

# EDP & DF : Partie 1

$$\langle Ax, y \rangle := y^T Ax$$

$$\begin{cases} \langle Av, v \rangle \geq 0, \\ \langle Av, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0 \end{cases}$$

Preuve : • Symétrie : c'est clair !

• DP : On va le vérifier de manière directe (bien que d'autres preuves existent). Soit  $v \in \mathbb{R}^N$ ,  
 $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$  et notons  $v_0 = v_{N+1} = 0$  <sup>(\*)</sup> (par abus). Alors

$$\langle Av, v \rangle = \frac{1}{h^2} (v_1, \dots, v_N) \begin{pmatrix} 2+c_1 h^2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+c_2 h^2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 2+c_N h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{h^2} (v_1, \dots, v_N) \begin{pmatrix} (2+c_1 h^2)v_1 - v_2 \\ -v_1 + (2+c_2 h^2)v_2 - v_3 \\ \vdots \\ -v_{N-2} + (2+c_{N-1} h^2)v_{N-1} - v_N \\ -v_{N-1} + (2+c_N h^2)v_N \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^N v_i (-v_{i-1} + (2+c_i h^2)v_i - v_{i+1})$$

$$= \sum_{i=1}^N c_i v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^N v_i (-v_{i-1} + v_i + v_i - v_{i+1})$$

$$= \sum_{i=1}^N c_i v_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^N v_i (v_i - v_{i-1}) + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^N v_i (v_i - v_{i+1})$$


Après réindigage de la dernière somme, on trouve

$$\begin{aligned} \langle Ar, r \rangle &= \sum_{i=1}^N c_i r_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^N r_i (v_i - v_{i-1}) - \frac{1}{h^2} \sum_{i=2}^{N+1} v_{i-1} (v_i - v_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^N c_i r_i^2 + \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^N (r_i - v_{i-1}) (v_i - v_{i-1}) + \frac{1}{h^2} (v_1^2 + v_N^2) \quad (*) \end{aligned}$$

$\geq 0$  comme somme de carrés. La matrice est donc positive symétrique. Finalement,

$$\langle Ar, r \rangle = 0 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \sum_{i=1}^N c_i r_i^2 = 0 \\ v_1^2 + v_N^2 = 0 \\ (r_i - v_{i-1})^2 = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow r_1 = r_2 = \dots = r_N = 0$$

Donc la matrice est bien définie 

Une matrice SDP étant inversible, cette proposition assure que, à  $N$  fixé, le système (2):

$$A_h u_h = b_h$$

admet une unique solution  $u_h \in \mathbb{R}^N$ . C'est la solution de (1) au sens des différences finies pour le maillage à  $N$  points. Est-elle convergente?

Thm 2: On suppose  $C \geq 0$ , si la solution  $u$  de (1) est de classe  $C^q([0,1])$ , alors on a l'estimation

$$\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - u(x_i)| \leq \frac{h^2}{96} \sup_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)|, \quad \forall N \geq 1.$$

$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$

Ainsi, on a convergence quadratique (en  $h$ ) de  $u_h$  vers  $u$  en norme  $L^\infty$ , i.e.  $u_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} u$ . Cette convergence est rapide!

Pour montrer ce résultat, nous avons besoin d'introduire des outils annexes.

Déf: On dit qu'une matrice carrée  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est:

- positive si tous les coefficients de  $M$  sont positifs ou nuls;
- monotone si  $M$  inversible et  $M^{-1}$  positive.

Prop: Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La matrice  $M$  est monotone ssi  $\forall v \in \mathbb{R}^n, (Mv \geq 0 \Rightarrow v \geq 0)$ .

Preuve:  $\Rightarrow$  Supposons que  $\forall v \in \mathbb{R}^n, Mv \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$ .  
On veut m.  $M$  est inversible avec  $M^{-1} \geq 0$ .

Soit  $v \in \mathbb{R}^n$  tq  $\Pi v \geq 0$ . En particulier,  $\Pi v \geq 0$  donc  $v \geq 0$ . Mais  $-\Pi v = 0$  aussi donc  $\Pi(-v) \geq 0$  et donc  $-v \geq 0$ . On a alors  $v = 0_n$ , et la matrice  $\Pi$  est inversible. Montrons que  $\Pi^{-1} \geq 0$ .

