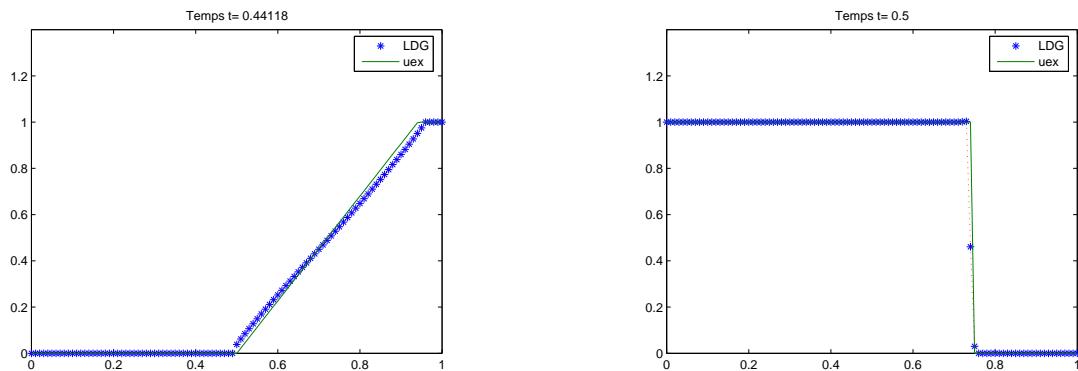


COURS METHODES D'APPROXIMATION
DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES
PAR DIFFERENCES FINIES ET VOLUMES FINIS

DAVEAU CHRISTIAN¹



1. Université de Cergy-Pontoise, Département de mathématique, 95302, Cergy-Pontoise, cedex France.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Définition d'une équation aux dérivées partielles (e.d.p)	5
1.2	Exemples et classification si l'ordre est ≤ 2	5
2	Approximation de problèmes elliptiques par la méthode des différences finies	7
2.1	Introduction du modèle	7
2.2	En une dimension d'espace	7
2.2.1	Etude de l'existence et unicité de la solution	7
2.2.2	Approximation par la méthode des différences finies (DF) . . .	10
2.2.3	Etude mathématique de la méthode des DF : stabilité au sens de la norme l^∞ , consistance	11
2.3	En deux dimension d'espace	13
2.4	Exercices	15
3	Approximation de problèmes hyperboliques par la méthode des différences finies	19
3.1	Equation de transport	19
3.1.1	Introduction	19
3.1.2	Résolution de l'équation de transport à coefficients constants .	20
3.1.3	Approximation par DF	20
3.2	D'autres schémas explicites, schéma saute-mouton	22
3.2.1	Notion de CFL	22
3.3	Equation des ondes	23
3.3.1	Formule de d'Alembert	23
3.3.2	Cône de dépendance et propagation à vitesse finie	26
3.3.3	Régularité du problème de Cauchy $f = 0$	26
3.3.4	Régularité de la solution avec un terme source	27
3.3.5	Conservation de l'énergie-Unicité	27
3.3.6	Approximation par DF	28
3.4	Exercices	29

4 Approximation d'un problème parabolique par la méthode des différences finies	33
4.1 Problème modèle	33
4.2 Schéma de Crank et Nicholson	33
4.2.1 Etablissement du schéma	33
4.2.2 Etude théorique du schéma de Crank et Nicholson : stabilité, consistance	34
5 Approximation d'un problème elliptique par la méthode des volumes finis	37
5.1 Problème modèle, maillage volumes finis	37
5.2 Schéma volumes finis et notion de Flux numérique	37
5.3 Analyse mathématique du schéma	38
5.4 Exercices	41
5.5 Annexe I : Mémento Scilab	42
5.6 Annexe II : une petite bibliothèque en scilab	43

Chapitre 1

Introduction

1.1 Définition d'une équation aux dérivées partielles (e.d.p)

C'est une équation dont l'inconnue est une fonction et portant sur les dérivées partielles de cette fonction :

- l'inconnue : $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- l'équation $F(x, u(x), Du(x), \dots D^p u(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ (ou Ω) avec
 $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n^2} \dots \times \mathbb{R}^{n^p} \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée. p s'appelle l'ordre de cette edp.

1.2 Exemples et classification si l'ordre est ≤ 2 .

Les edp sont des transcriptions mathématiques de phénomènes intervenant en physique, chimie, finance, biologie....

On distingue trois grandes catégories d'edp :

1. les edp de type elliptique dont le prototype est l'équation de Poisson

$$-\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

2. les edp de type parabolique dont le prototype est l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) - \alpha \Delta T(x, t) = 0 \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 0, \quad \alpha > 0.$$

Il s'agit d'un problème d'évolution car la variable t du temps intervient.

3. les edp de type hyperbolique dont les prototypes sont
 - l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

– l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 0.$$

Si on considère une edp d'ordre ≤ 2 à coefficients constants du type

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + b \frac{\partial^2 u}{\partial xy}(x, t) + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t) + d \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + e \frac{\partial u}{\partial y}(x, t) + f u = 0$$

avec a, b, c, d, e, f des réels donnés alors si la forme quadratique

$$q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

- est une ellipse l'edp est dite elliptique,
- est une hyperbole l'edp est dite hyperbolique,
- est une parabole l'edp est dite parabolique.

Chapitre 2

Approximation de problèmes elliptiques par la méthode des différences finies

2.1 Introduction du modèle

Le problème modèle est le suivant : soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n et f une fonction aussi régulière que nécessaire de Ω à valeurs dans \mathbb{R} . Nous cherchons u solution de l'équation de Poisson :

$$-\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Il faut préciser les conditions aux limites : nous prenons des conditions homogènes de Dirichlet

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$$

où $\partial\Omega$ désigne la frontière de l'ouvert Ω .

2.2 En une dimension d'espace

2.2.1 Etude de l'existence et unicité de la solution

Le problème devient

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (1)$$

où $f \in C^0([0, 1])$ est donnée.

Proposition 2.2.1 $\forall f \in C^0([0, 1]), \exists! u \in C^2([0, 1])$ (*solution classique*) donnée par

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy \quad \forall x \in [0, 1] \quad (2)$$

où G s'appelle la fonction de Green du problème et est définie par

$$G(x, y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x, \\ x(1-y) & \text{si } x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Preuve :

1) Existence : on peut procéder de 2 façons ; soit on intègre deux fois l'équation (1), soit on montre directement que l'expression (2) est solution de (1).

On va montrer que (2) est solution de (1) :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^1 G(x, y) f(y) dy \right) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x y(1-x) f(y) dy + \int_x^1 x(1-y) f(y) dy \right) = \\ &x(1-x)f(x) - \int_0^x yf(y) dy - x(1-x)f(x) + \int_x^1 (1-y)f(y) dy = \\ &\int_x^1 f(y) dy - \int_0^x yf(y) dy. \end{aligned}$$

Notons que $u \in C^1([0, 1])$.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -f(x).$$

Donc $u \in C^2([0, 1])$ et est solution de (1).

Remarque 2.2.1 On aurait pu être tenter d'écrire

$$\frac{du}{dx} = \int_0^1 \frac{d}{dx} G(x, y) f(y) dy$$

mais ceci est faux car $x \rightarrow G(x, y)$ n'est pas dérivable sur $[0, 1]$ pour tout $y \in [0, 1]$.

2) Unicité : le problème étant linéaire, il suffit de montrer que pour $f = 0$ la solution de (1) est nulle : si u_1 et u_2 sont solutions alors

$$-\frac{d^2}{dx^2}(u_1 - u_2)(x) = 0, \quad (u_1 - u_2)(0) = (u_1 - u_2)(1) = 0.$$

Pour montrer ce résultat il suffit de montrer que toute solution de (1) s'écrit sous la forme (2). En effet

$$\forall x \in [0, 1], \quad \int_0^1 G(x, y) 0 dy = 0.$$

Soit u solution de (1) en intégrant deux fois on a

$$u(x) = - \int_0^x \left(\int_0^s f(y) dy \right) ds + ax + b$$

avec a et b à déterminer avec les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$. On obtient $b = 0$ et $a = \int_0^1 \left(\int_0^s f(y) dy \right) ds$.

D'où $\forall x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} u(x) &= x \int_0^1 \left(\int_0^s f(y) dy \right) ds - \int_0^x \left(\int_0^s f(y) dy \right) ds \\ (Fubini) &= x \int_0^1 \left(\int_y^1 f(y) dy \right) ds - \int_0^x \left(\int_y^x f(y) dy \right) ds \end{aligned}$$

(on inverse l'ordre d'intégration)

$$\begin{aligned} &= x \int_0^1 (1-y)f(y) dy - \int_0^x (x-y)f(y) dy \\ &= \int_0^1 f(y)[x(1-y) - (x-y)X_{[0,x]}(y)] dy \end{aligned}$$

où $X_{[0,x]}$ est la fonction indicatrice de $[0, x]$. Soit $G : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$G(x, y) = x(1-y) - (x-y)X_{[0,x]}(y) \quad \forall (x, y) \in [0, 1]^2$$

si $y \in [0, x]$, $G(x, y) = x(1-y) - (x-y) = y(1-x)$ et si $y \in [x, 1]$, $G(x, y) = x(1-y)$. Ce qui termine la démonstration de la proposition.

