

chap. 3: Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

- Biblio:
- Demailly "Analyse numérique et EDO"
 - Crouzeix-Mignot "Analyse num. des EDO"
 - Hairer-Wanner "Introduction à l'analyse numérique"
 - Schatzman

I] Motivations:

→ Dynamique des populations: Soit $P(t)$ le nombre d'individus vivants en un instant $t > 0$ donné

• Modèle malthusien:
 $\text{EDO liné} \rightarrow \begin{cases} P'(t) = \alpha P(t), \\ P(t_0) = P_0 \text{ donné}, P_0 > 0 \end{cases}$

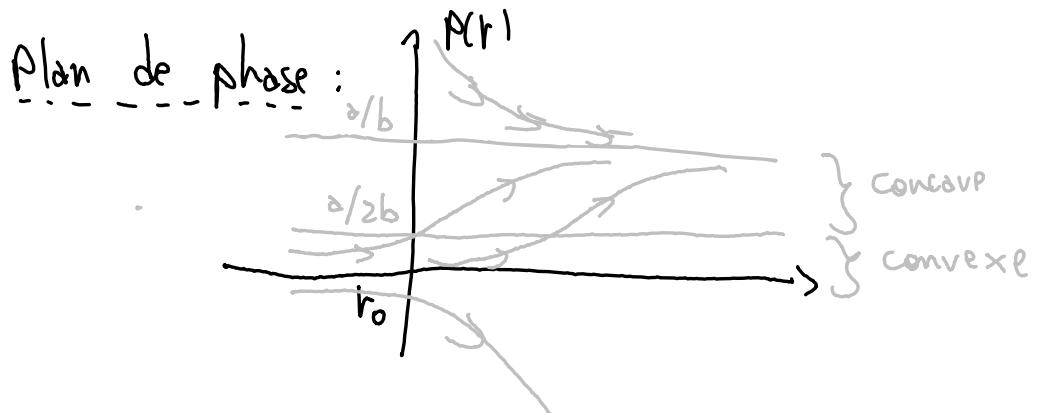
où $\alpha = \alpha - \beta$, α taux de natalité
 β — mortalité

Alors $P(t) = P_0 e^{(t-t_0)\alpha}$

• Croissance logistique (loi de Verhulst)

$$\begin{cases} P'(t) = \alpha P(t) - b P(t)^2 \\ P(t_0) = P_0 > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow \alpha \\ \nwarrow b \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{terme de compétition} \\ \text{intra-espèce (consommation de ressource)} \end{matrix}$$

Alors $P(t) = \frac{a P_0 e^{a(t-t_0)}}{a - b P_0 + b P_0 e^{a(t-t_0)}}$ (par séparation de variables)



* Modèle proie-predateur de Lotka-Volterra

Deux populations en interaction : \rightarrow proies $x(t)$
 \rightarrow prédateurs $y(t)$

- * Variations de x : - nb naissances proportionnel à x , avec taux $a > 0 \Rightarrow a x(t)$
- nb morts proportionnel à x , avec taux proportionnel à $y(t) = s b x y$
- * Variations de y : - nb décès proportionnel à y , avec taux $c > 0$
- nb naissances proportionnel à y , avec taux proportionnel à $x \Rightarrow d x y$

\Rightarrow le modèle est donné par

$$(*) \begin{cases} \dot{x}(t) = a x(t) - b y(t) \\ \dot{y}(t) = -c y(t) + d x(t) \end{cases}, \quad x(t_0) = x_0 > 0 \text{ damp} \\ y(t_0) = y_0 > 0$$

Si l'on pose $u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(a-by) \\ y(-c+dx) \end{pmatrix}$

le pb de Cauchy $(*) \Leftrightarrow u'(t) = F(u(t))$

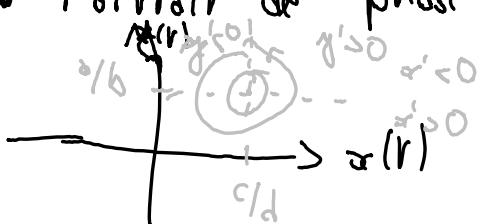
unique $u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^2_+$ donné

- Admet une ^u solution locale, par le thm de Cauchy-Lipschitz (car $F \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$), car on peut montrer grâce à une intégrale première (hamiltonien) qu'elle est bornée en tout temps:

$$H(x, y) := dx - c \ln(x) + b y - a \ln(y)$$

verifie $\frac{d}{dt} H(x, y) = 0$ (\Rightarrow faire un exo)

- Portrait de phase (via analyse qualitative et linéarisation)



$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = C$$

Mais! On ne sait pas donner une solution explicite!

• Modèle SIR en épidémiologie:

$S(t)$	individus soins,
$I(t)$	infectés par une maladie,
$R(t)$	résistants à la maladie, car guéris

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = -\beta \frac{SI}{S+I+R} \rightarrow S, \quad S(t_0) = S_0 > 0 \\ I'(t) = \beta \frac{SI}{S+I+R} - (\nu + \delta)I, \quad I(t_0) = E_0 \geq 0 \\ R'(t) = \delta I + \nu(S), \quad R(t_0) = R_0 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = -\beta \frac{SI}{S+I+R} \rightarrow S, \quad S(t_0) = S_0 > 0 \\ I'(t) = \beta \frac{SI}{S+I+R} - (\nu + \delta)I, \quad I(t_0) = E_0 \geq 0 \\ R'(t) = \delta I + \nu(S), \quad R(t_0) = R_0 \geq 0 \end{array} \right.$$

• β : taux d'infection lors d'un contact avec un malade ($\frac{I}{S+I+R}$ = proportion de malades);

• ν : taux de vaccination;

• δ : taux de mortalité;

• ν : taux de soin,

→ Oscillations en dynamique des structures :

- $m\ddot{x} = \sum F$
- * Pendule sans/avec friction
 - * Systèmes masses-ressorts
 - * Pont de Tacoma aux USA (construit et détruit en 1940).

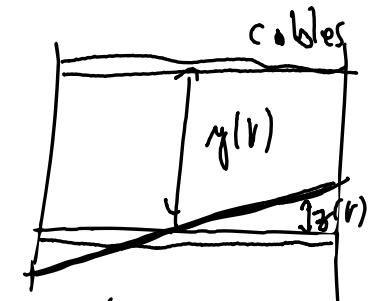


• Coupe transversale du pont:

la loi de la mécanique de

Newton permet d'écrire un

système différentiel pour y et z , sous la forme $\dot{u}(r) = f(r, u(r))$, $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, $u(r) = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \end{pmatrix}$



$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\text{tg } f(r, u) = \begin{cases} u_2 \\ \frac{3k}{m\ell} \cos(u_1) \left[(u_3 - \ell \sin(u_1))_+ - (u_3 + \ell \sin(u_1))_- + \lambda \sin(u_1) - \delta u_2 \right] \\ u_4 \\ -\frac{k}{m} \left[(u_3 - \ell \sin(u_1))_+ - (u_3 + \ell \sin(u_1))_- + g - \delta u_4 \right] \end{cases}$$

Cette EDO ne peut être résolue explicitement, mais des simulations numériques montrent que les variations de l'angle $z(r)$ ne s'amortissent pas.

