Soutien : Différences finies pour l'équation de Poisson avec coefficient de diffusion variable.

Exercice 1. On se donne :

- $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$,

- $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ strictement positive, telle qu'il existe $c > 0$, tel que $\forall x \in [0,1]$, $\alpha(x) > c$.

On s'intéresse au problème aux limites suivant sur l'intervalle $[0,1]$:

Trouver $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, telle que

$$\begin{cases} -(\alpha u')' = g \text{ sur }]0,1[, \\ u(0) = 0,\, u(1) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une solution à ce problème dont on donnera l'expression en fonction de g et α.

2. Y a-t-il unicité d'une solution à ce problème ?

On va résoudre numériquement ce problème en utilisant une méthode de différences finies. On commence par discrétiser l'intervalle $[0,1]$ par $J+2$ points d'une subdivision uniforme $(x_j)_{j\in\{0,\cdots,J+1\}}$, $x_0 = 0$ et $x_{J+1} = 1$. On note $h > 0$ son pas. Pour $i \in \{1,...,J+1\}$, on note également $x_{i-1/2} := \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$.
Enfin, on notera $(u_i)_{i\in\{0,...,J+1\}}$, l'approximation recherchée de u au point x_i et pour $i \in \{0,...,J\}$, $\alpha_{i+1/2} := \alpha(x_{i+1/2})$ et pour $i \in \{0,...,J+1\}$, $\alpha_i := \alpha(x_i)$.
On considère le schéma de discrétisation suivant :

$\mathcal{P}_h$

Trouver $(u_i)_{i\in\{0,...,J+1\}}$ solution de

- $-\dfrac{\alpha_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1} - (\alpha_{i+\frac{1}{2}} + \alpha_{i-\frac{1}{2}}) u_i + \alpha_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1}}{h^2} = g(x_i)$, pour tout $i \in \{1,\cdots,J\}$,

- $u_0 = 0$, $u_{J+1} = 0$.

3. En vous basant sur l'approximation usuelle de $-u''$ vue en cours, pouvez-vous comprendre pourquoi on propose un tel schéma ?

4. On note $\hat{U}_h = (u_i)_{i\in\{1,...,J\}}$. Mettre ce schéma sous la forme d'un système linéaire $A_h \hat{U}_h = B_h$ (on précisera naturellement A_h et B_h).

5. Montrer que pour tout $V=(v_1,...,v_J)\in\mathbb{R}^J$,

$$^tVA_hV=\sum_{i=1}^{J+1}\alpha_{i-1/2}\left|\frac{v_i-v_{i-1}}{h}\right|^2,$$

avec la convention $v_0=v_{J+1}=0$.

Qu'en déduire sur A_h et sur le problème $\mathcal{P}_h$?

6. Montrer que $\forall V\in\mathbb{R}^J$, $A_hV\geq 0\Rightarrow V\geq 0$.

7. Donner la définition de consistance pour ce schéma. On notera R_h, le vecteur d'erreur de consistance associé. Rappeler la preuve de la consistance du schéma dans le cas où α est une fonction constante.

8. Dans le cas où α est une fonction constante, rappeler les étapes clés de la preuve de la convergence du schéma en norme ∞.

9. *Pour aller plus loin.* On se propose d'étudier la consistance de ce schéma numérique et de préciser son ordre de consistance.

(a) Montrer que si $v\in\mathcal{C}^4([0,1],\mathbb{R})$, pour tout $i\in\{0,...,J\}$, il existe $(\xi_i,\zeta_i)\in[0,1]^2$ tel que

$$\frac{v(x_{i+1})-v(x_i)}{h}=v'(x_{i+1/2})+\frac{h^2}{2^23!}v^{(3)}(x_{i+1/2})+\frac{h^3}{2^44!}\left[v^{(4)}(\xi_i)-v^{(4)}(\zeta_i)\right].$$

(b) Montrer que si $v\in\mathcal{C}^3([0,1],\mathbb{R})$, pour tout $i\in\{1,...,J\}$, il existe $(\tilde{\xi}_i,\tilde{\zeta}_i)\in[0,1]^2$ tel que

$$\frac{v(x_{i+1/2})-v(x_{i-1/2})}{h}=v'(x_i)+\frac{h^2}{2^33!}\left[v^{(3)}(\tilde{\xi}_i)-v^{(3)}(\tilde{\zeta}_i)\right].$$

(c) En déduire que si $w\in\mathcal{C}^6([0,1],\mathbb{R})$, il existe $C>0$ tel que pour tout $i\in\{1,...,J\}$

$$\left|\frac{\alpha(x_{i+1/2})w'(x_{i+1/2})-\alpha(x_{i-1/2})w'(x_{i-1/2})}{h}-(\alpha w')'(x_i)\right|\leq Ch^2,$$

et qu'il existe $\tilde{C}>0$ tel que pour tout $i\in\{1,...,J\}$

$$\left|\frac{\alpha(x_{i+1/2})w^{(3)}(x_{i+1/2})-\alpha(x_{i-1/2})w^{(3)}(x_{i-1/2})}{h}-(\alpha w^{(3)})'(x_i)\right|\leq\tilde{C}h^2,$$

(d) En déduire que le schéma est consistant en norme ∞, à l'ordre 2.