Théorème 2.2.1 *L'application $T : C^0([0, 1]) \rightarrow C^2([0, 1])$, $f \mapsto u$ solution de (1) est continue.*

Preuve : T est linéaire (exo) il suffit donc de montrer que

$$\|T(f)\|_{C^2([0,1])} \leq C\|f\|_{C^0([0,1])} \quad \forall f \in C^0([0, 1])$$

où C est une constante indépendante de f . On rappelle que

$$\|u\|_{C^0([0,1])} = \sup_{x \in [0,1]} |u(x)|$$

et $\|u\|_{C^2([0,1])} = \|u\|_{C^0([0,1])} + \|u'\|_{C^0([0,1])} + \|u''\|_{C^0([0,1])}$. Soit $f \in C^0([0, 1])$ et u solution de (1), d'après la proposition précédente

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x, y)f(y) dy, \\ u'(x) &= \int_x^1 f(y) dy - \int_0^1 yf(y) dy \end{aligned}$$

et

$$u''(x) = -f(x).$$

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |G(x, y)| \leq 1$$

donc

$$\|u\|_{C^2([0,1])} \leq 4\|f\|_{C^0([0,1])}.$$

La deuxième propriété importante est le principe du maximum.

Proposition 2.2.2 Soit $f \in C^0([0, 1])$, et $u \in C^2([0, 1])$ la solution de (1). Alors

$$f \geq 0 \text{ implique } u \geq 0.$$

Preuve ; supposons que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, comme $G(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$ alors u est l'intégrale d'une fonction positive et est donc positive. La dernière propriété est une propriété de délocalisation du support :

Proposition 2.2.3 Soit $f \in C^0([0, 1])$ telle que $f \geq 0$ et $\text{supp}(f) \subset [x_0, x_0 + \epsilon]$ avec $x_0 \in [0, 1]$ et $\epsilon > 0$, on considère la solution u de (1) alors

$$\forall x \in]0, 1[, u(x) > 0.$$

Preuve : il suffit de remarquer que $G(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in]0, 1[^2$. Donc

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y)f(y) dy = \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} G(x, y)f(y) dy > 0 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Bilan : on retiendra qu'une équation elliptique

- est régularisante : si les données $f \in C^0$ alors la solution $u \in C^2$
- a une solution qui dépend de manière continue des données
- a une solution positive si les données sont positive
- a en général une solution non nulle sur tout l'intérieur du domaine même si les données ne sont non nulles que sur un domaine très petit.

Si les données ne sont pas régulière, $f \notin C^0([0, 1])$, il faudra définir en quel sens l'équation est vérifiée et étudier l'existence et l'unicité de solutions. Pour étendre les résultats, on utilisera la théorie des distributions et on cherchera la solution dans un espace de Sobolev.

2.2.2 Approximation par la méthode des différences finies (DF)

Nous introduisons un maillage de $[0, 1]$: pour N fixé, on introduit un pas de discréétisation $h = 1/(N + 1)$ et nous posons $x_j = j * h$, avec $j = 0, \dots, N + 1$ les $N + 2$ points du maillage.

Le but de la méthode numérique consiste à calculer des valeurs les plus exactes possibles de $u(x_i)$ pour $i = 1, N$.

La première étape consiste à trouver une formule qui permet d'approcher la dérivée $-u''$ en chacun des points x_j à l'aide des valeurs $(u(x_j))_{j=1,N}$. Pour cela, on utilise des développements de Taylor de u :

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\psi)$$

avec $\psi \in [x, x+h]$.

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\theta)$$

avec $\theta \in [x-h, x]$. On en déduit

$$u''(x) = \frac{u(x-h) + u(x+h) - 2u(x)}{h^2} + O(h^3) \quad (2).$$

Le principe de la méthode consiste à calculer un vecteur $U = (U_1, \dots, U_N)$ tels que U_i soit une bonne approximation de $u(x_i)$. En faisant $x = x_i$ dans (2) on obtient le schéma numérique

$$-\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} = F_j = f(x_j) \quad j = 1, N \quad (3)$$

avec les conditions aux limites qui permettent de déterminer U_0 et U_{N+1}

$$U_0 = U_{N+1} = 0.$$

Ce schéma s'écrit sous forme matricielle

$$AU = F$$

avec A matrice tridiagonale symétrique et inversible d'ordre N donnée par

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & \end{pmatrix}.$$

On veut calculer un vecteur $U = (U_1, \dots, U_N)$ tel que les nombres $|U_j - U(x_j)|$ soient petits. On va même prouver que ces quantités $|U_j - U(x_j)|$ tendent uniformément vers 0 lorsque h tend vers 0.

2.2.3 Etude mathématique de la méthode des DF : stabilité au sens de la norme l^∞ , consistance

Comme souvent pour des méthodes numériques, on va prouver deux propriétés fondamentales pour le schéma numérique (3) : la stabilité et la consistance. On en déduira alors la convergence de la méthode.

Definition 2.2.1 *On dira que le schéma numérique (3) est stable au sens de la norme l^∞ si*

$$\|U\|_{l^\infty} = \sup_{j=1,N} |U_j| \leq C$$

avec C constante indépendante de N .

Definition 2.2.2 Le schéma numérique (3) est consistant avec l'équation (1) si pour toute fonction u suffisamment régulière, on a

$$| -u''(x_j) + \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} | \leq Ch^p \quad j = 1, N$$

$p \geq 1$. Le nombre p s'appelle l'ordre du schéma numérique.

Proposition 2.2.4 Le schéma numérique (3) est consistant avec l'équation (1) et il est d'ordre 2. En outre on a si $u \in C^4([0, 1])$

$$| -u''(x_j) + \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} | \leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [0, 1]} |u^{(4)}(x)| \quad j = 1, N$$

Preuve : **Exercice 2.**

Definition 2.2.3 On dira qu'une matrice $A \geq 0$ si on a $A_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$.

Lemme 2.2.1 Soit $U \in \mathbb{R}^n$ tel que $V = AU \leq 0$. Alors $U \leq 0$.

Preuve : Soit $i \in [[1, N]]$ l'indice tel que $U_i = \max_{j=1, N} U_j$. Supposons $U_i > 0$. Examinons trois cas :

- si $i = 1$. $2U_1 - U_2 = h^2 V_1 \leq 0$. Mais $U_1 \geq U_2$ si bien que $2U_1 - U_2 \geq U_1$ ce qui contredit $U_1 > 0$.
- si $i = N$, même traitement
- si $2 \leq i \leq N - 1$. Nous avons $2U_i - U_{i+1} - U_{i-1} = h^2 V_i \leq 0$. D'autre part $2U_i - U_{i+1} - U_{i-1} = (U_i - U_{i+1}) + (U_i - U_{i-1}) \geq 0$. Donc $2U_i - U_{i+1} - U_{i-1} = 0$, d'où $U_i = U_{i+1} = U_{i-1}$. De proche en proche on se ramène au cas $i = 1$.

Proposition 2.2.5 La matrice A est inversible et si on note $A^{-1} = (b_{ij})$ on a $A^{-1} \geq 0$ et

$$0 < \sum_{j=1, N} b_{ij} \leq \frac{1}{8}, \quad \forall i = 1, N.$$

Preuve : A est inversiblessi $\text{Ker } A = \{0\}$. Soit $U \in \text{Ker } A$ on $AU \leq 0$ donc $U \leq 0$ d'après le lemme 2.2.1 et $A(-U) \leq 0$ donc $U \geq 0$ d'où $U = 0$. On en déduit aussi que les coefficients de l'inverse sont tous positifs ou nuls en utilisant la base canonique de \mathbb{R}^N .

D'autre part, avec la fonction $v(x) = x(1-x)/2$, on obtient le système $U = AV$ avec $U = (1, \dots, 1)$ et $V = (v(x_1), \dots, v(x_N))$. Ainsi

$$\sum_{j=1, N} b_{ij} = v(x_i) \leq \max_{x \in [0, 1]} v(x) \leq \frac{1}{8}.$$

Proposition 2.2.6 Le schéma numérique (3) est stable au sens de la norme l^∞ .

Preuve :

$$|U_i| = \left| \sum_{j=1,N} b_{ij} F_j \right| \leq \frac{1}{8} \sup_{j=1,N} |F_j|.$$

Proposition 2.2.7 La méthode est convergente et on a si $u \in C^4([0, 1])$

$$\max_{i=1,N} |u(x_i) - U_i| \leq \frac{h^2}{96} \max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|.$$

Preuve : Soit $E_j = U_j - U(x_j)$ l'erreur numérique ; On a d'après la proposition 2.2.1

$$\left| \frac{2E_j - E_{j+1} - E_{j-1}}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| \quad j = 1, N.$$

En posant $V_j = \frac{2E_j - E_{j+1} - E_{j-1}}{h^2}$ on a

$$E_i = \sum_{j=1,N} b_{ij} V_j$$

si bien que

$$|E_i| \leq \left(\sum_{j=1,N} b_{ij} \right) \max_{j=1,N} |V_j| \quad \forall i = 1, N.$$

On conclut alors avec la proposition 2.2.3.

