FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 4
CHAÎNES DE MARKOV.

Dans tous les exercices, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne l'espace de probabilité sous-jacent. Les exercices plus difficiles ou faisant intervenir des notions avancées de théorie de la mesure sont indiqués par un astérisque.

Exercice 1.

(1) Montrer qu'une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans un espace E dénombrable est une chaîne de Markov.

Soit f une fonction mesurable bornée de E dans $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(X_{n+1})$ est indépendante de $X_0, \cdots, X_n$. Ainsi

$$\mathbb{E}[f(X_n+1)|X_0, \cdots X_n] = \mathbb{E}[f(X_{n+1})] = \mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n].$$

Donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété de Markov faible et est une chaîne de Markov.

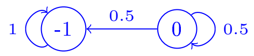
(2) Soit X et Y deux chaînes de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le processus

$$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

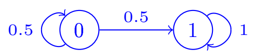
est-il nécessairement une chaîne de Markov ?

La somme de deux chaînes de Markov n'est pas toujours une chaîne de Markov. Considérons :

— la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{-1, 0\}$ associée au graphe :



— la chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ associée au graphe :



Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = X_n + Y_n$. Nous allons voir que le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est par markovien. Il est immédiat que le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(Z_{n+2} = 1 \mid Z_{n+1} = 0, Z_n = -1\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+2} = 0, Y_{n+2} = 1 | X_{n+1} = -1, Y_{n+1} = 1, X_n = -1, Y_n = 0\right) = 0$$

alors que

$$\mathbb{P}\left(Z_{n+2} = 1 \mid Z_{n+1} = 0\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+2} = 0, Y_{n+2} = 1 | (X_{n+1} = -1, Y_{n+1} = 1) \text{ ou } (X_{n+1} = 0, Y_n = 0)\right) > 0.$$

Le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas une chaîne de Markov.

(3) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (X_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P^k.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ mesurable bornée. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(Y_{n+1})|Y_0, \cdots, Y_n] &= \mathbb{E}[f(X_{kn+k})|X_0, X_k, \cdots, X_{kn}] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[f(X_{kn+k})|X_0, X_1 \cdots, X_{kn}] \,|X_0, X_k, \cdots, X_{kn}\right] \\
&\underset{\text{Markov}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[f(X_{kn+k})|X_{kn}] \,|X_0, X_k, \cdots, X_{kn}\right] \\
&= \mathbb{E}[f(X_{kn+k})|X_{kn}] \\
&= \mathbb{E}[f(Y_{n+1})|Y_n].
\end{aligned}$$

Donc Y est bien une chaîne de Markov. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall (i,j) \in E^2, \quad \mathbb{P}(Y_{n+1} = j|Y_n = i) = \mathbb{P}(X_{kn+k} = j|X_{kn} = i) = \mathbb{P}(X_k = j|X_0 = i) = P^k_{i,j}.$$

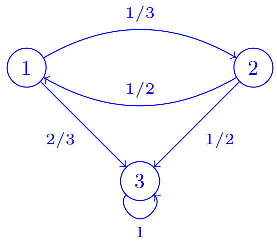
Donc P^k est la matrice de transition de Y.

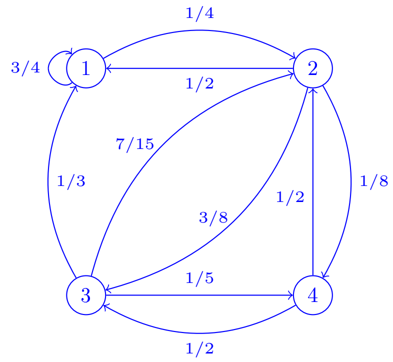
Exercice 2.
Compléter les matrices suivantes pour en faire des matrices de transition d'une chaîne de Markov homogène puis représenter chaque processus par un graphe.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & \cdot \\ 1/2 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & \cdot & \cdot \\ 1/2 & 0 & \cdot & 1/8 \\ 1/3 & \cdot & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/2 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

On rappelle que la somme des lignes de la matrice doit faire 1 et que tous les coefficients doivent être positifs.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/8 & 1/8 \\ 1/3 & 7/15 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$





Exercice 3.
Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $]0,1[$ et $p \in [0,1]$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ la suite de v.a. définie par :

$$X_0 = 0 \quad \text{et} \quad X_{n+1} = X_n \mathbf{1}_{\{U_{n+1}<p\}} + (1-X_n)\mathbf{1}_{\{U_{n+1}\geq p\}} \ .$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov d'état initial 0 et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

On a $X_0 = 0$. Et, par une récurrence immédiate, on voit que pour tout n $X_n \in \{0,1\}$ et que U_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \cdots, X_n)$. Finalement, pour toute fonction mesurable bornée de $\{0,1\}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_0,\cdots,X_n] = \mathbb{E}[f(X_n\mathbf{1}_{U_n<p} + (1-X_n)\mathbf{1}_{U_n\geq p})|X_0,\cdots,X_n] = \mathbb{E}[f(X_n\mathbf{1}_{U_n<p} + (1-X_n)\mathbf{1}_{U_n\geq p})|X_n],$$

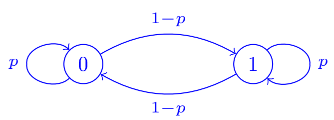
car U_n est indépendante de $X_0, \cdots, X_n$ et X_n est $\sigma(X_n)$ mesurable. Donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. De plus

$$\begin{aligned} p_{0,0} &= \mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=0) = \mathbb{P}(U_{n+1}<p) = p \\ p_{0,1} &= \mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=1) = \mathbb{P}(U_{n+1}\geq p) = 1-p \\ p_{1,0} &= \mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=1) = \mathbb{P}(U_{n+1}\geq p) = 1-p \\ p_{0,0} &= \mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=1) = \mathbb{P}(U_{n+1}<p) = p. \end{aligned}$$

et donc la matrice de transition s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

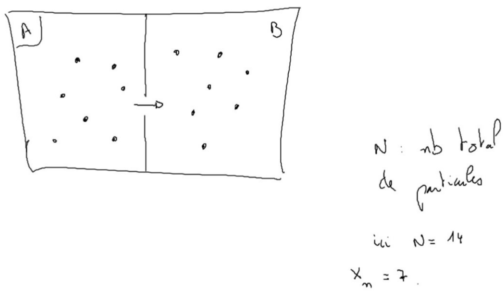
et on peut représenter la chaîne de Markov avec le graphe suivant :



Exercice 4. *Les urnes d'Ehrenfest.*
On considère un système de N particules qui peuvent se trouver soit dans un compartiment A soit dans un compartiment B. À chaque instant n, on choisit, de manière équiprobable, une particule parmi les N et cette particule est alors transférée du compartiment où elle se trouve dans l'autre. On note X_n le nombre de particules dans A à l'instant n.

(1) Expliquer pourquoi cette expérience peut être modélisée par une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition P. Donner P explicitement pour $N = 3$.

On a l'expérience suivante :



L'état du système à l'instant $n+1$ ne dépend que de l'état du système à l'instant n, il est donc naturel de modéliser l'expérience par une chaîne de Markov. Ainsi, d'après l'énoncé, on peut écrire pour tout $k \in \{1, \cdots, N-1\}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) = \frac{N-k}{N}$$

car cela revient à choisir uniformément une particule parmi les $N-k$ du réservoir B et à l'envoyer dans le réservoir A, et

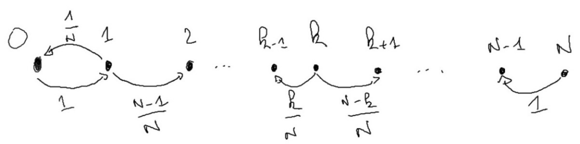
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 | X_n = k) = \frac{k}{N},$$

cela revient alors à choisir uniformément une particule parmi les k du réservoir A et à l'envoyer dans le réservoir B.

Lorsque $k = N$ ou $k = 0$, il n'y a pas le choix :

- Si $k = 0$ on ne peut prendre une particule que dans le réservoir B et on a
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = 1.$$
- Si $k = N$, il n'est possible de prendre une particule que dans le réservoir A, et on a
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = N-1 | X_n = N) = 1.$$

Ainsi, le graphe de transition peut être représenté dans la façon suivante :



Pour $N = 3$ on a donc la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) On suppose dans cette question que X_0 suit la loi $\mathcal{B}(N, 1/2)$. Donner la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons par récurrence que si $X_0 \sim \mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que l'égalité des lois est vraie pour ce n. Alors, grâce au calcul des probabilités de transition de la première question, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{N}\binom{N}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^N = \left(\frac{1}{2}\right)^N.$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=N)=\mathbb{P}(X_{n+1}=N|X_n=N-1)\mathbb{P}(X_n=N-1)=\frac{1}{N}\binom{N}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^N=\left(\frac{1}{2}\right)^N.$$

Et, pour $k\in\{1,\cdots,N-1\}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=&\mathbb{P}(X_{n+1}=k|X_n=k-1)\mathbb{P}(X_n=k-1)+\mathbb{P}(X_{n+1}=k|X_n=k+1)\mathbb{P}(X_n=k+1)\\=&\frac{N-(k-1)}{N}\binom{N}{N-(k-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^N+\frac{k+1}{N}\binom{N}{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^N\\=&\left(\frac{k}{N}\frac{N!}{(N-k)!k!}+\frac{N-k}{N}\frac{N!}{k!(N-k)!}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^N\\=&\binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^N.\end{aligned}$$

On a donc montré que si $X_n\sim\mathcal{B}(N,\frac{1}{2})$, alors $X_{n+1}\sim\mathcal{B}(N,\frac{1}{2})$. Comme $X_0\sim\mathcal{B}(N,\frac{1}{2})$, on a, pour tout n, $X_n\sim\mathcal{B}(N,\frac{1}{2})$.

