Très bien !

NOM : **PRÉNOM :**

Interrogation no. 1

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants entre eux. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barème. ***Attention : une réponse non justifiée n'a pas de valeur ! Justifiez vos réponses.***

Exercice 1 *Correction de copie*

Un étudiant de M1, assidu au cours d'optimisation et éléments finis (...) a énoncé et rédigé la preuve du théorème de convergence de l'algorithme de gradient à pas variable. La copie est donnée à la page suivante. Corrigez, commentez et complétez la démonstration partout là où cela est nécessaire. Vous pouvez utiliser la numérotation des lignes pour préciser les endroits concernés. Vous pouvez aussi corriger directement sur la copie.

Exercice 2 *Position d'un fil élastique suspendu.*

On travaille dans le plan $\mathbb{R}^2$. Deux points fixés P et Q du plan sont connectés par une chaîne constituée de n ($n \in \mathbb{N}^*$) masses reliées par un fil élastique. Chaque masse a une masse m, et la constante d'élasticité du fil est $K > 0$. L'énergie potentielle de la chaîne comporte des termes d'élasticité et des termes de gravité. Au total, pour une chaîne avec n masses placées aux points A_i de coordonnées (x_i, y_i), $i = 1, .., n$, l'énergie potentielle est donnée par l'expression

$$\frac{K}{2}\sum_{i=0}^{n}\|A_{i+1} - A_i\|^2 + mg\sum_{i=1}^{n} y_i, \tag{1}$$

avec la convention $A_0 = P$ et $A_{n+1} = Q$ et où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle. On suppose que la chaîne ne rencontre aucun obstacle. On peut représenter tout cela par le dessin de la Figure 1. On cherche à déterminer **la position d'équilibre de la chaîne (au sens position de chaque points A_i pour $i \in \{1, .., n\}$) qui minimise l'énergie potentielle**.

Dans toute la suite, on considère le cas particulier où $n = 2$ et les points $P = (0, 1)$ et $Q = (1, 0)$. On notera donc $A_0 = P$, $A_3 = Q$ et A_1 et A_2 représentent les emplacements des deux masses dont on cherche la position.

1. En notant (x_i, y_i) les coordonnées de A_i pour $i \in \{1, 2\}$ exprimer l'énergie potentielle (1) comme une fonction qui dépend des variables $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$, $\mathcal{E} : (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mapsto \mathcal{E}(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}$ et montrer que $\forall u \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{E}(u) = \frac{K}{2}\langle Au, u\rangle + \langle b, u\rangle + K, \tag{2}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -K \\ mg - K \\ mg \end{pmatrix}. \tag{4}$$

En déduire que $\mathcal{E}$ est une fonctionnelle quadratique.

2. Écrire le problème d'optimisation considéré, préciser la/les variable/s d'optimisation et la fonction coût et donner les caractéristiques usuelles du problème d'optimisation.

3. Montrer que $\mathcal{E}$ est α-convexe et déterminer $\alpha > 0$. *Indication : on pourra par exemple montrer que pour tout* $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}^4$, $\langle Aw, w\rangle = \|w\|^2 + (w_1 - w_2)^2 + (w_3 - w_4)^2$.

4. Montrer que le problème de minimisation admet un unique point de minimum.

5. Résoudre ce problème d'optimisation. Représenter ensuite sur un dessin la configuration de l'élastique au point de minimum en prenant $m = g = K = 1$.

6. Vérifiez si l'algorithme de gradient à pas optimal converge pour cette fonctionnelle.

EXERCICE n°2

1) D'après l'énoncé, $A_0 = P = (0,1)$; $A_3 = Q = (1,0)$ et (x_i, y_i) représentent les coordonnées de A_i $\forall i \in \{1,2\}$.