2.3 En deux dimension d'espace

La méthode se généralise facilement en dimension 2 et 3. Considérons le problème de Poisson dans $\Omega =]0, a[\times]0, b[$

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

$$u(x, y) = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où f est une fonction donnée régulière dans Ω .

Pour mailler Ω , on considère 2 entiers N et M et on définit les pas d'espace dans les 2 directions par $h_x = \frac{a}{N+1}$ et $h_y = \frac{b}{M+1}$. On pose

$$x_i = ih_x, \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad y_j = jh_y, \quad 0 \leq j \leq M+1.$$

Nous cherchons maintenant une approximation $U_{i,j}$ du réel $u(x_i, y_j)$ pour chaque couple (i, j) . En utilisant un développement de Taylor, on a

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{2u(x_i, y_j) - u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2} + O(h_x^2),$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{2u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{h_x^2} + O(h_y^2).$$

Ainsi on a le schéma numérique suivant :

$$\frac{2U_{i,j} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{2U_{i,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{h_y^2} = F_{i,j} = f(x_i, y_j) \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq M$$

avec les conditions aux limites qui se traitent de la façon suivante

$$\begin{aligned} U_{0,j} &= U_{N+1,j} = 0, \quad 0 \leq j \leq M+1, \\ U_{i,0} &= U_{i,M+1} = 0, \quad 0 \leq i \leq N+1. \end{aligned}$$

Le schéma s'écrit sous forme matricielle

$$AU = F$$

où A est une matrice tridiagonale par blocs d'ordre $M * N$

$$A = \begin{pmatrix} B & C & & & \\ C & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & C & \\ & & C & B & \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \frac{2}{h_x^2+h_y^2} & -\frac{1}{h_x^2} & & & \\ -\frac{1}{h_x^2} & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h_x^2} & \\ & & -\frac{1}{h_x^2} & \frac{2}{h_x^2+h_y^2} & \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_y^2} & 0 & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ & 0 & -\frac{1}{h_y^2} & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et U et F les vecteurs définis par $U = (U_1, U_2, \dots, U_M)$, $F = (F_1, F_2, \dots, F_M)$ où

$$U_j = (U_{1,j}, \dots, U_{N,j}), \quad F_j = (F_{1,j}, \dots, F_{N,j}) \quad 1 \leq j \leq M.$$

Nous avons les résultats suivants à démontrer en exercice.

Proposition 2.3.1 *Le schéma numérique est consistant et il est d'ordre 2.*

Proposition 2.3.2 *Le schéma numérique est stable au sens de la norme l^∞ .*

Proposition 2.3.3 *La méthode est convergente et on a si $u \in C^4([0, 1])$*

$$\max_{i=1, N, j=1, M} |u(x_i, y_j) - U_{i,j}| \leq C(h_x^2 + h_y^2).$$

2.4 Exercices

Exercice 2.4.1 Montrer que le schéma en DF

$$\frac{-u_{j+2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j-2}}{12h^2}$$

est précis d'ordre 4 pour l'approximation de u'' .

Exercice 2.4.2 Soit la matrice dite du Laplacien carrée d'ordre $n - 1$:

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & \end{pmatrix}.$$

Nous allons chercher les valeurs propres et accessoirement les vecteurs propres de A .

1. Soit $p = (p_1, \dots, p_{n-1})$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ , donner les relations vérifiées par p_k pour $1 \leq k \leq n - 1$. en posant $p_0 = 0$ et $p_n = 0$.
2. On cherche des solutions particulières sous la forme $p_k = \sin(k\alpha)$, $k = 0, \dots, n$. En déduire λ en fonction de α .
3. Avec la condition de bord $p_n = 0$ en déduire α . puis les $n - 1$ valeurs propres de A .
4. On dit que A est normale si $AA^* = A^*A$. Pour une matrice normale

$$\text{cond}_2(A) = \frac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|}$$

où $\lambda_{\max}(A)$ et $\lambda_{\min}(A)$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre singulière de A (les valeurs propres singulières de A sont les racines carrées positives des valeurs propres de A^*A). Montrer que

$$\text{cond}_2(A) \approx \frac{4}{\pi^2 h^2}.$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{cond}_2(A_n) = +\infty$. On dira qu'une matrice est bien conditionnée si pour une norme donnée $\text{cond}(A) = |A||A^{-1}| \approx 1$ et mal conditionnée si $\text{cond}(A) >> 1$. Conclure pour la matrice du Laplacien. Le conditionnement permet de quantifier la sensibilité de la solution x du système $Ax = b$ aux perturbations des données A et b Exemple célèbre :

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

La solution est $x = (1, 1, 1, 1)^t$. Si vous prenez

$$\begin{pmatrix} 19.01 \\ 11.05 \\ 14.07 \\ 14.07 \end{pmatrix}$$

la solution est $x = (-2.34, 9.745, -4.85, -1.34)^t$.

Exercice 2.4.3 (*Simulations numériques*) On considère le problème de convection et diffusion :

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in]0, 1[, \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

On va discréteriser $-u''$ par la formule habituelle pour que le schéma soit d'ordre 2. Les conditions aux limites : pour $u(0) = 0$ on va écrire $u_0 = 0$ pour $u'(1) = 1$ on va discréteriser de 2 manières

– première méthode : on écrit $u_{N+2} = u_{N+1}$ dans la formule

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} = f_i = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq N + 1.$$

– deuxième méthode : on écrit

$$u_{N+2} = u_{N+1} + \frac{h^2}{2}u''(1) = u_{N+1} - \frac{h^2}{2}f(1).$$

Programmer les deux schémas avec $f(x) = x$. Calculer la solution exacte et tracer sur une même figure la solution exacte et la solution numérique pour les deux cas. Tracer l'erreur en fonction du nombre de mailles pour les deux schémas en échelle logarithmique. On tracera les deux droites de régression linéaire dont on calculera les équations. Conclure.

Exercice 2.4.4

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta. \quad (1)$$

où f et c sont continues sur $[0, 1]$ et α et β deux réels. On suppose de plus que $c(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

1. Donner un schéma de différences finies pour résoudre (1) en prenant pour u'' la même approximation que dans le cours.
2. Ecrire ce schéma sous forme matricielle $Ax = b$ (faites attention pour la première et dernière ligne).
3. On note $(., .)$ le produit scalaire dans \mathbb{R}^n , montrer que pour tout $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(Av, v) = \sum_1^{n-1} c_i v_i^2 + n^2(v_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} (v_i - v_{i-1})^2)$$

et en déduire que A est inversible.

4. *Simulation numérique : prendre $n = 100$, sur $[0, 2]$ $c(x) = 1$, $f(x) = 6\cos(3x)\sin(x) + 11\cos(x)\sin(3x)$ de telle sorte que la solution exacte est $u(x) = \cos(x)\sin(3x)$. Ecrire un script qui calcule la solution par le schéma de DF et qui affiche la solution exacte et numérique sur une même figure.*

Chapitre 3

Approximation de problèmes hyperboliques par la méthode des différences finies

3.1 Equation de transport

3.1.1 Introduction

On considère le problème modèle

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (1)$$

avec la condition initiale $u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 :

1. Montrer que $u(x, t) = u_0(x - at)$ est la solution pour $t \geq 0$.
2. En déduire que

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} u_0(y) \leq u(x, t) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} u_0(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

3. Nous définissons la variation totale d'une fonction par

$$VT(u) = \int_{\mathbb{R}} |u'(x)| dx.$$

Montrer que la solution u de (1) est à variation constante.

Correction :

1. $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -au'_0(x - at)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = u'_0(x - at)$ et $u(x, 0) = u_0(x)$ donc u solution de (1) ;
2. $u(x, t) = u_0(x - at)$ et $x - at \in \mathbb{R}$.

20 Approximation de problèmes hyperboliques par la méthode des différences finies

3.

$$VT(u) = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| dx = \int_{\mathbb{R}} |u'_0(x - at)| dx = \int_{\mathbb{R}} |u'_0(x)| dx = VT(u_0).$$

Nous allons chercher des schémas numériques qui préservent ces deux propriétés.

3.1.2 Résolution de l'équation de transport à coefficients constants

3.1.3 Approximation par DF

Le principe de la méthode consiste à calculer une approximation u_i^n de la solution exacte u de (1) au point $x = i\Delta x$, $t = n\Delta t$. En utilisant des développements de Taylor, on a par exemple :

$$\begin{aligned} \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= u(x, t + \Delta t) - u(x, t) + O(\Delta t^2), \\ 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) + O(\Delta x^3). \end{aligned}$$

On en déduit un premier schéma numérique :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Il s'agit d'un schéma explicite à savoir si on connaît la suite (u^n) on en déduit la suite (u^{n+1}) de façon explicite. On dit aussi que le schéma est centré en espace car la formule qui approche la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ fait intervenir les points $j - 1$ et $j + 1$.

