

Prix : 3000FCFA

Réseau Scolaire 77 199 21 68

# FASCICULE RESEAU SCOLAIRE MATHEMATIQUES TERMINALE S2

Page | 1

Ce document touche le Programme au complet

**46 EXERCICES  
46 CORRIGES  
160 PAGES**

Prix : 3000FCFA mais 2500 FCFA pour les partenaires du RS



• EXERCICE 1	Algèbre
• EXERCICE 2	Algèbre
• EXERCICE 3	Algèbre
• EXERCICE 4	Algèbre
• EXERCICE 5	Equation dans C écriture complexe similitude
• EXERCICE 6	Nombres complexes, équations différentielles et jeu de dé
• EXERCICE 7	Algèbre
• EXERCICE 8	Nombres complexes, transformations et suites
• EXERCICE 9	Similitude directe
• EXERCICE 10	Nombres complexes et similitudes (04 pts)
• EXERCICE 11	Équations dans C et similitude (4 pts)
• EXERCICE 12	Équations du second degrés dans C(04pts)
• EXERCICE 13	Équations dans C(04 pts)
• EXERCICE 14	Etude d'une fonction composée
• EXERCICE 15	Analyse Fonctions numériques
• EXERCICE 16	Fonctions numériques
• EXERCICE 17	Fonctions numériques
• EXERCICE 18	Fonctions numériques
• EXERCICE 19	Etude de fonction et calcul d'aire
• EXERCICE 20	Etude de fonction et bijection
• EXERCICE 21	Etude de fonction et calcul d'aire
• EXERCICE 22	Intersection d'une droite et d'une courbe (12 pts)
• EXERCICE 23	Nombres complexes et suites numériques
• EXERCICE 24	Problème Synthèse
• EXERCICE 25	Problème Synthèse
• EXERCICE 26	Problème Synthèse
• EXERCICE 27	Problème Synthèse
• EXERCICE 28	Fonction et suites numériques
• EXERCICE 29	Probabilité
• EXERCICE 30	Probabilité
• EXERCICE 31	Probabilité
• EXERCICE 32	Probabilités et suite numériques
• EXERCICE 33	probabilité élémentaire-variable aléatoire
• EXERCICE 34	Variante aléatoire Probabilité
• EXERCICE 35	Probabilités conditionnelles-variables aléatoires
• EXERCICE 36	Variante aléatoire
• EXERCICE 37	Maladie du Sida Probabilité
• EXERCICE 38	Epreuves de Bernoulli (04 pts) Probabilité
• EXERCICE 39	Variante aléatoire (05 pts)
• EXERCICE 40	Variante aléatoire (04 pts)
• EXERCICE 41	Statistiques
• EXERCICE 42	Statistiques à deux variables
• EXERCICE 43	Statistiques à deux variables
• EXERCICE 44	Nuage de points
• EXERCICE 45	Corrélation et droites de régression (3 pts)
• EXERCICE 46	Statistiques
<b>EXERCICE 1</b>	<b>Algèbre</b>

**1.** On considère l'équation (E) :  $z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = 0$ , où z est un nombre complexe.

**a.** Déterminer la solution réelle de (E). 0, 5 pt

**b.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation (E). 0, 5 pt

**2.** On pose  $a = 3$ ,  $b = 5 - 2i$  et  $c = 5 + 2i$ .

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c. Soit M le point d'affixe z distinct de A et de B.

$$\frac{b-a}{c-a}$$

**a.** Calculer  $\frac{b-a}{c-a}$ . En déduire la nature du triangle ABC. 0, 5 + 0, 5 pt

$$Z = \frac{z-3}{z-5+2i}$$

**b.** On pose

$$\frac{-\pi}{2}$$

**a.** Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre I et d'angle  $\frac{-\pi}{2}$ . 0, 5 pt

**b.** Déterminer l'image  $(C')$  de  $(C)$  par r. Construire  $(C')$ . 0, 5 pt

**EXERCICE 2****Algèbre****A) Questions de cours**

**1)** Rappeler les formes algébrique, exponentielle et trigonométrique d'un nombre complexe z non nul. (0,75 point)

**2)** Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre  $K(z_0)$ , d' angle ?. (0,5 point)

**B)** On donne  $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$ .

**1)** Donner une écriture trigonométrique de  $z_0$ . (0,5 point)

**2)** Montrer que :  $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ . (0,25 point)

**3)** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 = 1$  (0,5 point)

- 4)** En déduire les solutions de :  $(E) : z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$  sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique. (01 point)

$$\text{On peut remarquer que (E) équivaut à : } \left( \frac{z}{1 - i\sqrt{3}} \right)^4 = 1$$

- 5)** Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique 2 cm, placer les points A, B, C et D d'affixes respectives  $z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ,  $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_C = \sqrt{3} + i$  et  $z_D = \sqrt{3} - i$ . (0,75 point)

- 6)** Donner une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  (0,5 point)

- 7)** Vérifier que :  $r(A) = C$  ;  $r(C) = B$  et  $r(B) = D$ . (0,75 point)

- 8)** En déduire que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. (0,5 point)

Equation dans C

Détails

### EXERCICE 3

### Algèbre

Le plan complexe est muni du repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  direct.

- I.** Soit  $z \in \mathbb{C}$  où  $\mathbb{C}$  désigne l'ensemble des nombres complexes.

Posons  $z = x + iy$ ,  $x$  et  $y$  réels.

- 1°)** Sous quelle forme est écrit  $z$ ? Quelle est sa partie réelle ? Quelle est sa partie imaginaire ? (0,25 pt)

- 2°)** Quel est le module de  $z$ ? (0,25 pt)

- 3°)** Soit  $\alpha$  un argument de  $z$  pour  $z \in \mathbb{C}^*$ .

Déterminer le cosinus et le sinus de  $\alpha$  en fonction de  $z$ . (0,5 pt)

- 4°)** Soit  $M(z)$  un point du plan complexe et  $M'(z')$  l'image de  $M$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ .  
Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$  et  $\theta$ . (0,5 pt)

- II.** On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$  d'inconnue  $z$  qui suit.

$$(E) : \frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0.$$

- 1°)** Résoudre l'équation  $(E)$ . (0,5 pt)

**2°)** On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a = 4\sqrt{3}i$  et  $b = 4\sqrt{3} + 4i$ .

Calculer  $OA$ ,  $OB$  et  $AB$ . **(0,75 pt)**

En déduire la nature du triangle  $OAB$ . **(0,5 pt)**

**3°)** On désigne par  $C$  le point d'affixe  $c = \sqrt{3} + i$  et par  $D$  son image par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

Déterminer l'affixe du point  $D$ . **(0,25 pt)**

**4°)** On appelle  $G$  le barycentre des points pondérés  $(0, 1)$ ;  $(D, -1)$  et  $(B, -1)$ .

**a)** Montrer que le point  $G$  a pour affixe  $g = 4\sqrt{3} + 6i$ . **(0,5 pt)**

**b)** Placer les points  $A, B, C$  et  $G$  sur une figure (unité graphique : 1 cm). **(1 pt)**

**5°)** Déterminer une mesure en radians de l'angle  $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC})$ . **(0,5 pt)**

En déduire la nature du triangle  $GAC$ . **(0,25 pt)**

racices cubiques-module et argument

Détails

#### EXERCICE 4

#### Algèbre

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  tel que  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ ; l'unité est le centimètre.

**1) a)** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 = 1$ . Les solutions seront données sous forme trigonométrique et sous forme algébrique. **(0,75 pt)**

**b)** En remarquant que  $2^3 = 8$ , déduire de 1)a) les solutions de l'équation  $z^3 = 8$ . **(0,75 pt)**

**2)** On donne les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $-1 + i\sqrt{3}$ ,  $2$  et  $-1 - i\sqrt{3}$ .

**a)** Placer ces points dans le repère. **(0,75 pt)**

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$$

**b)** Calculer le module et un argument de  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ . **(0,5 pt)**

**c)** En déduire la nature du triangle  $ABC$ . **(0,25 pt)**

**3)** On considère  $f$ , la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :  $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$ .

**a)** Déterminer la nature de  $f$  puis donner ses éléments géométriques caractéristiques. **(0,5 pt)**

**b)** Déterminer les affixes des points  $A'$  et  $C'$  images respectives des points  $A$  et  $C$  par  $f$ . **(0,5 pt)**

**c)** En déduire l'image de la droite  $(AC)$  par  $f$ . **(0,5 pt)**

### EXERCICE 5      Equation dans C écriture complexe similitude

**1)** On considère l'équation (E) :  $z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0$

**a)** Déterminer la solution imaginaire pure  $z_0$  de (E) **(1 point)**

**b)** Achever la résolution de (E) (on appellera  $Z_1$  la solution dont la partie imaginaire est positive et  $Z_2$  la troisième solution). **(0,5 point)**

**2)** Le plan complexe  $P$  est rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  
On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $3i$ ,  $3 + 3i$  et  $3 - 2i$ .

**a)** Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans le repère. **(0,5 point)**

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$$

**b)** Calculer  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ . En déduire la nature de  $ABC$ . **(0,5 point)**

**3)** Soit  $f$  la similitude directe qui laisse invariant le point  $B$  et qui transforme  $A$  en  $C$ .

**a)** Donner une écriture complexe de  $f$ . **(0,5 point)**

**b)** Donner les éléments géométriques caractéristiques de  $f$ . **(0,5 point)**

### EXERCICE 6 Nombres complexes, équations différentielles et jeu de dé

**1) a)** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E):  $z^2 - 2z + 2 = 0$

On désigne par  $z_1$  la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive et par  $z_2$  l'autre solution de (E).

**b)** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm, on considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_1$ ,  $z_2$  et  $\sqrt{3} + 1$ . Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

Démontrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral.

**2)** Résoudre l'équation différentielle :  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

**3)** On considère l'équation différentielle (1) :  $ay'' - by' + cy = 0$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  désignent trois paramètres, éléments de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Pour déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on lance trois fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note à chaque fois le chiffre marqué sur la face supérieure du dé.

Le premier numéro sorti donne la valeur de a, le deuxième donne la valeur de b et le troisième, celle de c.

**a)** Justifier que l'équation différentielle :  $ay'' - by' + c = 0$ . a pour solutions les fonctions de la forme  $x \rightarrow (A \cos x + B \sin x)e^x$ , où A et B sont des réels si et seulement si  $1+i$  est solution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation du second degré en  $z$ ,  $az^2 - bz + c = 0$ .

**b)** Calculer la probabilité de l'événement : les solutions de (1) sont les fonctions de la forme  $x \rightarrow (A \cos x + B \sin x)e^x$ , A et B étant des constantes réelles.

### EXERCICE 7

### Algèbre

**1)** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :  $z^3 = 1$

**2) a)** Développer  $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$

**b)** Soit l'équation E:  $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$

$$u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

En posant  $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$ , déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équations E.

**3)** En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$

### EXERCICE 8 Nombres complexes, transformations et suites

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique de premier terme  $U_0 = 4$  de raison  $\frac{1}{2}$

Soit  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite arithmétique de premier terme  $V_0 = \frac{\pi}{4}$  et de raison  $\frac{\pi}{2}$ .

Pour tout entier naturel n, on note  $z_n$  le nombre complexe de module  $U_n$  et dont un argument est  $V_n$ .

**1) a)** Exprimer  $U_n$  et  $V_n$  en fonction de n.

**b)** En déduire  $z_n$ .

**2)** Démontrer que  $(z_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}i$  et de premier terme  $z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$

**3)** Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormal directe  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  et  $M_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

**a)** Déterminer la nature de la transformation F qui au point  $M_n$  associe le point  $M_{n+1}$  d'affixe  $z_{n+1}$ .

b) Donner ses éléments caractéristiques.

4) pour tout entier naturel  $n$  on pose  $Z_n = z_0 z_1 z_2 \dots z_n$ .

a) Exprimer en fonction de  $n$  un argument de  $Z_n$ .

b) Démontrer que si  $n$  est impair alors  $Z_n$  est réel.

**EXERCICE 9****Similitude directe**

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère l'équation:

$$(E) : Z^3 + (1 - 8i)Z^2 - (23 + 4i)Z - 3 + 24i = 0$$

1) a) Montrer que  $(E)$  admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

b) Montrer que  $1 + 2i$  et  $-2 + 3i$  sont solutions de  $(E)$ .

c) Donner l'ensemble des solutions de  $(E)$ .

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $1 + 2i, 3i, -2 + 3i$ .

Soit  $G$  le barycentre des points  $A, B$  et  $C$  affectés des coefficients respectifs  $2, -2$  et  $1$ .

a) Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}$  et  $\overrightarrow{GC}$  ont pour affixes respectives

$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, 2i$ , et  $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ . et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique; déterminer la raison de cette suite.

b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme  $A$  en  $B$  et  $B$  en  $C$ .

**EXERCICE 10****Nombres complexes et similitudes (04 pts)**

Equations dans  $\mathbb{C}$  et similitude(4 pts - 1999)

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes on considère l'équation

$$(E) : z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i = 0$$

1) a) Vérifier que  $(E)$  admet une solution réelle .

b) Achever la résolution de l'équation  $(E)$

2) Dans le plan complexe on désigne par  $A, B, C$  les points d'affixes respectifs

$$z_A = -1; z_B = -2 + i; z_C = i.$$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$$

a) Déterminer le module et argument de  $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ .

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C.

### EXERCICE 11

### Équations dans C et similitude(4 pts)

A. On considère la fonction:

$$u : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2 - 1}$$

1) déterminer l'ensemble de définition de  $u$ ; calculer  $u(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$

2) Etudier les variations de  $u$ . dresser son tableau de variations (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de  $u$  en 1)

3) Déduire des résultats précédents que:

a)  $\forall x \in [0, 1[, u(x) \geq 0$

b)  $\forall x \in ]1, +\infty[, u(x) < 0$

B) Soit  $g$  la fonction définie par :

$$g : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1$$

1) Déterminer  $Dg$  (le domaine de définition de  $g$ ); puis étudier la limite de  $g$  en 1.

$$2) \text{ vérifier que } \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

$$\text{Montrer que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right) = 1$$

b) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

Interpréter géométriquement ce résultat.

c) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

d) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  unique appartenant à  $]0, 1[$  tel que  $g(\alpha) = 0$

Donner un encadrement d'ordre 1 de  $\alpha$ .

3) Tracer la courbe  $C_g$  de  $g$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité = 2 cm)

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$$

C. Soit la fonction définie par

1) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $[0, 1[$  et que  $f'(x) = g(x), \forall x \in [0, 1[$

2) Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C_g)$ ; l'axe des abscisses; l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = \alpha$ .

**EXERCICE 12****Équations du second degrés dans  $\mathbb{C}$ (04pts)**

Equations du second degré (04pts - 1998)

**1/ Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :**

a)  $z^2 - 2z + 5 = 0$

b)  $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

Page | 10

**2/ On considère dans le plan de orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  les points A,B,C et D d'affixes respectives.**

$$Z_A = 1 + 2i; Z_B = 1 + \sqrt{3} + i; Z_C = 1 + \sqrt{3} - i; Z_D = 1 - 2i;$$

**a) Placer A,B,C et D dans le plan (P)**

$$\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i\sqrt{3}$$

**b) Vérifier que**  $\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i\sqrt{3}$ , en déduire la nature du triangle ABD

**c) Montrer que les points A,B,C et D appartiennent à un même cercle,(C) dont on précisera le centre et le rayon.**

**3/ On considère l'équation (E) :  $z^2 - 2(1 + \cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$**

$\theta$  est un élément de  $\mathbb{R}$

**a) Résoudre (E) dans  $\mathbb{C}$**

**b) Montrer que les points images des solutions de (E) appartiennent à (C)**

**EXERCICE 13****Équations dans  $\mathbb{C}$ (04 pts)**

Equations dans  $\mathbb{C}$  (04 pts - 1997)

**1) a/ Calculer le module et l'argument du nombre complexe :**

$$\varpi = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4}$$

**b/ En déduire ses racines carrées**

**2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante**

$$Z^2 + (\sqrt{3} - 7i)Z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$$

**3) - Soit  $Z_1$ , la solution imaginaire pur et  $Z_2$ , l'autre solution , montre**

$$\frac{Z_2 - 2i}{Z_1 - 2i} = \varpi$$

que

**4)** - Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal  $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , soit A,B,C les points d'affines respectives (2i)  $Z_1, Z_2$ , préciser la nature du triangle (ABC) en utilisant 1) a/.

**EXERCICE 14 Etude d'une fonction composée**

Page | 11

On considère la fonction f définie par  $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$ .

On note C sa courbe représentative dans un repère.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
- 2) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe C.
- 3) Etudier la dérivabilité de f.
- 4) Etudier les variations de f.
- 5) Tracer les asymptotes à C puis la courbe C.
- 6) Vérifier à l'aide de la calculatrice graphique.

**EXERCICE 15****Analyse Fonctions numériques****Partie A**

Soit g la fonction définie par : 
$$g(x) = -2\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

- 1. a.** Déterminer  $D_g$ , puis calculer les limites de g aux bornes de  $D_g$ . 0, 75 pt
- b.** Calculer  $g'(x)$ , étudier son signe et dresser le tableau de variations de g. 1 pt

- 2. a.** Calculer  $g(0)$ . Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet exactement deux solutions dont l'une que l'on désigne  $\alpha \in ]-0,72, -0,71[$ . 0, 25 + 0, 5 pt

- b.** Déterminer le signe de g(x). 0, 5 pt

**Partie B**

Soit f la fonction définie par :

- 1. a.** Montrer que  $Df = \mathbb{R}$  et calculer les limites aux bornes de Df. 0, 75 pt

- b.** Etudier la nature des branches infinies. 0, 5 pt

- 2. a.** Etudier la continuité de f en -1 et en 0. 0, 5 pt

- b.** Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 0 et interpréter graphiquement les résultats. 1 pt

**3. a.** Montrer que pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$  et  $x \neq 0$  on a  $f'(x) = \frac{-xg(x)}{\ln^2(x+1)}$  et calculer  $f'(x)$  sur  $]-\infty, -1[$ . 0, 5 pt

**b.** Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations. 1 pt

**4.** Soit  $h$  la restriction de  $f$  à  $[0, +\infty[$ .

**a.** Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à préciser. 0, 25 pt

**b.** Donner le sens de variation de  $h^{-1}$ . 0, 25 pt

**c.** Construire Cf et  $Ch^{-1}$ . 1, 25 pt

### Partie C

$$m(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)}$$

Soit  $m$  la fonction définie par

**1. a.** Déterminer les fonctions  $u$  et  $v$  telles que pour tout  $x \in ]0, +\infty[, m(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ . 0, 25 pt

**b.** En déduire la fonction  $H$  définie sur  $]0, +\infty[$  telle que  $H'(x) = m(x)$  puis calculer  $\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx$ . 0, 75 pt

### EXERCICE 16

### Fonctions numériques

**A) 1)** En utilisant une intégration par parties, calculer pour tout réel  $a$  :

$$I() = \int_0^a e^t(t+2)dt. \quad (0,5 \text{ pt})$$

En déduire  $I(x)$ . (0,25 pt)

**2)** Soit  $k$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Considérons la fonction  $h$  telle que  $h(x) = k(x)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ .

On se propose de déterminer la fonction  $h$  de façon à ce qu'elle vérifie les conditions suivantes,  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} h'(x) + h(x) = x+2 \\ h(0) = 2 \end{cases}$$

**a)** Vérifier que  $k' = (x+2)e^x$ . (0,5 pt)

**b)** En déduire  $k$  puis  $h$ . (0,25 + 0,25 pt)

**B) I) 1)** Etudier les variations sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = x + 1 + e^{-x}. \quad (01,5 \text{ pt})$$

**2)** En déduire que  $g(x)$  est strictement positif. (0,25 pt)

**II)** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x}).$$

$(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé

$$(O, \vec{i}, \vec{j}).$$

**1)** Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variations. (02,5 pts)

**2)** Pour tout  $x$  strictement positif, on note  $M$ , le point de la courbe de la fonction logarithme népérien d'abscisse  $x$  et  $N$  le point de  $(C_f)$  de même abscisse.

$$\text{a)} \text{ Démontrer que } 0 < MN < \ln\left(\frac{x+2}{x}\right).$$

**b)** Quelle est la limite de  $MN$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . (0,25 pt)

**2) a)** Déterminer l'équation de la droite de régression de  $Y$  en  $X$ . (01 pt)

**3) a)** Démontrer que :  $f(x) = -x + \ln(xe^x + e^x + 1), \forall x \in \mathbb{R}$ . (0,5 pt)

**b)** En déduire que  $(C_f)$  admet une asymptote oblique  $(\Delta)$  au voisinage de  $-\infty$  et déterminer la position de  $(C_f)$  par rapport à  $(\Delta)$  pour  $x < -1$ . (0,25 + 0,25 pt)

**4)** Construire  $(C_f)$  et  $(\Delta)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (01,5 pt)

### EXERCICE 17

### Fonctions numériques

**A)** On considère la fonction  $g$  définie par:  $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

**1)** Calculer  $g(1)$ . (0,25 pt)

**2)** Etudier les variations de  $g$ . (02 pts)

**3)** Déduire de cette étude le signe de  $g(x)$  pour tout  $x$  de l'ensemble de définition de  $D_g$  de la fonction  $g$ . (0,5 pt)

$$\text{B)} \text{ On considère la fonction } f \text{ définie par: } f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$$

**1)** Préciser l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ . (0,25 pt)

**2)** Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations. (02,5 pts)

**3) a)** Montrer que la courbe représentative  $(C_f)$  de  $f$  admet comme asymptote la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = -x + 2$ . (0,25 pt)

**b)** Etudier la position de  $(C_f)$  par rapport à  $(\Delta)$  suivant les valeurs de  $x$ . (0,25 pt)

**4)** Déterminer les coordonnées du point A de  $(C_f)$  où la tangente est parallèle à  $(\Delta)$ . (0,5 pt)

**5)** Représenter dans un repère orthonormal  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 2 cm) la courbe  $(C_f)$  et les droites asymptotes. (1 pt)

### Equation différentielles intégrale

#### EXERCICE 18

#### Fonctions numériques

**1)** Soient les équations différentielles  $(E_0) : y' + y = 0$  et  $(E), y' + y = e^{-x} \cos x$ .

**a)** Trouver les réels  $a$  et  $b$  pour que  $h$  soit solution de  $(E)$ , avec  $h(x) = (a \cos x + b \sin x)e^{-x}$ . (0,5 point)

**b)** Démontrer que  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $f-h$  est solution de  $(E_0)$ . (0,5 point)

**c)** Résoudre  $(E_0)$ . (0,5 point)

**d)** Déduire des questions précédentes la solution générale de  $(E)$ . (0,5 point)

**e)** Déterminer la solution  $g$  de  $(E)$  telle que  $g(0) = 0$ . (0,5 point)

**2)** Soit  $l$  la fonction définie par  $l(x) = e^{-x} \sin x$ .

**a)** Exprimer  $\cos(x + \frac{\pi}{4})$  en fonction de  $\cos x$  et  $\sin x$ .

**b)** Etudier les variations de  $l$  sur  $[0, 2\pi]$ .

$$\text{c)} \text{ Calculer } I = \int_0^{2\pi} l(x) dx$$

#### EXERCICE 19

#### Etude de fonction et calcul d'aire

I. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x(1 + e^{2-x})$ .

On note  $(C)$  sa courbe représentation dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (Unité : 2 cm).

1) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$ .

a) Etudier les variations de  $h$  (on ne déterminera pas de limites aux bornes de  $D_h$ ).

- b) En déduire le signe de  $h(x)$  sur  $\mathbb{R}$
- 2) a) Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- b) Préciser la nature de la branche infinie de  $f$  en  $-\infty$ .
- c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ , puis interpréter le résultat obtenu.
- d) Préciser la position de  $(C)$  par rapport à la droite  $\Delta : y = x$ .
- 3) a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- b) Montrer que  $f$  admet une bijection réciproque notée  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .
- c)  $f^{-1}$  est-elle dérivable en 4 ?
- d) Etudier la position de  $(C)$  par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.
- e) Construire  $(C)$  (On tracera la tangente à  $(C)$  au point d'abscisse 2).
- f) Construire  $(C)$  courbe de  $f^{-1}$  dans le repère précédent.
- II. Soit  $\lambda$  un réel strictement positif.  $R_\lambda$  est la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \lambda$  et les courbes d'équations respectives :  $y = f(x)$  et  $y = x$ .  
Soit  $a(\lambda)$  l'aire de  $R_\lambda$  en  $cm^2$ .
- 1) Calculer  $a(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$ .
- 2) Déterminer  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} a(\lambda)$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

## EXERCICE 20

### Etude de fonction et bijection

#### PARTIE A

Soit  $f$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x)$$

- 1) a) Etudier les variations de  $f$ .

b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 + x] = 0$

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de  $f$ ? Tracer cette courbe (Unité: 2 cm).

- c) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]-\infty, +\infty[$  sur  $]-\infty, 0[$

2) soit  $g$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :  $g(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ .

- a) démontrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

- b) Montrer que quel que soit le réel  $x$ ,  $g'(x) = e^{-x} \cdot f(x)$

c) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$

- d) Etudier les variations de  $g$  et tracer sa courbe représentative dans le repère précédent.

3) a) Montrer que  $\frac{1}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

b) A tout réel  $\lambda$ , on associe le réel  $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} e^{-x} dx$ . Justifier l'existence de  $I(\lambda)$ . Calculer  $I(\lambda)$  à l'aide d'une intégration par parties.

c) Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$ .

#### PARTIE B

1) Montrer que  $g$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  à préciser.

Page | 16

2) a) Calculer  $g(0)$ .

b) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable au point  $\ln 2$ .

c) Déterminer l'équation de la tangente à  $C_{g^{-1}}$  au point d'abscisse  $\ln 2$ .

#### EXERCICE 21

#### Etude de fonction et calcul d'aire

Soit  $f$  la fonction définie par : 
$$f(x) = \frac{(2x - 1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$  et trouver les trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout  $x$  de  $D_f$ , on ait : 
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1}$$
.

2) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .

3) a) Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$ .

c) En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .

4) On appelle  $(C)$  la représentation graphique de la fonction  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  dont l'unité est 2 cm.

Démontrer que les droites d'équations respectives :  $y = 2x - 1$  et  $y = 2x - 2$  sont des asymptotes de  $(C)$  respectivement en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

Préciser l'autre asymptote.

5) Soit  $x$  un réel de  $D_f$ , on considère les deux points  $M$  et  $M'$  de  $(C)$  d'abscisses respectives  $x$  et  $-x$ , déterminer les coordonnées du milieu  $\Omega$  de segment  $[MM']$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $(C)$ ?

6) Tracer la courbe  $(C)$ .

7) a) trouver les réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que, pour tout réel  $x$  de l'ensemble  $D_f$  on fait :

$$f(x) = 2x + \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x - 1}$$

**b)** Soit  $k$  un réel supérieur ou égal à 2. Déterminer l'aire  $A(k)$  en  $cm^2$  de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $(x;y)$  vérifient:

$$\ln 2 \leq x \leq \ln k \text{ et } 2x - 1 \leq y \leq f(x).$$

**c)** Calculer  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k)$

**EXERCICE 22 Intersection d'une droite et d'une courbe (12 pts)**

On considère la fonction  $g$  défini par :

$$\begin{cases} g(x) = x(1 - \ln x)^2 & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Où  $\ln x$  désigne le logarithme népérien de  $x$ , on appelle sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**1. a)** Etudier la continuité et la dérivableté de  $g$  sur son ensemble de définition.

**b)** Etudier les variations de  $g$ .

**c)** Tracer  $(C)$ .

**2. a)** Soit  $\alpha$  un réel appartenant à l'intervalle  $]0, e[$ .

Calculer à l'aide de deux intégrales par parties, l'aire  $A(\alpha)$  du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe  $(C)$  et les droites d'équations respectives :

$$x = \alpha \text{ et } x = e$$

**b)** Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A(\alpha)$

**3. a)** Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la courbe  $(C)$  et la droite  $(\Delta)$  :  $y = x$

**b)** Pour quelles valeurs de  $m$  la droite  $(\Delta_m)$  :  $y = mx$ , recoupe-t-elle la courbe  $C$  en deux points  $M_1$  et  $M_2$  autres que 0 ?

**c)** La droite  $(\Delta_m)$  coupe la droite  $D$  d'équation  $x = e$  en  $P$ . Montrer que.

$$OM_1 \times OM_2 = OP^2$$

**4. a)** Montrer que la restriction  $h$  de la fonction  $g$  à l'intervalle  $[e, +\infty[$  admet une réciproque  $h^{-1}$  dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Sur quel ensemble  $h^{-1}$  est-elle dérivable ?

Calculer  $h(e^2)$ ; en déduire  $(h^{-1})'(e^2)$ .

c) Construire la courbe de  $h^{-1}$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### EXERCICE 23 Nombres complexes et suites numériques

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

$S$  est la similitude plane directe de centre  $O$ , d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .  
Soit  $M$  le point d'affixe  $z$  et  $M'$  le point d'affixe  $z'$  avec  $M' = S(M)$ .

1) Exprimez  $z'$  en fonction de  $z$ . (0,5 pt)

2) On définit la suite des points  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} M_0 \text{ d'affixe } z_0 = 1 + i \\ M_n = S(M_{n-1}) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

$z_n$  est l'affixe de  $M_n$ , pour tout entier naturel  $n$ .

a. Déterminer les affixes des points  $M_1, M_2$  et  $M_3$ . (01,5 pt)

b. Exprimer  $z_n$  en fonction de  $z_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ . (0,5 pt)

$$\left( i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n z_0$$

c. En déduire que . (01 pt)

d. Soit  $a_n = |z_n|$ , montrer que  $a_n$  est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (01 pt)

e. Etudier la convergence de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . (0,5 pt)

### EXERCICE 24 Problème Synthèse

PARTIE A : (03,25 points)

Soit  $g$  la fonction définie dans  $]0, +\infty[$  par : 
$$g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|.$$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition  $D_g$  de  $g$ . (0,5 point)

b) Calculer les limites de  $g$  aux bornes de  $D_g$ . (0,75 point)

(Pour la limite au voisinage de 1, on pourra poser  $h = x - 1$ ).

**2)** Déterminer  $g'$ , la fonction dérivée de  $g$ , et dresser le tableau de variations de  $g$ . (01 point)

**3)** Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $a$  telle que  $4 < a < 5$ . (0,5 point)

**4)** Déduire de l'étude précédente le signe de  $g$  sur  $Dg$ . (0,5 point)

**PARTIE B :** (06,75 points)

On considère la fonction  $f$  définie par : 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln|x-1|}{x}, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**1) a)** Vérifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  et calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. (01 point)

**b)** Préciser les droites asymptotes à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal. (0,5 point)

**2) a)** Etudier la continuité de  $f$  en 0. (0,5 point)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Montrer que : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{0} = \frac{-1}{6}. (0,5 \text{ point})$$

Donner l'interprétation graphique de ces résultats. (0,5 point)

$$\text{3) a) Montrer que } f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} (0,25 \text{ point})$$

**b)** Calculer  $f'(x)$  sur les intervalles où  $f$  est dérivable puis dresser le tableau de variations de  $f$ . (01 point)

**4)** Construire  $C_f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{I}, \vec{J})$ , unité graphique 2 cm. (01,5 point)

On pourra prendre  $\alpha \approx 4,5$ .

On placera les points d'abscisses  $-1 ; 0 ; 2$  et  $5$ .

**5) a)** Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$ , on ait :

$$\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1} (0,25 \text{ point})$$

**b)** En déduire que :

$$\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} = \frac{-12e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} + \frac{6e^{-x}}{1 + e^{-x}} (0,25 \text{ point})$$

c) Calculer l'aire du domaine du plan limité par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = -\ln 2$  et  $x = 0$ . (0,5 point)

### EXERCICE 25 Problème Synthèse

Les résultats de la partie A seront utiles dans la partie B.

Page | 20

#### PARTIE A

1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} = 0$  (0,5 pt)

2) Soit  $k$ :

$$]0; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x(1 - \ln x)$$

$k$  est-elle continue sur  $]0; +\infty[$ ? Justifier la réponse. (0,5 pt)

Soit  $K$ :  $]0; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x$$

Vérifier que  $K$  est une primitive de  $k$ , dans  $]0; +\infty[$ . (0,25 pt)

#### PARTIE B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).

Soit la fonction  $f$  définie par 
$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Déterminer  $D_f$ , le domaine de définition de  $f$ . Puis calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ . (0,75 pt)

1) Etudier la continuité de  $f$  en 0. (0,5 pt)

2) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0. Interpréter géométriquement les résultats. (0,1 pt)

3) Donner les domaines de continuité et de dérivabilité de  $f$ . (02x 0,25 pt)

4) Calculer la dérivée de  $f$  sur son domaine d'existence et étudier son signe. (01 pt)

5) Dresser le tableau de variations de  $f$ . (0,5 pt)

6) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation :  $y = -x - 1$  est une asymptote de la courbe  $C_f$  de  $f$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ . (0,25 pt)

7) Préciser la nature de la branche infinie de  $\cdot(C_f)$ . quand x tend vers  $+\infty$ . (0,25 pt)

8) Représenter graphiquement la courbe  $\cdot(C_f)$ . dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Préciser l'allure de la courbe au point d'abscisse 0 et tracer  $(\Delta)$ . (02 pts)

9) Soit h la restriction de f à  $[\frac{1}{e}; +\infty[$

a) Montrer que h réalise une bijection de  $[\frac{1}{e}; +\infty[$  sur un intervalle J à préciser. (0,5 pt)

b) Représenter graphiquement (Ch-1), la courbe représentative de  $h^{-1}$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , à l'aide de  $\cdot(C_f)$ . (0,5 pt)

10) Soit  $A_1$ . l'aire du domaine du plan délimité par  $x = \frac{1}{e}, x = e$ , la courbe  $\cdot(C_f)$ . et la droite  $\cdot(D)$ . d'équation :  $y = x$ .

a) Calculer  $A_1$  (0,5 pt)

b) En déduire l'aire  $A_2$ . du domaine du plan délimité par les droites

d'équations respectives :  $x = \frac{1}{e}, y = \frac{1}{e}$ , la droite  $(D)$  et la courbe  $(C_{h-1})$ .(0,5 pt)

## **EXERCICE 26      problème Synthèse**

Les parties A et B du problème ne sont pas indépendantes.

