

Chap. 1 : Transformée de Fourier discrète et applications

La transformation de Fourier discrète (TFD) est un outil mathématique de traitement du signal numérique, qui est l'équivalent discret de la transformation de Fourier continue qui est utilisée, nous allons le voir, à la fois en mathématiques et en traitement du signal. Cela sera prétexte d'introduire une première classe de méthodes spectrales comme décrites dans l'introduction.

I. Rappels sur les séries de Fourier.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous allons commencer par faire des rappels sur les séries de Fourier.

Définition 1.

L'ensemble des classes de fonction de carré intégrable sur \mathbb{R} , périodiques de période $T > 0$ est défini comme :

$$L^2_{per}(0, T) = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid f \text{ } T\text{-périodique}, \int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \quad (1)$$

Proposition 1.

L'espace $L^2_{per}(0, T)$ est un espace de Hilbert complexe, c'est à dire un espace vectoriel normé complet, muni du produit scalaire :

$$(f; g) = \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (2)$$

La norme associée est alors naturellement donnée par

$$\|f\|_2^2 = \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

I.1. Polynômes trigonométriques

Définition 2.

On appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à $N \in \mathbb{N}$ toute fonction de la forme :

$$P(t) = \sum_{m=-N}^N c_m e^{2i\pi m t / T} \quad \text{avec } (c_m)_{-N \leq m \leq N} \in \mathbb{C}^{2N+1}.$$

Nous noterons $e_m(t) := e^{2i\pi m t / T}$ le m -ème monôme trigonométrique, et \mathcal{P}_N l'ensemble de tous les polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N .

Étant donné que e_m est une fonction T -périodique infiniment différentiable par construction, on a en particulier $e_m \in L^2_{per}(0, T)$. Ainsi, comme combinaison linéaire finie de monômes, tout polynôme trigonométrique reste dans cet espace :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_N \subset L^2_{per}(0, T).$$

Proposition 2.

L'ensemble \mathcal{P}_N est un sous-espace vectoriel de $L^2_{per}(0, T)$ de dimension $2N + 1$.

Démonstration. La seule chose à montrer est l'indépendance de la famille des monômes trigonométriques. Il suffit pour cela de prendre plusieurs points (par exemple $0, T/2, T$, etc.) et de montrer que les systèmes obtenus sont eux mêmes libres. \square

On s'intéresse maintenant aux propriétés élémentaires des monômes trigonométriques. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$, on a clairement

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_m; \mathbf{e}_n) &= \int_0^T \mathbf{e}_m(t) \overline{\mathbf{e}_n(t)} dt = \int_0^T e^{2i\pi mt/T} e^{-2i\pi nt/T} dt \\ &= \int_0^T e^{2i\pi(m-n)t/T} dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ T & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier, si $P \in \mathcal{P}_N$ on a l'identité

$$(P; \mathbf{e}_n) = \sum_{m=-N}^N c_m (\mathbf{e}_m; \mathbf{e}_n) = T c_n, \quad (3)$$

et donc,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} (P; \mathbf{e}_n) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) e^{-2i\pi nt/T} dt \end{aligned} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P(t) e^{-2i\pi nt/T} dt. \quad (5)$$

Remarque.

On montre grâce à (5) que

- P pair $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, c_{-n} = c_n$;
- P impair $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, c_{-n} = -c_n$.

Dans l'ensemble des polynômes trigonométriques, on a donc « gratuitement » une identité de Parseval :

Proposition 3. (Parseval)

Si $P = \sum_{m=-N}^N c_m e_m \in \mathcal{P}_N$, alors

$$\frac{1}{T} \|P\|_2^2 = \sum_{m=-N}^N |c_m|^2.$$

Démonstration.

$$\|P\|_2^2 = (P; P) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N c_m \overline{c_n} (\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) = \sum_{m=-N}^N T |c_m|^2.$$

□

Remarque.

Nous verrons un peu plus loin que cette identité s'étend naturellement à n'importe quel élément de $L^2_{per}(0, T)$, quitte à ce que la somme devienne infinie. Cette égalité n'est rien d'autre qu'une généralisation du théorème de Pythagore, et peut s'interpréter naturellement lors des applications (en physique, notamment) comme suit :

L'énergie totale s'obtient en sommant les contributions des différents harmoniques.

I.2. Approximation par des polynômes orthogonaux

But. Nous savons approcher des fonctions définies sur des intervalles par des polynômes classiques, grâce par exemple au théorème de Stone-Weierstrass ou aux polynômes de Bernstein. Nous allons maintenant nous intéresser à la question de l'approximation de la meilleure manière possible de fonctions périodiques $f \in L^2_{per}(0, T)$ par un polynôme trigonométrique.

⚠ L'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N \mathcal{P}_N est composé de fonctions $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. En particulier, si la fonction à approcher f n'est pas $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a aucun espoir que $f = P$.

⚠ Comme on travaille dans $L^2_{per}(0, T)$, les objets que l'on considère sont des classes de fonctions, pas définis ponctuellement, et l'approximation sera donc faite au sens de la minimisation d'une norme : trouver $(c_m) \in \mathbb{C}^{2N+1}$ tel que

$$\left\| f - \sum_{m=-N}^N c_m \mathbf{e}_m \right\|_2 \text{ soit minimale}$$

c'est-à-dire la projection orthogonale de f sur \mathcal{P}_N .

Théorème 1.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L^2_{per}(0, T)$. La meilleure approximation de f dans \mathcal{P}_N est donnée par

$$f_N := \sum_{m=-N}^N c_m(f) \mathbf{e}_m, \tag{6}$$

où $c_m(f) \in \mathbb{C}$ est le m-ème coefficient de Fourier de f , donné par

$$c_m(f) := \frac{1}{T} (f; \mathbf{e}_m). \tag{7}$$

Le polynôme trigonométrique f_N sera appelé série de Fourier tronquée à l'ordre N de f .

Démonstration. Soit $P = \sum_{m=-N}^N x_m e_m$ pour $x_m \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}\|f - P\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - 2\operatorname{Re}(f; P) + \|P\|_2^2, \\ &= \|f\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\left(\sum_{m=-N}^N \overline{x_m} c_m(f)\right) + T \sum_{m=-N}^N |x_m|^2 \\ &= \|f\|_2^2 + T \sum_{m=-N}^N [|x_m|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{x_m} c_m(f))] \\ &= \|f\|_2^2 + T \sum_{m=-N}^N [|c_m(f) - x_m|^2 - |c_m(f)|^2]\end{aligned}$$

Ainsi $\|f - P\|_2^2$ est minimale si, et seulement si, $\forall m \in \{-N, \dots, N\}$, $x_m = c_m(f)$. □

La preuve de ce théorème a de nombreuses conséquences, notamment :

Proposition 4.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L^2_{per}(0, T)$. On a :

(i)

$$\|f\|_2^2 = \|f - f_N\|_2^2 + T \sum_{m=-N}^N |c_m(f)|^2. \quad (8)$$

(ii) Inégalité de Bessel :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{m=-N}^N |c_m(f)|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_2^2. \quad (9)$$

(iii) En particulier,

$$(c_m(f)) \in l^2(\mathbb{Z}). \quad (10)$$

(iv) En particulier,

$$c_m(f) \underset{|m| \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (11)$$

I.3. Résultats de convergence

Nous allons maintenant véritablement nous intéresser à des résultats d'approximation : nous allons chercher des conditions sur la fonction f pour que sa série de Fourier tronquée f_N approche f . Nous allons aussi chercher à caractériser la vitesse de convergence, pour étudier la qualité de l'approximation.

I.3.1. Convergence au sens L^2

Le premier théorème concerne la convergence de la série de Fourier au sens de la norme L^2 , et est une simple conséquence de la proposition 4 :

Théorème 2.

Si $f \in L^2_{per}(0, T)$ alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|_2 = 0.$$

Corollaire 1. (Égalité de Parseval)

Si $f \in L^2_{per}(0, T)$ alors

$$\frac{1}{T} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(f)|^2 = \|f\|_2^2. \quad (12)$$

I.3.2. Convergence au sens L^1 **Définition 3.**

Définissons maintenant l'espace des fonctions T -périodiques et intégrables par

$$L^1_{per}(0, T) = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} \mid f \text{ } T\text{-périodique}, \int_0^T |f(t)| dt < \infty \right\}, \infty.$$

Il est clair que $L^2_{per}(0, T) \subset L^1_{per}(0, T)$. En effet, si $f \in L^1_{per}(0, T)$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_0^T |f(t)| dt \leq \left(\int_0^T 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |f|^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{T} \left(\int_0^T |f|^2 dt \right)^{1/2}.$$

L'espace de Lebesgue $L^1_{per}(0, T)$ n'étant pas un espace de Hilbert, la proposition précédente ne s'applique pas en toute généralité à toutes les fonctions de $L^1_{per}(0, T)$. Néanmoins, si $f \in L^1_{per}(0, T)$, on peut définir $c_m(f)$ car :

$$|c_m(f)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi mt/T} dt \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t) e^{-2i\pi nt/T}| dt = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt < \infty.$$

On a alors un analogue du point (iv) de la proposition 4 :

Lemme 1. (Riemann-Lebesgue)

Si $f \in L^1_{per}(0, T)$ alors $\lim_{|m| \rightarrow \infty} c_m(f) = 0$.

Démonstration. Commençons par supposer un peu plus de régularité : si $f \in C^1_{per}(0, T)$, on a pour $m \neq 0$

$$\begin{aligned} c_m(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi mt/T} dt \\ &= -\underbrace{\frac{1}{2i\pi m}}_{m \rightarrow +\infty 0} \underbrace{\left[f(t) e^{-2i\pi mt/T} \right]_0^T}_{<\infty} + \underbrace{\frac{1}{2i\pi m}}_{m \rightarrow +\infty 0} \underbrace{\int_0^T f'(t) e^{-2i\pi mt/T} dt}_{<\infty}. \end{aligned}$$

Par densité de $C^1_p(0, T)$ dans $L^1_{per}(0, T)$ on a le résultat voulu. □

I.3.3. Convergences ponctuelles et uniformes

Définissons maintenant un objet bien pratique, le noyau de Dirichlet :

$$D_N = \sum_{m=-N}^N e_m.$$

Ce polynôme trigonométrique possède les propriétés suivantes

1. On peut le réécrire sous la forme compacte

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{m=-N}^N e^{-2i\pi mt/T} = \sum_{m=-N}^N \left(e^{-2i\pi t/T} \right)^m = \sum_{m=-N}^N e_1^m(t) \\ &= \sum_{m=0}^{2N} e_1^{-N+m}(t) = e_1^{-N}(t) \sum_{m=0}^{2N} e_1^m(t) = e_1^{-N} \frac{1 - e_1^{2N+1}(t)}{1 - e_1(t)} \\ &= \frac{e_1^{-N}(t) - e_1^{N+1}(t)}{e_1^{1/2}(t) (e_1^{-1/2}(t) - e_1^{1/2}(t))} = \frac{e_1^{-N-1/2}(t) - e_1^{N+1/2}(t)}{e_1^{-1/2}(t) - e_1^{1/2}(t)} \\ &= \frac{\sin((N+1/2)2\pi t/T)}{\sin(\pi t/T)} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Le noyau D_N est T -périodique.

3. Son intégrale est simple

$$\int_0^T D_N(t) dt = \sum_{m=-N}^N \int_0^T e_m(t) dt = T$$

4. Grâce au produit de convolution discret, il permet de simplifier la définition des sommes de Fourier tronquées

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \sum_{m=-N}^N c_m(f) e_m(t) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-N}^N \left(\int_0^T f(s) e_m(s) ds \right) e_m(t) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-N}^N \left(\int_0^T f(s) e_m(t-s) ds \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(s) D_N(t-s) ds \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sin((N+1/2)2\pi(t-s)/T)}{\sin(\pi(t-s)/T)} f(s) ds \\ &=: \frac{1}{T} f *_T D_N(t). \end{aligned}$$

Théorème 3. (Dirichlet)

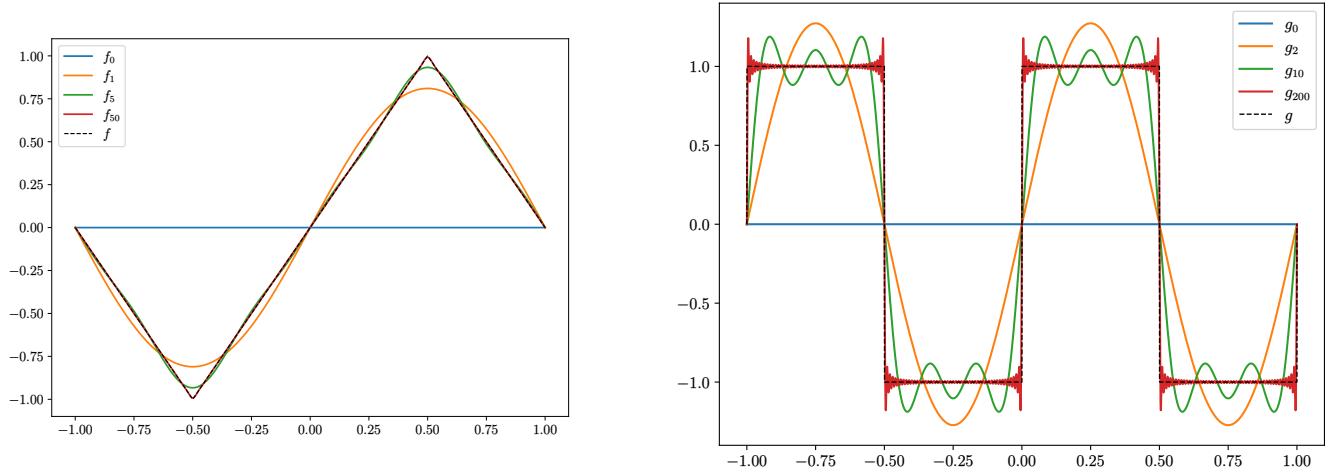


FIGURE 1 – Illustration du théorème 3 pour des fonctions à dérivées définies presque partout : convergence ponctuelle dans le cas continu (gauche) vs. convergence vers la demi-somme aux points de discontinuité (droite).