Etude de la stabilité au sens de la norme l^2

Pour étudier la stabilité on introduit la fonction en escalier v^n définie par

$$v^n(x) = v_i^n \text{ pour } (i - \frac{1}{2})\Delta x < x < (i + \frac{1}{2})\Delta x.$$

Le produit scalaire sur L^2 qui est

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x) dx$$

coincide avec le produit scalaire de $l^2 = \{(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}, \sum_j |v_j|^2 < +\infty\}$ qui est

$$(u, v) = h \sum_j u_j v_j.$$

Par conséquent l^2 est isomorphe au sous espace de L^2 des fonctions constantes par morceaux : la fonction v^n peut être assimilée à la suite $(v_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Definition 3.1.1 On dira que le schéma numérique (1) est stable au sens de la norme l^2 si

$$\|v^n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \quad \forall n \geq 0$$

avec C constante indépendante de n .

Proposition 3.1.1 Le schéma numérique (1) est inconditionnellement instable au sens de la norme l^2 .

Preuve : pour une fonction de $u \in L^2$ on peut considérer sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(u)(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \exp(-ix\zeta) dx.$$

On rappelle que pour toute fonction $u \in L^2$,

$$\mathcal{F}(\tau_q(u))(\zeta) = \exp(iq\zeta) \mathcal{F}(u)(\zeta)$$

où $\tau_q(u) = u(x + q)$.

Le schéma en variable de Fourier s'écrit alors

$$\mathcal{F}(v^{n+1})(\zeta) = A(\zeta) \mathcal{F}(v^n)(\zeta)$$

où $A(\zeta)$ s'appelle le coefficient d'amplification et vaut

$$A(\zeta) = 1 - ia \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\Delta x \zeta).$$

Alors $\mathcal{F}(v^n)(\zeta) = (A(\zeta))^n \mathcal{F}(v^0)(\zeta)$. Si $\sin(\Delta x \zeta) \neq 0$ alors $|A(\zeta)| > 1$ donc le schéma est numériquement instable car $\|v^n\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(v^n)\|_{L^2} \rightarrow \infty$ quand n tend vers l'infini.

Etude d'un schéma implicite

A la place du schéma (1) on considère le schéma implicite centré

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

On parle de schéma implicite car il faut résoudre un système linéaire pour obtenir la suite (u^{n+1}) à partir de (u^n) .

Proposition 3.1.2 Le schéma numérique (2) est stable au sens de la norme l^2 .

Proposition 3.1.3 Le schéma numérique (2) est consistant avec l'équation de transport (1) et est d'ordre 2 en espace et un en temps.

La preuve des deux propositions est laissée au lecteur.

3.2 D'autres schémas explicites, schéma saute-mouton

3.2.1 Notion de CFL

Introduisons maintenant d'autres schémas :

- des schémas explicites : si $a < 0$ on décentre en aval

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

- si $a > 0$ on décentre en amont

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

- le schéma saute-mouton :

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Proposition 3.2.1 *Les schémas numériques (3) et (4) sont stables au sens de la norme l^∞ sous la condition CFL (Courant Friedrichs-Lax)*

$$|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Ils sont consistants avec l'équation de transport d'ordre 1 en temps et espace.

Preuve : pour le schéma (3) : on a

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) - a \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i+1}^n$$

$$|u_i^{n+1}| \leq |u_i^n| \left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) - a \frac{\Delta t}{\Delta x} |u_{i+1}^n|.$$

d'où

$$|u_i^{n+1}| \leq \|u^n\|_{l^\infty}.$$

Ainsi

$$\|u^n\|_{l^\infty} \leq \|u^0\|_{l^\infty} = C.$$

Proposition 3.2.2 *Le schéma numérique saute-mouton (5) est consistant avec l'équation de transport d'ordre 2 en temps et espace. Il est stable au sens de la norme l^2 sous la condition CFL (Courant Friedrichs-Lax)*

$$|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Preuve : pour la stabilité :

En variables de Fourier le schéma s'écrit

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}(v^{n+1})(\zeta) \\ \mathcal{F}(v^n)(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ia\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\Delta x \zeta) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}(v^n)(\zeta) \\ \mathcal{F}(v^{n-1})(\zeta) \end{pmatrix}.$$

Sous la condition CFL les valeurs propres de la matrice est

$$\lambda_1 = -ia\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\Delta x \zeta) + \sqrt{1 - a^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(\Delta x \zeta)}$$

$$\lambda_2 = -ia\frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\Delta x \zeta) - \sqrt{1 - a^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(\Delta x \zeta)}$$

Comme $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ donc la puissance n^{ieme} de la matrice est donc bornée. (A^n est bornée si et seulement si son rayon spectral $\rho(A) \leq 1$, $\rho(A) = \max\{|\lambda_k|, \lambda_k \text{ valeur propre de } A\}$).

3.3 Equation des ondes

3.3.1 Formule de d'Alembert

On s'intéresse ici à l'approximation de l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \forall x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, t=0) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t=0) = u_1(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dans tout ce qui suit, on suppose que les données initiales sont à support compact

$$u_0(x) = u_1(x) = 0 \quad \forall |x| \geq L.$$

Théorème 3.3.1 *La solution du problème est donnée par la formule de d'Alembert*

$$u(x, t) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{|y-x| \leq c(t-s)} f(y, s) dy ds.$$

Remarque 3.3.1 *Cette formule montre en particulier que la solution du problème de Cauchy (ie $f = 0$) se décompose sous la forme*

$$u(x, t) = u^+(x, t) + u^-(x, t)$$

où

- $u^+(x, t) = f(x-ct)$ correspond à une onde qui se propage dans la direction des $x > 0$,
- $u^-(x, t) = g(x+ct)$ correspond à une onde qui se propage dans la direction des $x < 0$.

24 Approximation de problèmes hyperboliques par la méthode des différences finies

Preuve du théorème : on se restreint au cas $f = 0$, si ce n'est pas le cas la démonstration reste semblable mais plus technique. L'idée est d'utiliser la relation $\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)$ c'est à dire voir l'équation des ondes comme deux équations de transport se propageant en sens inverse, et d'introduire des variables qui permettent d'intégrer directement :

$$\partial_\xi \iff \partial_t + c\partial_x \text{ et } \partial_\eta \iff \partial_t - c\partial_x$$

c'est à dire

$$\xi = x + ct$$

$$\eta = x - ct$$

et

$$U(\xi, \eta) = u(x, t).$$

On a donc

$$x = \frac{\xi + \eta}{2},$$

$$t = \frac{\xi - \eta}{2c},$$

et

$$\partial_\xi U = \partial_x u \partial_\xi x + \partial_t u \partial_\xi t = \frac{1}{2c} (\partial_t + c\partial_x) u,$$

$$\partial_\eta U = \partial_x u \partial_\eta x + \partial_t u \partial_\eta t = -\frac{1}{2c} (\partial_t - c\partial_x) u.$$

L'équation des ondes se réécrit

$$\partial_{\xi\eta}^2 U(\xi, \eta) = 0. \quad (*)$$

Les conditions initiales en $t = 0$ deviennent en $\xi = \eta$

$$U(\xi, \xi) = u_0(\xi),$$

$$\partial_\eta U(\xi, \xi) - \partial_\xi U(\xi, \xi) = -\frac{u_1(\xi)}{c}.$$

En intégrant $(*)$ respectivement par rapport à ξ puis η on obtient :

$$(i) \quad \partial_\eta U(\xi, \eta) = G(\eta),$$

$$(ii) \quad \partial_\xi U(\xi, \eta) = F(\xi)$$

et la deuxième condition initiale devient

$$G(\xi) - F(\xi) = -\frac{u_1(\xi)}{c}.$$

Intégrons (i) par rapport à η entre $\eta_0 = \xi$ et η :

$$U(\xi, \eta) - U(\xi, \xi) = \int_{\xi}^{\eta} G(s) ds$$

ce qui se réécrit avec la CL

$$U(\xi, \eta) - u_0(\xi) = \int_{\xi}^{\eta} G(s) ds.$$

De même, on intègre (ii) par rapport à ξ entre $\xi_0 = \eta$ et ξ

$$U(\xi, \eta) - U(\eta, \eta) = - \int_{\eta}^{\xi} F(s) ds$$

donc

$$U(\xi, \eta) - u_0(\eta) = - \int_{\xi}^{\eta} F(s) ds$$

et en sommant on a

$$2U(\xi, \eta) = u_0(\xi) + u_0(\eta) + \int_{\eta}^{\xi} \frac{u_1(s)}{c} ds$$

ce qui donne la formule de d'Alembert.

