_n = 1) \prod_{i=\ell+1}^{n-1} \mathbb{P}(X_i = 0) = p(1-p)^{n-\ell-1}.$$

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{k+1} = n) &= \sum_{\ell=k}^{n-1} p(1-p)^{n-\ell-1} \binom{\ell-1}{k-1} p^k (1-p)^{\ell-k} \\ &= p^{k+1}(1-p)^{n-(k+1)} \sum_{\ell=k}^{n-1} \binom{\ell-1}{k-1}.\end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$\sum_{\ell=k}^{n-1} \binom{\ell-1}{k-1} = \binom{n-1}{k}$$

ce qui donne le résultat voulu pour $\mathbb{P}(T_{k+1} = n)$. De plus, on a alors :

$$\mathbb{P}(T_k < \infty) = \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(T_k = n) = \sum_{n \geq k} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

La question précédente nous permet encore une fois de conclure que

$$\mathbb{P}(T_k < \infty) = \frac{p^k}{(1-(1-p))^k} = 1$$

et donc que T_k est $\mathbb{P}$-p.s. finie.

(3) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{E}[T_k] = \frac{k}{p}$. Que vaut X_{T_k} ?

Pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_k] &= \sum_{n=k}^{\infty} n \mathbb{P}(T_k = n) = \sum_{n=k}^{\infty} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= k \frac{p^k}{(1-(1-p))^{k+1}} = \frac{k}{p}.\end{aligned}$$

On a utilisé encore une fois le résultat de la question (2a) pour le passage à la dernière ligne.
Finalement, X_{T_k} est la valeur du processus lors du k^e passage en 1. Comme cet instant est bien fini p.s. car $\mathbb{P}(T_k < \infty) = 1$, X_{T_k} est bien définie et vaut 1 p.s..

(4) On pose $T_0 = 0$. Montrer que les v.a. $\tau_k = T_k - T_{k-1}$, $k \geq 1$, forment une famille de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$.

Soit $k \geq 1$ et des entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$. Il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}(\forall 1 \leq i \leq k,\ \tau_i = n_i) = \prod_{i=1}^{k} p(1-p)^{n_i - 1}.$$

Et, en effet, en revenant à la définition des variables et en utilisant les fait que les v.a. X_i soient i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\forall 1 \leq i \leq k,\ \tau_i = n_i\big)\\
&= \mathbb{P}\big(X_1 = 0, \ldots, X_{n_1 - 1} = 0, X_{n_1} = 1, X_{n_1+1} = 0, \ldots, X_{n_1+n_2-1} = 0, X_{n_1+n_2} = 1, \ldots\\
&\qquad \ldots, X_{\sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1} = 0, \ldots, X_{\sum_{i=1}^{k} n_i - 1} = 0, X_{\sum_{i=1}^{k} n_i} = 1\big)\\
&= \prod_{i=1}^{k} p(1-p)^{n_i - 1}.
\end{aligned}$$

Exercice 9. *Identité de Wald.*
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. et T un temps d'arrêt adapté à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que les espérances $\mathbb{E}[|X_1|]$ et $\mathbb{E}[T]$ sont finies.

(1) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{T} X_k = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{T \geq k}\ .$$

La variable $\mathbf{1}_{T \geq k} = 1$ ssi $k \leq T$ et sinon elle vaut 0. L'égalité ci-dessus est une conséquence directe de ce fait.

(2) Montrer que $\mathbb{E}[T] = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(T \geq k)$.

De la même manière qu'à la question précédente, on remarque que

$$T = \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}_{T \geq k}.$$

Ainsi, par le théorème de Fubini-Tonelli, les v.a. $\mathbf{1}_{T \geq k}$ étant positives,

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{T \geq k}] = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(T \geq k).$$

(3) En déduire que $\sum_{k=1}^{T} X_k$ est intégrable et que $\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} X_k\right] = \mathbb{E}[T]\,\mathbb{E}[X_1]$.

On effectue d'abord les calculs avec $|X_k| \geq 0$ en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{T} X_k\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} |X_k|\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} |X_k| \mathbf{1}_{T \geq k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_k| \mathbf{1}_{T \geq k}].$$

Comme T est un temps d'arrêt pour $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n \in \mathbb{N}}$, d'après l'exercice 4, l'événement $\{T \geq k\} = \{T > k-1\}$ est dans $\mathcal{F}_{k-1}^X$ et donc indépendant de $|X_k|$ car les v.a. $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes. Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} |X_k|\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_k|]\,\mathbb{P}(T \geq k).$$

Comme les v.a. $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ont même loi, on obtient bien :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} |X_k|\right] = \mathbb{E}[|X_1|] \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq k) = \mathbb{E}[|X_1|]\,\mathbb{E}[T] < \infty.$$

La quantité étant finie, $\sum_{k=1}^{T} X_k$ est intégrable. On peut donc refaire le même calcul sans valeur absolue en utilisant le théorème de Fubini-Lebesgue et montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} X_k\right] = \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[T].$$

Exercice 10.
Dans cet exercice, on considère qu'à chaque naissance, un couple a la même chance d'obtenir un garçon ou une fille. On suppose de plus que toutes les naissances sont indépendantes et on néglige les naissances de jumeaux, triplés, etc. (Le résultat resterait néanmoins inchangé).

(1) Un état phallocrate décide d'appliquer un contrôle des naissances pour réguler la population de filles. Un premier choix du gouvernement est d'obliger les familles à procréer jusqu'à avoir un garçon et ensuite de leur interdire d'avoir d'autres enfants. En utilisant un modèle probabiliste adéquat, calculer le nombre moyen de filles et de garçons par famille.