\Rightarrow effondrement de pont (même si le déplacement vertical $y(t)$ est amoindri).

II] Rappels et compléments II.1) Pb de Cauchy

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^m , $m \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de \mathbb{R} , $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue.

Déf: On dit que y est solution du pb de Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

sur $J > [t_0, t_0 + T]$ si $y \in C^1(J)$ avec

SCI, $y(t_0) = y_0$ et $\forall t \in J, y'(t) = f(t, y(t))$

Thm 1 (Cauchy-Lipschitz): Soient $I \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts, $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ localement lipschitzienne en sa seconde variable: tout $(t, y) \in I \times U$ à un voisinage $J \times V$ tq $\exists k \in \mathbb{R}$ et

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k \|y - z\|, \quad \forall t \in J, y, z \in V$$

Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, il existe un intervalle unique $J = [t_0, t_0 + T]$ de taille maximale

et une solution unique $y: J \rightarrow U$ de (1).

Déf : • $y: J \rightarrow \mathbb{R}^m$ est solution maximale de (1) si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y}: \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $\tilde{J} \supsetneq J$.

• y est solution globale si elle est définie sur I tout entier

Rem : globale \Rightarrow maximale

Thm 2 (régularité des solutions): Si $f: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est de classe C^k , alors toute solution y de (1) est de classe C^{k+1}

Rem : Équivalence du pb de Cauchy avec la résolution d'une équation intégrale:

Une fonction $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de (1) si $\begin{cases} y \text{ est continue, et } \forall t \in I, y(t) \in U \\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \forall t \in I. \end{cases}$

En effet, si y vérifie (i) et (ii), alors y est différentiable et on a $y'(t_0) = y_0$ et $y'(t) = f(t, y)$. Inversement, (1) \Rightarrow (i) + (ii) par intégration.

Rem: Pour démontrer le thm (1), on considère

$$\mathcal{Z}_r: C^0([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^m) \rightarrow C^0([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^m)$$

$$y \mapsto \mathcal{Z}_r(y) = y_0 + \int_{t_0}^r f(s, y(s)) ds$$

On montre que cette application admet un unique point fixe y , i.e., $\mathcal{Z}_r(y) = y$ via un théorème d'itérations (point fixe de Picard).

Ex: (a) $\begin{cases} y'(t) = t y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$. On a $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(t, y) \mapsto t y^2$.

Par séparation des variables: $\frac{dy}{y^2} = t \Rightarrow \int \frac{y'(s)}{y^2} ds =$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{t^2}{2} - 1 \Rightarrow y(t) = \frac{-2}{t^2 - 2}, \text{ et}$$

la solution n'est pas définie si $t \rightarrow \sqrt{2}$
 \Rightarrow existence locale, pas globale !

En effet, f est localement lipschitzienne (car C^1)
 mais pas globalement:

$$\begin{aligned}|f(t, \bar{y}) - f(t, y)| &= |t| |\bar{y}^2 - y^2| \\&= |t| |y - \bar{y}| |y + \bar{y}|\end{aligned}$$

donc si $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $y, \bar{y} \in [y_0 - R, y_0 + R]$
 et la constante de lipschitz est

$$K = 2|t_0 + T| |y_0 + R|$$

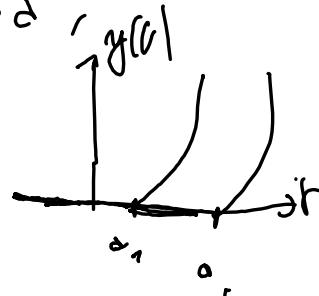
(dit autrement, f est C^1 , on a l'inéq. par le TAF mais f' pas bornée sur \mathbb{R}).

$$(b) \quad f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{n'est pas localement lipschitzienne en } y \\ (t, y) \mapsto 2\sqrt{|y|} \quad \text{car pour } y, \bar{y} > 0, \frac{2(\sqrt{|y|} - \sqrt{|\bar{y}|})}{|y - \bar{y}|} \xrightarrow{y, \bar{y} \rightarrow 0} \infty$$

En fait, on n'a même pas existence locale,
 et $\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet une infinité de solutions sur \mathbb{R}_+ .

$$\text{Si } \delta > 0, \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \delta], \\ (t-\delta)^2 & \text{si } t > \delta, \end{cases}$$

est solution de (2), $t_0 > 0$



(c) Problème numériquement mal posé: Soit $\varepsilon > 0$

$$(3) \begin{cases} g'(t) = 3g(t) - 1, & t \in [0, 30], \\ g(0) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \tilde{g}'(t) = 3\tilde{g}(t) - 1, & t \in [0, 30], \\ \tilde{g}(0) = \frac{1}{3} + \varepsilon. \end{cases}$$

$$\text{Solutions? Posons } \tilde{g} := g - \frac{1}{3} \Rightarrow \tilde{g}' = 3\tilde{g} \Rightarrow \tilde{g}(t) = Ce^{3t} \Rightarrow g(t) = Ce^{3t} + \frac{1}{3}$$

$$\text{donc :} \begin{aligned} \bullet \quad g(0) &= \frac{1}{3} \Rightarrow C = 0 \text{ et } g(t) = \frac{1}{3} \text{ est sol de (3)} \\ \bullet \quad \tilde{g}(0) &= \frac{1}{3} + \varepsilon \Rightarrow C = \varepsilon \text{ et } \tilde{g}(t) = \varepsilon e^{3t} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \varepsilon e^{3t} \end{aligned}$$

Si l'on prend $\varepsilon = 10^{-17}$ (précision machine)
 on a $\hat{g}(30) = g(30) = \varepsilon e^{30} \approx 10^{22} \dots$

On exclura ce type de situation par la suite !

z.1] Lemme de Gronwall (1)

Considérons l'EDO $\begin{cases} u'(t) = a(t)u(t) + b(t), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R} \text{ donnée}, \end{cases}$

avec $a, b \in C^0([0, T], \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} * \underline{b=0} &\Rightarrow u'(t) = a(t)u(t) \\ &\Rightarrow u(t) = u_0 \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right) \end{aligned}$$

* $b \neq 0$ \Rightarrow Variation de la constante !

$$u(t) = c(t) \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right) \text{ et } b(t) = u'(t) - a(t)u(t) = c'(t) \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right)$$

$$\text{d'où } c'(t) = b(t) \exp\left(-\int_0^t a(s) ds\right)$$

$$\text{or donc } c(t) = c(0) + \int_0^t b(s) \exp\left(-\int_0^s a(\tau) d\tau\right) ds$$

avec $c(0) = 0$. Donc finalement,

$$u(t) = u_0 \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right) + \int_0^t b(s) \exp\left(t \int_s^t a(\tau) d\tau\right) ds$$

Et que peut-on dire d'une inégalité différentielle?

