

Produits scalaires. Espaces euclidiens

Plan du chapitre

1 Produit scalaire	page 2
1.1 Formes bilinéaires	page 2
1.2 Définition d'un produit scalaire	page 2
1.3 Exemples fondamentaux	page 3
1.4 Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ	page 5
2 Norme hilbertienne	page 7
2.1 Définition d'une norme	page 7
2.2 Définition de la norme hilbertienne	page 9
2.3 Carré scalaire d'un vecteur	page 11
2.4 Identités de polarisation	page 11
2.5 Théorème de PYTHAGORE	page 11
2.6 Identité du parallélogramme	page 12
3 Orthogonalité	page 12
3.1 Vecteurs orthogonaux	page 12
3.2 Orthogonal d'une partie	page 12
4 Familles orthonormales	page 14
4.1 Définition	page 14
4.2 Propriétés	page 15
4.3 Procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT	page 17
4.4 Bases orthonormées	page 20
4.4.1 Existence de bases orthonormées en dimension finie	page 20
4.4.2 Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme en base orthonormée	page 21
5 Projections et symétries orthogonales	page 21
5.1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace d'un espace euclidien	page 21
5.2 Projections orthogonales	page 21
5.2.1 Projection orthogonale sur un vecteur non nul	page 22
5.2.2 Projection orthogonale sur un hyperplan	page 24
5.2.3 Projection orthogonale sur un sous-espace. Distance à un sous-espace	page 25
5.3 Symétries orthogonales	page 29
6 Hyperplans affines d'un espace euclidien	page 30
6.1 Projété orthogonal d'un point sur un hyperplan affine	page 31
6.2 Lignes de niveaux de l'application $M \mapsto \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle$	page 31
6.3 Projété orthogonal d'un point sur un hyperplan affine. Distance à un hyperplan affine	page 31
6.4 Orientation d'un hyperplan affine par un vecteur normal	page 34
7 Automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales	page 34
7.1 Automorphismes orthogonaux	page 34
7.1.1 Définition	page 34
7.1.2 Image d'une base orthonormée	page 35
7.1.3 Symétries orthogonales	page 36
7.1.4 Le groupe orthogonal $(O(E), \circ)$	page 36
7.2 Matrices orthogonales	page 37
7.2.1 Définition	page 37
7.2.2 Lien avec les bases orthonormées	page 38
7.2.3 Lien avec les automorphismes orthogonaux	page 39
7.2.4 Déterminant d'une matrice orthogonale ou d'un automorphisme orthogonal	page 39
7.2.5 Produit mixte	page 40
7.3 Description de $O_2(\mathbb{R})$ et $O(E_2)$	page 42
7.3.1 Description de $O_2(\mathbb{R})$	page 42
7.3.2 Description de $O_2^+(\mathbb{R})$ et $O^+(E_2)$	page 42
7.3.3 Description de $O(E_2)$	page 44

1 Produit scalaire

1.1 Formes bilinéaires

DÉFINITION 1. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Une **forme bilinéaire** sur E est une application φ de $E \times E$ dans \mathbb{R} qui est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\forall (u_1, u_2, v) \in E^3, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) &= \lambda_1 \varphi(u_1, v) + \lambda_2 \varphi(u_2, v) \\ \text{et} \\ \forall (u, v_1, v_2) \in E^3, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \varphi(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lambda_1 \varphi(u, v_1) + \lambda_2 \varphi(u, v_2).\end{aligned}$$

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \times y \end{array}$ est un exemple fondamental de forme bilinéaire (sur \mathbb{R}).

DÉFINITION 2. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Soit φ une forme bilinéaire sur E .

- φ est **symétrique** si et seulement si $\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.
- φ est **positive** si et seulement si $\forall u \in E, \varphi(u, u) \geq 0$.
- φ est **définie** si et seulement si $\forall u \in E, \varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$.

Remarque. Si φ est une forme bilinéaire quelconque, on a nécessairement $\varphi(0, 0) = 0$ (ou encore $u = 0 \Rightarrow \varphi(u, u) = 0$) et plus généralement, pour tout u de E , $\varphi(u, 0) = 0$. En effet, pour $u \in E$ donné, l'application $v \mapsto \varphi(u, v)$ est linéaire et s'annule donc en 0.

⇒ **Commentaire.** Si φ est une forme bilinéaire, on peut résumer en une seule proposition les deux mots « définie et positive » : φ est définie et positive si et seulement si

$$\forall u \in E \setminus \{0\}, \varphi(u, u) > 0.$$

Exemples.

- Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto & xy' - yx' \end{array}$. φ est une forme bilinéaire (n -linéarité du déterminant en dimension n) qui n'est pas définie car si $u = (1, 0) \neq (0, 0)$, alors $\varphi(u, u) = 1 \times 0 - 0 \times 1 = 0$ mais qui est positive car pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(u, u) = xy - yx = 0 \geq 0$.
- Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto & xx' - yy' \end{array}$ est une forme bilinéaire sur \mathbb{R}^2 qui n'est ni définie car $\varphi((1, 1), (1, 1)) = 1^2 - 1^2 = 0$, ni positive car $\varphi((0, 1), (0, 1)) = 0^2 - 1^2 = -1 < 0$.
- Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto & xy' \end{array}$ est une forme bilinéaire sur \mathbb{R}^2 qui n'est pas symétrique car $\varphi((1, 0), (0, 1)) = 1$ et $\varphi((0, 1), (1, 0)) = 0 \neq 1$. □

1.2 Définition d'un produit scalaire

DÉFINITION 3. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Un **produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire sur E , symétrique, positive et définie.

Un **espace préhilbertien réel** est un couple (E, φ) où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel et φ est un produit scalaire sur E . Un **espace euclidien** est un espace préhilbertien réel où de plus l'espace vectoriel E est de dimension finie.

⇒ **Commentaire.**

▷ Dans la pratique, pour vérifier qu'une application de E^2 dans \mathbb{R} , on commence par vérifier d'abord la symétrie puis on vérifie la linéarité par rapport à la première variable, la deuxième linéarité résultant de la première et de la symétrie :

$$\varphi(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, u) = \lambda_1 \varphi(v_1, u) + \lambda_2 \varphi(v_2, u) = \lambda_1 \varphi(u, v_1) + \lambda_2 \varphi(u, v_2).$$

▷ Un espace préhilbertien est un couple (E, φ) . Si on change l'un des deux éléments de ce couple, et en particulier, si on remplace le produit scalaire φ par un autre produit scalaire sans changer l'espace E , on obtient un autre espace préhilbertien.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Pour $((x, y), (x', y')) \in E^2$, on pose $\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + \frac{1}{2}(xy' + yx') + yy'$.

Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

Solution 1.

- φ est une application de $(\mathbb{R}^2)^2$ dans \mathbb{R} .

- Soit $((x, y), (x', y')) \in E^2$.

$$\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + \frac{1}{2}(xy' + yx') + yy' = x'x + \frac{1}{2}(x'y + y'x) + y'y = \varphi((x', y'), (x, y)).$$

Donc, φ est une forme sur E symétrique.

- Soient $((x, y), (x', y'), (x'', y'')) \in E^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda(x, y) + \mu(x', y'), (x'', y'')) &= \varphi((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y'), (x'', y'')) \\ &= (\lambda x + \mu x')x'' + \frac{1}{2}((\lambda x + \mu x')y'' + (\lambda y + \mu y')x'') + (\lambda y + \mu y')y'' \\ &= \lambda \left(xx'' + \frac{1}{2}(xy'' + yx'') + yy'' \right) + \mu \left(x'x'' + \frac{1}{2}(x'y'' + y'x'') + y'y'' \right) \\ &= \lambda \varphi((x, y), (x'', y'')) + \mu \varphi((x', y'), (x'', y'')).\end{aligned}$$

φ est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

- Soit $(x, y) \in E$. $\varphi((x, y), (x, y)) = x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$. Donc, φ est une forme bilinéaire, symétrique, positive sur E .

- Soit $(x, y) \in E$.

$$\begin{aligned}\varphi((x, y), (x, y)) &= 0 \Rightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 0 \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{3y^2}{4} = 0 \text{ (car si } \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 \neq 0 \text{ ou } \frac{3y^2}{4} \neq 0, \text{ alors } \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0) \\ &\Rightarrow y = 0 \text{ et } x + \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow x = y = 0 \\ &\Rightarrow (x, y) = 0.\end{aligned}$$

Donc, φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur E et finalement, φ est un produit scalaire sur E .

Dans la pratique, quand un produit scalaire est donné, le produit scalaire de deux vecteurs u et v est rarement noté $\varphi(u, v)$. Il est fréquemment noté $\langle u, v \rangle$ ou $(u|v)$ ou $u|v$ dans le cas général ou $u.v$ pour faire de la géométrie en dimension 2 ou 3. Si E est $\mathbb{R}[X]$ ou \mathbb{R}^N ou \mathbb{R}^R , la notation $P.Q$ ou $u.v$ ou $f.g$ pourrait être confondue avec le produit de deux polynômes, de deux suites ou de deux fonctions et serait donc trop ambiguë.

1.3 Exemples fondamentaux

On donne ici une liste de produits scalaires usuels. On n'effectue pas toutes les démonstrations. Les démonstrations explicitement effectuées constituent des questions classiques de problèmes de concours.

- Sur $E = \mathbb{R}$, on pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x|y = x \times y$. L'application $(x, y) \mapsto x|y$ est un produit scalaire sur \mathbb{R} .
- Plus généralement, sur $E = \mathbb{R}^n$, on pose pour tout $(x, y) = ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $x|y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

L'application $(x, y) \mapsto x|y$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n appelé le **produit scalaire canonique** sur \mathbb{R}^n (ou aussi produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n). L'utilisation du mot canonique fait référence à la base canonique en un sens qui sera expliqué plus loin dans la section « Familles orthonormales ».

- Sur $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose pour tout $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $X|Y = {}^t X Y$ (en identifiant une matrice de format $(1, 1)$ et son unique coefficient). L'application $(X, Y) \mapsto X|Y$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car si on pose $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors

$${}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

- Sur $E = M_n(\mathbb{R})$, on pose pour tout $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$, $A|B = \text{Tr}({}^t AB)$. Vérifions que l'application $(A, B) \mapsto A|B$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

$$\text{Tr}({}^t AB) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} b_{i,j} \right)}_{\text{coefficients ligne } j, \text{ colonne } j \text{ de } {}^t AB} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

On reconnaît le produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$ et en particulier, l'application $(A, B) \mapsto A|B$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Ceci achève la démonstration.

On peut néanmoins vérifier directement, sans référence au produit scalaire canonique, que l'application $(A, B) \mapsto A|B$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ mais c'est beaucoup plus maladroit :

- Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$. $A|B = \text{Tr}({}^t AB) = \text{Tr}({}^t ({}^t AB)) = \text{Tr}({}^t BA) = B|A$. Donc, l'application $(A, B) \mapsto A|B$ est symétrique.
- Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, l'application $A \mapsto \text{Tr}({}^t AB)$ est linéaire par bilinéarité du produit matriciel et par linéarité de la transposition et de la trace.
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. $\text{Tr}({}^t AA) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 \geq 0$ avec égalité si et seulement si tous les $a_{i,j}$ sont nuls et donc la forme bilinéaire, symétrique $(A, B) \mapsto A|B$ est définie, positive.
- Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on pose pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Vérifions-le explicitement.
 - Soit $(P, Q) \in E^2$. L'application $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[0, 1]$ (en tant que polynôme) et donc $P|Q$ existe dans \mathbb{R} .
 - Ainsi, $(P, Q) \mapsto P|Q$ est une application de E^2 dans \mathbb{R} .
 - Soit $(P, Q) \in E^2$. $P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t) dt = \int_0^1 Q(t)P(t) dt = Q|P$. Donc, l'application $(P, Q) \mapsto P|Q$ est symétrique.
 - L'application $(P, Q) \mapsto P|Q$ est bilinéaire par bilinéarité du produit de deux polynômes et linéarité de l'intégrale.
 - Soit $P \in E$. $P|P = \int_0^1 P^2(t) dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale. De plus,

$$\begin{aligned} P|P = 0 &\Rightarrow \int_0^1 P^2(t) dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [0, 1], P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).} \end{aligned}$$

Donc, $(P, Q) \mapsto P|Q$ est définie, positive.

On a montré que l'application $(P, Q) \mapsto P|Q$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur E et donc un produit scalaire sur E .

- Sur $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$, on pose pour $(f, g) \in E^2$, $f|g = \int_a^b f(t)g(t) dt$. La démonstration de ce résultat est quasiment identique. Il y a simplement une nuance à la fin de la démonstration :

$$\begin{aligned} f|f = 0 &\Rightarrow \int_a^b f^2(t) dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [a, b], f^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow f = 0. \end{aligned}$$

Exercice 2. On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge ($\ell^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des suites réelles *de carré sommable*).

1) Soit $(u, v) \in E^2$. Montrer que la série de terme général $u_n v_n$ converge.

2) Montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, +, .)$.

3) Montrer que l'application $(u, v) \mapsto u|v = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

Solution 2.

1) Soit $(u, v) \in E^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 - 2|u_n v_n| + v_n^2 = (|u_n| - |v_n|)^2 \geq 0$ et donc $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2} (u_n^2 + v_n^2)$. Par hypothèse, les séries de termes généraux respectifs u_n^2 et v_n^2 convergent. Il en est de même de la série de terme général $\frac{1}{2} (u_n^2 + v_n^2)$. On en déduit que la série de terme général $u_n v_n$ est absolument convergente et en particulier convergente.

2) $\ell^2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$. De plus, la suite nulle appartient à $\ell^2(\mathbb{R})$.

Soient $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout entier naturel n ,

$$(\lambda u_n + \mu v_n)^2 = \lambda^2 u_n^2 + 2\lambda\mu u_n v_n + \mu^2 v_n^2.$$

Mais alors, la série de terme général $(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge en tant que combinaison linéaire de séries convergentes et donc $\lambda u + \mu v \in \ell^2(\mathbb{R})$.

On a montré que $E = \ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, +, .)$.

3) • Pour tout $(u, v) \in E^2$, la série de terme général $u_n v_n$ converge d'après 1). Donc, $(u, v) \mapsto u|v$ est bien une application de $(\ell^2(\mathbb{R}))^2$ dans \mathbb{R} .

• Soit $(u, v) \in E^2$.

$$u|v = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n u_n = v|u.$$

Donc, l'application $(u, v) \mapsto u|v$ est symétrique.

• Soient $(u, v, w) \in E^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (\lambda u + \mu v)|w &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) w_n \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n w_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n w_n \quad (\text{combinaison linéaire de séries convergentes}) \\ &= \lambda u|w + \mu v|w. \end{aligned}$$

Donc, l'application $(u, v) \mapsto u|v$ est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

• Soit $u \in E$. $u|u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geq 0$. De plus, si $u \neq 0$, l'un au moins des termes de la somme est strictement positif, les autres étant positifs ou nuls et donc $u|u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 > 0$. Ceci montre que $(u, v) \mapsto u|v$ est définie, positive.

On a montré que l'application $(u, v) \mapsto u|v = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur $\ell^2(\mathbb{R})$ et donc que l'application $(u, v) \mapsto u|v = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

1.4 Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Théorème 1 (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors,

$$\forall (u, v) \in E^2, |\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

De plus, $|\langle u, v \rangle| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} \Leftrightarrow (u, v)$ liée (cas d'égalité de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

DÉMONSTRATION. Soit $(u, v) \in E^2$. Si $u = 0$, l'inégalité est immédiate et est une égalité : $|\langle 0, v \rangle| = 0 = \sqrt{\langle 0, 0 \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Dorénavant, $u \neq 0$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, posons

$$P(\lambda) = \langle \lambda u - v, \lambda u - v \rangle = \lambda^2 \langle u, u \rangle - 2\lambda \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle.$$

Puisque $u \neq 0$, on a $\langle u, u \rangle \neq 0$ et donc P est un polynôme du second degré à coefficients réels. Puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = \langle \lambda u - v, \lambda u - v \rangle \geq 0$, P est de signe constant sur \mathbb{R} . Le discriminant réduit du polynôme P est donc négatif ou nul. Ceci fournit :

$$0 \geq \Delta' = (\langle u, v \rangle)^2 - \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

puis $(\langle u, v \rangle)^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$. En tenant compte du fait que $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\langle v, v \rangle \geq 0$ et que $\sqrt{(\langle u, v \rangle)^2} = |\langle u, v \rangle|$, en prenant la racine carrée des deux membres, on obtient

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Déterminons maintenant les cas d'égalité :

$$\begin{aligned} |\langle u, v \rangle| &= \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} \Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } (u \neq 0 \text{ et } \Delta' = 0) \\ &\Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } (u \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} / P(\lambda_0) = 0) \\ &\Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } (u \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} / \langle \lambda_0 u - v, \lambda_0 u - v \rangle = 0) \\ &\Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } (u \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} / v = \lambda_0 u) \\ &\Leftrightarrow (u, v) \text{ liée.} \end{aligned}$$

□

On note qu'une forme équivalente de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ est : $(\langle u, v \rangle)^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$.