On peut représenter les naissances successives (potentielles) dans une famille par une suite de vaiid $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$ où X_n vaut 1 ssi le n^e enfant de la famille est un garçon. Ainsi, si on note T le rang du premier garçon né, cette variable s'écrit $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = 1\}$, est finie p.s. et suit une loi géométrique $\mathcal{G}(1/2)$. Le nombre moyen de filles par famille est donc $\mathbb{E}[T-1] = 2-1 = 1$ et le nombre de garçons est constant égal à 1. Cette politique ne favorise pas la naissance de garçons.

(2) En utilisant le résultat de l'exercice 9, montrer qu'il est impossible, dans notre modèle, de réguler le nombre de filles en choisissant d'autoriser ou non les parents à procréer selon le sexe des enfants qu'ils ont déjà eus.

La politique de régulation décrite dans l'énoncé se traduit de la manière suivante dans notre modèle : on décide d'empêcher les parents de procréer après un temps $\tilde{T}$ aléatoire et, à chaque instant n, l'événement $\left\{\tilde{T} = n\right\}$ ne doit dépendre que des naissances précédentes i.e. de $X_1, \dots X_n$. Cela signifie que $\tilde{T}$ est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ainsi, d'après l'exercice 9, le nombre moyen de garçons par famille est

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\tilde{T}} X_k\right] = \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}\left[\tilde{T}\right] = \mathbb{E}\left[\tilde{T}\right]/2,$$

de même que le nombre moyen de filles. Il est donc impossible de faire varier la proportion de garçons (et donc de filles) dans une population de cette manière.

*** Exercice 11.** *Pyramide de D'Alembert.*

Un joueur espère gagner à la roulette en utilisant la stratégie suivante. Il commence en misant un euro sur le rouge et, à chaque partie, il rejoue rouge en doublant sa mise.

La probabilité de gagner à chaque partie est $p = 18/37$ (cette probabilité n'est pas $1/2$ suite à la présence du 0 qui n'est ni rouge, ni noir) et, si il gagne une partie, le joueur récupère 2 fois la mise, soit un gain net égal à la mise déposée. On note X_i la variable qui vaut 1 si le joueur gagne à la i^e partie et 0 sinon et on fait l'hypothèse (raisonnable !) que les v.a. X_i sont indépendantes. Finalement, on note G_n le gain net (positif ou négatif) après la n^e partie partant de $G_0 = 0$.

(1) On suppose tout d'abord que le joueur peut miser autant d'argent que nécessaire et qu'il arrête de jouer dès qu'il gagne. On appelle alors T le nombre de parties effectuées avant de gagner. Quelle est la loi de T ? En déduire que T est $\mathbb{P}$-p.s. fini puis montrer que T est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Est-ce une temps d'arrêt pour la filtration $\left(\mathcal{F}_n^G\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

D'après l'énoncé, $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 1\}$. Les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant des vaiid de loi $\mathcal{B}(p)$, T suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et est donc finie $\mathbb{P}$-p.s.. De plus, T est le premier temps d'atteinte de l'ensemble $\{1\}$. D'après l'exercice 6, il s'agit bien d'un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On peut vérifier que la filtration $(\mathcal{F}_n^G)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est identique à la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}^*}$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, G_n s'écrit comme fonction de $X_1, \dots, X_n$ et inversement. Donc, T est également un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n^G)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \sum_{i=1}^n 2^{i-1}(2X_i - 1)$. Que vaut G_T ?

Étant donnée la stratégie du joueur, la mise à la i^e partie est 2^{i-1}. Son gain net à cette unique partie est donc -2^{i-1} si il perd et, si il gagne, 2^{i-1}, soit, dans tous les cas, $2^{i-1}(2X_i - 1)$. Finalement, le gain après la n^e partie est le gain à cette partie plus les gains aux parties précédentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, G_{n+1} = G_n + 2^n(2X_{n+1} - 1).$$

Une récurrence immédiate amène au résultat de l'énoncé.

Pour le calcul du gain lorsque le joueur se retire, il suffit de remarquer que pour $i < T$, $X_i = 0$ et que $X_T = 1$. Ainsi,

$$G_T = -\sum_{i=1}^{T-1} 2^{i-1} + 2^{T-1} = -(2^{T-1} - 1) + 2^{T-1} = 1.$$

Ainsi, si le joueur peut jouer aussi longtemps que nécessaire, il finira toujours par gagner et empocher un euro. Mais la somme à miser pour arriver à cela croît géométriquement avec le nombre de parties jouées.

(3) On suppose maintenant que le joueur dispose d'une fortune initiale de $2^M - 1$ euros (pour un $M \in \mathbb{N}$) et qu'il arrête de jouer s'il gagne ou s'il n'a plus d'argent. On note T' le moment où le joueur s'arrête.

(a) Exprimer T' en fonction de T et de M. Le temps T' est-il un temps d'arrêt par rapport à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$? à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^G\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

Pour jouer M parties en suivant la stratégie présentée dans l'énoncé, il faut miser exactement $2^M - 1$ euros. Ainsi, l'instant T' vérifie $T' = \min(T, M)$. La variable T est un temps d'arrêt pour les deux filtrations, la constante M également d'après l'exercice 5. Ainsi, d'après l'exercice 7, T' est également un temps d'arrêt pour ces deux filtrations.