Lemme de Grönwall (forme différentielle):

Soit $u \in C^1([0, T], \mathbb{R})$ telle qu'il existe $a, b \in C^0([0, T])$

avec

$$(*) \quad u'(t) \leq a(t)u(t) + b(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$u(t) \leq u_0 \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right) + \int_0^t b(s) \exp\left(\int_s^t a(\tau) d\tau\right) ds$$

Preuve: On calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[u(t) \exp\left(-\int_0^t a(s) ds\right) \right] &= u'(t) \exp\left(-\int_0^t a(s) ds\right) \\ &\quad + u(t) (-a(t)) \exp\left(-\int_0^t a(s) ds\right) \\ (*) &= \left[u'(t) - a(t)u(t) \right] \exp\left(-\int_0^t a(s) ds\right) \\ &\leq b(t) \exp\left(-\int_0^t a(s) ds\right). \end{aligned}$$

On intègre maintenant cette inégalité entre 0 et t.

$$u(t) \exp\left(-\int_0^t a(s) ds\right) \leq u_0 + \int_0^t b(s) \exp\left(-\int_s^t a(\tau) d\tau\right) ds$$

ce qui donne le résultat après multiplication par
 $\exp\left(\int_0^t a(s) ds\right)$ \blacksquare

Réu: le vrai lemme de Gronwall est plus général,
car il suppose une inégalité intégrale, plutôt qu'
différentielle (la seconde implique la première, mais
pas l'inverse). Cela dit, la forme différentielle
est en général suffisante dans la plupart des
cas.

Comme de Gronwall (forme intégrale): Soit $u \in C^0([0, T], \mathbb{R})$
tel que il existe $a, b \in C^0([0, T], \mathbb{R}_+)$ avec
(**) $u(t) \leq b(t) + \int_0^t a(s) u(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$
Alors $u(t) \leq b(t) + \int_0^t b(s) a(s) \exp\left(\int_s^t a(\tau) d\tau\right) ds$
 $\forall t \in [0, T].$

Preuve: On utilise une astuce consistant à majorer l'intégrale du 2nd membre comme précédemment. Soit

$$v(r) := \int_0^r a(s) u(s) ds.$$

Alors $\underset{(xx)}{v'(r)} = a(r) u(r) \stackrel{(xx)}{\leq} a(r) [b(r) + v(r)]$ car $a, b \geq 0$.

Donc $v'(r) - a(r)v(r) \leq a(r)b(r)$, et en multipliant par $\exp(-\int_0^r a(z) dz)$

$$\frac{d}{dr} \left(v(r) \exp \left(- \int_0^r a(s) ds \right) \right) \leq a(r)b(r) \exp \left(- \int_0^r a(s) ds \right)$$

En intégrant entre 0 et r, et notant que $v(0)=0$,

$$v(r) \leq \int_0^r a(s)b(s) \exp \left(\int_s^r a(z) dz \right) ds.$$

On introduit cette majoration dans l'inégalité (xxx) pour conclure ■

Consequence: Stabilité des solutions de pb. de Cauchy par rapport aux perturbations:

Soient y solution de (1) $\begin{cases} y'(r) = f(r, y(r)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ et \tilde{y} lipschitz en y

et \tilde{g} solution de (2) avec $\eta(r) \in C^0([0, T], \mathbb{R}^m)$.

Question: Si η possède $(\eta(r) \xrightarrow{T \rightarrow T} 0)$ et $\|\tilde{g}_0 - \eta_0\| \leq \varepsilon$, alors $\|\tilde{g}(r) - \eta(r)\| \xrightarrow{T \rightarrow T} 0$?

Prop 4: Soient g sol. de (1), \tilde{g} sol. de (2). Alors,

$\forall t \in [0, T]$, on a

$$\|\tilde{g}(t) - g(t)\| \leq \|\tilde{g}_0 - \eta_0\| e^{kt} + \int_0^t e^{k(t-s)} \|\eta(s)\| ds$$

où k est la constante de Lipschitz de $\circ f$.

Preuve: $\|\tilde{g}' - \eta'\| = \|f(t, \tilde{g}) - f(t, \eta) + \eta'(t)\|$

$$\begin{aligned} &\leq \|f(t, \tilde{g}) - f(t, \eta)\| + \|\eta'(t)\| \\ &\leq k \|\eta(t) - \tilde{g}(t)\| + \|\eta'(t)\| \end{aligned}$$

Soit $u(t) = \|\eta(t) - \tilde{g}(t)\|$ et $\begin{cases} b(t) = \|\eta'(t)\|, \\ \alpha(t) = k. \end{cases}$

Alors $u'(t) \leq \alpha(t) u(t) + b(t)$ d'où

$$u(t) \leq u_0 e^{kt} + \int_0^t b(s) e^{k(t-s)} ds$$



Corollaire: Si $\gamma_{0,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma_0$ et $\eta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors
 $\gamma_n \rightarrow \gamma$ unif.

Lemme de Brönnwall (forme discrète): Soient

$(h_n)_n$, $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ trois suites de réels positifs t.q., $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n + (1+h_n) a_{n-1}$. Alors
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_0 e^{\sum_{k=1}^{h_1+\dots+h_n} b_k} e^{\sum_{k=h+1}^n h_k}$

Preuve: Par récurrence (Schatzmann):

$$a_1 \leq b_1 + (1+h_1) a_0 \Rightarrow a_1 \leq e^{h_1} a_0 + b_1 e^{h_1}$$

On suppose vrai le rés. vrai pour n , c'est à dire pour $n+1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\stackrel{\text{HR}}{\leq} b_{n+1} + (1+h_{n+1}) a_n \\ &\leq b_{n+1} + (1+h_{n+1}) \left[a_0 e^{\sum_{k=1}^n h_k} + \sum_{k=1}^n b_k e^{\sum_{l=k+1}^n h_l} \right] \end{aligned}$$

Or, $(1+h_{n+1}) \leq e^{h_{n+1}}$ donc

$$a_{n+1} \leq b_{n+1} + a_0 e^{\left(\sum_{k=1}^{n+1} h_k \right)} + \sum_{k=1}^n b_k e^{\left(\sum_{l=k+1}^{n+1} h_l \right)}$$