Exemples. Puisque qu'un produit scalaire a des aspects multiples, l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ a des aspects multiples. Enonçons-en explicitement deux versions :

- Dans \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ s'écrit :

$$\forall \left((x_i)_{1 \leq i \leq n}, (y_i)_{1 \leq i \leq n} \right) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2) (y_1^2 + \dots + y_n^2).$$

- Dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t) dt$, l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ s'écrit :

$$\forall (f, g) \in (C^0([a, b], \mathbb{R}))^2, \left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b g^2(t) dt \right).$$

Exercice 3. Soient a_1, \dots, a_n , n réels strictement positifs. Montrer que

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Préciser les cas d'égalité.

Solution 3. Soient a_1, \dots, a_n , n réels strictement positifs. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) &= \left(\sum_{i=1}^n (\sqrt{a_i})^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{a_i}} \right)^2 \right) \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \times \frac{1}{\sqrt{a_i}} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n 1 \right)^2 = n^2. \end{aligned}$$

De plus, si on a l'égalité, alors il existe un réel λ tel que $(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) = \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right)$ ou encore, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i = \lambda$. Ceci impose à λ d'être strictement positif. Réciproquement, si λ est un réel strictement positif,

$$(\lambda + \dots + \lambda) \left(\frac{1}{\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda} \right) = n\lambda \times \frac{n}{\lambda} = n^2.$$

En résumé, pour tous réels strictement positifs a_1, \dots, a_n , $(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$ avec égalité si et seulement si les a_i sont égaux.

Exercice 4. Soit $\mathcal{E} = \left\{ \left(\int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \right), f \text{ continue et strictement positive sur } [a, b] \right\}$.

1) Déterminer $\text{Sup}(\mathcal{E})$.

2) Déterminer $\text{Inf}(\mathcal{E})$. Vérifier qu'il s'agit d'un minimum et préciser les fonctions en lesquelles ce minimum est atteint.

Solution 4. Pour chaque fonction f , continue et strictement positive sur $[a, b]$ (de sorte que $\frac{1}{f}$ est aussi continue et strictement positive sur $[a, b]$), on pose $\varphi(f) = \left(\int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \right)$.

1) Pour $\alpha > 0$, on considère la fonction $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$. Chaque fonction f_α est continue et strictement positive sur $[a, b]$ et donc, pour tout $\alpha > 0$, $\varphi(f_\alpha) \in \mathcal{E}$. Ensuite, pour $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(f_\alpha) &= \left(\int_a^b e^{\alpha t} dt \right) \left(\int_a^b e^{-\alpha t} dt \right) = \frac{1}{\alpha^2} (e^{\alpha b} - e^{\alpha a}) (-e^{-\alpha b} + e^{-\alpha a}) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} (e^{\alpha(b-a)} + e^{\alpha(a-b)} - 2). \end{aligned}$$

De plus, puisque $b - a > 0$, $\frac{1}{\alpha^2} (e^{\alpha(b-a)} + e^{\alpha(a-b)} - 2) \underset{\alpha \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\alpha(b-a)}}{\alpha^2} \underset{\alpha \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Ainsi, \mathcal{E} est une partie de \mathbb{R} qui n'est pas majorée. On en déduit que

$$\text{Sup}(\mathcal{E}) = +\infty.$$

2) Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[a, b]$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \left(\int_a^b (\sqrt{f(t)})^2 dt \right) \left(\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}} \right)^2 dt \right) \\ &\geq \left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \times \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 = \left(\int_a^b dt \right)^2 \\ &= (b - a)^2. \end{aligned}$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si la famille de fonctions $\left(\sqrt{f}, \frac{1}{\sqrt{f}} \right)$ est liée. Ceci équivaut à l'existence d'un réel strictement positif λ tel que, pour tout t de $[a, b]$, $\sqrt{f(t)} = \frac{\lambda}{\sqrt{f(t)}}$ ou encore, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) = \lambda$.

En résumé, pour toute fonction f , continue et strictement positive sur $[a, b]$, $\varphi(f) \geq (b - a)^2$ avec égalité si et seulement si la fonction f est une constante strictement positive. Ceci montre que $\text{Inf}(\mathcal{E})$ existe dans \mathbb{R} , est un minimum et enfin

$$\text{Inf}(\mathcal{E}) = \text{Min}(\mathcal{E}) = (b - a)^2.$$

2 Norme hilbertienne

2.1 Définition d'une norme

DÉFINITION 4. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Une **norme** sur E est une application de E dans \mathbb{R} vérifiant les quatre axiomes :

- 1) $\forall x \in E, N(x) \geq 0$ (positivité).
- 2) $\forall x \in E, (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$ (axiome de séparation).
- 3) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ (homogénéité).
- 4) $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Un couple (E, N) où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel et N est une norme sur E s'appelle un **espace vectoriel normé** (e.v.n. en abrégé). Les espaces vectoriels normés sont étudiés en maths spé.

Une norme est fréquemment notée $\|\cdot\|$. Sur $E = \mathbb{R}$, la valeur absolue $|\cdot|$ est une norme, mais l'application $x \mapsto 2|x|$ est aussi une norme sur \mathbb{R} . De manière générale, si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, on peut montrer qu'il y a une infinité de normes sur E .

On verra au paragraphe suivant que l'application $\|\cdot\|_2 : u = (x, y) \mapsto \|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ est une norme sur \mathbb{R}^2 , appelée **norme euclidienne usuelle**. L'exercice suivant fournit deux autres exemples de norme sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 5. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ et $\|(x, y)\|_\infty = \text{Max}\{|x|, |y|\}$.

Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur \mathbb{R}^2 .

Solution 5.

Montrons que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur \mathbb{R}^2 . $\|\cdot\|_1$ est une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

- Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\|u\|_1 = |x| + |y| \geq 0$.
- Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|u\|_1 = 0$. Alors, $|x| + |y| = 0$ puis $|x| = |y| = 0$ puis $x = y = 0$ et donc $u = 0$.
- Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $N(\lambda u) = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda| \|u\|_1$.
- Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. $\|u + v\|_1 = |x + x'| + |y + y'| \leq |x| + |y| + |x'| + |y'| = \|u\|_1 + \|v\|_1$.

On a montré que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur \mathbb{R}^2 .

Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur \mathbb{R}^2 . $\|\cdot\|_\infty$ est bien une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

- Pour $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|u\|_\infty \geq 0$.
- Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|u\|_\infty = 0$. Alors, $\text{Max}\{|x|, |y|\} = 0$ puis $|x| \leq 0$ et $|y| \leq 0$ puis $x = y = 0$ et donc $u = 0$.
- Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si par exemple, $|x| \geq |y|$, alors $|\lambda x| = |\lambda||x| \geq |\lambda||y| = |\lambda||y|$ et donc

$$\|\lambda u\|_\infty = \text{Max}\{|\lambda x|, |\lambda y|\} = |\lambda x| = |\lambda||x| = |\lambda| \|u\|_\infty.$$

• Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. $|x + x'| \leq |x| + |x'| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ et $|y + y'| \leq |y| + |y'| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$. Par suite,

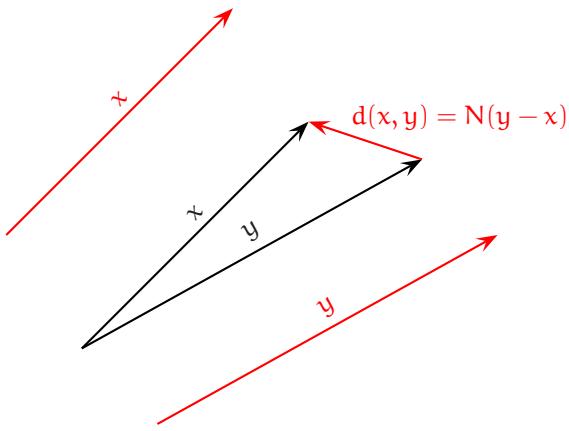
$$\|u + v\|_\infty = \text{Max}\{|x + x'|, |y + y'|\} \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

On a montré que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur \mathbb{R}^2 .

Quand une norme est donnée, on peut mesurer la **distance** entre deux vecteurs :

DÉFINITION 5. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) et N une norme sur E . La distance associée à cette norme est l'application d définie sur E^2 par :

$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = N(y - x).$$



Cette distance a les propriétés suivantes :

Théorème 2.

- 1) $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) \geq 0.$
- 2) $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$
- 3) $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x).$
- 4) $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

DÉMONSTRATION . 1) est vrai par positivité de N . Si x et y sont deux vecteurs de E tels que $d(x, y) = 0$, alors $N(x - y) = 0$ puis $x - y = 0$ d'après l'axiome de séparation et donc 2) est vrai.

Soient x et y deux éléments de E . $d(x, y) = N(y - x) = N(-(x - y)) = |-1|N(x - y) = N(x - y) = d(y, x)$. Donc, 3) est vrai.

Soient enfin x , y et z trois éléments de E .

$$d(x, y) = N(y - x) = N((z - x) + (y - z)) \leq N(z - x) + N(y - z) = d(x, z) + d(z, y).$$

Donc, 4) est vrai. □

DÉFINITION 6. Un vecteur u de E est dit **unitaire** pour la norme N si et seulement si $N(u) = 1$.

2.2 Définition de la norme hilbertienne

Théorème 3. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour $x \in E$, on pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

$\|\cdot\|$ est une norme sur E .

DÉMONSTRATION . Pour tout x de E , $\langle x, x \rangle$ est un réel positif et donc $\|x\|$ existe dans \mathbb{R} . Ainsi, $\|\cdot\|$ est une application de E dans \mathbb{R} .

- Soit $x \in E$. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$.
- Soit $x \in E$. $\|x\| = 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.
- Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$.
- Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} + \|y\|^2 \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

et donc, en prenant la racine carrée des deux membres, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On a montré que $\|\cdot\|$ est une norme sur E . □

DÉFINITION 7. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour $x \in E$, on pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

La norme $\|\cdot\|$ est appelée **norme hilbertienne** si E est de dimension quelconque, **norme euclidienne** si E est de dimension finie et dans tous les cas, **norme associée au produit scalaire** $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dans \mathbb{R}^n , la **norme euclidienne usuelle** est l'application notée $\|\cdot\|_2$ et définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

C'est la norme associée au produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

On s'intéresse maintenant aux cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour la norme hilbertienne :

Théorème 4. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x = 0$ ou ($x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / y = \lambda x$).

⇒ **Commentaire.** On a l'habitude de résumer le théorème précédent avec la phrase *un peu fausse* : « *l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens* » (la phrase est un peu fausse car dire que x et y ont même sens ne veut rien dire quand x ou y sont nuls).

DÉMONSTRATION. Reproduisons les différentes étapes ayant permis d'établir l'inégalité triangulaire dans le théorème 3 :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\sqrt{\langle x, y \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} + \|y\|^2 \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

On a l'égalité si et seulement si chacune des inégalités intermédiaires est une égalité car si l'une des inégalités intermédiaires est stricte, alors $\|x + y\|^2 < (\|x\| + \|y\|)^2$. Donc,

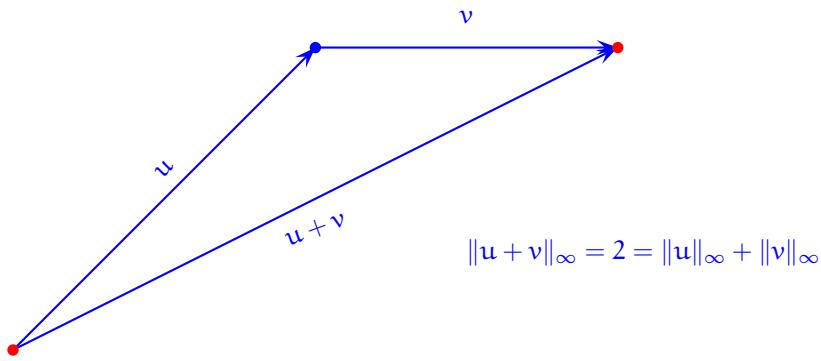
$$\begin{aligned} \|x + y\| = \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x + y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\Leftrightarrow |\langle x, y \rangle| = \sqrt{\langle x, y \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} \text{ et } \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| \\ &\Leftrightarrow (x, y) \text{ liée et } \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^+ \text{ (cas d'égalité de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} / y = \lambda x \text{ et } \langle x, \lambda x \rangle \in \mathbb{R}^+) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} / y = \lambda x \text{ et } \lambda\|x\|^2 \in \mathbb{R}^+) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / y = \lambda x) \text{ (car si } x \neq 0, \|x\|^2 > 0). \end{aligned}$$

□

Il ne faut pas croire que toute norme est associée à un produit scalaire ou encore, il ne faut pas croire que si N est une norme, il existe nécessairement un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que, pour tout $x \in E$, $N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Le théorème 4 est un outil parmi d'autres permettant de se convaincre qu'une norme donnée n'est pas une norme hilbertienne : si on trouve un cas d'égalité de l'inégalité triangulaire où les vecteurs ne sont pas « colinéaires et de même sens », la norme considérée ne peut être une norme hilbertienne.

Vérifions par exemple que la norme $\|\cdot\|_\infty$ de l'exercice 5 (pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|u\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$) n'est pas une norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 . Soient $u = (1, 1)$ et $v = (1, 0)$. Il est clair que u et v ne sont pas colinéaires. Pourtant, $\|u + v\|_\infty = \|(2, 1)\|_\infty = 2 = 1 + 1 = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$. Donc, $\|\cdot\|_\infty$ ne peut être associée à un produit scalaire.



Ainsi, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, « le plus court chemin n'est pas toujours la ligne droite » car le trajet en ligne droite joignant les deux points rouges et le trajet en deux étapes, passant par le point bleu ont la même longueur.

Par contre, pour toute norme N , « la ligne droite est toujours un plus court chemin » : soit u un vecteur et λ un réel positif.

$$N(u) + N(\lambda u) = N(u) + |\lambda|N(u) = (1 + \lambda)N(u)$$

puis

$$N(u + \lambda u) = N((1 + \lambda)u) = |1 + \lambda|N(u) = (1 + \lambda)N(u) = N(u) + N(\lambda u).$$

2.3 Carré scalaire d'un vecteur

DÉFINITION 8. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit u un vecteur de E .

Le produit scalaire de u par lui-même peut se noter u^2 et s'appelle le **carré scalaire** du vecteur u . On a donc

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = u^2.$$

Avec cette nouvelle notation, on a immédiatement les identités remarquables suivantes (par bilinéarité et symétrie du produit scalaire) :

Théorème 5. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- $\forall (u, v) \in E^2$, $(u + v)^2 = u^2 + 2\langle u, v \rangle + v^2$.
- $\forall (u, v) \in E^2$, $(u - v)^2 = u^2 - 2\langle u, v \rangle + v^2$.
- $\forall (u, v) \in E^2$, $\langle u + v, u - v \rangle = u^2 - v^2$.

2.4 Identités de polarisation

Les égalités $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ ou $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ sont des égalités exprimant la norme (hilbertienne) en fonction du produit scalaire. Il s'avèrera utile le moment venu de savoir aussi exprimer le produit scalaire en fonction de la norme uniquement. C'est l'objet du théorème 6 qui donne les **identités de polarisation** :

Théorème 6. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- $\forall (u, v) \in E^2$, $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$.
- $\forall (u, v) \in E^2$, $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2)$.
- $\forall (u, v) \in E^2$, $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$.

DÉMONSTRATION . La première identité découle de l'identité $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$ et la deuxième découle de l'identité $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$.

La troisième identité s'obtient en retranchant membre à membre les deux égalités précédentes.

□

2.5 Théorème de PYTHAGORE

Théorème 7 (théorème de PYTHAGORE). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient u et v deux éléments de E .

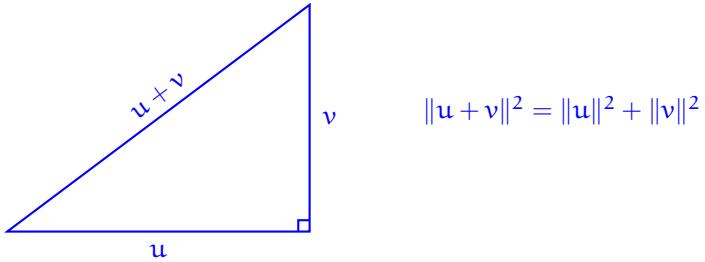
$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0.$$

DÉMONSTRATION . Soient u et v deux vecteurs. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle$ et par suite,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0.$$

□

On dira plus loin (ou on rappellera) que deux vecteurs u et v sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si et seulement si $\langle u, v \rangle = 0$. Le théorème de PYTHAGORE affirme donc que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si et seulement si u et v sont orthogonaux. On note que le théorème de PYTHAGORE est désormais une équivalence et que l'expression « d'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE » devient obsolète.



