Examen, 3h.

Les documents du cours, TD, TP de l'UE ne sont pas autorisés. Calculatrice interdite.

Partie I : Optimisation

Exercice 1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et

$$\mathcal{J} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},$$

une fonctionnelle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$.
1. Rappeler l'algorithme du gradient à pas optimal appliqué à la minimisation de $\mathcal{J}$ sur $\mathbb{R}^d$. On notera u_k l'approximation à l'itération $k \in \mathbb{N}$ et ρ_k le pas optimal défini à l'itération k.

2. Montrer qu'à l'itération $k \in \mathbb{N}$, on a $\langle \nabla \mathcal{J}(u_{k+1}), \nabla \mathcal{J}(u_k) \rangle = 0$.

Exercice 2. On se donne $\mathcal{J}_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto (x+y)^2 - xy + \frac{1}{2}z(z+2)$. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^3$.
On prendra soin de donner tous les arguments pour répondre aux questions et de bien justifier ses réponses.

1. Justifiez que $\mathcal{J}_0$ admet un unique point de minimum sur $\mathbb{R}^3$ et calculez-le.

2. On considère l'ensemble $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 1\}$.
   Montrer que $\mathcal{J}_0$ admet un unique point de minimum sur K et calculez-le.

3. On considère maintenant l'ensemble $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z \leq 1\}$. Montrer que $\mathcal{J}_0$ admet un unique point de minimum sur Q et calculer le point de minimum.

4. On note $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $p(u) = u + \frac{1}{3}(1 - \langle u, w \rangle)w$.

   (a) Exprimer K à l'aide de w.

   (b) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $p(x, y, z) \in K$.

   (c) Soit $v \in K$ et $u \in \mathbb{R}^3$, montrer que

   $$\langle w, p(u) - v \rangle = 0.$$

   (d) En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $v \in K$, $\langle u - p(u), p(u) - v \rangle = 0$.

   (e) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $v \in K$, $\|u - v\|^2 = \|u - p(u)\|^2 + \|p(u) - v\|^2$.

   (f) En déduire que p est la projection sur le convexe fermé K.

5. On considère l'algorithme suivant pour une fonctionnelle générale $\mathcal{J} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, admettant un unique point de minimum sur K (où K est défini en 2.), qui pour $\rho > 0$ et $u_0 \in \mathbb{R}^3$ donnés,

construit une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ comme suit.

$$\mathcal{A}$$

Initialisation : $\rho > 0$ et $u_0 \in \mathbb{R}^3$ donnés.

Itération : $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = p(u_k - \rho\nabla J(u_k))$.

(a) Quel est le nom de cet algorithme ?

(b) Donner des hypothèses pour lesquelles l'algorithme converge. Donner également une majoration de l'erreur (on refera la démonstration).

(c) Les hypothèses données en (b) sont-elles vérifiées pour $\mathcal{J}_0$?

(d) Construire une fonction Scilab ou python qui met en œuvre cet algorithme pour $\mathcal{J}_0$.

(e) Toujours dans le cas où $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0$, on choisit le pas $\rho = 0.001$ et $u_0 = w$. Au bout d'une centaine d'itérations $kmax$, on trouve $u_{kmax} \approx (0.385, 0.387, 0.198)$. Cela vous paraît-il cohérent ?

Partie II : Approximation par Éléments Finis.

Exercice 3. Soient $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On considère le problème suivant $(\mathcal{P}_{f,g})$: *Trouver* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *tel que*

$$\begin{aligned} -u''(x) + g(x)u(x) &= f(x), \forall x \in]0,1[, \quad (1)\\ u(0) &= 0, \quad (2)\\ u(1) &= 0. \quad (3) \end{aligned}$$

1. On considère le cas où $f = f_0$ et $g = g_0$ avec $f_0 : x \mapsto 1$ et $g_0 : x \mapsto 4$.

(a) Montrer que $u : x \mapsto \frac{1}{4}\left(1 + \gamma(e^{2x} + e^2 e^{-2x})\right)$, avec $\gamma = -\frac{1}{1+e^2}$, est solution de cette équation.

(b) En s'inspirant de la stratégie proposée en cours et TD pour obtenir une formulation variationnelle, identifier une forme bilinéaire a_0 et une forme linéaire l_0 telle que si u est solution du problème $(\mathcal{P}_{f_0,g_0})$, alors

$$a_0(u,v) = l_0(v), \forall v \in \mathcal{V},$$

avec $\mathcal{V} = \left\{v \in \mathcal{C}^2([0,1]),\ v(0) = v(1) = 0\right\}$. *On pensera à montrer que a_0 est bilinéaire et l_0 est linéaire.*

(c) Montrer l'unicité d'une solution au problème $(\mathcal{P}_{f_0,g_0})$ dans ce cas particulier.

2. On suppose maintenant que $f = f_1$ et $g = g_1$ avec $f_1 : x \mapsto 1$ et $g_1 : x \mapsto x + 1$.

(a) En s'inspirant de la stratégie proposée en cours et TD pour obtenir une formulation variationnelle, identifier une forme bilinéaire a_1 et une forme linéaire l_1 telle que si u est solution du problème $(\mathcal{P}_{f_1,g_1})$, alors

$$a_1(u,v) = l_1(v), \forall v \in \mathcal{V},$$

avec $\mathcal{V} = \left\{v \in \mathcal{C}^2([0,1]),\ v(0) = v(1) = 0\right\}$.
On admettra dans la suite que l'espace $\tilde{\mathcal{V}}$ que l'on utilise en réalité pour écrire le problème variationnel ($\mathcal{V} \subset \tilde{\mathcal{V}}$) et grâce auquel on peut montrer directement des résultats d'existence et unicité de la solution est donné et qu'on ne demande pas son expression.

(b) Montrer l'unicité d'une solution au problème $(\mathcal{P}_{f_1,g_1})$ dans ce cas particulier.

On considère une subdivision uniforme $(x_i)_{i\in\{0,..,N+1\}}$ de $[0,1]$ de pas $h > 0$ donné. On note pour tout $i \in \{0,..,N\}$, $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ et $\mathcal{V}_h$ l'espace suivant :

$$\mathcal{V}_h := \left\{u \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ \text{ pour tout } i \in \{0,...,N\}, u_{/I_i} \in \mathbb{P}_1, u(0) = u(1) = 0\right\}.$$

On admettra que $\mathcal{V}_h \subset \tilde{\mathcal{V}}$.

(c) Écrire la formulation variationnelle discrète associée.

(d) Montrer que trouver $u_h \in \mathcal{V}_h$ solution du problème variationnel discret revient à résoudre un système linéaire que l'on précisera.

(e) Montrer que la matrice associée au système linéaire est inversible.

On choisit maintenant pour base de $\mathcal{V}_h$ la base éléments finis de Lagrange (comme dans le cours).

(f) Rappeler l'expression des fonctions de base élémentaires sur l'intervalle de référence.

(g) Expliciter et calculer numériquement les valeurs des termes de la matrice du système linéaire.

(h) On souhaite estimer estimer l'erreur commise entre u et u_h dans la norme considérée sur $\tilde{\mathcal{V}}$, que l'on notera $\|\cdot\|$. Quels sont les ingrédients de la preuve ?

(i) Donner les étapes de construction d'un code de calcul pour résoudre numériquement le problème par une méthode d'éléments finis $\mathbb{P}_1$.