Soit  $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  par  $1 \leq i \leq n$ . On a

$$\Pi(\Pi^{-1}e_i) = e_i \geq 0 \text{ donc } \Pi^{-1}e_i \geq 0.$$

Or, le vecteur  $\Pi^{-1}e_i$  correspond à la  $i$ -ème colonne de  $\Pi^{-1}$ , qui est donc positive. Ceci étant vrai  $\forall i$ ,  $\Pi^{-1}$  est positive.

$\Rightarrow$  Supposons  $\Pi$  monotone, et soit  $v \in \mathbb{R}^n$  tq  $\Pi v \geq 0$ . Comme  $\Pi^{-1} \geq 0$ , on a

$$v = \Pi^{-1}(\Pi v) \geq 0$$


Nous verrons d'autres caractérisations des matrices monotones en TD. Celle-ci est suffisante pour montrer la

Prop: On suppose que  $c(x_i) \geq 0, 1 \leq i \leq n$ . Alors, la matrice  $A_n$  est monotone.

Preuve : On va utiliser la prop. précédente, à la caractérisation de la monotonie basée sur la propriété :

$$(A_h v \geq 0 \Rightarrow v \geq 0), \quad \forall v \in \mathbb{R}^N.$$

Ici, si  $1 \leq i \leq N$ ,  $(A_h v)_i = \frac{-v_{i+1} + 2v_i - v_{i-1}}{h^2} + c_i v_i \geq 0$

( $v_0 = v_{N+1} = 0$ ) que l'on peut réécrire en

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{h^2} + c_i v_i + \frac{v_i - v_{i+1}}{h^2} \geq 0$$

et donc  $C_i h^2 v_i \geq v_{i+1} - v_i + v_{i-1} - v_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

Soit  $p$  tq  $v_i \geq v_p \quad \forall i$  (i.e.  $v_p = \min(v_i)$ ). Si on montre que  $v_p \geq 0$ , on a gagné. Or,

$$c_p h^2 v_p \geq (v_{p+1} - v_p) + (v_{p-1} - v_p) \geq 0.$$

Donc si  $c_p > 0 \Rightarrow v_p \geq 0$ .

$$c_p = 0 \Rightarrow v_p = v_{p+1} = 0 \geq 0.$$

En particulier,  $u_h = A_h^{-1} b_h \geq 0$  car  $b_h \geq 0$ .

On appelle cette propriété "principe du maximum discret". Elle existe aussi dans le cas continu.

## II.3) Ordre du schéma (2) :

On va s'intéresser ici à la preuve du thm 2.

Déf : On appelle erreur de consistance d'un schéma de discrétisation Diff. Finies la quantité obtenue en remplaçant l'inconnue discrète par la solution exacte (aux nœuds) dans le schéma

Ex : Dans le cas du schéma (2), on a ainsi

$$R_i := \frac{-u(x_{i+1}) + (2+c_i)u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h^2} - f(x_i), \quad 1 \leq i \leq N$$

Déf : On dit qu'un schéma de discrétisation aux Diff. Finies est consistant si l'erreur de consistance tend vers 0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq N} |R_i| = 0$$

Dans le cas du schéma (2), l'estimation d'ordre 2 en  $h$  est suffisante pour la consistance, et on a

Déf : On dit qu'un schéma de discrétisation aux DF est d'ordre  $p$  si il existe  $C \geq 0$  ne dépendant que de la solution exacte  $u$  tel que l'erreur de consistance vérifie

$$\max_{1 \leq i \leq N} |R_i| \leq Ch^p.$$

Le schéma (2) est donc dit d'ordre (2).

Déf: On dit que le schéma (2) est stable si il existe  $C$  ne dépendant que de  $f$  tq

$$\|u_h\|_{\infty} \leq C.$$

! Autant, en EDP, la notion de consistance est relativement générale, autant la stabilité va beaucoup dépendre du pb considéré. On n'a pas ainsi jamais  $\text{stab} + \text{cons} \Rightarrow \underline{\text{CV}}$ .