Exercice 5.
Des étudiants décident de tricher à un examen dans lequel on leur demande de répondre par *oui* ou par *non* à une question. Ils sont assis sur une même rangée dans un amphithéâtre et seul le premier de la rangée sait que la bonne réponse est *oui*. Il transmet une réponse à son voisin de droite qui lui-même en transmet une à son voisin de droite et ainsi de suite. Mais, facétieux, les étudiants ne transmettent la réponse qu'ils ont reçue qu'avec une probabilité $1-\alpha$, ($\alpha\in]0,1[$) ; sinon ils transmettent la réponse contraire.

(1) Modéliser le problème par une chaîne de Markov.

Soit X_k la réponse du k-ième étudiant (pour $k\in\{1,\cdots,n\}$) ; on note $X_k=1$ si la réponse est “OUI” et $X_k=0$ si la réponse est “NON”. La réponse du $(k+1)^e$ étudiant ne dépend que de la réponse du k^e étudiant, il est donc naturel de modéliser la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par une chaîne de Markov vérifiant, d'après l'énoncé, si $k\in\{1,\cdots,n-1\}$,

$$\forall e\in\{0,1\},\ \mathbb{P}(X_{k+1}=e|X_k=e)=1-\alpha\ \text{ et }\ \mathbb{P}(X_{k+1}=1-e|X_k=e)=\alpha.$$

Donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P=\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \alpha & 1-\alpha\end{pmatrix}.$$

(2) Calculer la probabilité que le $n^{\text{ème}}$ étudiant de la rangée reçoive la bonne réponse.

On rappelle que la loi de X_n est donné par le vecteur ligne μ_0P^n où μ_0 est la loi de X_0. Calculons P^n. On pourrait diagonaliser la matrice, mais il est moins lourd au niveau des calculs de remarquer que

$$P=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=I_2+B\quad\text{ où } B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

Pour $n\geq 1$ $B^n=(-2)^{n-1}B$, et B et I_2 commutent. Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}P^n=(I_2+\alpha B)^n&=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}I_2^{n-k}(\alpha B)^k=I_2-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(-2\alpha)^k-1\right)B\\&=I_2+\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}(1-2\alpha)^nB=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12\end{pmatrix}-\frac{(1-2\alpha)^n}{2}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On sait également que $\mu_0=(0,1)$, donc

$$\mathbb{P}_1(X_n=1)=((0,1)P^n)_1=\frac{1}{2}+\frac{(1-2\alpha)^n}{2}.$$

(Attention la matrice P est indexée par l'ensemble $\{0,1\}$ et l'élément associé à 1 est donc le 2e élément du vecteur.)

Exercice 6.
On lance un dé parfaitement équilibré. On note le résultat s'il s'agit du premier lancer ou si ce résultat est différent du précédent. On appelle X_n le $n^{\text{ème}}$ résultat noté.

(1) Modéliser l'expérience par une chaîne de Markov homogène dont on précisera la matrice de transition.

L'ensemble des valeurs que peut prendre X_{n+1} est déterminé par la valeur de X_n, mais pas par celle des valeurs d'avant. On modélise alors naturellement la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une chaîne de Markov.

Calculons sa matrice de transition. On suppose que X_n est connu. Soit $\left(U_k^n\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de résultats de lancers de dé, i.e. des vaiid de loi $\mathcal{U}(\{1,\cdots,6\})$. On a pour $a\in\{1,\cdots,6\}$ et $b\in\{1,\cdots,6\}\backslash\{a\}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=b|X_n=a)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\{\,U_k^n=b \text{ et } U_{k-1}^n=a \text{ et } \cdots \text{ et } U_1^n=a\,\}\right)=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}=\frac{1}{5}.$$

Ainsi,

$$P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&1\\1&0&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&1\\1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

(2) Quelle est la probabilité que le $n^{\text{ème}}$ résultat noté soit 6 ?

On rappelle que si $\mu_0\in\mathbb{R}^6$ est la loi de la valeur initiale, on a pour $i\in\{1,\cdots,6\}$,

$$\mathbb{P}_{\mu_0}\left(X_n=i\right)=\left(\mu_0P^n\right)_i.$$

Remarquons que $P=\frac{1}{5}(A-I_6)$, avec A la matrice ne contenant que des 1 à chaque coordonnée. Remarquons également que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $A^k=6^{k-1}A$ et que A et I_6 commutent. Ainsi la formule du binôme de Newton donne :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\ P^n&=\frac{1}{5^n}(A-I_6)^n=\frac{1}{5^n}\left(\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k}A+(-1)^nI_6-(-1)^n\frac{A}{6}\right)\\&=\frac{1}{5^n}\left(\frac{1}{6}(6-1)^nA+(-1)^n\left(I_6-\frac{A}{6}\right)\right)=\frac{1}{6}A+\left(\frac{-1}{5}\right)^n\left(I_6-\frac{A}{6}\right).\end{aligned}$$

— si on sait qu'on a obtenu 6 au premier lancer ?

Donc si $\mu_0=e_6$, on a pour $n\geq 2$,

$$\mathbb{P}_6\left(X_n=6\right)=e_6P^n\cdot e_6=\left(\frac{1}{6}(e_1+\cdots+e_6)+\left(\frac{-1}{5^n}\right)^n e_6-\frac{1}{6}(e_1+\cdots e_6)\right)\cdot e_6=\frac{1}{6}+\left(\frac{-1}{5}\right)^n\frac{5}{6}.$$

— si on ne dispose d'aucune information sur le premier lancer ?

Dans ce cas, on a $\mu_0=\frac{1}{6}(e_1+\cdots+e_6)$, et

$$\mu_0P^n=\frac{1}{6}\mu_0+\left(\frac{-1}{5}\right)^n(\mu_0-\mu_0)=\mu_0\ \text{ et } \mathbb{P}_{\mu_0}\left(X_n=6\right)=\mu_0P^n\cdot e_6=\frac{1}{6}.$$

*(3) On note maintenant le résultat du lancer de dé si il est différent de 1 plus le résultat précédent (modulo 6). En utilisant la question précédente, calculer la probabilité que le $n^{\text{ème}}$ résultat noté soit 6 sachant qu'on a obtenu 6 au premier lancer.

On note (Y_n) la suite de résultats de cette expérience là. Soit $n\geq 0$ et $a\in\{1,\cdots,6\}$. On suppose que $Y_n=a$. Soit $(V_k^n)_k$ une suite de lancers de dés (vaiid de loi $\mathcal{U}(\{1,\cdots,6\})$). On a, d'après l'énoncé, pour $b\in\{1,\cdots,6\}\backslash\{a+1\ [6]\}$,

$$P(X_{n+1}=b|X_n=a)=\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\left(V_k^n=b,\ V_{k-1}^n\equiv a+1\ [6],\cdots,\ V_1^n\equiv a+1\ [6]\right)=\frac{1}{6}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{6^{k-1}}=\frac{1}{5}.$$

Donc $(Y_n)_n$ est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$Q=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&1\\1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

On remarque alors que le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$\forall n\in\mathbb{N}, Z_n=Y_n-n[6]$$

est markovien et vérifie

$$\begin{aligned}&\forall n\in\mathbb{N},\ \forall a\in\{1,\cdots,6\},\ \forall b\in\{1,\cdots,6\},\\&\qquad\mathbb{P}\left(Z_{n+1}=b|Z_n=a\right)=\mathbb{P}\left(Y_{n+1}\equiv b+1+n\ [6]|Y_n\equiv a+n\ [6]\right)\\&\qquad\qquad=\left\{\begin{array}{ll}1/5&\text{si } b\neq a\\0&\text{si } b=a\end{array}\right.\end{aligned}$$

Ainsi, le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a même transition que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question précédente et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_6\left(Y_n = 6\right) = \mathbb{P}_6\left(Z_n \equiv 6 - n\ [6]\right) = \frac{1}{6} + \left(\frac{-1}{5}\right)^n \left(\mathbf{1}_{n\equiv 0[6]} - \frac{1}{6}\right).$$

2. Propriété de Markov

*** Exercice 7.** *Jeu de pile ou face.*
Un joueur A joue une suite de parties de pile ou face indépendantes contre un joueur B : si la pièce tombe sur pile, B donne 1 euro à A sinon c'est le joueur A qui donne 1 euro au joueur B. On ne sait pas si la pièce est truquée ou non et on note $p \in [0,1]$ la probabilité d'obtenir pile et $q = 1-p$ la probabilité d'obtenir face. Le joueur A commence la partie avec k euros et le joueur B avec $N-k$ euros. Le jeu s'arrête lorsqu'un des deux joueurs n'a plus d'argent. On note X_n la fortune de A après n lancers. (On pose $X_n = 0$ à partir du moment où A est ruiné et $X_n = N$ à partir du moment où B est ruiné).