### **PARTIE A**

1) Etudier sur IR le signe de  $4e^{2x}5e^x + 1$ . (0,5 pt)

2) Soit  $\phi$  la fonction définie par :  $\phi(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2$ .

a) Déterminer son domaine de définition  $D_\phi$  et calculer ses limites aux bornes de  $D_\phi$ . (0,75 pt)

b) Etudier ses variations et dresser son tableau de variations. (01 pt)

c) En déduire son signe. (0,25 pt)

### **PARTIE B**

Soit f la fonction définie par :

On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

a) Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de  $f$ .(0,5 pt)

Page | 22

b) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$  et étudier les branches infinies de  $(C_f)$ .(01 + 0,5 pt)

c) Etudier la position de  $(C_f)$  par rapport à l'asymptote non parallèle aux axes dans  $]-\infty, 0]$  (0,25 pt)

2) a) Etudier la continuité de  $f$  en 0.(0,25 pt)

b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 et interpréter graphiquement les résultats. (0,25 + 0,25 pt)

3) Déterminer la dérivée de  $f$  et dresser le tableau de variations de  $f$ . (0,5 + 0,5 pt)

4) Construire dans le repère les asymptotes, la courbe  $(C_f)$  et les demi-tangentes. On remarquera que  $f(1) = 0$  et  $f'(1) = 0$ .(02 pts)

5) Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine délimité par  $(C_f)$ , la droite d'équation  $y = x$  et les droites d'équations  $x = -\ln 8$  et  $x = -\ln 4$ . (0,5 pt)

### EXERCICE 27      Problème Synthèse

I. Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ .

1°) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. (0,5pt)

2°) Déterminer la dérivée de  $f$ , étudier son signe et dresser le tableau de variation de  $f$ .(01,5 pt)

3°) Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution et une seule  $\alpha \in R$ .

En déduire que  $3 < \alpha < 4$ .(1 pt)

II. Soit la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{3(\ln|x| - 1)^3}{3\ln^2|x| + 1}$ .

1°) a) Montrer que  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ .(0,5 pt)

b) Démontrer que  $g$  est la composée de la fonction  $f$  et d'une fonction  $h$  à préciser.(0,25 pt)

c) Etudier la parité de  $g$ .(0,25 pt)

d) On note  $D_E = ]0; +\infty[$

Soit  $k$  la restriction de  $g$  à  $D_E$ .

Calculer les limites de  $k$  aux bornes de  $D_E$ . Etudier les branches infinies.(1 pt)

2°) a) En utilisant les questions I) et II 1) b.

Calculer  $k'(x)$  et étudier les variations de  $k$  sur  $D_E$ . (0,5 pt)

Dresser le tableau de variation de  $k$  sur  $D_E$ .(0,5 pt)

**b)** Déterminer le point d'intersection de la courbe de  $k$  avec l'axe des abscisses et préciser le signe de  $k$ .(0,5 pt)

**3°) a)** Montrer que  $k$  réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.(0,5 pt)

**b)** Construire les courbes  $(C_k)$  et  $(C_k^{-1})$ ,  $C_k^{-1}$  étant la courbe représentative de la bijection réciproque  $k^{-1}$  de  $k$  dans un repère orthonormé ; unité graphique : 1 cm.(1 pt)

Tracer la courbe de  $g$  dans le repère précédent.(0,5 pt)

### EXERCICE 28 Fonction et suites numériques

**1.a** - Etudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = 2\ln(x+1)$ . (01,5 point)

Tracer sa courbe représentative  $(C)$  dans le repère orthonormal  $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ , unité: 2 cm. (01 point)

**1.b** - Démontrer que sur  $[2; +\infty[$  la fonction  $l$ , définie par  $l(x) = f(x) - x$ , est bijective et l'équation  $l(x) = 0$  admet une solution unique  $\lambda$ .(01 point)

**2** - On considère la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 2\ln(1 + U_n) \end{cases}$$

**2.a** - Sans faire de calcul, représenter les quatre premiers termes de la suite sur le graphique. (0,5 point)

**2.b** - Démontrer par récurrence que pour tout  $n$ ,  $U_n \geq 2$ . (0,5 point)

**2.c**- Montrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[2; +\infty[$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ (0,5 point)

**2.d**- En déduire que pour tout  $n$ , on a:  $|U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3}|U_n - \lambda|$ , (0,5 point)

que  $|U_{n+1} - \lambda| \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ , et que la suite  $(U_n)$  converge vers  $\lambda$ . (0,5 + 0,25 point)

**2.e** - Déterminer le plus petit entier naturel  $p$  tel que  $|U_p - \lambda| \leq 10^{-2}$ .

Que représente  $U_p$  pour  $\lambda$ .(0,25 + 0,5 point).

### EXERCICE 29 Probabilité

A l'occasion de ses activités culturelles, le FOSCO d'un lycée organise un jeu pour le collectif des professeurs. Une urne contenant 4 boules rouges et une boule jaune indiscernables au toucher est placée dans la cour de l'école. Chaque professeur tire simultanément 2 boules de l'urne.

- Si les deux boules sont de même couleur, il les remet dans l'urne et procède à un second

tirage successif avec remise de 2 autres boules.

- Si les deux boules sont de couleurs distinctes, il les remet toujours dans l'urne, mais dans

ce cas le second tirage de 2 autres boules s'effectue successivement sans remise.

**1. Calculer la probabilité des évènements suivants :**

A : Le professeur tire 2 boules de même couleur au premier tirage. 0, 25 pt

B : Le professeur tire deux boules de couleurs différentes au premier tirage. 0, 25 pt

C : Le professeur tire deux boules de même couleur au second tirage sachant que les boules

tirées au premier tirage sont de même couleur. 0, 5 pt

D : Le professeur tire deux boules de même couleur au second tirage sachant que les boules

tirées au premier tirage sont de couleurs distinctes. 0, 5 pt

E : Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au second tirage sachant que les boules

tirées au premier tirage sont de couleurs distinctes. 0, 5 pt

F : Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au premier et au second tirage. 0,5pt

**2. Pour le second tirage, chaque boule rouge tirée fait gagner au FOSCO 1000 F et chaque boule jaune tirée fait gagner au collectif des professeurs 1000 F.**

Soit X la variable aléatoire à laquelle on associe le gain obtenu par le FOSCO.

a. Déterminer les différentes valeurs prises par X et sa loi de probabilité. 1 pt

b. Déterminer la fonction de répartition de X. 1 pt

**3. Etant donné que le collectif est composé de 50 professeurs qui ont tous joué indépendamment**

et dans les mêmes conditions, déterminer la probabilité des évènements suivants :

G : le FOSCO réalise un gain de 100 000 F. 0, 5 pt

H : le collectif des professeurs réalise un gain de 100 000 F. 0, 5 pt

I : Ni gagnant, ni perdant. 0, 5 pt

**EXERCICE 30 Probabilité**

Le 1), 2) et 3) de cet exercice sont faits chacun de quatre affirmations. Dire pour chacune de ces affirmations si elle est vraie ou fausse.

**1)** L'événement contraire de « A sachant B » est : (0,5 pt)

a) *A* sachant *B* b) *A* sachant *B*

c) *A* sachant *B* d) *A*.

**2)** Soient E et F deux événements indépendants d'un même espace probabilisé, on a :

(0,5 pt)

a)  $p(E/F) = 0$

b)  $p(E \cup F) = p(E) \times p(F) + p(F)$

c)  $p(E \cap F) = 0$

d)  $p(E/F) = 1$ .

**3)** Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où n= 4

et  $p \in ]0, 1[$

a) si  $p = \frac{1}{2}$  alors  $p(X = 2) = 2p(X = 1)$ ,

b) si  $p = \frac{1}{2}$  alors  $p(X = 3) > \frac{1}{4}$

c) si  $p = \frac{1}{2}$  alors  $p(X > 1) = 1$ ,

d) si  $p(x = 1) = 8p(X = 0)$  alors  $p = \frac{2}{3}$  (0,75 pt)

4) Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . A et B sont deux points du plan (P) d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ . Considérons M et M' deux points du plan (P) distincts de A et B.

Notons z et z' les affixes respectives de M et M'.

Interpréter géométriquement les résultats ci-dessous :

a)  $|z - z_A| = 1$  (0,25 pt)

b)  $|z - z_A| = |z - z_B|$ . (0,5 pt)

c)  $|z'| = |z_A - z_B|$  (0,5 point)

d)  $\arg\left(\frac{|z - z_A|}{|z - z_B|}\right) = \arg\left(\frac{|z' - z_A|}{|z' - z_B|[\pi]}\right)$ . (0,5 pt)

### EXERCICE 31 Probabilité

Une boîte contient 8 cubes indiscernables au toucher dont un rouge numéroté 1, trois rouges numérotés 2; deux verts numérotés 1, un vert numéroté 2 et un jaune numéroté 2.

#### A) Question de cours

Rappeler la définition de deux événements indépendants d'un espace probabilisé  $(\Omega, P(\Omega), p)$ . (01 point)

B) Un enfant choisit au hasard et successivement sans remise deux cubes de la boîte.

On admettra que la probabilité de choisir un cube est indépendante de son numéro et de sa couleur.

1) On note : A, l'événement : « Obtenir des cubes de couleurs différentes » ;

B, l'événement : « Obtenir au plus un cube portant le numéro 2 ».

a) Calculer la probabilité de A. (0,25 point)

$\frac{9}{14}$

b) Vérifier que la probabilité de B est égale à  $\frac{9}{14}$  (0,25 point)

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ? (0,25 point)

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cubes rouges tirés par l'enfant.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. (0,75 point)

b) Calculer l'espérance mathématique de X. (0,25 point)

c) Calculer la variance de X. (0,25 point)

C) L'enfant tire cette fois simultanément trois cubes de la boîte.

1) Déterminer la probabilité de l'événement C : « Obtenir au plus un cube portant le numéro 2 ». (0,25 point)

2) L'enfant répète n fois l'expérience, en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant.

On note  $p_n$ , la probabilité de l'événement  $D_n$  « C soit réalisé au moins une fois »

Exprimer  $p_n$  en fonction de n. (0,25 point)

3) Etudier le sens de variation de la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . (0,5 point)

### EXERCICE 32 Probabilités et suite numériques

I. On considère  $\Omega$  l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux événements. Dans le cas d'équiprobabilité rappeler la probabilité des événements suivants :

A, A sachant,  $B, A \cap \bar{B}$  et  $(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$ . (2 pts)

II. Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages.

Ainsi, à partir d'un certain jour, les délestages ont débuté dans la ville à un rythme décrit comme suit :

— le premier jour, la ville est délestée.

— Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est  $\frac{2}{9}$ .

— Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est  $\frac{5}{6}$ .

On désigne par  $D_n$  l'événement : « La ville est délestée le  $n^{ième}$  jour » et  $p_n$  la probabilité de l'événement  $D_n$ ,  $p_n = p(D_n)$

1°) Montrer les égalités suivantes :

$$p(D_1) = 1; p(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}; p(D_{n+1}/\bar{D}_n) = \frac{5}{6}. (0,75 \text{ pt})$$

2°) Exprimer  $p_{n+1}$  en fonction de  $p(D_{n+1} \cap D_n)$  et  $p(D_{n+1} \cap \bar{D}_n)$ . (0,5 pt)

3°) En déduire que, quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$p_{n+1} = -\frac{11}{18}p_n + \frac{5}{6}. (0,25 \text{ pt})$$

4°) On pose  $U_n = 6p_n \frac{90}{29}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Montrer que la suite  $(U_n)$  est géométrique. Préciser sa raison et son 1<sup>er</sup> terme.(0,75 pt)

b) Exprimer  $U_n$  puis  $p_n$  en fonction de n.(1 pt)

c) Un match de football doit se jouer le 20<sup>ème</sup> jour. Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage ?(0,5 pt)

### EXERCICE 33      probabilité élémentaire-variable aléatoire

Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents, mais indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages.

a) Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer 2 chaussures de la même couleur ». (0,5 pt)

b) Calculer la probabilité de l'événement B : « tirer un pied gauche et un pied droit ». (0,5 pt)

c) Montrer que la probabilité de l'événement C : « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est  $\frac{1}{9}$ . (0,25 pt)

2) On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

a) Justifier que X prend les valeurs 2, 3, 4. (0,5 pt)

b) Montrer que la loi de probabilité de X est :  $p(X = 2) = \frac{1}{6}$ ;  $p(X = 3) = \frac{1}{3}$

et  $p(X = 4) = \frac{1}{2}$ . (0,75 pt)

c) Calculer son espérance mathématique et son écart-type. (0,25 + 0,25 pt).

### EXERCICE 34      Variable aléatoire Probabilité

Une urne contient quatre jetons qui portent le nombre 1, deux qui portent le nombre e et six qui portent le nombre  $\frac{1}{e}$

On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note par  $x$  et  $y$  les nombres lus,  
respectivement sur le premier et le deuxième jeton tirés.

A cette expérience, on associe le point  $M$  d'affixe  $z = \ln x + i \ln y$ .

**1)** Le plan étant muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A: "M appartient à l'axe des abscisses" ; (0,5 point)

B : "M appartient à l'axe des ordonnées" ; (0,5 point)

C : "M appartient aux deux axes" ; (0,5 point)

D: "M n'appartient à aucun des axes" ; (0,5 point)

E: "l'angle  $(\overrightarrow{OM}, \vec{i})$  est égal à  $\frac{-\pi}{4}$ " ; (0,5 point)

F : "le point M appartient au cercle trigonométrique". (0,5 point)

**2)** Soit  $X$  la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe la distance  $OM$ .

**a)** Déterminer la loi de probabilité de  $X$ . (01 point)

**b)** Déterminer la fonction de répartition de  $X$ . (01 point).

### **EXERCICE 35 Probabilités conditionnelles-variables aléatoires**

On dispose de trois urnes  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$ .

$U_1$  contient 3 boules vertes et 2 boules rouges ;

$U_2$  contient 4 boules vertes et 5 boules jaunes ;

$U_3$  contient 5 boules jaunes, 4 boules rouges et 1 boule verte.

Description de l'épreuve

L'épreuve consiste à tirer une boule dans  $U_1$ .

Si elle est verte on la met dans  $U_2$  puis on tire une boule dans  $U_2$ .

Si elle est rouge, on la met dans  $U_3$  puis on tire une boule dans  $U_3$

Questions

**A) 1)** Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première tirée est verte. (0,5 point)

Page | 29

**2)** Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première est rouge. (0,5 point)

**3)** En déduire la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage.

**4)** Calculer la probabilité d'avoir une boule jaune au second tirage.

**5)** Calculer la probabilité d'avoir une boule rouge au deuxième tirage. (01 point) (0,5 point) (0,5 point)

**B)** Au cours de cette épreuve si on obtient au deuxième tirage :

- Une boule verte, on gagne 1000 F

- Une boule jaune, on gagne 500 F

- Une boule rouge, on perd 500 F

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque boule obtenue au second tirage, associe un gain défini ci-dessus.

**1)** Déterminer la loi de probabilité de X.

**2)** Calculer l'espérance mathématique de X. (0,5 point)

**C)** Cette épreuve est faite par chacun des 15 élèves d'une classe dans les mêmes conditions et d'une manière indépendante. Les résultats seront donnés au centième près par défaut.

**1)** Calculer la probabilité pour que 8 élèves obtiennent une boule verte au deuxième tirage. (0,5 point)

**2)** Calculer la probabilité pour que seulement les 8 premiers obtiennent une boule verte au deuxième tirage. (0,5 point)

**3)** Calculer la probabilité pour qu'au moins un élève ait une boule verte au second tirage. (0,5 point).

**EXERCICE 36      Variable aléatoire**

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

**1)** Calculer la probabilité de l'événement A:"tirer trois pièces de 500 F".

Page | 30

**2)** Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500F figurant parmi les trois pièces tirées.

**a)** Déterminer la loi de probabilité de X.

**b)** Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

**3)** L'enfant répète cinq fois l'expérience en mettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie.

Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

**EXERCICE 37      Maladie du Sida Probabilité**

Dans un pays donné, la maladie du Sida touche cinq pour mille de sa population. Des études statistiques montrent que la probabilité pour un individu d'avoir un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est  $0,8$  et celle d'avoir un test négatif sachant qu'il n'est pas atteint par la maladie est  $0,9$ .

On note  $T$  l'événement "avoir un test positif à cette maladie"

$M$  l'événement "être malade"

$\overline{M}$  est l'événement contraire de  $M$

On rappelle que pour tous événements  $A$  et  $B$  on a :

(\*)  $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$  et  $P_A(B)$  désigne la probabilité de  $B$  sachant  $A$

**1) a)** Réécrire la relation (\*) pour  $A = T$  et  $B = M$  puis pour

$A = \overline{M}$  et  $B = \overline{T}$ .

**b)** En déduire que  $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) [1 - P_{\overline{M}}(\overline{T})]$

**2)** Calculer la probabilité pour qu'un individu ait un test positif à cette maladie.

**3) a)** Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test positif à cette maladie.

**b)** Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test négatif à cette maladie.

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

**EXERCICE 38 Epreuves de Bernoulli (04 pts) Probabilité**

Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10.

Une partie consiste à tirer successivement et sans remise 2 jetons de l'urne et à noter dans l'ordre les deux nombres inscrits. Tous les tirages sont supposés équiprobables.

**1.** Quelle est la probabilité des évènements

A = "les nombres inscrits sont strictement inférieur à 5"

B = "le premier nombre inscrit est strictement supérieur au double du second".

**2.** Un joueur effectue 7 parties successives, les parties étant supposées indépendantes, quelle est la probabilité pour que à l'issue de la 7<sup>eme</sup> partie l'événement B soit réalisé 2 fois exactement ? au moins une fois ?

**EXERCICE 39 Variable aléatoire (05 pts)**

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6.

Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne , on note  $p_i \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  la probabilité de tirer le jeton numéroté i.

On suppose que les nombres  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  et  $p_6$  sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison  $\frac{1}{30}$

**1-a)** Montrer que  $p_1 = \frac{1}{12}$

**b)** En déduire  $p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$

**2)** On tire trois fois de suite et avec remise un jeton de cette urne, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.

**a)** Déterminer la loi de la probabilité de X.

**b)** Déterminer l'espérance mathématique de X puis son écart-type.

**3)** Un joueur tire simultanément 2 jetons et note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les 2 jetons tirés.

a) Déterminer la loi de probabilité de  $S$ .

b) On gagne à ce jeu lorsque  $S \geq 0$ . Déterminer la probabilité de gagner.

**EXERCICE 40      Variable aléatoire (04 pts)**

Dans un jeu de 32 cartes on a quatre "couleur" : pique, trèfle, carreau et coeur ;

Chaque "couleur" comprend huit cartes dont une carte as.

1) On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes bien battu. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : "Les trois cartes sont des as"

B : "Il y a au moins 2 couleurs" parmi ces 3 cartes.

C : "Il y a pas d'as parmi les 3 cartes".

2) On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu de 32 cartes .Le nombre de coeurs tirés définit une variable aléatoire  $X$ . Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $X$  ; la loi de probabilité de  $X$  et son espérance mathématique.

**EXERCICE 41      Statistiques**

Au Sénégal une entreprise veut vérifier l'efficacité de son service de publicité. Elle a relevé chaque mois durant une période de 6 mois les sommes  $X$  consacrées à la publicité et le chiffre d'affaire constaté  $Y$  ( $X$  et  $Y$  sont en milliards de FCFA).

On donne le tableau ci-dessous :

Rang du mois	1	2	3	4	5	6
X	1,2	0,5	1	1	1,5	1,8
Y	19	49	100	125	148	181

Les résultats seront donnés au centième près.

Le détail des calculs n'est pas indispensable. On précisera les formules utilisées.

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et  $Y$ . (01 pt)

b) Déterminer la somme qu'il faut investir en publicité si l'on désire avoir un chiffre d'affaire de 300 milliards si cette tendance se poursuit. (0,5 pt)

**EXERCICE 42      Statistiques à deux variables**

Le tableau statistique ci-dessous donne le degré de salinité  $Y_i$  du Lac Rose pendant le  $i$ ème mois de pluie, noté  $X_i$ .

$x_i$	0	1	2	3	4
$y_i$	4,26	3,4	2,01	1,16	1;01

Dans ce qui suit il faudra rappeler chaque formule le cas échéant, avant de faire les calculs. On donnera les valeurs approchées par excès des résultats à 10-3 près.

**1) a)** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série ( $X, Y$ ) et interpréter le résultat. (0,5 point = 0,25pt + 1,25pt)

**b)** Quelle est l'équation de la droite de régression de  $Y$  en  $X$ . (0,5 pt = 0,25pt + 0,25pt)

**c)** Cette équation permet-elle d'estimer le degré de salinité du lac au 6ième mois de pluie, le cas échéant ? Justifier la réponse. (0,25pt)

**2)** On pose  $Z = \ln(Y - 1)$ .

**a)** Donner le tableau correspondant à la série ( $X, Z$ ). Les résultats seront arrondis au millième près. (0,5 pt)

**b)** Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série ( $X, Z$ ). (0,5 point = 0,25pt + 1,25pt)

**c)** Donner l'équation de la droite de régression de  $Z$  en  $X$ , puis exprimer  $Y$  en fonction de  $X$ . (0,5 pt = 0,25pt + 0,25pt)

**d)** Utiliser cette équation pour répondre à la question 1/c). (0,25pt)

**EXERCICE 43      statistiques à deux variables**

Une étude sur le nombre d'années d'exercice  $X$ , des ouvriers d'une entreprise et leur salaire

mensuel  $Y$  en milliers de francs, a donné les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous avec des données manquantes désignées par a et b.

$Y \backslash X$	2	6	10	14	18	22
75	a	5	0	0	0	0
125	0	7	1	0	2	0
175	2	0	9	8	15	4
225	0	1	0	3	b	1

**1)** Déterminer a et b pour que la moyenne de la série marginale de  $X$  soit

$\frac{596}{59}$  égale à  $\frac{8450}{59}$  et celle de la série marginale de Y soit  $\frac{8450}{59}$ . (0,25 + 0,25 pt)

2) Dans la suite, on suppose que  $a = 40$  et  $b = 20$ . A chaque valeur  $x_i$  de X on associe la moyenne  $m_i$  de la série conditionnelle :  $Y/X = x_i$ . On obtient ainsi la série double (X, M) définie par le tableau ci-dessous. Les calculs se feront à deux chiffres après la virgule.

X	2	6	10	14	18	22
M	80	113	170	189	199	185

- a) Calculer le coefficient de corrélation de X et M puis interpréter le résultat. (01,75 pt)
- b) Déterminer l'équation de la droite de régression de M en X. (0,5 pt)
- c) Quelle serait le salaire moyen d'un ouvrier de l'entreprise si son ancienneté était 30 ans, si cette tendance se poursuit. (0,25 pt)

#### EXERCICE 44 Nuage de points

Dans cet exercice, le détail des calculs n'est pas exigé. On donnera les formules utilisées pour répondre aux questions. Les résultats seront donnés à 10-1 près.  
Le tableau ci-dessous donne le poids moyen (y) d'un enfant en fonction de son âge (x).

x(années)	a	1	2	4	7	11	12
y(kg)	3,5	6,5	9,5	14	21	32,5	34

- 1) Représenter le nuage de points de cette série statistique dans le plan muni du repère orthogonal.  
(01 point) Unité graphique: en abscisse 1 cm pour 1 année et en ordonnée 1 cm pour 2 kg.
- 2) Déterminer les coordonnées du point moyen G puis placer G.
- 3) a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. b) Interpréter votre résultat.
- 4) Donner une équation de la droite de régression (D) de yen x. Tracer (D).  
(0,5 point) (0,5 point) (0,5 point)  
(0,5 point) (0,5 point)
- 5) a) Déterminer graphiquement, à partir de quel âge le poids sera supérieur à 15 kg. Expliciter votre raisonnement. (0,5 point)

**b)** Retrouver ce résultat par le calcul. (0,5 point)

**EXERCICE 45      Corrélation et droites de régression (3 pts)**

Page | 35

**1)**  $(X, Y)$  est une série statistique double. Soit  $(D_1)$  la droite de régression de  $Y$  en  $X$ .

Soit  $(D_2)$  la droite de régression de  $X$  en  $Y$ . On suppose que :

$$(D_1) : y = a x + b \text{ et } (D_2) : x = a' y + b'.$$

Soit  $r$  le coefficient de corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$ .

Etablir que  $r^2 = aa'$ . {{(01 point)}}

**2)** Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères  $X$  et  $Y$  donnent les résultats suivants :

- la droite de régression de  $Y$  en  $X$  a pour équation :  $2,4x - y = 0$

- la droite de régression de  $X$  en  $Y$  a pour équation :  $3,5y - 9x + 24 = 0$ .

**a)** Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$ , sachant que leur covariance est positive. {{(0,5 point)}}

**b)** Calculer la moyenne de chacun des caractères  $X$  et  $Y$ . {{(0,75 + 0,75 point)}}

**EXERCICE 46      Statistiques**

Les parties A et B sont indépendantes.

A - Une étude du service des transports donne la distance de freinage d'une voiture sur une route en bon état en fonction de sa vitesse.

Vitesse en km/h: X	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance en m: Y	8	12	18	24	32	40	48	58	72

On désigne par  $X$  la vitesse et par  $Y$  la distance de freinage.

**1)** Représenter le nuage de points. On prendra en abscisse 1 cm pour 10 kh/h et en ordonnée 1 cm pour 5 m.

**NB :** On commencera en abscisse les graduations à partir de 40 km/h et en ordonnée les graduations à partir de 8 m.

**2)** Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

**3)** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Avons-nous une bonne corrélation ?

**4) a)** On suppose que cette évolution se poursuit. Un automobiliste roulant à 150 km/h entame un freinage à 85 m d'un obstacle immobile. Percutera-t-il l'obstacle ?

**b)** Quelle devra être sa vitesse maximale au moment du freinage pour ne pas heurter l'obstacle ?

*B* - Une autre étude sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre.

Type de transport : $y$	Particuliers : $y_1$	Transporteurs en commun $y_2$
Cause des accidents : $x$		
Accidents liés à l'excès de vitesse : $x_1$	440	360
Accidents à cause mécanique : $x_2$	110	90

**1)** Déterminer l'effectif totale des accidents enregistrés lors de cette étude?

**2)** Déterminer les fréquences conditionnelles  $f_{y_2/x_1}$  et  $f_{x_2/y_2}$ .

**3)** Déterminer les fréquences marginales  $f_1$  et  $f_2$

#### EXERCICE 47      Statistiques à deux variables

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où  $y_i$  représente le nombre d'exemplaires du point que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente exprimé en milliers de francs, est  $x_i$ .

$x_i$	60	80	100	120	140	160	180	200
$y_i$	952	805	630	522	510	324	205	84

**1)** Calculer le coefficient de corrélation linéaire de  $y$  et  $x$ . La valeur trouvée justifie-t-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?

**2)** Déterminer l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$ .

**3)** Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25000 francs.

**a)** Déduire de la précédente question que le bénéfice  $z$  en fonction du prix de vente  $x$  est donné par l'égalité :

$$z = -5,95x^2 + 1426,25x - 59937,5 \text{ où } x \text{ et } z \text{ sont exprimés en milliers de francs.}$$

**b)** Déterminer le prix de vente  $x$  permettant de réaliser un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

**NB :** Prendre 2 chiffres après la virgule sans arrondir.

**Rappel :** Bénéfice = Prix de vente - prix de revient.

#### EXERCICE 48      Statistique à deux variables (4 pts)

L'étude du poids  $P$  de la larve un insecte mesuré en fonction de l'âge  $x$  a conduit au tableau suivant :

$X(\text{mois})$	1	2	3	4	5
$P(\text{mg})$	7	13	25	47	88

**1)** On pose  $y = \ln P$  ou  $\ln$  désigne le logarithme nép.

**a)** Calculer les différentes valeurs prises par  $y$  à  $10\%^{-2}$  près.

**b)** Tracer le nuage de points représentant les couples  $(X, Y)$  dans un système d'axes d'ordonnées unité 2 cm :

$y$  placer le barycentre  $G$  du nuage.

**2)** déterminer une équation de la droite de régression de  $Y$  en  $X$ .

**3)** Si l'évolution se poursuit dans les mêmes conditions, quel sera le poids de la larve au bout de six mois ?

## CORRIGE

**EXERCICE 1****Algèbre**

**1. a.** Soit  $\alpha$  une solution réelle de E alors  $\alpha$  vérifie  $\alpha^3 - 13\alpha^2 + 59\alpha - 87 = 0$

Une solution évidente est 3.

D'où  $\boxed{\alpha = 3.}$

**1. b.**  $(z - 3)(z^2 - 10z + 29) = 0$

D'où  $z = 3$  ou  $z^2 - 10z + 29 = 0$

Après calculs  $z = 3$  ou  $z = 5 - 2i$  ou  $z = 5 + 2i$

L'ensemble des solutions est :  $S = \{3 ; 5 - 2i ; 5 + 2i\}$

**2.a**  $\frac{b-a}{c-a} = -i$

ABC est rectangle et isocèle en A et direct.

**2. b.**  $\boxed{\text{Arg } Z \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})[2\pi].}$

$z$  réel non nul sssi  $\arg Z \equiv 0(\pi)$ .

$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \equiv 0(\pi)$ .

M décrit la droite (AB) privée de A et de B.

**3. a.** Soit  $M'(Z')$  l'image de M(Z) par la rotation r de centre I et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$   
 Donc  $Z' - Z_i = e^{-\frac{\pi}{2}}(Z - Z_i)$

On obtient  $Z' = -iZ + 3 + i$

**3. b.** Soit  $\Omega$  centre du cercle circonscrit à ABC.

$\Omega$  est le milieu de [BC].

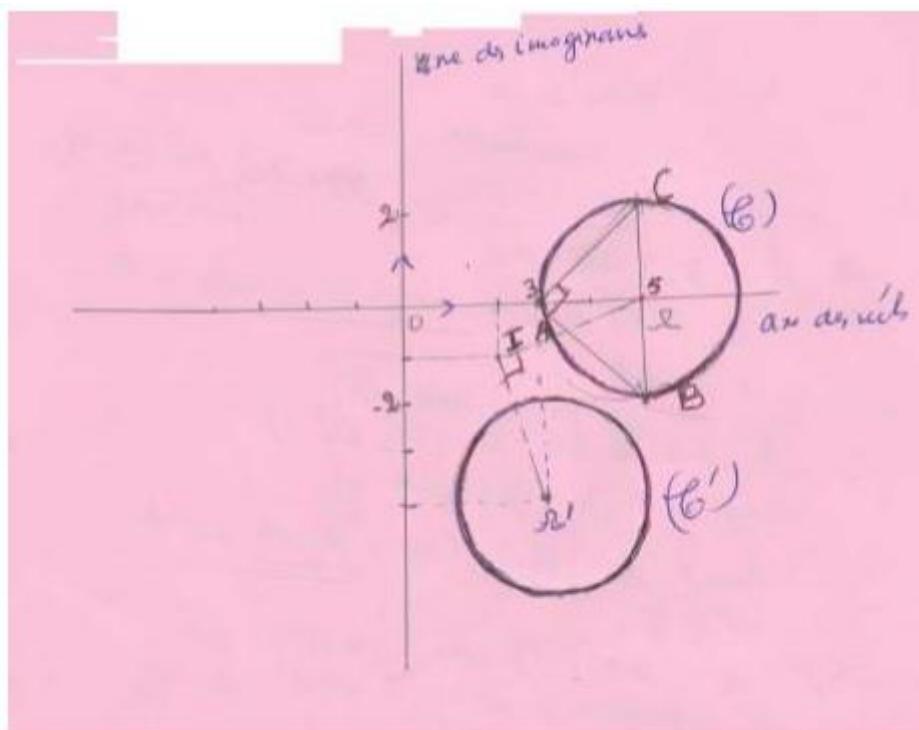
On a  $Z_\Omega = \frac{Z_B + Z_C}{2}$  ce qui donne  $Z_\Omega = 5$

ce qui donne

Soit  $r(\Omega) = \Omega'$ ,  $Z_{\Omega'} = iZ_\Omega + 3 + i$ .

D'où  $Z'_\Omega = 3 - 4i$ .

Donc (C') est le cercle de centre  $\Omega'$  et de même rayon que (C).