(b) Calculer $\mathbb{E}[G_{T'}]$. Commenter.

Remarquons que si $T > M$, alors le joueur a perdu toutes ces parties et, dans ce cas, $G_M = -(2^M - 1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G_{T'}] &= \mathbb{E}\left[G_T \mathbf{1}_{T\le M}\right] + \mathbb{E}[G_M \mathbf{1}_{T>M}] \\ &= 1\cdot \mathbb{P}(T \le M) - (2^M - 1)\mathbb{P}(T > M)\end{aligned}$$

La v.a. T étant géométrique, $\mathbb{P}(T > M) = (1-p)^M$ et $\mathbb{E}[G_{T'}] = 1 - (2(1-p))^M$. On se rappelle que $p < 1/2$, soit $2(1-p) > 1$. Ainsi, le gain moyen est toujours négatif et tend géométriquement vers $-\infty$ lorsque M tend vers ∞. La stratégie proposée dans l'énoncé s'avère donc inefficace pour s'enrichir en jouant au casino.

2. Espérance conditionnelle

Exercice 12.

(1) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=2\}}$. Calculer $\mathbb{E}[X|Z]$ et $\mathbb{E}[Y|Z]$. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

La v.a. X est discrète à valeurs dans $\{0,1\}$ donc dans $\mathbb{L}^1$. L'espérance conditionnelle est ainsi bien définie et

$$\mathbb{E}[X|Z] = \mathbb{E}[X|Z=0]\,\mathbf{1}_{Z=0} + \mathbb{E}[X|Z=1]\,\mathbf{1}_{Z=1}$$

Remarquons que $Z = 1$ implique $X = 1$ donc $\mathbb{E}[X|Z=1] = 1$.
Par ailleurs, comme $\{Z=0\} = \{X=0 \text{ ou } Y=0\}$,

$$\mathbb{E}[X|Z=0] = 0\cdot\mathbb{P}(X=0|Z=0) + 1\cdot\mathbb{P}(X=1|Z=0) = \frac{\mathbb{P}(X=1, Z=0)}{\mathbb{P}(Z=0)} = \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=0)}{\mathbb{P}(X=0 \text{ ou } Y=0)}$$

Par indépendance de X et de Y,

$$\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=0) = p(1-p)$$

et

$$\mathbb{P}(X=0 \text{ ou } Y=0) = 1 - \mathbb{P}(X=1, Y=1) = 1 - p^2.$$

Ainsi, $\mathbb{E}[X|Z=0] = p/(1+p)$ et

$$\mathbb{E}[X|Z] = \frac{p}{1+p}\mathbf{1}_{Z=0} + \mathbf{1}_{Z=1} = \frac{p+Z}{p+1}.$$

Les v.a. X et Y jouant un rôle symétrique dans l'énoncé, on a également

$$\mathbb{E}[Y|Z] = \frac{p+Z}{p+1}.$$

Les deux v.a. $\mathbb{E}[X|Z]$ et $\mathbb{E}[Y|Z]$ étant p.s. égales et non constantes, elles ne sont pas indépendantes bien que les v.a. X et Y d'origine le soient.

(2) On considère deux v.a. X et Y indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}[X|X+Y]$ après avoir justifier l'existence de cette v.a.

La variable X est dans $\mathbb{L}^1$ donc l'espérance conditionnelle est bien définie. Posons $Z = X + Y$. Comme le couple (X, Z) admet une densité, $\mathbb{E}[X|Z]$ vérifie :

$$\mathbb{E}[X|Z] = \int_{\mathbb{R}} x \frac{p_{(X,Z)}(x,Z)}{p_Z(Z)}\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi, il nous suffit de calculer le rapport $\frac{p_{(X,Z)}(x,Z)}{p_Z(Z)}$. On a vu dans l'exercice 21 de la feuille de TD 2 que Z suit la loi $\Gamma(2, 1/\lambda)$ de densité p_Z définie par

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad p_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(z).$$

Il nous reste à obtenir la loi jointe du couple (X, Z). On va utiliser la méthode de la fonction muette. Soit f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors,

$$\mathbb{E}[\,f(X,Z)\,] = \mathbb{E}[\,f(X, X+Y)\,] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(f(x, x+y)\lambda^2 e^{-\lambda x - \lambda y} \mathbf{1}_{x\geq 0, y\geq 0}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

En effectuant le changement de variable $z = y + x$ dans l'intégrale par rapport à la variable y, on obtient :

$$\mathbb{E}[\,f(X,Z)\,] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(f(x,z)\lambda^2 e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{0\leq x\leq z}\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x.$$

Ainsi, la densité jointe vaut :

$$\forall (x,z) \in \mathbb{R}^2, p_{(X,Z)}(x,z) = \lambda^2 e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{0\leq x\leq z}.$$

(On peut alors facilement retrouver la densité de Z en intégrant cette fonction sur $\mathbb{R}$ en la variable x.) Comme $\mathbb{P}(\,Z \geq 0\,) = 1$, on a $p_Z(Z) = \lambda^2 e^{-\lambda Z} Z$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{p_{(X,Z)}(x,Z)}{p_Z(Z)} = \frac{1}{Z}\mathbf{1}_{0\leq x\leq Z}.$$

Ainsi, étant donnée Z, X se comporte comme une variable uniforme sur $[0, Z]$ (cela n'a pas un sens rigoureux car Z est aléatoire) et donc

$$\mathbb{E}[\,X|X+Y\,] = \int_{\mathbb{R}} x \frac{p_{(X,Z)}(x,Z)}{p_Z(Z)}\, \mathrm{d}x = \frac{Z}{2} = \frac{X+Y}{2}.$$

Exercice 13.
Soient X, Y, Z des variables aléatoires réelles telles que les couples (X, Z) et (Y, Z) aient la même loi. Montrer que pour toute fonction f telle que $f(X) \in \mathbb{L}^1$, $\mathbb{E}[\,f(X)|Z\,] = \mathbb{E}[\,f(Y)|Z\,]$, $\mathbb{P}$-p.s.