(1) Modéliser le problème par une chaîne de Markov. Donner l'espace d'états associé et la matrice de transition.

Remarquons que le jeu s'arrête lorsque $X_n = 0$ (le joueur A est ruiné) ou lorsque $X_n = N$ (le joueur B est ruiné), ainsi si $l \in \{0, N\}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = l | X_n = l) = 1$. Par ailleurs, si $l \in \{1, \cdots, N-1\}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = l+1 | X_n = l) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = l-1 | X_n = l) = p.$$

Cela donne le graphe de transition suivant :

ainsi que la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) On note $T_A := \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = 0\}$, $T_B := \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = N\}$ et

$$\forall k \in \{0, \cdots, N\},\ h_k := \mathbb{P}_k(T_A \le T_B) = \mathbb{P}(T_A \le T_B | X_0 = k)\ .$$

Montrer que $(h_k)_{x\in\{0,\cdots,N\}}$ est solution du système :

$$h_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k = N, \\ ph_{k+1} + (1-p)h_{k-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que si $X_0 = 0$, alors A est ruiné, et en particulier $T_A = 0$ et $T_B = +\infty$. Dans ce cas $h_0 = 1$. De même, lorsque $X_0 = N$, $T_B = 0$ et $T_A = +\infty$, et $h_N = 0$. Supposons que $k \in \{1, \cdots, N-1\}$. Dans ce cas, comme $k \notin \{0, N\}$, $T_A \geq 1$ et $T_B \geq 1$ et on peut donc réécrire

$$T_A = \inf\{n \geq 0,\ X_{1+n} = 0\} \text{ et } T_B = \inf\{n \geq 0,\ X_{1+n} = N\}.$$

Ainsi, d'après la propriété de Markov faible,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_k\left(T_A \leq T_B\right) &= \mathbb{E}_k\left[\mathbf{1}_{T_A \leq T_B}\right] = \mathbb{E}_k\left[\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\inf\{n\geq 0,\ X_{1+n}=0\}\leq \inf\{n\geq 0,\ X_{1+n}=N\}} \,\middle|\, X_0, X_1\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_k\left[\mathbb{E}_{X_1}\left[\mathbf{1}_{\inf\{n\geq 0,\ \tilde{X}_n=0\}\leq \inf\{n\geq 0,\ \tilde{X}_n=N\}}\right]\right] = \mathbb{E}_k\left[\mathbb{E}_{X_1}\left[\mathbf{1}_{\tilde{T}_A \leq \tilde{T}_B}\right]\right]\end{aligned}$$

où $\left(\tilde{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de même loi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et

$$\tilde{T}_A = \inf\{n \geq 0,\ \tilde{X}_n = 0\} \text{ et } \tilde{T}_A = \inf\{n \geq 0,\ \tilde{X}_n = N\}.$$

Ainsi, comme $\mathbb{P}_k\left(X_1 = k+1\right) = p$ et $\mathbb{P}_k\left(X_1 = k-1\right) = 1-p$, on a :

$$h_k = p\mathbb{E}_{k+1}\left[\mathbf{1}_{\tilde{T}_A \leq \tilde{T}_B}\right] + (1-p)\mathbb{E}_{k-1}\left[\mathbf{1}_{\tilde{T}_A \leq \tilde{T}_B}\right]$$

Et le couple $(\tilde{T}_A, \tilde{T}_B)$ ayant la même loi que (T_A, T_B),

$$\mathbb{E}_{k\pm 1}\left[\mathbf{1}_{\tilde{T}_A \leq \tilde{T}_B}\right] = \mathbb{P}_{k\pm 1}\left(T_A \leq T_B\right) = h_{k\pm 1}$$

et on obtient la formule de récurrence :

$$h_k = ph_{k+1} + (1-p)h_{k-1}$$

(3) En déduire la valeur de $\mathbb{P}_k(T_A \leq T_B)$ pour tout $k \in \{0, \cdots, N\}$.
Application numérique : calculer $\mathbb{P}_k(T_A \leq T_B)$ pour $k = 1$ et $N = 10$ et $p \in \{1/2, 1/3, 2/3\}$.

On a donc une suite récurrente linéaire d'ordre deux à coefficients constants. Le polynôme caractéristique associé est

$$P(X) = pX^2 - X + (1-p) = p\,(X-1)\left(X - \frac{1-p}{p}\right).$$

On suppose dans un premier temps que $p \neq \frac{1}{2}$, les deux racines sont alors distinctes et il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \{0, \ldots, N\}, \quad h_k = a1^k + b\left(\frac{1-p}{p}\right)^k = a + b\left(\frac{1-p}{p}\right)^k.$$

De plus, on a

$$h_0 = 1 = a + b \quad \text{et} \quad h_N = 0 = a + b\left(\frac{1-p}{p}\right)^N.$$

Donc

$$a = -\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}.$$

Et ainsi

$$\forall k \in \{0, \ldots, N\}, \quad \mathbb{P}_k(T_A \leq T_B) = h_k = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}.$$

Dans le cas $p = \frac{1}{2}$, le polynôme caractéristique est

$$P(X) = \frac{1}{2}(X-1)^2.$$

On cherche donc h_k de la forme

$$h_k = (a + bk)1^k = a + bk.$$

On obtient, dans ce cas,

$$a = 1 \quad \text{et} \quad a + Nb = 0.$$

Donc

$$a = 1 \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{N},$$

et

$$\forall k \in \{0, \ldots, N\}, \quad \mathbb{P}_k(T_A \leq T_B) = h_k = \frac{N-k}{N}.$$

Application numérique pour $k = 1$ et $N = 10$:

- si $p = 1/2$, $\mathbb{P}_k(T_A \leq T_B) = 9/10$
- si $p = 1/3$, $\mathbb{P}_k(T_A \leq T_B) = 1022/1023 \approx 0.999$
- si $p = 2/3$, $\mathbb{P}_k(T_A \leq T_B) = 511/1023 \approx 0.5$

(4) On suppose maintenant que le joueur B est beaucoup plus riche que le joueur A ie $N \to \infty$ alors que k reste fixe. Étudier le comportement de $\mathbb{P}_k(T_A \leq T_B)$ selon la valeur de p dans ce cas.

Si $p = \frac{1}{2}$, alors $\lim_{N\to\infty} h_k = 1$. C'est ce qu'on appelle le paradoxe de la ruine du joueur : même si le joueur est immensément riche et que le jeu est équilibré, si la banque a autant de fond qu'elle veut, la probabilité de ruine du joueur est de 1.

Si $p < \frac{1}{2}$, on a $(1-p)/p > 1$ et $\lim_{N\to\infty} h_k = 1$(on pourrait montrer que, dans ce cas, h_k est toujours plus petit que la probabilité de ruine dans le cas d'un jeu équilibré) .

Si $p > \frac{1}{2}$, on a $(1-p)/p < 1$ et $\lim_{N\to\infty} h_k = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \in]0,1[$. Ainsi, même dans le cas où le jeu est favorable au joueur A, celui ci peut quand même perdre.

*** Exercice 8.** *Temps d'atteinte.*

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un espace E fini ou dénombrable. On note $P = (p_{xy})_{x,y\in E}$ la matrice de transition de X. Pour A sous-ensemble de E, on définit $T_A := \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n \in A\}$ le *temps d'atteinte* de l'ensemble A.