III] Méthodes numériques pour les EDO:

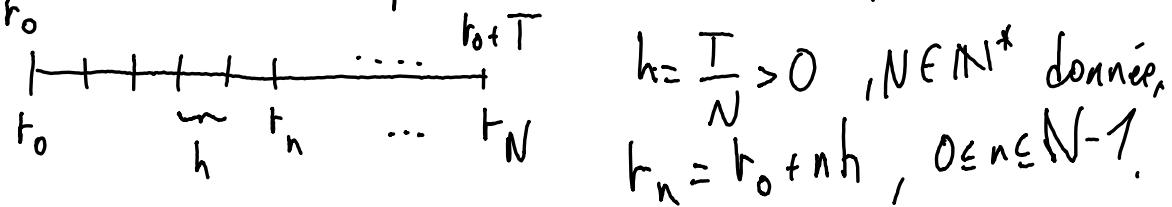
III.1] Méthode d'Euler Explique:

On veut construire une solution approchée de

$$(1) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & f: [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^m, & f \text{ lipschitzienne en } y. \end{cases}$$

sur l'intervalle $[t_0, t_0+T]$.

On commence par discrétiliser le temps:



On cherche y_n , une solution approchée de $y(t_n)$. On rappelle qu'une solution de (1) est la courbe intégrale $y(t) = y(t_n) + \int_{t_n}^t f(s, y(s)) ds$.

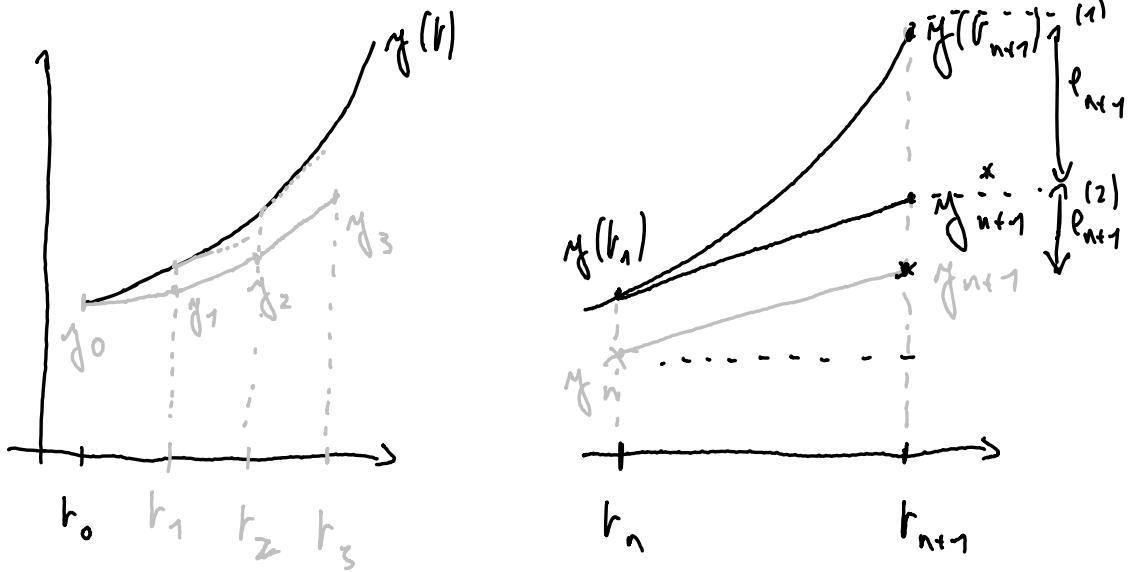
Si on l'assimile à sa tangente au point $(t_n, y(t_n))$ on a

$$y(t) = y(t_n) + (t - t_n) f(t_n, y(t_n)), \quad t \in [t_n, t_{n+1}]$$

On peut donc partir du point y_0 , pour obtenir récursivement

$$(E.E.) \quad y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

On appelle cette suite schéma d'Euler Explicite.



Objectif: Montrer que ce schéma est convergent, i.e.,
 $\|y(t_n) - y_n\| \leq C(h)$, $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$, avec $C(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$

Étape I: On définit l'erreur $e_{n+1} := y(t_{n+1}) - y_{n+1}$
 ↳ Stabilité et $y_{n+1}^* := y(t_n) - h f(t_n, y(t_n))$

Ainsi, on décompose

$$e_{n+1} = (y(t_{n+1}) - y_{n+1}^*) + (y_{n+1}^* - y_n) = e_{n+1}^{(1)} + e_{n+1}^{(2)}$$

• $e_{n+1}^{(1)}$: Erreur engendrée par une seule itération de la méthode (erreur de consistance);

• $e_{n+1}^{(2)}$: Erreur accumulée au temps précédent t_n :

$$\begin{aligned} e_{n+1}^{(2)} &= y_{n+1}^* - y_{n+1} = f(y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)) \\ &= e_n + h [f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)] \end{aligned}$$

Ainsi, $\|e_{n+1}\| \leq \|e_{n+1}^{(1)}\| + \|e_{n+1}^{(2)}\|$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{f Lipschitz}}{\leq} \|e_{n+1}^{(1)}\| + \|e_n\| + h \|f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)\| \\ &\leq \|e_{n+1}^{(1)}\| + \|e_n\| + kh \|y(t_n) - y_n\| \\ &= \|e_{n+1}^{(1)}\| + (1 + kh) \|e_n\| \end{aligned}$$

Nous allons appliquer le lemme de Grönwall discret, avec

$a_n := \|e_n\|$, $b_n := \|e_n^{(1)}\|$ et $h_0 = h_1 = \dots = h_n = kh$. On trouve alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|e_n\| \leq \|e_0\| e^{knh} + \sum_{h=1}^n \|e_h^{(1)}\| e^{k(n-h)h} < T$$

done
$$\boxed{\|e_n\| \leq e^{KT} \left[\|e_0\| + \sum_{h=1}^n \|e_h^{(1)}\| \right]} \leftarrow \text{Stabilité} \quad \textcircled{7}$$

Si l'on veut montrer la convergence du schéma, il faudra démontrer que $\underline{\epsilon_0 = 0}$ (ok car $\epsilon_0 = y_0 - y(0)$)

Etape 2 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\epsilon_k^{(1)}\| = 0$ Consistance
↳ Consistance : Soit $0 \leq k \leq N-1$ (2)

Par le TAF, $\exists \tau_k \in]t_k, t_{k+1}[$ tq

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = h y'(\tau_k) = h f(\tau_k, y(\tau_k))$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \epsilon_{k+1}^{(1)} &= y(t_{k+1}) - y_{k+1}^{(1)} \\ &= y(t_{k+1}) - \left[y(t_k) + h f(t_k, y(t_k)) \right] \\ &= h \left[f(\tau_k, y(\tau_k)) - f(t_k, y(t_k)) \right] \end{aligned}$$

La fonction f étant continue, la composition $t \mapsto f(t, y(t))$ est aussi continue sur $[t_0, t_0 + T]$ compact. Par le thm. de Heine, elle y est uniformément continue.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \forall N \geq N_0, \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad \left. \begin{array}{l} \{f(\tau_k, y(\tau_k)) - f(t_k, y(t_k))\} \subseteq \varepsilon \\ \text{uni.} \\ \text{cont.} \end{array} \right\}$$

En particulier, $\sum_{k=1}^N \|\epsilon_k^{(1)}\| \leq \sum_{k=1}^N h \varepsilon \leq \varepsilon T$, ce qui prouve la consistance.