On peut se demander si le théorème 7 se généralise à strictement plus de deux vecteurs. Soient u_1, \dots, u_n , n vecteurs de E . Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a

$$\|u_1 + \dots + u_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle u_i, u_j \rangle.$$

Ainsi, si pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, alors $\|u_1 + \dots + u_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$. Mais la réciproque est fausse car l'égalité $\|u_1 + \dots + u_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$ n'entraîne rien de plus que $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle u_i, u_j \rangle = 0$.

2.6 Identité du parallélogramme

Théorème 8 (identité du parallélogramme). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient u et v deux éléments de E .

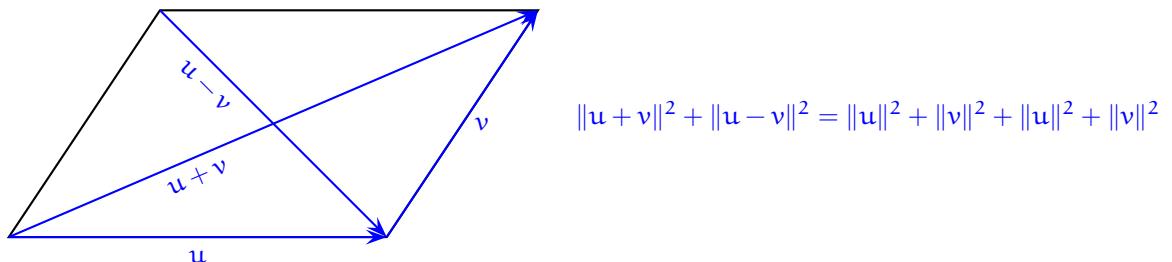
$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

DÉMONSTRATION . Soient u et v deux vecteurs. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle$ et $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle$. En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

□

On interprète géométriquement cette égalité. Si u et v sont deux vecteurs, $u + v$ et $u - v$ sont les diagonales du parallélogramme bâti sur u et v :



Ainsi, la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

3 Orthogonalité

3.1 Vecteurs orthogonaux

DÉFINITION 9. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient u et v deux éléments de E .

Les vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $\langle u, v \rangle = 0$.

 Il faut prendre garde au fait que $\langle u, v \rangle = 0 \not\Rightarrow u = 0$ ou $v = 0$ (mais bien sûr, $u = 0$ ou $v = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$ ou encore, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur).

3.2 Orthogonal d'une partie

DÉFINITION 10. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit A une partie de E .

Si A est non vide, l'**orthogonal de A** , noté A^\perp , est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A :

$$A^\perp = \{y \in E / \forall x \in A, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Si A est vide, l'orthogonal de A est E :

$$\emptyset^\perp = E.$$

Notation. Quand A est un singleton $\{x\}$ où x est un élément de E , $A^\perp = \{x\}^\perp$ s'écrit plus simplement x^\perp . Ainsi, si $A \neq \emptyset$, on a $A^\perp = \bigcap_{x \in A} x^\perp$.

La première propriété importante de l'orthogonal d'une partie est d'être toujours un sous-espace vectoriel de E , même si A n'est pas un sous-espace vectoriel de E :

Théorème 9. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit A une partie de E .

A^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

DÉMONSTRATION. Si A est vide, $A^\perp = E$ est un sous-espace de E . Dorénavant, $A \neq \emptyset$.

Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de A et donc $0 \in A^\perp$.

Soient $(y_1, y_2) \in (A^\perp)^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout x de A , par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \lambda_1 \langle x, y_1 \rangle + \lambda_2 \langle x, y_2 \rangle = 0,$$

et donc $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in A^\perp$. Ceci montre que A^\perp est un sous-espace de E . □

Théorème 10. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors

$$\{0\}^\perp = E \quad \text{et} \quad E^\perp = \{0\}.$$

DÉMONSTRATION. Tout vecteur de E est orthogonal au vecteur nul et donc $E \subset \{0\}^\perp$ puis $E = \{0\}^\perp$.

Soit $y \in E^\perp$. y est donc orthogonal à tout vecteur de E et en particulier, y est orthogonal à lui-même : $\langle y, y \rangle = 0$. Ceci impose $y = 0$. Donc, $E^\perp \subset \{0\}$ puis $E^\perp = \{0\}$ car E^\perp est un sous-espace de E . □

Théorème 11. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- 1) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $(A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp)$.
- 2) $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.

DÉMONSTRATION.

1) Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tel que $A \subset B$. Si $A = \emptyset$, alors $B^\perp \subset E = A^\perp$. Sinon, $A \neq \emptyset$ puis $B \neq \emptyset$ car $A \subset B$. Dans ce cas, pour $y \in E$,

$$y \in B^\perp \Rightarrow \forall x \in B, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \forall x \in A, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow y \in A^\perp.$$

Ceci montre encore une fois que $B^\perp \subset A^\perp$.

2) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Si $A = \emptyset$, alors $\text{Vect}(A) = \{0\}$ puis $(\text{Vect}(A))^\perp = E = A^\perp$. Dorénavant, on suppose $A \neq \emptyset$.

Puisque $A \subset \text{Vect}(A)$, on a $(\text{Vect}(A))^\perp \subset A^\perp$ d'après 1). Inversement, tout élément de A^\perp est orthogonal à tout élément de A puis à toute combinaison linéaire d'éléments de A par bilinéarité du produit scalaire. Ceci montre que $A^\perp \subset (\text{Vect}(A))^\perp$ et finalement que $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$. \square

Théorème 12. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

1) $F \cap F^\perp = \{0\}$.

2) $F \subset (F^\perp)^\perp$.

DÉMONSTRATION .

1) $F \cap F^\perp$ est un sous-espace de E en tant qu'intersection de sous-espaces de E . En particulier, $\{0\} \subset F \cap F^\perp$. Inversement, si x est un élément de $F \cap F^\perp$, x est en particulier orthogonal à lui-même et donc $x = 0$. Ceci montre que $F \cap F^\perp \subset \{0\}$ puis que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

2) Un élément de F est orthogonal à tout vecteur orthogonal à tous les vecteurs de F et donc est un élément de $(F^\perp)^\perp$. Ceci montre que $F \subset (F^\perp)^\perp$. \square

⇒ **Commentaire .** On pourrait s'attendre à ce que le **bi-orthogonal** $(F^\perp)^\perp$, plus simplement noté $F^{\perp\perp}$, soit égal à F . Ceci est faux en général mais difficile à apprécier en maths sup. En maths spé, on analyse des exemples où l'inclusion $F \subset F^{\perp\perp}$ est stricte. Néanmoins, on verra plus loin que si E est un espace euclidien ou encore si $\dim(E) < +\infty$, alors $F = F^{\perp\perp}$.

Exercice 6. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Solution 6. $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$. Donc, $(F + G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F + G)^\perp \subset G^\perp$ puis $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

Inversement, un élément de $F^\perp \cap G^\perp$ est orthogonal à tout élément de F et à tout élément de G puis à toute somme d'un élément de F et d'un élément de G par bilinéarité du produit scalaire. Ceci montre que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$ et finalement que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

4 Familles orthonormales

4.1 Définition

DÉFINITION 11. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient I un ensemble non vide d'indices puis $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E indexée par I .

La famille $(e_i)_{i \in I}$ est **orthogonale** si et seulement si

$$\forall (i, j) \in I^2, (i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0).$$

La famille $(e_i)_{i \in I}$ est **orthonormale** (ou **orthonormée**) si et seulement si

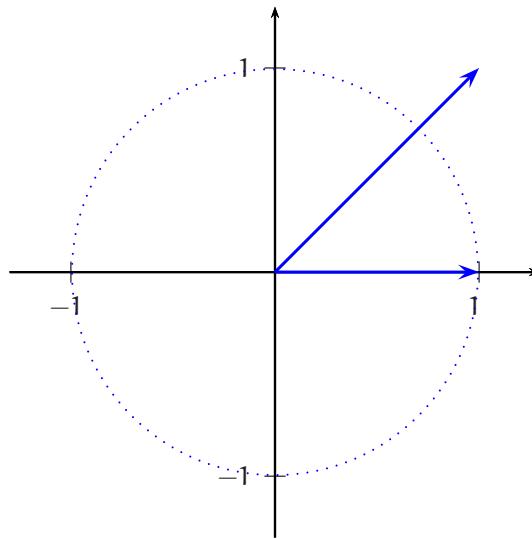
$$\forall (i, j) \in I^2, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Remarques.

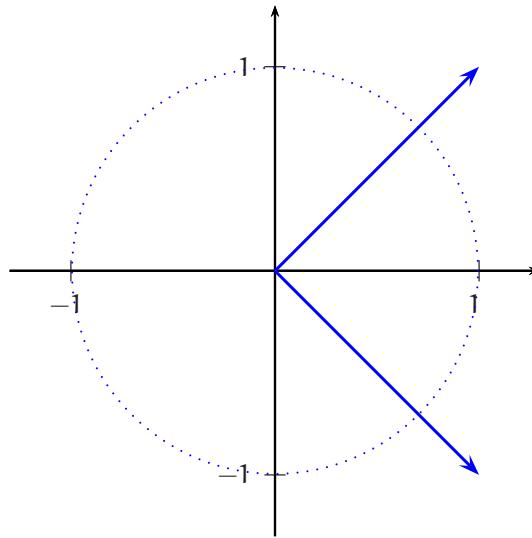
- Il est clair qu'une famille orthonormale est en particulier une famille orthogonale.
- La condition $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ est équivalente à la condition $\|e_i\| = 1$ ou encore les vecteurs d'une famille orthonormale sont unitaires.

Exemples. On munit $E = \mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel.

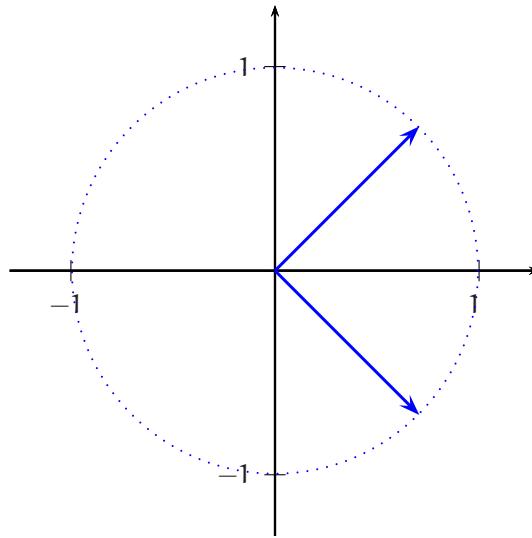
- Soient $u_1 = (1, 1)$ et $v_1 = (1, 0)$. $\langle u_1, v_1 \rangle = 1 \times 1 + 1 \times 0 = 1 \neq 0$. Donc, la famille (u_1, v_1) n'est pas une famille orthogonale.



- Soient $u_2 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$. $\langle u_2, v_2 \rangle = 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ et $\|u_2\|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \neq 1$. Donc, la famille (u_2, v_2) est une famille orthogonale mais n'est pas une famille orthonormale.



- Soient $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $\langle u_3, v_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ et $\|u_3\|^2 = \|v_3\|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$. Donc, la famille (u_3, v_3) est une famille orthonormale.



□

4.2 Propriétés

Théorème 13. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Une famille orthogonale de vecteurs **tous non nuls** est libre.

Une famille orthonormale est libre.

DÉMONSTRATION . Il suffit de démontrer le résultat quand la famille de vecteurs est finie.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 &\Rightarrow \forall j \in [1, n], \langle e_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \forall j \in [1, n], \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ (par bilinéarité du produit scalaire)} \\ &\Rightarrow \forall j \in [1, n], \lambda_j \langle e_j, e_j \rangle = 0 \text{ (car pour } i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0) \\ &\Rightarrow \forall j \in [1, n], \lambda_j = 0 \text{ (car } e_j \neq 0 \Rightarrow \langle e_j, e_j \rangle \neq 0). \end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

- Une famille orthonormale est en particulier une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls. Donc, une famille orthonormale est libre.

□

Exercice 7.

1) Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^*$, calculer $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n(x) = \sin(nx)$. Montrer que la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est libre.

Solution 7.

1) Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((n-p)x) - \cos((n+p)x)) dx$.

Si $n \neq p$, alors $n-p \neq 0$ et $n+p \neq 0$ (car $n+p \geq 2$). Dans ce cas,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((n-p)x) - \cos((n+p)x)) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin((n-p)x)}{n-p} - \frac{\sin((n+p)x)}{n+p} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Si $p = n$, alors

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2nx)) dx = \frac{1}{2\pi} \left(2\pi - \left[\frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_0^{2\pi} \right) = 1.$$

En résumé,

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx = \delta_{n,p}.$$

- 2) Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R} et 2π -périodiques (à valeurs dans \mathbb{R}). Pour $(f, g) \in E^2$, posons

$$f|g = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx.$$

Vérifions que $|$ est un produit scalaire sur E . $|$ est une application de E^2 dans \mathbb{R} , clairement bilinéaire et symétrique. De plus, pour $f \in E$, $f|f = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx \geq 0$ et enfin,

$$\begin{aligned} f|f = 0 &\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in [0, 2\pi], (f(x))^2 = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ (par } 2\pi\text{-périodicité)} \\ &\Rightarrow f = 0. \end{aligned}$$

Donc, $|$ est un produit scalaire sur E . D'après 1), la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormale de l'espace préhilbertien $(E, |)$. En particulier, la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est libre.

4.3 Procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT

On se donne un sous-espace vectoriel F de dimension finie n de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On va dégager un procédé permettant d'obtenir une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de F connaissant une base (u_1, \dots, u_n) de F .

Théorème 14. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille **libre** de n vecteurs de E .

Il existe une famille orthonormale $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et une seule telle que

- 1) $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}(u_i)_{1 \leq i \leq k} = \text{Vect}(e_i)_{1 \leq i \leq k}$.
- 2) $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle u_k, e_k \rangle > 0$.

DÉMONSTRATION. Soit (u_1, \dots, u_n) une famille libre. On montre par récurrence sur n l'existence et l'unicité de la famille (e_1, \dots, e_n) .

• Soit $n = 1$. La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq 1} = (u_1)$ est libre. En particulier, $u_1 \neq 0$ et donc u_1 endendre une droite vectorielle $D = \text{Vect}(u_1)$. On veut que $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(u_1)$ et donc nécessairement $e_1 \in \text{Vect}(u_1)$. Par suite, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $e_1 = \lambda u_1$.

Ensuite, $\|e_1\| = \|\lambda u_1\| = |\lambda| \|u_1\|$ puis $\|e_1\| = 1 \Rightarrow |\lambda| = \frac{1}{\|u_1\|} \Rightarrow e_1 = \pm \frac{1}{\|u_1\|} u_1$ (il n'y a plus que deux vecteurs e_1 possibles mais l'unicité de e_1 n'est pas encore assurée).

Enfin, $\langle u_1, e_1 \rangle = \lambda \langle u_1, u_1 \rangle = \lambda \|u_1\|^2$. Par suite, $\langle u_1, e_1 \rangle > 0 \Rightarrow \lambda \|u_1\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$ car $\|u_1\|^2 > 0$. Donc, nécessairement,

$$e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1.$$

Ceci montre l'unicité du vecteur e_1 . Réciproquement, e_1 est un vecteur non nul de la droite $\text{Vect}(u_1)$ et donc $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(u_1)$.

Ensuite, $\|e_1\| = \frac{1}{\|u_1\|} \|u_1\| = 1$. Enfin, $\langle u_1, e_1 \rangle = \frac{1}{\|u_1\|} \times \|u_1\|^2 = \|u_1\| > 0$. Donc, le vecteur e_1 convient.

• Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat acquis pour n . Soit $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ une famille libre de $n+1$ vecteurs de E .

En particulier, (u_1, \dots, u_n) une famille libre de n vecteurs de E . Par hypothèse de récurrence, il existe une famille orthonormale (e_1, \dots, e_n) et une seule vérifiant : pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}(e_i)_{1 \leq i \leq k} = \text{Vect}(u_i)_{1 \leq i \leq k}$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle e_k, u_k \rangle > 0$. Il reste à vérifier l'existence et l'unicité de e_{n+1} tel que $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ soit orthonormale, puis $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ et $\langle u_{n+1}, e_{n+1} \rangle > 0$.