Soit $f \in L_p^1(0, T)$. Si $\exists t_0 \in [0, T]$ tel que $f(t_0^-)$, $f(t_0^+)$, $f'(t_0^-)$ et $f'(t_0^+)$ existent alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t_0) = \frac{1}{2}(f(t_0^-) + f(t_0^+)).$$

Remarque.

Si f est continue en t_0 ,

$$f_N(t_0) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} f(t_0).$$

À l'inverse, il n'y a pas convergence de la série de Fourier aux points de discontinuité, comme illustré sur la Figure 1. Les oscillations visibles aux voisinages des discontinuités sont appelées phénomène de Gibbs.

Démonstration.

Posons $\tilde{f}(t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}$, ainsi :

$$f_N(t_0) - \tilde{f} = \frac{1}{T} f *_T D_N(t_0) - \tilde{f}(t_0)$$

Or

$$\int_0^T D_N(s) ds = T.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 f_N(t_0) - \tilde{f}(t_0) &= \frac{1}{T} f *_T D_N(t_0) - \frac{1}{T} \tilde{f}(t_0) \int_0^T D_N(s) ds = \frac{1}{T} \int_0^T [D_n(s) f(t_0 - s) - D_n(s) \tilde{f}(t_0)] ds \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T D_n(s) (f(t_0 - s) - \tilde{f}(t_0)) ds \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi(N + 1/2)s/T) \frac{f(t_0 - s) - \tilde{f}(t_0)}{\sin(\pi s/T)} ds.
 \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a par la règle de De L'Hospital que

$$\frac{(f(t_0 - s) - \tilde{f}(t_0))}{\sin(\pi s/T)} \underset{s \rightarrow 0}{\sim} f'(t_0^-) + f'(t_0^+) < \infty$$

par hypothèse. De plus, un rapide calcul de primitive permet d'établir que

$$\int_0^T \sin(2\pi(N + 1/2)s/T) ds \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0.$$

On conclut donc par convergence dominée que $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}$

□

Remarque.

Il est possible de montrer qu'il existe une fonction g périodique continue intégrable qui n'admet aucun nombre dérivé sur $[0, 1]$ et donc g_N ne converge nulle part.

Théorème 4.

Si f est continue, T -périodique et admet une dérivée, sauf en un nombre fini de points (c'est-à-dire f' est continue par morceaux sur $[0, T]$) alors la série de Fourier de f , notée $S(f)$,

$$S(f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e_m$$

vérifie :

(i) Convergence absolue :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(f)| < \infty.$$

(ii) Convergence uniforme :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f_N - f\|_\infty = 0.$$

(iii) Si f'' est aussi continue par morceaux sur $[0, T]$, sa série de Fourier est obtenue en dérivant terme à terme celle de f , c'est-à-dire :

$$S(f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f') e_m = \frac{2i\pi}{T} \sum_{m \in \mathbb{Z}} m c_m(f) e_m.$$

Remarque.

Le point ((i)) est important, car il permet de réorganiser les termes dans la série de Fourier lorsque cela est nécessaire.

Démonstration. (iii) Vu les hypothèses sur f on peut faire une intégration par partie dans l'expression de $c_m(f)$ et comme f' est C^1 par morceaux, en particulier :

$$f' \in L^2_{per}(0, T).$$

Si $m \neq 0$, on a alors

$$c_m(f) = \frac{1}{2i\pi m} \int_0^T f'(t) \overline{e_m(t)} dt.$$

En particulier, on a montré le corollaire 2.

(i) On veut montrer que :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(f)| < \infty.$$

On vient de voir que si $m \neq 0$:

$$c_m(f) = \frac{T}{2i\pi m} |c_m(f')|.$$

En particulier, on a que

$$\begin{aligned} \sum_{m=-N}^N |c_m(f)| &\leq |c_0(f)| + \sum_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N \frac{T}{2\pi|m|} |c_m(f')| \\ &= |c_0(f)| + \frac{T}{2\pi|m|} \sum_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N \frac{|c_m(f')|}{|m|}. \end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \sum_{m=-N}^N |c_m(f)| &\leq |c_0(f)| + \underbrace{\frac{T}{2\pi} \left(\sum_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N \frac{1}{|m|^2} \right)^{1/2}}_{<\infty, \forall N} \left(\sum_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N |c_m(f')|^2 \right)^{1/2} \\ &= K_0 + K_1 \left(\sum_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N |c_m(f')|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où K_0 et K_1 sont indépendantes de N .

Enfin, $f' \in L^2_{per}(0, T)$ ainsi que l'inégalité de Bessel assurent que la série de terme général $(c_m(f'))_{m \in \mathbb{Z}}$ converge dans $l^2(\mathbb{Z})$, d'où le résultat. \square

Corollaire 2.

Sous les hypothèses du théorème précédent,

$$c_m(f') = \frac{2i\pi m}{T} c_m(f).$$

Remarque.

Cette propriété est l'analogue du cas classique pour la transformée de Fourier : si $g \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\widehat{g'}(\xi) = i\xi \widehat{g}(\xi).$$

Corollaire 3.

Si $f \in C_p^k(0, T)$ pour $k > 1$, on a pour tout $m \in \mathbb{Z}$

$$c_m(f^{(k)}) = i^k \left(\frac{2\pi}{T}\right)^k m^k c_m(f).$$

Remarque.

On en déduit que

$$|c_m(f)| \leq \frac{T^{k-1}}{2\pi |m|^k} \int_0^T |f^{(k)}(t)| dt \leq \frac{C_k}{|m|^k},$$

où $C_k \geq 0$ est une constante strictement positive ne dépendant pas de m . En particulier, si $f \in C_p^\infty(0, T)$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left|m^k\right| c_m(f) \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On dit que la suite $(c_m(f))_{m \in \mathbb{Z}}$ est à décroissance rapide.

Théorème 5.

Si $f \in L_{per}^2(0, T)$ alors il est équivalent de dire :

- (i) $f \in C_p^\infty(0, T)$;
- (ii) $(c_m(f))_{m \in \mathbb{Z}}$ est à décroissance rapide.

Démonstration. Le sens (ii) vers (i) est clair par la remarque précédente, et nous allons donc nous intéresser au sens direct (i) vers (ii) : par hypothèse, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left|m^k\right| c_m(f) \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0.$$

En particulier, la famille $(c_m(f))_{m \in \mathbb{Z}}$ est sommable, et la suite $(f_N)_N$ converge uniformément vers f . En particulier, f est continue. La propriété de décroissance rapide étant vraie pour tout k , on en déduit le même résultat pour toutes les dérivées de f_N .

□

Corollaire 4.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite à décroissance rapide alors la fonction $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_m e_m$ est $C_p^\infty(0, T)$.

Théorème 6.

Si $f \in C_p^k(0, T)$ pour $k > 1$, alors pour tout $N \geq 0$, il existe une constante $C = C(k, N) \geq 0$ telle que

$$\|f - f_N\|_2 \leq \frac{C}{N^{k+1}}.$$

Démonstration. On a vu à la proposition 4 que :

$$\underbrace{\|f - f_N\|_2^2}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ N \rightarrow +\infty}} + T \sum_{m=-N}^N |c_m(f)|^2 = \|f\|_2^2.$$

En particulier,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(f)| = T \|f\|_2^2. \quad (\text{Égalité de Parseval})$$

Ainsi, on peut écrire que

$$\|f - f_N\|_2^2 = T \sum_{|m|>N+1} |c_m(f)|^2.$$

Maintenant, si $f \in C^\infty$, on a vu que $|c_m(f)| \leq \frac{K}{|m|^k}$, et donc :

$$\|f - f_N\|_2^2 = KT \sum_{|m|>N+1} \frac{1}{|m|^{2k}}$$

qui tend vers 0 si $k > 1$, au taux N^{-2k} . □

Remarque.

Ce théorème est un résultat dit de consistance spectrale pour l'approximation d'une fonction régulière par sa série de Fourier tronquée : la régularité de la fonction améliore la vitesse de convergence de la troncation.

Exercice 1. Développements de fonctions en série de Fourier.

1. Calculer le développement en série de Fourier des fonctions suivantes :
 - (a) f de période 2 et $f(t) = |t|$ si $|t| < 1$;
 - (b) g de période a et $g(t) = t/a$ si $0 \leq t < a$;
 - (c) $h(t) = |\sin(t)|$.
2. Utiliser la formule de Parseval pour chacune de ces fonctions et en déduire la valeur exacte des sommes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2}.$$

Exercice 2. Coefficients de Fourier de la translatée.

Étant donnés une fonction $f \in L^2_{per}(0, T)$ et un réel $a \in \mathbb{R}$, on définit la translatée f_a de f par

$$f_a(t) := f(t - a), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f_a en fonction de ceux de f .
2. Déduire de la question 1c de l'exercice 1 le développement en série de Fourier de la fonction $t \mapsto |\cos(t)|$.

Exercice 3. Série de Fourier du produit.

Soient $f, g \in L^2_{per}(0, T)$.

1. Montrer que $f g \in L^1_{per}(0, T)$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$c_m(f_N g_N) = \sum_{l=-N}^N c_{m-l}(f) c_l(g).$$

3. Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T |f_N(t) g_N(t) - f(t) g(t)| dt = 0.$$

4. En déduire que

$$c_m(f g) = \sum_{l=-\inf ty}^{\infty} c_{m-l}(f) c_l(g),$$

avec convergence absolue de la série du membre de droite de l'égalité.

II. Applications à l'équation de la chaleur.

Commençons par revenir sur les liens entre développement en série de Fourier et parité des fonctions considérées. Soit $P \in \mathcal{P}_N$ pour $N \geq 0$. On a

$$P(t) = \sum_{m=-N}^N c_m e_m(t) = c_0 + \sum_{m=1}^N \left(c_m e^{2i\pi m t/T} + c_{-m} e^{-2i\pi m t/T} \right).$$

Si $a_m = c_m + c_{-m}$ et $b_m = i(c_m - c_{-m})$ alors :

$$P(t) = a_0 + \sum_{m=1}^N \left(a_m \cos \left(\frac{2\pi m t}{T} \right) + b_m \sin \left(\frac{2\pi m t}{T} \right) \right).$$

En fait, on peut définir les quantités a_m et b_m par

$$a_m = \frac{2}{T/2} \int_0^T P(t) \cos \left(\frac{2\pi m t}{T/2} \right) dt \quad \text{et} \quad b_m = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \sin \left(\frac{2\pi m t}{T} \right) dt.$$

On a alors

$$P \text{ paire} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, c_m = c_{-m} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, b_m = 0. \quad (13)$$

$$P \text{ impaire} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, c_m = -c_{-m} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}^*, a_m = 0. \quad (14)$$

Tous les résultats de la section précédente se transposent naturellement à ces familles constituées de cos (resp. de sin) en fonction de la parité de la fonction étudiée. Nous allons nous concentrer par la suite sur des fonctions impaires, via prolongement si nécessaire.

II.1. Approche par les séries de Fourier

On considère à partir de maintenant l'équation de la chaleur suivante : trouver $u : [0; T] \times [0; 1] \mapsto \mathbb{R}$ solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & \forall t \in [0, T], x \in [0, 1]; \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in [0, 1]; \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \end{cases} \quad (\text{H})$$

pour une fonction $u_0 \in L^2([0; 1])$ donnée.

Soit \widetilde{u}_0 le prolongement de u_0 par imparité sur $[-1; 1]$ et 2-périodicité sur \mathbb{R} (voir aussi la figure 2). On a donc $\widetilde{u}_0 \in L^2(0, 2)$.

Théorème 7.

Soit $u_0 \in L^2([0; 1])$ alors, il existe une unique fonction u solution de (H) valant u_0 en $t = 0$ et vérifiant

- $u \in C^\infty([0; +\infty[\times]0; 1[)$;
- $\forall t \in]0; +\infty[, u(t, \cdot) \in L^2([0; 1])$.