**EXERCICE 2****Algèbre**

**A) 1.** Soit  $z$  un nombre complexe non nul donné.

– L'écriture algébrique de  $z$  est de la forme :  $z = a+ib$ , avec  $a$  sa partie réelle et  $b$  sa partie imaginaire,

– L'écriture exponentielle de  $z$  est de la forme :  $z = re^{i\theta}$ , avec  $r$  son module et  $\theta$  un de ses arguments,

– L'écriture trigonométrique de  $z$  est de la forme :  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ , avec  $r$  son module et  $\theta$  un de ses arguments,

**2.** Soient  $K(z_0)$ ;  $M(z)$  et  $M'(z')$  et soit  $r$  la rotation de centre  $K(z_0)$  qui transforme  $M(z)$  en  $M'(z')$  on a :

$$\begin{cases} KM' = KM \\ ((\vec{KM}, \vec{KM'})) = \theta [2\pi]_{(1)} \end{cases}$$

ce qui est équivalent à (2)

D'où  $z' = e^{i\theta} z + z_0(1 - e^{i\theta})$

**B) Soit**  $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$

**1.** Ecriture trigonométrique de  $z_0$

On a  $|z_0| = 1 - i\sqrt{1+3} = 2$ ,

Soit  $\theta$  un argument de  $z_0$  alors  $\cos\theta = \frac{1}{2}$  et  $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  ce qui donne  $\theta = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$   
d'où

$$z_0 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

**2.** Calculons  $z_0^4 =$

D'où

$$z_0^4 = -8 + i8\sqrt{3}$$

**3.** Résolvons l'équation

$$z^4 = 1$$

$z^4 = 1$  implique  $|z|^4 = 1$  et  $4\arg z = 0[2\pi]$  ce qui donne

$$|z| = 1 \text{ et } 4\arg z = k\frac{\pi}{2} k \in \mathbb{Z}$$

d'où l'ensemble des solutions S de l'équation  $z^4 = 1$  est  $S = \{-1; 1; i; -i\}$

**4.** Déduisons-en les solutions de l'équation (E):  $z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$

$$\frac{z^4}{-8 + i8\sqrt{3}} = 1$$

$z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$  est équivalent à  $-8 + i8\sqrt{3}$

ce qui est équivalent, d'après B)2), à

$$\left(\frac{z}{1 - i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$$

Ce qui donne d'après B)3 les solutions suivantes :

- Sous forme algébrique :

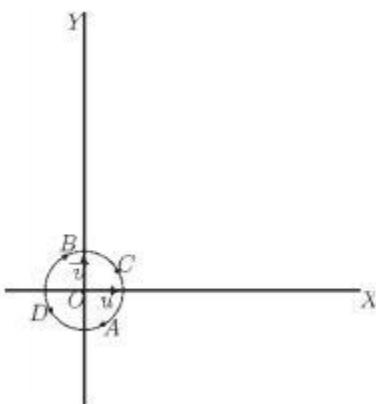
$$z_0 = 1 - i\sqrt{3}, z_1 = -1 + i\sqrt{3}, z_2 = \sqrt{3} + i, z_3 = -\sqrt{3} - i$$

- Sous forme trigonométrique :

et

$$z_3 = 2 \left( \cos \frac{7\pi}{6} - i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

**5.**



**6.** Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  d'angle  $\frac{\pi}{2}$   
 D'après A)2) si  $M'(z')$  est l'image de  $M(z)$  par  $r$  alors

$$z' = z e^{i\frac{\pi}{2}}$$

**7.** Soient les points  $A;B;C$  et  $D$  d'abscisses respectives  $z_A = z_0; z_B = z_1; z_C = z_2$  et  $z_D = z_3$

Vérifions que  $r(A) = C$  :

$$z_{A e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = z_C \quad \text{d'où } r(A) = C$$

Vérifions que  $r(C) = B$                     d'où  $r(C) = B$

Vérifions que  $r(B) = D$

$$z_{B e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = z_D \quad \text{d'où } r(B) = D$$

**8.**  
 $r(A) = C$  implique  $|z_A| = |z_C|$ ,

$r(C) = B$  implique  $|z_C| = |z_B|$ ,

$r(B) = D$  implique  $|z_B| = |z_D|$

D'où  
 $|z_A| = |z_C| = |z_B| = |z_D| = 2$ ,

Ce qui est équivalent à

$$OA = OB = OC = OD = 2$$

D'où  $A,B,C$  et  $D$  sont sur le même cercle ( $C$ ) de centre  $O$  et de rayon 2.

### EXERCICE 3

### Algèbre

**I. 1°)**  $z$  est écrit sous forme algébrique,  $x$  (ou cartésienne).  
 Sa partie réelle et sa partie imaginaire.

2°) Le module de  $|Z|$  est le réel positif  $|Z|\sqrt{x^2 + y^2}$

$$3°) \cos\alpha = \frac{\operatorname{Re}(Z)}{|z|}; \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{|z|}.$$

4°)  $z = e^{i\theta} z$ .

**II. 1°)** Le discriminant réduit de l'équation est  $\Delta = 2\sqrt{3}^2 - 16 = -4 = 4i^2$ .

$$z_1 = \frac{-2\sqrt{3} - 2i}{\frac{1}{2}} = -4\sqrt{3} - 4i$$

Les racines sont donc et

$$z_2 = \frac{-2\sqrt{3} + 2i}{\frac{1}{2}} = -4\sqrt{3} + 4i$$

2°)  $OA = |a - 0| = |a| = \sqrt{-4\sqrt{3}^2 + -4^2} = \sqrt{64} = 8$

$$OB = |b - 0| = |b| = \sqrt{-4\sqrt{3}^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$AB = |b - a| = |16i| = \sqrt{-4\sqrt{3}^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8$$

Ainsi  $OA = OB = AB$  : Le triangle OAB est équilatéral.

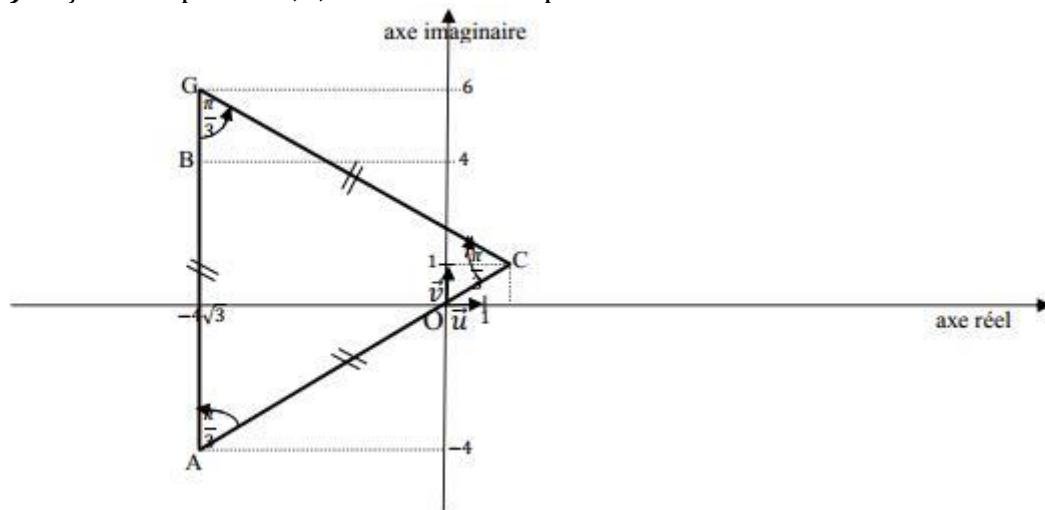
3°) D'après la question 4° de la partie I, l'affixe du point D est donnée par :

$$z_d = e^{i\frac{\pi}{3}} z_c = e^{i\frac{\pi}{3}} 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$

On a utilisé l'écriture exponentielle de  $c = z_C = \sqrt{3} + i$ ; on aurait pu également utiliser la forme algébrique.

4°) a) L'affixe de G est donnée par :  $z_g = \frac{z_o z_d z_b}{11 - 1}$  (formule résultant de la relation de définition du barycentre :  $GO - GD - GB = 0$ . Comme  $z_0 = 0$ , on obtient :  
 $z_g = z_d + z_b = -4\sqrt{3} + 6i$

b) Plaçons les points A,B,C et G dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$



5°).

$$\frac{GA}{GC} = \left| \frac{z_c z_g}{z_a z_g} \right| = \left| \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1$$

De plus,  $\left| \frac{z_c z_g}{z_a z_g} \right| = 1$ . Donc GA = GC.

On conclut de ces résultats que le triangle GAC est équilatéral.

#### **EXERCICE 4**

#### **Algèbre**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  tel que  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2\text{cm}$

**1) a)** Résolution de l'équation  $z^3 - 1 = 0$

Les solutions de cette équation sont les racines cubiques de 1.

Posons  $z = r e^{i\theta}$ ,  $z^3 = 1$  entraîne  $|z^3| = 1$  soit  
 $|z^3| = 1$  et  $|z| = 1$  d'où  $r = 1$  donc  $z = e^{i\theta}$

$z^3 = 3e^{i\theta} = 1 = e^{i2k\pi}$  ainsi

$$3\theta = 2k\pi \text{ ou } \theta = \frac{2k\pi}{3}$$

Les solutions de l'équation sont de la forme

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\}$$

$$z_0 = 1, z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Sous forme trigonométrique, on a :

$$z_0 = \cos 0 + i \sin 0, z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

Sous forme algébrique :

$$z_0 = 1, z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**b)** Résolution de l'équation  $z^3 = 8$

$$z^3 = 8 = 2^3 \text{ d'où } \left(\frac{z}{2}\right)^3 = 1$$

Posons  $\frac{z}{2} = Z$ , on obtient  $Z^3 = 1$  et d'après les résultats de

**a)** on obtient :

$$Z_0 = \frac{z'_0}{2} = 1 \text{ d'où } z'_0 = 2$$

$$Z_1 = \frac{z'_1}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ d'où } z'_1 = -1 + i\sqrt{3} \text{ et } Z_2 = \frac{z'_2}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ d'où } z'_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

Les solutions de l'équation  $z^3 = 8$  sont ainsi :  
 $z'_0 = 2, z'_1 = -1 + i\sqrt{3}$  et  $z'_2 = -1 - i\sqrt{3}$

**2)**  $B(2), A(-1, +i\sqrt{3}), C(-1, -i\sqrt{3})$

**a)** Graphique à tracer

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-1 + i\sqrt{3} - 2}{-1 - i\sqrt{3} - 2} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}}$$

Soit  $\alpha$  l'argument de ce nombre complexe

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha = -\frac{\pi}{3}$$

$$\left| \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right| = \frac{AB}{CB} = 1 \text{ d'où AB=BC et}$$

Le triangle ABC est donc isocèle en B avec un angle ABC=60° donc, il est équilatérale.

**3)** On considère f, la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe

$z$ , associe le point M' d'affixe  $z' = ze^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

**a)** Le point  $M_0(z_0)$  est tel que  $z_0 = z_0 e^{i\frac{2\pi}{3}} \iff z_0 \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1\right) = 0$  d'où  $z_0 \approx 0$ . le point invariant de f est l'origine O du repère.

$$z' = z e^{i \frac{2\pi}{3}} \text{ et } z_0 = z_0 e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

$$z' - z_0 = (z - z_0) e^{i \frac{2\pi}{3}} \text{ d'où } \frac{z' - z_0}{z - z_0} = e^{i \frac{2\pi}{3}} \text{ d'où}$$

$$\left( \vec{OM}, \vec{OM'} \right) = \frac{2\pi}{3} \text{ et}$$

$$\frac{OM'}{OM} = 1 \text{ d'où } OM' = OM$$

L'application  $f$  est ainsi la rotation de centre  $O$  d'angle  $\frac{2\pi}{3}$

- b)** Affixe  $A'$  image de  $A$  et de  $C'$  image de  $C$  par l'application  $f$   
 $z_{A'} = -1 - i\sqrt{3} = z_C$  d'où  $A' = C$

$$f(C) = B, z_{C'} = z_B = 2$$

- c)**  $f(A) = C$  et  $f(C) = B$  d'où  $f([AC]) = [BC]$

### EXERCICE 5      Equation dans C écriture complexe similitude

**1)** (E) :  $z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0$

- a)** Déterminer la solution imaginaire pure  $z_0$  de (E)  
on a  $z_0 = ai$

$$z_0 \text{ est solution de (E)} \implies -a^3i + (-6-4i)(-a^2) + (12+21i)a + 9 - 45i = 0$$

$$\implies -ia^3 + 6a^2 + 4ia^2 + 12ia - 21a + 9 - 45i = 0$$

$$i(-a^3 + 4a^2 + 12a - 45) + 6a^2 - 21a + 9 = 0$$

$$2a^2 - 7a + 3 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 49 - 24 = 25$$

$$a_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Calculons

$$-a_2^3 + 4a_2^2 + 12a_2 - 45 = -27 + 36 + 36 - 45 = 72 - 72 = 0 \quad \text{donc } z_0 = 3i$$

**b)** Achever la résolution de (E)

$$(E) \iff (z - 3i)(z^2 + az + b) = 0$$

$$z^3 + az^2 + bz - 3iz^2 - 3iaz - 3ib = 0$$

$$z^3 + (a - 3i)z^2 + (b - 3ia)z - 3ib = 0$$

$$\implies \begin{cases} a = -6 - i \\ b = +15 + 3i \\ 15 + 3i - 3i(-6 - i) = 12 + 21i \end{cases} \implies \begin{cases} a = -6 - i \\ b = 15 + 3i \\ 15 + 3i + 18i - 3 = 12 + 21i \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} a = -6 - i \\ b = 15 + 3i \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$z^2 + az + b = 0 \iff z^2 + (-6 - i)z + 15 + 3i = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6 - i)^2 - 4(15 + 3i) = 36 + 12i - 1 - 60 - 12i = -25 = (5i)^2$$

$$\implies z = \frac{6 + i - 5i}{2} \text{ ou } z = \frac{6 + i + 5i}{2}$$

$$\implies z = 3 - 2i \text{ ou } z = 3 + 3i$$

d'où  $z_1 = 3 + 3i$  et  $z_2 = 3 - 2i$

2)  $P \rightarrow (O, \vec{u}, \vec{v})$

A(3i) , B(3 + 3i) et C(3 - 2i)

a) placer A,B,C dans le repère

$$\frac{z_A - z_B}{z_c - z_B}$$

b) Calculer  $\frac{z_A - z_B}{z_c - z_B}$

$$\frac{z_A - z_B}{z_c - z_B} = \frac{3i - 3 - 3i}{3 - 2i - 3 - 3i} = \frac{-3}{-5i} = \frac{-3i}{5} = \frac{3}{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$\rightarrow (\overbrace{\vec{BC}, \vec{BA}}^{\text{angle}}, \vec{CA}) = 3\frac{3\pi}{2} + k2\pi$$

→ A,B,C est un triangle rectangle en B

3) f la similitude directe qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.

#### **EXERCICE 6 Nombres complexes, équations différentielles et jeu de dé**

1) a) Résoudre dans l'équation (E) :  $z^2 - 2z + 2 = 0$

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$(z - 1)^2 + 1 = 0$$

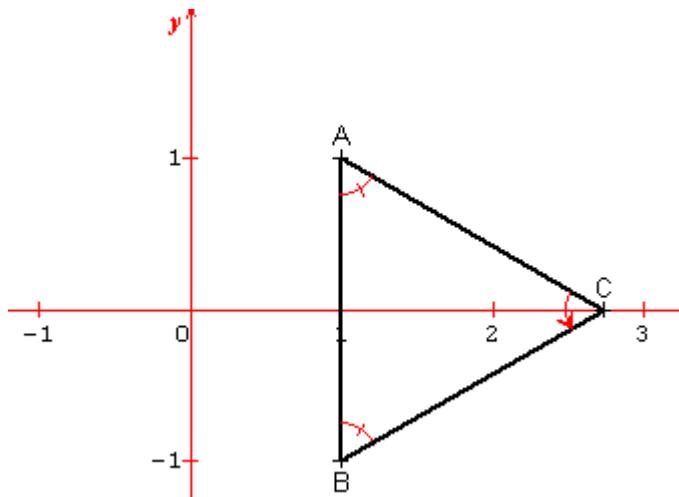
$$(z - 1)^2 - i^2 = 0$$

$$(z - 1 + i)(z - 1 - i) = 0$$

$$z = 1 - i \quad \text{ou} \quad z = 1 + i$$

$$z_1 = 1 + i \quad z_2 = 1 - i$$

b)



$CAB$  est isocèle en  $C$  car  $z_A = \overline{z_B}$  et  $C \in (Ox)$

$$\frac{z_B - z_C}{|z_A - z_C|} = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ainsi  $ABC$  équilatéral.

2)  $y'' - 2y' + 2y = 0$

l'équation caractéristique est  $r^2 - 2r + 2 = 0$

$$\Delta\{r\} = 1 - 2 = -1 = i^2 \quad r_1 = 1 + i \quad \text{d'où } y(x) = (A\cos x + B\sin x)e^x$$

3) On considère l'équation différentielle (1) :  $ay'' - by' + cy = 0$ , où a, b et c désignent trois paramètres, éléments de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) Si  $ay'' - by' + cy = 0$  a pour solutions les

fonctions de la forme  $x \rightarrow (A\cos x + B\sin x)e^x$

alors l'équation caractéristique  $ar^2 - br + c = 0$

admet  $1 + i$  pour solution dans

Réiproquement

Si  $1 + i$  est solution dans de  $az^2 - bz + c = 0$

alors  $a(1 + i)^2 - b(1 + i) + c = 0$

$$-b + c + i(2a - b) = 0$$

ce qui entraîne  $b = c = 2a$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2a)^2 - 8a^2 = -4a^2 < 0$$

l'équation caractéristique de l'équation différentielle  $ay'' - by' + cy = 0$  admet  $1 + i$  pour solution

l'équation différentielle  $ay'' - by' + cy = 0$  a pour solution les fonctions de la forme  $x \rightarrow (A\cos x + B\sin x)e^x$

**b)** Soit  $(E)$  l'évènement:

„les solutions de (1) sont les fonctions de la forme  $x \rightarrow (A\cos x + B\sin x)e^x$ ,  $A$  et  $B$  étant des constantes réelles“, donc on a  $b = c = 2a$

d'où  $(E)$  est constitué de résultats de la forme  $(a, 2a, 2a)$

$$(E) = \{(1, 2, 2), (2, 4, 4), (3, 6, 6)\} \text{ or } Card\Omega = 6^3 \quad p(E) = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$$

### EXERCICE 7

### Algèbre

**1)**  $z^3 - 1 = 0$  si et seulement si  $(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$

résolvons l'équation:  $z^2 + z + 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

$$\text{donc } z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{d'où } z^3 - 1 = 0 \text{ si et seulement si } z = 1 \text{ ou } z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

**2) a)** Développons  $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$

$$(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})(-4i) = 4\sqrt{2}(-1 - i)$$

**b)** E:  $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$

$$\text{on pose } u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

$$\text{donc } z^3 = u^3(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$$

on en déduit que  $u^3 = 1$

$$u = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad u = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

d'après 1) on a  $u = 1$  ou

$$\text{or } z = u(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \text{ donc } z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \text{ ou } z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

ou  $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$  c'est à dire

$$z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \text{ ou } z = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \text{ ou } z = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

qui sont les racines de E sous forme algébrique.  
Exprimons ces racines sous forme trigonométrique.

$$\text{on a } z = u(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = u \times 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2ue^{-i\frac{\pi}{4}}$$

donc: pour  $u=1$ , on obtient  $z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\text{pour } u = e^{-i\frac{2\pi}{3}}, z = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2e^{-i\frac{11\pi}{12}}$$

$$\text{pour } u = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

d'où les racines de E sous forme trigonométrique sont:  $2e^{-i\frac{\pi}{4}}, 2e^{-i\frac{11\pi}{12}}, 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$

3) En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$

$$\text{on a eu } z = 2e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{donc } e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\text{d'où } \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

**1) a)**  $(U_n)$  suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $U_0 = 4$

$$U_n = U_0 \times q^n \quad U_n = 4 \times \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$$

**premier terme**  $V_0 = \frac{\pi}{2}$   $V_n = V_0 + nr \quad V_n = \frac{\pi}{4} + n \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{N}$

**b)**  $|z_n| = U_n$  et un argument de  $z_n$  est  $V_n$   $z_n = 4 \times \frac{1}{2^n} e^{i(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2})}; n \in \mathbb{N}$

**2)**

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} \times z_n \implies z_{n+1} = \frac{1}{2} i z_n$$

$$q = \frac{1}{2} i \quad z_0 = 4 e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$$

**3) a)**  $z_{n+1} = \frac{1}{2} i z_n$  est l'écriture complexe d'une similitude plane directe. ( $a = \frac{1}{2} i$ )

$$\text{b)} \quad z_{n+1} = \frac{1}{2} i z_n$$

$$a = \frac{1}{2} i \quad b = 0$$

l'affixe du centre est 0

$$|a| = \frac{1}{2} \quad \text{un argument de } a \text{ est } \frac{\pi}{2}$$

donc F est la similitude plane directe centrée en l'origine de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

**4)a)**  $Z_n = z_0 z_1 z_2 \dots z_n$

$$z_k = \frac{4}{2^n} e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$$

$$Z_n = \frac{4^{n+1}}{2^{\sum_{k=0}^n k}} e^{i(\sum_{k=0}^n (\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}))}$$

$$Z_n = \frac{4^{n+1}}{\frac{2(n+1)n}{2}} e^{i[(n+1)\frac{\pi}{4} + \frac{n(n+1)}{2}\frac{\pi}{2}]}$$

$$Z_n = 2^{\frac{(n+1)(4-n)}{2}} e^{i(n+1)^2\frac{\pi}{4}}$$

**b)** Si n impaire

$$n = 2p + 1 \implies n + 1 = 2p + 2 \implies (n + 1)^2 = 4(p + 1)^2$$

$$Z_{2p+1} = 2^{(p+1)(4-1-2p)} e^{i(p+1)^2\pi}$$

$$Z_{2p+1} = 2^{(p+1)(3-2p)} e^{i(p+1)^2\pi}$$

or  $e^{i(p+1)^2\pi} = \pm 1$  donc  $Z_{2p+1}$  est réel.

### EXERCICE 9

### Similitude directe

$$(E) : Z^3 + (1 - 8i)Z^2 - (23 + 4i)Z - 3 + 24i = 0$$

**1)a)** posons  $Z = ix, x \in \mathbb{R}$

$$\text{on a } (ix)^3 + (1 - 8i)(ix)^2 - (23 + 4i)(ix) - 3 + 24i = 0$$

$$-ix^3 - x^2 + 8ix^2 - 23ix + 4x - 3 + 24i = 0$$

$$(-x^2 + 4x - 3) + i(-x^3 + 8x^2 - 23x + 24) = 0$$

$$\begin{cases} -x^2 + 4x - 3 = 0 \\ -x^3 + 8x^2 - 23x + 24 = 0 \end{cases}$$

$x = 3$  est solution commune aux deux équations  $Z_0 = 3i$

**b)** A l'aide du schéma de Horner ci dessous, on montre que  $1 + 2i$  est solution de  $(E)$  par la même méthode, on montre que  $-2 + 3i$  est solution de  $(E)$ .

**c)** Les solutions de  $(E)$  sont :  $\{3i; 1 + 2i; -2 + 3i\}$

**2)** le plan est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

$$A(1 + 2i) \quad B(3i) \quad C(-2 + 3i)$$

$G$  est le barycentre des points  $A, B, C$  affectés des coefficients respectifs  $2, -2$  et  $1$

a)  $Z_G = \frac{2Z_A - 2Z_B + Z_C}{2 - 2 + 1}$

$$Z_G = 2(1 + 2i) - 2(3i) - 2 + 3i$$

$$Z_G = i$$

$$\overrightarrow{GA}(Z_A - Z_G) \quad \overrightarrow{GA}(1 + i)$$

$$\overrightarrow{GB}(3i - 1) \quad \overrightarrow{GB}(2i)$$

$$\overrightarrow{GC}(-2 + 3i - i) \quad \overrightarrow{GC}(-2 + 2i)$$

$$|Z_{\overrightarrow{GA}}| = \sqrt{2} \text{ est un argument de } Z_{\overrightarrow{GA}} = \frac{\pi}{4} \quad \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{donc } Z_{\overrightarrow{GA}} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad Z_{\overrightarrow{GB}} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \quad |Z_{\overrightarrow{GC}}| = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{GC}}}{|Z_{\overrightarrow{GC}}|} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{Ainsi } Z_{\overrightarrow{GC}} = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

donc  $Z_{\overrightarrow{GA}}, Z_{\overrightarrow{GB}}$  et  $Z_{\overrightarrow{GC}}$  sont en progression géométrique de raison  $\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

b)  $Z_{\overrightarrow{GB}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} Z_{\overrightarrow{GA}}$

et  $Z_{\overrightarrow{GC}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} Z_{\overrightarrow{GB}}$

$$Z_B - Z_G = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (Z_A - Z_G) \text{ et } Z_C - Z_G = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (Z_B - Z_G)$$

alors on a :  $s(A) = B$        $s(B) = C$        $s(G) = G$

avec  $s$  similitude directe plane de centre  $G$ , de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$

Equations dans C (5 points)

Détails

Catégorie : algèbre

Equations dans C (5 points-2002)

**1.** Les racines  $n^{\text{ieme}}$  de l'unité sont :

$$z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in [0, n-1]$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} z_k &= z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} \\ &= 1 + e^{i \frac{2\pi}{n}} + \dots + e^{i \frac{2\pi(n-1)}{n}} \\ &= \frac{(e^{i \frac{2\pi}{n}})^n - 1}{e^{i \frac{2\pi}{n}} - 1} \\ &= \frac{e^{i 2\pi} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{n}} - 1} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$$

**2.** Nous avons la somme des racines de l'unité est nulle.

$$1 + e^{i \frac{2\pi}{5}} + e^{i \frac{4\pi}{5}} + e^{i \frac{6\pi}{5}} + e^{i \frac{8\pi}{5}} = 0$$

$$\text{c'est à dire } 1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0$$

$$\cos \left( \frac{4\pi}{5} \right) = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{5} \right) = -\cos \frac{\pi}{5}$$

$$\cos \left( \frac{6\pi}{5} \right) = \cos \left( \pi + \frac{\pi}{5} \right) = -\cos \frac{\pi}{5}$$

$$\frac{8\pi}{5} = 2\pi - \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5}$$

$$1 + \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} = 0$$

$$1 + 2\cos \frac{2\pi}{5} - 2\cos \frac{\pi}{5} = 0$$

$$\text{or } \cos \frac{2\pi}{5} = 2\cos^2 \frac{\pi}{5} - 1$$

$$\text{donc } 1 + 4\cos^2 \frac{\pi}{5} - 2 - 2\cos \frac{\pi}{5} = 0$$

$$4\cos^2 \frac{\pi}{5} - 2\cos \frac{\pi}{5} - 1 = 0$$

**EXERCICE 10****Nombres complexes et similitudes (04 pts)**

Soit l'équation (E) :  $z^3 + (3 + 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i = 0$

**1) a)** (E) admet une solution réelle  $z_0$  si on a:

$$z_0^3 + (3 - 2i)z_0^2 + (1 - 4i)z_0 - 1 - 2i = 0$$

$$\begin{aligned} C'est & - à dire z_0^3 + 3z_0^2 - 2i z_0^2 + z_0 - 4i \\ z_0 - 1 - 2i & = 0 \end{aligned}$$

$$z_0^3 + 3z_0^2 + z_0 - 1 + i(-2z_0^2 - 4z_0 - 2) = 0$$

$$\text{soit } \left\{ \begin{array}{l} z_0^3 + 3z_0^2 + z_0 - 1 = 0 \\ \quad \text{et} \\ -2z_0^2 - 4z_0 - 2 = 0 \end{array} \right.$$

pour l'équation (2) on a :  $z_0 = -1$

on vérifie dans (1)  $(-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 - 1 = -3 + 3 = 0$

donc la solution réelle de (E) est :  $z_0 = -1$

**b)** étant solution de (E), on peut factoriser

$$z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i \text{ par } z + 1$$

en utilisant la méthode d'identification

$$\text{on a : } z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i = (z + 1)(z^2 + bz - 1 - 2i)$$

$$\text{on a : } (z + 1)(z^2 + bz - 1 - 2i) = z^3 + bz^2 - (1 + 2i)z + z^2 - 1 - 2i$$

$$= z^3 + (b + 1)z^2 + (b - 1 - 2i)z - 1 - 2i$$

$$\text{on obtient alors : } \begin{cases} b + 1 = 3 - 2i \\ b - 1 - 2i = 1 - 4i \end{cases} \text{ soit } b = 2 - 2i$$

$$\text{donc l'équation (E) devient : } (z + 1)(z^2 + (2 - 2i)z - 1 - 2i) = 0$$

C'est -- dire  $z = -1$

$$\text{On a } z^2 + (2 - 2i)z - 1 - 2i = 0 \text{ (e)}$$

Résolvons (e) :

on calcule  $\Delta' = (1 - 1)2 + 1 + 2i = 1 - 1 - 2i + 1 + 2i = 1$  d'où

$$z_1 = \frac{-1 + i + 1}{1} = i \quad z_2 = \frac{-1 + i - 1}{1} = -2 + i$$

d'où les solutions de (E) sont :  $z_0 = -1, z_1 = i, z = -2 + i$

**2)** Soit  $A(z_A = -1), B(z_B = -2 + i), C(z_C = i)$

$$\text{a)} \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\frac{-1 + i}{1 + i}\right) = \arg(-1 + i) - \arg(1 + i) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

on a :  $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$  et on a donc

$$\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \Pi 4(2\Pi) \end{cases}$$

on en déduit que triangle ABC est un triangle isocèle rectangle de sommet A.

**b)** Soit S la similitude laissant invariant

A et telle que  $S(B) = C$

$S$  est associé à l'application  $\mathfrak{S}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$Z \rightarrow az + b$$

$$\begin{aligned} z_C &= az_B + b \\ z_A &= az_A + b \end{aligned}$$

Déterminons  $a$  et  $b$   $\overline{z_C - z_A} = a(z_C - z_A)$

$$\text{d'où } a = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{i + 1}{-1 + i} = e^{-i\frac{\Pi}{2}}$$

$$b = z_C - az_B = i - (-i) * (-2 + i) = i + 2i + 1 = 1 - i$$

$$\text{d'où } s: z \rightarrow e^{-i\frac{\Pi}{2}} - 1 - i$$

A étant invariable par  $S$  donc le centre est  $A$ , la mesure de l'angle est  $-\frac{\Pi}{2}(2\Pi)$  et le rapport 1.

$$S(A, -\frac{\Pi}{2}, 1) = R(A, -\frac{\Pi}{2})$$

### EXERCICE 11

### Équations dans $\mathbb{C}$ et similitude(4 pts)

$$u: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2 - 1}$$

1)  $n(x)$  existe  $\iff x \geq 0$  et  $\frac{x+1}{x-1} \neq 0$

donc  $D_u = [0; 1[ \cup ]1, +\infty[$

$$u(o) = \ln|1| - \frac{-2(0)}{0^2 - 1}$$

$$u(o) = 0$$

pour  $x > 1, u(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{2x}{x^2 - 1}$

$\frac{x+1}{x-1}$  tend vers 1 en  $+\infty$  et  $\frac{2x}{x^2 - 1}$  tend vers 0

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$

2) Calcul de  $u'(x)$

$$u'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}} - \left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)' =$$

$$u'(x) = \frac{-2}{x^2 - 1} - 2 \left[ \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} \right]$$

$$u'(x) = \frac{4}{(x^2 - 1)^2}$$

$u'(x) > 0$  sur  $D_u$

tableau de variation de  $u$

$x$	0	1	$+\infty$
$u'(x)$	+	+	
$u$	0 ↗	0 ↗	

3) a) la fonction  $x \rightarrow u(x)$  strictement croissante sur  $[0, 1[$  et  $u(0) = 0$

si  $0 \leq x < 1$  alors  $u(0) \leq u(x)$

d'où  $u(x) \geq 0$  sur  $[0, 1[$

**b)** la fonction  $x \rightarrow u(x)$  strictement croissante sur  $]1, +\infty[$

or  $\lim_{x \rightarrow 1^+} u(x) = 0$  donc  $u(x) < 0$  sur  $]1, +\infty[$

**B)**  $g : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1$$

**1)**  $g(x)$  existe  $x \geq 0$  et  $\frac{x+1}{x-1} > 0$

$$Dg = [0, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$$

car  $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \rightarrow +\infty$

$\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \rightarrow +\infty$  tend vers  $+\infty$

$$\text{2) a)} 1 + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

posons  $t = \frac{2}{x-1}$ , si  $x \mapsto +\infty$  alors  $t \rightarrow 0$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\text{b) sur } ]1, +\infty[ \quad g(x) = x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1$$

$$\text{or } \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

$$g(x) = x \ln \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right) - 1$$

$$g(x) = 2 \frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) - 1$$

or  $\frac{x}{2} = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$

$$g(x) = \left[ 2\left(\frac{x-1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \right] + \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) - 1$$

or en  $+\infty$   $\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$  tend vers 0 et  $\frac{(x-1)}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$  tend vers 1

d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2 - 1 = 1$

la courbe de  $g$  admet au voisinage de  $+\infty$  une asymptote horizontale d'équation  $y = 1$

c) calcul de  $g'(x)$

d'abord sur  $[0, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$  la fonction

$x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$  est dérivable et est strictement positive

donc  $x \mapsto \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$  dérivable sur

$[0, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$

par produit  $x \mapsto x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$

dérivable sur  $[0, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$

d'où  $g$  est dérivable sur  $[0, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$

$$g'(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{-2x}{x^2 - 1}$$

$$g'(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2-1} = u(x)$$

or  $u(x) > 0$  sur  $[0, 1[$  et  $u(x) < 0$  sur  $]1, +\infty[$

tableau de variation de  $g$

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	-	
$g$	-1	$+\infty$	1

on a  $g(0) = -1$

d)

la fonction  $x \mapsto g(x)$  continue et strictement croissante sur  $]0, 1[$

donc  $x \mapsto g(x)$  est une bijection de  $]0, 1[$  sur  $]-1, +\infty[$

donc  $x \mapsto g(x)$  bijection  $]0, 1[$  sur  $]-1, +\infty[$

de plus  $0 \in ]-1, +\infty[$

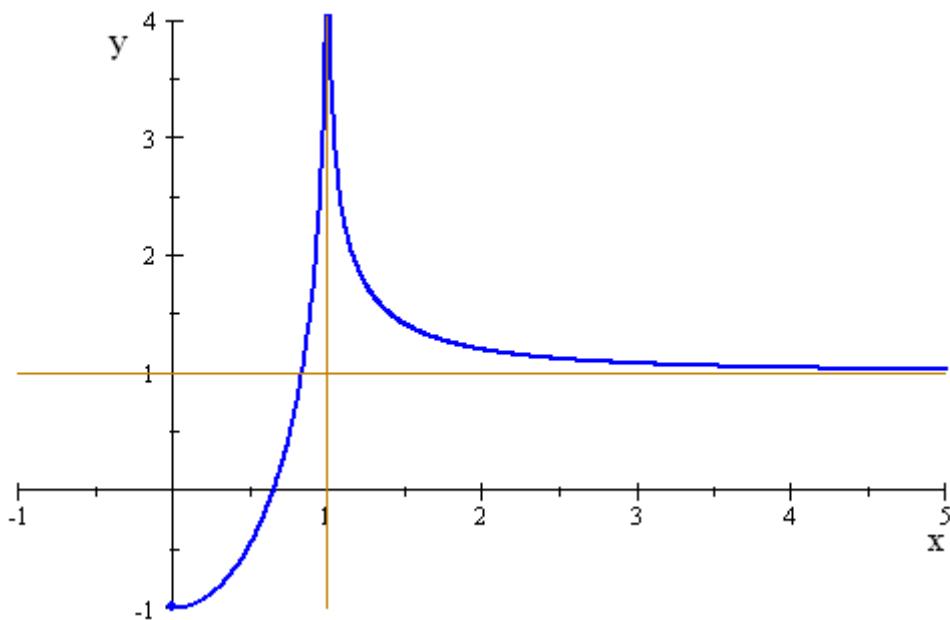
ainsi l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]0, 1[$

Encadrement de  $\alpha$

on a:

donc  $0,6 < \alpha < 0,7$

3) Courbe de  $g$



C)  
 $f : [0, 1[ \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$$

1) dérivabilité de  $f$  sur  $[0, 1[$ ?

sur  $] -1, 1[$ ,  $x \rightarrow \frac{x+1}{1-x}$  est dérivable et strictement positive

donc  $x \rightarrow \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$  est dérivable sur cette intervalle

ce qui entraîne que  $x \rightarrow (x^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$  est  
 dérivable sur cette intervalle  
 d'où  $f$  est dérivable sur  $[0, 1[$

$$\text{Et on a } f(x) = (x^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} = \frac{(x^2 - 1)}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$f'(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{(x^2 - 1)}{2} \times \frac{-2}{1-x^2} = x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1 = g(x)$$

$$f'(x) = g(x) \text{ sur } [0, 1[$$

**2)** Déterminons l'aire  $A$  du domaine plan limité par la courbe  $C_g$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation

$$x = \alpha.$$

$$A = - \int_0^\alpha g(x)dx \times 4cm^2$$

$$A = \int_\alpha^0 g(x)dx \times 4cm^2$$

$$A = [f(x)]_\alpha^0 \times 4cm^2$$

$$A = [f(0) - f(\alpha)] \times 4cm^2$$

$$A = -4f(\alpha).cm^2 = +4(1 - \alpha^2) \ln\left(\frac{\alpha + 1}{1 - \alpha}\right) cm^2$$

$$\text{or } g(\alpha) = 0$$

$$\alpha \ln\left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\right) - 1 = 0$$

$$\ln\left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$$

$$A = \frac{4(1 - \alpha^2)}{\alpha} cm^2$$

Nombres complexes et similitudes (04 pts)

Détails

Catégorie : algèbre

Nombres complexes et similitudes (04 pts-2000)

$$A_1(Z_1), A_2(Z_2), A_3(Z_3) \text{ tels que } Z_1 = 1; Z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}; Z_3 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{4}$$

**1) a)** Ecriture trigonométrique des nombres complexes  $Z_2 - Z_1; Z_3 - Z_1$

$$Z_3 - Z_1 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{4} - 1$$

$$= \frac{1 + i\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\Pi}{3} + i \sin \frac{\Pi}{3} \right)$$

**3)**  $Z_2 - Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$$= \sqrt{2}(1 + i)$$

$$= 2 \left( 2 \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 2 \left( \cos \frac{\Pi}{4} + i \sin \frac{\Pi}{4} \right)$$

$$Z_2 - Z_1 = 2 \left( \cos \frac{\Pi}{4} + i \sin \frac{\Pi}{4} \right)$$

$$Z_3 - Z_1 = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\Pi}{3} + i \sin \frac{\Pi}{3} \right)$$

**N.B. :** On peut aussi chercher le module puis un argument de chaque différence et en déduire la forme trigonométrique.