Prop: Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $C \geq 0$ . Alors

$$\|A_h^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{8}$$

Preuve: Décomposons  $A_h$  comme

$$A_h = A_{0h} + \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_N \end{pmatrix}}_{\text{matrice diagonale}}, \quad A_{0h} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{h^2}$$

clairement,  $A_h$  et  $A_{0h}$  sont inversibles, donc

$$\begin{aligned}
 A_{oh}^{-1} - A_h^{-1} &= A_{oh}^{-1} A_h A_h^{-1} - A_{oh}^{-1} A_{oh} A_h^{-1} \\
 &= A_{oh}^{-1} (A_h - A_{oh}) A_h^{-1} \\
 &= A_{oh}^{-1} D A_h^{-1} \geq 0.
 \end{aligned}$$

En particulier,  $A_{oh}^{-1} \geq A_h^{-1} \geq 0$ , et on a

$$\begin{aligned}
 \|A_h\|_{\infty}^{-1} &:= \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N (A_h^{-1})_{ij} \\
 &\leq \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N (A_{oh}^{-1})_{ij} = \|A_{oh}^{-1}\|_{\infty}.
 \end{aligned}$$

Estimons donc ce dernier terme :

$$\|A_{oh}^{-1}\|_{\infty} = \|A_{oh}^{-1} e\|_{\infty}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche donc  $d \in \mathbb{R}^N$  tq  $A_{oh} d = e$ . Ceci n'est rien d'autre que la discrétisation au sens des DF de

$$\begin{cases} -u''(x) = 1, & x \in ]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

La solution exacte en est  $u_0(x) = \frac{x(1-x)}{2}$  (et on a  $u_0 \in C^{\infty} \subset C^q$ ) qui vérifie en plus  $u_0^{(q)} \equiv 0$ .

Ainsi,  $d_i = u_0(x_i)$  convient. Comme  $x_i = \frac{i}{N+1} = ih$ , on trouve

$$\|A_{oh}^{-1}\|_{\infty} = \|d\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} \frac{ih(1-ih)}{2} \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{x(1-x)}{2} = \frac{1}{8}$$



Corollaire: Si  $A_h u_h = b_h$ , alors

$$\|u_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|f\|_\infty.$$

Le schéma (2) est donc stable!

On est maintenant en mesure de montrer le thm 2

Preuve (thm 2): Nous avons déjà vu que si  $u \in P^q$ ,

alors  $|R_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{0 \leq x \leq 1} |u^{(q)}(x)|$ ,  $1 \leq i \leq N$ ,

et on a donc la consistance à l'ordre 2 de (2).

Il reste à utiliser la stabilité pour conclure: introduisons l'erreur de discrétisation

$$e_i = u(x_i) - u_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Remarquons que 
$$\begin{cases} A_h u_h = b_h, \\ A_h u = b_h + R \end{cases} \quad \leftarrow \text{erreur de consistance,}$$

et donc  $A_h (u - u_h) = R$  d'où

$$e = u - u_h = A_h^{-1} R$$

$$\begin{aligned} \text{et donc } \|e\|_\infty &= \|A_h^{-1} R\|_\infty \\ &\leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|R\|_\infty \\ &\leq \frac{h^2}{8 \cdot 12} \sup_{0 \leq x \leq 1} |u^{(q)}(x)| \|f\|_\infty \end{aligned}$$

## III | Pour aller plus loin

### III.1) Conditions aux limites:

Nous avons volontairement mis sous le tapis le problème des conditions aux limites, en prenant dans toutes les preuves  $u(0) = u(1) = 0$ , car celui-ci est difficile dès que l'on sort légèrement de ce cadre. Regardons par exemple le pb suivant:

Trouver  $u \in C^2([0,1])$  solution de

$$(3) \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in ]0,1[, \quad f \in C^\infty([0,1]) \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Il est d'abord assez clair que les solutions de ce problème ne sont pas uniques! En effet, si  $u$  est solution, alors  $u + c$  est aussi solution,  $\forall c \in \mathbb{R}$ . De plus, on peut mg si  $\int_0^1 f(x) dx \neq 0$ , il n'existe aucune solution: si  $u$  solution,

$$\begin{aligned} - \int_0^1 u''(x) dx &= u'(0) - u'(1) = 0 \\ &= \int_0^1 f(x) dx \quad \text{Absurde!} \end{aligned}$$

En fait, on a

$$u(x) = C - \int_0^x \int_0^y f(t) dt dy \quad \forall x \in \pi$$

si  $\int f = 0$ .

Et d'un point de vue discret ? C'est pire !