Il suffit de montrer que $\mathbb{E}[\,f(X)|Z\,]$ vérifie les trois points définissant $\mathbb{E}[\,f(Y)|Z\,]$. Par définition de l'espérance conditionnelle, on sait déjà que $\mathbb{E}[\,f(X)|Z\,]$ est une variable $\mathbb{L}^1$, $\sigma(Z)$-mesurable. De plus, pour $\{\,Z \in A\,\} \in \sigma(Z)$, toujours par définition de l'espérance conditionnelle,

$$\mathbb{E}\left[\,\mathbb{E}[\,f(X)|Z\,]\,\mathbf{1}_{\{\,Z\in A\,\}}\,\right] = \mathbb{E}\left[\,f(X)\mathbf{1}_{\{\,Z\in A\,\}}\,\right] = \mathbb{E}\left[\,f(Y)\mathbf{1}_{\{\,Z\in A\,\}}\,\right].$$

La seconde égalité provenant de l'égalité en loi des couples (X, Z) et (Y, Z). Comme $\mathbb{E}[\,f(Y)|Z\,]$ est la v.a. (unique p.s.) $\mathbb{L}^1$, $\sigma(Z)$-mesurable vérifiant l'égalité précédente, on a bien égalité p.s. : $\mathbb{E}[\,f(X)|Z\,] = \mathbb{E}[\,f(Y)|Z\,]$.

*** Exercice 14.** Soit X, Y, Z trois variables aléatoires telles que le couple (X, Y) est indépendant de Z. On suppose que $X \in \mathbb{L}^1$, montrer $\mathbb{E}[\,X|Y, Z\,] = \mathbb{E}[\,X|Y\,]$.

Montrons que $\mathbb{E}[\,X|Y\,]$ vérifie les points de la définition de $\mathbb{E}[\,X|Y, Z\,]$.

- La variable $\mathbb{E}[\,X|Y\,]$ est $\sigma(Y)$-mesurable par définition de l'espérance conditionnelle, il existe donc une fonction (borélienne) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\phi(Y) = \mathbb{E}[\,X|Y\,] =\in \mathbb{L}^1$. De plus, comme $\sigma(Y) \subset \sigma(Y, Z)$, $\mathbb{E}[\,X|Y\,]$ est également $\sigma(Y, Z)$-mesurable.
- Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Alors, par indépendance de Y et de Z, et, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\,\mathbf{1}_{(Y,Z)\in A}\mathbb{E}[\,X|Y\,]\,\right] = \mathbb{E}\left[\,\mathbf{1}_{(Y,Z)\in A}\phi(Y)\,\right] &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{(y,z)\in A}\phi(y)\mathbb{P}_{(Y,Z)}\,(\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(y,z)\in A}\phi(y)\mathbb{P}_Y\,(\,\mathrm{d}y\,) \right) \mathbb{P}_Z\,(\,\mathrm{d}z\,) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{E}\left[\,\mathbf{1}_{(Y,z)\in A}\phi(Y)\,\right] \right) \mathbb{P}_Z\,(\,\mathrm{d}z\,) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{E}\left[\,\mathbf{1}_{(Y,z)\in A}\mathbb{E}[\,X|Y\,]\,\right] \right) \mathbb{P}_Z\,(\,\mathrm{d}z\,)
\end{aligned}$$

  Considérons, pour tout réel z, l'ensemble $A_z = \{\,y \in \mathbb{R},\ (y, z) \in A\,\}$. Cet ensemble est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et, par définition de l'espérance conditionnelle, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\,\mathbf{1}_{(Y,z)\in A}\mathbb{E}[\,X|Y\,]\,\right] = \mathbb{E}[\,\mathbf{1}_{Y\in A_z}\mathbb{E}[\,X|Y\,]\,] = \mathbb{E}[\,\mathbf{1}_{Y\in A_z}X\,] = \mathbb{E}\left[\,\mathbf{1}_{(Y,z)\in A}X\,\right].$$

  En utilisant maintenant l'indépendance de (X, Y) et de Z, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\,\mathbf{1}_{(Y,Z)\in A}\mathbb{E}[\,X|Y\,]\,\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\,\mathbf{1}_{(Y,z)\in A}X\,\right]\mathbb{P}_Z\,(\,\mathrm{d}z\,) = \mathbb{E}\left[\,\mathbf{1}_{(Y,Z)\in A}X\,\right].$$

  Cela montre bien que $\mathbb{E}[\,X|Y\,] = \mathbb{E}[\,X|Y, Z\,]$ p.s.

Attention, le résultat est faux si la variable Z est uniquement indépendante de X ou de Y mais pas du couple.