Exercice 3.3.1 On rappelle que la transformée de Fourier en espace de f est

$$\mathcal{F}(f)(k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} dx$$

et la transformée de Fourier inverse

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(k) e^{ikx} dk.$$

1. Montrer que la transformée de la solution de l'équation des ondes a l'expression suivante :

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}_0(k) \cos(ckt) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(ckt)}{ck}.$$

2. Montrer que

$$\mathcal{F}(\tau_{x_0} f)(k) = e^{-ikx_0} \hat{f}(k)$$

avec $\tau_{x_0} f(x) = f(x - x_0)$

$$\mathcal{F}(f * g)(k) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \hat{g}(k).$$

26 Approximation de problèmes hyperboliques par la méthode des différences finies

3. Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}(\cos(ckt)) = \frac{1}{2}(\delta(x-ct) + \delta(x+ct))$$

(on rappelle que $\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$) et

$$\hat{H}(k) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}vp\left(\frac{1}{k}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta$$

où H est la fonction d'Heaviside et $vp\left(\frac{1}{k}\right)$ la valeur principale de $\frac{1}{k}$ définie par :

$$\langle vp\left(\frac{1}{k}\right), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(k)}{k} dk.$$

En déduire que

$$\mathcal{F}(H(x-x_0) - H(x+x_0))(k) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(kx_0)}{k}.$$

4. Conclure

3.3.2 Cône de dépendance et propagation à vitesse finie

D'après la formule de d'Alembert, on voit que pour calculer la solution au point $M = (x, t)$ on n'a besoin des conditions initiales et du second membre seulement dans le cône de sommet M et de base $[A, B]$ avec $A = (x-ct, 0)$ et $B = (x+ct, 0)$ appelé cône de dépendance $D(M)$. On en déduit une propriété essentielle des ondes qui est leur propagation à vitesse finie. En effet, si on se donne f à support dans $K = [a, b]$ en x et les conditions initiales u_0 et u_1 à support dans K , la solution est à support dans $[a-ct, b+ct]$.

3.3.3 Régularité du problème de Cauchy $f = 0$

D'après la formule de d'Alembert, on voit que si $u_0 \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ et $u_1 \in C^k(\mathbb{R})$ alors $u(., t) \in C^k(\mathbb{R})$. Autrement dit, dans l'équation des ondes, $\partial_t u$ et $c\partial_x u$ sont de même nature, et si on suppose que $(\partial_t u(0), c\partial_x u(0)) \in C^k(\mathbb{R}) \times C^k(\mathbb{R})$ alors on a $(\partial_t u(., t), c\partial_x u(., t)) \in C^k(\mathbb{R}) \times C^k(\mathbb{R})$. On dit que l'équation des ondes conserve la régularité, et ceci est une caractéristique de la famille des équations hyperboliques linéaires. Les équations paraboliques (équation de la chaleur) régularisent : même pour une donnée non régulière, la solution est régulière pour $t > 0$. Les équations hyperboliques non linéaires peuvent introduire des singularités, même pour des données très régulières (équations de Burgers et chocs).

3.3.4 Régularité de la solution avec un terme source

Si on compare aux problèmes elliptiques, type Laplacien, il est naturel de se demander si on gagne deux crans de régularité en passant de f à u ? La réponse en général est non... On va voir qu'on ne gagne qu'un cran de régularité. On n'obtient pas facilement d'informations à partir de la formule explicite de la solution, mais plutôt à partir de son expression en Fourier. On peut montrer que la solution du problème source vérifie

$$\hat{u}(k, t) = \int_0^t \frac{\sin(ck(t-s))}{ck} \hat{f}(k, s) ds$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} c \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(k, t) &= i \int_0^t \sin(ck(t-s)) \hat{f}(k, s) ds \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k, t) &= \int_0^t \cos(ck(t-s)) \hat{f}(k, s) ds \end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz on obtient alors :

$$\begin{aligned} |c \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(k, t)|^2 &\leq t \int_0^t |\hat{f}(k, s)|^2 ds, \\ |\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k, t)|^2 &\leq t \int_0^t |\hat{f}(k, s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Finalement Plancherel nous permet de conclure :

$$\begin{aligned} \|c \frac{\partial u}{\partial x}\|_{L^2}^2(t) &\leq t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |f(k, s)|^2 dx ds, \\ \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^2}^2(t) &\leq t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |f(k, s)|^2 dx ds \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R})) \implies u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R})) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R})).$$

3.3.5 Conservation de l'énergie-Unicité

On définit l'énergie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \right) dx.$$

Exercice 3.3.2 1- En absence de terme source ($f = 0$), montrer qu'il y a conservation de l'énergie, i.e.

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \|u_1\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|^2, \forall t > 0.$$

On pourra montrer ce résultat de deux façons. La première façon consiste à partir de l'équation des ondes, à la multiplier par $\partial_t u$ et à intégrer par parties. La deuxième démonstration se fait directement à partir de la formule de d'Alembert.

2- En déduire l'unicité de la solution.

3- On rajoute maintenant un terme source $f \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que, à tout instant, l'énergie reste bornée :

$$E(t)^{1/2} \leq E(0)^{1/2} + C \int_0^t \|f\|(s) ds.$$

3.3.6 Approximation par DF

Exercice 3.3.3 On s'intéresse à l'approximation de l'équation des ondes 1D :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1).$$

On considère pour (1) le schéma numérique :

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h^\alpha u_h^n = 0$$

avec

$$A_h^\alpha u_h(x) = -\alpha \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - (1-\alpha) \frac{u(x+2h) - 2u(x) + u(x-2h)}{4h^2}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que pour toute fonction u suffisamment régulière, on a

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + \frac{h^2}{12} \frac{d^4 u}{dx^4}(x) + O(h^4).$$

2. En déduire α tel que pour toute fonction u suffisamment régulière

$$A_h^\alpha u_h(x) = -\frac{d^2 u}{dx^2}(x) + O(h^4).$$

On notera α_0 cette valeur de α .

3. Déterminer le symbole de $A_h^\alpha u_h(x)$, c'est à dire la fonction \hat{A}_h^α telle que :

$$\mathcal{F}(A_h^\alpha u)(\zeta) = \hat{A}_h^\alpha \mathcal{F}u(\zeta).$$

(on exprimera \hat{A}_h^α uniquement à l'aide de $\sin^2(\zeta h/2)$ et on rappelle que

$$\mathcal{F}(\tau_{qh} u_h)(\zeta) = e^{iq\zeta h} \hat{u}_h(\zeta),$$

avec $(\tau_{qh} u_h)(x) = u_h(x + qh)$.

4. Par la méthode de Fourier, montrer que la condition de stabilité L^2 pour le schéma numérique pour $\alpha = \alpha_0$ est

$$\frac{\Delta}{h} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(on montrera que $\hat{u}_h^{n+1}(\zeta) + (\Delta t^2 \hat{A}_h^{\alpha_0}(\zeta) - 2)\hat{u}_h^n(\zeta) + \hat{u}_h^{n-1}(\zeta) = 0$ et $\hat{A}_h^{\alpha_0}(\zeta) \leq \frac{4\alpha_0 \Delta t^2}{h^2}$.)

3.4 Exercices

Exercice 3.4.1 Soit le schéma de Lax-Friedrichs pour l'équation de transport

$$v_i^{n+1} = \frac{v_{i-1}^n + v_{i+1}^n}{2} - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (v_{i+1}^n - v_{i-1}^n).$$

1. Montrer que ce schéma est consistant et donné l'ordre.
2. Sous la CFL

$$|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

montrer que le schéma est stable au sens de la norme L^2 .

3. Montrer que le schéma vérifie le principe de maximum discret

$$\inf_{j \in \mathbb{Z}} v_j^0 \leq v_i^n \leq \max_{j \in \mathbb{Z}} v_j^0.$$

4. Montrer alors que la variation totale de la solution numérique

$$VT^n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j^n - v_{j-1}^n|$$

est décroissante.

Exercice 3.4.2 Équation de convection

On se propose de résoudre numériquement l'équation de convection avec conditions de périodicité au bord

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{pour tout } (x, t) \in [a, b] \times]0, T] \\ u(t=0, x) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ u(t, a) = u(t, b) & \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (3.1)$$

On prendra $a = -10$, $b = 10$.

- a. Quelle est la solution exacte de cette équation ?
- b. Implémenter le schéma explicite centré de l'équation d'advection. Vérifier qu'il est inconditionnellement instable.

30 Approximation de problèmes hyperboliques par la méthode des différences finies

- c.** Rendre le schéma précédent L^2 stable en utilisant une version implicite du schéma (utiliser les fonctions `lufact` et `lusolve(splu, b)` pour résoudre le système linéaire). On comparera la solution obtenue avec la solution exacte pour tout temps.
- d.** Implémenter les schémas explicites décentrés amont et aval. Étudier stabilité et convergence.
- e.** Même questions pour les schémas de Lax-Friedrichs et Lax-Wendroff. Comparer le comportement de ces deux derniers schémas lorsque la condition initiale est un créneau.