(1) On note pour $x \in E$, $h_x := \mathbb{P}_x(T_A < \infty) = \mathbb{P}(T_A < \infty | X_0 = x)$. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$h_x = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ \sum_{y\in E} p_{xy} h_y & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Si $x \in A$ alors $\mathbb{P}_x(X_0 \in A) = 1$ et donc $\mathbb{P}_x(T_A < \infty) = 1$. On suppose désormais que $x \notin A$. Dans ce cas, $X_0 \notin A$ et $T_A = \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_{1+n} \in A\}$, d'où

$$h_x = \mathbb{P}_x(T_A < \infty) = \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\exists n\in\mathbb{N},\ X_{1+n}\in A}\right].$$

En considérant la fonction $f : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathbf{1}_{\{\exists n\in\mathbb{N},\ u_n\in A\}},$$

on a donc, grâce à la propriété de Markov généralisé,

$$\begin{aligned} h_x &= \mathbb{E}_x\left[f((X_{1+n})_{n\in\mathbb{N}})\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}\left[f((X_{1+n})_{n\in\mathbb{N}}) \mid X_0, X_1\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{X_1}\left[f\left((\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{X_1}\left[\mathbf{1}_{\{\exists n\in\mathbb{N},\ \tilde{X}_n\in A\}}\right]\right] \end{aligned}$$

où $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de même transition que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En calculant la première espérance, on a donc bien :

$$h_x = \sum_{y\in E} \mathbb{P}_x(X_1 = y)\,\mathbb{E}_y\left[\mathbf{1}_{\{\exists n\in\mathbb{N},\ \tilde{X}_n\in A\}}\right] = \sum_{y\in E} p_{xy} h_y.$$

(2) Montrer que si $S = (s_x)_{x\in E}$ est une solution positive du système précédent, alors pour tout $x \in E$, $h_x \leq s_x$.

On remarque que dans un premier temps,

$$\mathbb{P}_x(T_A = 1) = \mathbb{P}(X_0 = x, X_1 \in A) = \sum_{y\in A} \mathbb{P}(X_0 = x, X_1 = 1) = \sum_{y\in A} p_{x,y},$$

et que de façon générale,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(T_A \leq k) &= \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_0 = x, X_1 \notin A, \cdots, X_{j-1} \notin A, X_j \in A) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{y_1,\cdots,y_{j-1}\notin A} \sum_{y_j\in A} p_{x,y_1} p_{y_1,y_2} \cdots p_{y_{j-1},y_j}. \end{aligned}$$

Soit $(s_x)_{x\in E}$ une solution positive du système précédent. L'inégalité est évidente pour $x \in A$. Pour $x \notin A$, on a

$$\begin{aligned} s_x &= \sum_{y\in A} p_{x,y} + \sum_{y\notin A} p_{x,y} s_y = \mathbb{P}_x(T_A = 1) + \sum_{y\notin A} p_{x,y} s_y \\ &= \mathbb{P}_x(T_A = 1) + \sum_{y\notin A} p_{x,y} \left(\sum_{z\in A} p_{y,z} + \sum_{z\notin A} p_{y,z} s_z\right) = \mathbb{P}_x(T_A \leq 2) + \sum_{y\notin A}\sum_{z\notin A} p_{x,y} p_{y,z} s_z. \end{aligned}$$

Grâce à une récurrence immédiate, on obtient donc pour tout $n \geq 1$,

$$s_x = \mathbb{P}_x(T_1 \leq n) + \sum_{y_1,\cdots,y_n \notin A} p_{x,y_i} p_{y_1,y_2} \cdots p_{y_{n-1},y_n} s_{y_n} \geq \mathbb{P}_x(T_A \leq n),$$

la dernière inégalité étant une conséquence de la positivité de $(s_x)_{x\in E}$. De plus, $(\{T_A \leq n\})_n$ est une suite croissante d'événement qui converge vers $\{T_A < +\infty\}$, et donc $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(T_A \leq n) = \mathbb{P}_x(T_A + \infty) = h_x$. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient donc bien $s_x \geq h_x$ pour tout $x \in E$.

* Exercice 9.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ telle que les probabilités de transition (p_{ij}) vérifient :

$$p_{0,1} = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*,\ p_{i,i-1} = 1 - p_{i,i+1} = \frac{i^2}{i^2 + (i+1)^2}.$$

On cherche la probabilité que partant de 1, on n'atteigne jamais la valeur 0.
On note ainsi $T_0 := \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = 0\}$ le temps d'atteinte de 0 et, comme dans l'exercice précédent, on pose $h_i = \mathbb{P}_i(T_0 < \infty)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

(1) Indiquer les classes de communication de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ?

La chaîne de Markov admet une unique classe de communication : $\mathbb{N}$. Elle est donc irréductible.

(2) Montrer que h est la plus petite solution positive du système :

$$\left\{\begin{array}{l} s_0 = 1 \\ \forall i \geq 1,\ s_i = p_{i,i-1}s_{i-1} + p_{i,i+1}s_{i+1} \end{array}\right. \tag{1}$$

(On pourra utiliser le résultat de l'exercice 8.)

Comme indiqué ci-dessus, c'est une conséquence directe du résultat obtenu dans l'exercice 8.

(3) (a) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution du système (1). Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $r_i := s_{i+1} - s_i$. Montrer que $p_{i,i+1}r_i = p_{i,i-1}r_{i-1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

Comme $p_{i,i-1} + p_{i,i+1} = 1$, la relation du système (1) donne $p_{i,i-1}(s_i - s_{i-1}) = p_{i,i+1}(s_{i+1} - s_i)$.

(b) En déduire qu'une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de (1) ssi il existe $c \in \mathbb{R}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 1 - c\sum_{i=1}^n i^{-2}$.

D'après la question précédente, pour tout $i \geq 1$,

$$r_i = \frac{p_{i,i-1}}{p_{i,i+1}} r_{i-1} = \frac{\frac{i^2}{i^2+(i+1)^2}}{\frac{(i+1)^2}{i^2+(i+1)^2}} r_{i-1} = \left(\frac{i}{i+1}\right)^2 r_{i-1}.$$

Cela donne par récurrence

$$\forall i \geq 1, \quad r_i = \frac{1}{(i+1)^2} r_0.$$

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n - s_0 = \sum_{i=0}^{n-1} r_i = r_0\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2}\right) = r_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}.$$

Comme $s_0 = 1$, on obtient bien la formule voulue et on vérifie simplement que toute suite de cette forme est bien solution du système initial.

(4) Montrer que $\mathbb{P}_1(T_0 < \infty) = 1 - \frac{6}{\pi^2}$. La chaîne de Markov X est-elle récurrente ?
(*On rappelle que* $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$)

D'après la question précédente, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la plus petite suite positive telle que

$$\exists c \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad h_n = 1 - c\sum_{i=1}^{n} i^{-2}$$

Or,

$$\forall n \geq 0, \quad h_n \geq 0 \Leftrightarrow \forall n \geq 0,\ c \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n i^{-2}} \Leftrightarrow c \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^\infty i^{-2}} = \frac{6}{\pi^2}$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad h_n = 1 - \frac{6}{\pi^2}\sum_{i=1}^{n} i^{-2}$$

et
$$\mathbb{P}_1(T_0<\infty)=h_1=1-\frac{6}{\pi^2}.$$
Ainsi, comme $p_{0,1}=1$ la probabilité de revenir en 0 vaut
$$\mathbb{P}_0(\exists n\geq 1,\ X_n=0)=\mathbb{P}_1(\exists n\geq 0,\ X_n=0)=\mathbb{P}_1(T_0<\infty)=1-\frac{6}{\pi^2}<1$$
et 0 n'est pas un état récurrent. Comme la chaîne est irréductible, il en est de même de tous les autres états.

(5) Étudier, selon les valeurs de $\alpha\in[0,\infty[$, la récurrence de la chaîne de Markov ayant pour probabilités de transition :
$$p_{01}=1 \text{ et } \forall i\in\mathbb{N}^*, p_{ii-1}=1-p_{ii+1}=\frac{i^\alpha}{i^\alpha+(i+1)^\alpha}.$$

Quel que soit la valeur de α, la chaîne est irréductible et il suffit d'étudier la nature de l'état 0.
Et, de la même façon que dans les questions précédentes, on obtient que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme avant par $h_n=\mathbb{P}_n(T_0^\alpha<\infty)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ est la plus petite suite positive vérifiant pour un réel c,
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad h_n=1-c\sum_{i=1}^n\frac{1}{i^\alpha}.$$
On remarque alors que, si $\alpha>1$, la somme de droite converge vers une certaine valeur ℓ_α. Dans ce cas, on a comme précédemment $\mathbb{P}_1^\alpha(T_0+\infty)=1-1/\ell_\alpha<1$ et la chaîne n'est pas récurrente.
Lorsque $\alpha\leq 1$, la série dans le terme de droite diverge et si $c\neq 0$,
$$\lim_{n\to+\infty}\left|1-c\sum_{i=1}^n\frac{1}{i^\alpha}\right|=+\infty.$$
Donc, nécessairement, $c=0$, $h_n=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et la chaîne de Markov est récurrente.

Exercice 10. *Temps de retour en un point.*
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un espace E fini ou dénombrable et x_0 un point de E. On pose :
$$T_0=0 \quad\text{et}\quad \forall k\in\mathbb{N},\ T_{k+1}=\min\{n>T_k\ ,\ X_n=x_0\}$$
avec la convention que $\min\emptyset=\infty$.

