FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 0
RÉVISIONS

Dans tous les exercices, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne l'espace de probabilité sous-jacent. Les exercices plus difficiles ou faisant intervenir des notions avancées de théorie de la mesure sont indiqués par un astérisque.

1. Théorie des ensembles, dénombrement

Exercice 1. Soient A, B et C trois sous ensembles de Ω. Parmi les assertions suivantes, indiquer lesquelles sont toujours vraies. *(Faire un dessin !)*

— $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

— $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

— $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

Exercice 2. Soit Ω un ensemble de cardinal n. Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω, est de cardinal 2^n.

Exercice 3. Soit n et k deux entiers positifs. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de sous-ensembles *non ordonnés* à k éléments d'un ensemble à n éléments.

(1) Montrer la formule du binôme de Newton :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} .$$

(2) Montrer la relation de Pascal : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

(3) Montrer que si $k \leq n$, alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(4) Exprimer en fonction de coefficients binomiaux le nombre de mains de 7 cartes, tirées dans un jeu de 52 cartes, contenant exactement 2 rois et 3 trèfles.

*** Exercice 4.**

(1) Soient $p \geq 2$, et $k_1, ..., k_n$, n entiers non nuls. Dénombrer les suites de longueur p contenant exactement k_1 fois 1, ..., k_n fois n.

(2) Soient n et p dans $\mathbf{N}^*$. Donner le nombre d'applications strictement croissantes de $\mathbf{N}_n^* = \{1, \ldots, n\}$ dans $\mathbf{N}_p^* = \{1, \ldots, p\}$.

(3) Soient p et k deux entiers non nuls, montrer que

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} .$$

2. Théorie de la mesure et probabilités

Exercice 5.

(1) Qu'appelle-t-on tribu sur un ensemble Ω ?

(2) Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω. On suppose que $B \in \mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{G} \equiv \{A \cap B, A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur B.

Exercice 6.

(1) Donner la définition d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ définie sur un ensemble mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$.

(2) Soit A et B deux événements. Montrer que

(a) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

(b) si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

(c) $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Exercice 7. On se donne une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Est-ce que $\bigcup_n A_n$ et $\bigcap_n A_n$ sont encore des événements ?

(2) On suppose que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$). Montrer que $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$.

(3) On suppose que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$). Montrer que $\mathbb{P}(\bigcap_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$.

* **Exercice 8.** Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

(1) Montrer que

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup A_n)$$

(2) *Premier Lemme de Borel-Cantelli.*
On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

(3) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. Comparer les ensembles $\{\limsup X_n > 0\}$ et $\limsup\{X_n > 0\}$ puis les ensembles $\{\limsup X_n \geq 0\}$ et $\limsup\{X_n \geq 0\}$.

3. Généralités sur les variables aléatoires

Exercice 9.

(1) Qu'appelle-t-on variable aléatoire ?

(2) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sigma(X) := \{\{X \in A\},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Généraliser au cas où X est un vecteur aléatoire.

Exercice 10. Montrer les inégalités suivantes.

(1) *Inégalité de Markov :* si X est une variable aléatoire *positive*, alors

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}\ .$$

(2) *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :* si $X \in \mathbb{L}^2$ d'espérance m et de variance σ^2, alors

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(|X - m| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \ .$$

(3) Soit $X \in \mathbb{L}^2$ d'espérance m et de variance σ^2.

(a) Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq m + t) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(t + \lambda)^2}.$$

(b) En déduire l'inégalité

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq m + t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}.$$

4. Loi d'une variable aléatoire

Exercice 11. Qu'appelle-t-on loi d'une variable (ou d'un vecteur) aléatoire X ?

Exercice 12. Soit X et Y deux v.a. de même loi. Montrer que, pour toute fonction (borélienne) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.

Exercice 13. Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On pose

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to [0, 1] \\ t &\mapsto \mathbb{P}(] - \infty, t]) \end{aligned}$$

la *fonction de répartition* de la loi $\mathbb{P}$.