Etape 3: On vient d'établir, grâce à un argument
 ↳ analyse quantitative: de compatibilité, la convergence
 de l'erreur vers 0. C'est un argument qualitatif.

On aimerait connaître le taux / de convergence (av. ^{vitesse} quantitatif):

Soit $f \in C^1(I \times U; \mathbb{R}^m)$, alors $y \in C^2(S, \mathbb{R}^m)$

avec $S \subseteq I$ et $y'(t) = f(t, y(t))$

$$\Rightarrow y''(t) = \frac{d}{dt} \left(f(t, y(t)) \right)$$

$$\begin{aligned} &= \overbrace{\frac{d}{dt}(t)}^{\text{not} \rightarrow f(t, y(t))} \cdot \partial_t f(t, y(t)) + \overbrace{\frac{d}{dt}(y(t))}^{\partial_y f(t, y(t))} \cdot \partial_y f(t, y(t)) \\ &= \partial_t f(t, y(t)) + f(t, y(t)) \partial_y f(t, y(t)) \end{aligned}$$

Or, la formule de Taylor nous donne

$$e_{n+1}^{(1)} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h f(t_n, y(t_n))$$

$$= \frac{1}{2} h^2 y''(t_n) + O(h^2)$$

$$= \frac{1}{2} h^2 f''(t_n, y(t_n)) + O(h^2).$$

En particulier, $e_{n+1}^{(1)} \leq Ch^2$, $\forall 0 \leq n \leq N-1$, pour une certaine constante $C \geq 0$. Ainsi,

$$\text{d'où } (3) \sum_{h=1}^n \|e_h^{(1)}\| \leq Ch \sum_{h=1}^n h \leq CT h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0. \text{ Ainsi,}$$

si $e_0 = 0$, $\|e_n\| \leq kh \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$, et on a le taux de CV.

Remarque: La relation (3) atteste de la stabilité de la méthode d'Euler explicite, i.e. on peut contrôler les erreurs numériques commises en approchant $y(t_n)$ par y_n . La stabilité est essentiellement issue du caractère Lipschitz de f .

A) La constante $C e^{kT}$ peut être très grande!

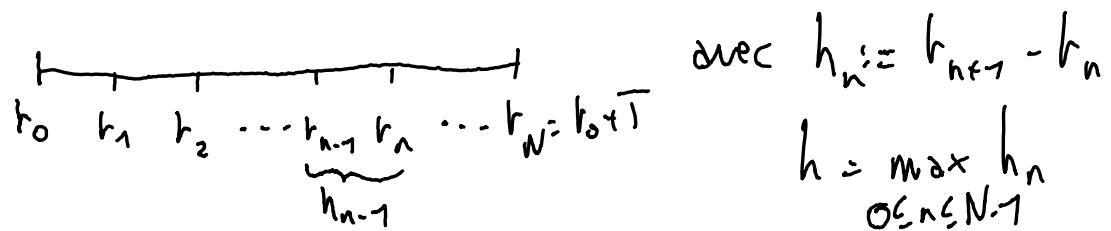
• La relation (2) atteste de la consistante (\sim cohérence) de la méthode d'E.E. i.e. la méthode numérique est cohérente avec le pb. de Cauchy (1).

• La relation (3) indique l'ordre de la méthode d'E.E., qui est d'ordre 1 si $f \in C^1$.

III.2] Méthodes à 1 pas: étude générale:

On reprend le pb de Cauchy (1) $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$

sur $[t_0, t_0 + T]$ subdivisé en N sous-intervalle



Déf: On appelle méthode à un pas pour calculer la valeur approchée $y(t_{n+1})$ de y_{n+1} à partir de t_n , h_n et y_n , valeur approchée de $y(t_n)$, toute suite $(y_n)_{n \geq 0}$ de la forme

$$(2) \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n), \quad n \geq 1 \\ y_0 = y_{0,h} \end{cases}$$

où $y_{0,h}$ est une approximation de la donnée y_0 , et Φ est une fonction continue de $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^m \times [0, h]$ dans \mathbb{R}^m , ne dépendant que de f .



Ex: (E.E.) est un schéma à un pas, avec

$$\bar{\Phi}(t, y, h) = f(t, y).$$

Dans ce cas, $\bar{\Phi}$ est indép. de h .

III.2.(a) Quelques méthodes classiques:

En intégrant $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_n et t_{n+1} ,
 $n \geq 0$, on a

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds.$$

En approchant l'intégrale par une quadrature élémentaire sur $[t_n, t_{n+1}]$, on obtient les schémas:

* rect. à gauche: $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds \approx (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y(t_n))$

↳ Euler Explicit: $y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)$

* rect. à droite: $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds \approx (t_{n+1} - t_n) f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$

↳ Euler Implicit: $y_{n+1} = y_n + f(t_{n+1}, y_{n+1})$

* trapèzes: $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds \approx \frac{t_{n+1} - t_n}{2} [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))]$

$$\hookrightarrow \text{Crank-Nicholson: } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right]$$

Rem: les méthodes de Euler Implicite et Crank-Nicholson sont des méthodes implicites: le calcul de la solution y_{n+1} nécessite la résolution d'un système linéaire (si f linéaire en y) ou nonlinéaire, via une méthode itérative (pt. fixe, Newton, ...). \rightsquigarrow Ex sur $y' = \alpha y$

Pour Euler Implicite, on pose

$$\bar{\Phi}(t, y, h) = f(t+h, \varphi(t, y, h)) \text{ avec } y_{n+1} = \varphi(t_n, y_n, h)$$

et on a alors $\bar{\Phi}(t_n, y_n, h_n) = f(t_{n+1}, y_{n+1})$.

Pour Crank-Nicholson, on pose

$$\bar{\Phi}(t, y, h) = \frac{1}{2} [f(t, y) + f(t+h, \varphi(t, y, h))]$$

pour $y_{n+1} = \varphi(t_n, y_n, h_n)$, et on a alors

$$\bar{\Phi}(t_n, y_n, h_n) = \frac{1}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]$$

Ce sont donc bien des schémas à un pas.