(1) Montrer que pour tout $x\in E$, tout $l\in\mathbb{N}$ et tout $k\in\mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}_x(T_{k+1}-T_k=l,T_k<\infty)=\mathbb{P}_{x_0}(T_1=l)\,\mathbb{P}_x(T_k<\infty)\ .$$

Fixons $l\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{N}^*$. D'après la propriété de Markov forte appliquée au temps d'arrêt T_k,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(T_{k+1}-T_k=l,T_k<\infty)&=\mathbb{E}_x\left[1_{T_k<\infty}1_{T_{k+1}-T_k=l}\right]=\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[1_{T_k<\infty}1_{T_{k+1}-T_k=l}\mid\mathcal{F}^X_{T_k}\right]\right]\\&=\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[1_{T_k<\infty}1_{X_{T_k+1}\neq x_0,\dots,X_{T_k+l-1}\neq x_0,X_{T_k+l}=x_0}\mid\mathcal{F}^X_{T_k}\right]\right]\\&=\mathbb{E}_x\left[1_{T_k<\infty}\mathbb{E}_{X_{T_k}}\left[1_{\tilde{X}_1\neq x_0,\dots,\tilde{X}_{l-1}\neq x_0,\tilde{X}_l=x_0}\right]\right]\end{aligned}$$
où, comme toujours, $\left(\tilde{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de même transition que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme sur l'événement $\{T_k<\infty\}$, X_{T_k} n'est pas aléatoire et vaut x_0 (car $k\geq 1$), on a donc :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(T_{k+1}-T_k=lT_k<\infty)&=\mathbb{E}_x\left[1_{T_k<\infty}\right]\mathbb{E}_{x_0}\left[1_{\tilde{X}_1\neq x_0,\dots,\tilde{X}_{l-1}\neq x_0,\tilde{X}_l=x_0}\right]\\&=\mathbb{P}_x(T_k<\infty)\,\mathbb{P}_{x_0}(T_1=l)\end{aligned}$$

(2) En déduire que pour tout $x\in E$ et tout $k\in\mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}_x(T_{k+1}<\infty)=\mathbb{P}_{x_0}(T_1<\infty)^k\,\mathbb{P}_x(T_1<\infty)\ .$$

D'après la question précédente, on a, pour tout $x \in E$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(T_{k+1} < +\infty) =& \sum_{l \geq 0} \mathbb{P}_x(T_{k+1} - T_k = l, T_k < \infty) \\ =& \sum_{l \geq 0} \mathbb{P}_{x_0}(T_1 = l)\mathbb{P}_x(T_k < +\infty) \\ =& \mathbb{P}_{x_0}(T_1 < +\infty)\mathbb{P}_x(T_k < +\infty).\end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate, on a alors

$$\mathbb{P}_x(T_{k+1} < +\infty) = \mathbb{P}_{x_0}(T_1 < +\infty)^k \mathbb{P}_x(T_1 < +\infty).$$

(3) Soit $x \in E$. On suppose que $\mathbb{P}_x(T_1 < +\infty) = \mathbb{P}_{x_0}(T_1 < +\infty) = 1$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_x[T_{k+1}] = k\mathbb{E}_{x_0}[T_1] + \mathbb{E}_x[T_1]$$

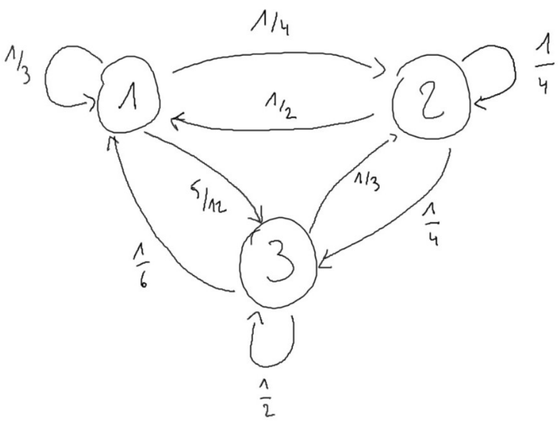
3. Classes de communication, Récurrence, Transience

Exercice 11.
Indiquer quelles matrices parmi les matrices suivantes sont des matrices de transition. Donner alors leurs classes de communication et la nature de chaque classe (récurrente ou transitoire).

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 5/12 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 5/12 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/6 & 1/2 & 1/12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

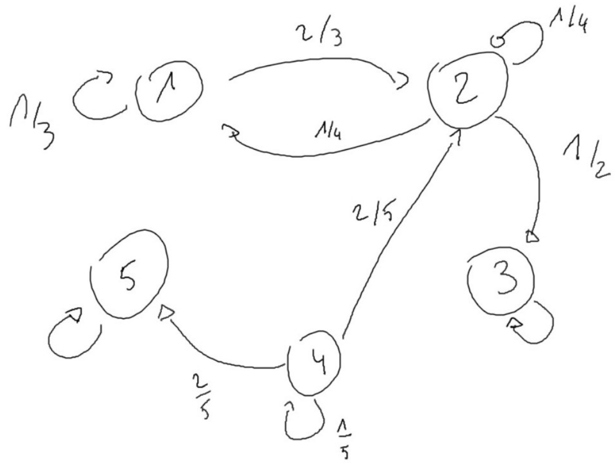
Remarquons que la deuxièmes matrice n'est pas une matrice de transition. En effet, la somme des coefficients de la dernière ligne vaut $\frac{2}{3}$ qui n'est pas égale à 1.

Pour la première matrice, on a le graphe de transition :



Il y a une seule classe de communication $\mathcal{C} = \{1, 2, 3\}$.

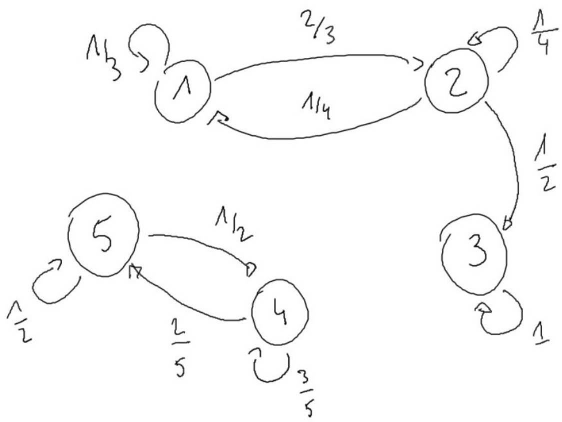
Pour la troisième matrice, on a



Les classes de communication sont

$$\mathcal{C}_1 = \{1,2\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{3\}, \quad \mathcal{C}_3 = \{4\}, \quad \mathcal{C}_4 = \{5\}.$$

Pour la quatrième matrice, on a



Les classes de communication sont

$$\mathcal{C}_1 = \{1,2\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{3\}, \quad \mathcal{C}_3 = \{4,5\}.$$

Exercice 12.
Donner les classes de communication des chaînes de Markov apparaissant dans les différents exercices des sections précédentes.

Exercice 13. *Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$.*
On se donne une suite de v.a.i.i.d $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1) = p \in]0,1[$$

et on définit la marche aléatoire issue de $x \in \mathbb{Z}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par $S_0 = x$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.

(1) Montrer que le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible.

On a, pour tout $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ mesurable bornée,

$\mathbb{E}[f(S_{n+1})|S_1, \cdots, S_n] = \mathbb{E}[f(S_n + X_{n+1})|S_1, \cdots, S_n] = \mathbb{E}[f(S_n + X_{n+1})|S_n] = \mathbb{E}[f(S_{n+1}|S_n]$.

Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. De plus pour tout $k < l \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}_k(S_{l-k} = l) = p^{l-k} > 0,$$

et

$$\mathbb{P}_l(S_{l-k} = k) = (1-p)^{l-k} > 0;$$

Ainsi tous les états communiquent entre eux et la chaîne est irréductible.

(2) Calculer $\mathbb{P}_0(S_n = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. On remarque dans un premier temps qu'il est impossible pour la chaîne de revenir en 0 en un nombre impair d'étapes :

$$\mathbb{P}_0(S_{2n+1} = 0) = 0.$$

De plus, pour que la chaîne revienne en 0 en un nombre pair d'étapes, il faut que le processus fasse autant de saut à droite qu'à gauche. Or, chaque chemin de longueur $2n$ comportant n sauts à gauche et n sauts à droite à la même probabilité $p^n(1-p)^n$ d'être suivi par la chaîne. Et il y a $\binom{2n}{n}$ chemins de ce type : on choisit où sont placés les n sauts à gauches parmi les $2n$ étapes, le placement des sauts à droite s'en suit. Ainsi,

$$\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

(3) En déduire que 0 est un état récurrent pour le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi $p = 1/2$. Les autres entiers sont-ils également récurrents ?