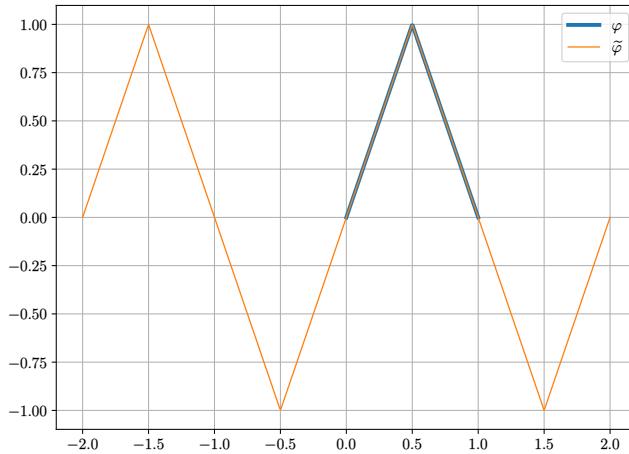
De plus,

- (i) On a la formule de représentation :

$$u(t, x) = \sum_{m \geq 1} b_m(\widetilde{u}_0) e^{-m^2 \pi^2 t} \sin(\pi m x), \quad \forall t \geq 0, \forall x \in [0, 1]. \quad (15)$$

- (ii) Pour tout $t > 0$ on a :

$$\|u(t, \cdot)\|_2 \leq e^{-t\pi^2} \|u_0\|_2.$$

FIGURE 2 – Prolongement par imparité puis 2-périodicité $\tilde{\varphi}$ d’une fonction φ .

Démonstration. Unicité. Soit u solution de (H) , montrons que u est unique, nécessairement donnée par (15) . Pour être solution de (H) , u est dérivable une fois en t et deux fois en x sur $]0; T] \times [0; 1]$. On va supposer préalablement que

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in C^0 (]0; T] \times [0; 1]) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C^0 (]0; T] \times [0; 1]).$$

En prolongeant ces fonctions par imparité sur $[-1; 1]$ et 2-périodicité sur \mathbb{R} , on obtient des fonctions continues et à dérivées définies presque partout, donc développables en série de Fourier (dans la famille $(\sin(\pi mx))_{m \in \mathbb{N}^*}$ par imparité), avec convergence absolue des-dites séries d’après le théorème (4) :

$$u(t, x) = \sum_{m \geq 1} b_m(u(t, \cdot)) \sin(\pi mx), \quad b_m(u(t, \cdot)) \frac{1}{2} \int_0^1 u(t, x) \sin(\pi mx) dx.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue, ($u \in L^2$ et $u(t, x) \geq u(t, x) \sin(\pi mx)$) nous donne la dérivabilité de $t \mapsto b_m \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right)$ par rapport à t et permet d’écrire que

$$\frac{\partial}{\partial t} (b_m(u(t, \cdot))) = b_m \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right).$$

En particulier, la convergence absolue implique que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \sum_{m \geq 1} b_m \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right) \sin(\pi mx) = \sum_{m \geq 1} \frac{\partial}{\partial t} (b_m(u(t, \cdot))) \sin(\pi mx).$$

D’autre part, nous avons grâce au corollaire 2 que

$$b_m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, \cdot) \right) = -m^2 \pi^2 b_m(u(t, \cdot)),$$

et donc on peut écrire que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \sum_{m \geq 1} (-m^2 \pi^2) b_m(u(t, x)) \sin(\pi mx)$$

Finalement, en utilisant le fait que u est solution de (H), on a

$$\sum_{m \geq 1} \left[\frac{\partial}{\partial t} (b_m(u(t, \cdot))) + m^2 \pi^2 b_m(u(t, \cdot)) \right] \sin(\pi mx) = 0$$

Or $(\sin(\pi mx))_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre de $L^2_{per}([0; 1])$, ainsi $\forall m \geq 1$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (b_m(u(t, \cdot))) + m^2 \pi^2 b_m(u(t, \cdot)) = 0 \\ b_m(u(0, \cdot)) = b_m(u_0). \end{cases}$$

En particulier, on a la formule fermée pour les coefficients de Fourier de $u(t, \cdot)$

$$\forall m \geq 1, b_m(u(t, \cdot)) = b_m(u_0) e^{-m^2 \pi^2 t}$$

La fonction u est donnée par la formule de représentation (15).

Existence. Il suffit par exemple de vérifier que la formule de représentation

$$u(t, x) = \sum_{m \geq 1} b_m(\tilde{u}_0) e^{-m^2 \pi^2 t} \sin(\pi mx)$$

est bien définie et est solution de (H). Cette propriété est laissée en exercice au lecteur.

Régularité. Il reste à montrer que u est infiniment dérivable en x . Cela est une conséquence de la formule de représentation (15) et du théorème 5 : les coefficients de Fourier de $u(t, \cdot)$ décroissant comme une exponentielle, leur famille est en particulier à décroissance rapide.

Décroissance. Enfin, pour obtenir la décroissance exponentielle en temps de la norme L^2 de u , il suffit d'itérer deux fois la formule de Parseval dans la formule de représentation (15) :

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_2^2 &= \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} |b_m(u_0)|^2 e^{-2m^2 \pi^2 t} \\ &\leq \frac{e^{-2t\pi^2}}{2} \sum_{m \geq 1} |b_m(u_0)|^2 \\ &= e^{-2t\pi^2} \|u_0\|_2^2. \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.

Convergence exponentielle vers 0 en norme L^2 de la solution de l'équation de la chaleur :

$$\int_0^1 u^2(t, x) dx = \|u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq e^{-2\pi^2 t} \|u_0\|_{L^2}^2 \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Remarque.

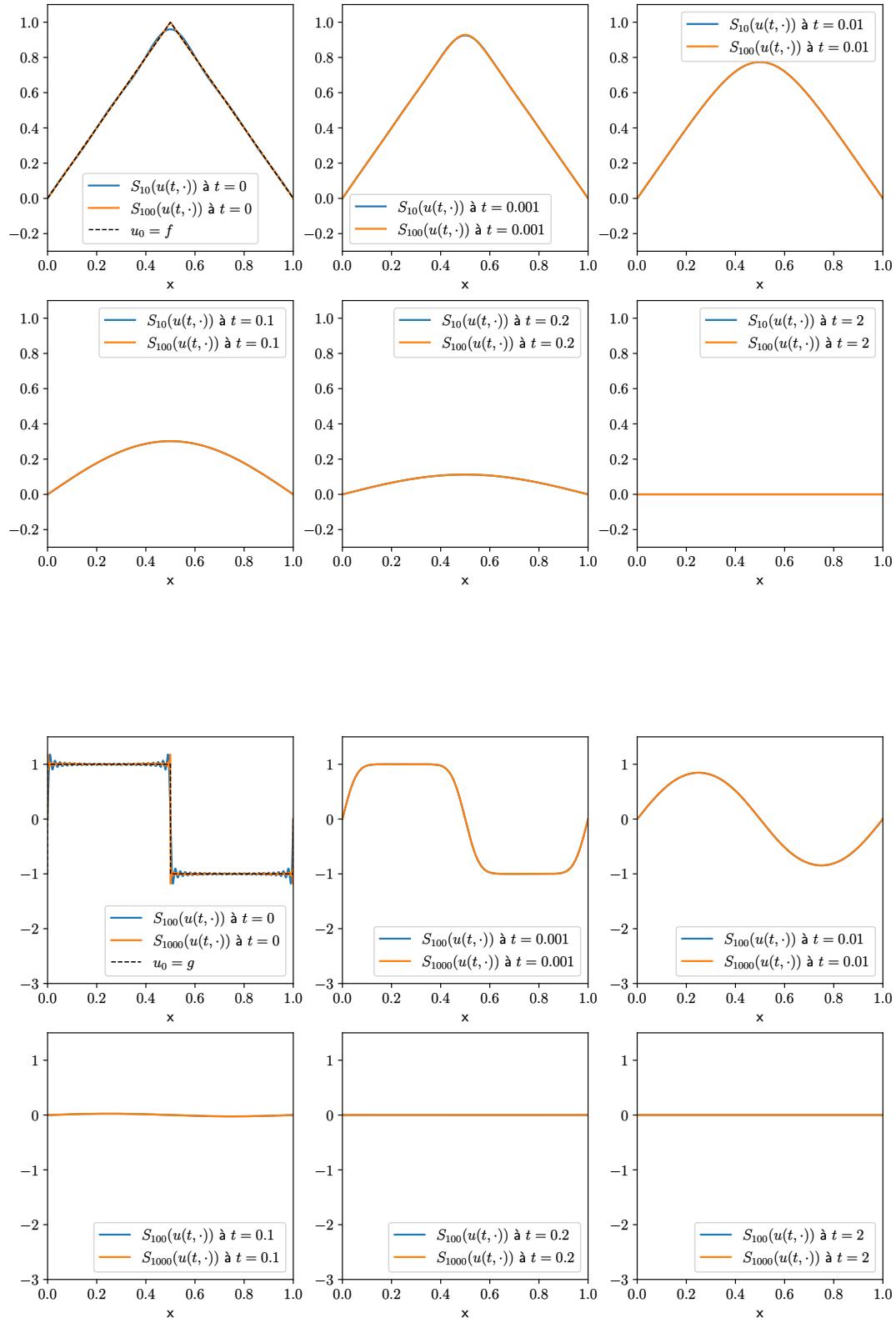


FIGURE 3 – Solutions de l'équation de la chaleur, via la formule de représentation (15) tronquée, pour les fonctions de la figure 1.

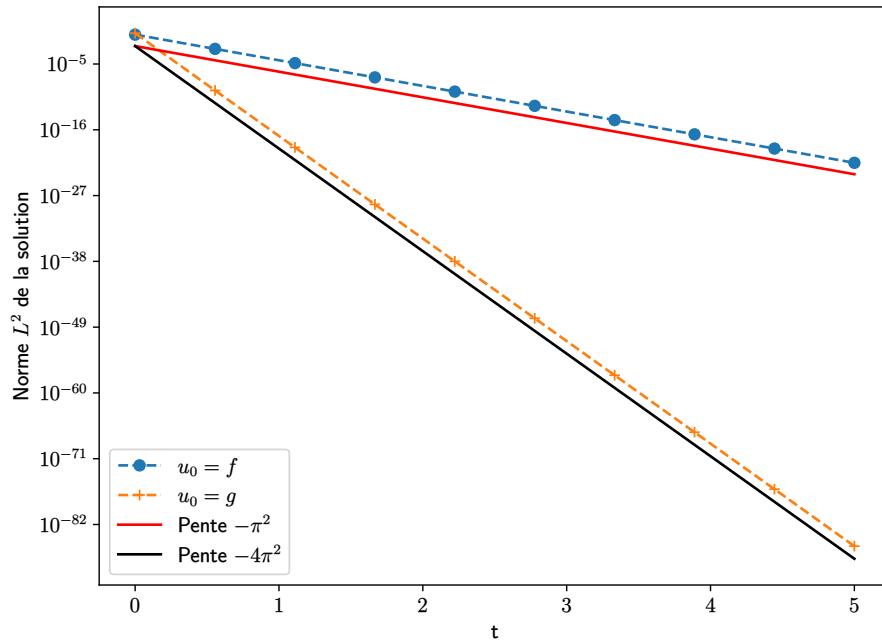


FIGURE 4 – Décroissance exponentielle en temps de la norme L^2 des solutions de l'équation de la chaleur.

(1) Aspect instantanément régularisant de l'équation de la chaleur :

$$u_0 \in L_2((0, 1)) \Rightarrow \forall t > 0, u(t, \cdot) \in C^\infty([0; 1])$$

(2) Les coefficients de Fourier de $u(t, \cdot)$ décroissent exponentiellement vite en m : $b_m(u(t, \cdot)) \sim e^{-m^2\pi^2 t}$. Les grande fréquences sont donc amorties exponentiellement vite, l'approximation de u par sa série de Fourier tronquée u_N est excellente, même si N est petit, donc le traitement numérique est facile.

(3) On a convergence ponctuelle de u vers 0 si u_0 est continue par morceaux :

$$|u(t, x)| \leq \sum_{m \geq 1} |b_m(u_0)| e^{-m^2\pi^2 t} \leq e^{-\pi^2 t} \sum_{m \geq 1} |b_m(u_0)|,$$

car $\sum_{m \geq 1} |b_m(u_0)| < \infty$ si u_0 continue par morceaux.

Si maintenant on s'intéresse à l'équation de la chaleur avec terme source (apport d'énergie extérieur) suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x), & \forall t \in [0, T], x \in [0, 1]; \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in [0, 1]; \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

il suffit d'adapter la méthode introduite dans le théorème précédent. Plus précisément, si l'on suppose que

la fonction f est régulière, une simple méthode de variation de la constante dans (15) permet d'écrire que

$$u(t, x) = \sum_{m \geq 1} \left(b_m(\widetilde{u_0}) e^{-m^2\pi^2 t} + \int_0^t b_m(f(s, \cdot)) e^{-m^2\pi^2(t-s)} ds \right) \sin(\pi mx), \quad \forall t \geq 0, \forall x \in [0, 1]$$

est solution de (16). On peut montrer comme précédemment que cette solution est régulière et unique.