Nécessairement, $e_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, u_{n+1})$ et donc il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et λ tels que $e_{n+1} = \lambda u_{n+1} + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Nécessairement,

$$0 = \langle e_{n+1}, e_i \rangle = \lambda \langle u_{n+1}, e_i \rangle + \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle e_j, e_i \rangle = \lambda \langle u_{n+1}, e_i \rangle + \lambda_i \quad (*)$$

et donc $\lambda_i = -\lambda \langle u_{n+1}, e_i \rangle$ puis $e_{n+1} = \lambda e'_{n+1}$ où

$$e'_{n+1} = u_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i.$$

Le vecteur $e'_{n+1} = u_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i$ ne peut être nul car dans le cas contraire, $u_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$

ce qui contredit la liberté de la famille $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$. L'égalité $\|e_{n+1}\| = 1$ impose $|\lambda| = \frac{1}{\|e'_{n+1}\|}$ puis $e_{n+1} = \pm \frac{1}{\|e'_{n+1}\|} e'_{n+1}$ (de nouveau, il n'y a plus que deux possibilités pour e_{n+1} et c'est la condition de signe $\langle u_{n+1}, e_{n+1} \rangle > 0$ qui va nous permettre de choisir entre ces deux possibilités). On a

$$\langle u_{n+1}, e'_{n+1} \rangle = \langle u_{n+1}, u_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i \rangle = \|u_{n+1}\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle u_{n+1}, e_i \rangle^2.$$

Vérifions que la dernière quantité est strictement positive. Mais,

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbf{u}_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle e_i \right\|^2 &= \left(\mathbf{u}_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle e_i \right) \left(\mathbf{u}_{n+1} - \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_j \rangle e_j \right) \\
&= \|\mathbf{u}_{n+1}\|^2 - 2 \langle \mathbf{u}_{n+1}, \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle e_i \rangle + \left(\sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle e_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_j \rangle e_j \right) \\
&= \|\mathbf{u}_{n+1}\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle^2 + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\
&= \|\mathbf{u}_{n+1}\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle^2 + \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle^2 = \|\mathbf{u}_{n+1}\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle^2 = \langle \mathbf{u}_{n+1}, e'_{n+1} \rangle.
\end{aligned}$$

Donc, $\langle \mathbf{u}_{n+1}, e'_{n+1} \rangle = \left\| \mathbf{u}_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle e_i \right\|^2 > 0$ (car $\mathbf{u}_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle e_i \neq 0$). Or, $\langle \mathbf{u}_{n+1}, e_{n+1} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}_{n+1}, e'_{n+1} \rangle$.

La condition $\langle \mathbf{u}_{n+1}, e_{n+1} \rangle > 0$ et le fait que $\langle \mathbf{u}_{n+1}, e'_{n+1} \rangle > 0$ impose $\lambda > 0$ puis $e_{n+1} = \frac{1}{\|e'_{n+1}\|} e'_{n+1}$. Ceci montre l'unicité du vecteur e_{n+1} .

Il reste à vérifier que le vecteur e_{n+1} convient. Le vecteur e_{n+1} est bien défini (car $e'_{n+1} \neq 0$) et unitaire. Les égalités (*) montrent que e_{n+1} est orthogonal aux vecteurs e_1, \dots, e_n et finalement, la famille $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ est orthonormale. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\text{Vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}) &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, e'_{n+1}) = \text{Vect}\left(e_1, \dots, e_n, \mathbf{u}_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle e_i\right) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, \mathbf{u}_{n+1}) \\
&= \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}).
\end{aligned}$$

Enfin, $\langle \mathbf{u}_{n+1}, e_{n+1} \rangle = \frac{1}{\|e'_{n+1}\|} \langle \mathbf{u}_{n+1}, e'_{n+1} \rangle = \frac{1}{\|e'_{n+1}\|} \left\| \mathbf{u}_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \|e'_{n+1}\| > 0$ car la famille $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1})$ est libre. Donc, le vecteur e_{n+1} convient.

L'existence et l'unicité de la famille (e_1, \dots, e_n) est démontrée par récurrence. □

⇒ Commentaire .

◊ La démonstration précédente commence par le cas $n = 1$ où on apprend pour un vecteur non nul u donné à créer un vecteur e unitaire, colinéaire à u et de même sens que u : « on divise u par sa norme ». On dit que l'on a **normé** le vecteur u .

◊ La démonstration aurait été certainement plus brève si on n'avait pas voulu à tout prix l'unicité de la famille (e_1, \dots, e_n) grâce à la condition $\forall k \in [1, n], \langle u_k, e_k \rangle > 0$.

◊ A ce stade du chapitre, on n'a pas les moyens de comprendre la signification du vecteur $\mathbf{u}_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle e_i$ ou aussi de comprendre pourquoi on a considéré l'expression $\left\| \mathbf{u}_{n+1} - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}_{n+1}, e_i \rangle e_i \right\|^2$. On ne peut que constater que ça marche. Nous reviendrons plus loin sur la signification géométrique de ces calculs, dans le paragraphe « projection orthogonale ».

◊ Si la famille $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ est déjà orthonormée, il est clair que son orthonormalisée est elle-même. Plus généralement, si la famille $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ est orthogonale (et libre), son orthonormalisée est la famille $\left(\frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|} \mathbf{u}_1, \dots, \frac{1}{\|\mathbf{u}_n\|} \mathbf{u}_n \right)$.

◊ On note enfin que si $F = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ où $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ est libre, alors $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ est une base de F et son orthonormalisée (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de F (puisque d'autre part, $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$).

DÉFINITION 12. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $(\mathbf{u}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille **libre** de n vecteurs de E .

La famille (e_1, \dots, e_n) du théorème 14 s'appelle **l'orthonormalisée de SCHMIDT** (ou plus simplement **l'orthonormalisée**) de la famille $(\mathbf{u}_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On doit absolument mémoriser :

Définition de l'orthonormalisée de la famille libre (u_1, \dots, u_n) :
C'est l'unique famille orthonormale (e_1, \dots, e_n) telle que

- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle u_k, e_k \rangle > 0$.

Procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT.

$$\bullet e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1.$$

$$\bullet \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, e_{k+1} = \frac{1}{\|e'_{k+1}\|} e'_{k+1} \text{ où}$$

$$e'_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle u_{k+1}, e_i \rangle e_i.$$

Exemple. On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit P le plan d'équation $3x - y + 2z = 0$. Une base de ce plan est (u_1, u_2) où $u_1 = (1, 3, 0)$ et $u_2 = (0, 2, 1)$. On veut maintenant une base orthonormée de ce plan. L'orthonormalisée (e_1, e_2) de la famille libre (u_1, u_2) convient.

$$\|u_1\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{10} \text{ puis } e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} (1, 3, 0).$$

$$\langle u_2, e_1 \rangle = 0 \times \frac{1}{\sqrt{10}} + 2 \times \frac{3}{\sqrt{10}} + 1 \times 0 = \frac{6}{\sqrt{10}} \text{ puis}$$

$$e'_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1 = (0, 2, 1) - \frac{6}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} (1, 3, 0) = \frac{1}{10} (-6, 2, 10) = \frac{1}{5} (-3, 1, 5).$$

$$\|e'_2\| = \frac{1}{5} \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{35}}{5} \text{ puis } e_2 = \frac{1}{\|e'_2\|} e'_2 = \frac{1}{\sqrt{35}} (-3, 1, 5).$$

Une base orthonormée de P est (e_1, e_2) où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} (1, 3, 0)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{35}} (-3, 1, 5)$.

Exercice 8. On munit $E = \mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire : $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$, $P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Déterminer une base orthonormée de l'espace euclidien $(E, |\cdot|)$.

Solution 8. On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2$ de sorte que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminons l'orthonormalisée (E_0, E_1, E_2) de la famille libre (P_0, P_1, P_2) . On pose au passage $Q_1 = P_1 - \langle P_1, E_0 \rangle E_0$ et $Q_2 = P_2 - \langle P_2, E_0 \rangle E_0 - \langle P_2, E_1 \rangle E_1$ (les notations E'_1 et E'_2 ne peuvent pas être utilisées puisqu'elles désignent les dérivées des polynômes E_1 et E_2).

$$\bullet \|P_0\|^2 = \int_0^1 1^2 dt = 1. \text{ Donc, } [E_0 = 1].$$

$$\bullet \langle P_1, E_0 \rangle = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \text{ puis}$$

$$Q_1 = P_1 - \langle P_1, E_0 \rangle E_0 = X - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ensuite, } \|Q_1\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4} \right) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ puis}$$

$$E_1 = \frac{1}{\|Q_1\|} Q_1 = \sqrt{12} \left(X - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3}(2X - 1).$$

$$\text{Donc, } [E_1 = \sqrt{3}(2X - 1)].$$

$$\bullet \langle P_2, E_0 \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \text{ et } \langle P_2, E_1 \rangle = \sqrt{3} \int_0^1 (2t^3 - t^2) dt = \sqrt{3} \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ puis}$$

$$Q_2 = P_2 - \langle P_2, E_0 \rangle E_0 - \langle P_2, E_1 \rangle E_1 = X^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{3}(2X - 1) = X^2 - X + \frac{1}{6}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\|Q_2\|^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{t}{3} + \frac{1}{36}\right) dt \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{36 - 90 + 80 - 30 + 5}{180} = \frac{1}{180},\end{aligned}$$

puis

$$E_2 = \frac{1}{\|Q_2\|} Q_2 = \sqrt{180} \left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5} (6X^2 - 6X + 1).$$

Donc, $E_2 = \sqrt{5} (6X^2 - 6X + 1)$.

Une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}_2[X], |\cdot|)$ est (E_0, E_1, E_2) .

4.4 Bases orthonormées

Une base orthonormée (ou orthonormale) de l'espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est, comme son nom l'indique, une base de l'espace E qui de plus est une famille orthonormée. Rien ne prouve qu'une telle base existe.

4.4.1 Existence de bases orthonormées en dimension finie

Théorème 15. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie non nulle n .

Il existe au moins une base orthonormée de E .

DÉMONSTRATION. Puisque E est de dimension finie non nulle n , E admet au moins une base (u_1, \dots, u_n) . Cette base est en particulier une famille libre. Soit (e_1, \dots, e_n) son orthonormalisée.

(e_1, \dots, e_n) est une famille orthonormée et en particulier, (e_1, \dots, e_n) est une famille libre. Puisque $\text{card}(e_1, \dots, e_n) = n = \dim(E) < +\infty$, (e_1, \dots, e_n) est une base de E et finalement (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E . □

Si E est de dimension infinie, on ne sait pas dire à l'avance si l'espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ admet au moins une base orthonormée. Mais cela ne veut pas dire qu'il n'y en a pas. Par exemple, si on munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire canonique :

$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \times \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}$ (vérifiez qu'il s'agit bien d'un produit scalaire), la base canonique $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Théorème 16 (théorème de la base orthonormée incomplète). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie non nulle n . Soient $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ puis (e_1, \dots, e_p) une famille orthonormée de E .

Si $p < n$, il existe des vecteurs e_{p+1}, \dots, e_n tels que $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E .

DÉMONSTRATION. (e_1, \dots, e_p) est une famille orthonormée et en particulier, (e_1, \dots, e_p) est une famille libre de E . On peut la compléter en $(e_1, \dots, e_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ une base de E . Les vecteurs $f_1 = e_1, \dots, f_p = e_p$ vérifient les conditions : $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle f_k, e_k \rangle > 0$. Par unicité, ce sont donc les premiers vecteurs de l'orthonormalisée de la famille $(e_1, \dots, e_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$.

L'orthonormalisée de la famille $(e_1, \dots, e_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ s'écrit donc $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ et convient. □

4.4.2 Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme en base orthonormée

Théorème 17. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie non nulle n . Soit (e_1, \dots, e_n) une base **orthonormée** de cet espace.

1) $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ ou encore, si on pose $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors

$$\forall i \in [1, n], x_i = \langle x, e_i \rangle.$$

2) $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$ ou encore, si on pose $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

3) $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2}$ ou encore, si on pose $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

DÉMONSTRATION .

1) Soit $x \in E$. Posons $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $i \in [1, n]$.

$$\langle x, e_i \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \langle e_j, e_i \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \delta_{i,j} = x_i.$$

2) Soit $(x, y) \in E^2$. Posons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

3) Soit $x \in E$. Posons $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. D'après 2),

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

□

5 Projections orthogonales. Symétries orthogonales

5.1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace d'un espace euclidien

Théorème 18. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

1) $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

2) $E = F \oplus F^\perp$ ou encore F^\perp est un supplémentaire de F .

DÉMONSTRATION .

1) Le résultat est clair si $E = \{0\}$ ou $F = \{0\}$ ou $F = E$. Dorénavant, E n'est pas réduit à $\{0\}$ et F n'est ni $\{0\}$, ni E (ce qui impose $\dim(E) \geq 2$). Soient $n = \dim(E)$ puis $p = \dim(F) \in [1, n-1]$. Soit (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de F (qui existe puisque F est de dimension finie). D'après le théorème de la base orthonormée incomplète, il existe des vecteurs e_{p+1}, \dots, e_n tels que $B = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E .

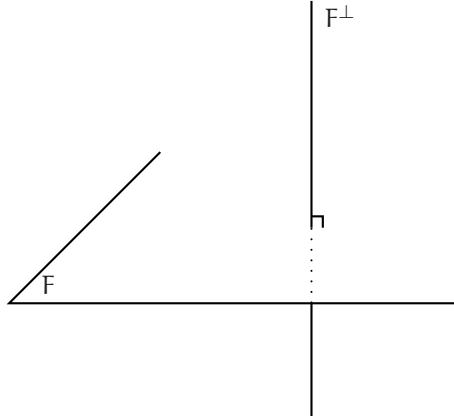
Soit $x \in E$. Posons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
x \in F^\perp &\Leftrightarrow x \in (\text{Vect}(e_1, \dots, e_p))^\perp \\
&\Leftrightarrow x \in (e_1, \dots, e_p)^\perp \quad (\text{d'après le théorème 11}) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in [1, p], \langle x, e_i \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall i \in [1, p], x_i = 0 \quad (\text{puisque } \mathcal{B} \text{ est orthonormée et d'après le théorème 17}) \\
&\Leftrightarrow x \in \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n).
\end{aligned}$$

Donc, $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On en déduit que $\dim(F^\perp) = n - p = \dim(E) - \dim(F)$.

2) D'après le théorème 12, $F \cap F^\perp = \{0\}$ et d'après 1), $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$. On en déduit que $E = F \oplus F^\perp$. □

Ainsi, si E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E , F^\perp est toujours **un** supplémentaire de F . F^\perp s'appelle **le** supplémentaire orthogonal de F . On peut alors tenter de se représenter la situation par un dessin du genre :



En dimension infinie, on a toujours $F \cap F^\perp = \{0\}$. Mais on verra en maths spé qu'il est possible que $E \neq F + F^\perp$ et donc que F et F^\perp ne sont pas toujours supplémentaires. Le dessin ci-dessus peut donc être une **représentation mentale complètement fausse** dans le cas de la dimension infinie.

Théorème 19. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Alors, $F^{\perp\perp} = F$.

DÉMONSTRATION . D'après le théorème 12, F est un sous-espace vectoriel de $F^{\perp\perp}$. De plus,

$$\dim(F^{\perp\perp}) = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(E) - (\dim(E) - \dim(F)) = \dim(F) < +\infty.$$

On en déduit que $F^{\perp\perp} = F$. □

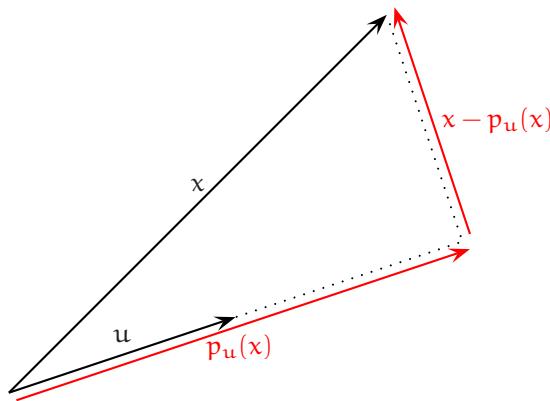
5.2 Projections orthogonales

5.2.1 Projection orthogonale sur un vecteur non nul

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit u un vecteur non nul. $D = \text{Vect}(u)$ est une droite vectorielle et D^\perp est donc un hyperplan de E . On sait que $E = D \oplus D^\perp$. Donc, tout vecteur x de E est, de manière unique, somme d'un vecteur y de D et d'un vecteur z de D^\perp :

$$x = y + z.$$

Le vecteur y est par définition le projeté de x sur D parallèlement à D^\perp . y s'appelle le **projeté orthogonal de x sur la droite D** ou aussi, par abus de langage, le **projeté orthogonal du vecteur x sur le vecteur u** . Il se note $p_u(x)$.



