

PROCESSUS STOCHASTIQUES
EXAMEN PARTIEL

Durée : 2 heures

Calculatrices, calculettes, notes de cours et téléphones portables sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. La clareté de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1. (5 points) Soit $\lambda > 0$. On considère une suite de v.a. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, 1 \wedge (\lambda/n))$ et on se donne également une v.a. X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

- (1) Montrer que la fonction caractéristique de X s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

- (2) Montrer que, pour tout $n > \lambda$, la fonction caractéristique de X_n s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}e^{it}\right)^n.$$

- (3) En déduire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X .

On pourra utiliser, sans la démontrer, la propriété suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z/n)^n = e^z.$$

Exercice 2. (5 points) Pour tout $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$.

- (1) Montrer que la fonction de répartition de la variable X_n s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{X_n}(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) = \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \mathbf{1}_{t \in [0;1[} + \mathbf{1}_{t \geq 1}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière inférieure de x .

- (2) Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X de loi uniforme $\mathcal{U}([0; 1])$.

- (3) En déduire la convergence des sommes de Riemann : pour toute fonction continue $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Exercice 3. (10 points)

On considère une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et on pose $Y = X^2$.

- (1) Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{V}[Y]$.
- (2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Indiquer pour quelles valeurs de λ , l'espérance $\mathbb{E}[e^{\lambda Y}]$ est finie et la calculer dans ce cas.

On considère maintenant une suite de v.a.i.i.d. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de même loi que Y et on introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable S_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

La loi de la variable S_n est appelée *loi du χ^2 à n degrés de liberté*. On étudie ici le comportement asymptotique de S_n .

- (3) La suite $(S_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle \mathbb{P} -p.s.? Si oui, quelle est sa limite?
- (4) Montrer que $(S_n - n)/\sqrt{n}$ converge en loi vers une v.a. Z de loi normale dont on précisera la moyenne et la variance.

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique presque sûr de $S_n - n$.

- (5) Montrer que pour tout $\lambda < 1/2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}[e^{\lambda S_n}] = \left(\frac{1}{1-2\lambda}\right)^{n/2}$.
- (6) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall c > 0, \forall \lambda \in [0; 1/2[, \quad \mathbb{P}(S_n \geq n(1+c)) \leq e^{-\lambda n(1+c) - \frac{n}{2} \ln(1-2\lambda)}.$$

- (7) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $c > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n \geq n(1+c)) \leq e^{-\frac{n}{2}(c-\ln(1+c))}$$

On pourra étudier la fonction $\lambda \rightarrow \lambda(1+c) + \frac{1}{2} \ln(1-2\lambda)$.

On admettra dans la suite de l'exercice que l'inégalité suivante est également vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall c \in]0; 1[, \quad \mathbb{P}(S_n \leq n(1-c)) \leq e^{\frac{n}{2}(\ln(1-c)+c)}$$

- (8) Montrer que $\frac{S_n - n}{\sqrt{n} \log n}$ converge en probabilité vers 0, puis que $\frac{S_n - n}{\sqrt{n} \log n}$ converge \mathbb{P} -p.s. vers 0.