II.2. Approche par des méthodes d'énergie

Question. Et si on n'avait pas accès aux outils précédemment introduit, que pourrait-on dire des propriétés qualitatives des solutions de (H) ?

Commençons par nous intéresser au cas où on a accès à l'intégration par partie :

Proposition 5.

Soit $u \in C([0; +\infty[) \times L^2([0; 1]) \cap C^\infty([0; +\infty[\times [0; 1])$ solution de (H). L'énergie cinétique de u est décroissante :

$$E : t \mapsto \int_0^1 u^2(t, x) dx.$$

Démonstration. On a pour $t \geq 0, x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 \\ \Rightarrow & 2u(t, x) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - 2u(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial u^2}{\partial t}(t, x) - 2u(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 \\ \Rightarrow & \int_0^1 \frac{\partial u^2}{\partial t}(t, x) dx - 2 \int_0^1 u(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) dx = 0. \end{aligned}$$

La fonction $u(t, \cdot)$ étant $C^\infty([0; 1])$, elle est en particulier uniformément continue donc u bornée donc on peut permuter limite et \int , et donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 u^2(t, x) dx &= 2 \int_0^1 u(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) dx \\ &= 2 \left[u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Or $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ donc :

$$E'(t) = -2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \leqslant 0.$$

Donc E décroît. □

Une fois cette décroissance établie, un outil supplémentaire est nécessaire pour obtenir le taux optimal explicitement :

Théorème 8. (Inégalité de Poincaré)

Soit $f \in L^2([0; 1])$ telle que sa dérivée existe dans le même espace : $f' \in L^2([0; 1])$, alors

$$\left\| f - \int_0^1 f(t) dt \right\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\pi} \|f'\|_{L^2}$$

Démonstration. Dans ce cas particulier, une preuve courte de cette célèbre inégalité peut être obtenue par l'utilisation rusée des séries de Fourier. Commençons par remarquer que

$$f \in L^2 \Rightarrow f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e^{2im\pi t} \text{ et } (c_m(f))_{m \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}).$$

De plus

$$c_0(f) = \int_0^1 f(t) dt,$$

donc

$$f(t) - \int_0^1 f(t) dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} c_m(f) e^{2im\pi t}.$$

En particulier,

$$\left\| f - \int_0^1 f(t) dt \right\|_{L^2}^2 \stackrel{\text{Parseval}}{=} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} |c_m(f)|^2.$$

Or $m \neq 0$ donc $m^2 \geq 1$ et

$$\left\| f - \int_0^1 f(t) dt \right\|_{L^2}^2 \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} m^2 |c_m(f)|^2.$$

Or on a vu au théorème 5 que

$$c_m(f') = 2i\pi m c_m(f).$$

On en conclut que

$$\left\| f - \int_0^1 f(t) dt \right\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} m^2 |c_m(f')|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \|f'\|_{L^2}^2.$$

□

Proposition 6.

Sous les hypothèses de la propriété précédente,

$$\forall t \geq 0, E(t) \leq e^{-\pi t/2} E(0).$$

Démonstration. On a vu que

$$E'(t) \leq -2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = -2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\underbrace{\int_0^1 u^2(t, x) dx}_{E(t)} - \int_0^1 u(t, x) dx \right)$$

Si $\int_0^1 u(t, x) dx = 0$ (ce qui est le cas si on l'a obtenue par prolongement par imparité),

$$E'(t) \leq -(2\pi)^2 E(t) \Rightarrow E(t) \leq e^{-2\pi t} E(0).$$

□

Exercice 4. Développement d'une fonction en série de Fourier.

1. Calculer le développement en série de Fourier des fonctions définies sur \mathbb{R} , 2-périodiques et impaires, et dont la restriction à $[0, 1]$ est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pour } x \in [0, 1/2]; \\ 2 - 2x & \text{pour } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in]0, 1/2]; \\ -1 & \text{pour } x \in]1/2, 1[; \\ 0 & \text{en } x = 0 \text{ et } x = 1. \end{cases}$$

2. On note $f_N(x)$ la somme partielle de Fourier de rang N de la fonction f au point x . Que dire de la convergence de $(f_N)_N$ vers f ? *Le vérifier numériquement en représentant sur le même graphique la fonction f pour $x \in [-1, 1]$, ainsi que celle de ses premières sommes partielles f_N pour différentes valeurs de N .*
3. On note $g_N(x)$ la somme partielle de Fourier de rang N de la fonction g au point x . *Représenter sur le même graphique la fonction g pour $x \in [-1, 1]$, ainsi que celle de ses premières sommes partielles g_N pour différentes valeurs de N . Que conjecturer de la convergence de $(g_N)_N$ vers g ?*
4. On s'intéresse ici plus particulièrement au cas de la fonction g .

(a) Donner l'expression de $g_{4N}\left(\frac{1}{4N}\right)$.

(b) Soit $I = \int_0^\pi \frac{\sin y}{y} dy$. Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g_{4N}\left(\frac{1}{4N}\right) = \frac{2}{\pi} I.$$

On pourra essayer d'identifier une formule de quadrature de l'intégrale I .

- (c) *Donner une valeur approchée de I (on pourra utiliser une quadrature numérique). Comment s'appelle le phénomène que mettent en évidence les questions ci-dessus?*

Exercice 5. Résolution de l'équation de la chaleur avec conditions aux bords de Dirichlet.

On désire résoudre l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & (t, x) \in]0, 1] \times [0, 1]; \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t > 0; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (\text{HD})$$

1. D'après la méthode décrite plus haut, donner l'expression des coefficients de la série de Fourier de u , solution de (HD) pour les conditions initiales données par $u_0 = f$ et $u_0 = g$, les fonctions de l'Exercice 4.
2. Effectuer la représentation graphique sur l'intervalle $[0, 1]$ des premières sommes partielles $u_N(t, \cdot)$ pour différentes valeurs de n , en fonction du temps. Commenter les résultats obtenus. On s'intéressera particulièrement à la régularité de u .
3. Mettre en évidence la décroissance en temps des normes L^2 de chacune des solutions.

Exercice 6. Résolution de l'équation de la chaleur avec conditions aux bords de Neumann.

On se propose de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & (t, x) \in]0, 1] \times [0, L]; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0, & t \in]0, 1]; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (\text{HN})$$

Cette équation modélise la distribution de la température $u(t, x)$ au temps t en chaque point x d'une barre de longueur L , isolée thermiquement aux extrémités.

1. On se propose de chercher une solution régulière de (HD) sous la forme

$$u(t, x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m(t) \cos(\pi n x / L) \quad (17)$$

Justifier ce choix.

2. Soit u donnée par (17). Calculer formellement la suite $(a_m(t))_{n \in \mathbb{N}}$, $t \geq 0$, telle que u vérifie (HN).
3. On suppose que u_0 est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Montrer que la formule (17) avec la suite $(a_m(t))_{n \in \mathbb{N}}$ calculée à la question précédente définissent une fonction u de classe C^∞ sur $]0, +\infty[\times [0, L]$ et continue sur $[0, +\infty[\times [0, L]$ qui satisfait l'équation de la chaleur (HD).

Exercice 7. Résolution de l'équation des ondes.

L'évolution de la position $(t, x) \mapsto u(t, x)$ d'une corde homogène de longueur 1 dont les extrémités sont fixes peut être décrite par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & (t, x) \in]0, 1] \times [0, 1]; \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t > 0; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, 1]; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (\text{W})$$

1. Utiliser les séries de Fourier et résoudre le problème (W).
2. Effectuer la représentation graphique des solutions correspondant aux données initiales suivantes

- la corde de guitare (corde pincée) : $u_0 = f$, $v_0 = 0$
 - la corde de piano (corde frappée) $u_0 = 0$, $v_0 = 3f$
- où f est la fonction définie dans l'Exercice 4.

3. Quelle est la régularité de $x \mapsto u(t, x)$ à t fixé sur $x \in [0, 1]$, dans les deux exemples précédents ?
Le démontrer.

Exercice 8. Vers l'équation de Black-Scholes.

L'équation de Black-Scholes est un modèle mathématique permettant de décrire la dynamique d'un marché financier contenant des instruments financiers dérivés (comme des options). Elle a été introduite en 1973 par Fischer Black et Myron Scholes, pour décrire l'évolution temporelle du prix d'une option d'achat sur le marché Européen (European call). Elle permet notamment à des opérateurs de marché de minimiser les risques liés au commerce de telles options. Le prix (normalisé) de l'option $V(t, x)$, compris comme fonction du temps $t \geq 0$ et du prix (normalisé) du stock $x \in [0, 1]$, est solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + x \frac{\partial V}{\partial x} - V = 0 & \forall t \geq 0, x \in [0, 1] \\ V(0, x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ V(t, 0) = V(t, 1) = 0. & t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{BS})$$

1. En introduisant le changement de variable suivant :

$$x(y) = e^y, \quad t(\tau) = 1 - 2\tau, \quad u(\tau, y) = V(t(\tau), x(y)),$$

montrer que la fonction u est solution d'une équation très similaire à l'équation de la chaleur (HD), sur un domaine spatial potentiellement grand.

2. En faisant un changement de variable linéaire bien choisi, montrer que l'on peut se ramener exactement à l'équation (HD).
3. Proposer et implémenter une méthode numérique permettant de calculer une solution approchée de l'équation (BS).

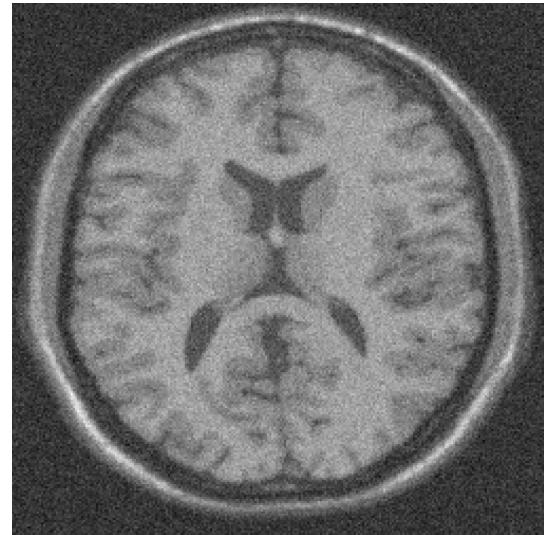
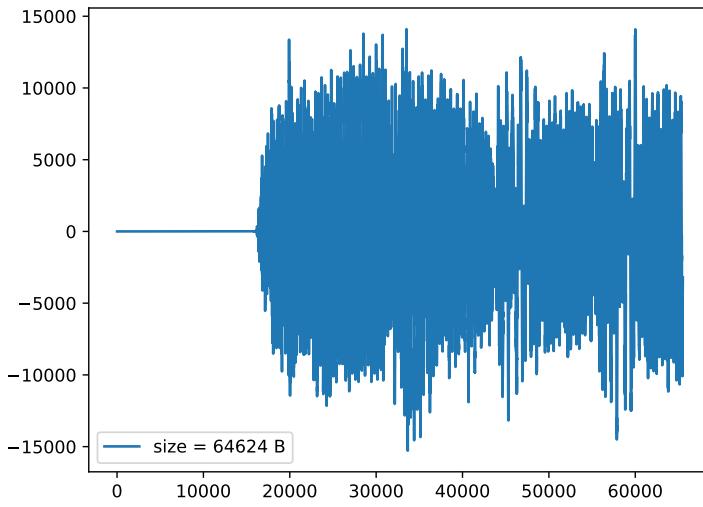


FIGURE 5 – Signal mono représentant un accord de guitare sèche (gauche) et image IRM d'un cerveau humain (droite)

III. Transformée de Fourier discrète.

But. On souhaite calculer des transformées de Fourier d'objets qui ne sont pas des fonctions, par exemple

- un signal sonore échantillonné (découpé) à une certaine fréquence (voir Figure 5, gauche) ;
- une image informatique (voir Figure 5, droite) ;
- une succession d'image (un film) ;
- etc.

Tout ces objets ont en commun le fait qu'ils peuvent être représentés, après échantillonnage et discréétisation, par un vecteur $y \in \mathbb{C}^N$, pour un N pouvant être très grand.

Pour commencer, nous allons supposer qu'un tel y est obtenu en échantillonnant de manière uniforme une certaine fonction f T -périodique :

$$\forall k \in \{0, \dots, N-1\}, \quad y_k := f\left(\frac{kT}{N}\right).$$

Remarque.

La fonction f étant périodique, le vecteur y obtenu par cette procédure d'échantillonnage est lui-même est N -périodique, c'est-à-dire qu'il peut être représenté par la suite N -périodique $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ suivante :

$$\forall l \in \mathbb{Z}, \quad k \in \{0, \dots, N-1\}, \quad y_{k+lN} = y_k.$$

On va chercher à approcher le m -ième coefficient de Fourier de la fonction f en utilisant seulement les N valeurs échantillonnées dans y_k . On rappelle que ce coefficient est donné par

$$c_m(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi mt/T} dt$$

D'après la formule composite des rectangles à gauche, on a l'approximation à l'ordre 1 en N suivante :

$$\begin{aligned} c_m(f) &\approx \frac{1}{TN} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{\left(\frac{-2i\pi mkT}{TN}\right)} \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-mk} =: c_m^N, \end{aligned} \quad (18)$$

où l'on a noté ω_N la racine N -ème de l'unité

$$\omega_N = e^{\left(\frac{-2i\pi}{N}\right)}. \quad (19)$$

Remarque.