On veut exprimer le vecteur $p_u(x)$ en fonction des vecteurs x et u . Le vecteur $p_u(x)$ est colinéaire à u . Donc, il existe un réel λ tel que $p_u(x) = \lambda u$. Le vecteur $x - p_u(x)$ est orthogonal à u et donc

$$0 = \langle x - p_u(x), u \rangle = \langle x - \lambda u, u \rangle = \langle x, u \rangle - \lambda \langle u, u \rangle = \langle x, u \rangle - \lambda \|u\|^2,$$

et donc $\lambda = \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2}$. On retiendra :

Projeté orthogonal sur un vecteur non nul u .

$$\forall x \in E, p_u(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u.$$

Projeté orthogonal sur un vecteur unitaire u .

$$\forall x \in E, p_u(x) = \langle x, u \rangle u.$$

On note que dans l'expression $\frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2}$, la norme de u est au carré et pas à l'exposant 1. Pour s'en rappeler, on peut faire la constatation qui suit. Il est clair que le projeté du vecteur x sur le vecteur $2u$ est le même que le projeté du vecteur x sur le vecteur u . Il s'agit dans les deux cas du projeté orthogonal du vecteur x sur la droite D . Ceci fonctionne bien quand le dénominateur est au carré :

$$p_{2u}(x) = \frac{\langle x, 2u \rangle}{\langle 2u, 2u \rangle} (2u) = \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = p_u(x)$$

mais ne fonctionne pas avec l'expression $\frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|} u$, la norme de ce dernier vecteur doublant quand u est doublé.

Exercice 9. On munit \mathbb{R}^3 du produit scalaire usuel. On se donne un vecteur unitaire $u = (a, b, c)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le vecteur u .

Solution 9. On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 . Puisque le produit scalaire considéré est le produit scalaire canonique de sorte que la base canonique est orthonormée.

Pour tout vecteur $v = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 , (puisque u est unitaire)

$$p_u(v) = \langle u, v \rangle u = (ax + by + cz)(a, b, c) = (a^2x + aby + acz, abx + b^2y + bcz, acx + bcy + c^2z).$$

Puisque $\begin{pmatrix} a^2x + aby + acz \\ abx + b^2y + bcz \\ acx + bcy + c^2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, la matrice demandée est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} p_u = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

⇒ **Commentaire.**

◊ On rappelle que la trace d'une projection est son rang. Ici, la trace de la matrice est $a^2 + b^2 + c^2$ ou encore 1. 1 est effectivement la dimension de $\text{Vect}(u)$ ou encore le rang de p_u .

◊ On montrera en maths spé que la matrice d'une projection orthogonale dans une base orthonormée est une matrice symétrique. C'est effectivement le cas ici.

5.2.2 Projection orthogonale sur un hyperplan

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit H un hyperplan de E . H^\perp est donc un sous-espace de dimension $n - (n - 1) = 1$ ou encore H^\perp est une droite vectorielle. Tout vecteur non nul de H^\perp engendre donc H^\perp . Ceci conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 13. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit H un hyperplan de E .

Un **vecteur normal** à l'hyperplan H est un vecteur non nul et orthogonal à H .

Un théorème immédiat est :

Théorème 19. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit H un hyperplan de E . Soit n un vecteur normal à H . Alors

$$H = n^\perp.$$

Théorème 20. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ puis H l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$.

Un vecteur normal à H est le vecteur u de coordonnées (a_1, \dots, a_n) dans la base \mathcal{B} .

DÉMONSTRATION . Soit $u = \sum_{i=1}^n a_i e_i$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur de E . Puisque la base \mathcal{B} est orthonormée,

$$\langle u, x \rangle = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

et donc

$$x \in H \Leftrightarrow a_1x_1 + \dots + a_nx_n \Leftrightarrow \langle u, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in u^\perp.$$

Donc, $H = u^\perp$ ou encore u est un vecteur normal à H .

□

Dirigeons nous maintenant vers une expression du projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur un hyperplan H de E . Soit donc H un hyperplan de vecteur normal n (on revient à la notation n qui ne sert plus à désigner la dimension de E). Puisque $p_H = \text{Id}_E - p_{H^\perp}$, pour tout vecteur x de E , le projeté orthogonal de x sur H est

$$p_H(x) = x - p_n(x) = x - \frac{\langle x, n \rangle}{\|n\|^2} n.$$

On retiendra :

Projeté orthogonal sur un hyperplan, de vecteur normal n .

$$\forall x \in E, p_H(x) = x - \frac{\langle x, n \rangle}{\|n\|^2} n.$$

Exercice 10. On munit \mathbb{R}^3 du produit scalaire usuel. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $3x + y - z = 0$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Solution 10. On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 . La base \mathcal{B} est orthonormée pour le produit scalaire considéré. Un vecteur normal au plan P est le vecteur $n = (3, 1, -1)$. Pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 ,

$$p_n(u) = \frac{\langle u, n \rangle}{\|n\|^2} n = \frac{3x + y - z}{11} (3, 1, -1)$$

et donc

$$\begin{aligned} p_P(u) &= u - p_n(u) = (x, y, z) - \frac{3x + y - z}{11} (3, 1, -1) \\ &= \frac{1}{11} (2x - 3y + 3z, -3x + 10y + z, 3x + y + 10z) \end{aligned}$$

et donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} p_P = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

On note que la matrice obtenue est symétrique. On note aussi que sa trace est $\frac{1}{11}(2 + 10 + 10) = 2$ qui est aussi la dimension de P ou encore le rang de p_P .

5.2.3 Projection orthogonale sur un sous-espace. Distance à un sous-espace

DÉFINITION 14. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace de E .

La **projection orthogonale sur F** est la projection sur F parallèlement à F^\perp .

Une projection orthogonale est en particulier une projection. Rappelons alors les différentes propriétés qui en découlent. Soient F un sous-espace de E puis p_F la projection orthogonale sur F . La projection associée à p_F est p_F^\perp .

- $p_F \circ p_F = p_F$.
- $p_F \circ p_{F^\perp} = p_{F^\perp} \circ p_F = 0$ et $p_F + p_{F^\perp} = \text{Id}_E$.
- $F = \text{Im}(p_F) = \text{Ker}(p_{F^\perp}) = \text{Ker}(\text{Id}_E - p_F) = \{\text{vecteurs invariants par } p_F\}$ et $F^\perp = \text{Ker}(p_F) = \text{Im}(p_{F^\perp})$.

On va maintenant déterminer une expression du projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur x sur un sous-espace F non réduit à $\{0\}$ quand on connaît une base orthonormée (e_1, \dots, e_k) de F .

Soit x un vecteur de E . Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i.$$

Le vecteur $p_F(x)$ est alors déterminé par la condition : $x - p_F(x) \in F^\perp$. Or,

$$\begin{aligned} x - p_F(x) \in F^\perp &\Leftrightarrow x - p_F(x) \in (\text{Vect}(e_1, \dots, e_k))^\perp \\ &\Leftrightarrow x - p_F(x) \in (e_1, \dots, e_k)^\perp \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [1, k], \langle x - \sum_{j=1}^k \lambda_j e_j, e_i \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [1, k], \langle x, e_i \rangle - \sum_{j=1}^k \lambda_j \langle e_j, e_i \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [1, k], \langle x, e_i \rangle - \lambda_i = 0 \text{ (car } (e_1, \dots, e_p) \text{ est orthonormée)} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [1, k], \lambda_i = \langle x, e_i \rangle. \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i.}$$

On peut donner une autre lecture de l'expression ci-dessus. Pour $i \in [1, k]$, notons p_i la projection orthogonale sur le vecteur unitaire e_i . On sait que

$$\forall x \in E, p_i(x) = \langle x, e_i \rangle e_i.$$

On a donc

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^k p_i(x).$$

On peut énoncer :

Théorème 21. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soient F un sous-espace de E non réduit à $\{0\}$ puis (e_1, \dots, e_k) une base orthonormée de E . Alors,

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i.$$

- On peut maintenant revenir sur les calculs effectués au cours de l'étude du procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT. En fin de démonstration (page 17 et 18), nous avons dû établir que l'expression $\|u_{n+1}\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle u_{n+1}, e_i \rangle^2$ était strictement positive. C'est immédiat si on prend la peine d'interpréter géométriquement l'expression. Puisque (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, le projeté orthogonal de u_{n+1} sur F est

$$p_F(u_{n+1}) = \sum_{i=1}^n \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i.$$

Toujours puisque (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de F ,

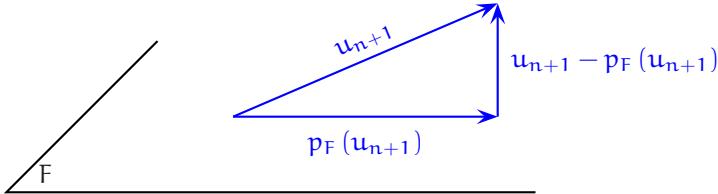
$$\sum_{i=1}^n \langle u_{n+1}, e_i \rangle^2 = \|p_F(u_{n+1})\|^2 \quad \text{puis} \quad \|u_{n+1}\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle u_{n+1}, e_i \rangle^2 = \|u_{n+1}\|^2 - \|p_F(u_{n+1})\|^2.$$

Les vecteurs $p_F(u_{n+1})$ d'une part, et $u_{n+1} - p_F(u_{n+1})$ d'autre part, sont orthogonaux ($p_F(u_{n+1}) \in F$ et $u_{n+1} - p_F(u_{n+1}) \in F^\perp$) et ont pour somme u_{n+1} . D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$\|u_{n+1}\|^2 = \|p_F(u_{n+1})\|^2 + \|u_{n+1} - p_F(u_{n+1})\|^2$$

et donc

$$\|u_{n+1}\|^2 - \|p_F(u_{n+1})\|^2 = \|u_{n+1} - p_F(u_{n+1})\|^2 > 0.$$



- On va maintenant définir la distance d'un élément x de E à un sous-espace F de E . De manière générale, si A est une partie non vide de E et x un élément de E , l'ensemble de réels $\{\|x - y\|, y \in A\}$ et une partie non vide et minorée (par 0) de \mathbb{R} . $\{\|x - y\|, y \in A\}$ admet donc une borne inférieure dans \mathbb{R} , qui est un réel positif. On peut donc poser

DÉFINITION 15. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soient A une partie non vide de E et x un élément de E .

La **distance de x à A** est :

$$d(x, A) = \inf\{\|x - y\|, y \in A\}.$$

Théorème 22. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soient F un sous-espace de E et x un élément de E .

- 1) $\forall y \in F, \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|.$
- 2) $\forall y \in F, \|x - y\| = \|x - p_F(x)\| \Leftrightarrow y = p_F(x).$
- 3) $d(x, F) = \min\{\|x - y\|, y \in F\} = \|x - p_F(x)\|.$

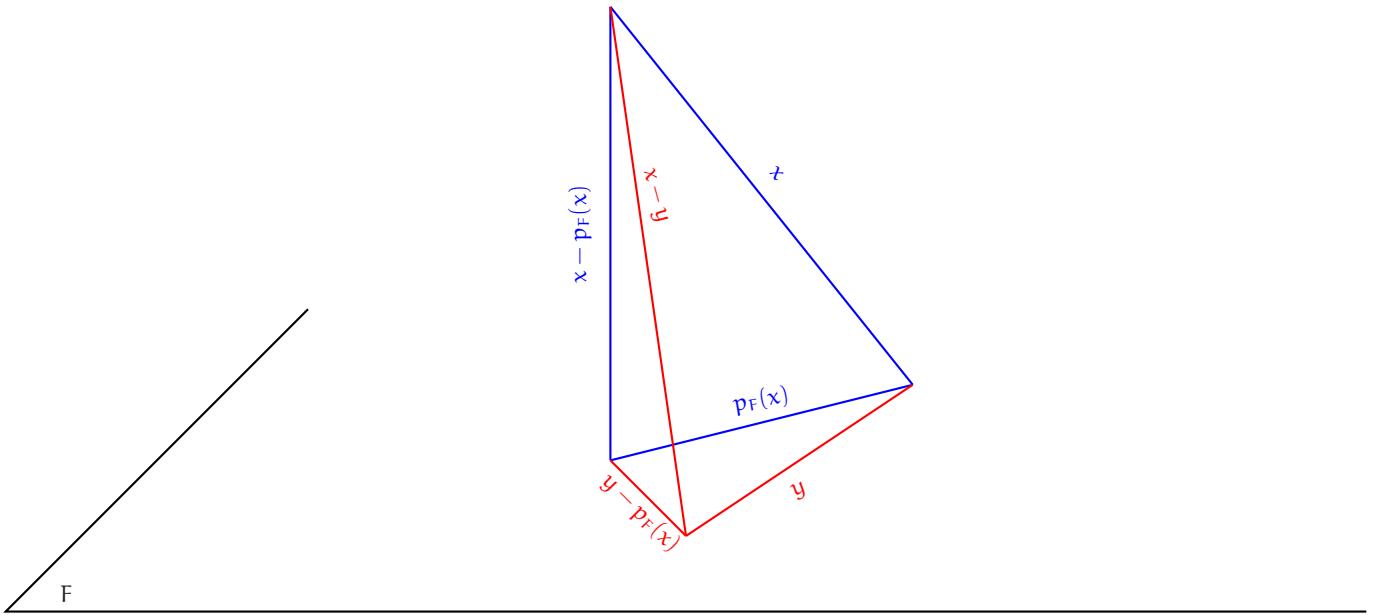
DÉMONSTRATION. Soit $y \in F$. $x - y = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)$ avec $p_F(x) - y \in F$ (car $p_F(x) \in F$, $y \in F$ et car F est un sous-espace de E) et $x - p_F(x) \in F^\perp$ (ainsi, $x - y$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle et $x - p_F(x)$ est l'un des côtés de ce triangle). D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$\|x - y\|^2 = \|(x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2.$$

Ainsi : $\forall y \in F, \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$. De plus, on a l'égalité si et seulement si $\|p_F(x) - y\| = 0$ ce qui équivaut à $y = p_F(x)$ ($p_F(x)$ étant effectivement l'un des vecteurs de F).

Ceci montre que $\{\|x - y\|, y \in F\}$ admet un minimum, que ce minimum est atteint pour $y = p_F(x)$ et uniquement pour $y = p_F(x)$ et finalement que

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$



□

Exercice 11. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

Déterminer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Solution 11.

- $(P_0, P_1) = (1, X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminons son orthonormalisée (E_0, E_1) .

$$\|P_0\|^2 = \int_0^1 dt = 1 \text{ puis } \|P_0\| = 1 \text{ et finalement } E_0 = 1.$$

$$(P_1|E_0) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \text{ puis } P_1 - (P_1|E_0) E_0 = X - \frac{1}{2}. \text{ Ensuite,}$$

$$\|P_1 - (P_1|E_0) E_0\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\text{et donc } E_1 = \sqrt{12} \left(X - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X - 1).$$

- Une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_1[X]$ est (E_0, E_1) . Le projeté orthogonal de $Q = X^2$ sur F est

$$p_F(Q) = (Q|E_0) E_0 + (Q|E_1) E_1.$$

$$(Q|E_0) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \text{ et } (Q|E_1) = \sqrt{3} \int_0^1 (2t^3 - t^2) dt = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}. \text{ Donc,}$$

$$p_F(Q) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{3}(2X - 1) = X - \frac{1}{6}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \|Q - p_F(Q)\|^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4t^2}{3} - \frac{t}{3} + \frac{1}{36}\right) dt \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{36 - 90 + 80 - 30 + 5}{180} \\ &= \frac{1}{180}. \end{aligned}$$

La distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ est donc

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|Q - p_F(Q)\| = \frac{1}{\sqrt{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}.$$

Exercice 12. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A, B) \mapsto (A|B) = \text{Tr}({}^t A B)$.

1) Montrer que $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la distance de A à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Solution 12.

1) Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$(A|B) = \text{Tr}({}^t A B) = \text{Tr}(A(-{}^t B)) = -\text{Tr}({}^t B A) = -(B|A) = -(A|B)$$

et donc $2(A|B) = 0$ puis $(A|B) = 0$.

On a montré que $\forall (A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $(A|B) = 0$ et donc $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow B \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp)$. Par suite, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp$.

Enfin, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ont donc même dimension finie. On en déduit que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A s'écrit de manière unique sous la forme $A = B + C$ avec $B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. On a $p_{\mathcal{S}_3(\mathbb{R})}(A) = B$ puis

$$d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \|A - B\| = \|C\|.$$

On sait que la partie antisymétrique de A est

$$C = \frac{1}{2}(A - {}^t A) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Pour en finir momentanément avec les projections orthogonales, l'exercice suivant propose une caractérisation des projections qui sont des projections orthogonales.

Exercice 13. Soit $(E, |\cdot|)$ un espace euclidien. Soit p une projection.

Montrer que : p est une projection orthogonale si et seulement si $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Solution 13.

• Soient F un sous-espace de E puis $p = p_F$ la projection orthogonale sur F . Montrons que $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Soit $x \in E$. Puisque $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$, le théorème de PYTHAGORE permet d'affirmer que

$$\|x\|^2 = \|p(x) + (x - p(x))\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2,$$

et donc $\|x\| \geq \|p(x)\|$.

• Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires puis p la projection sur F parallèlement à G . On suppose que $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Montrons alors que $G = F^\perp$.

Le résultat est clair si $F = \{0\}$ ou $G = \{0\}$ (dans ce cas $F^\perp = E = G$ ou $F^\perp = \{0\} = G$). Dorénavant, on suppose que F et G ne sont pas réduits à $\{0\}$.