Exercice 15.
Une usine produit n lampes. Chaque lampe est défectueuse avec probabilité p. On teste chaque lampe pour détecter un éventuel défaut et on suppose que la probabilité de détecter le défaut quand il est présent est δ (et 0 quand il n'est pas présent). Soit pour $i \in \{1,\dots,n\}$, $X_i = 1$ (resp. $Y_i = 1$) si lampe i est défectueuse (resp. si le test déclare la lampe défectueuse). On suppose que les couples (X_i, Y_i) sont indépendants entre eux et on note X le nombre d'ampoules défectueuses et Y le nombre d'ampoules détectées comme défectueuses.

(1) Donner la loi de X.

D'après l'énoncé, les X_i sont des vaiid de loi $\mathcal{B}(p)$ et $X = \sum_{i=1}^n X_i$. La variable X suit donc la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

(2) Pour $i \in \{1,\dots,n\}$ et $a, b \in \{0,1\}$, donner les valeurs de $\mathbb{P}(Y_i = b|X_i = a)$ et en déduire les valeurs de $\mathbb{P}(X_i = a|Y_i = b)$.

D'après l'énoncé, pour $i \in \{1,\dots,n\}$,

$$\mathbb{P}(Y_i = 0|X_i = 0) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_i = 1|X_i = 0) = 0,$$
$$\mathbb{P}(Y_i = 0|X_i = 1) = 1-\delta \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_i = 1|X_i = 1) = \delta.$$

Comme

$$\mathbb{P}(X_i = a|Y_i = b) = \frac{\mathbb{P}(Y_i = b|X_i = a)\,\mathbb{P}(X_i = a)}{\mathbb{P}(Y_i = b|X_i = 0)\,\mathbb{P}(X_i = 0) + \mathbb{P}(Y_i = b|X_i = 1)\,\mathbb{P}(X_i = 1)},$$

on obtient

$$\mathbb{P}(X_i = 0|Y_i = 0) = \frac{1-p}{1-\delta p} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i = 1|Y_i = 0) = \frac{(1-\delta)p}{1-\delta p},$$
$$\mathbb{P}(X_i = 0|Y_i = 1) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i = 1|Y_i = 1) = 1.$$

(3) Exprimer la variable aléatoire $\mathbb{E}[X_i|Y_i]$ comme une fonction explicite de Y_i.

Les v.a. Y_i étant discrètes à valeurs dans $\{0,1\}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_i|Y_i] &= \mathbb{E}[X_i|Y_i = 1]\,\mathbf{1}_{Y_i=1} + \mathbb{E}[X_i|Y_i = 0]\,\mathbf{1}_{Y_i=0} = \mathbf{1}_{Y_i=1} + \frac{(1-\delta)p}{1-\delta p}\mathbf{1}_{Y_i=0}\\ &= Y_i + \frac{(1-\delta)p}{1-\delta p}(1-Y_i) = \frac{(1-\delta)p}{1-\delta p} + \frac{1-p}{1-\delta p}Y_i\end{aligned}$$

(4) Expliquer pourquoi pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\mathbb{E}[X_i|Y_1,\dots,Y_n] = \mathbb{E}[X_i|Y_i]$.

D'après l'exercice 14, comme le couple (X_i, Y_i) est indépendant des $(Y_j, j \neq i)$, on a bien pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\mathbb{E}[X_i|Y_1,\dots,Y_n] = \mathbb{E}[X_i|Y_i]$.

(5) En déduire la variable aléatoire $\mathbb{E}[X|Y_1,\dots,Y_n]$ puis $\mathbb{E}[X|Y]$.

Par linéarité et en utilisant les résultats des questions précédentes,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y_1,\dots,Y_n] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i|Y_1,\dots,Y_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i|Y_i]\\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(1-\delta)p}{1-\delta p} + \frac{1-p}{1-\delta p}Y_i = \frac{n(1-\delta)p}{1-\delta p} + \frac{1-p}{1-\delta p}Y.\end{aligned}$$

On remarque alors que $\mathbb{E}[X|Y_1,\dots,Y_n]$ est en fait $\sigma(Y)$-mesurable. Ainsi, comme $\sigma(Y) \subset \sigma(Y_1,\dots,Y_n)$, $\mathbb{E}[X|Y_1,\dots,Y_n]$ vérifie les différents points de la définition de $\mathbb{E}[X|Y]$ et :

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|Y_1,\dots,Y_n] = \frac{n(1-\delta)p}{1-\delta p} + \frac{1-p}{1-\delta p}Y.$$

(6) Supposons que $n = 1000$, $p = 0,01$, $\delta = 0,9$. On détecte 54 ampoules défectueuses via le test. À combien d'ampoules réellement défectueuses doit-on s'attendre en moyenne ?

D'après les données, on a

$$\mathbb{E}[X|Y] = \frac{1000(1-0.9)\cdot 0.01}{1-0.9\cdot 0.01} + \frac{1-0.01}{1-0.9\cdot 0.01}Y = \frac{1000}{991} + \frac{990}{991}Y$$

Lorsque la réalisation de Y vaut 54, on obtient donc une moyenne d'environ 55 ampoules défectueuses.

Exercice 16. *Somme de v.a. indépendantes.*
Soient X_1, ..., X_n une suite de v.a.i.i.d intégrables. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(1) Calculer $\mathbb{E}[S_n|X_i]$ et $\mathbb{E}[X_i|S_n]$ pour $1 \leq i \leq n$.