On remarque dans cette dernière formule que les T , artificiels, ont disparu.

Définition 4.

On appelle transformée de Fourier discrète (DFT) de $y \in \mathbb{C}^N$ le vecteur $Y \in \mathbb{C}^N$ défini par

$$Y_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k w_N^{-mk}, \quad \forall m \in \{0, \dots, N-1\}.$$

La méthode des rectangles étant d'ordre 1 en N , si $f \in C^1(0, T)$, il existe une constante positive C_f telle que l'on ait l'estimation :

$$|c_m(f) - c_m^N| \leq \frac{k}{N}, \quad \forall m \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Cette estimation est au premier abord relativement mauvaise. Néanmoins, les résonances induites par la périodicité de f et son intégration sur exactement une période permettent d'améliorer grandement ce résultat. Commençons par montrer le théorème suivant, dit de convergence spectrale de la méthode des rectangles pour les fonctions périodiques (que nous supposerons de période 1 pour simplifier) :

Théorème 9.

Soit g une fonction 1-périodique sur \mathbb{R} . Si $g \in C^s(\mathbb{R})$ pour un entier $s \geq 2$, alors il existe une constante positive $C_{s,g}$ telle que

$$\left| \int_0^1 g(t) dt - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right) \right| \leq \frac{C_{s,g}}{N^s}.$$

Ce théorème établit donc que pour le cas de **fonctions périodiques intégrées sur exactement une période**, la méthode des rectangles est d'ordre infini (dicté par la régularité de la fonction intégrée), comme pour le théorème 6.

Démonstration. Vu les hypothèses de régularité de g , on peut écrire d'après le théorème 4 que la série de Fourier tronquée de g

$$g_N := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_m(g) e_m$$

converge uniformément vers g . En particulier, on peut permuter série et intégrale et réordonner des termes dans g_N dans les calculs qui suivent :

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t) dt - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right) &= \int_0^1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(g) e_m(t) dt - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(g) e_m\left(\frac{k}{N}\right) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(g) \underbrace{\left[\int_0^1 e_m(t) dt - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e_m\left(\frac{k}{N}\right) \right]}_{E_m^N}. \end{aligned}$$

On a

$$E_m^N = \begin{cases} 1 - 1 = 0 & \text{si } m = 0 \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi mk/N} & \text{sinon} \end{cases}$$

ainsi que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi mk/N} = \begin{cases} -\frac{1}{N} \frac{1-e^{2i\pi m}}{1-e^{2i\pi m/N}} = 0 & \text{si } m \not\equiv 0 [N] \\ -1 & \text{si } m \equiv 0 [N]. \end{cases}$$

En conséquence, on a

$$E_m^N = \begin{cases} -1 & \text{si } m \equiv 0 [N], m \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et donc

$$\left| \int_0^1 g(t) dt - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right) \right| \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}^*} |c_{lN}(g)|.$$

Or par le théorème 5, vu que la fonction $g \in C^s$, on a l'existence d'une constante positive k vérifiant

$$|c_m(g)| \leq \frac{k}{m^s}.$$

Finalement, on trouve donc

$$\left| \int_0^1 g(t) dt - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right) \right| \leq k \sum_{l \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{(lN)^s} = \frac{k}{N^s} \sum_{l \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{l^s}.$$

Comme on a choisi $s \geq 2$, on a

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{l^s} < \infty,$$

et l'on obtient la conclusion. □

Corollaire 6.

Si $f \in C_p^s$, $s \geq 2$ alors en notant $y_k = f\left(\frac{k}{N}\right)$ pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$, il existe une constante positive C_s telle que

$$|c_m(f) - C_m^N| \leq \frac{C_s}{N^s}, \quad \forall m \in \{0, \dots, N-1\}.$$

La DFT d'un vecteur est donc une très bonne approximation des coefficients de Fourier de la fonction générant ce vecteur, si cette fonction est suffisamment régulière.

Notation.

Nous noterons \mathcal{F}_N l'opérateur de DFT, c'est à dire l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_N : \quad \mathbb{C}^N &\longmapsto \mathbb{C}^N \\ y &\longmapsto Y,\end{aligned}$$

où

$$(\mathcal{F}_N y)_m = Y_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_n^{-mk}, \quad \forall m \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (20)$$

Proposition 7.

L'opérateur de DFT est un endomorphisme symétrique et inversible, dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{C}^N est donnée par

$$\Omega_N := \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N^{-1} & \omega_N^{-2} & \cdots & \omega_N^{-(N-1)} \\ 1 & \omega_N^{-2} & \omega_N^{-4} & \cdots & \omega_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_N^{-(N-1)} & \omega_N^{-2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. L'expression de la matrice Ω_N est claire vu la définition (20) en évaluant \mathcal{F}_N en les éléments de la base canonique de \mathbb{C}^N . On obtient alors

$$(\Omega_N)_{ij} = \omega_N^{-ij}, \quad \forall 0 \leq i, j \leq N-1.$$

La symétrie découle immédiatement de cette formule.

En ce qui concerne l'inversibilité, il est clair que Ω_N est une matrice de Vandermonde, associée au vecteur

$$(1, \omega_N^{-1}, \omega_N^{-2}, \dots, \omega_N^{-(N-1)}).$$

Or, si l'on considère deux entiers $l, k \in \{0, \dots, N-1\}$ tels que $l \neq k$, étant donné que $\omega_N = e^{2i\pi/N}$ est la racine N -ème de l'unité, on a

$$\omega_N^{-l} \neq \omega_N^{-k}.$$

En particulier, la matrice Ω_N est inversible. □

Rappel.

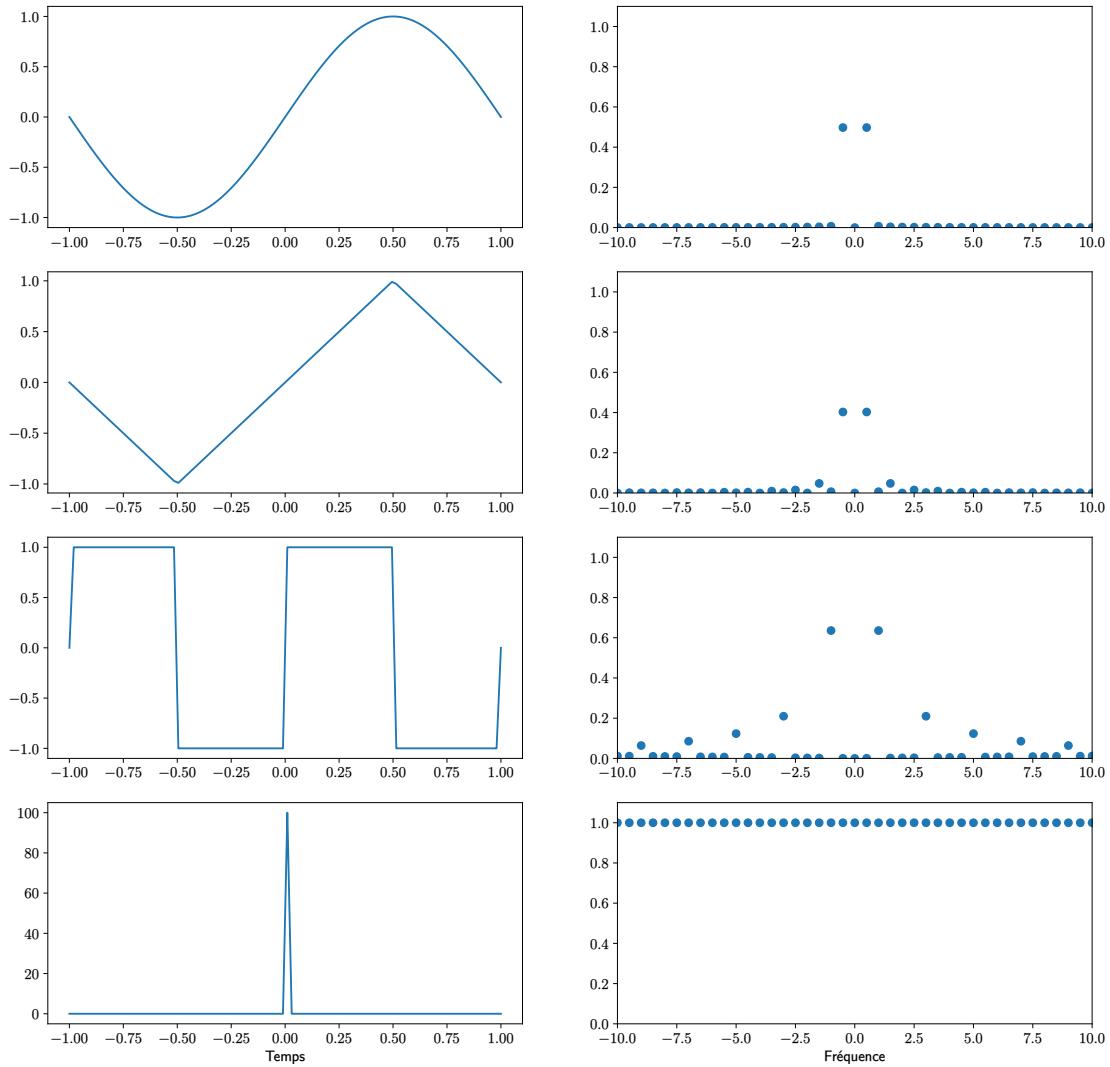


FIGURE 6 – Exemple de DFTs de quelques fonctions usuelles, échantillonnées uniformément avec $N = 100$ points.

Pour un vecteur $x = (x_1, \dots, x_N)^T \in \mathbb{C}^N$, on appelle matrice de Vandermonde associée à x la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & x_3^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}.$$

On peut montrer que cette matrice est inversible si, et seulement si, $\forall i \neq j, x_i \neq x_j$.

En effet, on peut calculer son déterminant en appliquant un simple algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_N - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_N^2 - x_1^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{N-1} - x_1^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} - x_1^{N-1} \end{vmatrix} \\ &= \cdots \\ &= \begin{vmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \prod_{i=1}^{N-1} (x_N - x_i) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

pour obtenir finalement que

$$\det(M) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (x_i - x_j).$$

On a donc $\mathcal{F}_N(y) = \Omega_N y$.

Corollaire 7.

La transformée de Fourier discrète est une opération inversible : il existe une application \mathcal{F}_N^{-1} telle que :

$$\forall y \in \mathbb{C}^N, \quad \mathcal{F}_N^{-1}(\mathcal{F}_N(y)) = \mathcal{F}_N(\mathcal{F}_N^{-1}(y)) = y.$$

De plus, on peut expliciter simplement la matrice de cette transformée de Fourier discrète inverse (IDFT) \mathcal{F}_N^{-1} , à savoir pour $Y \in \mathbb{C}^N$,

$$\mathcal{F}_N^{-1}Y = N\overline{\Omega_N}Y.$$

En particulier, on peut écrire pour $Y \in \mathbb{C}^N$,

$$(\mathcal{F}_N^{-1}Y)_k = \sum_{m=0}^{N-1} Y_m \omega_N^{mk}, \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Démonstration. On montre par une simple inspection que $\Omega_N \overline{\Omega_N} = \frac{1}{N} I_N$. □

Remarque.

On obtient grâce à ces résultats une analogie presque parfaite entre les séries de Fourier et la transformée de Fourier discrète :

$$\begin{aligned} c_m(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \omega_N^{-m\frac{N}{T}t} dt & \hookrightarrow & & Y_m &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) \omega_N^{-mk} \\ f(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) \omega_N^{-m\frac{N}{T}t} & \hookleftarrow & & f\left(\frac{kT}{N}\right) &= y_k = \sum_{m=0}^{N-1} Y_m \omega_N^{-mk}. \end{aligned}$$

Concluons cette section par une propriété fondamentale de la DFT (et pour ses applications), à savoir la transformation de convolutions dans l'espace physique en produit dans l'espace de Fourier.

Proposition 8.

Définissons la convolution périodique de deux vecteurs donnés $y, z \in \mathbb{C}^N$ par

$$(y *_N z)_k = \sum_{l=0}^{N-1} y_l z_{k-l}, \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Alors :

$$\frac{1}{N} \mathcal{F}_N(y *_N z)_m = (\mathcal{F}_N y)_m (\mathcal{F}_N z)_m, \quad \forall m \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Démonstration. Il suffit d'injecter la définition (20) de la DFT d'un vecteur de \mathbb{C}^N dans le terme de droite, et d'utiliser les propriétés des racines N -èmes de l'unité. □

Exercice 9. Calcul de DFTs.