Soit $(x_1, x_2) \in (\mathbb{F} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{G} \setminus \{0\})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $x = x_1 + \lambda x_2$ a pour projeté $p(x) = x_1$ (tous les vecteurs $x_1 + \lambda x_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ont le même projeté). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'hypothèse $\|p(x)\| \leq \|x\|$ fournit

$$\|x_1\|^2 = \|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2 = \|x_1 + \lambda x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + 2\lambda(x_1|x_2) + \lambda^2\|x_2\|^2.$$

Ainsi, pour tout réel λ , $\lambda^2\|x_2\|^2 + 2\lambda(x_1|x_2) \geq 0$. L'application $\lambda \mapsto \lambda^2\|x_2\|^2 + 2\lambda(x_1|x_2)$ est un trinôme du second degré (car $\|x_2\|^2 \neq 0$) positif sur \mathbb{R} . Le discriminant réduit de ce trinôme est négatif ou nul :

$$0 \geq \Delta' = (x_1|x_2)^2 - 4 \times \|x_2\|^2 \times 0 = (x_1|x_2)^2.$$

Puisque d'autre part, $(x_1|x_2)^2$ est un réel positif, on en déduit que $(x_1|x_2)^2 = 0$ puis que $(x_1|x_2) = 0$.

On a montré que tout vecteur de \mathbb{G} est orthogonal à tout vecteur de \mathbb{F} et donc que $\mathbb{G} \subset \mathbb{F}^\perp$. D'autre part, \mathbb{F}^\perp et \mathbb{G} sont deux supplémentaires de \mathbb{F} et ont donc même dimension finie. Puisque \mathbb{G} est un sous-espace de \mathbb{F}^\perp , on en déduit que $\mathbb{G} = \mathbb{F}^\perp$ et donc que p est une projection orthogonale.

5.3 Symétries orthogonales

DÉFINITION 16. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace de E .

La **symétrie orthogonale par rapport à F** est la symétrie par rapport à F parallèlement à F^\perp .

La symétrie orthogonale à rapport à F se note s_F . Une symétrie orthogonale étant en particulier une symétrie, on peut rappeler quelques propriétés qui en découlent.

- $s_F \circ s_F = \text{Id}_E$ (s_F est involutive).
- $s_F = 2p_F - \text{Id}_E$ et $p_F = \frac{1}{2}(\text{Id}_E + s_F)$.
- $F = \text{Ker}(s_F - \text{Id}_E) = \{\text{vecteurs invariants par } s_F\}$ et $F^\perp = \text{Ker}(s_F + \text{Id}_E) = \{\text{vecteurs changés en leur opposé par } s_F\}$.

DÉFINITION 17. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan s'appelle une **réflexion**.

Une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension $n - 2$ s'appelle un **retournement**.

Ainsi, si $\dim(E) = 3$, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un plan et si $\dim(E) = 2$, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Si $\dim(E) = 3$, un retournement est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Comme pour les projections, on donne en exercice une caractérisation du fait qu'une symétrie soit une symétrie orthogonale.

Exercice 14. Soit $(E, |\cdot|)$ un espace euclidien. Soit s une symétrie de E .

Montrer que s est une symétrie orthogonale si et seulement si $\forall x \in E$, $\|s(x)\| = \|x\|$.

Solution 14. Si on a résolu l'exercice 13 (sur les projections orthogonales) avant d'avoir résolu l'exercice 14, la solution est très simple : s est une symétrie orthogonale si et seulement si $p = \frac{1}{2}(\text{Id}_E + s)$ est une projection orthogonale si et seulement si $G = F^\perp$. On donne maintenant une solution où on travaille directement sur la symétrie s sans utiliser le résultat établi pour les projections.

- Soient F un sous-espace de E puis s_F la symétrie orthogonale par rapport à F . Soit $x \in E$. x s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$\|x\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$$

et

$$\|s(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \| - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2.$$

Donc, $\|s(x)\|^2 = \|x\|^2$ puis $\|s(x)\| = \|x\|$.

- Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires puis s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . On suppose que $\forall x \in E$, $\|s(x)\| = \|x\|$.

Par hypothèse, pour tout $(x_1, x_2) \in F \times G$,

$$\|x_1\|^2 + 2(x_1|x_2) + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2 = \|s(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 - 2(x_1|x_2) + \|x_2\|^2,$$

et donc $4(x_1|x_2) = 0$ puis $(x_1|x_2) = 0$. Ainsi, $\forall (x_1, x_2) \in F \times G$, $(x_1|x_2) = 0$ et donc $G \subset F^\perp$. Puisque d'autre part F^\perp et G ont même dimension finie, on en déduit finalement que $G = F^\perp$.

6 Hyperplans affines d'un espace euclidien

6.1 Vecteur normal à un hyperplan affine

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Un **repère orthonormé** \mathcal{R} de E est un couple $(O, \mathcal{B}) = (O, (e_1, \dots, e_p))$ où O est un point de E et \mathcal{B} est une base orthonormée de E (on note donc p la dimension de E pour garder la lettre n pour désigner un vecteur normal).

Dans ce qui suit, on fixe l'espace euclidien $(E, |\cdot|)$ et $\mathcal{R} = (O, e_1, \dots, e_p)$ un repère orthonormé de cet espace. On va s'intéresser aux hyperplans affines de l'espace euclidien $(E, |\cdot|)$. Commençons par rappeler les principales connaissances sur le sujet.

Un hyperplan affine \mathcal{H} de E est un sous-ensemble de E de la forme $\mathcal{H} = A + H = \{A + u, u \in H\}$ où A est un point de E et H est un hyperplan (vectoriel) de E . H est uniquement défini et s'appelle la direction de l'hyperplan affine \mathcal{H} .

Si \mathcal{R} est un repère donné (pas nécessairement orthonormé) de l'espace E , \mathcal{H} admet dans \mathcal{R} une équation de la forme

$$a_1x_1 + \dots + a_px_p = b$$

où $(a_1, \dots, a_p, b) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et $(a_1, \dots, a_p) \neq (0, \dots, 0)$.

Ce qui précède n'est pas concerné par la notion de produit scalaire. On va maintenant analyser ce qu'apporte de plus la structure d'espace euclidien.

DÉFINITION 18. Soit $(E, |\cdot|)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de E de direction l'hyperplan H .

On appelle **vecteur normal** à l'hyperplan affine \mathcal{H} tout vecteur non nul de H^\perp .

Puisque H^\perp est de dimension 1, la donnée d'un vecteur normal à \mathcal{H} détermine H de manière unique : $H = n^\perp$. Un théorème immédiat est :

Théorème 23. Soit $(E, |\cdot|)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de E de vecteur normal n .

Un vecteur n' est un vecteur normal à H si et seulement si n' est un vecteur non nul colinéaire à n .

La donnée d'un point A et d'un vecteur normal n détermine entièrement un hyperplan affine :

Théorème 24. Soit $(E, |\cdot|)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soit $\mathcal{H} = A + \vec{n}^\perp$ l'hyperplan affine passant par le point A et de vecteur normal \vec{n} .

\mathcal{H} est l'ensemble des points M de E tels que $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0$.

DÉMONSTRATION. Soient A un point de E et \vec{n} un vecteur non nul. Soit $\mathcal{H} = A + \vec{n}^\perp$, l'hyperplan affine passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

Soit M un point de E .

$$M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow M \in A + \vec{n}^\perp \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \vec{n}^\perp \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0.$$

□

On fixe maintenant un repère **orthonormé** $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) = (O, e_1, \dots, e_p)$ de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On note (a_1, \dots, a_p) les coordonnées du vecteur \vec{n} dans la base \mathcal{B} et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ les coordonnées du point A dans le repère \mathcal{R} . Soit M un point de l'espace de coordonnées (x_1, \dots, x_p) dans le repère \mathcal{R} .

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow a_1(x_1 - \alpha_1) + \dots + a_p(x_p - \alpha_p) = 0 \\ &\Leftrightarrow a_1x_1 + \dots + a_px_p = b \text{ où on a posé } b = a_1\alpha_1 + \dots + a_p\alpha_p. \end{aligned}$$

Inversement, on suppose que \mathcal{R} est un repère **orthonormé** et que \mathcal{H} est l'ensemble des points de E d'équation $a_1x_1 + \dots + a_px_p = b$ dans le repère \mathcal{R} où $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Il existe $i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $a_{i_0} \neq 0$. Mais alors le point de coordonnées $\left(0, \dots, 0, \frac{b}{a_{i_0}}, 0, \dots, 0\right)$ est un élément de \mathcal{H} . En particulier, \mathcal{H} n'est pas vide. Soit donc A un point de \mathcal{H} dont les coordonnées dans le repère \mathcal{R} sont notées $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$. Soit M un point de l'espace dont les coordonnées dans le repère \mathcal{R} sont notées (x_1, \dots, x_p) .

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_p x_p = b \Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_p x_p = a_1 \alpha_1 + \dots + a_p \alpha_p \\ &\Leftrightarrow a_1 (x_1 - \alpha_1) + \dots + a_p (x_p - \alpha_p) = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0 \end{aligned}$$

où \vec{n} est le vecteur de coordonnées (a_1, \dots, a_p) dans le repère \mathcal{R} . On peut donc énoncer :

Théorème 25. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère **orthonormé** de cet espace.

Soit $((a_1, \dots, a_p), b) \in (\mathbb{R}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}) \times \mathbb{R}$. Soit \mathcal{H} l'hyperplan affine d'équation $a_1 x_1 + \dots + a_p x_p = b$ dans le repère \mathcal{R} .

Un vecteur normal à l'hyperplan affine \mathcal{H} est le vecteur \vec{n} de coordonnées (a_1, \dots, a_p) dans la base \mathcal{B} .

Plaçons nous dans le cas particulier où $p = 2$ (cas où $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un plan euclidien). Un hyperplan affine est dans ce cas une droite affine \mathcal{D} . Si \mathcal{D} admet pour équation cartésienne $ax + by = c$ dans un certain repère **orthonormé** \mathcal{R} de E , un vecteur normal à \mathcal{D} est le vecteur \vec{n} de coordonnées (a, b) dans le repère \mathcal{R} .

De même, si $p = 3$ (cas où $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension 3), un hyperplan affine est dans ce cas un plan affine \mathcal{P} . Si \mathcal{P} admet pour équation cartésienne $ax + by + bz = d$ dans un certain repère **orthonormé** \mathcal{R} de E , un vecteur normal à \mathcal{P} est le vecteur \vec{n} de coordonnées (a, b, c) dans le repère \mathcal{R} .

6.2 Lignes de niveaux de l'application $M \mapsto \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle$

Soient A un point de E , \vec{n} un vecteur non nul de E et k un réel. On note \mathcal{H} l'ensemble des points M de l'espace tels que $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = k$ (\mathcal{H} est la ligne de niveau associée au réel k de l'application $M \mapsto \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle$).

On sait déjà que si $k = 0$, \mathcal{H} est l'hyperplan affine passant par A et de vecteur normal \vec{n} . Dorénavant, k est un réel quelconque.

Soit M_0 le point de l'espace défini par : $M_0 = A + \frac{k}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$. Alors, $\overrightarrow{AM_0} = \frac{k}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$ puis

$$\langle \overrightarrow{AM_0}, \vec{n} \rangle = \frac{k}{\|\vec{n}\|^2} \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = k.$$

M_0 est donc un point de \mathcal{H} et en particulier, \mathcal{H} n'est pas vide. Soit maintenant M un point quelconque de l'espace.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = k \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = \langle \overrightarrow{AM_0}, \vec{n} \rangle \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM_0}, \vec{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{M_0M}, \vec{n} \rangle = 0. \end{aligned}$$

\mathcal{H} est donc l'hyperplan affine passant par M_0 et de vecteur normal \vec{n} . On peut énoncer :

Théorème 26. Soient A un point de E , \vec{n} un vecteur non nul de E et k un réel.

L'ensemble des points M de E tels que $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = k$ est un hyperplan affine de vecteur normal \vec{n} .

6.3 Projeté orthogonal d'un point sur un hyperplan affine. Distance à un hyperplan affine

On se donne A un point de E , \vec{n} un vecteur non nul de E puis \mathcal{H} l'hyperplan affine passant par A de vecteur normal \vec{n} . On note $H = \vec{n}^\perp$ la direction de \mathcal{H} .

Théorème 27. Pour tout point M de E , il existe un point M_0 de \mathcal{H} et un seul tel que $\overrightarrow{MM_0} \in H^\perp$.

M_0 s'appelle le **projeté orthogonal** du point M sur l'hyperplan affine \mathcal{H} .

DÉMONSTRATION. Soit M un point de l'espace. Soit M_0 un point de l'espace.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MM_0} \in H^\perp &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0} \in \text{Vect}(\vec{n}) \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{MM_0} = \lambda \vec{n} \text{ (car } \vec{n} \neq \vec{0}) \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / M_0 = M + \lambda \vec{n}
\end{aligned}$$

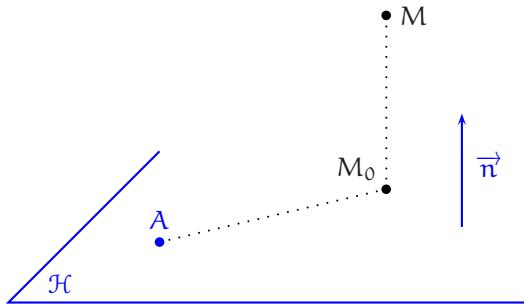
Soient donc $\lambda \in \mathbb{R}$ puis $M_0 = M + \lambda \vec{n}$.

$$\begin{aligned}
M_0 \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM_0}, \vec{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM_0}, \vec{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{MM_0}, \vec{n} \rangle = -\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle \Leftrightarrow \lambda \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = -\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle \\
&\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}.
\end{aligned}$$

Ceci montre l'existence et l'unicité de λ et donc de M_0 . □

Au passage, on a obtenu une expression du projeté orthogonal M_0 sur l'hyperplan affine $\mathcal{H} = A + \vec{n}^\perp$:

$$M_0 = M - \frac{\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$



On peut maintenant définir la distance d'un point M de l'espace à un hyperplan affine puis on donne différentes expressions de cette distance.

DÉFINITION 19. Soient M un point et \mathcal{H} un hyperplan affine.

La **distance du point M à l'hyperplan affine \mathcal{H}** est :

$$d(M, \mathcal{H}) = \inf\{MN, N \in \mathcal{H}\}.$$

On note que le nombre $d(M, \mathcal{H})$ est bien défini car $\{MN, N \in \mathcal{H}\}$ est une partie non vide et minorée (par 0) de \mathbb{R} . Une première expression de cette distance est fournie par le théorème suivant :

Théorème 28. Soient \mathcal{H} un hyperplan affine et M un point de l'espace. Alors,

$$d(M, \mathcal{H}) = MM_0,$$

où M_0 est le projeté orthogonal du point M sur l'hyperplan affine \mathcal{H} .

DÉMONSTRATION . Soit \mathcal{H} un hyperplan affine dont la direction est notée H . Soient M un point de l'espace, M_0 le projeté orthogonal de M sur \mathcal{H} puis N un point de \mathcal{H} . Alors, $\overrightarrow{M_0N} \in H$ et $\overrightarrow{M_0M} \in H^\perp$. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$MN^2 = \overline{MN}^2 = \overline{MM_0}^2 + \overline{M_0N}^2 = MM_0^2 + M_0N^2 \geq MM_0^2$$

avec égalité si et seulement si $M_0N^2 = 0$ ou encore $N = M_0 \in \mathcal{H}$. Ceci montre la borne inférieure de l'ensemble $\{MN, N \in \mathcal{H}\}$ est un minimum et que ce minimum est atteint quand N est le point M_0 et uniquement dans ce cas. □

On a vu plus haut que si $\mathcal{H} = A + \vec{n}^\perp$, où A est un point de l'espace et \vec{n} est un vecteur non nul, et si M est un point de l'espace, alors

$$M_0 = M - \frac{\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

On en déduit que :

$$d(M, \mathcal{H}) = MM_0 = \left\| \frac{\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \right\| = \frac{|\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|^2} \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}.$$

Si de plus le vecteur \vec{n} est unitaire, alors directement

$$d(M, \mathcal{H}) = |\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle|.$$

On peut énoncer :

Théorème 29. Soient A un point de l'espace et \vec{n} un vecteur non nul, puis $\mathcal{H} = A + \vec{n}^\perp$, l'hyperplan affine passant par A de vecteur normal \vec{n} .