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$$

**b)** Ecriture algébrique de  $\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$

$$D'où \frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{16}$$

$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$$

Ecriture de  $Z_2 - Z_1$  sous forme trigonométrique .Connaissant les modules et arguments du numérateur et du dénominateur, on en déduit directement écriture du quotient sous forme trigonométrique.

Nous avons après 1 - a)

$$|Z_3 - Z_1| = \frac{1}{2} \text{ et } arg(Z_3 - Z_1) = \frac{\Pi}{3}[2\Pi]$$

$$|Z_2 - Z_1| = 2 \text{ et } arg(Z_2 - Z_1) = \frac{\Pi}{4}[2\Pi]$$

$$D'où \left| \frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} \right| = \left| \frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} \right| = \frac{1}{4} \setminus$$

$$\text{et } arg\left(\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}\right) = arg(Z_3 - Z_1) - arg(Z_2 - Z_1)$$

$$= \frac{\Pi}{3} - \frac{\Pi}{4}$$

$$= \frac{\Pi}{12}[2\Pi]$$

$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{1}{4} \left( \cos \frac{\Pi}{12} + i \sin \frac{\Pi}{12} \right)$$

Il en résulte que :

Des deux écritures précédentes de  $\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$  nous déduisons :

$$\frac{1}{4} \cos \frac{\Pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16}$$

$$\frac{1}{4} \sin \frac{\Pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16}$$

$$D'où \cos \frac{\Pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}; \sin \frac{\Pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

**2) a)** S est la similitude de centre  $A_1$ , de rapport  $\frac{A_1 A_3}{A_1 A_2}$  et d'angle  $\left(\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3}\right)$

$$\text{or } \frac{A_1 A_3}{A_1 A_2} = \frac{|Z_3 - Z_1|}{|Z_2 - Z_1|} = \frac{1}{4} \text{ et } \left(\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3}\right) = \arg\left(\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}\right) = \frac{\Pi}{12}[2\Pi]$$

Donc S est la similitude directe de centre  $A_1$ , d'angle  $\frac{\Pi}{12}$  et de rapport  $\frac{1}{4}$ .

Autre méthode

$$Z' = az + b \quad S(A_1) = A_1 \text{ et } S(A_2) = A_3 \text{ d'où on a :}$$

$$\begin{cases} Z_3 = aZ_2 + b \\ Z_1 = aZ_1 + b \end{cases}$$

Faisons la différence membre à membre des deux équations :

$$Z_3 - Z_1 = a(Z_2 - Z_1) \text{ où } a = \frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$$

or  $a = ke^{i\theta}$  avec  $k = |a|$  est le rapport de  $S$  et  $\theta = \arg a$  est d'angle de  $S$

$$\text{d'où } |a| = \frac{|Z_3 - Z_1|}{|Z_2 - Z_1|} = \frac{1}{4}$$

Connaissant  $a$ , on remplace dans la deuxième équation du système :

$$b = Z_1(1 - a) \Leftrightarrow b = 1\left(1 - \frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}\right)$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{Z_2 - Z_1 - Z_3 + Z_1}{Z_2 - Z_1} \Leftrightarrow b = \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 - Z_1}$$

b)  $S : M(z) \rightarrow M'(Z')$  tel que  $Z' - Z_1 = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{12}}(Z - Z_1)$

$$Z_B = 1 - 4\sqrt{2}e^{1\frac{\pi}{3}} \text{ soit } B' = S(B); B'(Z_{B'})$$

$$Z_{B'} = i$$

**EXERCICE 12****Équations du second degrés dans C(04pts)**

1/ a)  $z^2 - 2z + 5 = 0$

$\Delta = -4 = (2i)^2$  donc  $Z_1 = 1 + 2i ; Z_2 = 1 - 2i$

$S = \{1 + 2i ; 1 - 2i\}$

b)  $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

$\Delta = (1 + \sqrt{3})^2 - (5 + 2\sqrt{3}) = -1 = (i)^2$

$Z_1 = 1 + \sqrt{3} + i ; Z_2 = 1 + \sqrt{3} - i$

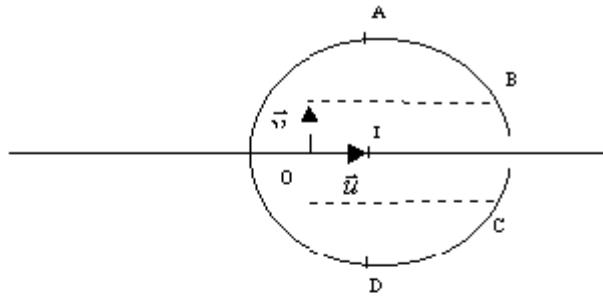
$S = \{1 + \sqrt{3} + i, 1 + \sqrt{3} - i\}$

2/

a) ( $\sigma, \pi, \nu$ )

A  $(1 + 2i)$  ; B  $(1 + \sqrt{3} + i)$

C  $(1 + \sqrt{3} - i)$  ; D  $(1 - 2i)$



b)

$$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1 - 2i - 1 - \sqrt{3} - i}{1 + 2i - 1 - \sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{3} + i} = \sqrt{3}i$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

donc  $\langle \beta_A, \gamma_B \rangle = \frac{\pi}{2} [2\pi]$  d'où le triangle ABD est rectangle en B.

c) On a A, B et D sont sur le cercle de centre I milieu de  $[AD]$  et de rayon  $r = \frac{AD}{2} = 2$  donc I(1,0)

on a alors IC =  $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} - 2$  donc C appartient à ce cercle de centre I et de rayon 2.

### EXERCICE 13

### Équations dans C(04 pts)

1/a)  $d'ot \omega = 1$  et  $\arg(\omega) = \frac{\pi}{3}$

b)  $\iff z = e^{i\frac{\pi}{6}}$  ou  $z = -e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$\iff z = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } z = e^{i(\pi + \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

les racines carrées de  $\omega$  sont  $e^{i\frac{\pi}{6}}$  et  $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

$$2/ z^2 + (\sqrt{3} - 7i)z - 4(3 + i\sqrt{3})$$

$$\text{la forme canonique donne } (z + \frac{\sqrt{3} - 7i}{2})^2 - \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = 0$$

$$\text{donc } (z + \frac{\sqrt{3} - 7i}{2})^2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2}$$

d'où  $z + \frac{\sqrt{3} - 7i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$  ou  $z + \frac{\sqrt{3} - 7i}{2} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

c'est-à-dire  $z = 4i$  ou  $z_2 = \sqrt{3} + 3i$

$$\frac{z_2 - 2i}{z_1 - 2i} = \frac{-\sqrt{3} + 3i - 2i}{4i - 2i} = \frac{-\sqrt{3} + i}{-2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \omega$$

4)  $A(2i), B(Z_1), (Z_2)$

On a  $|\frac{Z_2 - 2i}{Z_1 - 2i}| = \frac{AC}{AB}$  et  $\arg(\frac{Z_2 - 2i}{Z_1 - 2i}) = (\widehat{AB}, \widehat{AC})$

Donc  $\frac{AC}{AB} = |\omega| = 1$  et  $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) = \frac{\pi}{3}$

d'où  $(ABC)$  est un triangle équilatéral.

#### EXERCICE 14 Etude d'une fonction composée

1) La fonction racine carrée est définie sur  $[0; +\infty[$  donc la fonction f est définie pour

$$\frac{2x}{3x+1} \geq 0.$$

On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$2x$	-		-	0 +
$3x+1$	-	0	+	
$\frac{2x}{3x+1}$	+		-	0 +

Donc la fonction f est définie sur  $]-\infty; -\frac{1}{3}[ \cup [0; +\infty[$ .

2) - Recherche des limites à l'infini :

La limite de la fonction rationnelle sous la racine est une forme indéterminée.

Levons l'indétermination :

$$\frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3 + \frac{1}{x}}.$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3}$ .

De plus  $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

On en déduit, comme limite de fonction composée, que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

On démontre de même que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Ainsi la droite d'équation  $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$  est asymptote horizontale à la courbe C en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

- Recherche de la limite en  $-\frac{1}{3}$  :

$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} (3x+1) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} 2x = -\frac{2}{3}$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{3} \\ x < -\frac{1}{3}}} \frac{2x}{3x+1} = +\infty$ .

En effet, pour  $x < -\frac{1}{3}$ ,  $3x+1 < 0$ .

De plus  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

Donc, comme limite de fonction composée, on a  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x) = +\infty$ .

$$\begin{matrix} x \rightarrow -\frac{1}{3} \\ x < -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

Ainsi la droite d'équation  $x = -\frac{1}{3}$  est asymptote verticale à la courbe C.

3)  $x \mapsto \frac{2x}{3x+1}$  est strictement positive et dérivable sur  $\left] -\infty; -\frac{1}{3} \right[ \cup \left] 0; +\infty \right[$ .

Comme dérivée de fonction composée, f est dérivable sur  $\left] -\infty; -\frac{1}{3} \right[ \cup \left] 0; +\infty \right[$ .

Etudions la dérивabilité de f en 0 :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sqrt{\frac{2h}{3h+1}} - 0$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2h}{3h+1}} \\
 &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sqrt{\frac{1}{h^2} \times \frac{2h}{3h+1}} \\
 &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sqrt{\frac{2}{3h^2 + h}} \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

---

Page | 73

On en déduit que la fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0.

4) Pour tout réel  $x$  de  $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left]0; +\infty\right[$ , on pose  $u(x) = \frac{2x}{3x+1}$ .

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{2(3x+1) - 3 \times 2x}{(3x+1)^2} \\ &= \frac{6x + 2 - 6x}{(3x+1)^2} \\ &= \frac{2}{(3x+1)^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{2}{(3x+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}}$$

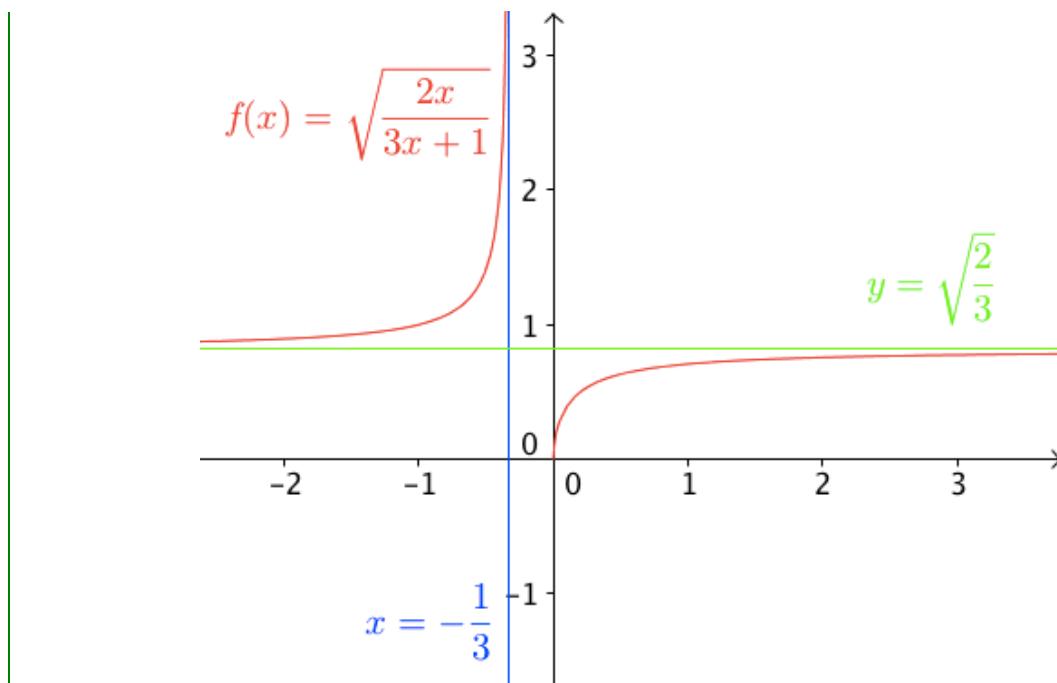
Et donc  $f'(x) > 0$ .

Par conséquent la fonction  $f$  est croissante sur  $]-\infty; -\frac{1}{3}[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

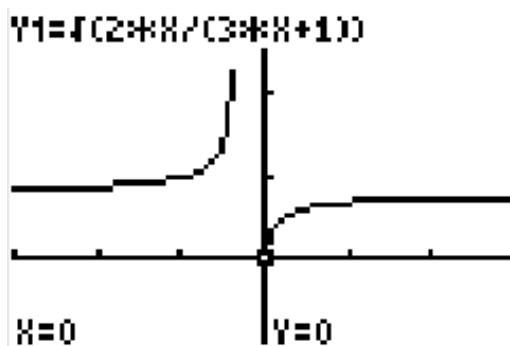
On dresse le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		+		+
$f(x)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\nearrow +\infty$		$0 \nearrow \sqrt{\frac{2}{3}}$

5)



6)

**EXERCICE 15****Analyse Fonctions numériques****PARTIE A**1. a.  $g(x)$  existe si et seulement si:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \text{ ce que donne } x > -1$$

$D_g = ] -1, +\infty [.$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-2(x+1)\ln(x+1) + x}{(x+1)},$$

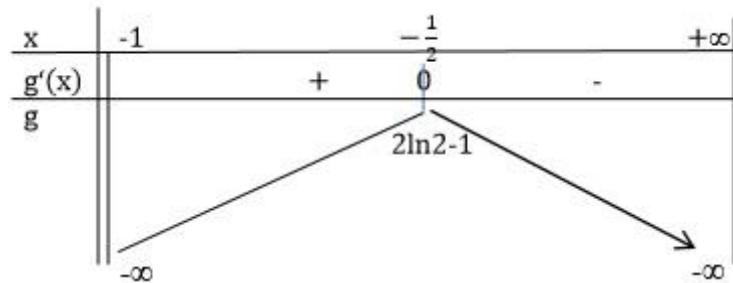
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty}$$

par quotient

**1.b**  $g'(x) = \frac{-2}{x+1} + \left(\frac{x}{x+1}\right)' \quad \boxed{g(x) = \frac{-2x-1}{(x+1)^2}}$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

Tableau de Variation

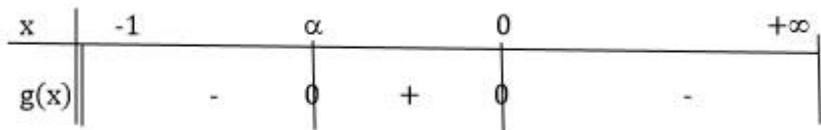


**2. a.**  $g(0) = 0$ .

La restriction de  $g$  à  $]-1; -\frac{1}{2}[$  est strictement croissante et continue et prend ses valeurs dans  $]-\infty, 2\ln 2 - 1[$  qui ontient 0 donc l'équation  $g(x) = 0$  admet  $]-1; -\frac{1}{2}[$  sur une solution unique  $\alpha$ . Idem sur  $]-\frac{1}{2} + \infty[$ , l'équation admet une solution unique 0.

$]-0,72; -0,71[ \subset ]-1; -\frac{1}{2}[$   
et  $(-0,72) \times g(-0,71) < 0$  donc  $\alpha \in ]-0,72; -0,71[$

2. b. 0 étant l'autre zéro de g :



## PARTIE B

1. a. Domaine de définition de f.  
 $f(x)$  existe si et seulement si :

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ \ln(x+1) \neq 0 \end{cases}$$

- ou  $x \in ]-\infty, -1]$ ,

- ou  $x = 0$

$$\text{- d'où } \begin{cases} x > -1 \\ x+ \neq 0 \text{ ou } x \in ]-\infty, -1] \text{ ou } x = 0 \end{cases}$$

$$D_f = (]-1, +[ \{0\}) \cup ]-\infty, -1] \cup \{0\}.$$

$D_f = \mathbb{R}.$

Limites aux bornes du domaine de définition de .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} \times \frac{(x+1)}{\ln(x+1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

1.b. Etudions la nature de la branche infinie au voisinage de  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{(x+1)}{x} \right) e^{-x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Donc  $C_f$  admet au voisinage de  $-\infty$  une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées

Etudions la nature de la branche infinie au voisinage de  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x+1} \frac{(x+1)}{\ln(x+1)} = +\infty$$

Donc  $C_f$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées

## 2. a.

$$f(-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 \quad \text{par quotient et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 0$$

$$\text{D'où} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 0$$

Donc est continue en  $-1$ .

$$\text{On a } f(0)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \times \frac{x}{\ln(x+1)} = 0$$

$$\text{D'où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Donc est continue en  $0$ .

## 2. b. Dérivabilité de $f$ en $-1$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)}{(x+1)} e^{-x-1} = 1$$

f est dérivable en -1 à gauche et  $f'_g(-1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x^2)}{(x + 1)\ln(x + 1)} = -\infty.$$

Donc non dérivable en -1 car non dérivable en -1 à droite.

Interprétation au point d'abscisse -1.

Au point d'abscisse  $-1, (C_f)$  admet une demi-tangente verticale et une demi-tangente de pente 1 à gauche.

Dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x + 1)} = 1$$

Donc f est dérivable en 0 et  $f'(0) = 1$ .

Interprétation au point d'abscisse 0.

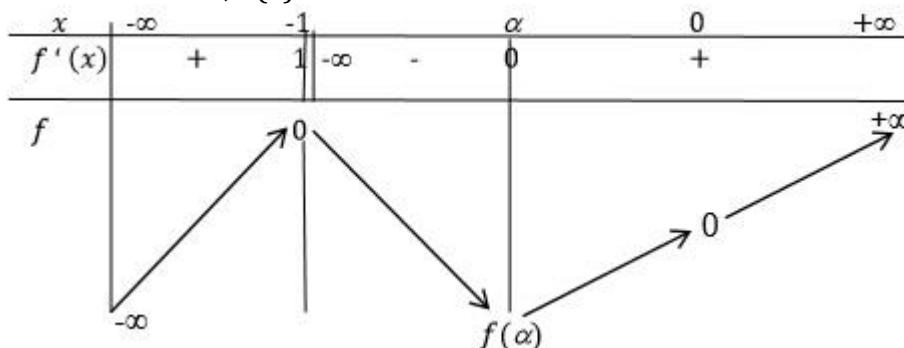
$C_f$  admet à l'origine une tangente de coefficient directeur 1.

**3.a.** Pour tout  $x \in ]-1, +\infty[ \setminus \{0\}$  on a :

$$f'(x) = \frac{-xg(x)}{(\ln(x + 1))^2}$$

$$f' = \frac{-xg(x)}{(\ln(x + 1))^2}$$

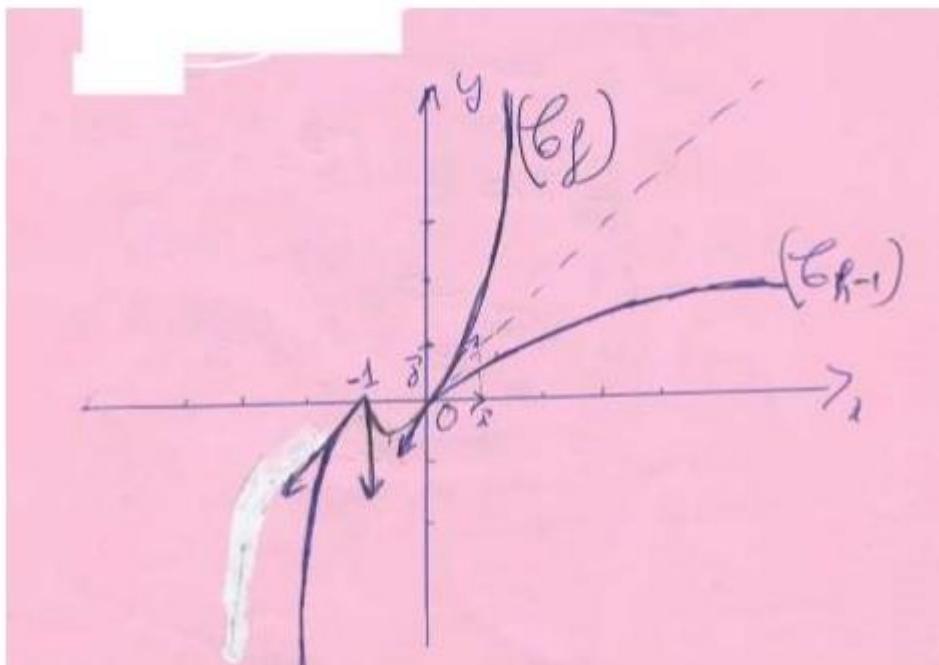
**3. b.** Pour  $x < -1$ ,  $f'(x) = -xe^{-x-1}$



**4. a.**  $h$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty]$ , elle réalise donc une bijection de  $[0, +\infty]$  vers  $[0, +\infty] = J$

**4.b.**  $h^-$  a le même sens de variation que  $h$ , elle est strictement croissante sur  $J$ .

**4. c.** Figure :



### PARTIE C

**1. a.** Posons  $u' = \frac{1}{x^2}$  et  $v' = \frac{1}{x+1}$

Avec  $u(x) = \frac{1}{x}$  et  $v(x) = \ln(x+1)$ .

Sur  $]0, +\infty[$  on a  $m(x) = \frac{1}{x^2} \ln(x+1) + \left(-\frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x+1}\right)$ . (R)

**1. b.** On a  $m(x) = (u(x)v(x))'$

Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  on  $H'(x) = m(x)$  avec  $m(x)(u(x)v(x))'$ .

D'où on a  $H(x) = (u(x)v(x)) + c = -\frac{\ln(x+1)}{x} + c$ .

On a sur  $]0, +\infty[, \quad \frac{1}{f(x)} = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$ .

Or d'après (R) :  $\frac{\ln(x+1)}{x^2} = m(x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x+1} = m(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

Soit  $G$  une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x^2}$ .

$$\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx = 3 \left( \ln 2 - \ln \sqrt{3} \right) = 3 \ln \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

**EXERCICE 16****Fonctions numériques**

**A) 1.** Soit  $I() = \int_0^t e^t(t+2)dt$

En intégrant par parties  $\int_0^t e^t(t+2)dt$ , on obtient :

$$I() = e(+1) - 1 \quad (0,5 \text{ pt})$$

D'où  $I(x) = e^x(x+1) - 1 \quad (0,25 \text{ pt})$

**2.**  $k$  étant une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ , soit  $h$  telle que  $h(x) = k(x)e^{-x}, \forall x \in R$

**a)** Si  $h$  vérifie la condition  $h'(x) + h(x) = x+2$  alors on a :

$$k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k = x+2 \quad \text{d'où}$$

$$k'(x) = (x+2)e^x. \quad (0,5 \text{ pt})$$

**b)** Déduisons-en  $h$ . Puisque  $k'(x) = (x+2)e^x$ .

D'après 1)  $I$  est une primitive de  $k'$ , donc

$$k(x) = e^x(x+1) - 1 + c, \text{ avec } c \text{ une constante.}$$

or  $h(0) = 2$  nous donne  $k(0) = 2$  donc  $c = 2$ . Ainsi

$$k(x) = e^x(x+1) + 1 \quad (0,25 \text{ pt})$$

D'où  $k(x) = x+1 + e^{-x} \quad (0,25 \text{ pt})$

**B) I) 1.** Etude des variations de la fonction  $g$ , définie par

$$g(x) = x + 1 + e^{-x}, \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Domaine de définition de  $g$  :

$g$  étant définie partout dans  $\mathbb{R}$ , d'où  $D_g = \mathbb{R}$

Continuité et dérивabilité :

- La fonction  $x \mapsto x + 1$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de même que la fonction  $x \mapsto e^x$ . Par composée, la fonction  $x \mapsto e^x$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,

- Par somme  $g$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$

Calcul de  $g'(x)$

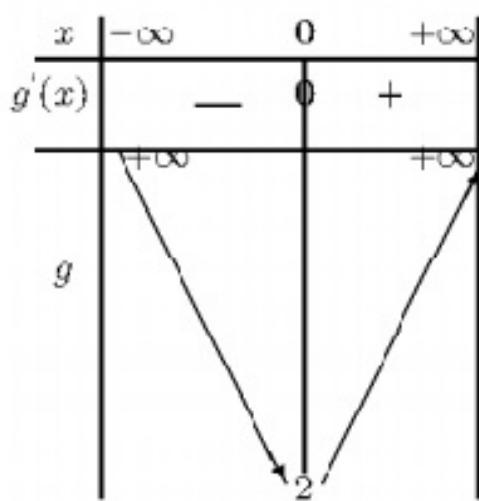
$$g'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}$$

D'où  $g'(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$  et  $g'(x) \leq 0$  pour tout  $x < 0$ .

Tableau de variation de  $g$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + e^{-x} = +\infty$$



**2.**  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 2$  d'après le tableau de variation de  $g$ , ce qui implique  $g$  est strictement positif

**II)  $f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$ .**

**1.** Les variations de la fonction  $f$  :

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

-  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par composée

- Dérivée :

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + 1 + e^{-x}}$$

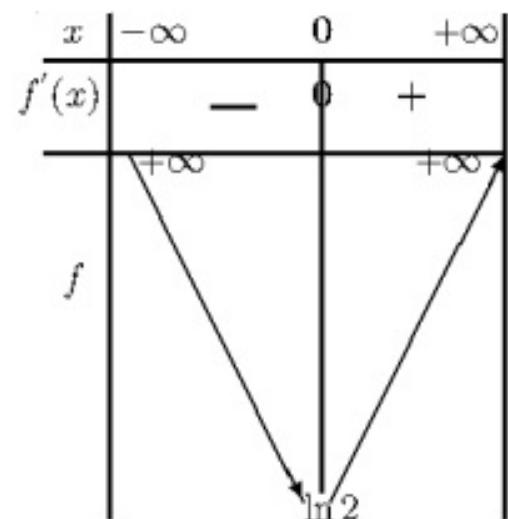
- Sens de variation de  $f$ :

$f'(x)$  a le même signe que  $x - 1 - e^{-x}$ .

$f'(x) \geq 0$  si  $x \geq 0$ ,

$f'(x) < 0$  si  $x < 0$ .

- Tableau de variation



2.  $M(\frac{x}{\ln x})$ ,  $M(\frac{x}{\ln x})$ ,

a)  $MN = \ln(x + 1 + e^{-x}) - \ln x$ . D'une part, la fonction  $\ln$  étant croissant et

$x + 1 + e^{-x} > x$ , d'où  $\ln(x + 1 + e^{-x}) > \ln(x)$ , donc

$MN > 0$  (1).

$$\text{D'autre part, } MN = \ln\left(\frac{x + 1 + e^{-x}}{x}\right)$$

Or si  $x > 0$  alors  $e^{-x} < 1$ , d'où  $x + 1 + e^{-x} < x + 2$ , ainsi

$$\ln\left(\frac{x+1+e^{-x}}{x}\right) < \ln\left(\frac{x+2}{x}\right), \text{ donc}$$

$$MN < \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \quad (2)$$

(1) et (2) donnent :

$$0 < MN < \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0$ ,

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} MN < 0$ , d'où d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} MN = 0$$

3.a) Démontrons que  $f(x) = -x + \ln(xe^x + e^x + 1)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

On sait que  $f(x) = \ln(x + 1e^{-x} + e^{-x}) = \ln\left(\frac{(x+1)e^x + 1}{e^x}\right)$ .

Cherchons le signe de  $m(x) = (x+1)e^x + 1$ .

On a  $m'(x) = (x+2)e^x$ , et elle s'annule en -2

$m$  étant décroissante sur  $]-\infty; -2]$  et croissante sur  $]-2; +\infty]$

alors  $m$  admet un minimum en -2 et  $m(-2) = \frac{e^{2-1}}{e^2}$ .

Donc pour tout  $x$ ,  $m(x) > 0$ . Ainsi donc

$$f(x) = -x + \ln((x+1)e^x + 1)$$

b) D'après a)  $f(x) = -x + \ln((x+1)e^x + 1)$ . Or

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln((x+1)e^x + 1) = 0$ . Donc  $(C_f)$  admet une asymptote oblique  $\Delta$ , d'équation  $y = -x$  au voisinage de  $-\infty$

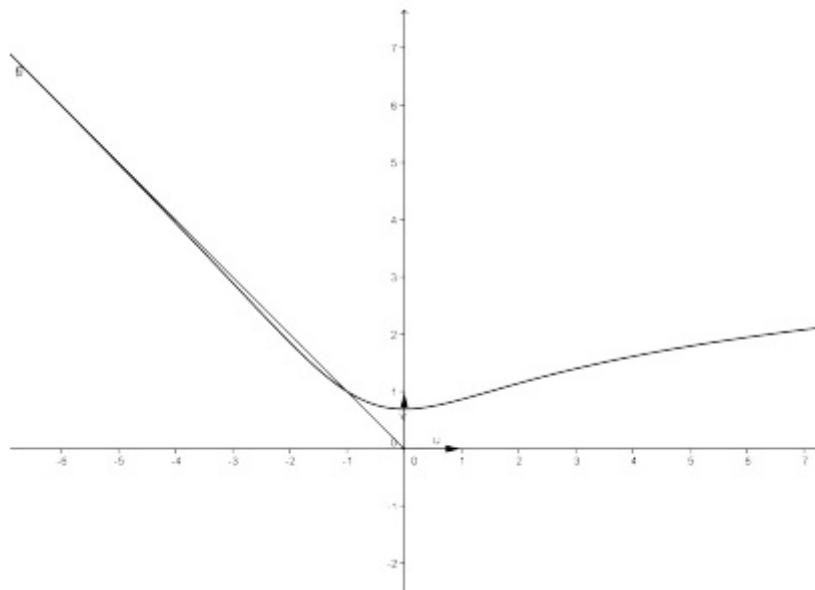
Position de  $(C_f)$  par rapport à  $\Delta$  :

Cherchons le signe de  $\ln((x+1)e^x + 1)$ .