1. Calculez numériquement la transformée de Fourier discrète (DFT) des signaux suivants, discré-tisés avec $N \in \mathbb{N}$ points répartis régulièrement sur le segment $x \in [-1, 1]$
 - (a) Fonction sinus $x \mapsto \sin(\pi x)$;
 - (b) Fonction triangle (voir f dans l'exercice 4);
 - (c) Fonction créneau (voir g dans l'exercice 4);
 - (d) Masse de Dirac discrète : tous les points valent 0, sauf un qui vaut N .
2. Tracer les signaux précédents ainsi que leur spectre, c'est-à-dire les modules des coefficients de Fourier (obtenus par DFT) en fonction de la fréquence. On se restreindra aux fréquences comprises dans le segment $[-10, 10]$.

Qu'est-ce que l'on remarque sur la forme du spectre de chacun de ces signaux, en fonction de leur régularité ?

Exercice 10. DFT itérée.

1. Pour $y \in \mathbb{C}^n$, on considère deux transformées de Fourier discrètes consécutives

$$(y_k) \xrightarrow{\mathcal{F}_N} (Y_m) \quad \text{et} \quad (Y_m) \xrightarrow{\mathcal{F}_N} (z_q)$$

Calculer les (z_q) en fonction des (y_k) .

2. Vérifier numériquement la formule trouvée.

Exercice 11. DFT d'une progression arithmétique.

1. Calculer la transformée de Fourier discrète du vecteur $y_k = k$, $k \in \{0, \dots, N-1\}$.
2. Vérifier numériquement la formule trouvée.
3. Généraliser cette formule à n'importe quelle progression arithmétique $z_k = ak + b$ pour $a, b \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, N-1\}$.

Exercice 12. Inégalité de Poincaré *totalelement discrète*.

Soit un vecteur $a \in \mathbb{C}^N$, identifié comme une suite N -périodique si nécessaire.

1. Montrer que

$$|\mathcal{F}_N(a)_m|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_j \bar{a}_k \omega_N^{-(j-k)n}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

2. En déduire l'égalité de Parseval discrète :

$$\|\mathcal{F}_N(a)\|^2 = N\|a\|^2.$$

3. On note $\langle a \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k$. Montrer que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} |\mathcal{F}_N(a)_n|^2 = \|a - \langle a \rangle\|^2.$$

4. On définit l'opérateur de différences centrées $D : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ par $D(a)_j = a_{j+1} - a_{j-1}$. Montrer que

$$\mathcal{F}_N(D(a))_m = 2i \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \mathcal{F}_N(a)_m, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

5. En déduire que si N est impair il existe une constante $C_N > 0$ (la donner) telle que l'on ait l'inégalité de Poincaré totalelement discrète

$$\|a - \langle a \rangle\| \leq C_N \|D(a)\|.$$

IV. Transformée de Fourier discrète rapide (FFT).

Question. Étant donné un vecteur $y \in \mathbb{C}^N$, combien d'opérations élémentaires (OE) sont nécessaires pour calculer $\mathcal{F}_N y$?

Réponse. Cela revient à compter le nombre d'opérations élémentaires d'un produit matrice-vecteur, c'est à dire

$N(N-1)$ additions complexes
 $N \times N$ multiplications complexes

$\left. \right\} 2N^2 + \mathcal{O}(N)$ opérations élémentaires complexes, soit $4N^2$ opéra-

tions élémentaires flottantes. Si $N = 2 \times 10^7$ (image par exemple prise avec un smartphone basique), il faut 16×10^{14} opérations élémentaires pour calculer Y , c'est à dire plusieurs dizaines de jours sur un ordinateur de 2022...

En 1965, Cooley et Tuckey ont proposé un algorithme pour calculer la transformée de Fourier discrète de y en seulement $N \log_2 N$ opérations élémentaires. C'est ce qu'on appelle l'algorithme de transformée de Fourier discrète rapide (Fast Fourier Transform, soit FFT).

Avantage.

$$N = 2 \times 10^7, \quad \log_2 N \approx 22 \Rightarrow N \log_2 N \approx 44 \times 10^7$$

IV.1. Un premier algorithme 2 fois plus rapide

Cet algorithme est extrêmement simple, exact, et peut se construire grâce à l'observation élémentaire simple suivante : supposons que $N = 2M$ soit pair, et soient $y \in \mathbb{C}^N$, $Y = \mathcal{F}_N y$. Commençons par remarquer que

$$\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}} = e^{\frac{i\pi}{M}} = \sqrt{\omega_M}.$$

Nous allons trier les composantes d'indice pair et impair de y , pour faire apparaître des DFTs dépendant de M plutôt que de N . On a pour $m \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned} Y_m &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-mk} \\ &= \frac{1}{2M} \left[y_0 + y_2 \omega_N^{-2m} + y_4 \omega_N^{-4m} + \dots + y_{N-2} \omega_N^{-(N-2)m} + \right. \\ &\quad \left. y_1 \omega_N^{-m} + y_3 \omega_N^{-3m} + y_5 \omega_N^{-5m} + \dots + y_{N-1} \omega_N^{-(N-1)m} \right] \\ &= \frac{1}{2M} \left[y_0 + y_2 \omega_M^{-m} + y_4 \omega_M^{-2m} + \dots + y_{N-2} \omega_M^{-(M-1)m} + \right. \\ &\quad \left. \omega_N^{-m} (y_1 + y_3 \omega_M^{-m} + y_5 \omega_M^{-2m} + \dots + y_{N-1} \omega_M^{-(M-1)m}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} y_{2l} \omega_M^{-ml} + \frac{\omega_N^{-m}}{M} \sum_{l=0}^{M-1} y_{2l+1} \omega_M^{-ml} \right] \\ &= \frac{1}{2} [(\mathcal{F}_M y^P)_m + \omega_N^{-m} (\mathcal{F}_M y^I)_m], \end{aligned} \tag{21}$$

où le vecteur $y^P \in \mathbb{C}^N$ (resp. $y^I \in \mathbb{C}^N$) contient les composantes d'indice pair (resp. impair) de y :

$$y^P = (y_0, y_2, \dots, y_{N-2})^\top, \quad y^I = (y_1, y_3, \dots, y_{N-1})^\top.$$

Or l'indice m dans (21) varie de 0 à $N-1 = 2M-1$, donc par M -périodicité de $\mathcal{F}_M y^P$ et $\mathcal{F}_M y^I$ on a effectué certains des calculs deux fois. Remarquons aussi que

$$\omega_N^{-m+M} = -\omega_N^{-m}.$$

On en déduit donc un premier algorithme un peu plus rapide pour calculer la transformée de Fourier discrète de y :

Algorithme 1 : Algorithme pour une DFT légèrement plus rapide

Données : $y \in \mathbb{C}^N$ pour $N = 2M \in \mathbb{N}^*$
Résultat : $\mathcal{F}_N y$, DFT de y

- 1 Calculer $\mathcal{F}_M y^P$; /* Coûte $4M^2 = N^2$ OE. */
- 2 Calculer $\mathcal{F}_M y^I$; /* Coûte N^2 OE. */
- 3 **for** $m = 0, \dots, M - 1$ **do**
 - 4 $Y_m \leftarrow \frac{1}{2} ((\mathcal{F}_M y^P)_m + \omega_N^{-m} (\mathcal{F}_M y^I)_m);$ /* Coûte 3 OE */
 - 5 $Y_{m+M} = \frac{1}{2} ((\mathcal{F}_M y^P)_m - \omega_N^{-m} (\mathcal{F}_M y^I)_m);$ /* Coûte 3 OE */

Le coût total de cette approche est donc de $2N^2 + \mathcal{O}(N)$ OE, soit moitié moins que l'approche directe !

IV.2. Le cas rapide, où N est une puissance de 2

Si M est pair on peut réitérer cette opération sur $\mathcal{F}_M y^P$ et $\mathcal{F}_M y^I$. Ainsi, si $N = 2^L$, on peut itérer l'opération L fois, et au rang L il nous restera à calculer des DFT de 2 vecteurs à 2 composantes :

$$y^{P_{final}} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{N-2} \end{pmatrix}, \quad y^{I_{final}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_{N-1} \end{pmatrix},$$

Étant donné que

$$\omega_2 = e^{\frac{2i\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1,$$

on a alors

$$\mathcal{F}_2 y^{P_{final}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y_0 + y_{N-2} \\ y_0 - y_{N-2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_2 y^{I_{final}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y_1 + y_{N-1} \\ y_1 - y_{N-1} \end{pmatrix},$$

et l'algorithme termine toujours de manière explicite.

Évaluons le nombre d'opérations élémentaires nécessaires lors de l'utilisation de cet algorithme. On va compter seulement les additions et les multiplications et oublier les multiplications et divisions par 2^s . On a $N = 2^L$, notons :

- M_L le nombre de multiplications nécessaires pour calculer $\mathcal{F}_N y$;
- A_L le nombre d'additions nécessaires pour calculer $\mathcal{F}_N y$.

Ligne 1. Pour calculer $\mathcal{F}_M y^P$ il faut :

- M_{L-1} multiplications;
- A_{L-1} additions.

Ligne 2. Pour calculer $\mathcal{F}_M y^I$ il faut :

- $M_{L-1} + 2$ multiplications;
- A_{L-1} additions.

Ligne 3. 0 OE.

Ligne 4. — Multiplications par $\omega_N^{-m} : 2^{L-1} - 1$ car pour $m = 0$ pas de calcul à faire;
— Additions : 2^{L-1} .

Ligne 5. — Soustractions : 2^{L-1} .

N	DFT	FFT	Ratio
8	105	29	3
128	≈ 32000	≈ 1100	30
1024	$\approx 2.1 * 10^6$	≈ 14000	142

TABLE 1 – Différence de nombre d’opérations entre les algorithmes de DFT et de FFT

Finalement quand $N = 2$ on doit faire 1 addition et 1 soustraction.

On a donc défini par récurrence les suites suivantes :

$$\begin{cases} M_L = 2M_{L-1} + 2^{L-1} + 1 \\ M_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} A_L = 2A_{L-1} + 2^{L-1} \\ A_1 = 2. \end{cases}$$

On montre alors que

$$M_L = (L - 2) 2^{L-1} + 3, \quad A_L = L 2^{L-1}.$$

De plus, comme

$$N = 2^L \Leftrightarrow L = \log_2 N,$$

on obtient alors le total de

$$N \log_2 N + \frac{1}{2} N \log_2 (N - 1) + 3 \text{OE.}$$

L’algorithme de FFT est donc extrêmement plus efficace que l’approche classique, permettant de passer de $4N^2 + \mathcal{O}(N)$ OE à $N \log_2 N + \mathcal{O}(N)$ OE. La table 1 illustre cela pour des valeurs courantes de N .

IV.3. Renversement bit à bit

⚠ Si on regarde attentivement chaque étape de réorganisation pair/impair, ce que retourne l’algorithme de FFT n’est pas $Y = \mathcal{F}_N y$ mais Y^σ qui est une permutation des composantes de Y :

$$\exists \sigma : \{0, \dots, N-1\} \xrightarrow{\text{bij}} \{0, \dots, N-1\}, \quad (\text{FFT}(y))_m = Y_{\sigma(m)}$$

et σ peut être rendu explicite : c’est la permutation dite de renversement bit à bit (“bitwise reversal”), qui peut être obtenue de la manière suivante.

Pour calculer $\sigma(m)$ pour $m \in \{0, \dots, N-1\}$, on écrit m en base 2 et on fait un miroir de cette écriture : si pour $i \in \{0, \dots, L-1\}$, il existe $b_i \in \{0, 1\}$ tels que

$$m = \sum_{i=0}^{L-1} b_i 2^i,$$

on pose alors

$$\sigma(m) = \sum_{i=0}^{L-1} b_{L-1-i} 2^i.$$

Un exemple d’une telle transformation pour $N = 8$ est proposée dans la table 2. Il faut donc inverser cette transformation après l’implémentation naïve d’un algorithme de FFT.

Exercice 13. La transformée de Fourier rapide.

m	$\sigma(m)$
$\bar{0}^{10} = \bar{000}^2$	$\bar{000}^2 = 0$
$\bar{1}^{10} = \bar{001}^2$	$\bar{100}^2 = 4$
$\bar{2}^{10} = \bar{010}^2$	$\bar{010}^2 = 2$
$\bar{3}^{10} = \bar{011}^2$	$\bar{110}^2 = 6$
$\bar{4}^{10} = \bar{100}^2$	$\bar{001}^2 = 1$
$\bar{5}^{10} = \bar{101}^2$	$\bar{101}^2 = 5$
$\bar{6}^{10} = \bar{110}^2$	$\bar{011}^2 = 3$
$\bar{7}^{10} = \bar{111}^2$	$\bar{111}^2 = 7$

TABLE 2 – Illustration de la transformation par renversement bit à bit

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la DFT d'un vecteur N -périodique $x := (x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ est définie par

$$(\mathcal{F}_N x)_m := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \omega_N^{-km}, \quad \forall m \in \{0, \dots, N-1\},$$

où $\omega_N = \exp(2i\pi/N)$ représente une racine N -ème primitive de l'unité. L'endomorphisme \mathcal{F}_N peut donc être représenté par la matrice Ω_N suivante :

$$\Omega_N = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N^{-1} & \omega_N^{-2} & \cdots & \omega_N^{-(N-1)} \\ 1 & \omega_N^{-2} & \omega_N^{-4} & \cdots & \omega_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{-(N-1)} & \omega_N^{-2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

- Écrivez une procédure `DFTperso(x)` qui implémente le calcul de la DFT $\mathcal{F}_N x$ de manière naïve, c'est à dire via un produit matrice vecteur.
- Écrivez une procédure `FFTperso(N, x)` qui, pour N une puissance de 2 et de manière réursive, réalise l'algorithme de transformée de Fourier rapide pour calculer $\mathcal{F}_N x$.
- Comparez les deux méthodes, ainsi que celle fournie par la bibliothèque `fft` en chronométrant leur temps de calcul en fonction de N .