Discretisons (3). Pour le terme  $u''$ , c'est comme avant à l'intérieur du domaine : si  $2 \leq j \leq N-1$ ,

$$\frac{-u(x_{j+1}) + 2u(x_j) - u(x_{j-1}))}{h^2} = f(x_j) + u''(x_j + \tau_j).$$

Par contre, on doit discrétiser les bords :

$$u'(0) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} = u'(0) + u''(x_0 + \tau_0), \\ \frac{u(x_N) - u(x_{N-1}))}{h} = u'(1) + u''(x_N + \tau_N). \end{cases}$$

$\begin{cases} u_1 = u_0 \\ u_N = u_{N-1} \end{cases} \Leftrightarrow$

On néglige les dérivées en supposant  $u \in C^2(\text{joint})$  et l'on trouve que  $u_h$  est solution du sous des D.F. de (3) si

$$(4) \quad \tilde{A}_h u_h = b_h, \quad \tilde{A}_h = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{h^2}$$

Problème :  $\ker \tilde{A}_h \neq \{0_N\}$ . En effet,

$$\tilde{A}_h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ e \end{pmatrix} = 0_N, \text{ et donc non-unicité des solutions :}$$

Si  $u_h$  est sol de (9),  $u_h + C e$  aussi, ( $C \in \mathbb{R}$ ).

Exo : Quelle condition imposer à  $b_h$  pour assurer l'existence de solution à (9) ?

$$b_h \in \text{Im}(\tilde{A}_h) = \ker(\tilde{A}_h)^\perp \text{ car } A_h \text{ sym.}$$

Def : On appelle conditions aux bords / limites de

- Dirichlet la condition

$$u(0) = a, \quad u(1) = b;$$

- Neumann la condition

$$u'(0) = a, \quad u'(1) = b;$$

- Mixtes la combinaison des deux <sup>pièces</sup> <sub>deux</sub>

$$u'(0) = a, \quad u(1) = b \quad (\text{par ex});$$

- Robin la somme des deux

$$u(0) - u'(0) = a, \quad u'(1) = b.$$

Les discrétisations s'en bien sûr différentes à chaque fois ...

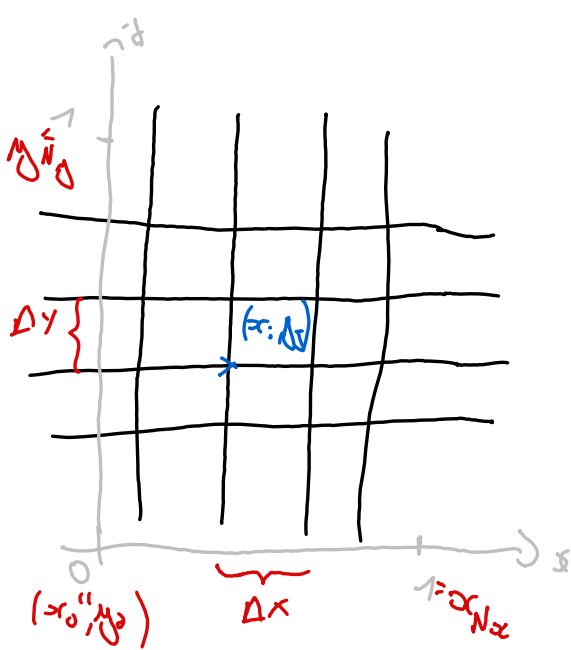
### III.2 | Le cas bi-dimensionnel

Et en 2d? L'équation s'écrit : soit  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + u(x,y) = f(x,y), (x,y) \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Cette équation est généralement appelée équation de Poisson. Au prin de contraintes techniques, les preuves du cas 1D peuvent être généralisées à ce cas assez directement. Numériquement c'est une autre histoire. Il faut maintenant discrétiser un plan :

- comment le faire (carrés, triangles, etc?)
- c'est plus gros ;
- c'est plus coûteux



On va noter

$$u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$$

pour  $\begin{cases} x_i = i \Delta x, i \in \{1, \dots, N_x\} \\ y_j = j \Delta y, j \in \{1, \dots, N_y\} \end{cases}$

Rappelant que

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y),$$

on a alors

$$M_h u_h = b_h$$

où  $u_h = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ \vdots \\ u_{1,N_y} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{N_x,N_y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_x N_y}$

$$\mathcal{P}_{N_x N_y}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{C}_{N_x N_y}(m)$$

$$M_h = \begin{pmatrix} B & -I_{N_x, N_y} & (0) \\ -I_{N_x, N_y} & B & (0) \\ (0) & (0) & -I \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} q & -1 & (0) \\ -1 & & \\ (0) & & -1 & q \end{pmatrix}$$