

Exercices sur les intégrales généralisées

Introduction

- Intégrales généralisées – Convergence, définition, critère de comparaison.

Exercice 1 – Convergence, définition, critère de comparaison

Cours

On suppose que f et g sont des fonctions localement intégrables sur un intervalle de type $[a, b[$ fixé.

On suppose que f et g sont positives sur cet intervalle.

- Montrer que $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une fonction croissante sur $[a, b[$.
- On suppose que sur $\forall x \in [a, b[, f(x) \leq g(x)$ et que $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x g(t) dt$ existe et est finie. En déduire que

$\int_a^b f(t) dt$ est convergente. (cela s'appelle le critère de comparaison... La question consiste à redémontrer ce critère et à refaire le cheminement qui y mène).

Question 1

- Effectuer le calcul de $\int_1^t \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$ pour $t \in [1, +\infty[$.
- En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$ (c'est-à-dire si l'intégrale est convergente ou pas).

Remarque : quand l'une des bornes est infinie, l'intégrale est automatiquement impropre en cette borne.

Question 2

Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 2

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continue et telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

On pourra pour cela considérer une primitive F de f sur $[1, +\infty[$ et examiner son comportement au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3

1

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll} (i) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} & (iii) \text{ pause} & (v) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + x^2 e^{-x}} dx \\ (ii) \int_2^{+\infty} (\ln x)^{-\ln x} dx & (iv) \text{ re-pause} & (vi) \int_0^{+\infty} \frac{x + \sin x}{x^3 + \sin x} dx \end{array}$$

2

Déterminer la nature et effectuer le calcul des intégrales suivantes :

$$\begin{array}{ll} (i) \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \right) dx & (iii) \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ (ii) \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx & \end{array}$$

Exercice 4

1

Montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

2

La fonction $t \mapsto \sin(t^2)$ admet-elle une limite en $+\infty$?

3

Soit une fonction f telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge et qui admet une limite en $+\infty$. Quelle est cette limite ?

4

- Existe-t-il une fonction dont l'intégrale converge sur $[a, +\infty[$ mais qui ne serait pas bornée au voisinage de $+\infty$?
- Existe-t-il un rapport entre la limite éventuelle d'une fonction en $+\infty$ et le fait que son intégrale sur $[a, +\infty[$ converge ?

Exercice 5

1

Déterminer la nature des intégrales suivantes et en effectuer le calcul.

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \quad (ii) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{chx}$$

2

Etudier la nature de : (i) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} dx$ (ii) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$ (iii) $\int_2^{+\infty} (\ln x)^{-\ln(\ln x)} dx$.

Exercice 6

1

Que pensez-vous de la proposition suivante ?

Proposition

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b[$ telles que $g = \underline{o}_b(f)$.

Si $\left(\int_a^b f \text{ converge} \right)$ Alors $\left(\int_a^b g \text{ converge} \right)$. ■

Cette proposition ne marche qu'avec de la convergence absolue...

2

Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ et de $\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) dx$.

Pour la deuxième intégrale, on pourra s'aider d'un développement asymptotique de l'expression (c'est-à-dire un développement en $+\infty$) puis s'aider de la question 1 pour savoir à quel ordre pousser le développement.

Exercice 7

Déterminer la nature de l'intégrale suivante et en effectuer le calcul : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$.

Exercice 8

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt$.

1

Montrer que I est convergente.

2

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^n e^{-kt} + \frac{e^{-nt}}{e^t - 1}$, puis que $I = \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{+\infty} t^2 e^{-kt} dt \right) + \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-nt}}{e^t - 1} dt$.

3

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} + \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-nt}}{e^t - 1} dt$.

4

• Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-nt}}{e^t - 1} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

• Conclusion.

Exercice 9

Énoncé

Etudier la nature de : (i) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} dx$ (ii) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$ $a, b \in \mathbb{R}$ (iii) $\int_2^{+\infty} (\ln x)^{-\ln(\ln x)} dx$

Correction

(i)

On va utiliser le critère sur les équivalents. La fonction à intégrer est continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable sur cet intervalle. L'intégrale est automatiquement impropre en $+\infty$. Il faut faire l'étude en 0.

• En 0

$\sin(3x) = 3x + o(x)$ et $\sin(5x) = 5x + o(x)$ donc $\sin(5x) - \sin(3x) = 2x + o(x) \underset{0}{\sim} 2x$.

Donc $\frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} \underset{0}{\sim} \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}$. On a donc que les fonctions sont de signe constant au voisinage de 0. On peut donc utiliser le critère sur les équivalents.