Exercice 14. Bruitage et débruitage d'un signal sonore.

Dans cet exercice, on s'intéresse à la manipulation d'un signal sonore grâce à la DFT. Le signal en question se trouve dans le fichier `guitar_la.wav` que vous pouvez télécharger grâce au lien suivant.

<https://nextcloud.univ-lille.fr/index.php/s/csQYNiwwsLe3bAx>

- Extraction du signal.

- (a) Extraire le signal numérique $(y_k)_k$ grâce à la bibliothèque `wave` en utilisant la suite de commande suivante

```
import wave
file = 'guitar_la'
F = wave.open(file + '.wav')
sound = F.readframes(-1)
sound = np.frombuffer(sound, dtype = 'int16')
```

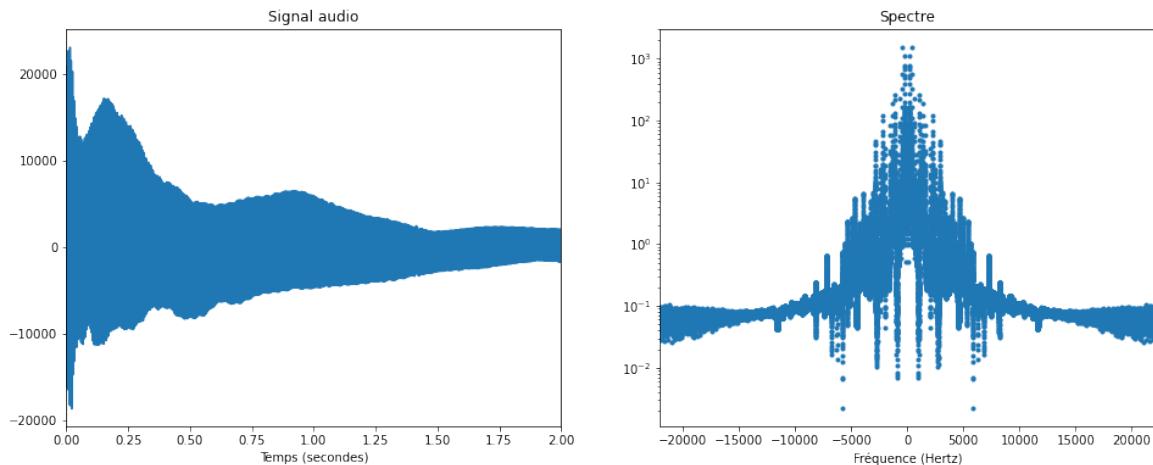
Extraire sa durée en secondes T , grâce à la commande

```
T = F.getsampwidth()
```

- (b) Calculer numériquement le nombre d'échantillons N , la période d'échantillonnage T_e , la fréquence d'échantillonnage f_e , les temps $(t_k)_{k \in \{0, \dots, N-1\}}$ correspondants aux échantillons $(y_k)_{k \in \{0, \dots, N-1\}}$ et l'amplitude maximale du signal $A = \max\{|y_k|, k = 0, \dots, N-1\}$.
- (c) Tracer le signal en fonction du temps.

2. Spectre du signal.

- (a) Calculer les fréquences $(f_n)_n$ du spectre (c.f. commande `fftfreq`). Quelle est la fréquence maximale ? Interpréter cette valeur.
- (b) Calculer la transformée de Fourier discrète $(Y_n)_n$ du signal $(y_k)_k$ (c.f. commande `fft`).
- (c) Réorganiser les fréquences par ordre croissant (c.f. commande `fftshift`) et calculer les coefficients de Fourier $(c_n^N)_n$ correspondants.
- (d) Tracer le spectre en amplitude du signal avec une échelle logarithmique en ordonnée (c.f. commande `semilogy`).



3. Bruitage du signal.

- (a) Générer un bruit comme la réalisation de N variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $[-A/40, A/40]$. On utilisera la bibliothèque `numpy.random`.
- (b) Tracer le bruit ainsi que son spectre.
- (c) Bruitez la note de guitare en ajoutant le bruit aux $(y_k)_{k \in \{0, \dots, N-1\}}$. Calculer la DFT $Z = (Z_n)_n$ du signal bruité $z = (z_k)_k$.
- (d) Tracer le signal bruité ainsi que son spectre.
- (e) Enregistrer le signal dans un fichier '`guitar_la_with_noise.wav`' grâce à la suite de commande suivante :
- ```
from struct import pack
```

```
wv = wave.open(file + '_with_noise.wav', 'w')
wv.setparams(F.getparams())
for i in range(np.shape(sound_noise)[0]):
 value = sound_noise[i]
 packed_value = pack('h', int(value))
 wv.writeframes(packed_value)
wv.close()
```

Ecouter le résultat.

4. **Débruitage du signal.** On va maintenant débruiter la note de guitare (en faisant comme si l'on ne connaissait pas le bruit ajouté bien sûr). On va procéder en filtrant les fréquences de faible amplitude.

- (a) Dans le but de filtrer le signal avec un filtre fréquentiel  $A_H$ , générer  $H = (H_n)_n$  défini par

$$H_n = \begin{cases} 1 & \text{si } |Z_n| \geq r \left( \max_m |Z_m| \right), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $r \in [0, 1]$  est un paramètre à choisir.

- (b) Calculer le signal filtré  $A_H(z) = \mathcal{F}_N^{-1}(H \times Z)$  (cf. commande `ifft` pour la transformée de Fourier discrète inverse) et le tracer ainsi que son spectre. On choisira à la main  $r$  afin de retirer la partie du spectre due au bruit, tout en gardant le maximum d'information.
- (c) Enregistrer le signal dans un fichier '`'guitar_la_denoised.wav'`'. Ecouter le résultat et répéter l'opération en ajustant  $r$  afin d'obtenir une note de guitare sans bruit et la plus proche possible de l'originale.

### Exercice 15. Traitement d'images.

Dans cet exercice, on se propose d'utiliser des techniques de filtrage pour manipuler ou extraire de l'information d'images.

1. **Importation de l'image et spectre.**

Commencez par importer la bibliothèque `scipy.misc`, puis chargez une image en niveau de gris par la commande suivante :

```
Image = scipy.misc.ascent()
```

Si vous souhaitez importer une autre image de votre choix vous pouvez utiliser la commande `imread` avec l'option `mode='L'` (pour avoir une image en noir et blanc).