Pour tout point M de l'espace,

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}.$$

Si de plus le vecteur \vec{n} est unitaire, pour tout point M de l'espace,

$$d(M, \mathcal{H}) = |\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle|.$$

On suppose maintenant que l'espace est muni d'un repère orthonormé \mathcal{R} et qu'une équation cartésienne de l'hyperplan \mathcal{H} dans \mathcal{R} est

$$a_1x_1 + \dots + a_px_p = b,$$

où $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ et $b \in \mathbb{R}$. On sait que le vecteur \vec{n} , de coordonnées (a_1, \dots, a_p) dans le repère \mathcal{R} , est un vecteur normal à l'hyperplan affine \mathcal{H} . Puisque le repère \mathcal{R} est orthonormé,

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_p^2}.$$

D'autre part, si on note $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ les coordonnées dans \mathcal{R} d'un point donné A de \mathcal{H} , on a $a_1\alpha_1 + \dots + a_p\alpha_p = b$ et donc, si M est un point quelconque de l'espace dont les coordonnées dans \mathcal{R} sont notées (x_1, \dots, x_n) ,

$$|\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle| = |a_1(x_1 - \alpha_1) + \dots + a_p(x_p - \alpha_p)| = |a_1x_1 + \dots + a_px_p - a_1\alpha_1 - \dots - a_p\alpha_p| = |a_1x_1 + \dots + a_px_p - b|.$$

On peut donc énoncer :

Théorème 30. Soit \mathcal{R} un repère orthonormé de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Soit \mathcal{H} un hyperplan affine, d'équation $a_1x_1 + \dots + a_px_p = b$ dans le repère \mathcal{R} .

Pour tout point M de l'espace, de coordonnées (x_1, \dots, x_p) dans le repère \mathcal{R} ,

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|a_1x_1 + \dots + a_px_p - b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_p^2}}.$$

Dans le cas où $p = 2$, un hyperplan affine est une droite \mathcal{D} . Si une équation cartésienne de \mathcal{D} dans un certain repère orthonormé \mathcal{R} s'écrit $ax + by + c = 0$, alors pour tout point M_0 , de coordonnées (x_0, y_0) dans le repère \mathcal{R} ,

$$d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dans le cas où $p = 3$, un hyperplan affine est un plan \mathcal{P} . Si une équation cartésienne de \mathcal{P} dans un certain repère orthonormé \mathcal{R} s'écrit $ax + by + cz + d = 0$, alors pour tout point M_0 , de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans le repère \mathcal{R} ,

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exercice 15. On se place dans \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 puis on note \mathcal{R} le repère $(0, e_1, e_2, e_3)$.

On considère le plan \mathcal{P} d'équation $3x - y - z = 3$ et le point M de coordonnées $(1, 2, 1)$ dans le repère \mathcal{R} .

Déterminer le projeté orthogonal du point M sur le plan \mathcal{P} ainsi que la distance du point M au plan \mathcal{P} .

Solution 15. Le plan \mathcal{P} est le plan passant par $A(1, 0, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3, -1, -1)$. Le projeté orthogonal M_0 de $M(1, 2, 1)$ sur \mathcal{P} est

$$\begin{aligned} M_0 &= M - \frac{\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = (1, 2, 1) - \frac{(1-1) \times 3 + (2-0) \times (-1) + (1-0) \times (-1)}{11} (3, -1, -1) \\ &= \left(\frac{20}{11}, \frac{19}{11}, \frac{8}{11} \right). \end{aligned}$$

La distance de M à \mathcal{P} est

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|3 \times 1 - 2 - 1 - 3|}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

6.4 Orientation d'un hyperplan par un vecteur normal

On rappelle la notion d'orientation d'un \mathbb{R} -espace E de dimension finie non nulle. Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de E , \mathcal{B} et \mathcal{B}' ont la même orientation si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$. La relation « avoir la même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E et il y a exactement deux classes d'équivalence pour cette relation. Orienter l'espace E , c'est choisir arbitrairement l'une de ces deux classes pour ensemble des bases dites directes ou positives et l'autre classe pour ensemble des bases dites indirectes ou négatives.

On suppose maintenant que l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, de dimension $p \geq 2$, est orienté. On se donne un hyperplan vectoriel H de cet espace. On fixe un vecteur normal n de cet hyperplan. Le vecteur n **orienté l'hyperplan** H de la façon suivante :

$$\text{pour toute base } \mathcal{B}_H = (e_1, \dots, e_{p-1}) \text{ de } H, \\ \mathcal{B}_H \text{ est une base directe de } H \Leftrightarrow (e_1, \dots, e_{p-1}, n) \text{ est une base directe de } E.$$

Il est clair que si on remplace le vecteur n par le vecteur $n' = \lambda n$ avec $\lambda > 0$, le vecteur n' oriente l'hyperplan H de la même façon et si on remplace le vecteur n par le vecteur $n' = \lambda n$ avec $\lambda < 0$ (et en particulier si on remplace n par $-n$), le vecteur n' oriente l'hyperplan H de façon contraire.

Enfin, si $\mathcal{H} = A + H = A + n^\perp$ est un hyperplan affine de E , de direction H et de vecteur normal n , le vecteur n oriente l'hyperplan affine \mathcal{H} de la façon suivante : un repère $\mathcal{R}_{\mathcal{H}} = (A, \mathcal{B}_H)$ de \mathcal{H} est direct si et seulement si \mathcal{B}_H est une base directe de l'hyperplan H orienté par n .

7 Automorphismes orthogonaux. Matrices orthogonales

7.1 Automorphismes orthogonaux

7.1.1 Définition

DÉFINITION 20. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit f un endomorphisme de E .

f est une **isométrie** de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si et seulement si $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$. On dit dans ce cas que f **conserve la norme**.

⇒ **Commentaire.** Dans la définition précédente, f est d'abord un endomorphisme de E . Il existe des isométries non linéaires (c'est-à-dire des applications de E vers E qui conservent la norme et qui ne sont pas linéaires). Par exemple, une translation de vecteur non nul est une isométrie et n'est pas linéaire.

On énonce une première propriété importante des isométries linéaires d'un espace euclidien :

Théorème 31. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit f une isométrie linéaire de cet espace. Alors f est une automorphisme de E .

DÉMONSTRATION. Soit f une isométrie linéaire de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Soit $x \in E$.

$$x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \|f(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Donc, $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Puisque l'espace E est de dimension finie, on en déduit que f est un automorphisme de E . □

DÉFINITION 21. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Une isométrie linéaire de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s'appelle aussi **un automorphisme orthogonal** de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (et réciproquement).

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se note $O(E)$.

On peut remarquer que la notation $O(E)$ est un peu imprécise car elle ne fait pas référence au produit scalaire utilisé. Si on change de produit scalaire, l'ensemble $O(E)$ devrait changer. On devrait donc écrire $O((E, \langle \cdot, \cdot \rangle))$ au lieu de simplement $O(E)$. Mais la notation serait alors très lourde ...

Théorème 32. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit f un endomorphisme de E .

f conserve la norme si et seulement si f conserve le produit scalaire ou encore

$$(\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|) \Leftrightarrow (\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle).$$

DÉMONSTRATION . Soit f un endomorphisme de E .

- Supposons que f conserve le produit scalaire. Alors en particulier pour $x \in E$,

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|,$$

et donc f conserve la norme.

- Supposons que f conserve la norme. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2} \left(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \right) \text{ (identité de polarisation)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \right) \text{ (par linéarité de } f) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right) \text{ (car } f \text{ conserve la norme)} \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Donc, f conserve le produit scalaire. □

En résumé, si f est un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ qui conserve la norme, alors f est automatiquement un automorphisme de E et conserve automatiquement le produit scalaire. Un tel automorphisme est appelé **automorphisme orthogonal** de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

7.1.2 Image d'une base orthonormée

Théorème 33. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit f un endomorphisme de E .

$f \in O(E)$ si et seulement si l'image par f de toute base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
 $f \in O(E)$ si et seulement si il existe une base orthonormée \mathcal{B} de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ telle que $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

DÉMONSTRATION . • Soit f un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de cet espace. Alors, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Donc, la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Soit f un endomorphisme de E . On suppose que la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Soit $(x, y) \in E^2$. Posons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ où $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \sum_{j=1}^n y_j f(e_j) \right\rangle \text{ (car } f \text{ est linéaire)} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ (car } f(\mathcal{B}) \text{ est une base orthonormée)} \\ &= \langle x, y \rangle \text{ (car } \mathcal{B} \text{ est une base orthonormée).} \end{aligned}$$

Donc, f conserve le produit scalaire ou encore f est un automorphisme orthogonal.

□

Les automorphismes orthogonaux sont donc les endomorphismes transformant une base orthonormée en une base ortho-normée.

7.1.3 Symétries orthogonales

Un exemple très important d'automorphismes orthogonaux est fourni par le théorème suivant :

Théorème 34. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Toute symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal.

DÉMONSTRATION . Soit F un sous-espace de l'espace E . Soit s_F la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace F . Soit $x \in E$. Il existe $(x_1, x_2) \in F \times F^\perp$ tel que $x = x_1 + x_2$. On sait alors que $s_F(x) = x_1 - x_2$. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$\|s(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2.$$

Donc, s_F conserve la norme ou encore, puisque s_F est linéaire, s_F est un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

□

On peut préciser davantage le théorème 34 :

Théorème 35. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit s une symétrie de l'espace E .

s est un automorphisme orthogonal si et seulement si s est une symétrie orthogonale.

DÉMONSTRATION . On sait déjà que si s est une symétrie orthogonale, alors s est un automorphisme orthogonal.

Réciproquement, soient F et G deux sous-espaces supplémentaires puis s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Supposons que $s \in O(E)$ et montrons que s est une symétrie orthogonale ou encore montrons que $G = F^\perp$.

Soit $(x_1, x_2) \in F \times G$.

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \frac{1}{4} (\|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2) = \frac{1}{4} (\|x\|^2 - \|s(x)\|^2) = 0.$$

Ceci montre que $G \subset F^\perp$. De plus, G et F^\perp sont deux supplémentaires de F et en particulier G et F^\perp ont même dimension finie. Finalement, $G = F^\perp$ ou encore s est une symétrie orthogonale.

□

7.1.4 Le groupe orthogonal ($O(E)$, \circ)

Théorème 36. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

$O(E)$ est un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$.

DÉMONSTRATION . On sait qu'une isométrie linéaire est en particulier un automorphisme de E et donc $O(E) \subset GL(E)$. D'autre part, Id_E est un automorphisme orthogonal de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ car Id_E est un endomorphisme de E qui conserve la norme.

Soit $(f, g) \in (O(E))^2$. Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|f \circ g^{-1}(x)\| &= \|f(g^{-1}(x))\| \\ &= \|g^{-1}(x)\| \text{ (car } f \in O(E)) \\ &= \|g(g^{-1}(x))\| \text{ (car } g \in O(E)) \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

Donc, l'endomorphisme $f \circ g^{-1}$ conserve la norme puis $f \circ g^{-1} \in O(E)$.

On a montré que $O(E)$ est un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$.

□

On termine cette section consacrée aux automorphismes orthogonaux par un exercice qui établit qu'un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité est une *similitude* c'est-à-dire la composée d'une homothétie et d'une isométrie linéaire (et réciproquement toute similitude conserve l'orthogonalité).

Exercice 16. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soit f un endomorphisme de E qui conserve l'orthogonalité c'est-à-dire qui vérifie

$$\forall (x, y) \in E^2, (\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $g \in O(E)$ tels que $f = \lambda g$.

Solution 16. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée fixée de E . Soit f un endomorphisme de E qui conserve l'orthogonalité.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$. $\langle e_i + e_j, e_i - e_j \rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1 - 1 = 0$. Donc, les vecteurs $e_i + e_j$ et $e_i - e_j$ sont orthogonaux. Puisque f conserve l'orthogonalité et est linéaire, il en est de même des vecteurs $f(e_i) + f(e_j)$ et $f(e_i) - f(e_j)$. Mais alors,

$$0 = \langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) \rangle = \|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2$$

puis $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. Ainsi, les vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ ont la même norme. On pose $\lambda = \|f(e_1)\|$. λ est un réel positif et $\|f(e_1)\| = \dots = \|f(e_n)\| = \lambda$.

1er cas. Si $\lambda = 0$, alors $f(e_1) = \dots = f(e_n) = 0$. L'endomorphisme f s'annule sur une base de E et donc $f = 0$. Dans ce cas, $\lambda = 0$ et $g = \text{Id}_E$ conviennent.

2ème cas. Supposons $\lambda > 0$. Posons $g = \frac{1}{\lambda}f$. Déjà, $f = \lambda g$. Ensuite, puisque f conserve l'orthogonalité, il en est de même de g et en particulier, la famille $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une famille orthogonale. De plus, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\|g(e_i)\| = \left\| \frac{1}{\lambda} f(e_i) \right\| = \frac{1}{\lambda} \|f(e_i)\| = 1$$

et donc la famille $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base orthonormale de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Puisque l'image par g d'une base orthonormale de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est une base orthonormale de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, g est un automorphisme orthogonal. On a encore une fois trouvé un réel positif λ et un automorphisme orthogonal g tels que $f = \lambda g$.

7.2 Matrices orthogonales

7.2.1 Définition

DÉFINITION 22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est une **matrice orthogonale** si et seulement si ${}^t A A = I_n$.

L'ensemble des matrices orthogonales se note $O_n(\mathbb{R})$ ou aussi $O(n)$.

Dit autrement, une matrice orthogonale est une matrice inversible d'inverse sa transposée (on rappelle que si ${}^t A A = I_n$, on a automatiquement $A {}^t A = I_n$).

Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ est orthogonale car cette matrice est inversible ($\det(A) = 1 \neq 0$), d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = {}^t A.$$

La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq {}^t B$. La matrice B n'est donc pas une matrice orthogonale.

Théorème 37. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t A \in O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors, ${}^t A A = A {}^t A = I_n$. On en déduit que $({}^t A) {}^t ({}^t A) = {}^t ({}^t A) ({}^t A) = I_n$ et donc ${}^t A \in O_n(\mathbb{R})$.

Inversement, en appliquant ce qui précède à la matrice ${}^t A$, si ${}^t A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $A = {}^t ({}^t A) \in O_n(\mathbb{R})$.

□

7.2.2 Lien avec les bases orthonormées

Une première caractérisation des matrices orthogonales est fournie par :

Théorème 38. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$A \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si les colonnes de A constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

$A \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si les lignes de A constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

DÉMONSTRATION . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note C_1, \dots, C_n , les colonnes de la matrice A . On note \langle , \rangle le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice ${}^t A A$ est $\sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}$. Par suite,

$$\begin{aligned} A \in O_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow {}^t A A = I_n \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = \delta_{i,j} \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j} \\ &\Leftrightarrow (C_1, \dots, C_n) \text{ base orthonormée de } (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle , \rangle). \end{aligned}$$

En appliquant ce résultat à la matrice ${}^t A$ et en notant L_1, \dots, L_n , les lignes de A et \langle , \rangle le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, on obtient

$$A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (L_1, \dots, L_n) \text{ base orthonormée de } (\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}), \langle , \rangle).$$

□

Ainsi, par exemple, si $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, les deux colonnes de A sont unitaires et orthogonales l'une à l'autre pour le produit scalaire usuel. Donc, de nouveau la matrice A est une matrice orthogonale.

Par contre, la deuxième colonne de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas unitaire ou aussi les deux colonnes de cette matrice ne sont pas orthogonales, toujours pour le produit scalaire usuel. La matrice B n'est donc pas une matrice orthogonale.

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 39. Soit (E, \langle , \rangle) un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de cet espace. Soient \mathcal{B}' une famille de n vecteurs de E puis $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Alors,

$$\mathcal{B}' \text{ une base orthonormée de } (E, \langle , \rangle) \Leftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R}).$$

DÉMONSTRATION . On note $(|)$ le produit scalaire usuel dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Puisque la base \mathcal{B} est orthonormée, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\langle e'_i, e'_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = (C_i | C_j).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} A \in O_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (C_i | C_j) = \delta_{i,j} \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e'_i, e'_j \rangle = \delta_{i,j} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{B}' \text{ base orthonormée de } (E, \langle , \rangle). \end{aligned}$$

□

⇒ **Commentaire .** Les matrices orthogonales sont donc les matrices de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée. En conséquence, l'inverse de la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre est tout simplement la transposée de cette matrice.

7.2.3 Lien avec les automorphismes orthogonaux

Théorème 40. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de cet espace. Soient f un endomorphisme de E puis $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors,

$$f \in O(E) \Leftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R}).$$

DÉMONSTRATION . D'après les théorèmes 33 et 39,

$$A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(\mathcal{B}) \text{ base orthonormée de } (E, \langle \cdot, \cdot \rangle) \Leftrightarrow f \in O(E).$$

□

⇒ **Commentaire .** Les matrices orthogonales sont donc aussi les matrices d'automorphismes orthogonaux dans une base orthonormée.

7.2.4 Déterminant d'une matrice orthogonale ou d'un automorphisme orthogonal

Théorème 41.

- 1) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors, $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
- 2) Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien puis $f \in O(E)$. Alors, $\det(f) \in \{-1, 1\}$.

DÉMONSTRATION .

- 1) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$.

$$1 = \det(I_n) = \det(^t A A) = \det(^t A) \det(A) = (\det(A))^2$$

et donc $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.