Conseils de programmation : Scilab est optimisé pour effectuer rapidement des opérations sur les matrices et vecteurs. Il est donc fortement conseillé d'effectuer vos opérations directement sur les vecteurs et non sur les éléments de ces vecteurs. Ainsi, il est beaucoup plus rapide (et clair) d'effectuer sous Scilab

`u=v+w;`

pour additionner les deux vecteurs v et w , que d'effectuer une boucle explicite

```
for i=1:size(v, 'c')
u(i)=v(i)+w(i);
end
```

De même, il vaut mieux effectuer l'opération

`u(2:10)=v(1:9);`

que

```
for i=1:9
u(i+1)=v(i);
end
```

pour décaler un vecteur sur la droite. En particulier, pour le travail demandé ici, seule la boucle sur la variable en temps est nécessaire.

Exercice 3.4.3 (Simulations numériques) On considère le problème de convection et diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \leq 0, \quad u(x, 0) = u^0(x).$$

On prend $a = 1$ et $CFL = 0.6$. Le temps physique de la simulation est $T = 0.2s$. On ajoute les conditions aux limites $v_0^n = v_1^n$, $v_{N+1}^n = v_N^n$ de type Neumann ; comme le domaine est non borné pour faire des calculs sur ordinateur, on se donne un domaine de calcul par ex ici $\Omega = [0, 1]$ et on ajoute des conditions aux limites qui laissent sortir les ondes du domaine de calcul. Programmer en matlab ou scilab les schémas

implicite, saute mouton Lax-Friedrichs et décentré pour les deux conditions initiales suivantes

$$v_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0.375 \\ 16\sin(4\pi \frac{x-0.375}{0.25}) \frac{(x-0.375)^2(x-0.625)^2}{0.25^4} & \text{si } 0.375 \leq x \leq 0.625 \\ 0 & \text{si } x > 0.625 \end{cases}$$

$$v_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0.5 \\ 0 & \text{si } x > 0.5 \end{cases}$$

Exercice 3.4.4 En vous inspirant du script du schéma décéntré amont programmer le schéma de Lax-Wendroff

$$v_i^{n+1} = v_i^n - V \frac{\Delta t}{2\Delta x} (v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) + V^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)$$

avec les données :

```
dx = 0.1; // dx = pas d'espace
V = 70; // vitesse de convection
cfl = 0.9; // cfl
dt = dx*cfl/V; // dt = pas de temps
Tfinal=0.5; // Temps final souhaité
lg=10; // Demi-longueur du domaine
```

```
nx = 2*lg/dx+1; // nx = nombre de noeuds
nt = int(Tfinal/dt); // nt = nombre de pas de temps effectués.
```

```
Tfinal=nt*dt; // Temps final.
```

```
//  
// initialisation  
//
```

```
x=linspace(-lg,lg,nx);
```

```
f0=creneau;  
//f0=bosse;
```

Partie théorique:

1. Montrer que le schéma est consistant à l'ordre 2.
2. Calculer le coefficient d'amplification et montrer que $\{A(\xi); \xi \in \mathbb{R}\}$ est une ellipse dont les axes principaux sont horizontaux et verticaux. Calculer $A(0)$,

32 Approximation de problèmes hyperboliques par la méthode des différences finies

$A(\frac{\pi}{2})$ et $A(\frac{3\pi}{2})$ et en déduire que le schéma est stable pour la norme L^2 ssi

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Chapitre 4

Approximation d'un problème parabolique par la méthode des différences finies

4.1 Problème modèle

On considère le problème modèle

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \quad \forall x \in \Omega =]0, 1[, t \geq 0 \quad (1)$$

avec les conditions aux limites homogènes de Dirichlet

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

et la condition initiale $u(x, 0) = g(x) \quad \forall x \in \Omega$. On suppose $\alpha > 0$.

4.2 Schéma de Crank et Nicholson

4.2.1 Etablissement du schéma

Soit un entier N définissons le pas d'espace $\Delta x = \frac{1}{N+1}$. On considère le schéma le plus utilisé, le schéma de Crank et Nicholson :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ &+ \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + \Delta t f_j^n \quad 1 \leq j \leq N, \quad \forall n \geq 0 \\ u_0^n &= u_{N+1}^n = 0, \quad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

et

$$u_j^0 = g_j = g(x_j), \quad 0 \leq j \leq N+1.$$

4.2.2 Etude théorique du schéma de Crank et Nicholson : stabilité, consistance

Proposition 4.2.1 *Le schéma numérique de Crank et Nicholson est stable au sens de la norme l^2 et consistant avec (1) d'ordre 2 en temps et espace.*

Preuve :

Etude de la consistance : on a

$$\begin{aligned} \frac{u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - u(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} - \frac{\alpha}{2\Delta x^2} [u((j+1)\Delta x, n\Delta t) - 2u(j\Delta x, n\Delta t) - u((j-1)\Delta x, n\Delta t) \\ + u((j+1)\Delta x, (n+1)\Delta t) - 2u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - u((j-1)\Delta x, (n+1)\Delta t)] = \\ \frac{u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - u(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} - \frac{\alpha}{2} [\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(j\Delta x, n\Delta t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(j\Delta x, (n+1)\Delta t)] + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\frac{u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - u(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(j\Delta x, n\Delta t) + O(\Delta t)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(j\Delta x, (n + \frac{1}{2})\Delta t) = \frac{\partial u}{\partial t}(j\Delta x, n\Delta t) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(j\Delta x, n\Delta t) + O(\Delta t^2)$$

d'où

$$\frac{u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - u(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(j\Delta x, (n + \frac{1}{2})\Delta t) + O(\Delta t^2).$$

Avec l'estimation

$$\frac{1}{2} [\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(j\Delta x, n\Delta t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(j\Delta x, (n+1)\Delta t)] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(j\Delta x, (n + \frac{1}{2})\Delta t) + O(\Delta t^2)$$

on a le résultat

$$\begin{aligned} \frac{u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - u(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} - \frac{\alpha}{2\Delta x^2} [u((j+1)\Delta x, n\Delta t) - 2u(j\Delta x, n\Delta t) - u((j-1)\Delta x, n\Delta t) \\ + u((j+1)\Delta x, (n+1)\Delta t) - 2u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - u((j-1)\Delta x, (n+1)\Delta t)] = \\ \frac{\partial u}{\partial t}(j\Delta x, (n + \frac{1}{2})\Delta t) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(j\Delta x, (n + \frac{1}{2})\Delta t) + O(\Delta x^2 + \Delta t^2). \end{aligned}$$

Etude de la stabilité :

Le schéma de Crank et Nicholson peut aussi s'écrire sous la forme

$$U^{n+1} = \Delta f F^n + U^n - \alpha \Delta t A \left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right)$$

avec

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & \end{pmatrix}.$$

Ainsi si on prend $F = 0$

$$U^{n+1} = (I + \frac{\alpha \Delta t}{2} A)^{-n} (I - \frac{\alpha \Delta t}{2} A)^n U^0.$$

Or les valeurs propres de

$$(I + \frac{\alpha \Delta t}{2} A)^{-1} (I - \frac{\alpha \Delta t}{2} A)$$

sont les réels

$$\frac{2 - \alpha \Delta t \lambda_k}{2 + \alpha \Delta t \lambda_k}, \quad 1 \leq k \leq N$$

avec

$$\lambda_k = 2 \frac{1}{\Delta x} [1 - \cos(\frac{k\pi}{N+1})], \quad 1 \leq k \leq N.$$

Les λ_k sont les valeurs propres de A .

Exercice 4.2.1 *On considère le problème*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

avec $\alpha > 0$ et la donnée initiale $u(x, 0) = u_0(x)$. On considère le schéma numérique de DF

$$\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} - \alpha \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = f(j\Delta x, n\Delta t), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer en variable de Fourier le schéma numérique.
2. Calculer le coefficient d'amplification et étudier la stabilité L^2 du schéma.
3. Quelle est la précision du schéma.

Exercice 4.2.2 —

1 Équation de la chaleur - Schéma explicite

3 On se propose de résoudre numériquement l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pour tout } (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, T] \\ u(t=0, x) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.1)$$

36 Approximation d'un problème parabolique par la méthode des différences finies

On rappelle que la solution exacte de cette équation est connue et que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}\right) dy. \quad (4.2)$$

a. Écrire un script **scilab** qui calcul numériquement la solution de l'équation (4.1) à l'aide d'un schéma explicite centré d'ordre 2. Afin de tester la méthode, on pourra choisir

$$u_0(x) = \max(0, 1 - x^2),$$

$\nu = 1$ et $T = 1$. Bien entendu, il est impossible d'utiliser la méthode des différences finies sur \mathbb{R} tout entier. On se restreindra donc à un "gros" domaine, par exemple $]-10, 10[$ et on imposera les conditions $u(10, t) = u(-10, t) = 0$ pour tout temps t . A chaque itération en temps (ou toutes les p itérations), on visualisera la solution obtenue.

b. Vérifier numériquement que la condition CFL

$$2\nu\Delta t \leq (\Delta x)^2$$

est nécessaire et suffisante pour assurer la stabilité du schéma.

c. Calculer numériquement la solution exacte donnée par (4.2) au temps final $t = T$. Vérifier visuellement la convergence de la solution calculée par la méthode des différences finies vers la solution exacte en superposant sur un même graphique les deux solutions obtenue pour $t = T$.