Remarquons tout d'abord que comme $\mathbb{L}^1$ est un e.v., $S_n \in \mathbb{L}^1$ et $\mathbb{E}[S_n|X_i]$ est bien définie. Par linéarité de l'espérance conditionnelle, $\mathbb{E}[S_n|X_i] = \sum_j \mathbb{E}[X_j|X_i]$. Comme les v.a. X_j sont indépendantes et de même loi, pour tout $j \neq i$, $\mathbb{E}[X_j|X_i] = \mathbb{E}[X_j] = \mathbb{E}[X_1]$, de plus, $\mathbb{E}[X_i|X_i] = X_i$ car X_i est évidemment $\sigma(X_i)$-mesurbale. Donc, $\mathbb{E}[S_n|X_i] = (n-1)\mathbb{E}[X_1] + X_i$.
Pour le second point, en utilisant une fois de plus la linéarité, on remarque que $\sum_i \mathbb{E}[X_i|S_n] = \mathbb{E}[S_n|S_n] = S_n$. De plus, d'après l'exercice 13, pour tout $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $\mathbb{E}[X_i|S_n] = \mathbb{E}[X_j|S_n]$. Donc pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\mathbb{E}[X_i|S_n] = S_n/n$.

(2) Calculer pour $n \geq 1$:

(a) $\mathbb{E}\left[S_{n+1}|\mathcal{F}_n^X\right]$.

On décompose S_{n+1} en une quantité mesurable par rapport à $\sigma(X_1,\dots,X_n)$ et une quantité indépendante de cette tribu :
$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_{n+1}|\mathcal{F}_n^X\right] &= \mathbb{E}\left[S_n|\mathcal{F}_n^X\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X\right]\\ &= S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n + \mathbb{E}[X_1].\end{aligned}$$

(b) $\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n^X\right]$ avec l'hypothèse $X_1 \in \mathbb{L}^2$.

Remarquons que comme $\mathbb{L}^2$ est un e.v., $S_n \in \mathbb{L}^2$ et $\mathbb{E}\left[S_n^2|\mathcal{F}_n^X\right]$ est bien définie. On utilise la même décomposition qu'à la question précédente :
$$S_{n+1}^2 = (S_n + X_{n+1})^2 = S_n^2 + 2S_nX_{n+1} + X_{n+1}^2.$$
Ainsi,
$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n^X\right] = \mathbb{E}\left[S_n^2|\mathcal{F}_n^X\right] + \mathbb{E}\left[2S_nX_{n+1}|\mathcal{F}_n^X\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n^X\right].$$
On utilise les propriétés des espérances conditionnelles :

- S_n^2 étant mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_n^X$, on a $\mathbb{E}\left[S_n^2|\mathcal{F}_n^X\right] = S_n^2$.
- X_{n+1}^2 étant indépendante de la tribu $\mathcal{F}_n^X$, on a $\mathbb{E}\left[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n^X\right] = \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2\right] = \mathbb{E}\left[X_n^2\right]$.
- $2S_n$ étant mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_n^X$ et X_{n+1} étant indépendante de cette tribu, on a
$$\mathbb{E}\left[2S_nX_{n+1}|\mathcal{F}_n^X\right] = 2S_n\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X\right] = 2S_n\mathbb{E}[X_{n+1}] = 2S_n\mathbb{E}[X_1].$$

En regroupant le tout, on obtient $\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n^X\right] = S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}\left[X_1^2\right]$.

(c) $\mathbb{E}\left[e^{S_{n+1}}|\mathcal{F}_n^X\right]$ avec l'hypothèse $e^{X_1} \in \mathbb{L}^1$.

Remarquons tout d'abord que $e^{S_n} \in \mathbb{L}^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: en effet, les va étant iid, on voit que
$$\mathbb{E}\left[e^{S_n}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n e^{X_k}\right] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left[e^{X_k}\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{X_1}\right]\right)^n < \infty.$$
L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}\left[e^{S_{n+1}}|\mathcal{F}_n^X\right]$ est donc bien définie et en utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle :
$$\mathbb{E}\left[e^{S_{n+1}}|\mathcal{F}_n^X\right] = \mathbb{E}\left[e^{X_{n+1}}e^{S_n}|\mathcal{F}_n^X\right] = e^{S_n}\mathbb{E}\left[e^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n^X\right] = e^{S_n}\mathbb{E}\left[e^{X_1}\right].$$

Exercice 17.
On considère une v.a. N intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a.i.i.d également intégrables et indépendantes de N. On définit alors la variable aléatoire : $S = \sum_{k=1}^N X_k$.

(1) Montrer que $S \in \mathbb{L}^1$ et calculer $\mathbb{E}[S|N]$. *On pourra remarquer que* $S = \sum_{k=1}^\infty X_k \mathbf{1}_{N\geq k}$.

En utilisant l'expression de S donnée dans la question, comme les X_k sont indépendantes de N :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S|] &\leq \mathbb{E}\sum_{k=1}^\infty |X_k|\mathbf{1}_{N\geq k} = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}|X_k|\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{N\geq k}\right]\\ &= \mathbb{E}|X_1|\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(N\geq k) = \mathbb{E}|X_1|\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^\infty \mathbf{1}_{N\geq k}\right]\\ &= \mathbb{E}|X_1|\mathbb{E}[N] < \infty.\end{aligned}$$
Donc, $S \in \mathbb{L}^1$ et $\mathbb{E}[S|N]$ est bien définie. On a alors par le théorème de Fubini conditionnel :
$$\mathbb{E}[S|N] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^\infty X_k\mathbf{1}_{N\geq k}|N\right] = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}[X_k|N]\,\mathbf{1}_{N\geq k} = \mathbb{E}[X_1]\sum_{k=1}^\infty \mathbf{1}_{N\geq k} = \mathbb{E}[X_1]\,N.$$

(2) Dans un casino, une personne décide de jouer sur rouge/noir à la roulette (probabilité $p = 18/37$ de gagner en raison du zéro) en s'imposant la règle suivante : au moment où elle arrivera devant la table de jeu, elle regardera sa montre et jouera autant de fois à la roulette que le nombre de minutes passées depuis la dernière heure pleine. À chaque partie, elle misera 1 euro (elle peut donc soit gagner 1 euro ou perdre 1 euro à chaque partie).
Proposer une modélisation probabiliste de ce jeu et calculer l'espérance de gain du joueur sachant le nombre de parties effectuées.