Une propriété du cours donne que 0 est récurrent si et seulement si

$$\mathbb{E}_0[N_0] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_0(S_n = 0) = +\infty.$$

Ici,

$$\mathbb{E}_0[N_0] = \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n)!^2} (p(1-p))^n.$$

De plus, grâce à la formule de Stirling,

$$\frac{(2n)!}{(n)!^2} (p(1-p))^n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n.$$

Donc, si $p \neq \frac{1}{2}$, $0 < 4p(1-p) < 1$, la série est alors sommable et $\mathbb{E}_0[N_0] < +\infty$ ce qui signifie que 0 est transitoire. Et, si $p = \frac{1}{2}$, le terme général de la série est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, et donc $\mathbb{E}_0[N_0] = +\infty$ et 0 est récurrent. On rappelle que la chaîne ne possède qu'une seule classe de communication, ainsi, tous les états sont de la même nature que 0.

Exercice 14.

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace d'état E *fini*. On se fixe un état $x \in E$ arbitraire et, pour tout $y \in E$, on note N_y le nombre de passages en y : $N_y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{X_n = y}$.

(1) Montrer que pour tout $y \in E$, si y est transitoire, $\mathbb{P}_x(N_y = \infty) = 0$.

Soit $y \in E$ tel que l'état y soit transitoire. On sait alors que, si la chaîne part de y, elle ne passe presque sûrement qu'un nombre fini de fois en y : $\mathbb{P}_y(N_y = +\infty) = 0$. De plus, grâce à la propriété de Markov fort utilisée avec le temps d'arrêt T_y^1,

$$\mathbb{P}_x(N_y = +\infty) = \mathbb{P}_x(T_y^1 < +\infty)\mathbb{P}_y(N_y = +\infty).$$

Donc $\mathbb{P}_x(N_y = +\infty) = 0$.

(2) On se fixe $x \in E$. Montrer que $\mathbb{P}_x(\exists y \in E, N_y = \infty) = 1$.

On remarque que, $\mathbb{P}_x$-p.s.,

$$\sum_{y\in E} N_y = \sum_{y\in E}\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{X_n = y} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{X_n \in E} = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1 = +\infty.$$

Ainsi, E étant fini, il existe $y \in E$ tel que $N_y = +\infty$.

(3) En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une classe de communication récurrente.

On vient de montrer que

$$\mathbb{P}_x(\exists y \in E, N_y = \infty) = \mathbb{P}_x\left(\bigcup_{y\in E} \{N_y = \infty\}\right) = 1$$

Ainsi nécessairement, il existe $y \in E$ tel que $\mathbb{P}_x(N_y = \infty) > 0$ et d'après la question 1, y (et donc toute la classe de y) est récurrent.

(4) Ce résultat est-il encore vrai si l'espace d'états E n'est plus supposé fini ?

On se rappelle que tous les points de $\mathbb{Z}$ pour les marches aléatoires simples non symétriques sur $\mathbb{Z}$ sont transitoires (cf exercice 13). Ainsi, le résultat n'est pas vrai dans le cas où E est infini.

Exercice 15. *Marche aléatoire simple sur un arbre régulier.*
On considère un arbre régulier T où chaque noeud possède $b > 1$ enfants. On définit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche simple sur T comme la chaîne de Markov vérifiant la propriété suivante : si X_n est en un noeud x, alors la marche saute sur un des voisins de x de manière équiprobable.
Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible transitoire.

*** Exercice 16.** *Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$.*
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On dit que $x, y \in \mathbb{Z}^d$ sont voisins si $\|x - y\| = 1$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$, et on écrit alors $x \sim y$.
On considère la chaîne de Markov $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbb{P}(S_{n+1} = y | S_n = x) = \frac{1}{2d}\mathbf{1}_{x\sim y}.$$

(1) Montrer que le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible.

(2) On suppose que $d = 2$.

(a) *Identité de Vandermonde.* Montrer que pour tout entier p, q,r,

$$\sum_{m=0}^{r} \binom{p}{m}\binom{q}{r-m} = \binom{p+q}{r}^2.$$

On pourra considérer deux ensembles P et Q disjoints à respectivement p et q éléments et exprimer de deux manières différentes le nombre de sous-ensembles à r éléments de $P \cup Q$.

(b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \leq m$, $\mathbb{P}_0(\{S_{2n} = 0\} \cap A_{2n,2m})$ où

$A_{2n,2m} :=$ {Parmi les $2n$ premiers pas de la marche, exactement $2m$ sont des déplacements horizontaux}.

En déduire que

$$\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \frac{1}{4^{2n}}\binom{2n}{n}$$

(c) En déduire que la marche simple dans $\mathbb{Z}^2$ est récurrente.

(3) On suppose maintenant que $d = 3$.

(a) Démontrer la formule du multinôme de Newton :

$$\forall (d, n) \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \dots, x_d),\ \left(\sum_{k=1}^{d} x_k\right)^n = \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} \frac{n!}{n_1!\cdots n_d!}\prod_{k=1}^{d} x_k^{n_k}.$$

(b) Montrer, en utilisant la même démarche que dans la question (2) que

$$\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\sum_{n_1+\cdots+n_d=n}\left(\frac{n!}{n_1!\cdots n_d!}\frac{1}{d^n}\right)^2.$$

(c) Montrer que

$$\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = O\left(\frac{m_n}{d^n\sqrt{n}}\right).$$

où

$$m_n = \max_{n_1+\cdots+n_d=qd} \frac{n!}{n_1!\cdots n_d!}$$

(d) Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$m_{qd} = \frac{(qd)!}{(q!)^d}.$$

(e) Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{m_n}{d^n\sqrt{n}} \leq \sum_{q\geq 0} \frac{dm_{qd}}{d^{qd}\sqrt{q}}.$$

(f) En déduire que la marche simple dans $\mathbb{Z}^3$ est transiente.

Exercice 17. *Longueur d'une suite de succès.*
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont les probabilités de transition sont définies par la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = x) = p_x \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = x+1 | X_n = x) = 1 - p_x$$

où la suite $(p_x)_{x\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]0, 1[$

(1) Tracer le graphe associé à la chaîne de Markov et montrer qu'elle est irréductible.

(2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(p_x)_{x\in\mathbb{N}}$ pour que la chaîne soit récurrente.

Exercice 18. *File d'attente.*
On étudie l'évolution d'une file d'attente à un guichet. On suppose qu'un client est servi par unité de temps. On note N_n le nombre de clients arrivant dans la $n^{\text{ième}}$ unité de temps. On suppose que les N_n sont des v.a.i.i.d. et qu'un client arrivant à la période n ne peut pas être servi avant la période $n+1$. Finalement, on note X_n le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant n et on suppose que $X_0 = 0$.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = N_{n+1} + X_n - \mathbf{1}_{X_n \geq 1}$. En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(2) Montrer que, $\mathbb{P}$-p.s, pour tout $n \geq 1$, $X_n \geq \sum_{k=1}^{n} N_k - n$. En déduire que si $\mathbb{E}[N_1] > 1$ alors X_n tend vers $+\infty$ $\mathbb{P}$-p.s. et que 0 est un état transient.

(3) On note maintenant $T_0^1 = \min\{n \geq 1,\ X_n = 0\}$ le temps de retour en 0.

(a) Montrer que si $T_0^1 = \infty$, alors pour tout $n \geq 1$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} N_k - (n-1)$.

(b) En déduire que si $\mathbb{E}[N_1] < 1$ alors 0 est un état récurrent.

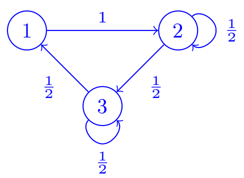
4. Loi stationnaire

Exercice 19.
On considère la matrice P suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Montrer que P est une matrice de transition. Donner ses classes de communication et leur nature. Donner la probabilité invariante de la chaîne de Markov associée.

Le graphe associé à la matrice est :



On voit ainsi que la chaîne admet une unique classe de communication, fermée et finie donc récurrente positive. Ainsi il existe une unique probabilité invariante π. Celle-ci est solution du système

$$\pi P = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{R},\ \pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = a(1, 2, 2).$$

Comme π est une mesure de probabilité, $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ soit $a = 5$ et $\pi = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.

Exercice 20.
Un jeu de plateau comprend M cases numérotées de 0 à $M-1$. Au départ, le joueur place son pion sur la case 0 et à chaque tour, il lance un dé et avance son pion d'un nombre de cases correspondant au résultat du lancer (après la case $M-1$, le pion retourne à la case 0). Les

lancers successifs sont supposés indépendants. On note S_n le numéro de case où se trouve le pion du joueur à l'issue du n-ième lancer.

(1) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $\{0,\dots,M-1\}$. et donner sa matrice de transition.

Le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\{0,\dots,M-1\}$ et peut être construit comme suit. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vaiid de loi $\mathcal{U}(\{1,\dots,6\})$ représentant les résultats des lancers de dés. Alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le processus défini par :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ S_{n+1} \equiv S_n + X_{n+1} \mod M \end{cases}$$

La variable S_{n+1} étant construit récursivement à partir de S_n et de X_{n+1} où les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont iid indépendants de S_0, le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une chaîne de Markov de transition

$$\forall (i,j)\in\{0,M-1\}, P(i,j) = \mathbb{P}(i+X_1\equiv j \mod M) = \frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{j-i\in\{1,\dots,6\} \mod M\}}.$$

(2) Classifier les états de la chaîne de Markov. La chaîne admet-elle une probabilité stationnaire ? La chaîne est-elle apériodique ?