2 Équation de la chaleur - Schéma Implicite

Le schéma explicite précédent à le désavantage de nécessiter l'usage de pas de temps d'autant plus petits que la discrétisation en espace est fine. Afin de circonvenir à ce problème, une solution consiste à utiliser le schéma implicite centré.

Reprendre toutes les questions précédentes avec le schéma implicite centré. Vérifier en particulier la stabilité du schéma même lorsque la condition CFL du schéma explicite n'est pas vérifiée.

Conseils de programmation : La matrice du système introduit est creuse. Cette particularité doit absolument être exploitée. Elle permet d'économiser de manière drastique capacités en temps de calcul et mémoire. Pour la construction de la matrice, utiliser **spzeros**, **speye** et l'opérateur **colon**. Pour la résolution du système linéaire, utiliser la factorisation de Cholesky **chfact(A)** et **chsolve**

Chapitre 5

Approximation d'un problème elliptique par la méthode des volumes finis

5.1 Problème modèle, maillage volumes finis

On considère le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \quad]0, 1[\quad (1)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (2).$$

Definition 5.1.1 On appelle maillage volume finis de l'intervalle $[0, 1]$ un ensemble de N mailles $(K_i)_{i=1,N}$ telles que $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$, avec $x_{1/2} = 0 < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1$, et on note $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. On se donne également N points $(x_i)_{i=1,N}$ situés dans les mailles K_i . On a donc

$$0 = x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_i < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1.$$

On notera $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, et $h = \max_{i=1,N} h_{i+1/2}$ et pour des questions de notations on posera également $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$.

5.2 Schéma volumes finis et notion de Flux numérique

On intègre l'équation (1) sur K_i , et on obtient :

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = \int_{K_i} f(x) dx.$$

On pose

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x) dx.$$

On introduit les variables discrètes $(u_i)_{i=1,N}$, une par maille qui devraient être de bonne approximations de $u(x_i)$.

On a le schéma numérique :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = h_i f_i, \quad i = 1, N,$$

où $F_{i+1/2}$ appelé le flux numérique en $x_{i+1/2}$ devrait être une bonne approximation de $-u'(x_{i+1/2})$.

Le principe de la méthode des volumes finis est d'arriver à écrire les flux numériques en fonctions des variables discrètes (u_i) .

On pose alors

$$F_{i+1/2} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}, \quad i = 1, N$$

et

$$F_{1/2} = -\frac{u_1}{h_{1/2}} \quad F_{N+1/2} = -\frac{u_N}{h_{N+1/2}}$$

pour tenir compte des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. On peut aussi écrire :

$$F_{i+1/2} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}, \quad i = 0, N + 1$$

en posant $u_0 = u_{N+1} = 0$.

On peut écrire le schéma sous forme matricielle

$$AU = b$$

avec $U = (u_1, \dots, u_N)$, $b_i = f_i$, $i = 1, N$ et

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \left(\frac{1}{h_{1/2}} - \frac{1}{h_{3/2}} \right) & -\frac{1}{h_1} \frac{1}{h_{3/2}} & \cdots & & \\ & \frac{1}{h_2} \frac{1}{h_{3/2}} & \frac{1}{h_2} \left(\frac{1}{h_{3/2}} - \frac{1}{h_{5/2}} \right) & & -\frac{1}{h_2} \frac{1}{h_{5/2}} \\ & & \ddots & & \ddots \\ & & -\frac{1}{h_i} \frac{1}{h_{i-1/2}} & \frac{1}{h_i} \left(\frac{1}{h_{i-1/2}} - \frac{1}{h_{i+1/2}} \right) & -\frac{1}{h_i} \frac{1}{h_{i+1/2}} \\ & & & \ddots & \\ & & \cdots & & \frac{1}{h_N} \frac{1}{h_{N-1/2}} & \frac{1}{h_N} \left(\frac{1}{h_{N-1/2}} - \frac{1}{h_{N+1/2}} \right) \end{pmatrix}$$

5.3 Analyse mathématique du schéma

Proposition 5.3.1 Si $f \in C([0, 1])$ et la solution exacte $u \in C^2([0, 1])$ alors le schéma volume finis (3) a une unique solution (u_i) .

Preuve : Avec $f_i = 0$, le schéma peut s'écrire

$$-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} \quad i = 1, N$$

avec $u_0 = u_{N+1} = 0$. En multipliant par u_i et en sommant de $i = 1, N$ on obtient

$$\sum_{i=1}^N -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + \sum_{i=1}^N \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} = 0.$$

En effectuant un changement d'indice sur la deuxième somme, on obtient :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + \sum_{i=0}^{N-1} N - 1 \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} = 0.$$

En regroupant les termes , on a donc

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h_{i+1/2}} + \frac{u_1^2}{h_{1/2}} + \frac{u_N^2}{h_{N+1/2}} \right) = 0.$$

Ceci démontre l'unicité de (u_i) et donc l'existence puisque le système est carré d'ordre N . On rappelle qu'une matrice A est inversible ssi son noyau est réduit au vecteur nul.

Lemme 5.3.1 (*Consistance des Flux*) Soit $u \in C^2([0, 1])$ solution de l'équation (1). On note $\bar{F}_{i+1/2} = -u'(x_{i+1/2})$ le flux exact en $x_{i+1/2}$ et $F_{i+1/2}^* = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}$ le quotient différentiel qui approche la dérivée première $-u'(x_{i+1/2})$. On dit que le flux est consistant s'il existe une constante $C \in R_+$ ne dépendant que de u telle que l'erreur de consistance sur le flux définie par

$$R_{i+1/2} = \bar{F}_{i+1/2} - F_{i+1/2}^*,$$

vérifie

$$|R_{i+1/2}| \leq Ch.$$

Preuve : utiliser des développements de Taylor.

Definition 5.3.1 (*Conservativité des flux*) On dit que le schéma est conservatif si lorsque l'on considère une interface $x_{i+1/2}$ entre les 2 mailles K_i et k_{i+1} le flux entrant est égal au flux sortant.

Théorème 5.3.1 Soit $u \in C^2([0, 1])$ solution de l'équation (1). On pose $e_i = u(x_i) - u_i$, $i = 1, N$ et $e_0 = e_{N+1} = 0$. Il existe $C \geq 0$ ne dépendant que de u telle que

1.

$$\sum_{i=1}^N \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h} \leq Ch^2$$

2.

$$\sum_{i=1}^N e_i^2 \leq Ch$$

3.

$$\max_{i=1,N} |e_i| \leq Ch.$$

Preuve : Ecrivons le schéma volumes finis :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = h_i f_i$$

et l'équation exacte intégrée sur la maille K_i

$$\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} = h_i f_i.$$

En les soustrayant on a :

$$\bar{F}_{i+1/2} - F_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} + F_{i-1/2} = 0.$$

D'où

$$F_{i+1/2}^* - F_{i+1/2} - F_{i-1/2}^* + F_{i-1/2} = -R_{i+1/2} + R_{i-1/2}.$$

ou encore

$$-\frac{1}{h_{i+1/2}}(e_{i+1} - e_i) + \frac{1}{h_{i-1/2}}(e_i - e_{i-1}) = -R_{i+1/2} + R_{i-1/2}.$$

On multiplie par e_i et on somme de 1 à N :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{1}{h_{i+1/2}}(e_{i+1} - e_i)e_i + \sum_{i=1}^N +\frac{1}{h_{i-1/2}}(e_i - e_{i-1})e_i = \sum_{i=1}^N -R_{i+1/2}e_i + \sum_{i=1}^N -R_{i-1/2}e_i,$$

soit

$$\sum_{i=1}^N -\frac{1}{h_{i+1/2}}(e_{i+1} - e_i)e_i + \sum_{i=0}^{N-1} +\frac{1}{h_{i+1/2}}(e_{i+1} - e_i)e_{i+1} = \sum_{i=1}^N -R_{i+1/2}e_i + \sum_{i=0}^{N-1} R_{i+1/2}e_{i+1}.$$

En réordonnant les termes, on obtient

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} = \sum_{i=0}^N R_{i+1/2}(e_{i+1} - e_i).$$

Or $R_{i+1/2} \leq Ch$ donc :

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \leq Ch \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)}{\sqrt{h_{i+1/2}}} \sqrt{h_{i+1/2}}$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \leq Ch \left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^N h_{i+1/2} \right)^{1/2}.$$

Or $\sum_{i=0}^N h_{i+1/2})^{1/2} = 1$, on en déduit que :

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \leq Ch \left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \right)^{1/2},$$

et donc

$$\left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \right)^{1/2} \leq Ch.$$

Pour 3) :

$$|e_i| = \left| \sum_{j=1}^i e_j - e_{j-1} \right| \leq \sum_{j=0}^N |e_j - e_{j-1}|.$$

Donc par CS

$$|e_i| \leq \left(\sum_{j=0}^N \frac{(e_j - e_{j-1})^2}{h_{j+1/2}} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^N h_{j+1/2} \right)^{1/2}$$

d'où 3), et 2) s'en déduit immédiatement.