$\ln((x+1)e^x + 1) \geq 0$  si  $(x+1) \geq 0$ .

Alors voisinage de  $+\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln((x+1)e^x + 1)}{x} = 0$ .

Donc  $(C_f)$  admet une branche infinie de direction l'axe ( $Ox$ ).



### EXERCICE 17

### Fonctions numériques

A)  $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

- 1)  $g(1) = 0$  (0,25 point)  
2)  $Dg = ]0; +\infty[$

### Limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad (0,25 \text{ point} + 0,25 \text{ point})$$

### Continuité et dérivabilité de g

$x \rightarrow 1 - x^2$  est continue et dérivable sur IR donc sur  $]0, +\infty[$   
 $x \rightarrow -\ln x$  est continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$

$\implies x \rightarrow 1 - x^2 - \ln x$  est continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$  (0,5 point)

### Dérivée de g

$$g(x) = -2x - \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 - 1}{x}$$

### Signe de $g'(x)$ et sera de variation de f.

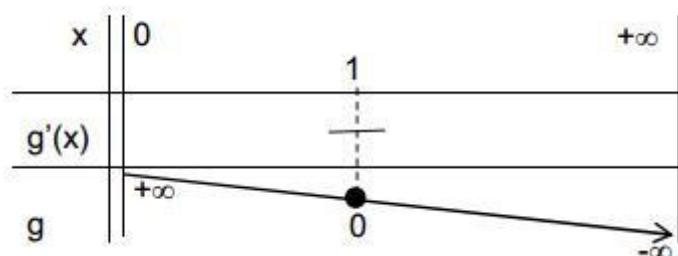
$g'(x)$  a le même signe que  $-2x^2 - 1$  sur  $]0, +\infty[$

Or  $-2x^2 - 1 < 0$  pour tout réel x

D'où  $g'(x) < 0$  sur  $]0, +\infty[$

$\rightarrow g$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ . (0,5 point)

### Tableau de variation de g



3) D'après le tableau de variations de g et la question 1)

Sur  $]0, +\infty[$   $g(x) > 0$

et sur  $]1, +\infty[$   $g(x) < 0$  (0,5 point)

B)  $f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$

1) f est définie si et seulement si  $x > 0$   
 $D_f = ]0, +\infty[$  (0,25 point)

### Limites:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad (0,25 \text{ point} + 0,25 \text{ point})$$

La droite d'équation  $x = 0$  est une asymptote verticale a' (Cf).

**Continuité et dérivabilité de f**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$  est continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $]0, +\infty[$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$  est continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$  (1)

De même  $x \mapsto 2-x$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  (2)

(1) et (2)  $\rightarrow f$  est continue et dérivable sur  $R_+^*$ . (0,5 point)

Page | 86

**Dérivée de f :**

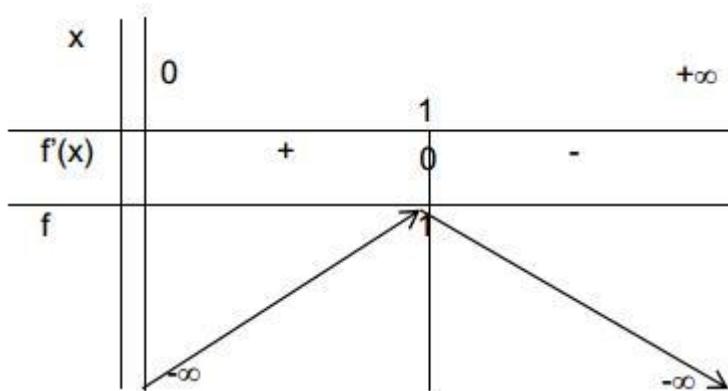
$$f'(x) = -1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{1 - x^2 - \ln x}{x^2} \text{ pour tout } x \in R_+^*. \quad (0,5 \text{ point})$$

Signe de  $f'(x)$  et sens de variations de f :

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$   $f'(x) = \frac{1 - x^2 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$  a le même signe que g.  
Sur  $]0; 1[$   $f'(x) > 0 \rightarrow f$  f est strictement croissante sur  $]0; 1[$  (0,25 point)

Sur  $]0; +\infty[$   $f'(x) < 0 \rightarrow f$  f est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ . (0,25 point)

$$f'(1) = \frac{g(1)}{1} = 0 \rightarrow f', \text{ s'annule en 1.}$$

**Tableau de variation de f :**

**3 a)** Démontrons que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = -x + 2$  est une asymptote à la courbe de f.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 2 - x + \frac{\ln x}{x} + x - 2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$\rightarrow \delta : y = -x + 2$  est asymptote à la courbe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .  
(0,25 point)

b) Position de  $(C_f)$  par rapport à  $\delta$ .

$f(x) - y = \frac{\ln x}{x} > 0$  si et seulement si  $x > 1$  donc sur  $]1, +\infty[$   $(C_f)$  est au dessus de  $\delta$ .

$f(x) - y = \frac{\ln x}{x} < 0$  si et seulement si  $x \in ]0, 1[$  donc sur  $]0, 1[$   $(C_f)$  est en dessous de  $\delta$

$f(x) - y = 0$  si et seulement si  $x = 1$  donc  $(C_f)$  et  $\delta$  se coupent au point d'abscisse 1.  
(0,25 point)

4) Soit  $A()$  le point où la tangente est parallèle à  $(\Delta)$ .

Alors on a  $f'(x_0) = -1 \rightarrow \frac{g(x_0)}{x_0^2} = -1$  avec  $x_0 > 0$   
D'où  $g(x_0) = -x_0^2, x_0 > 0$

$$\rightarrow 1x_0^2 - \ln x_0 = -x_0^2, x_0 > 0$$

$$\rightarrow \ln x_0 = 1, x_0 > 0$$

$$\rightarrow x_0 = e, x_0 > 0$$

D'où  $x_0 = e$  et  $f(e) = 2 - e + \frac{1}{e}$

$$\rightarrow A \left( 2 - e + \frac{1}{e} \right)$$

5) Courbe  $(C_f)$  voir papier millimétré.

### EXERCICE 18

### Fonctions numériques

(E 0) :  $y' + y = 0$  et (E)  $y' + y = e - x \cos x$

**a)** Trouver les réels a et b pour que h soit solution de (E)  
avec  $h(x) = (a \cos x + b \sin x)e^{-x}$

$$h'(x) = (-a \sin x + b \cos x)e^{-x} - (a \cos x + b \sin x)e^{-x}$$

$h'(x) + h(x) = e^{-x}\cos x$ ,  $h(x)$  étant solution de (E)

$$\implies (b-a)\cos x e^{-x} - (a+b)\sin x e^{-x} + (a \cos x + b \sin x)e^{-x} = e^{-x}\cos x$$

$$(b-a)\cos x - (a+b)\sin x + a \cos x + b \sin x = \cos x$$

**b)**  $\cos x - a \sin x = \cos x$

$$(b-1)\cos x - a \sin x = 0 \quad \forall x \in R \text{ en particulier pour } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}$$

$$\implies b-1=0 \text{ et } a=0 \iff b=1 \text{ et } a=0$$

d'où  $a=0$  et  $b=1$

**b)** Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si  $f-h$  est solution de (E 0)

Supposons f solution de (E)

on a  $f'(x) + f(x) = e^{-x}\cos x$  or  $h'(x) + h(x) = e^{-x}\cos x$

$$\implies f'(x) + f(x) = h'(x) + h(x) \implies (f-h)'(x) + (f-h)(x) = 0$$

$\implies (f-h)$  est solution de (E 0)

Supposons que  $(f-h)$  soit solution de (E 0)

$$\implies (f-h)'(x) + (f-h)(x) = 0 \implies f'(x) - h'(x) + f(x) - h(x) = 0$$

$$\implies f'(x) + f(x) = h'(x) + h(x) = e^{-x}\cos x$$

$$\implies f'(x) + f(x) = e^{-x}\cos x \implies f \text{ solution de (E)}$$

**c)** Résoudre (E 0)

(E 0) :  $y' + y = 0$  équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants

L'intégrale générale de cette équation est  $y(x) = Ce^{-x}$

**d)** En déduire la solution générale de (E)

on a f est solution de (E) ssi  $f-h$  est solution de E 0

on pose  $f-h = y(x) = C e^{-x}$

donc  $f(x) = h(x) + C e^{-x}$

$$f(x) = (a \cos x + b \sin x)e^{-x} + C e^{-x} = (a \cos x + b \sin x + C)e^{-x}$$

d'où la solution générale de (E) est

$$f(x) = (a \cos x + b \sin x + C)e^{-x}$$

e) Déterminer la solution g de (E) telle que  $g(0) = 0$

$$\text{on a } f(0) = 0 \iff a + c = 0 \iff a = -c$$

$$g(x) = (a \cos x + b \sin x - a)e^{-x}$$

2)  $\ell(x) = e^{-x} \sin x \quad \Delta_\ell = [0, 2\pi]$

$\ell$  est continue et dérivable sur  $[0, 2\pi]$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ell(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \ell(x) = \lim_{x \rightarrow 2\pi} e^{-x} \sin x = 0$$

$$\ell'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = (\cos x - \sin x)e^{-x}$$

$$\ell'(x) = 0 \implies \cos x = \sin x \implies x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ or } x \in [0, 2\pi]$$

$$\implies \ell'(x) = 0 \implies x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4}$$

$$\ell(x) = e^{-x} \sin x$$

$$\ell'(x) = (\cos x - \sin x)e^{-x}$$

insérer tableau variation

$$\ell\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$$

c) Calculer  $I = \int_0^{2\pi} \ell(x) dx$

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin x dx$$

$$u = -e^{-x} \quad v' = \sin x$$

$$u' = e^{-x} \quad v = \cos x$$

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin x dx = \left[ -e^{-x} \cos x \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos x dx$$

$$I = 1 - e^{-2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos x dx$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos x dx$$

$$u = e^{-x} \quad v' = \cos x$$

$$u' = -e^{-x} \quad v = \sin x$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-x} \cos x dx = [e^{-x} \sin x]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin x dx = I$$

$$\text{donc } I = 1 - e^{-2\pi} - I \implies 2I = 1 - e^{-2\pi} \implies I = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2}$$

### EXERCICE 19

### Etude de fonction et calcul d'aire

$$\text{I. } f(x) = x(1 + e^{2-x})$$

$$1) h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$$

$$\text{a) } Dh = \mathbb{R}$$

$h$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$h'(x) = -e^{2-x} + (x-1)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$$

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h$		0	

$$\text{b) } h(2) = 1 - e^0 = 0$$

$$h(x) > 0, \text{ pour } x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

$$h(2) = 0$$

2) a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + e^{2-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

(C) admet en  $-\infty$  une branche parabolique de direction  $(Oy)$

c)

$$f(x) - x = xe^{2-x}$$

$$f(x) - x = \frac{x}{e^x} \times e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$$

d)  $f(x) - x = xe^{2-x}$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x) - x$	-	0	+

$x \in ]-\infty, 0[$ , ( $C$ ) en dessous de  $\Delta$

$x \in ]0, +\infty[$ , ( $C$ ) en dessus de  $\Delta$

( $C$ ) et  $\Delta$  se coupent en l'origine  $O$

3) a)

$$f'(x) = 1 + e^{2-x} + x(-e^{2-x})$$

$$f'(x) = 1 + (1-x)e^{2-x} = h(x)$$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f$	$-\infty$	4	$+\infty$

b)

$f$  continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  bijective de  $\mathbb{R}$  sur lui-même

c)

$$f(2) = 4 \quad f^{-1}(4) = 2$$

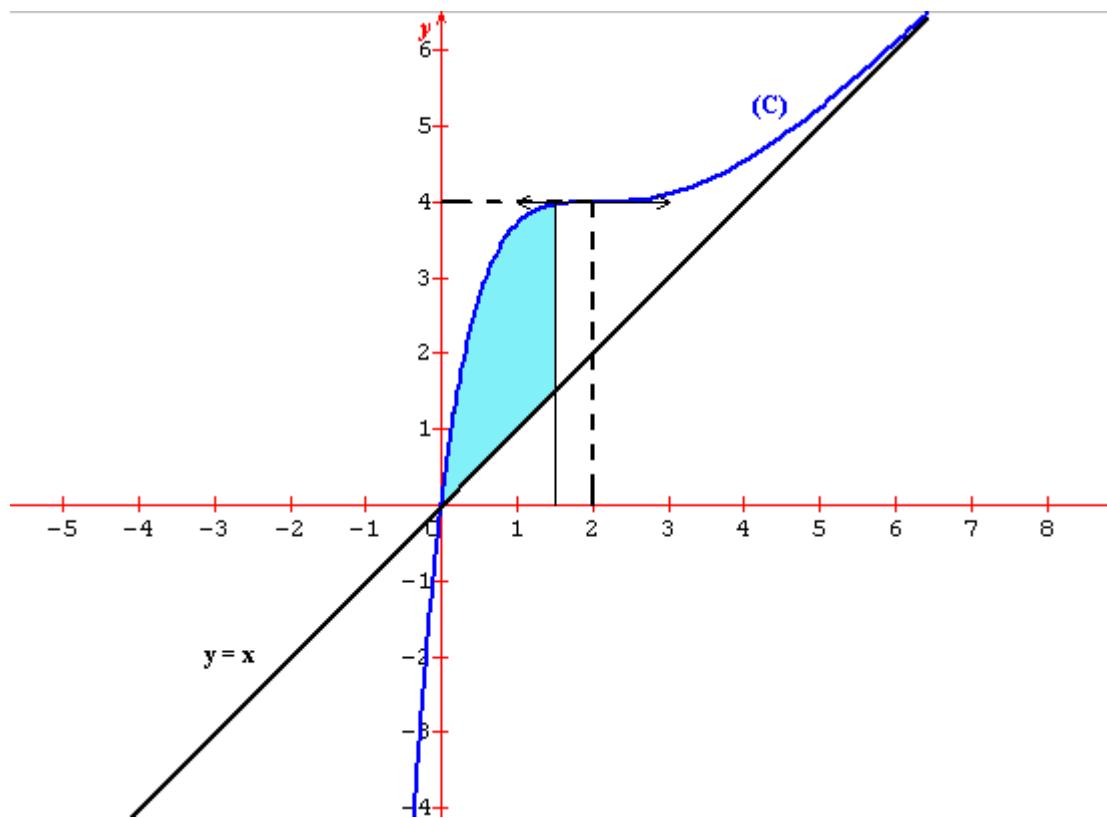
et  $f'(2) = 0$  donc  $f^{-1}$  non dérivable en 4.

d)  $T : y = 4$

pour  $x \leq 2$ ,  $f(x) \leq 4$

pour  $x \geq 2$ ,  $f(x) \geq 4$

e)



1.

$$R_\lambda = \{M(x, y) \mid 0 \leq x \leq \lambda \text{ et } x \leq y \leq f(x)\}$$

$$a(\lambda) = \int_0^\lambda (f(x) - x) dx$$

$$a(\lambda) = 4 \int_0^\lambda x e^{2-x} dx$$

$$u = x \setminus v = e^{2-x}$$

$$u' = 1 \quad v' = -e^{2-x}$$

$$a(\lambda) = 4 \left[ [-xe^{2-x}]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{2-x} dx \right]$$

$$a(\lambda) = 4 \left[ -xe^{2-x} - e^{2-x} \right]_0^\lambda$$

$$a(\lambda) = 4 \left[ (x+1)e^{2-x} \right]_0^\lambda$$

$$a(\lambda) = 4e^2 - 4(X+1)e^{2-X}$$

$$a(\lambda) = 4e^2 - 4Xe^{2-X} - Xe^{2-X}$$

2.

$$a = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} a(\lambda) = 4e^2 \text{ cm}^2$$

**EXERCICE 20****Etude de fonction et bijection**

$$\text{Partie A: } f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x)$$

**1)a)** Etude des variations de  $f$ .

$f(x)$  existe si et seulement si  $1 + e^x > 0$

or  $1 + e^x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

donc  $D_f = \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x) \right) = 0$$

car  $e^x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x) \right) = -\infty$$

car  $\frac{e^x}{1 + e^x} \rightarrow 1$  et  $\ln(1 + e^x) \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow \frac{e^x}{1 + e^x}$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$

$x \rightarrow 1 + e^x$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$1 + e^x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

donc  $\ln(1 + e^x)$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$

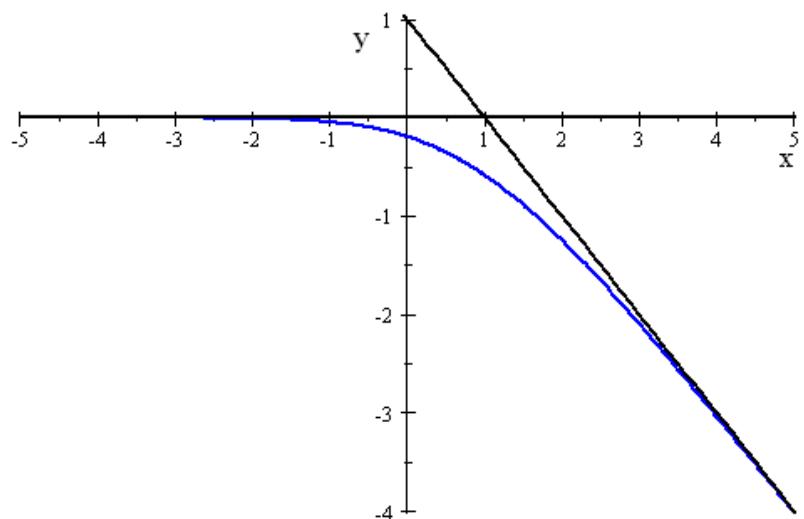
d'où  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme différence de deux fonctions continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$  donc  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$

**b)** on en déduit que la droite d'équation  $y = 1 - x$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ . à la Courbe de  $f$

Tableau de variation

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f$	0	$-\infty$



**c)**  $f$  est continue strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  réalise une bijection de  $]-\infty, +\infty[$  sur l'image de  $\mathbb{R}$  qui est égale à  $]-\infty, 0[$

**2)**  $g(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$

**a)** pour tout  $x \in \mathbb{R}, 1 + e^x > 0$ , donc  $\ln(1 + e^x)$  est définie

d'où  $D_g = \mathbb{R}$

la fonction  $x \rightarrow 1 + e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et strictement positive.

Page | 94

donc  $\ln(1 + e^x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . or  $e^{-x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

d'où  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$

**b)** 
$$g'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^x) + e^{-x} \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$g'(x) = e^{-x} \left[ \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x) \right] = e^{-x} f(x)$$

**c)** 
$$\frac{\ln(1 + e^x)}{1 + e^x} \rightarrow 0$$
 et  $(1 + e^x) \rightarrow 1$

**d)** on a  $g'(x) = e^{-x} f(x)$

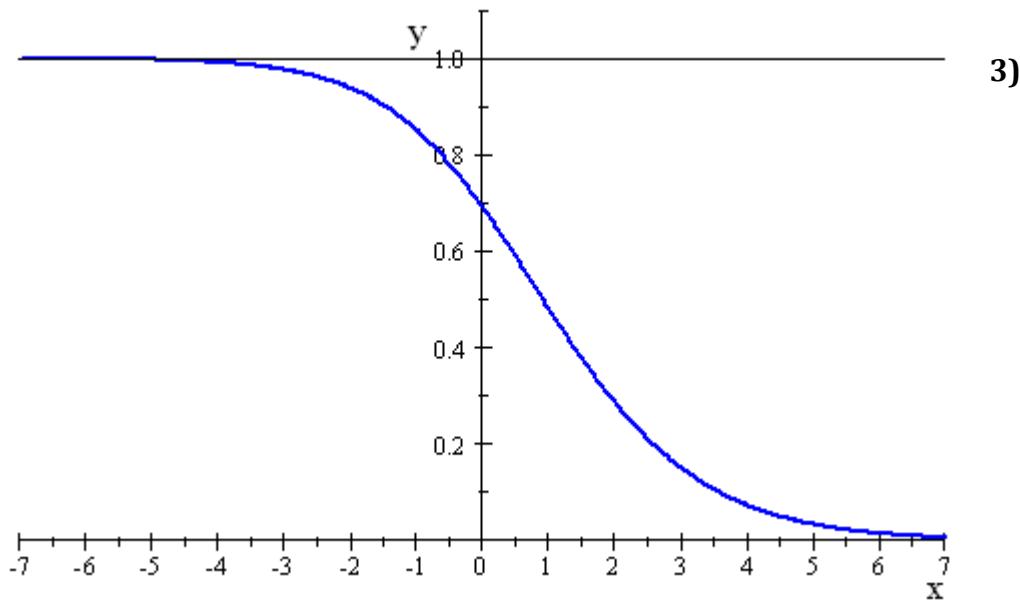
or d'après 2) c) on a  $f(x) < 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

d'où  $g'(x) < 0$  sur  $\mathbb{R}$

tableau de variation de  $g$ :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	—	
$g$	1 	0

courbe de  $g$ :



a)  $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

b)  $\lambda \in \mathbb{R}$   $I(\lambda) = \int_0^\lambda g(x)dx$

$g$  est continue sur  $[0, \lambda]$  donc  $I(\lambda)$  existe

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda g(x)dx = \int_0^\lambda e^{-x} \ln(1+e^x)dx$$

on pose  $u'(x) = e^{-x}$  et  $v(x) = \ln(1+e^x)$

on obtient  $u(x) = -e^{-x}$  et  $v'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

donc

$$= -e^{-\lambda} \ln(1+e^\lambda) + \ln 2 + \int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx$$

$$I(\lambda) = 2 \ln 2 - \ln(1+e^{-\lambda}) - e^{-\lambda} \ln(1+e^\lambda)$$

c) déterminons la limite de  $I(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-\lambda}) = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \ln(1 + e^{\lambda}) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} g(\lambda) = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = 2 \ln 2$$

**Partie B:**

**1)**  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$

donc elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $J = g(\mathbb{R}) = ]0, 1[$

**2)**

a)  $g(0) = e^0 \ln(1 + e^0) = \ln 2$

b) montrons que  $g^{-1}$  est dérivable au point  $\ln 2$ .

$g$  est dérivable en 0 et  $g'(0) \neq 0$  ( $g'(x) < 0$  sur  $\mathbb{R}$ )

alors  $g^{-1}$  est dérivable au point  $\ln 2 = g(0)$

c) équation de la tangente à  $C_{g^{-1}}$  au point d'abscisse  $\ln 2$

$$y = (g^{-1})'(\ln 2)(x - \ln 2) + g^{-1}(\ln 2)$$

$$(g^{-1})'(\ln 2) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln 2} = \frac{2}{1 - 2 \ln 2}$$

$$\text{donc } y = \frac{2}{1 - 2 \ln 2}(x - \ln 2) + 0 = \frac{2}{1 - 2 \ln 2}(x - \ln 2)$$

$$y = \frac{2}{1 - 2 \ln 2}(x - \ln 2)$$

**EXERCICE 21**

**Etude de fonction et calcul d'aire**

$$f(x) = \frac{(2x - 1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$$

**1)**  $f(x)$  existe entre  $\{x \in \mathbb{R} \text{ et } e^x - 1 \neq 0\}$

posons  $e^x - 1 = 0 \iff e^x = 1 \iff x = \ln 1 = 0$  donc  $Df = \mathbb{R}^*$

posons  $f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1}$

$$f(x) = \frac{ax(e^x - 1) + b(e^x - 1) + c}{e^x - 1}$$

$$f(x) = \frac{(ax + b)e^x - ax + c - b}{e^x - 1}; x \neq 0$$

d'autre part  $f(x) = \frac{(2x - 1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}; x \neq 0$

par identification  $a = 2$

$$b = -1$$

$$c = b + 2 = 1$$

$$\text{ainsi } a = 2 \quad b = -1 \quad c = 1$$

## 2) Limites aux bornes

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\text{de même } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

**3)**

a) calcul de  $f'(x)$

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$f'(x) = (2x - 1)' + \left( \frac{1}{e^x - 1} \right)' ; \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$$

b) posons  $e^x = t$  et  $2(e^x)^2 - 5(e^x) + 2 = 0$

donc  $2t^2 - 5t + 2 = 0$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 ; \quad \sqrt{\Delta} = 3$$

$$t = \frac{5-3}{4} \text{ ou } t = \frac{5+3}{4}$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = 2$$

$$x = -\ln 2 \text{ ou } x = \ln 2$$

c)

$$2 e^{2x} - 5e^x + 2 = 2 \left( e^x - \frac{1}{2} \right) (e^x - 2)$$

$$2 e^{2x} - 5e^x + 2 = (2e^x - 2)(e^x - 2)$$

$$f(\ln 2) = \frac{(2 \ln 2 - 1) 2 - 2 \ln 2 + 2}{2 - 1} = 2 \ln 2$$

$$f(-\ln 2) = -\frac{2}{3} \left( \ln 2 + \frac{3}{2} \right)$$

tableau de variations:

$x$	$-\infty$	$-\ln 2$	$0$	$\ln 2$	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	-	0	+
$f$	$-\infty$	$\frac{-2}{3}(\ln 2 + \frac{3}{2})$	$-\infty$	$+\infty$	$2 \ln 2$	$+\infty$

4)

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$[f(x) - (2x - 1)] = \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$$

donc la droite d'équation  $y = 2x - 1$  est asymptote de ( $C$ )

$$f(x) - (2x - 2) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1} - 2x + 2$$

$$f(x) - (2x - 2) = \frac{1}{e^x - 1} + 1$$

$$f(x) - (2x - 2) = \frac{e^x}{e^x - 1} \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 2)] = \frac{0}{0-1} = 0$$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 2)] = 0$

la droite d'équation  $y = 2x - 2$  est asymptote de  $(C)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

La droite d'équation  $x = 0$  est asymptote de  $(C)$

**5)**

$$x^\Omega = \frac{x + (-x)}{2} = 0$$

$$y^\Omega = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

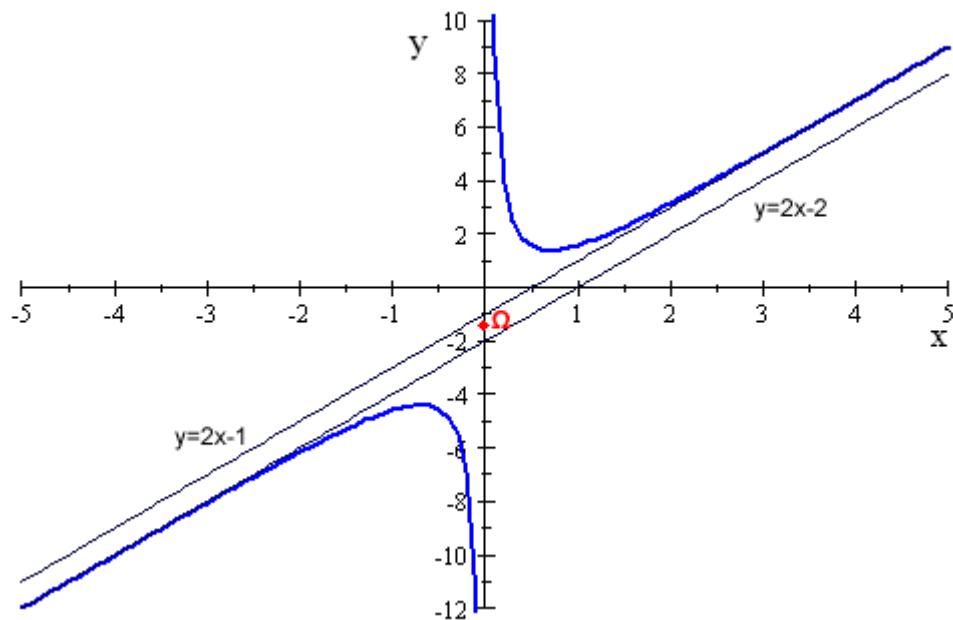
$$f(-x) = -2x - 1 + \frac{1}{e^{-x} - 1}$$

$$f(x) + f(-x) = -2 + \frac{1 - e^x}{e^x - 1} \quad ; \quad x \neq 0$$

$$f(x) + f(-x) = -3 \quad \frac{f(x) + f(-x)}{2} = -\frac{3}{2}$$

$\Omega(0, -\frac{3}{2})$  est centre de symétrie

**6)** Courbe de  $f$ :



7)

a)  $f(x) = 2x + \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x - 1}$

$$f(x) = \frac{(2x - 1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$$

par identification

$$\alpha + \beta = -1$$

$$-\alpha = 2$$

$$\alpha = -2 \text{ et } \beta = 1$$

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

b)  $k$  est un réel supérieur ou égal à 2

$$f(x) - (2x - 1) = -1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$A(k) = \int_{\ln 2}^{\ln k} \left( -1 + \frac{e^x}{e^x - 1} \right) dx \times 4cm^2$$

$$A(k) = [-x + \ln(e^x - 1)]_{\ln 2}^{\ln k} \times 4cm^2$$

$$A(k) = \left[ \ln \left( \frac{e^x - 1}{e^x} \right) \right]_{\ln 2}^{\ln k} \times 4cm^2$$

$$A(k) = \left[ \ln \left( \frac{k-1}{k} \right) - \ln \left( \frac{1}{2} \right) \right] \times 4cm^2$$

$$A(k) = \left[ \ln \left( \frac{k-1}{k} \right) + \ln 2 \right] \times 4cm^2$$

$$A(k) = 4 \ln \left[ 2 \left( \frac{k-1}{k} \right) \right] cm^2$$

c)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k) = 4 \ln 2 cm^2$

**EXERCICE 22 Intersection d'une droite et d'une courbe (12 pts)**

1/ a) l'ensemble de définition de  $g$  est  $[0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x[1 - 2 \ln x + (\ln x)^2] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$$

Donc  $g$  est continue en 0

$g$  est continue sur les autres valeurs de  $]0, +\infty[$  car les fonctions  $x \rightarrow x$  et  $x \rightarrow (1 - \ln x)^2$  y sont continues.

Par suite  $g$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

Les fonctions  $x \rightarrow x$  et  $x \rightarrow (1 - \ln x)^2$

sont dérivables sur  $]0, +\infty[$  donc  $g$  est dérivable sur

$]0, +\infty[$ . Au point  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x)^2 = +\infty$$

$g$  n'est pas dérivable au point  $x = 0$

donc  $g$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$

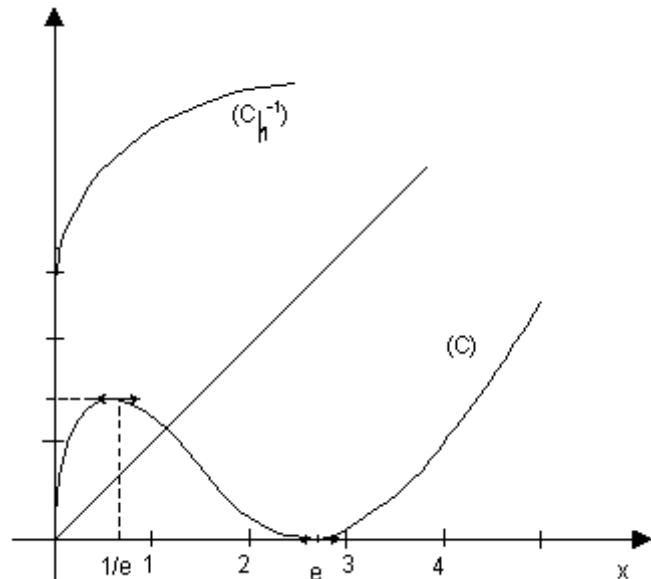
b)  $g'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2x(1 - \ln x) * \frac{1}{x}$

$$= (\ln x - 1)(\ln x + 1)$$

Tableau de variations

$x$	0	$1/e$	$e$	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g$	0	$4/e$	0	$+\infty$	

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$



2. a-  $\partial(\alpha) = \int_{\alpha}^e g(x)dx.u.a$

$$= \int_{\alpha}^e x(1 - \ln x)^2 dx.u.a$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha^2(1 - \ln \alpha)^2 + \int_{\alpha}^e (1 - \ln x)xdx.u.a$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^2(1 - \ln \alpha) + \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\alpha^2$$

Donc

$$= [-\frac{1}{2}\alpha^2[(1 - \ln \alpha)^2] + (1 - \ln \alpha) + \frac{1}{4}e^2].u.a$$

**b)**

$$= \frac{1}{4}e^2$$

**3/-a)** Un point de  $(C) \cap (\Delta)$  vérifie  $\begin{cases} y = x(1 - \ln x)^2 \\ y = 0 \end{cases}$

$$x[1 - (1 - \ln x)^2] = 0$$

$$\text{donc } x(1 - 1 + \ln x)(1 + 1 - \ln x) = 0$$

$$x \ln x (2 - \ln x) = 0$$

$$\text{d'où } x = 0, x = 1, x = e^2$$

pour  $x = 0$   $g(x) = 0$

$$x = 1 \quad g(x) = 1$$

$$x = e^2 \quad g(x) = e^2(1 - 2)^2 = e^2$$

Donc les points d'intersection de C et de droite  $D : y = x$

sont les points de coordonnées  $(0, 0); (1, 1); (e^2, e^2)$

**b)** Un point de  $(C) \cap (\Delta m)$  vérifie  $\begin{cases} y = x(1 - \ln x)^2 \\ y = mx \end{cases}$   
donc  $x[m - (1 - \ln x^2)] = 0$

Les abscisses des points  $M_1$  et  $M_3$ , lorsqu'elles existent vérifient :

$$m - (1 - \ln x^2) >= 0$$

si  $m < 0$  il n'y a pas points d'intersection

si  $m = 0$   $\Delta m$  est l'axe des abscisses les points d'intersection sont les points de coordonnées  $(0, 0)$  et  $(e, 0)$

si  $m > 0$  on a  $(\sqrt{m} - 1 + \ln x)(\sqrt{m} + 1 - \ln x) = 0$  donc

$$x_1 = e^{1-\sqrt{m}} \text{ et } x_2 = e^{1+\sqrt{m}}$$

$$M_1 \left( \begin{array}{c} e^{1-\sqrt{m}} \\ me^{1-\sqrt{m}} \end{array} \right) \text{ et } M_2 \left( \begin{array}{c} e^{1+\sqrt{m}} \\ me^{1+\sqrt{m}} \end{array} \right)$$

En résumé  $\Delta m$  recoupe C en deux points autres que 0 lorsque  $m > 0$

**c)**  $p = (\Delta m) \cap (D)$

$$\text{donc } p \left( \begin{array}{c} 2 \\ me \end{array} \right)$$

$$OM_1 * OM_2 = \sqrt{e^{1(1-\sqrt{m})} + m^2 e^{2(1-\sqrt{m})}} \sqrt{e^{2(1+\sqrt{m})} + m^2 e^{2(1+\sqrt{m})}}$$

$$= \sqrt{e^4 + m^2 e^4 + m^2 e^4 + m^4 e^4}$$

$$= \sqrt{e^4(1 + 2m^2 + m^4)}$$

$$= (1 + m^2)e^2$$

or  $OP^2 = e^2 + m^2e^2$

donc  $OM_1 * OM_2 = OP^2$

**4 - a)** Dans  $]e, +\infty[$  la restriction  $h$  de la fonction  $g$  est continue et strictement croissante donc elle est bijective.