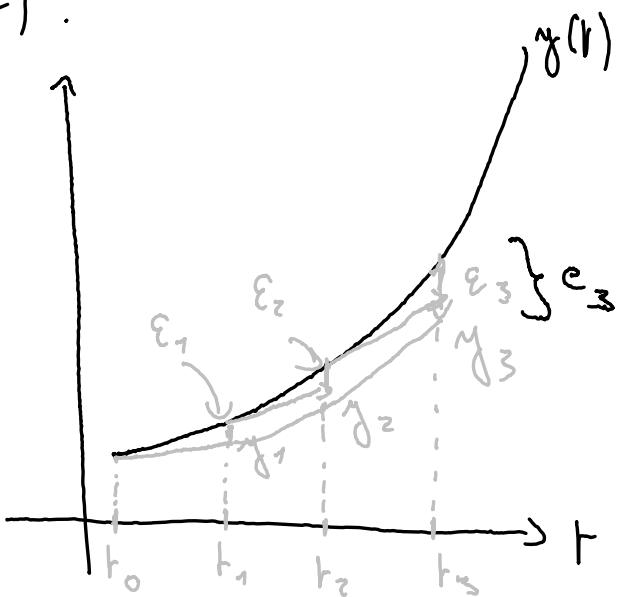
III.2.(b) Consistance, stabilité et convergence:

Déf: Une méthode à 1 pas de type (2) est consistante avec l'équa. diff. (1) si pour toute solution y de (1), on a

$$\sum_{n=0}^{N-1} \|y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n \Phi(t_n, y(t_n), h_n)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

La quantité $\epsilon_n := y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n \Phi(t_n, y(t_n), h_n)$ est appelée erreur de consistance à l'instant t_n .

Cette quantité représente l'erreur que l'on fait au n^eme pas de temps, en remplaçant (1) par (2).



Déf: On appelle erreur globale au temps t_N la quantité

$$\Theta_N = \max_{0 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| e_n$$

où e_n est l'erreur locale en t_n .

Déf: Nous dirons que la méthode (2) est

d'ordre p ($p > 0$) si pour toute solution y de (1) tq $y \in C^{p+1}([t_0, t_0 + Th])$, il existe $C \geq 0$ indépendant de y et $\exists h \text{ tq}$

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{N-1} \|\varepsilon_n\| \leq Ch^p.$$

Rem: (i) L'inéq. (3) est équivalente à demander que $\exists k \geq 0, h^* > 0$ tq $\|\varepsilon_n\| \leq kh^{p+1}$, $\forall h \leq h^*$.
 $0 \leq n \leq N-1$

(ii) Si $h_n = h$, l'étude peut se faire après un seul pas de calcul, et l'ordre est donné à partir de

$$\varepsilon_1 := y_1 - y(t_0 + h).$$

$$\begin{aligned} \text{Ex: E.E: } y(t_0 + h) &= y(t_0) + h y'(t_0) + O(h^2) \\ &= y(t_0) + h f(t_0, y(t_0)) + O(h^2) \\ &= y(t_0) + h \Phi(t_0, y(t_0), h) + O(h^2) \\ \Rightarrow \varepsilon_1 &= O(h^2) \Rightarrow \text{ordre 1.} \end{aligned}$$

Déf: La méthode (2) est stable s'il existe $h^* > 0$,

$M \geq 0$ indép. de h tq toutes suites $(y_n)_{n \geq 0}$,
 $(\bar{y}_n)_{n \geq 0}$ et $(\eta_n)_{n \geq 0}$ de la forme

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \varPhi(t_n, y_n, h_n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h_n \varPhi(t_n, \bar{y}_n, h_n) + \eta_n, & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

on dit $\forall 0 \leq h \leq h^*$,

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y_n - \bar{y}_n\| \leq M \left[\|y_0 - \bar{y}_0\| + \sum_{k=0}^{N-1} \|\eta_k\| \right]$$



Autrement dit, (2) est stable si des petits erreurs dans le calcul de la suite provoquent une erreur finale contrôlable.

Déf: La méthode (2) est convergente si pour toute solution y de (1), la suite y_n sd.
de (2) vérifie

$$\Theta_n = \max_{0 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| \rightarrow 0 \text{ lorsque}$$

$$\begin{cases} y(t_0) \rightarrow y_0 \\ h \rightarrow 0 \end{cases}$$

Grâce à ces définitions, on peut énoncer le théorème général de convergence

Thm 3: Si la méthode à un pas (2) est stable et consistante, elle est convergente.

Preuve: Soit $\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n \Phi(t_n, y(t_n), h_n)$

l'erreur de consistante de (2). Puisque (2) est consistante, on a $\sum_{n=0}^{N-1} \|\varepsilon_n\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Posons $\bar{z}_n = y(t_n)$. On a alors

$$\bar{z}_{n+1} = \bar{z}_n + h_n \Phi(t_n, \bar{z}_n, h_n) + \varepsilon_n$$

La stabilité implique que

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| \leq M \left[\|y_0 - y_{0,h}\| + \sum_{k=0}^{N-1} \|\varepsilon_k\| \right] \xrightarrow{\substack{\Rightarrow 0 \\ L \rightarrow 0}} 0$$

d'où la conclusion. ■

III.2.(c)] Conditions de convergence.

On s'intéresse donc à des conditions simples permettant d'assurer consistante et stabilité d'une méthode donnée, afin d'en avoir la \subseteq via Thm 3.

Thm 4 (CNS de consistante): Une méthode à un pas de forme (2) est consistante si

$$\Phi(t, y, 0) = g(t, y), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall y \in \mathbb{R}$$

Preuve: Soit y solution de (1) et

$$\varepsilon_n := y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n \Phi(t_n, y(t_n), h_n),$$

l'erreur de consistance en t_n . Par le TAF, $\exists \varepsilon_n \in \mathbb{C}_n$,
 $t_{n+1} \in [t_n]$

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = h_n y'(\tau_n) = h_n f(\tau_n, y(\tau_n))$$

D'où

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= h_n \left[f(\tau_n, y(\tau_n)) - \Phi(t_n, y(t_n), h_n) \right] \\ &= \alpha_n + h_n \beta_n, \text{ où}\end{aligned}$$

$$\alpha_n = h_n \left[f(\tau_n, y(\tau_n)) - \Phi(\tau_n, y(\tau_n), 0) \right]$$

$$\beta_n = \Phi(\tau_n, y(\tau_n), 0) - \Phi(t_n, y(t_n), h_n).$$

Comme $t \mapsto \|f(t, y(t)) - \Phi(t, y(t), 0)\|$ est continue sur $[t_0, t_0 + T]$, donc intégrable (au sens de Riemann),

$$\text{on a } \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \|\alpha_n\| = \int_{t_0}^{t_0+T} \|f(r, y(r)) - \Phi(r, y(r), 0)\| dr$$