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1 On considère le problème

$$-u''(x) = f(x), \quad]0, 1[\quad (1)$$

$$u(0) = a, \quad u(1) = b, \quad (2).$$

Ecrire les schémas différences finies et volumes finis avec un pas constant en donnant la matrice et le second membre.

Exercice 5.4.2 On s'intéresse au conditionnement pour la norme euclidienne de la matrice issue d'une discréétisation par Différences Finies du probl'eme aux limites suivant :

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in]0, 1[, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (1)$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $U = (u_j)$ $j = 1 \dots N$ une valeur approchée de la solution u du problème (1) aux points $\frac{j}{N+1}$, $j = 1 \dots N$. On rappelle que la discréétisation par différences finies de ce probl'eme consiste à chercher U comme solution du système linéaire $AU = f(\frac{j}{N+1})$, $j = 1 \dots N$ où la matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$ est définie par $A = (N+1)^2 B + Id$, Id désigne la matrice identité et

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (*Valeurs propres de la matrice B.*) On rappelle que le problème aux valeurs propres

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad x \in]0, 1[, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (2)$$

admet la famille (λ_k, u_k) , $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_k = (k\pi)^2$ et $u_k(x) = \sin(k\pi x)$ comme solution. Montrer que les vecteurs $U_k = u_k(\frac{j}{N+1})$ $j = 1 \dots N$ sont des vecteurs propres de la matrice B . En déduire toutes les valeurs propres de la matrice B .

2. En déduire les valeurs propres de la matrice A .
 3. En déduire le conditionnement pour la norme euclidienne de la matrice A .

Exercice 5.4.3 (*Non consistance des volumes finis*) Montrer que la discréétisation de l'opérateur $-u''$ par le schéma volumes finis n'est pas toujours consistante au sens des différences finies, i.e. que l'erreur de consistance définie par

$$R_i = \frac{1}{h_i} \left[\frac{1}{h_{i+1/2}} (u(x_{i+1}) - u(x_i)) + \frac{1}{h_{i-1/2}} (u(x_i) - u(x_{i-1})) \right] - u''(x_i)$$

ne tend pas toujours vers 0 lorsque h tend vers 0.

5.5 Annexe I : Mémento Scilab

Scilab peut-être utilisé directement en tapant les commandes en ligne, soit par l'intermédiaire de fichier de fonctions (.sci) et de scripts (.sce), c'est à dire de listes de commandes exécutables. La syntaxe de Scilab est très proche de Matlab. Pour connaître la fonction d'une commande Scilab, taper help suivi du nom de la commande. Par exemple

```
help help;
```

La commande apropos permet de rechercher les occurrences d'un mot dans l'aide de Scilab. Enfin, rappelons qu'une commande suivie d'un point virgule désactive sa sortie texte. Quelques commandes utiles (consulter l'aide de scilab pour plus de détails)

Commandes diverses

exec('toto.sce') - Exécute le script toto.sce

getf('fonctions.sci') - Charge dans l'environnement Scilab les fonctions définies par le fichier **fonctions.sci**
halt() - Effectue une pause jusqu'à l'activation du clavier
modulo(r,s) - Calcul le r modulo s
for ... end- Déclaration d'une boucle. exemple :

$$\begin{aligned} &\text{for } i=1:nx \\ &\quad u[i]=i; \\ &\text{end} \end{aligned}$$

clear - Supprime les variables précédemment définies
exit - Pour quitter Scilab

Opérations sur les vecteurs et matrices

linspace(x1,x2 ,n) - Création d'un vecteur colonne aux valeurs équiréparties
: - Opérateur d'extraction de sous-matrices et sous-vecteurs. exemple :
 $u(1:10)=v(5:15)$
Copie le vecteur (v_5, \dots, v_{15}) dans le vecteur
 (u_1, \dots, u_{15}) .
spzeros(n,p) - Création d'une matrice creuse nulle de taille $n \times p$.
speye(n,n) - Création d'une matrice identité creuse de taille $n \times n$.
spcho=chfact(A) - Factorisation de Cholesky de la matrice creuse A
chsolve(spcho,b) - Calcul $A^{-1}b$, où **spcho=chfact(A)**
splu = lufact(A) - Factorisation LU de la matrice creuse A
lusolve(splu,b) - Calcul $A^{-1}b$, où **splu=lufact(A)**

Commandes graphiques

xinit() - Création d'une nouvelle fenêtre graphique
xdel() - Suppression d'un fenêtre graphique
xbasc() - Rafraîchit la fenêtre graphique
plotframe - Création d'un cadre dans la fenêtre graphique, exemple :
 $\text{plotframe}([0,1,0,1],[4,2,4,2],\text{'titre'})$
crée un système de coordonnées dans le carré unité muni
du titre **titre**.
plot2d - Pour affiche une ou plusieurs courbes. exemple : **plot2d(x,y,1,"000")**
xtitle - Définit le titre du graphique. exemple : **xtitle('titre')**

5.6 Annexe II : une petite bibliothèque en scilab

```
function us=shift(typ,u)
//decale le tableau u de +1 ou -1
//avec condition aux limites de Dirichlet
select typ
case '+1' then //shift +1
```

```
[m,n] = size(u);
us(1 :n-1) = u(2 :n);
us(n) = 0.;
case '-1' then //shift -1
[m,n] = size(u);
us(2 :n) = u(1 :n-1);
us(1) = 0.; else
error('shift de +1 ou -1 ?')
end;
endfunction;
```

```
function us=shiftp(typ,u)
//decale le tableau u de +1 ou -1
//avec condition aux limites periodiques
select typ
case '+1' then //shift +1
[m,n] = size(u);
us(1 :n-1) = u(2 :n);
us(n) = u(1);
case '-1' then //shift -1
[m,n] = size(u);
us(2 :n) = u(1 :n-1);
us(1) = u(n);
else
error('shift de +1 ou -1 ?')
end;
endfunction;
```

```
function us=shift2d(typ,u)
//decale le tableau u de +1 ou -1
//dans les directions nord, sud, est, ouest
//avec condition aux limites de Dirichlet
select typ
case 'n' then //shift nord
[m,n] = size(u);
us(1 :m,1 :n-1) = u(1 :m,2 :n);
us(1 :m,n) = 0. ;
case 's' then //shift sud
[m,n] = size(u);
us(1 :m,2 :n) = u(1 :m,1 :n-1);
us(1 :m,1) = 0. ;
case 'e' then //shift est
```

```
[m,n] = size(u);
us(1 :m-1,1 :n) = u(2 :m,1 :n);
us(m,1 :n) = 0.;
case 'o' then //shift ouest
[m,n] = size(u);
us(2 :m,1 :n) = u(1 :m-1,1 :n);
us(1,1 :n) = 0.;
else
error('shift nord, sud, est, ouest ?')
end;
endfunction;

function y=creneau(x)
y = (abs(x) < 3) * 2 - 1;
endfunction;

function y=bosse(x)
y = max(0., 1. - x * *2);
endfunction;

function y=noyau(x,t)
y = exp(-x * *2/(4 * t))/sqrt(4 * pi * t);
endfunction;

function y=phase(x,lg)
y = x - 2 * lg * int((x - lg)/(2 * lg));
endfunction;

function f=source(x,y)
f = (50 * (((x - 0.5) * *2)' * ones(y) + ones(x)' * ((y - 0.5) * *2)) < 1) * 5;
endfunction;
```


Bibliographie

- [1] P. G. CIARLET, Introduction à l'analyse numérique et matricielle, *Masson, 1988.*
- [2] P. G. CIARLET, The finite element method for elliptic problem, *North Holland, 1978.*
- [3] G. ALLAIRE, S. M. KABER , Algèbre linéaire numérique, *Ellipses, 2002.*
- [4] G. ALLAIRE, S. M. KABER , Introduction à Scilab, Exercices pratiques corrigés d'algèbre linéaire, *Ellipses, 2002.*
- [5] P. A. RAVIART, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, *Masson, 1992.*
- [6] A. LE POURHIET, Résolution des équations aux dérivées partielles, *Cepadues Editions, 1988.*
- [7] B. LUCQUIN, O. PIRONNEAU, Introduction au calcul scientifique, *Masson, 1996.*
- [8] S. NICIAISE Analyse numérique et équations aux dérivées partielles, *Dunod, 2000.*
- [9] L. SAINSAULIEU, Calcul Scientifique,*Masson, 1996.*
- [10] J. RAPPAZ, M. PICASSO, Introduction à l'analyse numérique, *Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.*
- [11] C. ZUILY, Problèmes de distributions, *Hermann, 1978.*