La chaîne est irréductible, récurrente positive car l'espace d'état est finie. Elle admet donc exactement une probabilité invariante. De plus, elle est apériodique car pour tout $n \geq \lfloor M/6\rfloor + 1$, $P^{(n)}(i,j) > 0$.

(3) Vérifier que la matrice P est *bistochastique*, c'est-à-dire que pour tout $y\in\{0,\dots,M-1\}$, $\sum_{x=0}^{M-1} P(x,y) = 1$. Montrer que la matrice P^n est également bistochastique.

Soit $y\in\{0,\dots,M-1\}$.

$$\sum_{x=0}^{M-1} P(x,y) = \sum_{x=0}^{M-1}\frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{y-x\in\{1,\dots,6\} \mod M\}} = 1.$$

On montre ensuite par récurrence, que P^n est bistochastique pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(4) Calculer la probabilité stationnaire de la chaîne. Que vaut $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_0(S_n=0)$?

La probabilité stationnaire est l'unique probabilité π solution de $\pi P = \pi$. Mais, comme P est bistochastique, la probabilité uniforme sur $\{0,\dots,M-1\}$ est bien solution de cette équation. Donc, $\pi = \mathcal{U}(\{0,\dots,M-1\})$. Comme la chaîne est apériodique, elle converge en loi vers la probabilité invariante, donc

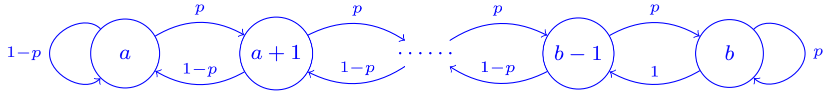
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_0(S_n=0) = \pi_0 = \frac{1}{M}.$$

Exercice 21.

(1) Soit $p\in]0,1[$ et $-\infty < a \leq b < \infty$. Après avoir justifié son existence et son unicité, donner la probabilité invariante associée à la marche simple $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\{a,\dots,b\}$ avec réflexion partielle en a et en b :

$$\mathbb{P}(S_{n+1}=a+1|S_n=a) = p, \mathbb{P}(S_{n+1}=a|S_n=a) = 1-p$$
$$\text{et } \mathbb{P}(S_{n+1}=b-1|S_n=b) = 1-p,\ \mathbb{P}(S_{n+1}=b|S_n=b) = p.$$

Le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la chaîne de Markov associé au graphe suivant :



La chaîne est irréductible sur un espace d'état fini donc récurrente positive. Ainsi elle admet une unique probabilité invariante π. Notons P la matrice de transition associée à la marche $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors,

$$\forall j\in\{a,\dots,b\},\ \sum_{i=a}^{b}\pi_i P(i,j) = \pi_j$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \forall a+1\leq j\leq b-1,\ \pi_j = p\pi_{j-1} + (1-p)\pi_{j+1} \\ \pi_a = (1-p)\pi_{a+1} + (1-p)\pi_a \\ \pi_b = p\pi_{b-1} + p\pi_b. \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \forall a+1\leq j\leq b-1,\ \pi_{j+1} - \frac{1}{1-p}\pi_j + \frac{p}{1-p}\pi_{j-1} = 0 \\ \frac{p}{1-p}\pi_a = \pi_{a+1} \\ \pi_b = \frac{p}{1-p}\pi_{b-1}. \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée au système, $r^2 - \frac{1}{1-p} + \frac{p}{1-p} = 0$, admet pour solutions $r_1 = 1$ et $r_2 = p/(1-p)$. Ainsi, si $p \neq 1/2$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, tels que pour tout $a \leq j \leq b$,

$$\pi_i = \alpha + \beta \left(\frac{p}{1-p}\right)^i.$$

En particulier,

$$\alpha + \beta \left(\frac{p}{1-p}\right)^{a+1} = \pi_{a+1} = \frac{p}{1-p}\pi_a = \alpha\frac{p}{1-p} + \beta \left(\frac{p}{1-p}\right)^{a+1}.$$

Donc $\alpha = 0$. Comme, de plus,

$$1 = \sum_{i=a}^{b} \pi_i = \beta \sum_{i=a}^{b} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i = \beta \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^b - \left(\frac{p}{1-p}\right)^a}{\frac{p}{1-p} - 1}.$$

On voit que pour tout $a \leq i \leq b$,

$$\pi_i = \frac{1-p}{2p-1} \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^i}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^b - \left(\frac{p}{1-p}\right)^a}$$

Lorsque $p = 1/2$, le même genre de calcul montre que π est la loi uniforme sur $\{a, \ldots, b\}$.

(2) La marche simple de paramètre $p \in]0, 1[$ sur $\mathbb{Z}$ admet-elle une probabilité invariante pour certaines valeurs de p ? Si oui, lesquelles ?

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche simple sur $\mathbb{Z}$ de paramètre $p \in]0, 1[$. Supposons que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette une probabilité invariante π. Alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\pi_i = p\pi_{i-1} + (1-p)\pi_{i+1}.$$

Ainsi π est une suite récurrente linéaire dont l'équation caractéristique associée est $r^2 - \frac{1}{1-p}r + \frac{p}{1-p} = 0$ de racines $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{p}{1-p}$.

— *Si* $p \neq 1/2$: les deux racines sont distinctes et il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\pi_i = \alpha + \beta \left(\frac{p}{1-p}\right)^i.$$

Or si $p > 1/2$, $\lim_{i\to\infty} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i = \infty$ et si $p < 1/2$, $\lim_{i\to-\infty} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i = \infty$. Comme pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\pi_i \in [0, 1]$, le paramètre β est nécessaireemnt nul dans les deux cas et $\pi_i = \alpha$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Mais, on sait de plus que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \pi_i = 1$. C'est donc impossible quelle que soit la valeur de α et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc admettre de probabilité invariante.

— *Si* $p = 1/2$: les deux racines sont égales et il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\pi_i = \alpha + \beta i.$$

Un raisonnement similaire à celui du cas précédent montre qu'une fois encore, on ne peut trouver de valeurs pour les paramètres telles que π soit une probabilité.

(3) On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la marche simple sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p \in]0, 1[$ avec réflexion partielle en 0 :

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = 1 | S_n = 0) = p, \mathbb{P}(S_{n+1} = 0 | S_n = 0) = 1 - p.$$

La chaîne de Markov $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une probabilité invariante pour certaine valeur de p ? Si oui, lesquelles ?

On se retrouve dans le cas de la question 1 avec «$b = \infty$». Des calculs similaires à ceux de cette question montrent que si $p \geq 1/2$, il n'y a pas de probabilité invariante et, si $p < 1/2$, la marche admet pour probabilité invariante la mesure π définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \pi_i = \frac{1-p}{1-2p} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i.$$

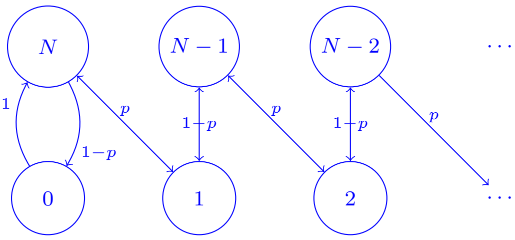
*** Exercice 22.**

Un professeur distrait possède N parapluies. Il part à son bureau chaque matin et rentre chaque soir chez lui. Si il pleut quand il quitte un lieu, il emporte un parapluie si il en a un à sa disposition. Si il ne pleut pas, il laisse les parapluies sur place. On suppose qu'à chaque déplacement, la probabilité qu'il pleuve est $p \in]0, 1[$ et cela indépendamment du temps lors des autres déplacements.

(1) Modéliser le nombre de parapluies à la disposition du professeur à chacun de ses déplacements par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on précisera les transitions.

On note X_n le nombre de parapluies à disposition du professeur après n trajets. D'après l'énoncé, le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de transition P vérifiant :

$$\begin{aligned} P(0,N) &= 1 \\ \forall i \in \{1,\dots,N\},\ P(i,N-i+1) &= p \\ P(i,N-i) &= 1-p \end{aligned}$$



(2) On note p_n la proportion des n premiers voyages où le professeur est obligé de voyager sans parapluie. Donner la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini.