(1) Calculer et représenter F lorsque $\mathbb{P}$ est l'une des probabilités suivantes

(a) $\mathbb{P} = \mathbf{1}_{[0,1]} \cdot \lambda$ où λ désigne la mesure de Lebesgue.

(b) $\mathbb{P} = f \cdot \lambda$ où $f : x \mapsto e^{-x}\mathbf{1}_{x \geq 0}$.

(c) $\mathbb{P} = (1 - p)\delta_0 + p\delta_1$ avec p fixé dans $[0, 1]$

(2) Montrer que F est croissante et vérifie

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1 \ \text{ et } \ \lim_{t \to -\infty} F(t) = 0.$$

(3) Montrer que F est continue à droite et que sa limite à gauche $F(t^-)$ en un point $t \in \mathbb{R}$ est donnée par

$$F(t^-) = \mathbb{P}(] - \infty, t[)$$

(4) Montrer que F est continue en $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mathbb{P}(\{t\}) = 0$.

Exercice 14.

(1) Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Donner la loi de $1 - U$.

(2) Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et m, σ deux réels. Quelle est la loi de $Y = m + \sigma X$?

(3) Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Expliquer pourquoi la v.a. $X = \tan(U)$ est bien p.s. à valeurs réelles et donner la loi de X.

5. Indépendance et loi jointe

Exercice 15.

(1) Rappeler la définition de l'indépendance de deux événements A et B, de trois événements A, B, C et d'une famille infinie d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Rappeler la définition de l'indépendance de $n \geq 1$ variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Exercice 16. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0, \dots, 5\}$. On suppose que $\mathbb{P}(X = 3) = 1/2$ et $\mathbb{P}(Y = 2) = 1/3$. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(X = 3, Y = 2)$?

Exercice 17. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Parmi les assertions suivantes, indiquer lesquelles sont toujours vraies.

(1) $\{X_1, X_4X_1\}$ sont indépendantes de $\{X_3, X_2X_1\}$.

(2) $\{X_2, X_4^2X_1\}$ sont indépendantes de $\{X_3, X_5\}$.

(3) Les variables $\{X_1X_2, X_1X_3, X_1X_4, \dots\}$ sont indépendantes.

(4) $\sup_{1\leq k\leq 15}\{\sin(X_k^2)\}$ est indépendante de $\sum_{k=18}^{144} e^{X_k+3X_{k-1}}$.

(5) $\sum_{k=1}^{10} X_{2k}$ est indépendante de $\sum_{k=1}^{12} X_{2k+1}$.

(6) $\sum_{k=1}^{10} X_{3k+1}$ est indépendante de $\sum_{k=1}^{12} X_{2k+2}$.

(7) Toute fonction de $\{X_{2k+1},\ k \in \mathbb{N}\}$ est indépendante de toute fonction de $\{X_{2k},\ k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 18. Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $1/2$ indépendantes. On considère les événements

$$A = \{X = 1\}, \quad B = \{Y = 1\} \quad \text{et} \quad C = \{X = Y\} .$$

(1) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Qu'en est-il de A et C d'une part et de B et C d'autre part ?

(2) Les événements A, B, C sont-ils indépendants ?

Exercice 19. Soient X et Y deux variables aléatoires i.i.d. de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (on note $q = 1 - p$). On pose $M = \min(X, Y)$ et $Z = X - Y$. Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(M = m,\ Z = z) = p^2q^{2m-2}q^{|z|}.$$

Les variables M et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 20. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Montrer que pour toutes fonctions mesurables $f_1, \dots, f_n$, $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 21. Soient $U \sim \mathcal{E}(1/2)$ et $\Theta \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi])$ deux variables aléatoires indépendantes. On pose $X = \sqrt{U}\cos\Theta$ et $Y = \sqrt{U}\sin\Theta$. Calculer la loi du couple (X, Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Quelle est la loi de X ? Quelle est celle de Y ?