Ainsi, $\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$ avec $n = 2$, on a :

$$\mathcal{E}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{K}{2} \sum_{i=0}^{2} \| A_{i+1} - A_i \|^2 + mg \sum_{i=1}^{2} y_i$$

$$= \frac{K}{2} \left[\| A_1 - A_0 \|^2 + \| A_2 - A_1 \|^2 + \| A_3 - A_2 \|^2 \right] + mgy_1 + mgy_2$$

$$= \frac{K}{2} \left[\| (x_1, y_1) - (0,1) \|^2 + \| (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \|^2 + \| (1,0) - (x_2, y_2) \|^2 \right]$$
$$+ mgy_1 + mgy_2$$

$$= \frac{K}{2} \left[\| (x_1 ; y_1 - 1) \|^2 + \| (x_2 - x_1 ; y_2 - y_1) \|^2 + \| (1 - x_2 ; -y_2) \|^2 \right]$$
$$+ mgy_1 + mgy_2$$

$$= \frac{K}{2} \left[x_1^2 + (y_1 - 1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (1 - x_2)^2 + y_2^2 \right]$$
$$+ mgy_1 + mgy_2$$

$$= \frac{K}{2} \left[x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + x_1^2 - 2y_1 + 1 - 2x_1x_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + x_2^2 + 1 - 2x_2 \right.$$
$$\left. + y_2^2 \right] + mgy_1 + mgy_2$$

$$= \frac{K}{2} \left[2x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 \right]$$
$$+ \frac{K}{2} \left[2 - 2y_1 - 2x_2 \right] + mgy_1 + mgy_2$$

$$= \frac{K}{2} \left[2x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 \right]$$
$$+ K(-y_1 - x_2) + mgy_1 + mgy_2 + K$$

Donc, pour $n=2$ et $(x_1;x_2;y_1;y_2) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\mathcal{E}(x_1,x_2,y_1,y_2) = \frac{K}{2}\langle Au,u\rangle + \langle b,u\rangle + K \quad \text{avec}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -K \\ mg-K \\ mg \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}$ est-elle une fonctionnelle quadratique ?

Par définition, $\mathcal{E}$ est une fonctionnelle quadratique si et seulement si, $\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\langle Au;u\rangle + \langle b,u\rangle + c$ où $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$; $u \in \mathbb{R}^4$; $b \in \mathbb{R}^4$; $c \in \mathbb{R}$.

Or d'après ce qui précède,

$$\mathcal{E}(x_1,x_2,y_1,y_2) = \frac{K}{2}\langle Au,u\rangle + \langle b,u\rangle + K \quad \text{avec}$$

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -K \\ mg-K \\ mg \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\langle Bu,u\rangle + \langle b;u\rangle + K$ avec

$$B = KA, \quad u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -K \\ mg-K \\ mg \end{pmatrix} \text{ et } K \in \mathbb{R}_+^*.$$

On en déduit alors que $\mathcal{E}$ est une fonctionnelle quadratique.

2) D'après l'énoncé, les variables d'optimisations sont x_1, x_2, y_1 et y_2 telles que $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$.

Donc, l'espace vectoriel dans lequel vivent ces variables est $V = \mathbb{R}^4$.

Par suite, la fonction coût $\mathcal{E}$ est donnée par :

$$\mathcal{E} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \longmapsto \frac{1}{2}\langle KAu, u\rangle + \langle b, u\rangle + K \ ; \ K > 0$$

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -K \\ mg - K \\ mg \end{pmatrix}.$$

Le problème d'optimisation s'écrit donc ;

Trouver $u^* \in \mathbb{R}^4$ telle que $\mathcal{E}(u^*) = \min_{u \in \mathbb{R}^4} \mathcal{E}(u)$. ✓

3) <u>Montrons que $\mathcal{E}$ est α-convexe ; $\alpha > 0$.</u>

Soit $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

~~On a : $\langle Aw$~~

La fonction $\mathcal{E}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^4$ alors son gradient et sa matrice hessienne existent et on a : $\nabla \mathcal{E}(w) = KAw + b$ et $Hess(\mathcal{E})(w) = KA$

avec ; $K > 0$; $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -K \\ mg - K \\ mg \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathcal{E}$ est α-convexe ; $\alpha > 0$ si $\langle Aw, w\rangle \geq \alpha \|w\|^2$ puisque ~~le~~ $Hess(\mathcal{E})(w) = KA$ et que $K > 0$.