La chaîne de Markov est irréductible et à valeurs dans un espace d'états fini $E = \{0,\dots,N\}$ donc récurrente positive. Elle admet donc une unique mesure de probabilité stationnaire π vérifiant :

$$\forall j \in E,\ \pi_j = \sum_{i\in E} \pi_i P(i,j)$$

soit

$$\pi_N = 1\cdot \pi_0 + p\pi_1 \tag{2}$$

$$\pi_0 = (1-p)\pi_N \tag{3}$$

$$\forall 0<i<N,\ \pi_i = p\pi_{N-i+1} + (1-p)\pi_{N-i} \tag{4}$$

D'après (4), on a ainsi

$$\begin{aligned} \forall 0<i<N,\ \pi_{N-i} &= p\pi_{i+1} + (1-p)\pi_i \\ \forall 1<i\le N,\ \pi_{N-i+1} &= p\pi_i + (1-p)\pi_{i-1} \end{aligned}$$

D'où

$$\forall 1<i<N,\ \pi_i = p^2\pi_i + p(1-p)\pi_{i-1} + (1-p)^2\pi_i + p(1-p)\pi_{i+1}$$

soit

$$\forall 1<i<N,\ 2\pi_i = \pi_{i-1} + \pi_{i+1}.$$

L'équation caractéristique associée $r^2 - 2r + 1 = 0$ admet une solution double 1 donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $1 \le i \le N$,

$$\pi_i = \alpha + \beta i$$

Or, (2) et (3) donnent $\pi_N = \pi_1$ d'où $\beta = 0$. Et finalement,

$$1 = \sum_{i=0}^{N} \pi_i = (1-p)\alpha + N\alpha.$$

D'où

$$\pi_0 = \frac{1-p}{N+1-p} \quad \text{et } \forall i \in \{1,\dots,N\},\ \pi_i = \frac{1}{N+1-p}.$$

Le professeur est obligé de voyager sans parapluie lorsdu $(n+1)^e$ voyage, si $X_n = 0$. On a ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k=0}}{n}.$$

D'après le théorème ergodique,

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \pi_0 = \frac{1-p}{N+1-p}.$$

Exercice 23. *Les urnes d'Ehrenfest (2).* On se place dans le cadre de l'exercice 4.

(1) Montrer que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique probabilité invariante qu'on explicitera.

La chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible, à valeurs dans un espace d'état fini donc récurrente positive. Elle admet donc une unique probabilité invariante π. On a vu, de plus, dans l'exercice 4, que la loi $\mathcal{B}(N, 1/2)$ est invariante pour la chaîne, donc nécessairement, $\pi = \mathcal{B}(N, 1/2)$.

(2) On suppose N pair. Comparer l'espérance du temps de retour en 0 et en $N/2$.

On sait que pour une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive, l'unique probabilité invariante vérifie :

$$\forall i \in E, \pi_i = \mathbb{E}_i\left[T_i^1\right].$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}_0\left[T_0^1\right] = \frac{1}{\pi_0} = \frac{1}{\binom{N}{0}\frac{1}{2^N}} = 2^N.$$

et

$$\mathbb{E}_{N/2}\left[T_{N/2}^1\right] = \frac{1}{\pi_{N/2}} = \frac{2^N}{\binom{N}{N/2}}.$$

Comme, d'après la formule de Stirling,

$$\binom{N}{N/2} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi N}}2^N,$$

on obtient le comportement asymptotique de l'espérance du temps de retour :

$$\mathbb{E}_{N/2}\left[T_{N/2}^1\right] \sim \sqrt{\frac{\pi N}{2}}.$$

Ainsi l'espérance du temps de retour à l'état $N/2$ est asymptotiquement d'un ordre beaucoup plus faible que celle du temps de retour à l'état 0.

Exercice 24. *Retour à l'état initial.*
On considère une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\geq 0}$ irréductible récurrente positive. On note τ le temps de retour à l'état initial : $\tau = \inf\{n \geq 1,\ X_n = X_0\}$.
Calculer l'espérance de τ lorsque la chaîne de Markov a pour distribution initiale sa loi invariante. Est-ce en contradiction avec l'hypothèse de récurrence positive ?

Notons π la probabilité invariante de la chaîne et E l'esapce d'état de la chaîne de Markov. On cherche à calculer :

$$\mathbb{E}_\pi[\tau] = \sum_{x\in E} \mathbb{E}_x[\tau]\pi_x = \sum_{x\in E} \mathbb{E}_x\left[T_x^1\right]\pi_x$$

où $T_x^1 = \inf\{n \geq 1,\ X_n = x\}$. Or, on sait que $\mathbb{E}_x\left[T_x^1\right]\pi_x = 1$, donc, $\mathbb{E}_\pi[\tau] = |E|$. Ainsi si E n'est pas fini, τ n'est pas intégrable. Cela n'est néanmoins pas en contradiction avec l'hypothèse de récurrence positive pour la chaîne car cette hypothèse ne concerne que les temps de retour en des points x fixés et non aléatoires.

Exercice 25.

(1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P sur un ensemble E. On dit qu'une loi de probabilité π sur E est réversible pour la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\forall (i,j) \in E, \quad \pi_i P(i,j) = \pi_j P(j,i).$$

On suppose dans la suite de la question que la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une mesure de probabilité réversible π.

(a) Montrer que pour tout $(i_0, \dots, i_n) \in E^{n+1}$,

$$\mathbb{P}_\pi(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \mathbb{P}_\pi(X_0 = i_n, \dots, X_n = i_0).$$

Soit $(i_0, \dots, i_n) \in E^{n+1}$.

$$\mathbb{P}_\pi(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \pi_{i_0} P(i_0, i_1) P(i_1, i_2) \cdots P(i_{n-1}, i_n)$$

En utilisant récursivement la propriété de réversibilité, on obtient bien

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\pi(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) &= P(i_1, i_0)\pi_{i_1} P(i_1, i_2) \cdots P(i_{n-1}, i_n) \\
&= P(i_1, i_0) P(i_2, i_1) \cdots P(i_n, i_{n-1})\pi_{i_n} \\
&= \mathbb{P}_\pi(X_0 = i_n, \dots, X_n = i_0).
\end{aligned}$$

(b) Montrer que π est une mesure de probabilité invariante pour la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après la propriété de réversibilité,

$$\forall j \in E, \ \sum_{i \in E} \pi_i P(i,j) = \sum_{i \in E} \pi_j P(j,i) = \pi_j \sum_{i \in E} P(j,i) = \pi_j.$$

Il est ainsi bien souvent utile de commencer par chercher des probabilités réversibles avant de chercehr une probabilité invariante sous sa forme générale car l'équation est plus simple à résoudre.

Conseil : recommencer les exercices 20, 21 et 22 en cherchant des mesures de probabilité réversibles !

(2) On considère un ensemble fini E et une application c de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ symétrique. Si $c(x,y) > 0$, on dit que x et y sont voisins et on note $x \sim y$. On pose $c(x) = \sum_{y \sim x} c(x,y)$ et $C = \sum_{x \in E} c(x)$, on suppose que $c(x) > 0$ pour tout $x \in E$. On considère alors la matrice $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ définie par pour tout $x, y \in E$, $p(x,y) = c(x,y)/c(x)$.

(a) Montrer que P est une matrice de transition.

Pour tout $(x,y) \in E$, $p(x,y) > 0$. De plus, pour tout $x \in E$,

$$\sum_{y \in E} p(x,y) = \frac{1}{c(x)} \sum_{y \in E} c(x,y) = \frac{c(x)}{c(x)} = 1.$$

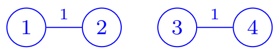
La matrice P est donc bien une matrice de transition.

(b) Montrer que P admet une probabilité réversible π. Cette probabilité est-elle nécessairement unique ?

On cherche une probabilité π telle que pour tout $(x,y) \in E$,

$$\pi_x p(x,y) = \pi_y p(y,x) \Leftrightarrow \pi_x \frac{c(x,y)}{c(x)} = \pi_y \frac{c(y,x)}{c(y)}.$$

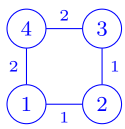
L'application c étant symétrique, $c(x,y) = c(y,x)$ et il suffit donc de prendre pour tout $x \in E$, $\pi_x = \frac{c(x)}{C}$ pour obtenir une probabilité réversible. Néanmoins, la probabilité réversible n'est pas unique si le graphe engendré par l'application c n'est pas connexe : prendre par exemple $E = \{1,2,3,4\}$ et c définie par le graphe suivant :



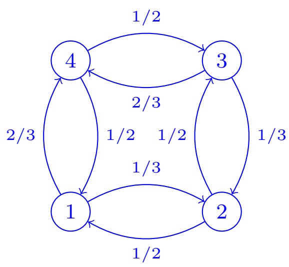
Alors $\pi = (0.5, 0.5, 0, 0)$ et $\tilde{\pi} = (0, 0, 0.5, 0.5)$ sont des probabiltiés réversibles.

(c) On prend le cas particulier : $E = \{1,2,3,4\}$ et les seules valeurs non nulles de c sont $c(1,2) = c(2,3) = 1$ et $c(3,4) = c(4,1) = 2$. Donner les probabilités réversibles dans ce cas.

Le graphe associé est :



Cela conduit au graphe probabiliste :



Et l'unique mesure de probabilité réversible (et donc invariante) est

$$\pi = \frac{1}{12}(3,2,3,4) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right).$$