De plus, $\|\beta_n\| \leq S(h) := \max_{\substack{|t-t'| \leq h \\ 0 \leq t \leq t_0}} \|\Phi(t, y(t), 0) - \Phi(t', y(t'), h)\|$

La fonction $(t, h) \mapsto \Phi(t, y(t), h)$ est continue sur

$[t_0, t_0 + \bar{h}] \times [0, h^k]$ compact \Rightarrow unif. continue

Donc $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \text{tq} \quad h < \delta \Rightarrow \|\beta_n\| \leq \varepsilon \quad (= \|h\|)$

$\alpha_n \geq$ donc si $h \ll \delta$,

$$\left| \sum_{0 \leq n \leq N-1} \|\varepsilon_n\| - \sum_{0 \leq n \leq N-1} \|\alpha_n\| \right| \leq \sum_{0 \leq n \leq N} h_n \|\beta_n\| \\ \leq \varepsilon T.$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{0 \leq n \leq N} \|\varepsilon_n\| = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{0 \leq n \leq N} \|\alpha_n\|$

et donc la méthode est consistante ssi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{0 \leq n \leq N} \|\alpha_n\| = 0 \quad \begin{array}{l} \text{ssi } \alpha_n = 0 \quad \forall n \\ \text{ssi } f(t_n, y_n) = \Phi(t_n, y_n, 0) \end{array}$$

Thm 5 (CS de stabilité): Une méthode est stable si Φ est lipschitzienne en y .

Preuve: Définissons $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \\ z_{n+1} = z_n + h_n \Phi(t_n, z_n, h_n) + \eta_n \end{cases}$

Alors $\|y_{n+1} - z_{n+1}\| \leq \|y_n - z_n\| + h_n \Delta \|y_n - z_n\| + \|\eta_n\|$

où Δ est la constante de Lipschitz de Φ :

$$\|\Phi(t, y_1, h) - \Phi(t, y_2, h)\| \leq \Delta \|y_1 - y_2\|, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + h],$$

On a donc $\Theta_{n+1} \leq (1 + h_n \Delta) \Theta_n + \|\eta_n\|$, $\Theta_n := \|y_n - y_0\|$

Par le lemme de Grönwall discret, on a

$$\max_{0 \leq n \leq N} \Theta_n \leq e^{\Delta T} \left(\Theta_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \|\eta_k\| \right), \quad \text{stabilité}$$



Rem: L'hyp. que Φ soit globalement Lipschitz est rarement vérifiée. En fait, on peut mg Φ loc. Lipschitz en y suffis.

Thm 6 (CNS d'ordre): On suppose $f \in C^p([t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ pour $p > 0$, et que les fonctions

$\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial h}, \dots, \frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}$ existent et sont continues

dans $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^m \times [0, h^*]$. Alors la méthode est d'ordre p si $\forall (t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^m$,

$$\frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(t, y, 0) = \frac{1}{p+1} f^{(p)}(t, y), \quad \forall 0 \leq p \leq p-1.$$



Preuve : Divise de Taylor, admise... ■

Rem: L'erreur globale donnée par une méthode stolte d'ordre p est donc

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y_n - y(t_n)\| \leq M(\|y_0 - y(t_0)\| + CT h^p),$$

et est donc proportionnelle à h^p .

E+: Méthode de développement de Taylor:

L'idée la plus simple pour obtenir une méthode d'ordre p est de prendre

$$\bar{\varphi}(t, y, h) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(t, y)$$

Les hyp. du Thm. 6 étant vérifiées, cela donne une méth. d'ordre p ($p=1$ correspond à E. E+ φ)

De plus, si les fonctions $f^{(k)}(t, y)$, $k=0, \dots, p-1$ vérifient la condition de Lipschitz,

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall y, \bar{y} \in \mathbb{R}^m, \|f^{(k)}(t, y) - f^{(k)}(t, \bar{y})\| \leq L_k \|y - \bar{y}\|,$$

alors $\bar{\varphi}$ vérifie la cond. de Lipschitz avec

$$A := L_0 + \frac{h}{2} L_1 + \dots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} L_{p-1}.$$

et par le thm 5/, la méthode est stable.

→ Inconvénients de la méthode de Taylor:

- Besoin d'évaluer $f, f', \dots, f^{(p-1)}$ \Rightarrow très coûteux;
- De plus, $f^{(k)}$ n'est pas toujours défini (données dégagées discrètes)
- f doit être très régulière.

III.3) Méthodes de Runge-Kutta:

On se donne q réels c_1, c_2, \dots, c_q (pas nécessairement distincts). On va chercher à subdiviser l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ en des instants intermédiaires

$$t_{n,i} := t_n + c_i h_n$$

et de calculer la sol° de (1) par

$$y(t_{n,i}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, y(t)) dt.$$

On va donc introduire les quadratures numériques

$$\int_0^{c_i} \psi(t) dt \approx \sum_{j=1}^q a_{i,j} \psi(c_j), \quad 1 \leq i \leq q;$$

$$\int_0^1 \psi(t) dt \approx \sum_{j=1}^q b_j \psi(c_j).$$

On a alors les approximations

$$y(t_{n,i}) \approx y(t_n) + h_n \sum_{j=1}^q a_{i,j} f(t_{n,j}, y(t_{n,j})),$$

et de même

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + h_n \sum_{j=1}^q b_j f(t_{n,j}, y(t_{n,j})).$$

Ainsi, pour chaque point intermédiaire $t_{n,i}$, on considère la pente de la tangente à f correspondante.

$$p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}).$$

Déf: les méthodes de Runge-Kutta sont les schémas à un pas suivant

$$(3) \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{j=1}^q a_{i,j} f(t_{n,j}, y_{n,j}), & i=1, \dots, q \\ y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{j=1}^q b_j f(t_{n,j}, y_{n,j}), & t_{n,i} = t_i h_n \end{cases}$$

On a coutume de représenter les méthodes de Runge-Kutta (RK) par un tableau de Butcher

c_1	α_{11}	α_{1q}
\vdots	α_{21}	α_{2q}
\vdots	\vdots		\vdots
c_q	α_{q1}	α_{qq}
	b_1	b_q

Ex 1: $q=1$, $\frac{0}{\alpha} \mid \frac{0}{1}$ nous donne la méthode de Euler explicite (ordre 1) : $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0 \\ y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \end{cases}$

Ex 2: $q=2$, $\frac{0}{\alpha} \mid \frac{0}{\alpha} \quad \frac{0}{1}$ avec $\alpha \neq 0$. On a alors