Sa réciproque  $h^{-1}$  est définie de  $h [e, +\infty[$  à  $[e, +\infty[$

C'est-à-dire  $h^{-1} : [0, +\infty[ \rightarrow [e, +\infty[$

**b)**  $h^{-1}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  car  $h'(e) = 0$

$$h(e^2) = g(e^2) = e^2$$

**c)** Construction de  $C_{h^{-1}}$  (voir graphique)

$C_{h^{-1}}$  est symétrique de  $C_h$  par rapport à la droite d'équation  $y = x$

### EXERCICE 23 Nombres complexes et suites numériques

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

$S = S \left( O, \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$  est la similitude de centre 0, d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**1.**  $z' - z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z' - z_0)$  or  $z_0 = 0$  donc

$$z' = i \frac{\sqrt{2}}{2} z$$

**2. (a)**  $z_1 = i \frac{\sqrt{2}}{2} z_0 = i \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) = i \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$z_2 = i \frac{\sqrt{2}}{2} z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = i \frac{\sqrt{2}}{2} z_2 = -i \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

b)  $z_n = i \frac{\sqrt{2}}{2} z_{n-1}, n \geq 1.$

c) On prévoit que, d'après(b),  $(z_n) \in \mathbb{N}$  est une suite géométrique de premier terme  $z_0 = 1 + i$  et de raison  $q = i \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

d'où  $z_n = \left(i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n z_0$   
 ce qui donne  $z_n = \left(i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (1+i), n \geq 0$

(d)  $a_n = |z_n| a_n = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$$a_{n+1} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ainsi  $a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_n, n \geq 0$

D'où  $a_n \in \mathbb{N}$  est une suite géométrique de premier terme  $a_0 = \sqrt{2}$

et de raison  $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(e)  $(a_n)$  converge vers zéro car sa raison  $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$  est dans  $]0; 1[$

#### EXERCICE 24 Problème Synthèse

1.a)  $g(x)$  existe si  $x \neq 1$  avec  $x > 0$

$$D_g = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

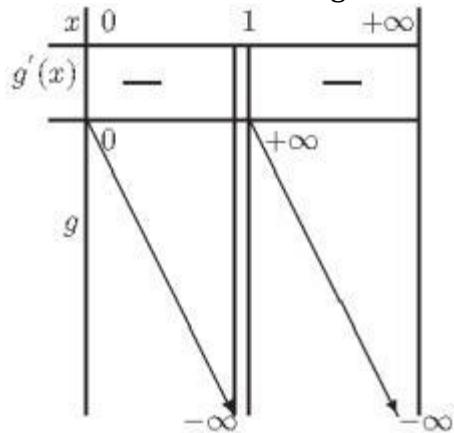
b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

2.  $x \mapsto \frac{x}{x-1}$  et  $x \mapsto \ln|x-1|$  sont dérivable pour tout  $x \neq 1$  d'où  $g$  est dérivable sur  $D_g$  et

$$g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{-1}{x-1} = -\frac{x}{(x-1)^2}$$

Sur  $D_g, g'(x) < 0$

Tableau de variation de  $g$  :



3. a) Sur  $]1; +\infty[$ ,  $g$  est dérivable et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de  $]1; +\infty[$  vers  $]-\infty; +\infty[$ .

Or  $0 \in \mathbb{R}$  il existe donc  $\alpha \in ]1; +\infty[$  tel que  $g\alpha = 0$ .

Montrons que  $4 < \alpha < 5$ .

$$g(4) \approx 0,23 \text{ et } g(5) \approx 0,14$$

$$g(4) \times g(5) < 0 \text{ donc } 4 < \alpha < 5.$$

4. Sur  $]1; \alpha[$   $g(x) > 0$  et sur  $]\alpha; \infty[$   $g(x) < 0$

### PARTIE B.

Soit

$$\begin{cases} \frac{\ln|x-1|}{x}, & \text{si } x > 0 \\ \frac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1.a)  $x \mapsto \frac{\ln|x-1|}{x}$  est définie si  $x \neq 0$  et  $x \neq 1$ ,

d'où elle est définie sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .

$x \mapsto \frac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}$  est définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

d'où elle est définie sur  $]-\infty; 0]$ .

Donc  $D_f = ] -\infty; 0] \cup ]0; 1 + \infty[ = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

**b)** La droite d'équation  $x = 1$  est une asymptote verticale à la courbe  $(C_f)$  de  $f$  et la droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote horizontale à la courbe  $(C_f)$  de  $f$  aux voisinages de  $-\infty$  et  $+\infty$

**2) a)**

$$f(0) = \frac{-6e^0}{e^0 + 3e^0 + 2} = 1$$

On a aussi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Donc  $f$  est continue en 0

$$\text{b)} \text{ On admet que } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Et on a } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} + 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + 3e^x + 2}{x(e^{2x} + 3e^x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{2x} + 3e^x + 2}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + 3e^x + 2}{x} = 2^{2 \times 0} - 3e^0 = -1 \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{6}.$$

$f'_d(0) = -\frac{1}{2}$  et  $f'_d(0) = -\frac{1}{6}$ ,  $f'_d(0) = -\frac{1}{6} \neq f'_g(0) =$  d'où  $C_f$  admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

$$\text{3) a)} f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha - 1)}{\alpha} \text{ or } g(\alpha) = 0 \text{ nous donne } \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \ln(\alpha - 1)$$

d'où  $f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$ .

**b)** Sur

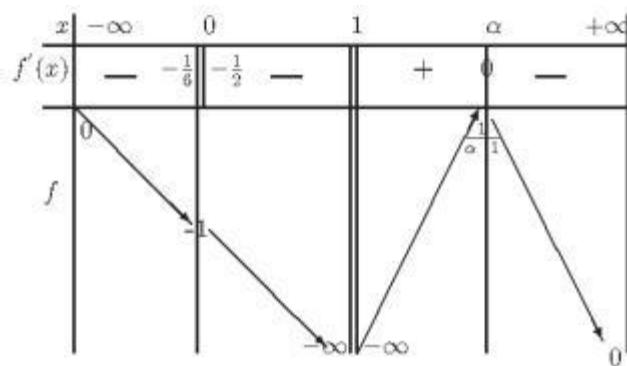
$$\text{Sur } ] -\infty; 0[, f'(x) = \frac{-6e^x(3e^{2x} + 6e^x + 2)}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2}$$

Sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ , alemme signe que  $g(x)$ ,

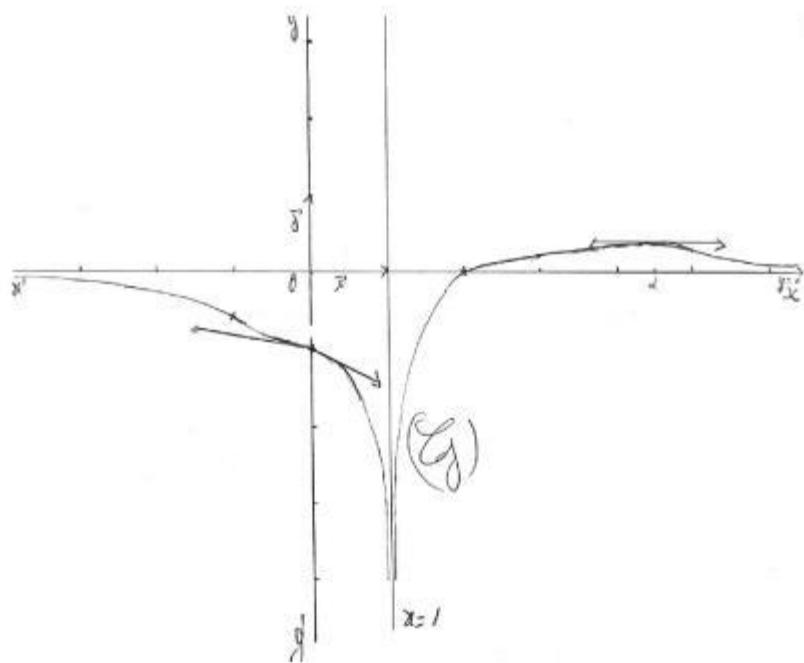
Sur  $]-\infty; 0[$ ,  $f'(x) < 0$

Dressons le tableau de variation de la fonction f.

Page | 110



4. Traçons la courbe  $(C_f)$  de f dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm



5 a)  $\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}$  nous donne  $a = -12$  et  $b = 6$   
d'où

$$\frac{-6x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-12}{x+2} + \frac{6}{x+1}$$

$$\text{b) D'après a)} \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3^x + 2} = \frac{-12}{e^x + 2} + \frac{6}{e^x + 1}$$

$$= \frac{-12}{e^x(1 + 2e^{-x})} + \frac{6}{e^x(1 + e^{-x})}$$

$$\text{D'où } \frac{-6e^x}{e^{2x} + 3^x + 2} = \frac{-12e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} + \frac{6e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

c) Soit A l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe, les droites d'équations  $x = -\ln 2$  et  $x = 0$ .

$$A = \int_{-\ln 2}^0 -f(x)dx \times u.a = \int_{-\ln 2}^0 -\frac{-6e^x}{e^{2x} + 3^x + 2} dx \times u.a$$

$$\text{d'où } A = 24 \ln \frac{10}{9} \text{ cm}^2$$

### EXERCICE 25 Problème Synthèse

#### PARTIE A.

1. Soit  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - x - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^x - 1}{x} - \frac{x}{x} \right]$  or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} = 1 - 1 = 0$$

$$\text{En conclusion } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} = 0$$

2.  $k : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

(a)  $x \mapsto x(1 - \ln x)$  continue sur  $]0; +\infty[$ ,

d'où  $x \mapsto x(1 - \ln x)$  est continue sur  $]0; +\infty[$  par somme.

or  $x \mapsto x$  est continue sur  $]0; +\infty[$  d'où par produit  $x \mapsto x(1 - \ln x)$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

(b)  $k : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x$$

$x \mapsto \frac{3}{4}x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc elle est dérivable sur  $]0; +\infty[$

et  $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 \ln x$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  par produit,

donc K est dérivable sur  $]0; +\infty[$  par somme.

Calcul de  $K'(x)$

$$= \frac{3}{2}x - x \ln x - \frac{1}{2}x = x - \ln x$$

d'où  $k'(x) = k(x)$

**PARTIE B.**

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln x, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

1. si  $x \leq 0$  alors  $e^x - x - 1$  existe t si  $x > 0$  alors  $x \ln x$  existe d'où

$f(x)$  existe sssi  $x \in ]-\infty; 0] \cup ]0; +\infty[$

$$D_f = ]-\infty; +\infty[.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{0^+} \text{or} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\text{d'où} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$

2.(a) f est définie en 0 car dans  $[0; +\infty[$   $f(x) = e^x - x - 1$  et  $x \mapsto e^x - x - 1$  est définie en 0 et prend la valeur 0 on a alors  $f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0,$$

$$\text{d'où} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

Ainsi f est continue en 0

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) + f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - x - 1}{x} = 0 \quad \text{d'après la partie A.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en 0 car ne l'étant pas en 0 à droite.

Interprétation graphique : La courbe représentative de  $f$ ,  $C_f$ , admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente d'équation  $x = 0$  à gauche et une demi-tangente d'équation  $y = 0$  à droite.

3.  $x \mapsto e^x$  et  $x \mapsto -x - 1$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $]-\infty; 0[$

$x \mapsto x \ln x$  continue sur  $]0; +\infty[$  par produit et  $f$  est continue en 0, donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

$x \mapsto e^x$  et  $x \mapsto -x - 1$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $]-\infty; 0[$ ,

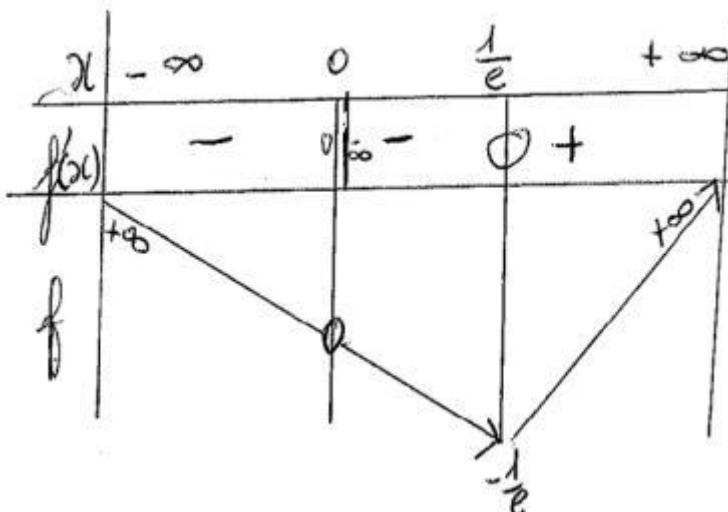
$x \mapsto x \ln x$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  par produit donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

4. Pour  $x < 0$ ,  $f'(x) = e^x - 1$  or si  $x < 0$  alors  $e^x < 1$  d'où  $f'(x) < 0$  pour  $x < 0$ .

Pour  $x > 0$ ,  $f'(x) = \ln x + 1$  or  $\ln x + 1 \geq 0$  si  $x \in [\frac{1}{e}; +\infty[$  et  $\ln x + 1 \leq 0$  si  $x \in ]0; \frac{1}{e}]$

d'où  $f'(x) \geq 0$  pour  $x \in [\frac{1}{e}; +\infty[$  et  $f'(x) \leq 0$  pour  $x \in ]0; \frac{1}{e}]$

5. Dressons son tableau de variations.



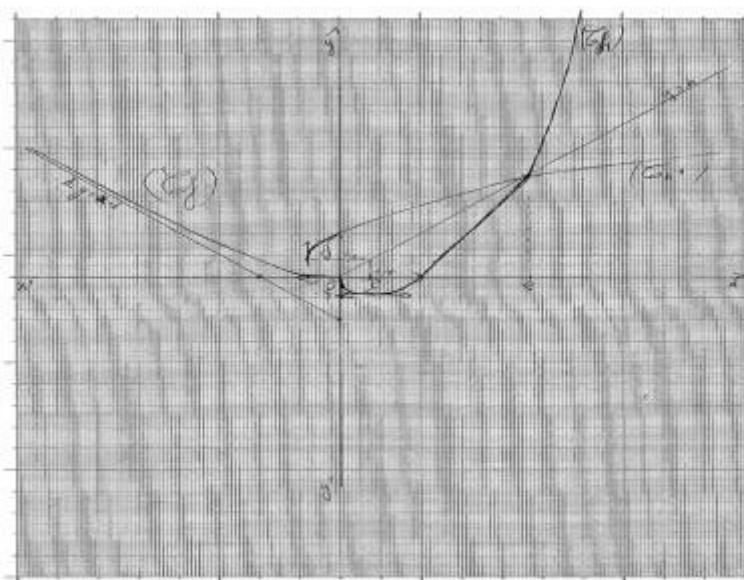
6.  $f(x) - (-x - 1) = e^x$  d'où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

donc  $\Delta$  :  $y = -x - 1$  est asymptote à  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$ .

7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  donc  $C_f$  admet une branche infinie au voisinage de  $+\infty$  or

donc  $C_f$  admet une branche parabolique de direction  $(y'0y)$  au voisinage de  $+\infty$

8. Traçons la courbe  $C_f$  de  $f$  dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm



9. Soit  $h$  la restriction de  $f$  à  $[\frac{1}{e}; +\infty[$ .

Dressons le tableau de variation de  $h$ .

$h$  est continue et strictement croissante sur  $[\frac{1}{e}; +\infty[$  donc elle est bijective. Elle réalise une bijection de  $[-\frac{1}{e}; +\infty[$  vers  $J = [-\frac{1}{e}; +\infty[$  d'après le tableau de variations de  $f$ .

(b) Pour la courbe  $C_{h^{-1}}$  de  $h^{-1}$ , bijection réciproque de  $h$ , voir figure.

10. (a) Ce domaine est l'ensemble des points  $M(x,y)$  tels que  $\frac{1}{e} \leq x \leq e$  et  $h(x) \leq y \leq x$ . On a donc :

$$A_1 = \int_{\frac{1}{e}}^e (x - h(x)) dx = \int_{\frac{1}{e}}^e (x - x \ln x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^e k(x) dx$$

d'après la PARTIE A.

$$A_1 = [K(x)]_{\frac{1}{e}}^e = \left( K(e) - K\left(\frac{1}{e}\right) \right) \times 4cm^2$$

$$A_1 = \left( e^2 - \frac{5}{e^2} \right) cm^2$$

**(b)** Ce domaine est le symétrique, par rapport à la première bissectrice, du domaine d'aire  $A_1$  de la question 10)a) d'où

$$A_2 = A_1 = \left( e^2 - \frac{5}{e^2} \right) cm^2$$

### EXERCICE 26      problème Synthèse

#### PARTIE A

**1)** Etude du signe de  $4e^{2x} - 5e^x + 1$

$4e^{2x} - 5e^x + 1$  s'annule pour  $e^x=1$  soit  $x = 0$  ou  $e^x = \frac{1}{4}$  soit  $x = -\ln 4$

D'où  $4e^{2x} - 5e^x + 1 > 0$  si  $x \in ]-\infty, -\ln 4[ \cup ]0, +\infty[$

$4e^{2x} - 5e^x + 1 < 0$  si  $x \in ]-\ln 4, 0[$

son tableau de singe

x	$-\infty$	$-2\ln 2$	0	$+\infty$
$e^x - \frac{1}{4}$	-	0	+	+
$e^x - 1$			-	0
$4e^{2x} - 5e^x + 1$	+	0	-	0

**2) a)**  $\phi : x \mapsto \ln x - 2\sqrt{x} + 2$

L'ensemble de définition  $D_\phi = ]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = -\infty - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 2 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = +\infty(0 - 2 + 0) = -\infty$$

$$\text{b)} \quad \phi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - x}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}{x\sqrt{x}}$$

$\phi'(x) = \frac{(1 - \sqrt{x})}{x}$ , on a  $x > 0$ , le signe de  $\phi'(x)$  est celui de  $1 - \sqrt{x}$ ,  
ainsi  $\phi'(x) = 0$  si  $x = 1$

Si  $x < 1$ ,  $\phi'(x) > 0$  et  $x > 1$ ,  $\phi'(x) < 0$

Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$\phi'(x)$	+	0	-
$\phi$	$-\infty$	0	$-\infty$

c) Le maximum de  $\phi$  est 0 d'où pour tout  $x > 0$ ,  $\phi(x) < 0$

## PARTIE B

f est une fonction définie par

est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

1. a) Si  $x < 0$ ,  $f(x) = x + \frac{e^x}{2e^x - 1}$  existe si  $2e^x - 1 \neq 0$ ,  $e^x \neq \frac{1}{2}$  ou  $x \neq -\ln 2$ .

Si  $x > 0$ ,  $f(x) = 1 - x + \sqrt{x} \ln x$  si  $x > 0$  est définie dans  $\mathbb{R} \setminus \{-\ln 2\}$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{e^x}{2e^x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\ln 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\ln 2^-} x + \frac{e^x}{2e^x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\ln 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\ln 2^+} x + \frac{e^x}{2e^x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \times -1 = -\infty$$

**Branches infinies :**

$\lim_{x \rightarrow -\ln 2^-} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\ln 2^+} f(x) = +\infty$  d'où la droite d'équation  $x = -\ln 2$  est assymptote verticale à  $(C_f)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ Etudions } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{e^x}{x(2e^x - 1)} = 1$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x(2e^x - 1)} = 0$  D'où la droite d'équation  $y = x$  est assymptote à  $(C_f)$  pour  $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ Etudions } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{x} \ln x = +\infty$ , D'où pour  $x > 0$ ,  $(C_f)$  admet une direction assymptotique d'équation  $y = -x$

c) Position de  $(C_f)$  par rapport à l'assymptote d'équation  $y = x$  sur  $] -\infty, 0[$

$$f(x) - x = \frac{e^x}{2e^x - 1}$$

Pour  $x \leq 0$ ,  $f(x) - x$  est du signe de  $2e^x - 1$ . Ainsi,  $f(x) - x < 0$  si  $x < -\ln 2$  et  $f(x) - x > 0$  si  $x \in ] -\ln 2, 0[$

D'où si  $x \in ] -\infty, -\ln 2[$   $(C_f)$  se situe au dessous de l'assymptote et si  $x \in ] -\ln 2, 0[$ ,  $(C_f)$  se situe au dessus de l'assymptote.

2) a) Continuité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x + \frac{e^x}{2e^x - 1} \right) = 0 + \frac{1}{1} = 1 = f(0)$$

d'où  $f$  est continue en 0 à gauche.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x + \sqrt{x} \ln x) = 1 = f(0)$$

d'où  $f$  est continue en 0 à droite.

$f$  est continue en 0 à gauche et  $f$  est continue en 0 à droite ce qui fait que  $f$  est continue en 0.

**b)** Dérivabilité en 0

D'où  $f$  est dérivable en 0 à gauche et  $f'_{-}\{g\}(0)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

donc  $f$  n'est pas dérivable en 0 à droite.

Interprétation des résultats

$f'_g(0) = 0$ , au point d'abscisse 0, la courbe  $(C_f)$  possède une demi tangente horizontale à gauche.

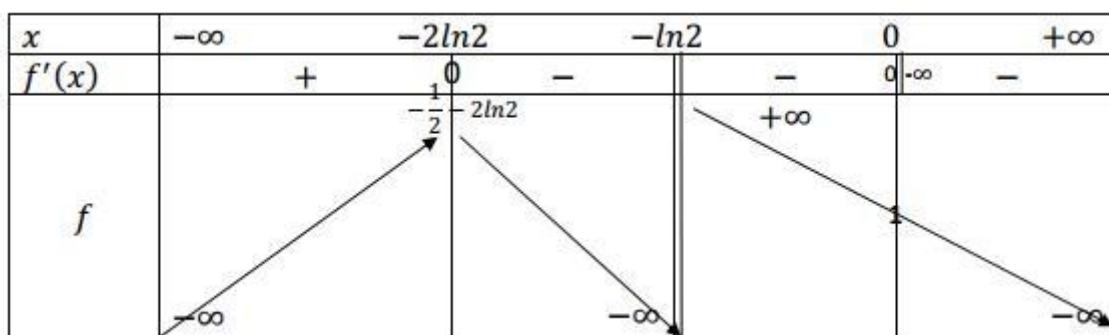
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ , au point d'abscisse 0, la courbe  $(C_f)$  possède un demi tangente verticale à droite.

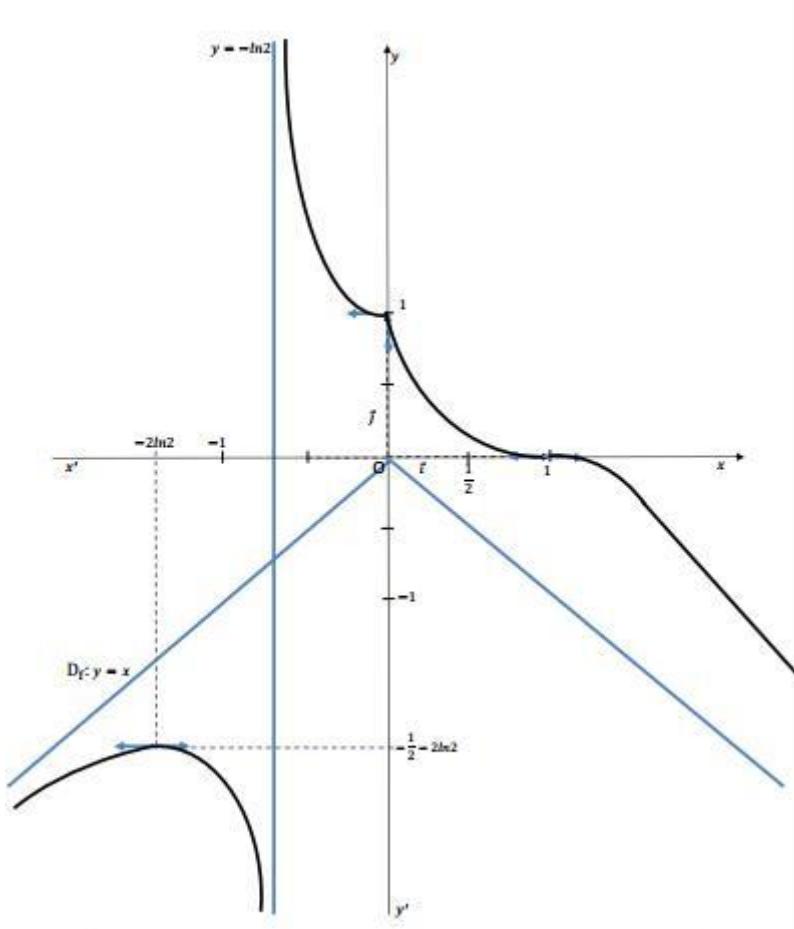
3) Pour  $x \in ]-\infty, 0]$ ,  $f(x) = x + \frac{e^x}{(2e^x - 1)^2}$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $4e^{2x} - 5e^x + 1$  étudié en A)

Pour  $x > 0$ ,  $f(x) = 1 + x \ln x - x$

On sait que  $\phi(x) \leq 0$  et  $2\sqrt{x} > 0$  sur  $]0, +\infty[$  d'où  $f'(x) \leq 0$



4) Courbe de  $f$ 

## 5) Calcul de l'aire du domaine défini par

$$\begin{cases} -\ln 8 \leq x \leq -\ln 4 \\ f(x) \leq y \leq x \end{cases}$$

partie hachurée sur la figure.

L'aire de ce domaine est :

## EXERCICE 27 Problème Synthèse

I.  $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2 + 10}$

Soit  $D_f$  le domaine de définition de la fonction  $f$ ,  
 $D_f = \mathbb{R}$  car  $3x^2 + 10$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

2)  $x \mapsto (x-1)^3$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme puissance d'une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$   
D'où par produit  $x \mapsto (x-1)^3$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$x \mapsto 3x^2 + 1$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $3x^2 + 1 \neq 0$  pour tout réel; par quotient  $x \mapsto f(x)$  dérivable sur  $\mathbb{R}$

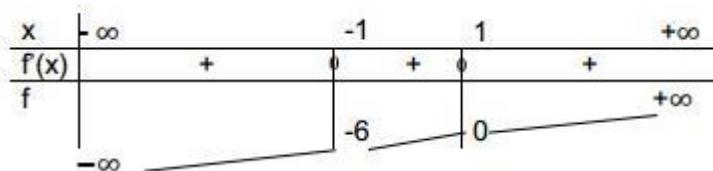
Calculons  $f'(x)$

$$f(x) = 3 \frac{3(x-1)^2(3x^2+1) - (x-1)^3(6x)}{(3x^2+1)^2}$$

$$f(x) = 3(x-1)^2 \left[ \frac{3(3x^2+1) - (x-1)(6x)}{(3x^2+1)^2} \right]$$

$$f(x) = 3(x-1)^2 \left[ \frac{9x^2+3 - 6x^2}{(3x^2+1)^2} \right]$$

$$f(x) = \frac{9(x-1)^2(x-1)^2}{(3x^2+1)^2}$$



3)  $f$  continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  réalise une bijection continue de  $\mathbb{R}$  sur  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  et  $1 \in f(\mathbb{R})$ .

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution unique  $\alpha \in \mathbb{R}$

Montrons  $3 < \alpha < 4$

La restriction de  $f$  à  $[3 ; 4]$  est une bijection continue et  $f(3) < 1 < f(4)$  donc l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution  $\alpha \in ]3, 4[$ .

II.

$$g(x) = \frac{3(\ln|x| - 1)^3}{3\ln^2|x| + 1}$$

1)a)  $g(x)$  existe si et seulement si  $\begin{cases} x \neq 0 \\ 3\ln^2|x| + 1 \neq 0 \end{cases}$   
or  $3\ln^2|x| + 1 \neq 0$

D'où  $Dg = \mathbb{R}^*$

b)

$$g(x) = \frac{3(\ln|x| - 1)^3}{3[(\ln|x|)^2 x + 1]}$$

$g(x) = f(\ln|x|)$  en posant  $h(x) = \ln|x|$

on a  $g(x) = (foh)(x), x \neq 0$

c)  $Dg = \mathbb{R}^*$

soit  $X \in Dg$  donc  $-X \in Dg$  stable par passage à l'opposé)

$g(-x) = f(h(-x))$  or  $h$  paire  $\Rightarrow h(-x) = (x)$

d'où  $g(-x) = g(x), x \neq 0$

III 1) c) Aussi  $g$  est paire sur  $Dg$

d)  $D_E = ]0, +\infty[$

$x > 0$  donc  $h(x) = \ln x$  or  $k(x) = f(h(x))$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{Par composée } \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Par composée } \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$$

Etude des branches infinies en  $+\infty$

$$K(x) = \frac{3(\ln|x| - 1)^3}{3[(\ln|)|]^2 x + 1}$$

$$\frac{K(x)}{x} = \frac{3(\ln^3 - 3\ln x^2 + 3\ln x - 1)}{x(3\ln x^2 + 1)}$$

Pour  $x > 0$   $\ln x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} K(x) = 0$  donc  $C_k$  admet en  $k$  une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

2) a) on a  $k(x) = (f \circ h)(x)$

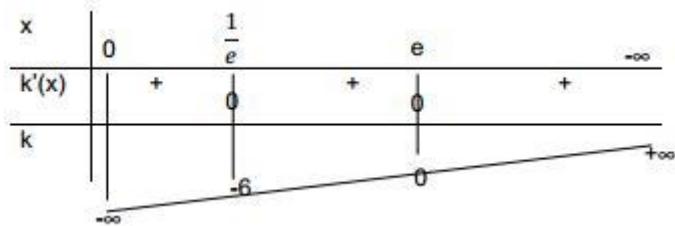
En utilisant la forme de la dérivation d'une forme composée on obtient :

$$k'(x) = h'(x)xf'(h(x));$$

$$k'(x) = \frac{1}{x}f'(h(x)).$$

$k'(x)$  garde un signe positif sur  $]0, +\infty[$  mais  $k'(x)$  s'annule en vérifiant  $\ln x - 1 = 0$  ou  $\ln x + 1 = 0$

$$x = e \text{ ou } x = \frac{1}{e}$$



$$K\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{3(-1 - 1)^3}{3 + 1} = -6$$

**b)**  $k(x) = 0 \Leftrightarrow 3(\ln x - 1)^3 = 0$

$$\ln x = 1$$

$$x = e$$

$C_k$  coupe l'axe des abscisses en A(e,0)

Si  $x \in ]0, e[$ ,  $k(x) < 0$

Si  $x \in ]e, +\infty[$ ,  $k(x) > 0$

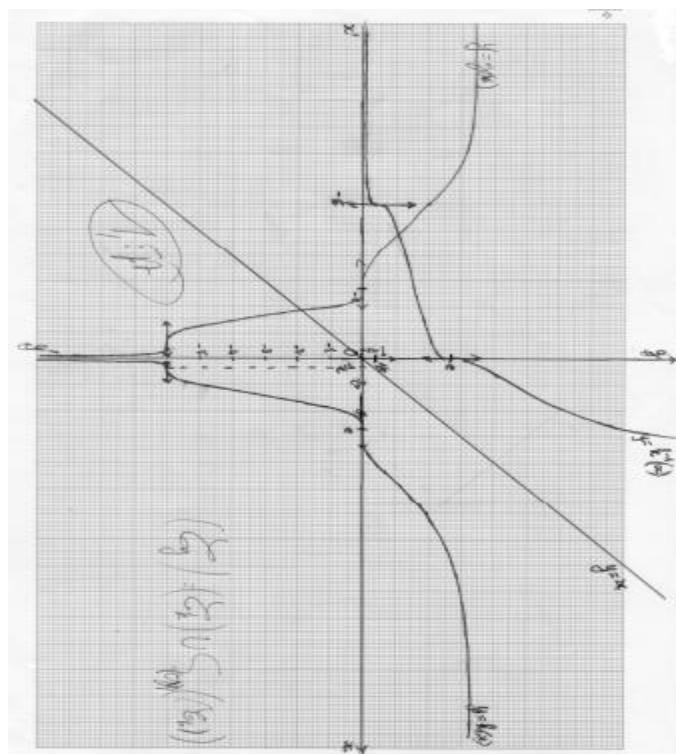
Si  $x = e$ ,  $k(x) = 0$

**3) a)** K est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  par composée de deux fonctions continues et strictement croissantes.