$\left[\frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} \underset{0}{\sim} \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} \right] \Rightarrow \left[\int_0^1 \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} dx \text{ et } \int_0^1 \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} dx \text{ sont de même nature} \right]$
 Les fonctions sont de signe constant au voisinage de 0

Comme $\int_0^1 \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} dx$ converge, $\boxed{\int_0^1 \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} dx \text{ converge}} \quad (2)$

• En $+\infty$

$\left[\forall x \geq 1, \left| \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} \right| \leq \frac{|\sin 5x| + |\sin 3x|}{x^{\frac{5}{3}}} \leq \frac{2}{x^{\frac{5}{3}}} \right]$

On travaille avec des fonctions positives

(ce sont des valeurs absolues)

$\left[\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^{\frac{5}{3}}} dx \text{ converge} \right]$

Donc $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} dx \text{ converge}} \quad (1)$

$\Rightarrow \left[\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} \right| dx \text{ converge} \right]$
 critère de comparaison

• Conclusion

De (1) et (2), on conclut que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{2}}} dx$ converge.

■

(ii)

La fonction à intégrer est continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable sur cet intervalle.

• En 0

$\frac{x}{e^x - 1} \sim 1$ donc $x \rightarrow \frac{x}{e^x - 1}$ est prolongeable par continuité en 0. Donc l'intégrale en 0 est une intégrale de Riemann.

Riemann. $x \rightarrow \frac{x}{e^x - 1}$ est donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$ et l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.

• En $+\infty$

Le critère de Riemann devrait bien fonctionner.

$$\frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{x^3}{e^x} \frac{1}{(1 - e^{-x})} = x^3 e^{-x} \frac{1}{(1 - e^{-x})}. \text{ On a } x^3 e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } \frac{x^3}{e^x - 1} = x^3 e^{-x} \frac{1}{(1 - e^{-x})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Le critère de Riemann permet de conclure que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$ converge.

■

(iii)

$\forall x \in [2, +\infty[, \ln x > 0$ et $\ln x^{-\ln(\ln x)} = e^{-(\ln(\ln x))^2}$. Donc $x \rightarrow (\ln x)^{-\ln(\ln x)}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et intégrable sur \mathbb{R}_+ . L'intégrale n'est donc impropre qu'en $+\infty$

On va utiliser le critère de Riemann. Quelques essais permettent de se rendre compte que quelle que soit la puissance de x utilisée, la limite obtenue est $+\infty$. Donc on va montrer que l'intégrale diverge en multipliant par x et en étudiant la limite.

$$x(\ln x)^{-\ln(\ln x)} = e^{\ln x - (\ln(\ln x))^2} = e^{\ln x \left(1 - \frac{(\ln(\ln x))^2}{\ln x}\right)}.$$

Or $\begin{bmatrix} \frac{(\ln u)^2}{u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0 \\ \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{(\ln(\ln x))^2}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \end{bmatrix}$. Donc comme $e^u \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} +\infty$, alors $x(\ln x)^{-\ln(\ln x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Le critère de Riemann permet de conclure que $\int_0^{+\infty} (\ln x)^{-\ln(\ln x)} dx$ diverge. ■

Exercice 10

Énoncé

Déterminer la nature des intégrales suivantes et en effectuer le calcul.

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \quad (ii) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{chx} \quad (iii) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

Correction

(i)

La fonction à intégrer est continue sur \mathbb{R}_+ donc localement intégrable sur \mathbb{R}_+ (l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$).

Nature

La fonction à intégrer est positive sur \mathbb{R}_+ . Donc on peut utiliser le critère sur les équivalents.

$$\left[\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3} \right] \xrightarrow{\text{critère sur les équivalents}} \left[\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \text{ sont de même nature} \right]$$

Les contions sont de signe positif

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ converge.

Conclusion

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \text{ converge.}}$$

Calcul

On effectue une décomposition en éléments simples. Celle-là est aisée puisqu'il n'y a que des pôles simples :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+3} \quad (\text{remarque : il est normal de trouver que la somme des coefficients vaut } 0 \dots \text{ On s'en rendra compte dans la suite des calculs}).$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{(t+1)(t+2)(t+3)} &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{t+1} - \int_0^x \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{t+3} = \frac{1}{2} [\ln(1+t)]_0^x - [\ln(2+t)]_0^x + \frac{1}{2} [\ln(3+t)]_0^x \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 + \ln \left(\frac{\sqrt{(1+x)(3+x)}}{2+x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or pour } t > 0, \frac{\sqrt{(1+x)(3+x)}}{2+x} = \frac{x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)}}{x + \frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x}\right)}}{1 + \frac{2}{x}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1.$$

$$\text{Donc en passant à la limite, } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}.$$

(ii)

Le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} et la fonction à intégrer est continue sur \mathbb{R} donc localement intégrable sur \mathbb{R} . L'intégrale est impropre en les deux bornes.