Donc $\forall w \in \mathbb{R}^4$: on a :

$\langle Aw ; w\rangle = {}^t w A w$; car A est symétrique.

$$= (w_1, w_2, w_3, w_4)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

$$= (2w_1 - w_2 ; -w_1 + 2w_2 ; 2w_3 - w_4 ; -w_3 + 2w_4)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

$$= w_1[2w_1 - w_2] + w_2[-w_1 + 2w_2] + w_3[2w_3 - w_4] + w_4[-w_3 + 2w_4]$$

$$= 2w_1^2 - w_2 w_1 + 2w_2^2 - w_2 w_1 + 2w_3^2 - w_4 w_3 + 2w_4^2 - w_3 w_4$$

$$= 2w_1^2 - 2w_2 w_1 + 2w_2^2 + 2w_3^2 - 2w_4 w_3 + 2w_4^2$$

$$= (w_1 - w_2)^2 + (w_3 - w_4)^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$$

$$= (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2) + (w_1 - w_2)^2 + (w_3 - w_4)^2$$

$\langle Aw, w\rangle = \|w\|^2 + (w_1 - w_2)^2 + (w_3 - w_4)^2$ avec $\|w\|^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$.

D'où $\forall w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$;

$\langle Aw ; w\rangle = \|w\|^2 + (w_1 - w_2)^2 + (w_3 - w_4)^2 \geq \|w\|^2$.

En posant $\alpha_0 = 1 > 0$; on a : $\forall w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$;

$\langle Aw ; w\rangle \geq \alpha_0 \|w\|^2$.

On en déduit que $k\langle Aw ; w\rangle = \langle kAw ; w\rangle$

$= \langle H_{ess}(\mathcal{E})(w) w ; w\rangle \geq k\|w\|^2$ car $k > 0$.

Donc, $\forall w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $\langle H_{ess}(\mathcal{E})(w) w, w\rangle \geq \alpha \|w\|^2$; avec $\alpha = k > 0$

Par conséquent ; $\mathcal{E}$ est α-convexe où $\alpha = k > 0$.

4) Montrons que le problème de minimisation admet un ~~point~~ unique point de minimum

~~D'ap~~ D'abord, l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^4$ est un fermé non vide.

De plus, $\mathcal{E}$ est continue sur $\mathbb{R}^4$ et α-convexe avec $\alpha = K > 0$ sur $\mathbb{R}^4$, alors $\mathcal{E}$ est infinie à l'infinie sur $\mathbb{R}^4$.

On peut donc appliquer le théorème d'existence sur un fermé non vide pour en conclure qu'il existe au moins un point de minimum de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^4$.

Aussi, comme $\mathcal{E}$ est α-convexe sur $\mathbb{R}^4$ avec $\alpha = K > 0$; alors, $\mathcal{E}$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}^4$ (qui est convexe).

Donc, par le résultat du cours, il existe au plus un point de minimum sur $\mathbb{R}^d$.

On conclut alors que qu'il existe un unique point de minimum au problème de minimisation énoncé plus haut.

5) Résolvons le problème

En notant $u^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ le point de minimum de $\mathcal{E}$; on a en particulier $\nabla \mathcal{E}(u^*) = 0_{\mathbb{R}^4}$

* Résolvons cette équation.

On a : $\nabla E(u^*) = 0_{\mathbb{R}^4}$

$$\Leftrightarrow kAu^* + b = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\Leftrightarrow k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ mg-k \\ mg \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\Leftrightarrow k\begin{pmatrix} 2x_1^* - x_2^* \\ -x_1^* + 2x_2^* \\ 2y_1^* - y_2^* \\ -y_1^* + 2y_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ mg-k \\ mg \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} 2kx_1^* - kx_2^* = 0 \\ -kx_1^* + 2kx_2^* - k = 0 \\ 2ky_1^* - ky_2^* + mg - k = 0 \\ -ky_1^* + 2ky_2^* + mg = 0 \end{cases}$$

Comme $k>0$; on a :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1^* - x_2^* = 0 \\ -x_1^* + 2x_2^* - 1 = 0 \\ 2y_1^* - y_2^* + \frac{mg-k}{k} = 0 \\ -y_1^* + 2y_2^* + \frac{mg}{k} = 0 \end{cases}$$

la question se posait dans le cas $m=g=k=1$

$=0.$

$=1.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = 1/3 \\ x_2^* = 2x_1^* \\ y_1^* = -\frac{1}{3k}(3mg-2k) \\ y_2^* = 2y_1^* + \frac{mg-k}{k} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = 1/3 \\ x_2^* = 2/3 \\ y_1^* = -\frac{1}{3k}(3mg-2k) \\ y_2^* = \frac{1}{3k}(-3mg+k) \end{cases}$$ avec $k>0$

On en déduit que : $u^* = \left(1/3 ; 2/3 ; -\frac{1}{3k}(3mg-2k) ; \frac{1}{3k}(-3mg+k\right)^t$