D'où K réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

D'où  $K(]0, +\infty[)$  sur  $\mathbb{R}$ .

Donc  $J = \mathbb{R}$



**EXERCICE 28 Fonction et suites numériques**

1. a. La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $D_f = ] -1, +\infty[$  et  
 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\forall x \in D_f, f'(x) = 2 \frac{1}{1+x}$

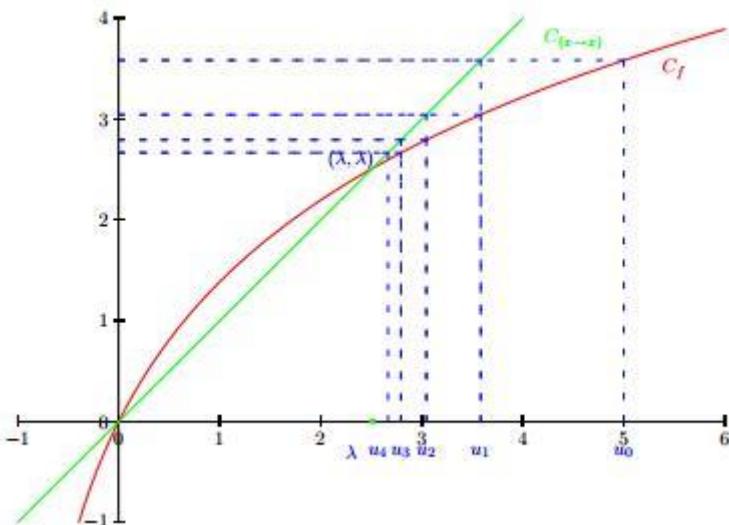
.  
La dérivée est donc strictement positive dans  $D_f$ .

Voici le tableau de variation de  $f$ .

T.V de  $x \mapsto f(x) = 2 \ln(1+x)$

$x$	-1	$+\infty$
$f'$	+	
$f$	$-\infty$	$+\infty$

et voici la courbe  $C_f$  ainsi que les quatre premiers termes de la suite sur le graphique.



b. La fonction  $l$  est continue et dérivable sur  $D_f$  et

$$\text{tex } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty; \forall x \in D_f, l'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1-x}{1+x}$$

Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , nous sommes en présence d'une indétermination de la forme

$$l(x) = x \left( \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right)$$

" $+\infty - \infty$ ", mais on peut écrire :

Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{\ln(1+x)}{x}$  a pour limite 0 ; donc  $\frac{\ln(1+x)}{x} - 1$  a pour limite -1. Par conséquent  $\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) = -\infty$

Voici le tableau de variation de  $l$ .

T.V de  $x \rightarrow l(x) = f(x) - x$ ;  $\alpha = l(2) = 2\ln 3 - 2 \sim 2,2$

$x$	2	$\lambda$	$+\infty$
$\ell'$		-	
$\ell$	$\alpha$	0	$-\infty$

La fonction  $l$  étant continue et strictement décroissante dans  $I = [2, +\infty[$ , réalise une bijection de  $I$  dans  $l(I) = J = [-\infty, \alpha[$ ; et puisque le réel 0 appartient à  $J$ , il a dans l'intervalle  $I$  un seul antécédent par  $l$ , autrement dit, l'équation  $l(x) = 0$  a dans  $I$  une solution unique  $\lambda$

Ce  $\lambda$  est alors l'unique élément de  $I$  tel que  $f(\lambda) = \lambda$ .

## 2. a. Voir graphique.

b. La fonction  $f$  étant continue et strictement croissante dans  $I = [2, +\infty[$ , réalise une bijection de  $I$  dans  $f(I) = [f(2), +\infty[$ ; et puisque  $f(2) = 2\ln 3 \sim 2,19$  est  $> 2$ ,  $f(I)$  est contenu dans  $I$ .

Démontrons maintenant par récurrence la propriété :  $\forall n \in N, P_n$  avec  $P_n : U_n \geq 2$

- Initialisation :  $U_0 = 5$ , donnée de l'énoncé. Donc  $U_0 \geq 2$  et  $P_0$  est vrai.

- Héritage : Supposons la propriété vérifiée jusqu'à un rang  $n$ , en particulier  $P_n$  vrai (c'est à dire  $U_n \geq 2$  ou  $U_n \in I$ ) et montrons que  $P_{n+1}$  est vrai.

$$\Rightarrow U_{n+1} = f(U_n) \in I \Leftrightarrow U_{n+1} \geq 2$$

c.  $\forall x \in ]2, +\infty[, f'(x) = \frac{2}{1+x}$ ; donc  $\forall x \in ]2, +\infty[, 0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{1+x} = \frac{2}{3}$ .

Conclusion  $\forall x \in ]2, +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ .

d. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Les réels  $U_n$  et  $\lambda$  appartiennent à  $[2, +\infty[$ , intervalle dans lequel  $|f'| \leq \frac{2}{3}$ ,

on peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis au couple  $(U_n, \lambda)$  :

$$|f(U_n) - f(\lambda)| \leq \frac{2}{3}|U_n - \lambda|$$

c'est à dire, puisque  $f(\lambda) = \lambda$

$$|U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3}|U_n - \lambda|$$

;

Posons  $|U_n - \lambda| = \delta_n$ ; la relation précédente devient alors  $0 < \delta_{n+1} \leq \frac{2}{3}\delta_n$  (1). Si au lieu de " $\leq$ " on avait " $=$ ", la suite  $\delta_n$  serait une suite géométrique et on pourrait immédiatement écrire

$\delta_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \delta_0$ . C'est pourquoi d'aucuns disent d'une suite vérifiant (1) qu'elle est sous-géométrique.

Utilisons la même méthode : donnons à  $n$  toutes les valeurs entières possibles entre 0 et  $p$ ,  $p$  entier  $\geq 0$ ; multiplions ensuite membre à membre (Nous sommes en droit de le faire par ce que nous manipulons des nombres positifs). Il vient :

$$\delta_0\delta_1\dots\delta_p\delta_{p+1} \leq \frac{2}{3}\delta_0\frac{2}{3}\delta_1\dots\frac{2}{3}\delta_p$$

$$\delta_0\delta_1\dots\delta_p : 0 < \delta_{p+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \delta_0$$

et en simplifiant 2 par  
c'est à dire (tout en remplaçant  $p$  par  $n$ )

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < |U_{n+1} - \lambda| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |U_0 - \lambda| \quad (2)$$

$l(2) \sim 2$ , 2 est positif,  $l(3) \sim -2$ , 2 est négatif, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $\lambda$  est compris entre 2 et 3.

Puisque  $U_0 = 5$ , on en déduit que  $|U_0 - \lambda| \leq 3$  et la relation (2) entraîne :

$$\forall x \in \mathbb{N}, 0 < |U_{n+1} - \lambda| \leq 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\forall x \in \mathbb{N}, 0 < \delta_{n+1} \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Cette dernière relation s'écrit aussi :

En remarquant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ , on conclut par le théorème des gendarmes que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_{n+1} &= 0 & \text{soit } \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n &= 0 & \text{c'est à dire } \lim_{n \rightarrow +\infty} |U_{n+1} - \lambda| &= 0 \\ \text{enfin } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - \lambda &= . \end{aligned}$$

e. La relation  $\forall x \in \mathbb{N}, 0 < |U_{n+1} - \lambda| \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

s'écrit  $\forall x \in \mathbb{N}^*, 0 < |U_{n+1} - \lambda| \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Donc pour qu'un entier n vérifie  $|U_n - \lambda| \leq \frac{1}{10^2}$ , il suffit que  $2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{10^2}$

Cette relation est équivalente à :  $\ln \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \leq \ln \frac{1}{200}$  c'est à dire

$$(n-1) \ln \frac{2}{3} \leq -\ln 200$$

ou  $n-1 \geq \frac{\ln 200}{\ln 3 - \ln 2}$  finalement  $n \geq \frac{\ln 200}{\ln 3 - \ln 2} + 1$ .

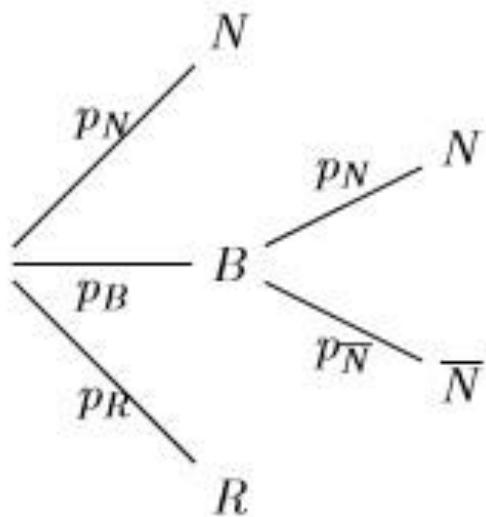
Le plus petit entier vérifiant cette relation est  $p = E \left( \frac{\ln 200}{\ln 3 - \ln 2} \right) + 1 = 15$

### EXERCICE 29

#### Probabilité

1.  $p(A) = \frac{C_{4^2}}{C_{5^2}}$   $p(A) = \frac{3}{5}$

$$p(B) = \frac{C_1^4 \times C_1^1}{C_{5^2}} \quad \boxed{p(A) = \frac{2}{5}}$$



$$p(C) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \quad \boxed{p(C) = \frac{17}{25}}$$

$$p(D) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \quad \boxed{p(D) = \frac{3}{5}}$$

$$p(E) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times 1 \quad \boxed{p(E) = \frac{2}{5}}$$

$$p(F) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times 1 \quad \boxed{p(F) = \frac{4}{25}}$$

**2.a**  $X(\Omega) = (R, R, )(R, J), (J, R), (J, J)$ .

Les différentes valeurs prises par X sont 0 ; 1000 et 2000.

a	0	1000	2000
$P(X=a)$	$\frac{3}{125}$	$\frac{44}{125}$	$\frac{78}{125}$

**b.** Fonction de répartition

- si  $x < 0$ ,  $F(x) = 0$ .

$$\begin{aligned} &\text{- si } 0 \leq x < 1000, F(x) = \frac{3}{125}, \\ &\text{- si } 1000 \leq x < 2000, F(x) = \frac{44}{125}, \\ &\text{- si } 2000 \leq x, F(x) = \frac{78}{125}. \end{aligned}$$

- si  $1000 \leq x < 2000$ , on a  $F(x) = \frac{3}{125} + \frac{44}{125}$

D'où si  $1000 \leq x < 2000$ ,  $F(x) = \frac{47}{125}$

- si  $x \geq 2000$   $F(x) = \frac{3}{5} + \frac{44}{125} + \frac{78}{125} = 1$ .

3.  $p(G) = \left(\frac{78}{125}\right)^{50}$   $p(H) = \left(\frac{3}{125}\right)^{50}$   
 $p(I) = \left(\frac{44}{125}\right)^{50} + C_{50}^{25} \left(\frac{3}{125}\right)^{25} \left(\frac{78}{125}\right)^{25}$ .

### EXERCICE 30 Probabilité

1. l'évènement contraire de "A sachant B" est  $A$  sachant  $B$ . (0,5 pts)
2. Soient  $E$  et  $F$  deux évènements indépendants d'un même univers, on a  $p(E \cup F) = p(E) \times p(F) + p(F)$ . (0,5 pts)
3. Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  où  $n = 4$  et  $p \in ]0, 1[$ . Si  $p(X = 1) = 8p(X = 0)$  alors  $p = \frac{2}{3}$ . (0,75 pts)
4. Interprétations géométriques :
  - a)  $AM = 1$  (0,25 pts)
  - b)  $AM = BM$  (0,5 pts)
  - c)  $OM' = AB$  (0,5 pts)
  - d)  $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A})[2\pi]$  (0,5 pts)

### EXERCICE 31 Probabilité

Une boîte contient 8 cubes indiscernables au toucher :  $R_1, R_2, R_2, R_2, V_1, V_1, V_2, J_2$   
 R représente la couleur rouge, V la couleur verte, J la couleur jaune, 1 et 2 les numéros des couleurs.

- A) Soit  $(\Omega, P(\Omega), p)$  un espace probabilisé. Soient A et B deux événements de cet espace probabilisé.  
 A et B sont indépendants si et seulement si  $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

**B)** On choisit successivement et sans remise 2 cubes de la boîte.

**1.** Soient les événements A : "Obtenir des cubes de couleurs différentes" et

B : "Obtenir au plus un cube portant le numéro 2"

**a)**

$$\mathbf{b)} \quad p(\bar{B}) = \frac{A_5^2}{A_8^2} = \frac{5}{14} \text{ d'où } p(B) = \frac{9}{14}$$

**c)** Calculons  $p(A \cap B)$  et comparons-le avec  $p(A) \times p(B)$

$A \cap B$ , l'événement : "Obtenir des cubes de couleurs différentes avec au plus un portant le numéro 2". Les différentes possibilités sont :

$\{R_1, V_1\}, \{R_1, V_1\}, \{V_1, R_1\}, \{V_1, R_1\}\}$

$(R_2, V_1), (V_1, R_2), (R_2, V_1), (V_1, R_2),$

$(R_2, V_1), (V_1, R_2), (R_2, V_1), (V_1, R_2),$

$(R_2, V_1), (V_1, R_2), (R_2, V_1), (V_1, R_2)$

$(R_1, J_2), (J_2, R_1),$

$(V_1, J_2), (J_2, V_1), (V_1, J_2), (J_2, V_1),$

$(R_1, V_2), (V_2, R_1),$

$$\text{Donc } p(A \cap B) = \frac{3}{7}$$

Ou encore

$$\text{Or } p(A) \times p(B) = \frac{9}{14} \times \frac{19}{28} \text{ qui est différent de } \frac{3}{7}.$$

d'où A et B ne sont pas indépendants.

**2.** Les valeurs prises par X :

$$X = \{0, 1, 2\}$$

a) La loi de probabilité de X :

$X = a_i$	0	1	2
$p(X = a_i)$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$

b) Espérance mathématique  $E(X)$  de X :

$$E(X) = \sum_{j=1}^m x_j P(X = x_j),$$

$$E(X) = \frac{4}{7} + 2 \times \frac{3}{14} = 1$$

c) Variance  $V(X)$  de X :

$$V(X) = \sum_{j=1}^m x_j^2 p(X = x_j) - (E(X))^2,$$

$$v(X) = \frac{4}{7} + 4 \times \frac{3}{14} - 1 = \frac{3}{7}$$

C) Tirage simultané de 3 cubes de la boîte :

a)  $p(C) = \frac{C_3^3 + C_3^2 \times C_5^1}{C_8^5} + 2 \times \frac{2}{7}$

b)  $p_n = p(D_n) = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^n$

c)  $(p_n)_n$  est strictement croissante et  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$

## EXERCICE 32 Probabilités et suite numériques

I. • Dans le cas de l'équiprobabilité, on sait d'après le cours que la probabilité d'un

événement quelconque A est calculée par la formule : 
$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$
.

- La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé, est si  $p(B) \neq 0$  :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} \quad (\text{après simplification par } \text{card}(\Omega))$$

- Qu'il y ait ou non équiprobabilité, une propriété de base des probabilités sur un ensemble fini dit que :

$p(A \cap \bar{B}) = p[A/(A \cap B)] = p(A) - p(A \cap B)$  (car  $(A \cap B)$  est toujours inclus dans A).

$$p[(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)] = p[A \cap (B \cup \bar{B})] \quad (\text{distributivité de } \cap \text{ par rapport à } \cup)$$

$$= p(A \cap ga) \quad (\text{pour tout ensemble } B, \text{ on a } B \cup \bar{B} = \omega)$$

$$p(A) \quad (\text{pour tout ensemble } A, \text{ on a } A \cap \omega = A)$$

**II. 1°)** Ces égalités sont des traductions des trois hypothèses faites par l'énoncé.

- On sait que le premier jour, la ville est délestée, donc l'événement D<sub>1</sub> : « La ville est délestée le 1<sup>er</sup> jour » est l'événement certain :  $p(D_1) = 1$

- Si la ville est délestée le  $n^{ième}$  jour, c'est-à-dire si  $D_n$  est réalisé, alors l'hypothèse est que la probabilité qu'elle le soit le jour suivant ( $n + 1$ ), est  $\frac{2}{9}$ . Donc  
 $P(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9}$

- Si la ville n'est pas délestée le  $n^{ième}$  jour, c'est-à-dire si  $\bar{D}_n$  est réalisé, alors l'hypothèse est que la probabilité qu'elle le soit le jour suivant ( $n + 1$ ), est  $\frac{5}{6}$ .

$$\text{Donc } p(D_{n+1}/\bar{D}_n) = \frac{5}{6}$$

**2°)** D'après la quatrième propriété rappelée dans la partie I,

$$p_n + 1 = p(D_n + 1) = p(D_n + 1 \cap D_n) + p(D_n + 1 \cap \bar{D}_n)$$

On a remplacé dans cette propriété A par  $D_{n+1}$  et B par  $D_n$ .

3°) Par définition de la probabilité conditionnelle,

$$p(D_n + 1 \cap D_n) = p(D_n + 1/D_n)p(D_n) = \frac{2}{9}p(D_n)$$

Et :  $p(D_{n+1} \cap \bar{D}_n) = p(D_n + 1/\bar{D}_n)p(\bar{D}_n) = \frac{5}{6}p(\bar{D}_n)$

D'où, en remplaçant dans (\*),

Soit :

4°) a)  $U_{n+1} = 6p_{n+1} - \frac{90}{29} = 6\left(-\frac{11}{18}p_n\right) + \frac{5}{6} = -\frac{90}{26}$

(d'après la question précédente) (simplification de fractions)

$$-\frac{11}{18} \left(6p_n \frac{90}{29}\right) = -\frac{11}{18} U_n$$

Il en résulte que ( $U_n$ ) est une suite géométrique de raison  $-\frac{11}{18}$  et de premier terme

$$U_1 = 6p_1 - \frac{90}{29} = 6 - \frac{90}{29} = \frac{174 - 90}{29} = \frac{84}{29}.$$

b) D'après une formule du cours sur les suites géométriques,

$$U_n = U_1 \times \left(-\frac{11}{18}\right)^{n-1} = \frac{84}{29} \times \left(-\frac{11}{18}\right)^{(n-1)}$$

Et comme  $p_n = \frac{1}{6} = \left(U_n + \frac{90}{29}\right)$

on en déduit que :

$$p_n = \frac{1}{6} \left( \left(\frac{84}{29}\right) \times \left(-\frac{11}{18}\right)^{(n-1)} + \frac{90}{29} \right)$$

ou encore

$$p_n = \frac{1}{29}(14) \times \left(-\frac{11}{18}\right)^{(n-1)} + 15$$

c) La probabilité pour que la ville ne soit pas délestée le  $20^{\text{ième}}$  jour est  $p(\bar{D}_{20})$  (attention !).

$$p(\bar{D}_{20}) = 1 - p_{20} = 1 - \frac{1}{29} \left( 14 \left( \frac{11}{18} \right)^{19} + 15 \right) \cong 0.483$$

### **EXERCICE 33      probabilité élémentaire-variable aléatoire**

Un tiroir contient pêle-mêle 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges, soit au total vingt chaussures. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents.

**1) a)** Tirage simultané de deux chaussures. L'univers  $\Omega$  est l'ensemble des combinaisons de 2 paires parmi 20 paires, c'est à dire :

$$\text{Card}\Omega = C_{20}^2 = \frac{20!}{18! \times 2!} = \frac{20 \times 19}{2}$$

$$\text{Card}\Omega = 190$$

A l'événement : "Tirer 2 chaussures de même couleur",

$$P(A) = \frac{66}{190} = 0,35$$

**b)** B: "Tirer un pied gauche et un pied droit"

$$\text{Card}B = C_{10}^1 \times C_{10}^1 = 10 \times 10 = 100$$

$$P(B) = \frac{100}{190} = 0,52$$

**c)** C : "Tirer 2 chaussures d'un même modèle"

$$\text{Card } C = C_2^1 \times 10 = 1 \times 10 = 10$$

$$P(C) = \frac{10}{190} = 0,05$$

**2)** On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide.

On note X la variable aléatoire égale au rang de la  $2^{\text{ième}}$  chaussure noire tirée.

a) X étant le rang de la  $2^{i\text{ème}}$  chaussure noire tirée, celle-ci peut être au  $2^{i\text{ème}}$  rang, au  $3^{i\text{ème}}$  ou au  $4^{i\text{ème}}$ .

$$X = \{2, 3, 4\}, Card\Omega = 4! = 24$$

b) (X=2) c'est choisir dans l'ordre : noire, noire, rouge, rouge.

$$P(X = 2) = \frac{2 \times 1 \times 2 \times 1}{24} = \frac{1}{6}$$

(X=3) c'est choisir dans l'ordre : noire, rouge, noire, rouge ou rouge, noire, noire, rouge d'où :

$$P(X = 3) = \frac{2 \times 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 \times 1}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

(X=4) c'est choisir dans l'ordre : noire, rouge, rouge, noire ou rouge, rouge, rouge, noire ou rouge, rouge, noire, noire d'où :

$$P(X = 4) = \frac{2 \times 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 2 \times 1}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Espérance mathématique et Ecart-type

$$E(X) = (2 \times \frac{1}{6}) + (3 \times \frac{1}{3}) + (4 \times \frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{3} + \frac{4}{2} = \frac{10}{3}$$

La variance

$$V(X)=0,55$$

$$\text{L'écart-type } \sigma_X = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{5}}{3} \equiv 0,74$$

**EXERCICE 34      Variable aléatoire Probabilité**

1. - Pour que M appartiennent à l'axe des abscisses, il faut et il suffit que la partie imaginaire de z soit nulle c'est à dire  $\ln y = 0$  ou  $y = 1$ . Donc  $p(A) = p(y = o) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

- Pour que M appartiennent à l'axe des ordonnées , il faut et il suffit que la partie réelle de z soit nulle c'est à dire  $\ln x = 0$  ou  $x = 1$ . Donc  $p(B) = p(x = o) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

- L'évènement contraire de C est "M appartient à au moins un des axes" c'est à dire  $A \cup B$  ?

- L'événement A n B est "M appartient à chacun des axes" c'est à dire  $z = 0$  ou  $\ln x = 0$  et  $\ln y = 0$  finalement  $x = y = 1$ .

Puisque le tirage est avec remise, les événements A et B sont indépendants, donc

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) = \frac{1}{9}.$$

Par conséquent :

$$p(\bar{C}) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

$$p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

- Pour que  $(\vec{OM}, \vec{i})$  soit égal à  $-\frac{\pi}{4}$  l'angle il faut et il suffit que les coordonnées de M soient égales et strictement positives c'est à dire  $\ln x = \ln y > 0$  ou  $x = y = e$ . Par conséquent, D est l'évènement " $x = y = e$ ".

$$p(x = e) = p(y = e) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \text{ et } p(D) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{ et}$$

- Pour que M appartienne au cercle trigonométrique, il faut et il suffit que  $OM = 1$  c'est-à-dire  $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 1$ . Puisque x et y ne prennent que les valeurs 1, e et  $\frac{1}{e}$ ,  $\ln x$  et  $\ln y$  ne prennent que les valeurs 0, 1 et -1 ;

Les seuls couples possibles pour réaliser  $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 1$  sont donc

$$(\ln x, \ln y) = (1, 0), (-1, 0), (0, 1), \text{ ou } (0, -1)$$

c'est -à -dire  $(x, y) = (e, 1), (\frac{1}{e}, 1), (1, e), \text{ ou } (1, \frac{1}{e})$ .

or  $p((x, y) = (e, 1)) \geq p((x, y) = (1, e)) = \frac{2}{12} \times \frac{4}{1.2} = \frac{1}{18}$

$$p\left((x, y) = \left(\frac{1}{e}, 1\right)\right) = p\left((x, y) = \left(1, \frac{1}{e}\right)\right) = \frac{6}{12} \times \frac{4}{1.2} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Donc } p(E) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{9}$$

$\frac{1}{1}$

**2.a.** Puisque x et y ne prennent que les valeurs 1, e et  $e^{-1}$  et lnx et lny ne prennent quelles valeurs 0,1 et -1 ; les couples de coordonnées possibles sont donc :  
 $(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, -1)$ ,

correspondant aux valeurs suivantes du couples (x,y)

Les distances OM possibles sont donc :  $0, 1, \sqrt{2}$

La variable aléatoire X prend les valeurs  $0, 1, \sqrt{2}$

$$p(X = 0) = p((x, y) = (1, 1)) = \frac{4}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{1}{9}$$

$$p(X = 1) = p((x, y) = (1, e)) + p((x, y) = (e, 1))$$

$$+ p\left((x, y) = \left(1, \frac{1}{e}\right)\right) + p\left((x, y) = \left(\frac{1}{e}, 1\right)\right)$$

$$p(X = \sqrt{2}) = p((x, y) = (e, e)) + \left(p\left((x, y) = \left(e, \frac{1}{e}\right)\right)\right)$$

$$+ p\left((x, y) = \left(\frac{1}{e}, e\right)\right) + p\left((x, y) = \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)\right)$$

En résumé :

$$p(X = 0) = \frac{1}{9}, p(X = 1) = \frac{4}{9}, p(X = \sqrt{2}) = \frac{4}{9}$$

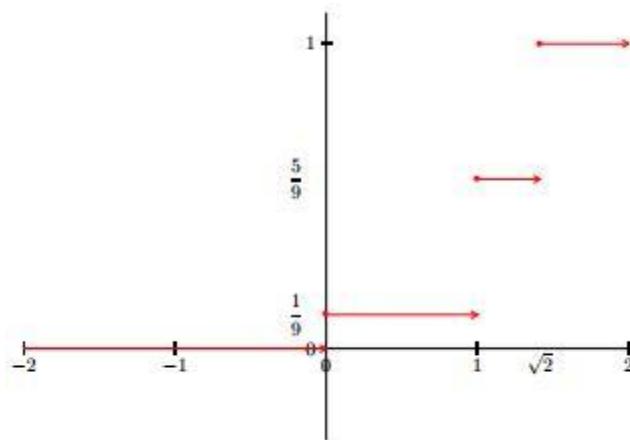
**b.** La fonction de répartition de X est définie par  $F(x) = p(X < x)$

$$\text{Si } x \leq 0, F(x) = p(X < x) = 0$$

$$\text{Si } 0 < x \leq 1, F(x) = p(X < x) = p(X = 0) = \frac{1}{9}$$

$$\text{Si } 1 < x \leq \sqrt{2}, F(x) = p(X < x) = p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\text{Si } \sqrt{2} < x \leq 1, F(x) = p(X < x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = \sqrt{2}) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1$$



### EXERCICE 35 Probabilités conditionnelles-variables aléatoires

On dispose de 3 urnes  $U_1, U_2, U_3$

$U_1$  contient 3 boules vertes et 2 boules rouges

$U_2$  contient 4 boules vertes et 5 boules jaunes

$U_3$  contient 5 boules jaunes, 4 boules rouges et 1 boule verte

Description de l'épreuve

Cette épreuve consiste à tirer une boule dans  $U_1$

Page | 138

Si elle est verte, on la met dans  $U_2$  puis on tire une boule dans  $U_2$

Si elle est rouge, on la met dans  $U_3$  puis on tire une boule dans  $U_3$

**A/ 1)** Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première boule tirée est verte.

Soit  $V_2$  l'événement "avoir une boule verte au deuxième tirage" et  $V_1$  l'événement "la première boule tirée est verte"

$$\text{on a } P_{V_1}(V_2) = \frac{P(V_1 \cap V_2)}{P(V_1)} = \frac{\text{Card}(V_1 \cap V_2)}{\text{Card}(V_1)}$$

$$\text{Card}(V_1) = C_3^1 \times C_{10}^1 = 30$$

$$\text{Card}(V_1 \cap V_2) = C_3^1 \times C_5^1 = 3 \times 5 = 15 \implies P_{V_1}(V2) = \frac{1}{30} = \frac{1}{2}$$

**2)** Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première boule tirée est rouge

Soit  $R_1$  l'événement "la première boule tirée est rouge"

$$P_{R_1}(V_2) = \frac{P(R_1 \cap V_2)}{P(R_1)} = \frac{\text{Card}(R_1 \cap V_2)}{\text{Card}(R_1)}$$

$$\implies P_{R_1}(V2) = \frac{2}{22} = \frac{1}{11}$$

**3)** En déduire la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage

Soit  $V_2$

$$P(V_2) = P_{V_1}(V_2) + P_{R_1}(V_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{11} = \frac{13}{22}$$

**4)** Calculer la probabilité d'avoir "une boule jaune au deuxième tirage"

Soit  $J_2$  cet événement

$$P(J_2) = P_{V_1}(J_2) + P_{R_1}(J_2) = \frac{\text{Card}(V_1 \cap J_2)}{\text{Card}V_1} + \frac{\text{Card}(R_1 \cap J_2)}{\text{Card}R_1}$$

on a  $Card(V_1 \cap J_2) = C_3^1 \times C_5^1 = 15$

$$Card(R_1 \cap J_2) = C_2^1 \times C_5^1 = 2 \times 5 = 10$$

$$P(J_2) = \frac{15}{30} + \frac{10}{22} = \frac{1}{2} + \frac{10}{22} = \frac{11+10}{22} = \frac{21}{22}$$

$$P(J_2) = \frac{21}{22}$$

**5)** Calculer la probabilité d'avoir "une boule rouge au deuxième tirage"

Soit R<sub>2</sub>

$$P(R_2) = P_{V_1}(R_2) + P_{R_1}(R_2) = \frac{Card(V_1 \cap R_2)}{CardV_1} + \frac{Card(R_1 \cap R_2)}{CardR_1}$$

$$Card(V_1 \cap R_2) = 0$$

$$Card(R_1 \cap R_2) = C_2^1 \times C_5^1 = 2 \times 5 = 10$$

$$P(R_2) = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$$

$$P(R_2) = \frac{5}{11}$$

### **EXERCICE 36      Variable aléatoire**

**1)** Total des pièces = 10

$$p(A) = \frac{1}{30}$$

**2)a)**  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$p(X = 0) = \frac{CC_6^3}{C_{10}^3}$$

$$p(X = 0) = \frac{20}{120} \quad p(X = 3) = \frac{4}{120}$$

$$p(X = 2) = \frac{36}{120} \quad p(X = 1) = \frac{60}{120}$$

<b>xi</b>	0	1	2	3
<b>pi</b>	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

b)  $E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p_i$

$$E(X) = 0 \times \frac{20}{120} + 1 \times \frac{60}{120} + 2 \times \frac{36}{120} + 3 \times \frac{4}{120}$$

$$E(X) = \frac{6}{8}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (x_i)^2 p_i - (E(X))^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,56} \simeq 0,75$$

3)

On a ici une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre

$$n = 5 \text{ et } p = \frac{1}{30}$$

Soit Y cette variable aléatoire

$$p(Y = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{30}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{30}\right)^2$$

$$p(Y = 3) \simeq 3,46 \cdot 10^{-4}$$

### EXERCICE 37 Maladie du Sida Probabilité

On note  $T$  l'évènement "avoir un test positif à cette maladie"  
 $M$  l'évènement "être malade"

$\overline{M}$  est l'évènement contraire de  $M$

pour tous évènements  $A$  et  $B$  on a: (\*)  $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$   
et  $p_A(B)$  désigne la probabilité de  $B$  sachant  $A$

1) a) pour  $A = T$  et  $B = M$

on a  $T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})$  (1)

pour  $A = \overline{M}$  et  $B = \overline{T}$

on obtient  $\overline{M} = (\overline{M} \cap \overline{T}) \cup (\overline{M} \cap T)$  (2)

**b)** en utilisant la relation (2)

$$P(\overline{M}) = p(\overline{M} \cap \overline{T}) + p(\overline{M} \cap T)$$

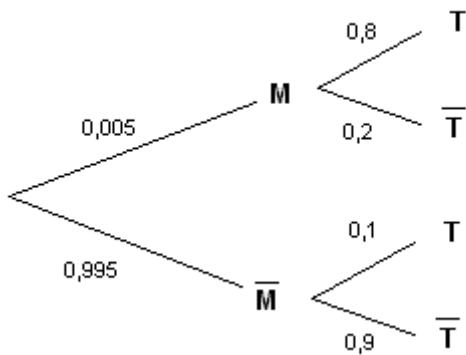
car  $\overline{M} \cap \overline{T}$  et  $\overline{M} \cap T$  sont deux événements incompatibles

$$\text{donc } p(\overline{M} \cap T) = p(\overline{M}) - p(\overline{M} \cap \overline{T})$$

$$p(\overline{M} \cap T) = p(\overline{M}) - p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}$$

$$\text{donc } p(\overline{M} \cap T) = p(\overline{M}) [1 - p_{\overline{M}}]$$

**2)** faisons d'abord le diagramme pondéré



$$p(T) = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T)$$

$$p(T) = p(M) \times p_M(T) + p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(T)$$

$$p(T) = 0,005 \times 0,8 + 0,995 \times 0,1$$

$$p(T) = 0,1035$$

$$\text{3)a)} \quad p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{p_M(T) \times p(M)}{p(T)} = \frac{0,005 \times 0,8}{0,1035}$$

$$p_T(M) = \frac{8}{207}$$

**b)**

$$p_{\bar{T}}(M) = \frac{2}{1793}$$

**EXERCICE 38 Epreuves de Bernoulli (04 pts) Probabilité**

1/ Soit  $\Omega$  l'univers de cette épreuve on a  $Card\Omega = A_{10}^2 = 45$ .

$$CardA = A_4^2 = 6$$

$$\text{donc } P(A) = \frac{2}{15}$$

En appelant  $(x, y)$  le couple des entiers naturels tirés :

$$B = \{(x, y) \text{ tels que } x > 2y, y \in \{1, 2, \dots, 10\}\}$$

on a par comptage :  $CardB = 20$

$$\text{Donc } P(B) = \frac{4}{9}$$

**NB :** On peut aussi retrouver  $Card B$  en utilisant le quadrillage et la droite d'équation  $x = 2y$

**2/**

. Appelons  $C$  l'événement "B est réalisé 2 fois exactement"

. En appelant D l'événement "B est réalisé au moins une fois"

$$P(c) = C_7^2 \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{5}{9}\right)^5$$

$\bar{D}$  devient l'événement "B n'est aucune fois"

$$P(\bar{D}) = C_7^2 \left(\frac{5}{9}\right)^7$$

$$P(D) = 1 - C_7^2 \left(\frac{5}{9}\right)^7$$

**EXERCICE 39      Variable aléatoire (05 pts)**

$P_1$  la probabilité de tirer le jeton numéroté  $i$ ;  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Les  $P_i$  forment une progression arithmétique de raison  $\frac{1}{30}$ .

$$1/ \text{ a. Montrer que } P_1 = \frac{1}{12}$$

on a  $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$

$$\text{or } P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{6}{2}(P_1 + P_6) = 3(P_1 + P_6)$$

$$\text{car } \text{ somme} = \frac{\text{Nombre de terme}}{2} (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})$$

$$P_6 = P_1 + 5 * \frac{1}{30} \quad \text{car } (P_n = P_1 + (n - 1)r)$$

$$\text{D'où } 3(P_1 + P_1 + \frac{5}{30}) = 1 \Leftrightarrow 2P_1 + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow 2P_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow 2P_1 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 2P_1 = \frac{1}{12}$$

$$\text{b. } P_2 = P_1 + \frac{1}{30} = \frac{7}{60}; \quad P_3 = P_2 + \frac{1}{30} = \frac{9}{60}; \quad P_4 = P_3 + \frac{1}{30} = \frac{11}{60}$$

$$; \quad P_5 = P_4 + \frac{1}{30} = \frac{13}{60}; \quad P_6 = P_5 + \frac{1}{30} = \frac{15}{60}$$

$$NB: \text{Vérification à faire: } \frac{1}{12} + \frac{7}{60} + \frac{9}{60} + \frac{11}{60} + \frac{13}{60} + \frac{15}{60} = \frac{60}{60} = 1$$

2/ Epreuve : "tirage successif avec remise de 3 jetons" X la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.

a) loi de probabilité de X.