On peut modéliser les gains à chaque partie par des v.a. X_k iid vérifiant

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1) = p$$

et le nombre de parties effectivement jouées par une v.a. N de loi uniforme sur l'ensemble $\{0, \ldots, 59\}$, indépendante des X_k. Le gain total du joueur s'écrit alors $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$. D'après le résultat de la question précédente, N étant bornée et donc dans $\mathbb{L}^1$, on a $\mathbb{E}[S|N] = \mathbb{E}[X_1]\,N = (2p-1)N$.

Exercice 18.
On considère Y une variable $\mathbb{L}^2$ et $\mathcal{B}$ une tribu. On définit la *variance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{B}$* par

$$\mathbb{V}[Y|\mathcal{B}] = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y|\mathcal{B}])^2|\mathcal{B}\right].$$

(1) Montrer que la variable aléatoire $\mathbb{V}[Y|\mathcal{B}]$ est une variable aléatoire p.s. positive ou nulle vérifiant :

$$\mathbb{V}[Y|\mathcal{B}] = \mathbb{E}\left[Y^2|\mathcal{B}\right] - (\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}])^2.$$

La v.a. Y appartenant à $\mathbb{L}^2$, $\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]$ appartient également à $\mathbb{L}^2$ et la variance conditionnelle est bien définie. Elle est positive p.s. car $(Y - \mathbb{E}[Y|\mathcal{B}])^2 \geq 0$ p.s.. De plus, les propriétés de l'espérance conditionnelle donne

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[Y|\mathcal{B}] &= \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y|\mathcal{B}])^2|\mathcal{B}\right] = \mathbb{E}\left[Y^2|\mathcal{B}\right] - \mathbb{E}[2Y\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]\,|\mathcal{B}] + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]^2\,|\mathcal{B}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[Y^2|\mathcal{B}\right] - 2\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]^2 + \mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]^2 = \mathbb{E}\left[Y^2|\mathcal{B}\right] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]^2.\end{aligned}$$

(2) Montrer que $\mathbb{E}[\mathbb{V}[Y|\mathcal{B}]] = \mathbb{V}[Y] - \mathbb{V}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]]$.

En utilisant la formule démontrée en question (1), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{V}[Y|\mathcal{B}]] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y^2|\mathcal{B}\right]\right] - \mathbb{E}[Y]^2 + \mathbb{E}[Y]^2 - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[Y^2\right] - \mathbb{E}[Y]^2 - \left(\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]^2\right] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]]^2\right) \\ &= \mathbb{V}[Y] - \mathbb{V}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}]].\end{aligned}$$

(3) On suppose dans cette question que $Y = 3X + Z$ où $X \in \mathbb{L}^2$ et Z est une v.a. indépendante de X de loi $\mathcal{B}(1/3)$. Calculer $\mathbb{V}[Y|X]$.

D'après les hypothèses, $Y \in \mathbb{L}^2$. On calcule alors :

$$\mathbb{E}[Y|X] = 3\mathbb{E}[X|X] + \mathbb{E}[Z|X] = 3X + 1/3.$$

Donc,

$$\mathbb{V}[Y|X] = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y|X])^2|X\right] = \mathbb{E}\left[(Z - 1/3)^2|X\right] = \mathbb{V}[Z] = 2/9.$$

Exercice 19.
Un processus ARCH(1)[1] est un processus à temps discret $(X_n)_{n\geq 0}$ très utilisé dans les modélisations de séries temporelles financières (X_n est le prix de l'actif au temps n). Il est défini par une relation de la forme

$$X_n = \varepsilon_n \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2}$$

où $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$ sont deux paramètres fixés et $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées de variance 1 indépendantes de X_0.

(1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}\left[X_n\,|\,\mathcal{F}_{n-1}^X\right] = 0$.

1. pour "AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity"

Pour $n \geq 1$, comme X_{n-1} est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}^X$ et que ϵ_n est indépendante de cette tribu,

$$\mathbb{E}\left[X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^X\right] = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2}\,\mathbb{E}\left[\varepsilon_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^X\right] = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2}\,\mathbb{E}[\varepsilon_n] = 0.$$

(2) On pose pour tout $n \geq 1$, $Y_n^2 = \mathbb{V}\left[X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^X\right]$ (la variance conditionnelle étant définie dans l'exercice 18). Montrer que

$$Y_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2.$$

D'après l'exercice 18, comme $\mathbb{E}\left[X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^X\right] = 0$, pour tout $n \geq 1$,

$$Y_n^2 = \mathbb{E}\left[X_n^2 \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^X\right] = \mathbb{E}\left[\varepsilon_n^2(\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2) \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^X\right] = (\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2)\mathbb{E}\left[\varepsilon_n^2\right].$$

Comme ε_n est une v.a. centrée réduite, $\mathbb{E}\left[\varepsilon_n^2\right] = 1$ et on obtient bien le résultat recherché.