En $+\infty$

On va utiliser le critère de Riemann.

$$\frac{x^2}{chx} = \frac{x^2}{e^x + e^{-x}} = x^2 e^{-x} \frac{1}{1 + e^{-2x}}. \text{ Compte tenu des limites usuelles, ce produit tend vers } 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Donc par le critère de Riemann, on conclut que } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{cht} \text{ converge.}}$$

En $-\infty$

La fonction est paire donc le changement de variable bijectif et C^1 , $x \mapsto -x$ sur \mathbb{R}^- donne la même intégrale

$$\text{que sur } \mathbb{R}^+. \text{ Donc } \boxed{\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{cht} \text{ converge.}}$$

Conclusion

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{cht} \text{ converge.}}$$

Calcul

En effectuant le changement de variable $x \mapsto -x$, on en déduit que pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\int_{-x}^0 \frac{dt}{cht} \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x \frac{dt}{cht}$. En

$$\text{passant à la limite, } \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{cht} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{cht} \text{ d'où } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{cht} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{cht}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_0^x \frac{dt}{cht} = \int_0^x \frac{dt}{e^t + e^{-t}} \stackrel{u=e^t, dt=udt}{=} \int_1^{e^x} \frac{du}{u\left(u + \frac{1}{u}\right)} = \int_1^{e^x} \frac{du}{u^2 + 1} = [Arc \tan u]_1^{e^x} = Arc \tan(e^x) - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{En faisant tendre } x \text{ vers } +\infty, \text{ on obtient : } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{cht} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}}.$$

(iii)

Le dénominateur de la fonction à intégrer ne s'annule jamais et celle-ci est continue sur \mathbb{R}^+ donc intégrable sur \mathbb{R}^+ . L'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.

• **Nature**

La fonction est de signe positif sur \mathbb{R}^+ donc on peut utiliser le critère sur les équivalents. Le critère de Riemann marche aussi très bien. Pour changer un peu, on va utiliser le critère sur les équivalents.

$\frac{1}{\sqrt{e^t+1}} = \frac{1}{e^{t/2}} \frac{1}{\sqrt{1+e^{-t}}} \underset{+\infty}{\sim} e^{-t/2}$. On a donc que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ sont de même nature. $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}}$ converge.

• **Calcul**

On effectue le changement de variable bijectif de classe C^1 , $u : t \rightarrow \sqrt{e^t+1}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}} & \stackrel{u=\sqrt{e^t+1}}{=} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{2}{u^2-1} du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{2}{(u-1)(u+1)} du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{du}{u-1} - \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \frac{du}{u+1} = \left[\ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^x+1}} \\ & = \ln \left| \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \\ \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} & = \frac{e^{x/2}}{e^{x/2}} \frac{\sqrt{1+e^{-x}} - e^{-x/2}}{\sqrt{1+e^{-x}} + e^{-x/2}} = \frac{\sqrt{1+e^{-x}} - e^{-x/2}}{\sqrt{1+e^{-x}} + e^{-x/2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1. \text{ Par continuité de } \ln \text{ en } 1 \text{ et composition des} \\ \text{ limites, on obtient en passant à la limite : } & \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}} = \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right)}. \end{aligned}$$

Problème

Énoncé

Q1

Pour quelle(s) valeur(s) de $s \in \mathbb{R}$, l'intégrale suivante est-elle convergente $\gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$?

Q2

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation de récurrence entre $\gamma(k)$ et $\gamma(k+1)$.

En déduire la valeur de $\gamma(k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Q3

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$, le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} et de degré inférieur ou égal à 2.

Soit u l'application définie sur E par :

$$u : P \mapsto u(P) \text{ telle que } u(P)(x) = \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) e^{-t} P(t) dt$$

1. Montrer que $u \in L(E)$.
2. Donner la matrice de u dans la base canonique de E .

Q4

Quels sont les éléments propres de u ? (valeurs, vecteurs, sous-espaces propres) ?