Vous pouvez alors afficher l'image en faisant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.gray()
plt.imshow(Image)
plt.show()
```

L'image est stockée comme une matrice carrée dont les valeurs des coefficients sont des entiers compris entre 0 à 255. On note cette matrice  $M \in \mathcal{M}_{N_x, N_y}(\{0, \dots, 255\})$ .

2. Calculer sa DFT que l'on note  $N = \mathcal{F}_{N_x, N_y}(M) \in \mathcal{M}_{N_x, N_y}(\mathbb{C})$  grâce à la commande `fft2`. Affichez avec la commande `imshow` la DFT de votre image (décalée en utilisant `fftshift`). On affichera plus précisément  $\log(1+N)$  (où la fonction s'applique à chaque coefficient) afin de mieux visualiser la DFT. Après décalage, le centre de l'image correspond à la fréquence  $(f_x, f_y) = (0, 0)$ .

3. **Filtre passe-bas et compression d'image.**

- (a) Mettre brutalement à 0 les coefficients de grandes fréquences (i.e. les fréquences  $(f_x, f_y)$  hors d'un disque de rayon  $R$  centré en la fréquence  $(0, 0)$ ), et inversez votre DFT (`ifft2`) pour différents rayons  $R$ . Tracer les spectres et images correspondantes. Que constatez-vous ?
- (b) Elaborer et décrire un algorithme de compression d'image à partir de vos observations.

#### 4. Convolution.

Dans la suite on va transformer l'image grâce à des convolutions avec des filtres. Un filtre correspond à une matrice  $F \in \mathcal{M}_{N_x, N_y}(\mathbb{R})$  qui s'applique à l'image par convolution périodique

$$M * F = \left( \sum_{k=0}^{N_x-1} \sum_{l=0}^{N_y-1} M_{i-k, j-l} F_{k, l} \right)_{(i,j) \in \{0, \dots, N_x-1\} \times \{0, \dots, N_y-1\}} \in \mathcal{M}_{N_x, N_y}(\mathbb{R}), \quad (22)$$

Dans la formule précédente on a périodisé chaque matrice dans les deux directions (i.e. les indices sont à interpréter modulo  $N_x$  ou  $N_y$ ). Pour un filtre quelconque, l'application directe de la formule de convolution engendre un temps de calcul en  $\mathcal{O}(N_x^2 N_y^2)$ . Grâce à la FFT on peut réduire ce coût à  $\mathcal{O}(N_x N_y \log(N_x N_y))$  ce qui est non-négligeable pour des images en haute définition.

- (a) Rappeler ce que vaut la DFT de la convolution  $\mathcal{F}_{N_x, N_y}(M * F)$ .
- (b) Décrire la méthode de calcul de la convolution  $M * F$  via la FFT.

#### 5. Filtre de lissage.

Soit  $K \in \mathbb{N}$ . La matrice du filtre de lissage  $F^{liss}$  est pleine de 0 sauf pour les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} F_{i,j}^{liss} &= 1/(2K+1)^2, \quad 0 \leq i, j \leq K, \\ F_{N_x-i, N_y-j}^{liss} &= 1/(2K+1)^2, \quad 1 \leq i, j \leq K, \\ F_{N_x-i, j}^{liss} &= 1/(2K+1)^2, \quad 1 \leq i \leq K, \quad 0 \leq j \leq K, \\ F_{i, N_y-j}^{liss} &= 1/(2K+1)^2, \quad 0 \leq i \leq K, \quad 1 \leq j \leq K, \end{aligned}$$

- (a) Calculer la DFT de  $F^{liss}$  et afficher le spectre correspondant.
- (b) Reconstruire l'image filtrée, l'afficher ainsi que son spectre. On essaiera plusieurs valeurs de  $K$ .
- (c) Expliquer le fonctionnement de ce filtre grâce à la formule (22).

#### 6. Filtres de Sobel pour la détection de contour.

Les filtres de Sobel  $F^x$  et  $F^y$  permettent de détecter les contours dans les images. On a un filtre par direction. Les matrices  $F^x$  et  $F^y$  sont pleines de 0 sauf pour les coefficients suivants

$$\begin{cases} F_{0,1}^x = 2, & F_{1,1}^x = 1, & F_{N_x-1,1}^x = 1 \\ F_{0,N_y-1}^x = -2, & F_{1,N_y-1}^x = -1, & F_{N_x-1,N_y-1}^x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{1,0}^y = 2, & F_{1,1}^y = 1, & F_{1,N_y-1}^y = 1 \\ F_{N_x-1,0}^y = -2, & F_{N_x-1,1}^y = -1, & F_{N_x-1,N_y-1}^y = -1 \end{cases}$$

- (a) Calculer les DFT de  $F^x$  et  $F^y$  et tracer les spectres correspondants.
- (b) Construire et afficher  $C$  l'image contenant les contours de  $M$  et définie par

$$C_{ij} = \sqrt{(M * F^x)_{ij}^2 + (M * F^y)_{ij}^2}$$

- (c) Interpréter le fonctionnement de ce filtre grâce à la formule (22).



### 7. Suréchantillonage (*upsampling*) par *zero padding*.

Le suréchantillonage d'une image consiste à augmenter sa taille. Il s'agit d'une opération de plus en plus utilisée pour (par exemple) adapter les anciennes vidéos à la diffusion dite « haute définition ». On considère des images de taille  $N \times N$ , que l'on souhaite interpoler en des images de taille  $kN \times kN$ , pour  $k = 2, 4, 8, \dots$ . Voici deux méthodes possibles :

- Duplication des pixels : On remplace chaque pixel de l'image originale par un bloc  $k \times k$  obtenu par duplication.
- On calcule la transformée de Fourier de l'image originale de taille  $N \times N$ , que l'on complète par des zéros pour former une matrice de taille  $kN \times kN$ , puis on prend la transformée de Fourier inverse.

C'est cette dernière méthode qui est dite de remplissage par des zéros (*zero padding*).

- (a) Implantez la méthode de duplication des pixels et testez-la sur votre image.
- (b) Implantez la méthode de *zero padding* et testez-la sur votre image.
- (c) Discutez des avantages et inconvénients des deux méthodes.

### Exercice 16. Un petit retour vers l'équation de la chaleur.

1. Reprendre l'exercice 5 en remplaçant le calcul exact des coefficients de Fourier de la condition initiale  $u_0$  par le calcul de la transformée de Fourier discrète des fonctions échantillonnées uniformément  $f$  et  $g$  de l'exercice 4.
2. Que constatez-vous ?
3. Faire de même en prenant comme données initiales les DFT de l'exercice 9.

## V. Un exemple nonlinéaire : l'équation de Korteweg - de Vries (KdV).

Nous avons pour le moment utilisé l'approche pseudo-spectrale pour résoudre des EDPs linéaires, via des formules de représentation des solutions explicites, grâce aux propriétés de transformation des dérivations en multiplications des séries de Fourier. Malheureusement, les EDPs intéressantes pour les applications et traitables par ces approches se comptent (au changement de variable près) littéralement sur les doigts d'une main.

Néanmoins, la puissance de l'approche peut être combinée à des intégrateurs temporels approchés pour obtenir des méthodes numériques efficaces et précises pour des équations nonlinéaires. Nous allons nous intéresser dans cette exemple à l'équation de Korteweg - de Vries(KdV). Introduite dans les années 1930, cette équation modélise la hauteur des vagues dans un canal rectiligne de faible profondeur  $h \geq 0$  relativement à la longueur de la voie d'eau (par exemple un canal aux Pays Bas).

Soit  $u$  la hauteur de la vague relative à la hauteur d'eau dans le canal. L'équation donnant l'évolution de cette hauteur de vague est donnée, après adimensionnement et simplification de toutes les constantes, par l'équation prototype suivante : trouver  $u = u(t, x)$  solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) = 0 & \forall t > 0, x \in [0, 2\pi]; \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi), & \forall t \geq 0; \\ u(0, x) = u_0(x) & \forall x \in [0, 2\pi], \end{cases} \quad (\text{KdV})$$

pour un profil de vague initial  $u_0 \in L_p^2(0, 2\pi)$  donné et un canal de longueur  $2\pi$  (pour simplifier les notations par la suite). Pour simplifier l'analyse, nous avons imposé des conditions aux bords du domaine périodiques.

### Remarque.

On vérifie que cette équation admet un "soliton" (ou onde solitaire), c'est-à-dire une vague qui ne perd pas d'énergie et continue indéfiniment sur un canal infini :

$$u(t, x) = 12\kappa \operatorname{sech}^2(\kappa x - 4\kappa^3 t), \quad \forall t > 0, x \in [0, 2\pi] \quad (23)$$

pour une constante  $\kappa > 0$  et  $\operatorname{sech}(\theta) = 1/\cosh(\theta)$ . La figure 7 illustre ce phénomène pour  $\kappa = 2$ , dans l'espace des phases  $(t, x)$ .

N'ayant pas de formule de représentation explicite aisément manipulable pour cette équation, nous allons en chercher des solutions approchées. Il est clair qu'un schéma de type différence finie permettrait cela, mais nous allons voir qu'une méthode spectrale peut permettre d'obtenir un schéma plus simple, tout en étant d'ordre plus élevé.

Commençons par supposer qu'il existe une solution régulière  $u$  de (KdV). Un tel  $u$  est alors aussi solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial(u(t, x)^2)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) = 0, \quad \forall t > 0, x \in [0, 2\pi].$$

La fonction  $u$  étant régulière et  $2\pi$ -périodique, on peut alors écrire que

$$u(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(u(t, \cdot)) e^{imx}, \quad u_0(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(u_0) e^{imx}, \quad \forall t > 0, x \in [0, 2\pi].$$

Si l'on injecte ces développements dans (KdV), on obtient alors grâce au théorème 4 que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} c_m(u(t, \cdot)) - im^3 c_m(u(t, \cdot)) + \frac{im}{2} c_m(u(t, \cdot)^2) = 0, & \forall m \in \mathbb{Z} \\ c_m(u(0, \cdot)) = c_m(u_0), & \forall m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (24)$$

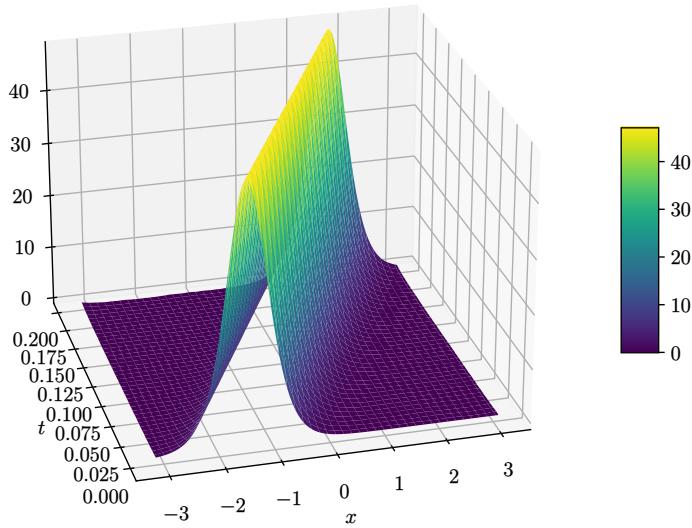


FIGURE 7 – Soliton de KdV pour  $\kappa = 2$  pour  $t \in [0, 0.2]$

Remarquons maintenant que si  $f$  est une fonction régulière de  $t \geq 0$ , alors

$$\left( f(t) e^{-im^3 t} \right)' = f'(t) e^{-im^3 t} - im^3 f(t) e^{-im^3 t}.$$

Ainsi, si l'on multiplie (24) par la fonction  $t \mapsto e^{-im^3 t}$ , on trouve alors que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( e^{-im^3 t} c_m(u(t, \cdot)) \right) = -\frac{im}{2} e^{-im^3 t} c_m(u(t, \cdot)^2), \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Définissons alors pour  $m \in \mathbb{Z}$  une nouvelle fonction  $v_m(t) := e^{-im^3 t} c_m(u(t, \cdot))$ . L'identité précédente nous assure que

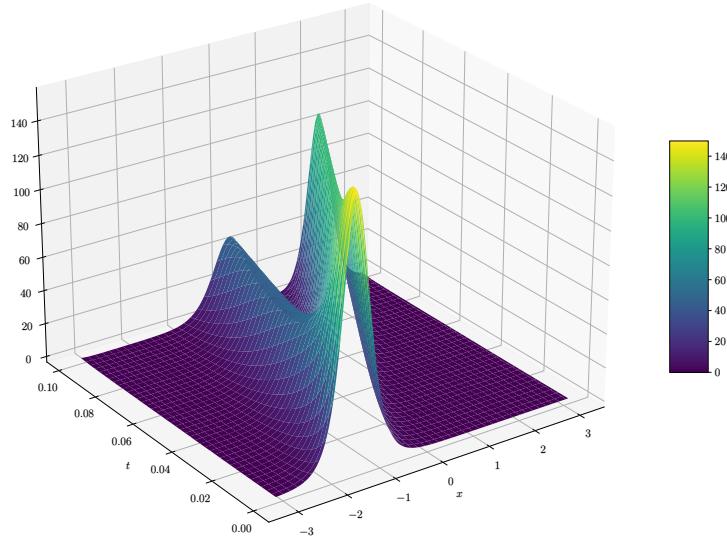
$$v'_m(t) = -\frac{im}{2} e^{-im^3 t} \left( e^{-im^3 t} v_m(t) \right)^2, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, en posant  $\mathbf{v}_N = \mathcal{F}_N^{-1} (v_{-N/2}, \dots, v_{N/2-1})^\top$ ,  $\mathbf{D}$  la matrice diagonale vérifiant  $\mathbf{D}_{mm} = e^{im^3 t}$  et  $\mathbf{M}$  la matrice diagonale vérifiant  $\mathbf{M}_{mm} = m$ , on a

$$\frac{d\mathbf{v}_N}{dt}(t) = \mathcal{F}_N^{-1} \left( -\frac{im}{2} \mathbf{D}^{-1} \mathcal{F}_N \left( (\mathbf{D}\mathbf{v}_N(t))^2 \right) \right). \quad (25)$$

### Exercice 17. Méthode pseudo-spectrale pour KdV.

1. Proposer une discrétisation temporelle du système (25), en utilisant le schéma d'Euler Explicite.
2. En étudier la convergence en fonction de  $N$ , grâce à la solution exacte (23), pour  $\kappa = 0.3$ . Attention à votre pas de temps !
3. Proposer une amélioration en utilisant un schéma numérique d'ordre plus élevé.
4. Illustrer votre méthode numérique en proposant une donnée initiale comportant l'interaction d'une somme de différents solitons (pour différentes valeurs du paramètre  $\kappa$ , donc).

FIGURE 8 – Interaction de solitons de KdV pour  $\kappa = 2$  et  $3$ ,  $t \in [0, 0.1]$ **Exercice 18. Méthode pseudo-spectrale pour le modèle de Kuramoto-Sivashinsky.**

L'équation de Kuramoto-Sivashinsky (KS) a été introduite à la fin des années 70 pour décrire le comportement du front de combustion d'une flamme lors d'un écoulement laminaire de gaz (Kuramoto-Tsuzuki 1976, Sivashinsky 1977). Elle a été plus tard étudiée mathématiquement car elle peut exhiber des solutions ayant un comportement chaotique : une petite modification de la donnée initiale induit une énorme modification de la solution associée (Hyman-Nicolaenko 1986). Soit  $u = u(t, x)$  le profil monodimensionnel du contour de la flamme, pour  $t \geq 0$  et  $x \in [0, 2\pi]$ . L'équation (KS) décrivant l'évolution temporelle de  $u$  est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, x) = 0, & \forall t > 0, x \in [0, 2\pi]; \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 2\pi), & \forall t \geq 0; \\ u(0, x) = u_0(x) & \forall x \in [0, 2\pi], \end{cases} \quad (\text{KS})$$

pour un profil initial donné  $u_0 \in L_p^2(0, 2\pi)$ .

**1. Semi-discrétisation en espace.** Afin de résoudre numériquement l'équation (KS), on effectue tout d'abord une semi-discrétisation spatiale en utilisant un développement en série de Fourier. Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , nous noterons indifféremment

$$\mathcal{P}_N(u)(t, x) := u_N(t, x) := \sum_{m=-N/2}^{N/2} c_m(u(t, \cdot)) e^{imx}, \quad \forall t \geq 0, x \in [0, 2\pi].$$

- Montrer que la somme de Fourier tronquée  $u_N$  est solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\partial^4 u_N}{\partial x^4}(t, x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}_N(u^2(t, \cdot))(t, x), \quad (26)$$

pour une donnée initiale à déterminer.

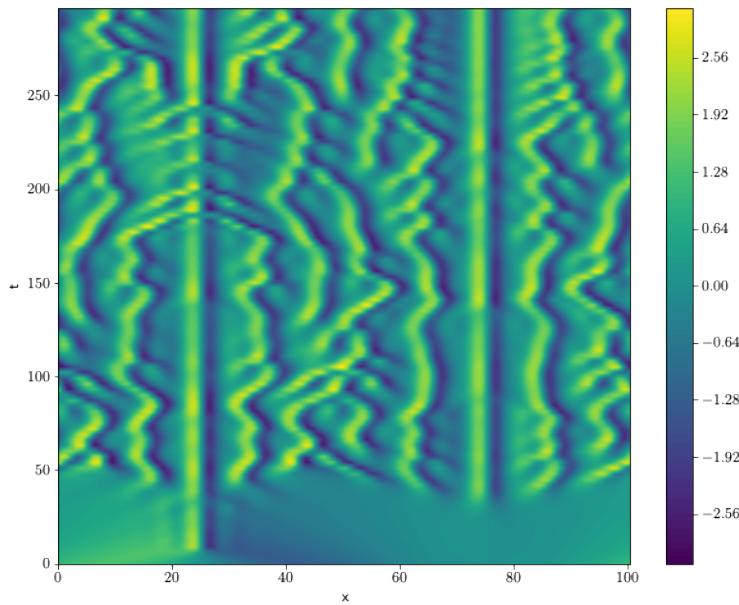


FIGURE 9 – "Evolution temporelle de la solution de l'équation (KS) dans l'espace des phases pour  $u_0(x) = \cos(x/16)(1 + \sin(x/16))$ .

2. Déduire de (26) que chaque coefficient de Fourier de  $u(t, \cdot)$  est solution du système d'équations différentielles ordinaires couplées suivant :

$$\frac{d}{dt}c_m(u(t, \cdot)) + (m^4 - m^2)c_m(u(t, \cdot)) = -\frac{i}{2}m c_m(u^2(t, \cdot)), \quad \forall t \geq 0, \quad m \in \{-N/2, \dots, N/2\}. \quad (27)$$

3. En vous inspirant de ce qui a été proposé pour l'équation de KdV (KdV), réécrire le système (27) de manière plus simple grâce à la multiplication par une exponentielle bien choisie.

## 2. Semi-discrétisation en temps.

1. Proposer un discrétisation en temps du système obtenu à la question précédente, en utilisant de nouveau un schéma d'Euler-Explicite.
2. Illustrer numériquement votre approximation, en prenant un sinus comme donnée initiale. Que constatez-vous ?
3. Proposer une discrétisation temporelle d'ordre élevé (au moins 4), ou implicite.
4. Illustrer numériquement la convergence de ce nouveau schéma.