Les valeurs prises par X sont : 0, 1, 2, 3.  $p(X = 0)$  est la probabilité de tirer trois numéros impairs.

Le nombre de cas possibles est : 6<sup>3</sup>

Le nombre de cas favorables à l'événement  $(x = 0)$  est : 3<sup>3</sup>

$$\text{D'où } p(X = 1) = \frac{3^3}{6^3} = \frac{3^3}{(2 * 6)^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$p(X = 1)$  la probabilité de tirer deux jetons portant un numéro impair et un jeton portant un numéro pair.

Le nombre de cas favorables à l'événement est :  $(X = 1)$  est:  $(3 * 3) * 3$

nombre de choix pour deux jeton "impairs" :  $3^2$

nombre de choix pour un jeton "pairs" : 3

nombre d'apparitions du jeton pair : 3

$$\text{d'où } p(X = 1) = \frac{3^4}{6^3} = \frac{3}{8}$$

$p(X = 2)$  est la probabilité de tirer deux jetons "pairs" et un jeton "impairs".

Le nombre de cas favorables est :  $(3^2 * 3) * 3 = 3^4$

$$\text{d'où } p(X = 2) = \frac{3^4}{6^3} = \frac{3}{8}$$

$p(X = 3)$  est la probabilité de tirer 3 jetons pairs nombre de cas favorables est  $3^3$

$$p(X = 3) = \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

**b)** Espérance mathématique de  $X$

$$E(X) = 0 * \frac{1}{8} + 1 * \frac{3}{8} + 2 * \frac{2}{8} + 3 * \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}, E(X) = 1.5$$

Ecart - type de  $X$  :

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}, V(X) = E(X^2) - (E(X)^2)$$

$$V(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{12}{4} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

D'où  $\sigma_x = 0,866$

**3)** Epreuve "tirage simultané de 2 jetons"

$$\text{Nombre de cas possibles est : } C_6^2 \left(\frac{6 * 5}{2}\right) = 15$$

**a)**  $S$  : valeur absolue de la différence des numéros

Loi de probabilité de  $S$

Les valeurs prises par  $S$  sont : 1, 2, 3, 4, 5

$p(S = 1)$  est la probabilité de "tirer deux jetons dont la valeur absolue des numéros est 1"

C'est à dire tirer " $\{1, 2\}$  ou  $\{2, 3\}$  ou  $\{3, 4\}$  ou  $\{4, 5\}$  ou  $\{5, 6\}$ "

Donc  $p(S = 1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$p(S = 2)$  est la probabilité de tirer " $\{1, 3\}$  ou  $\{2, 4\}$  ou  $\{3, 5\}$  ou  $\{4, 6\}$ "

Donc  $p(S = 2) = \frac{4}{15}$

$p(S = 3)$  est la probabilité de "tirer  $\{1, 4\}$  ou  $\{2, 5\}$  ou  $\{3, 6\}$ "

Donc  $p(S = 3) = \frac{-3}{15} = \frac{1}{5}$

$p(S = 4)$  est la probabilité de : "tirer  $\{1, 5\}$  ou  $\{2, 6\}$ "

Donc  $p(S = 4) = \frac{2}{5}$

$p(S = 5)$  est la probabilité de : "tirer  $\{1, 6\}$ "

$p(S = 5) = \frac{1}{5}$

**b)** La probabilité de gagner est  $p(S \geq 4)$

$$p(S \geq 4) = p(S = 4) + p(S = 5)$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0.2$$

La probabilité de gagner est de 0,2.

#### EXERCICE 40 Variable aléatoire (04 pts)

1/ On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes.

L'ensemble des éventualités est l'ensemble des cartes à 3 éléments de l'ensemble des cartes.

Donc  $CardA\Omega = C_{32}^3 = 4960$

A : "les cartes sont des as"  $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$A = C_4^3 = 4$

$P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{1}{1240} = 0,0008$

B : "Il y a au moins "2 couleurs" parmi ces 3 cartes"

On a  $\bar{B}$  c'est l'événement "les 3 cartes sont de même couleur"

$Card\bar{B} = 4 * C_8^3 = 2$

$$P(B) = \frac{Card\bar{B}}{Card\Omega} = \frac{7}{155}$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B})$$

$$\text{donc } P(B) = \frac{148}{155} = 0,95$$

C : "Il y a pas d'as parmi les 3 cartes"

$$\text{Card } C = C_8^3 = 3276$$

$$P(C) = \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = 0,66$$

**2/** On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu  
Soit  $\Omega$  l'ensemble des éventualités.

On a  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

La loi de la probabilité de  $X$

On a  $\text{Card } \Omega = 32 * 32 * 32$

$$P(X = 0) = \frac{\text{Card}(X = 0)}{\text{Card } \Omega} = \frac{24 * 24 * 24}{32 * 32 * 32} = \frac{27}{64} \approx 0.42$$

$$P(X = 1) = \frac{\text{Card}(X = 1)}{\text{Card } \Omega} = \frac{3 * 8 * 24 * 24}{32 * 32 * 32} = \frac{27}{64} \approx 0.42$$

$$P(X = 2) = \frac{\text{Card}(X = 2)}{\text{Card } \Omega} = \frac{3 * 8 * 8 * 24}{32 * 32 * 32} = \frac{9}{64} \approx 0.14$$

$$P(X = 3) = \frac{\text{Card}(X = 3)}{\text{Card } \Omega} = \frac{8 * 8 * 8}{32 * 32 * 32} = \frac{1}{64} \approx 0.01$$

Espérance mathématique de  $X$  :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^3 x_i p_i = p(x=1) + 2p(x=2) + 3p(x=3) \\ &= \frac{27}{64} + 2 * \frac{9}{64} + 3 * \frac{1}{64} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$E(X) = 0.75$$

#### **EXERCICE 41      Statistiques**

1. le coefficient de corrélation linéaire  $r$  est défini par 
$$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$
.

D'où  $r \approx 0,69$  (01 pt)

**2.a)** La droite de régression de  $Y$  en  $X$ , ( $D_{Y/X}$ ) à pour équation  $y = 92,59x - 4,35$ . (01 pt)

**b)** il faut investir 3,29 milliards de FCFA si l'on désire un chiffre d'affaire de 300 milliards (0,5 pt)

### EXERCICE 42 Statistiques à deux variables

**1. (a)**  $r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma X \sigma Y}, r = -0,973$ . Il y a une forte corrélation.

**(b)** La droite de régression de  $Y$  en  $X$  est :

$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}$$

et  $b = \bar{Y} - a\bar{X}$

$$y = -0,874x + 4,12$$

**(c)** Si  $x = 6$  alors  $y = -1,124$ .

Cette équation ne permet pas d'estimer le degré de salinité car au 6<sup>ème</sup> mois de pluie le degré de salinité ne peut être négatif.

**2.** Soit  $Z = \ln(Y - 1)$

xi	0	1	2	3	4
zi	1,182	0,875	0,010	-1,83	-4,61

**(b)**  $r = \frac{\text{cov}(X, Z)}{\sigma X \sigma Z}, r = -0,944$

**(c)** La droite de régression de  $Z$  en  $X$  est :  $z = ax + b$  avec  $a = \frac{\text{cov}(X, Z)}{V(X)}$

et  $b = \bar{Z} - a\bar{X}$

$$z = -1,428x + 1,982$$

- On a  $z = \ln(y - 1)$  et  $z = -1,428x + 1,982$  d'où

$$\ln(y - 1) = -1,428x + 1,982$$

$$y = e^{-1,428x+1,982} + 1$$

Ainsi  $y = e^{-1,428x+1,982} + 1$

(d) Si  $x = 6$  alors  $y = 1,001$ . Le degré de salinité estimé au 6<sup>ième</sup> est positif, il est très proche de celui du quatrième mois et lui est inférieur. Donc l'équation  $y = e^{-1,428x+1,982} + 1$  nous permet de faire cette estimation.

#### EXERCICE 43      statistiques à deux variables

Le tableau ci-dessous donne le nombre d'années d'exercice X des ouvriers d'une entreprise et leur salaire mensuel Y en milliers de francs.

Notons  $X_i$  les modalités de X et  $n_i$  l'effectif avec  $1 \leq i \leq 6$ .

Soit  $y_j$  les modalités de Y et  $n_j$  l'effectif avec  $1 \leq j \leq 4$ . N est l'effectif total.

$x$ $y$	2	6	10	14	18	22	$n_j$
75	a	5	0	0	0	0	$a+5$
125	0	7	1	0	2	0	10
175	2	0	9	8	15	4	38
225	0	1	0	3	b	1	$b+5$
$n_i$	$a+2$	13	10	11	$b+17$	5	$N = a+b+58$

1) Déterminons a et b pour que la moyenne

$$\bar{x} = \frac{596}{59} \text{ et } \bar{y} = \frac{8450}{59};$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 n_i x_i}{N} \text{ et } \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^4 n_j y_j}{N}$$

On sait que

$$\bar{x} = \frac{2(a+2) + (6 \times 13) + (10 \times 10) + (14 \times 11) + 18 \times (b+17) + (22 \times 5)}{a+b+58} \text{ et}$$

$$\bar{y} = \frac{75(a+5) + (10 \times 125) + (38 \times 175) + 225(b+5)}{a+b+58}$$

On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} 239a - 233b = 4900 \\ 161a - 193b = 2580 \end{cases}$$

Doù a=40 et b=20

Page | 149

**2)** On suppose que a=40 et b=20.

En associant à chaque valeur  $x_i$  de X la moyenne  $m_i$  de la série conditionnelle :  $(y/x = x_i)$ , on a le tableau suivant:

x	2	6	10	14	18	22
m	80	113	170	189	199	185

**a)** Calculons le coefficient de corrélation linéaire entre X et m.

Déterminons d'abord les moyennes  $\bar{x}$  et  $\bar{m}$ , les variances  $V_X$  et  $V_M$ , les écarts-types  $\sigma_X$  et  $\sigma_M$  et la variance de x et y

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{N} \text{ et } \bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^6 m_i}{N}$$

$$V(X) = \frac{\sum x_i}{N} - \bar{x} \text{ et } V(M) = \frac{\sum m_i}{N} - \bar{m}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \text{ et } \sigma(M) = \sqrt{V(M)}$$

$$\bar{x} = 12 \quad \bar{m} = 156 \quad V(X) \approx 46.66$$

$$V(M) = 1933,33 \quad \sigma(x) \equiv 6,83 \quad \sigma(M) \approx 43,96 \text{ et } cov(X, M) \equiv 267,33$$

$$r = \frac{cov(x, m)}{\sigma_x \sigma_m}$$

Le coefficient de corrélation

$$r \approx 0,89$$

Puisque r est proche de 1, il ya alors une forte corrélation entre X et m.

**b)** La droite de régression de  $m$  en  $x$   $D_{m/x}$  a pour équation  $m = ax + b$  avec

$$a = \frac{cov(x, m)}{V(x)} \text{ et } b = \bar{m} - a\bar{x}$$

$$a \approx 5,73 \text{ et } b \approx 87,25$$

$$D_{m/x} : m = 5,73x + 87,25$$

c) Si  $x=30$  alors  $m \approx 259,128$  d'où le salaire moyen d'un ouvrier ayant 30 ans d'ancienneté est environ égal à  $259130F$

#### EXERCICE 44 Nuage de points

1) Représenter le nuage de points de cette série.

Insérer schéma

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G puis placer G

$$G(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i = \frac{0 + 1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 12}{7} = \frac{37}{7} \approx 5,3$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum y_i = \frac{3,5 + 6,5 + 9,5 + 14 + 21 + 32,5 + 34}{7} = \frac{121}{7} = 17,3$$

3) a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r

$$r = \frac{Cov(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

$$Cov(x, y) = \frac{1}{7}(6,5 + 19 + 56 + 7 \times 21 + 11 \times 32,5 + 12 \times 34) - 5,28 \times 17,28$$

$$Cov(x, y) = \frac{1}{7}(6,5 + 19 + 56 + 147 + 357,5 + 408) - 91,2$$

$$Cov(x, y) = \frac{994}{7} - 91,2 = 50,8$$

$$\sigma^2(x) = \frac{1}{N}(\sum x_i^2) - \bar{x}^2 = \frac{1}{7}(1 + 2^2 + 4^2 + 7^2 + 11^2 + 12^2) - (5, 28)^2$$

$$\sigma(x)^2 = \frac{335}{7} - 27,9 = 47,8 - 27,8 = 20 \implies \sigma(x) = \sqrt{20} = 4,47$$

$$\sigma^2(y) = \frac{1}{N}(\sum y_i^2) - \bar{y}^2 = \frac{1}{7(2994) - (17, 28)}^2 = 427,7 - 298,5$$

$$\sigma^2(y) = 129,2 \implies \sigma(y) = \sqrt{129,2} = 11,3$$

$$\implies r = \frac{50,8}{4,5 \times 11,3} = 0,290$$

**b)**

**4)** Donner une équation de la droite de regression (D) de y en x

on a  $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$

$$a = \frac{Cov(x, y)}{V(x)} = \frac{50,8}{20} \approx 2,5$$

$$y = a(x - \bar{x}) + \bar{y} = 2,5(x - 5,3) + 17,3$$

$$y = 2,5x + 4$$

graphiquement à partir de 4,5 ans le poids sera supérieur à 15 kg

$$y = 15 \implies x = \frac{15 - 4}{2,5} = 4,4$$

**EXERCICE 45 Corrélation et droites de régression (3 pts)**

1. (D<sub>1</sub>) droite de régression de Y en X ayant pour équation :  $y = ax + b$ , on

$$a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \quad \text{et} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$(D_2) \text{ droite de régression de } X \text{ en } Y \text{ ayant pour équation : } x = a'y + b', \text{ on a } a' = \frac{\text{cov}(Y, X)}{V(Y)}$$

On en déduit que  $aa' = r^2$

2.

(D<sub>1</sub>) droite de régression de Y en X ayant pour équation réduite  $y = 2,4x$ , on a :  $a = 2,4$  et  $b = 0$

$$(D_2) \text{ droite de régression de } X \text{ en } Y \text{ ayant pour équation réduite : } x = \frac{3,5}{9}y + \frac{24}{9}, \text{ on a :}$$

$$a' = \frac{3,5}{9} \text{ et } b' = \frac{24}{9}$$

D'après la question précédente, le coefficient de corrélation vérifie :

$$r^2 = aa' = 2,4 \times \frac{3,5}{9} = \frac{14}{15}$$

Puisque  $r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ , que  $\sigma(X)$  et  $\sigma(Y)$  sont positifs par définition et que  $\text{cov}(X, Y)$  est positif par hypothèse, alors  $r$  est positif.

$$\text{Donc } r = \sqrt{\frac{14}{15}}$$

3.

On a

Nous multiplions l'équation (2) par  $a$  et obtenons :  $a\bar{x} - aa'\bar{y} = ab'$

Le système devient :

La somme membre à membre des 2 équations donne :  $(1 - aa')\bar{y} = b + ab'$

$$\text{Nous déduisons } \bar{y} = \frac{b + ab'}{1 - r^2}$$

Pour trouver  $\bar{x}$ , je remplace  $\bar{y}$  par sa valeur dans (2)  
soit :

$$\bar{x} - a' \frac{b + ab'}{1 - r^2} = b'$$
$$\iff \bar{x} = b' + a' \frac{b + ab'}{1 - r^2}$$

$$\bar{x} = \frac{b' - r^2 b' + a'b + a'ab'}{1 - r^2}$$

$$\bar{x} = \frac{b' - aa'b' + a'b + a'ab'}{1 - r^2}$$

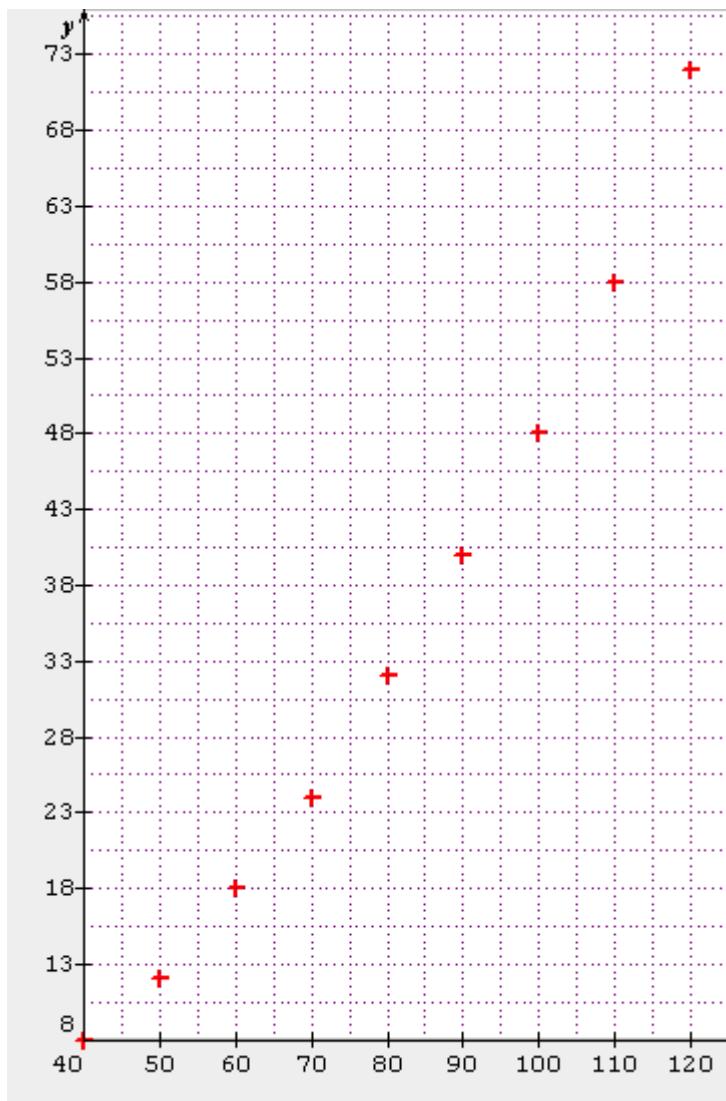
$$\bar{x} = \frac{b' + a'b}{1 - r^2}$$

Application numérique :

$$\frac{1}{1 - r^2} = 15, \text{ on a } \bar{y} = 15 \times 2,4 \times \frac{24}{9} \text{ et } \bar{x} = 15 \times \frac{24}{9}$$

Donc  $\bar{y} = 96$  et  $\bar{x} = 40$

**EXERCICE 46      Statistiques**



2)

X <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>	x <sup>2</sup> <sub>i</sub>	y <sup>2</sup> <sub>i</sub>	x <sub>i</sub> y <sub>i</sub>
40	8	1600	64	320
50	12	2500	144	600
60	18	3600	324	1080
70	24	4900	576	1680
80	32	6400	1024	2560
90	40	8100	1600	3600
100	48	10000	2304	4800
110	58	12100	3364	6380
120	72	14400	5184	8640
720	312	63600	14584	29660

Equation de la droite de régression

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{cov(x, y)}{V(x)} = \frac{522,22}{666,67} = 0,783$$

avec

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 34,6 - 0,783 \times 80 = -28$$

d'où  $Y = 0,783x - 28$

**3)** Déterminons le coefficient de corrélation  $r$

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}} = \frac{522,22}{25,82 \times 20,46} = 0,988$$

$r = 0,988 \simeq 1$  Nous avons une bonne corrélation

**4) a)** On suppose que cette évolution se poursuit

Si  $x = 150$  alors  $y = 0,783 \times 150 - 28 = 89,45 \geq 85$   
oui, il percutera l'obstacle

**b)** Soit  $x$  sa vitesse maximale au moment du freinage.

Pour ne pas heurter l'obstacle il faut  $y < 85$

$$y < 85 \implies 0,783x - 28 < 85 \implies 0,783x < 85 + 28$$

$$\implies x < \frac{113}{0,783} = 144,32$$

**B)**

	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	totaux
X <sub>1</sub>	n <sub>11</sub> =440	n <sub>12</sub> =360	n <sub>1*</sub> =800
X <sub>2</sub>	n <sub>12</sub> =110	n <sub>22</sub> =90	n <sub>2*</sub> =200
totaux	n <sub>*1</sub> =550	n <sub>*2</sub> =450	N=1000

**1)** l'effectif total des accidents enregistré lors de cette étude est :

$$N = 440 + 360 + 110 + 90 = 1000$$

**2)** fréquences conditionnelles

$$f_{y_2/x_1} = \frac{n_{12}}{n_{1*}} = \frac{360}{800} = \frac{45}{100} = 45\%$$

$$f_{x_2/y_2} = \frac{n_{22}}{n_{*2}} = \frac{90}{450} = \frac{1}{5} = 20\%$$

**3) fréquences marginales**

$$f_{\circ 1} = \frac{n_{\circ 1}}{N} = \frac{550}{1000} = 55\%$$

$$f_{2\circ} = \frac{n_{2\circ}}{N} = \frac{200}{1000} = 20\%$$

**EXERCICE 47      Statistiques à deux variables**

Le tableau ci dessous  $y_i$  représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en milliers de francs est  $x_i$

**1) Calcul du coefficient de corrélation linéaire**

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)} \sqrt{V(y)}}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} = \frac{60 + 80 + 100 + 120 + 140 + 160 + 180 + 200}{8} = \frac{1040}{8} = 130$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^8 y_i}{8} = \frac{952 + 805 + 630 + 522 + 510 + 324 + 205 + 84}{8} = \frac{4032}{8} = 504$$

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i^2}{8} - \bar{x}^2 = \frac{152000}{8} - (130)^2 = 2100$$

$$V(y) = \frac{\sum_{i=1}^8 y_i^2}{8} - \bar{y}^2 = \frac{2637870}{8} - (504)^2 = 75717,75$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i y_i}{8} - \bar{x} \bar{y} = \frac{424100}{8} - 130 \times 504 = -12507,5$$

d'où :

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)} \sqrt{V(y)}} = \frac{-12507,5}{\sqrt{2100} \sqrt{75717,75}} = -0,99$$

$r \simeq -1,$

donc la valeur trouvée justifie la recherche d'un ajustement linéaire.

**2)** équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$ .

$$y = ax + b, \text{ avec:}$$

$$a = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(x)} = \frac{-12507,5}{2100} = -5,95$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 504 - (-5,95)(130) = 1277,5$$

$$y = -5,95x + 1277,5$$

**3)** Les frais de conception sont de 28000000 F. le prix de fabrication de chaque produit est de 25000 F.

**a)**  $x$  est le prix de vente, donc  $y$  est le nombre d'exemplaires du produit.

le prix de vente est  $yx = (-5,95x + 1277,5)x$  en milliers de francs

le prix de revient est  $25000y + 28000000 = 25y + 28000$  en milliers de francs.

Donc  $z = (-5,95x + 1277,5)x - 25y - 28000$

$$z = (-5,95x + 1277,5)x - 25(-5,95x + 1277,5) - 28000$$

$$z = -5,95x^2 + 1426,25x - 59937,5$$

**b)** Déterminons le prix de vente  $x$  permettant de réaliser un bénéfice maximum.

$$\text{on a } z(x) = -5,95x^2 + 1426,25x - 59937,5$$

$z$  est une fonction continue et dérivable en  $x$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$z'(x) = -11,9x + 1426,25$$

$$z'(x) = 0 \text{ si } x = 119,85$$

on voit ainsi que  $z$  atteint son maximum pour  $x = 119,85$  en milliers de francs.  
donc le prix de vente permettant de réaliser un bénéfice maximum est  $x = 119.850$  F.

$z(119,85) = -5,95(119,85)^2 + 1426,25(119,85) - 59937,5 = 25532,628$  en milliers de francs

D'où le bénéfice maximum est 25.532.628

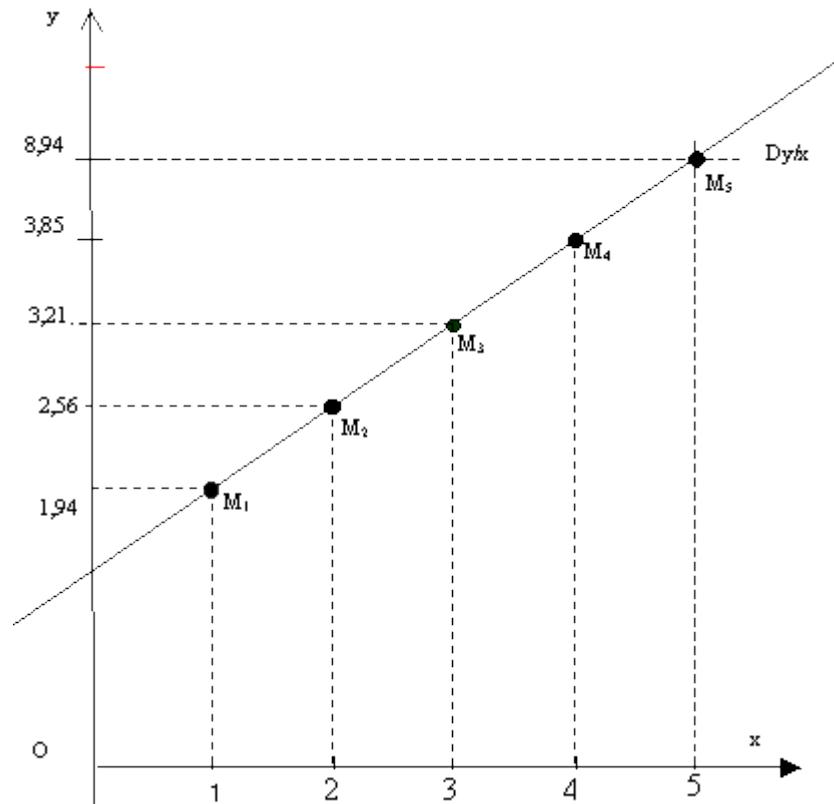
**EXERCICE 48      Statistique à deux variables (4 pts)**

Statistiques à deux variables (4 pts - 1999)

1.  $y = \ln p$

a)

b)



Pour avoir les points, on construit les points

$$M_1(1; 1,94); M_2(2; 2,56); M_3(3; 3,21); M_4(4; 3,85); M_5(5; 4,47)$$

Une équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$ .

est de la forme  $D_{y/x} : y = ax + b$

$$\text{où } a = \text{Cov}(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{V(x, y)}$$

$$yi - \bar{x} \bar{y}$$

$$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{1.94 + 2.56 + 3.21 + 3.85 + 4.47}{5} = \frac{16.03}{5} = 3.206$$

on trouve :

$$Cov(x, y) = \frac{1}{5}(1, 94 + 2x2, 56 + 3x3, 21 + 4x3, 85 + 5x4, 47) - 3, 206x3$$

$$= \frac{1}{5}(1, 94 + 5, 12 + 9, 63 + 15, 4 + 22, 35) - 9, 618$$

$$= 1, 27$$

$$Cov(x, y) = 1, 27$$

$$= \frac{1}{5}(1 + 4 + 9 + 16 + 25) - 9$$

$$= 11 - 9$$

$$V(x) = 2$$

$$a = \frac{Cov(x, y)}{V(x, y)} = \frac{1.27}{2} = 0.635$$

On obtient alors

$$a = 0, 635$$

On sait que la droite de régression passe par le point moyen de coordonnées  $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\text{donc } b = \bar{y} - a \bar{x}$$

$$= 3, 206 - 0, 365x3$$

$$= 3, 206 - 1, 905$$

$$b = 1, 301$$

On en déduit que la droite de régression de  $y$  en  $x$  a pour équation :  $y = 0, 635x + 1, 301$

**2)** au bout de six mois on a  $x = 6$

et  $y = 0, 365x6 + 1, 301$

$$y = 5, 111$$

On a alors  $p = e^y = e^{5, 111}$

$$p = 165, 83mg.$$

**Un fascicule sans tampon est considéré comme fraude.**

**Merci de signaler les manquements, suggestions et erreurs au  
783703151**

### **Présentation du Réseau Scolaire**

Le réseau scolaire est une plateforme dont l'objectif principale se trouve être la promotion de l'éducation.

**Date de la création** 15 Octobre 2016

**Date du lancement** 02 Novembre 2017

**Premier recrutement de bénévoles** Mars 2018

Page | 160

Elle a été mise sur pied en Octobre 2016 par un groupe d'étudiants repartie au niveau du territoire national sénégalais, après avoir compris les défis que pose l'éducation au niveau mondiale et particulièrement dans notre pays. La centralité accordée à l'éducation dans les traités, pactes et accords montre son potentiel comme catalyseur du développement mais aussi la place de choix qu'occupe ce secteur.

### **Les actions et interventions**

#### **Diffusion de l'information**

Le constat est que l'accès à l'information se trouve être un problème pour les différents acteurs du secteur éducatif (élèves, étudiants les professionnels...). Il s'agit d'un handicap majeur pour ces derniers qui ont du mal à accéder à la bonne information. Car le partage est pour la plus part limité.

Ainsi, via le canal de la technologie de l'information et de la communication et la création de relations avec les centres d'orientations, nous comptons y apporter notre contribution. En plus de cet aspect, elle sensibilise les parents sur l'importance de l'éducation et de la formation de la jeunesse.

#### **L'encadrement**

Les élèves du Moyen et Secondaire surtout ont besoin d'un encadrement pour réussir. En effet, le suivi et l'encadrement de ces élèves se trouve être capital pour leur réussite. Ils ne parviennent pas à en bénéficier pour la plus part par manque moyen ou absence d'opportunités, et cela contribue parfois à la baisse du niveau voir même à l'échec.

Les établissements disposent souvent de bons élèves qui ont besoin d'un bon encadrement pour réussir.

#### **Participation à la création d'un environnement propice à la réussite**

Trouvant que parfois certains besoins nécessaire à la réussite sont parfois négligés. Il importe d'avoir des initiatives à travers l'engagement citoyen pour résoudre des problèmes que rencontrent certaines structures éducatives.

#### **Action sociale**

Nous nous trouvons dans un pays où le seuil de pauvreté reste plus ou moins élevé. Le problème de moyens se pose souvent pour l'accès à l'éducation. Les populations disposent de ressources limitées et cela pose le problème crucial d'accès aux offres de formation de base.

### **Ressources**

Le bon déroulement de la structure et de ces activités repose sur les partenariats qu'elle peut tisser. Une collaboration avec les partenaires internes et externes est capitale. Pour l'atteinte des objectifs fixés, un partenariat solide est nécessaire avec les structures locales et extérieures soucieuses du développement et conscientes de la place qu'occupe l'éducation. Ainsi en conformité avec son projet originel, la structure procèdera de façon assez régulière des demandes de partenariat, des demandes de sponsoring.