- 2) Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien puis $f \in O(E)$. On se donne \mathcal{B} une base **orthonormée** de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On sait que $\det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$. De plus, puisque \mathcal{B} est orthonormée et que $f \in O(E)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice orthogonale. D'après 1), $\det(f) = 1$ ou $\det(f) = -1$.

□

La réciproque du résultat précédent est fausse ou encore le déterminant d'une matrice carrée peut être égal à 1 ou à -1 bien que cette matrice ne soit pas une matrice orthogonale. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant égal à 1 mais n'est pas une matrice orthogonale.

DÉFINITION 23.

- 1) Une **matrice orthogonale positive** est une matrice orthogonale de déterminant 1 et une **matrice orthogonale négative** est une matrice orthogonale de déterminant -1 . On note $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$ ou $O_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales positives et $O_n^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales négatives.
- 2) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Un **automorphisme orthogonal positif** est un automorphisme orthogonal de déterminant 1 et un **automorphisme orthogonal négatif** est un automorphisme orthogonal de déterminant -1 . On note $SO(E)$ ou $O^+(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux positifs et $O^-(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux négatifs.

On rappelle que l'ensemble des matrices de déterminant 1, noté $SL_n(\mathbb{R})$ (groupe spécial linéaire), est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ et de même que, si E est un espace de dimension finie, l'ensemble des endomorphismes de E , de déterminant 1, noté $SL(E)$ (groupe spécial linéaire), est un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$. On peut alors énoncer :

Théorème 42.

- 1) $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe des groupes $(O_n(\mathbb{R}), \times)$, $(SL_n(\mathbb{R}), \times)$ et $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.
- 2) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. $SO(E)$ est un sous-groupe des groupes $(O(E), \circ)$, $(SL(E), \circ)$ et $(GL(E), \circ)$.

DÉMONSTRATION . $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ en tant qu'intersection de sous-groupes du groupe $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$. La démarche est identique pour $SO(E)$.

□

Ainsi, en particulier, le produit de deux matrices orthogonales positives est une matrice orthogonale positive. De manière plus générale, le produit de deux matrices orthogonales obéit à la « règle des signes » : le produit de deux matrices orthogonales négatives est une matrice orthogonale positive et le produit d'une matrice orthogonale positive et d'une matrice orthogonale négative est une matrice orthogonale négative.

On note aussi que I_n est une matrice orthogonale positive et que l'inverse d'une matrice orthogonale positive (resp. négative) est une matrice orthogonale positive (resp. négative).

On va maintenant déterminer « le signe » d'une symétrie orthogonale.

Théorème 43. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit F un sous espace vectoriel de E , de dimension $p \in [0, n]$. Soit s_F la symétrie orthogonale par rapport à F . Alors,

$$s_F \in O^+(E) \Leftrightarrow n - p \text{ est un entier pair.}$$

En particulier, toute réflexion est un automorphisme orthogonal négatif.

DÉMONSTRATION .

Dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$, la matrice de s_F s'écrit $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$, le nombre de -1 étant la dimension de F^\perp à savoir $n - p$. Par suite,

$$\det(s_F) = (-1)^{n-p}.$$

On en déduit que s_F est un automorphisme orthogonal positif si et seulement si $n - p$ est un entier pair.

Dans le cas particulier où s_F est une réflexion, F est un hyperplan de E ou encore $n - p = 1$. Le déterminant d'une réflexion est donc égal à -1 . On en déduit qu'une réflexion est toujours un automorphisme orthogonal négatif. □

Ainsi, en dimension 2, une symétrie orthogonale par rapport à une droite (réflexion) est un automorphisme orthogonal négatif. En dimension 3, une symétrie orthogonale par rapport à un plan (réflexion) est un automorphisme orthogonal négatif et une symétrie orthogonale par rapport à une droite (retournement) est un automorphisme orthogonal positif.

7.2.5 Produit mixte

On suppose que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$. On considère \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées directes de cet espace. D'après les formules de changement de bases, pour tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) de vecteurs de E ,

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n).$$

Puisque \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormées, la matrice de \mathcal{B}' dans \mathcal{B} est une matrice orthogonale. Donc, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \{-1, 1\}$. De plus, \mathcal{B} et \mathcal{B}' ont la même orientation et donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$. Finalement, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$ puis

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n).$$

On peut donc énoncer la définition suivante :

DÉFINITION 24. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

Le **produit mixte** des vecteurs de la famille (x_1, \dots, x_n) est le déterminant de cette famille dans une base orthonormée directe. Ce nombre ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe. Il est noté $[x_1, \dots, x_n]$.

Si la famille (x_1, \dots, x_n) est liée, son produit mixte est nul et si la famille (x_1, \dots, x_n) est libre, son produit mixte est un réel non nul. Nous allons interpréter géométriquement ce produit mixte dans ce dernier cas.

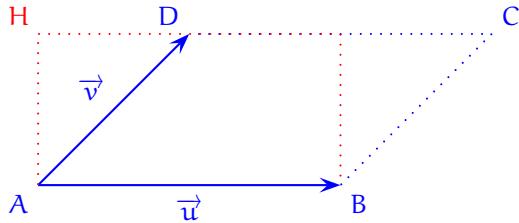
On commence par le cas $n = 2$. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs linéairement indépendants d'un espace euclidien orienté E de dimension 2 (et donc (\vec{u}, \vec{v}) est une base de E). On note A, B, C et D des points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$ et $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$. On note H le projeté orthogonal du point D sur la perpendiculaire à (AB) passant par A . On note que $H \neq A$ car $D \notin (AB)$. On a :

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}] &= [\vec{AB}, \vec{AD}] = [\vec{AB}, \vec{AH} + \vec{HD}] = [\vec{AB}, \vec{AH}] + [\vec{AB}, \vec{HD}] = [\vec{AB}, \vec{AH}] \\ &= AB \times AH \times \left[\frac{1}{AB} \vec{AB}, \frac{1}{AH} \vec{AH} \right]. \end{aligned}$$

Maintenant, $\left(\frac{1}{AB}\vec{AB}, \frac{1}{AH}\vec{AH}\right)$ est une base orthonormée et donc, $\left[\frac{1}{AB}\vec{AB}, \frac{1}{AH}\vec{AH}\right]$ est égal à 1 ou à -1 suivant que cette base soit directe ou indirecte puis

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \pm AB \times AH = \pm \text{aire de } ABCD,$$

le signe du produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}]$ étant + si la base (\vec{u}, \vec{v}) est directe et - si la base (\vec{u}, \vec{v}) est indirecte.



Dans les deux cas,

$$\text{aire de } ABCD = |[\vec{u}, \vec{v}]|.$$

Si on enlève la valeur absolue, le produit mixte de \vec{u} et \vec{v} (dans cet ordre) est l'**aire algébrique** (ou aire orientée) du parallélogramme ABCD. Cette aire est positive quand on va de \vec{u} à \vec{v} dans le sens direct et négative quand on va de \vec{u} à \vec{v} dans le sens indirect.

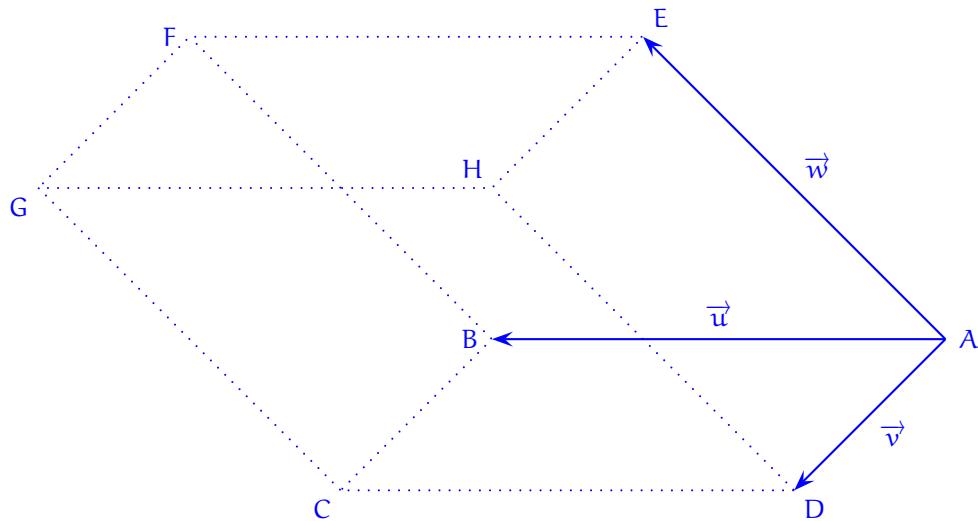
Dans le cas $n = 3$, le raisonnement est le même. Supposons que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base directe (de sorte que le produit mixte est strictement positif) d'un espace euclidien orienté E de dimension 3. On « redresse » alors l'un après l'autre chacun des vecteurs \vec{w} , \vec{v} et \vec{u} et on obtient :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \text{volume de } ABCDEFGH.$$

Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base indirecte, alors

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -\text{volume de } ABCDEFGH.$$

Dans tous les cas, la valeur absolue de $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est le volume du parallélépipède ABCDEFGH et si on enlève la valeur absolue, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est le **volume orienté** du parallélépipède ABCDEFGH. Le produit mixte est strictement positif si la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe, strictement négatif si la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est indirecte ... et nul si la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée.



Dans le cas général, $[x_1, \dots, x_n]$ est le **volume orienté** de l'« hyperparallélépipède » bâti sur (x_1, \dots, x_n) .

Etudions maintenant l'effet d'une application linéaire sur ce volume orienté :

Théorème 44. (effet d'une application linéaire sur le produit mixte.)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$[f(x_1), \dots, f(x_n)] = \det(f) \times [x_1, \dots, x_n].$$

DÉMONSTRATION . Si la famille (x_1, \dots, x_n) est liée, on sait que la famille $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est liée. Dans ce cas,

$$[f(x_1), \dots, f(x_n)] = 0 = \det(f) \times [x_1, \dots, x_n].$$

On suppose dorénavant que la famille (x_1, \dots, x_n) est libre et donc est une base de E que l'on note \mathcal{B}' .

Soit \mathcal{B} une base orthonormée directe de l'espace $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Alors,

$$\begin{aligned} [f(x_1), \dots, f(x_n)] &= \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}')) = \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \\ &= \det(f) \times [x_1, \dots, x_n]. \end{aligned}$$

□

7.3 Description de $O_2(\mathbb{R})$ et $O(E_2)$

7.3.1 Description de $O_2(\mathbb{R})$

On va déterminer toutes les matrices orthogonales de format 2. Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$.

La première colonne de A s'écrit nécessairement sous la forme $C_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$.

Le vecteur C_1 de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ n'est pas nul puis $(C_1)^\perp = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right)$ (dans $M_{2,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique).

C_2 devant être orthogonale à C_1 , il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $C_2 = \lambda \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Enfin, C_2 devant être unitaire, on a nécessairement $\lambda = \pm 1$. Donc, A est nécessairement de l'un des deux types suivants :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Réciproquement, les matrices ci-dessus sont orthogonales car leurs deux colonnes sont unitaires et orthogonales l'une à l'autre. On note que $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = 1$ et $\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -1$. Donc,

Théorème 45.

- les matrices orthogonales positives de format 2 sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 + b^2 = 1$, ou aussi les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
- les matrices orthogonales négatives de format 2 sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 + b^2 = 1$, ou aussi les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
- les matrices orthogonales de format 2 sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 + b^2 = 1$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, ou aussi les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

7.3.2 Etude de $O_2^+(\mathbb{R})$ et de $O^+(E_2)$

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (R est l'initiale du mot rotation).

Théorème 46.

- 1) Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$.
- 2) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$.

DÉMONSTRATION .

1) Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} R_\theta \times R_{\theta'} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')) \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\ &= R_{\theta+\theta'}. \end{aligned}$$

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$R_\theta \times R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Donc, $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$. □

⇒ **Commentaire**. Les calculs effectués ci-dessus ressemblent étrangement à certains calculs effectués dans \mathbb{C} : pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$. En maths spé, on dira que l'application $\begin{array}{ccc} (O_2^+(\mathbb{R}), \times) & \rightarrow & (\mathbb{U}, \times) \\ R_\theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Passons maintenant à l'étude des automorphismes orthogonaux positifs d'un espace euclidien orienté de dimension 2. Pour alléger les notations, on note E_2 un tel espace. On se donne \mathcal{B} une base orthonormée directe de E_2 .

Soit f un automorphisme orthogonal positif de E_2 . Puisque \mathcal{B} est orthonormée, la matrice A de f dans la base \mathcal{B} est orthogonale et puisque $\det(A) = \det(f) > 0$, A est un élément de $O_2^+(\mathbb{R})$. Donc, il existe un réel θ tel que $A = R_\theta$.

Changeons alors de base orthonormée directe. Soit \mathcal{B}' une base orthonormée directe. $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} \in O_2^+(\mathbb{R})$ et donc il existe un réel θ' tel que $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = R_{\theta'}$. D'après le théorème 46,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} \right)^{-1} A P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = R_{-\theta'} R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'+\theta+\theta'} = R_\theta.$$

Le réel θ ne dépend donc pas du choix de la base orthonormée directe \mathcal{B} (on peut démontrer également que si \mathcal{B}' est une base orthonormée indirecte, la matrice de f dans \mathcal{B}' est également R_θ). Il est uniquement défini modulo 2π (il est clair que $R_{\theta_1} = R_{\theta_2} \Leftrightarrow \theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$). L'automorphisme orthogonal positif f s'appelle une **rotation vectorielle** et le réel θ est une mesure de l'**angle** de cette rotation. Au passage, on a établi (ce qui suit est plus une définition qu'un théorème) :

Théorème 47. Les éléments de $O^+(E_2)$ sont les rotations de E_2 .

On note dorénavant r_θ la « rotation d'angle θ ».

Théorème 48. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs unitaires. Il existe une rotation r_θ et une seule telle que $r_\theta(\vec{u}) = \vec{v}$.

DÉMONSTRATION . Il suffit de montrer le résultat quand E_2 est l'espace $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ muni de structure euclidienne et de son orientation canonique.

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ puis $f = r_\theta$. Puisque \vec{u} et \vec{v} sont unitaires, il existe deux réels α et β tels que $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) = \vec{v} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \theta + \alpha = \beta + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = \beta - \alpha + 2k\pi. \\ &\Leftrightarrow f = r_{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

Ceci montre l'existence et l'unicité d'une rotation transformant \vec{u} en \vec{v} . □

Le théorème précédent nous permet alors de « définir proprement » les mesures d'un angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) . Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. On appelle mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) toute mesure de l'angle de l'unique rotation transformant $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ en $\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$. A partir de cette définition, on peut reconstituer les propriétés usuelles des angles orientés, la principale étant la relation de CHASLES.

7.3.3 Description de $O(E_2)$

On sait déjà que $O^+(E_2)$ est constitué des rotations. Intéressons nous maintenant à $O^-(E_2)$. Soit f un automorphisme orthogonal de E_2 . Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E_2 . La matrice de f dans \mathcal{B} est une matrice orthogonale négative. Donc, il existe un réel θ tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On note S_θ la matrice ci-dessus.

$$S_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

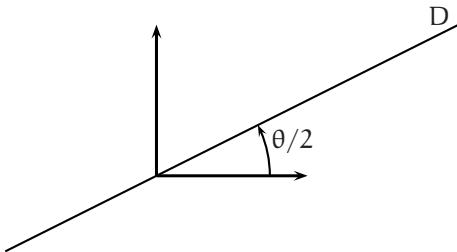
On en déduit encore que $f^2 = \text{Id}_{E_2}$ puis que f est une symétrie orthogonale (d'après le théorème 35). Si l'espace F des vecteurs invariants par f est de dimension 2, alors $f = \text{Id}_{E_2}$ ce qui est impossible car $\text{Id}_{E_2} \in O^+(E_2)$ et si l'espace F des vecteurs invariants par f est de dimension 0, alors F^\perp est de dimension 2 puis $f = -\text{Id}_{E_2}$ ce qui est impossible car $-\text{Id}_{E_2} \in O^+(E_2)$. Donc, F est de dimension 1 puis f est une réflexion.

Déterminons explicitement l'ensemble des vecteurs invariants par f . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta)x + \sin(\theta)y = x \\ \sin(\theta)x - \cos(\theta)y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \cos(\theta))x - \sin(\theta)y = 0 \\ \sin(\theta)x - (1 + \cos(\theta))y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)x - 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y = 0 \\ 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)x - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y\right) = 0 \\ 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y\right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y = 0 \\ (\text{car } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ ne sont pas simultanément nuls}). \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points invariants par f est la droite d'équation $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y = 0$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

Cette droite D est engendrée par le vecteur $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_2$. On dit que f est la réflexion par rapport à la droite « d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$ ».



Au passage, on a montré que :

Théorème 49. Soit E_2 un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2.

$O^+(E_2)$ est constitué des rotations. $O^-(E_2)$ est constitué des réflexions.

$O(E_2)$ est constitué des rotations et des réflexions.