L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Présenter suivant la valeur du réel λ , un bilan des solutions de l'équation d'inconnue $P \in E$:

$$\lambda P(t) = \int_0^{+\infty} (t^2 - 4xt - 2x^2) e^{-t} P(t) dt$$

Correction

La première partie de ce problème est un grand classique.

Question 1

La fonction à intégrer est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

- En 0, on va travailler avec les équivalents.
- En $+\infty$, le critère de Riemann est très bien adapté à la forme de la fonction à intégrer.

On sépare l'étude car suivant les valeurs de s , $\gamma(s)$ est impropre en 0 et en $+\infty$ ou seulement en $+\infty$.

En 0

Suivant la valeur de s , la fonction à intégrer est continue en 0 ou non. $e^{-t} \sim_0 1$ donc $t^{s-1}e^{-t} \sim_0 t^{s-1} = \frac{1}{t^{1-s}}$. Les fonctions sont positives, donc on peut utiliser le critère sur les équivalents.

$$\left(\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-s}} \text{ converge} \right) \text{ssi } (1-s < 1) \text{ssi } (s > 0). \text{ Donc } \left(\int_0^1 t^{s-1}e^{-t} dt \text{ converge} \right) \text{ssi } (s > 0).$$

En $+\infty$

On va utiliser le critère de Riemann.

$$\forall s \in \mathbb{R}, t^{s+1}e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0. \text{ Donc } \forall s \in \mathbb{R}, \int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t} dt \text{ converge.}$$

Conclusion

$(\gamma(s) \text{ converge}) \text{ssi } (s > 0)$. L'ensemble de définition de la fonction γ est $]0, +\infty[$.

Question 2

On va utiliser une intégration par parties. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\int_0^x t^k e^{-t} dt = [-t^k e^{-t}]_0^x + k \int_0^x t^{k-1} e^{-t} dt. \text{ En faisant tendre } x \text{ vers } +\infty, [-t^k e^{-t}]_0^x = -x^k e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt. \text{ C'est à dire : } \forall k \in \mathbb{N}^*, \gamma(k+1) = k\gamma(k).$$

On montre par une récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \gamma(k) = (k-1)! \gamma(0)$. Comme $\gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, on

conclut : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \gamma(k) = (k-1)!$.

Question 3

1

E désigne en fait l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans \mathbb{R} .

- Il faut montrer que l'application est bien définie.

Soit P un polynôme de degré 3 : $P = aX^2 + bX + c$.

Soit $z \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} & \int_0^z (t^2 - 4xt - 2x^2) e^{-t} (at^2 + bt + c) dt \\ &= a \int_0^z t^4 e^{-t} dt + (b - 4xa) \int_0^z t^3 e^{-t} dt + (c - 4xb - 2a) \int_0^z t^2 e^{-t} dt - (4cx + 2bx^2) \int_0^z te^{-t} dt - 2cx^2 \int_0^z e^{-t} dt \end{aligned}$$

Chaque intégrale dans le deuxième membre converge lorsque $z \rightarrow +\infty$. En passant à la limite, on obtient un polynôme du second degré en x . Donc u est bien définie en tant qu'application et est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[x]$.

- Il reste à montrer que c'est une application linéaire. C'est la structure d'espace vectoriel des fonctions localement intégrables sur $[0, +\infty[$ et dont l'intégrale sur cet intervalle converge, et la linéarité de l'intégrale qui permettent de conclure.

Conclusion

u est un endomorphisme de E .

2

On calcule les images des fonctions polynômes $e_1 : x \rightarrow 1$, $e_2 : x \rightarrow x$, $e_3 : x \rightarrow x^2$. D'après la question

précédente et la question 2, on trouve :

$$u(e_1) = \gamma(3) - 4\gamma(2)x - 2\gamma(1)x^2 = 2 - 4x - x^2$$

$$u(e_2) = \gamma(4) - 4\gamma(3)x - 2\gamma(2)x^2 = 6 - 8x - 2x^2$$

$$u(e_3) = \gamma(5) - 4\gamma(4)x - 2\gamma(3)x^2 = 24 - 24x - 4x^2$$

D'où la matrice dans la base canonique de u :
$$\boxed{mat_{can}(u) \begin{pmatrix} 2 & 6 & 24 \\ -4 & -8 & -24 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}}.$$

Question 4

Il reste à étudier les éléments propres de la matrice précédente :

- calcul du polynôme caractéristique.
- détermination des racines (valeurs propres).
- Détermination de la dimension des sous espaces propres associés.

■