(3) En déduire le comportement de $\mathbb{V}[X_n]$ quand n tend vers l'infini selon les valeurs de α_0 et α_1.

Toujours d'après l'exercice 18, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{V}[X_n] = \mathbb{E}[Y_n] = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}\left[X_{n-1}^2\right].$$

Comme la variable X_{n-1} est de moyenne nulle, en posant $\sigma_n^2 = \mathbb{V}[X_n]$, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{n-1}^2.$$

Ainsi la suite $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Donc,

- si $\alpha_1 = 1$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n^2 = \sigma_0^2 + n\alpha_0$
- si $\alpha_1 \neq 1$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n^2 = \alpha_1^n\left(\sigma_0^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right) + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$. Donc, si $\alpha_1 < 1$, la variance converge vers $\alpha_0/(1-\alpha_1)$ et si $\alpha_1 > 1$ la variance diverge vers $+\infty$.

(4) Expliquer pourquoi ce modèle est intéressant en finance pour modéliser le comportement de la volatilité dans les marchés financiers.

Un des intérêts de ce modèle est que, contrairement à d'autres modèles très basiques, la variance conditionnelle n'est pas constante et dépend de la valeur de l'actif à l'instant précédent, le modèle restant de plus assez simple pour être bien compris mathématiquement.

*** Exercice 20.** On considère X un vecteur aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, U une v.a. indépendante de $\mathcal{B}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et f une fonction borélienne $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ satisfaisant $f(X, U) \in \mathbb{L}^1$. On va montrer que

$$\mathbb{E}[f(X,U)|\mathcal{B}] = \int_{\mathbb{R}^d} f(X,u)\mathbb{P}_U(\mathrm{d}u).$$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,u)\mathbb{P}_U(\mathrm{d}u).$$

(1) Montrer que $g(X)$ est une v.a. $\sigma(X)$-mesurable et dans $\mathbb{L}^1$.

(2) Soit $B \in \mathcal{B}$. Montrer que $\mathbb{E}[g(X)\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[f(X,U)\mathbf{1}_B]$. *On pourra remarquer que, par indépendance de $\mathcal{B}$ et de $\sigma(U)$, on a* $\mathbb{P}_{(U,X,\mathbf{1}_B)} = \mathbb{P}_U \times \mathbb{P}_{(X,\mathbf{1}_B)}$

(3) Conclure.

Exercice 21.
Calculer pour U et Y deux v.a. indépendantes :

(1) $\mathbb{E}[\min(Y,U)|Y]$ si U suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$ et $Y \in \mathbb{L}^1$.

Comme $|\min(Y,U)| \le |Y| + |U| \in \mathbb{L}^1$, si $Y \ge 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\min(Y,U)|Y] &= \int_{\mathbb{R}} \min(Y,u)\mathbb{P}_U(\mathrm{d}u) = \int_0^\infty \min(Y,u)\lambda e^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^Y u\lambda e^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u + Y\int_Y^\infty \lambda e^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Or, par IPP pour la première intégrale et calcul direct pour la seconde, on voit que :

$$\int_0^Y u\lambda e^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = -Ye^{-\lambda Y} + \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda Y}\right) \quad \text{et} \quad Y\int_Y^\infty \lambda e^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = Ye^{-\lambda Y}.$$

Donc si $Y \ge 0$,

$$\mathbb{E}[\min(Y,U)|Y] = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda Y}\right).$$

Et si $Y < 0$, $\mathbb{E}[\min(Y,U)|Y] = Y$. Finalement,

$$\mathbb{E}[\min(Y,U)|Y] = Y\mathbf{1}_{Y<0} + \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda Y}\right)\mathbf{1}_{Y\ge 0}.$$

(2) $\mathbb{E}\left[|Y-U| \,\middle|\, Y\right]$ si U suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et $Y \in \mathbb{L}^1$.

Rappelons que pour tout couple de réels a, b, $|a-b| = a+b-2\min(a,b)$. Donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|Y-U| \,|\, Y\right] &= \mathbb{E}\left[Y \,|\, Y\right] + \mathbb{E}\left[U \,|\, Y\right] - 2\mathbb{E}\left[\min(Y,U) \,|\, Y\right] \\ &= Y + \frac{1}{\lambda} - 2\left(Y\mathbf{1}_{Y<0} + \frac{1}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda Y}\right]\mathbf{1}_{Y\ge 0}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda} - Y\right)\mathbf{1}_{Y<0} + \left(Y + \frac{1}{\lambda}(2e^{-\lambda Y} - 1)\right)\mathbf{1}_{Y\ge 0}.\end{aligned}$$

(3) $\mathbb{E}[\cos(YU)|Y]$ si U suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Comme $|\cos(YU)| \le 1 \in \mathbb{L}^1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\cos(YU)|Y] &= \int_{\mathbb{R}} \cos(Yu)\mathbb{P}_U(\mathrm{d}u) = \sum_{n=0}^\infty \cos(Yn)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \mathrm{Re}(e^{iYn})\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(e^{iY}\lambda)^n}{n!}e^{-\lambda}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{\lambda(e^{iY}-1)}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda(\cos(Y)-1+i\sin(Y))}\right) \\ &= \cos(\lambda\sin Y)e^{\lambda(\cos(Y)-1}\end{aligned}$$