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \alpha h_n f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h_n \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_n, y_n) + h_n \frac{1}{2\alpha} f(t_n + \alpha h_n, y_{n+1}) \end{cases}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a la méthode de Euler Améliorée Trapèzes $\alpha = 1$, Huen (Ordre 2)

Ex 3: $f = g$: "Méthode de Runge-Kutta" aussi appelée RK4

0	0	0	0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ce qui donne
le schéma à un
pas suivant:

ordre 4

(RK4)

$$\begin{cases} y_{n,1} = y_n, \\ y_{n,2} = y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_{n,1}), \\ y_{n,3} = y_n + \frac{h_n}{2} f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_{n,2}\right), \\ y_{n,4} = y_n + h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_{n,3}\right), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{6} \left[f(t_n, y_n) + 2f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_{n,2}\right) + 2f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_{n,3}\right) + f\left(t_n + h_n, y_{n,4}\right) \right]. \end{cases}$$

Rem: (1) Pour une implémentation efficace, à fin de minimiser les appels de f , on pose

$$k_{n,i} := f(t_{n,i}, y_{n,i}).$$

On a alors

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h_n \sum_{j=1}^q \alpha_j k_{n,j}; \\ y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{j=1}^q b_j k_{n,j}. \end{cases}$$

(2) Les méthodes de quadratures utilisées dans les étapes de $(R_k q)$ sont respectivement:

- Rect. à gauche $\rightarrow \int_0^{t_1} \psi(r) dr \approx \frac{1}{2} \psi(0),$
- — à droite $\rightarrow \int_0^{t_1} \psi(r) dr \approx \frac{1}{2} \psi(t_2),$
- Point milieu: $\int_0^{t_1} \psi(r) dr \approx \psi(t_2),$
- Simpson: $\int_0^1 \psi(r) dr \approx \frac{1}{6} \psi(0) + \frac{2}{6} \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{6} \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} \psi(1)$
,, (d; s)

(3) Soit A la matrice $q \times q$ apparaissant dans le

Tableau de Butcher. * Si A est strictement triang. inf ($a_{ij} = 0$ si $i \leq j$) la résolution du système (3) est obtenue à partir des sous-étapes précédentes \Rightarrow méthodes explicite.

* Si A est triang. inf ($a_{ij} = 0$ si $i < j$), la résolution de (3) correspond à résoudre successivement q fois une équation à une inconnue \Rightarrow méthode semi-implícite.

* Si A est pleine, on doit résoudre un système (non-linéaire) de q équations à q inconnues \Rightarrow méthode implícite.

Ex 1: $q=1$, $\begin{array}{c|cc} & 1 & 1 \\ \hline & & 1 \end{array}$ donne la méthode d'Euler implícite:

ordre 1

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n + h_n, y_{n+1})$$

Ex 2: $q=1$, $\begin{array}{c|cc} \theta & \theta & \theta \\ \hline & & 1 \end{array}$, $\theta \in \mathbb{R} \Rightarrow$ θ -schéma.

ordre 1 si $\theta \neq \frac{1}{2}$
ordre 2 si $\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Crank - Nicholson
(à pt. milieu):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n) + \frac{h_n}{2} f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Ex6: $q=2$, $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ (quadrature de Gauss)

α	α	0
$1-\alpha$	$1-2\alpha$	α
	$1/2$	$1/2$

ordre 3

Thm 7: (stabilité pour les méthodes Rk):

Supposons $m \geq 1$ (i.e. $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Soit l'hypothèse $h_n k_p(|A|) < 1$, le schéma de Runge-Kutta (3) admet une unique solution.

De plus, si $h^* k_p(|A|) < 1$, le schéma est stable pour tout $h \in [0, h^*]$. Enfin, si la fonction $f \in C^k([t_0, t_0+T] \times \mathbb{R})$, alors $\Phi \in C^k([t_0, t_0+T] \times \mathbb{R} \times [0, h^*])$.



Notre: On écrit (\tilde{S}) comme un schéma à un pas, avec

$$y_{n+q} = y_n + \Phi(t_n, y_n, h_n), \quad \text{où}$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} y_i = y + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t + c_j h, y_j), \quad i = 1, \dots, q \\ \Phi(t, y, h) = \sum_{j=1}^q b_j f(t + c_j h, y_j). \end{array} \right.$$

Existence: Il faut montrer si $h \in \rho(A)$ alors

(\tilde{S}) définit Φ de manière unique. ADMIS
(cf Crouzeix-Mignot)

Stabilité: On va chercher à appliquer le Thm. 5,
et donc montrer Φ est lipschitz en y .

ADM.5 \square

Dém: ① Si la méthode de (RK) est explicite,
alors $\dim(A) = 0$, et donc $\rho(|A|) = 0$, donc
la méthode est toujours stable si f est
lipschitz.

② On calcule les ordres de ces méthodes
via des relations algébriques entre les

[coeffs (a_{ij}) , (b_{ij}) , (c_i) . cf TD + (suite, x Mignot).

III. 9] Systèmes raides:

Dans certaines situations, certains schémas (explicites) deviennent instables, même si on sait montrer la convergence (cf TP3 exo 3).

E₁: Euler Explicite, pour $\begin{cases} y'(t) = -10y(t) \\ y(0) = 1, t \in [0, 1] \end{cases}$

Sol: $y(t) = e^{-10t}$ et $\|y''\|_\infty = 100$. Taylor avec reste intégral donne

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n y'(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) y''(t) dt,$$

donc $\epsilon_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) y''(t) dt \leq \frac{h_n^2}{2} \|y''\|_\infty$ si $y \in C^2$

et donc $\|\epsilon_n\| \leq \frac{e^{\frac{hT}{2}}}{2} \|y''\|_\infty \leq \frac{h}{2} e^{10} 100 \approx 10^6 h$

et donc $\|y_n\| \leq 0.1$ si $h \leq 10^{-7} \Leftrightarrow N \geq 10^7$.

- Le schéma s'écrit $y_{n+1} = y_n - h \gamma_0 y_n$
 $= y_n (1 - 10h)$
 $= y_0 (1 - 10h)^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \frac{1}{20} \Rightarrow y_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots) \\ h = \frac{1}{70} \Rightarrow y_n = (1, 0, 0, \dots) \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{l} h = \frac{1}{5} \Rightarrow y_n = (1, -1, 1, -1, \dots) \end{array} \right)$$

il n'est pas stable si h est trop grand !

- Avec Euler implicite, $y_{n+1} = y_n + h \gamma_0 y_{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{il } y_{n+1} &= \left(\frac{1}{1 + 10h} \right) y_n \quad \forall h > 0, \\ &= \left(\frac{1}{1 + 10h} \right)^n y_0 \quad \underset{N \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

OK