Exercice 22. Soit $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $U = \min_{i=1,\dots,n} X_i$ et $V = \max_{i=1,\dots,n} X_i$.

(1) Calculer les fonctions de répartition de U et V. En déduire que U et V ont des densités que l'on précisera.

(2) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 23. Soit X et Y deux v.a indépendantes telles que $\mathbb{E}[X^2+Y^2] < +\infty$.

(1) Montrer que $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$ existent.

(2) Montrer que $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

(3) Donner un contre exemple à l'égalité ci-dessus lorsque X and Y ne sont pas indépendantes.

*** Exercice 24.** Énoncer et démontrer le second lemme de Borel-Cantelli pour des événements indépendants.

6. Variables aléatoires discrètes

Exercice 25. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0,1[$.

(1) On définit le temps de premier succès : $T = \inf\{n \geq 1,\ X_n = 1\}$. Donner la loi de T.

(2) Pour $n \geq 1$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Donner la loi de S_n.

Exercice 26. Calculer, quand elles existent, l'espérance et la variance de la variable X dans chacun des cas suivants :

(1) X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

(2) X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

(3) X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

(4) X suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha > 0$.

(5) X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}$.

Exercice 27. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ telles que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = 2^{-n}$.

(1) Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

(2) Calculer les probabilités suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\left(\min\left(X,Y\right) \leq n\right), \quad \mathbb{P}\left(Y = X\right), \quad \mathbb{P}\left(Y > X\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X > nY\right)\ .$$

Exercice 28. On considère que le nombre N d'œufs pondus par un insecte donné suit une loi de Poisson de paramètre α et que la probabilité qu'un œuf donne une larve est p. On note L le nombre de larves. Les développements des œufs sont supposés indépendants. Donner la loi de L.

7. Variables aléatoires à densité

Exercice 29. Pour tous réels a et c, on définit la fonction p par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = cx^{a-1}\mathbf{1}_{]0,1[}(x).$$

(1) À quelles conditions sur a et c, la fonction p est-elle une densité de probabilité ?

(2) On suppose que p vérifie les conditions de la question précédente et on se donne une variable aléatoire X ayant pour densité p. Calculer la loi de $Y = -a\ln X$, puis $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 30. Calculer, quand elles existent, l'espérance et la variance de la variable X dans chacun des cas suivants :

(1) X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$. Donner sa fonction de répartition.

(2) X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Donner sa fonction de répartition.

(3) X suit la loi gaussienne (ou loi normale) $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$.

(4) X suit la loi de Cauchy de paramètres x_0 et a. Donner sa fonction de répartition. On rappelle que cette loi a pour densité de probabilité :

$$\frac{1}{\pi a \left[1 + \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2\right]}.$$

Exercice 31. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Donner la loi de $\min(X, Y)$ lorsque X et Y suivent respectivement la loi $\mathcal{E}(\lambda_X)$ et la loi $\mathcal{E}(\lambda_Y)$.

Exercice 32. Soit U et V deux v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Quelle est la loi de $\max(U, V)$? Quelle est la loi du couple $(\min(U, V), \max(U, V))$?

Exercice 33. Soit X, Y deux v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $X - Y$ et $X + Y$ sont indépendantes.

Exercice 34. *Autour de la loi* Γ.
On dit que X suit une loi $\Gamma(\lambda, a)$ avec $\lambda > 0$ et $a > 0$, si la mesure image P_X admet pour densité

$$p_X(x) = \lambda^a \exp(-\lambda x) x^{a-1} \mathbf{1}_{\{x>0\}} / \Gamma(a), \quad \text{où} \quad \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} \exp(-x) x^{a-1} dx \ .$$

(1) Vérifier que les lois exponentielles sont des lois Γ.

(2) Si Y suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, montrer que Y^2 suit une loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(3) Calculer l'espérance d'une v.a. X de loi $\Gamma(\lambda, a)$.