2): Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ définie sur $[0, +\infty[$. Montrons que pour tout x dans $[0, +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Étape 1 : Montrons que $0 \leq f(x)$

La fonction $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ est définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc x est toujours positif ou nul. Dans ce cas, $\sqrt{x+2}$ et $\sqrt{x}$ sont toujours positifs, car la racine carrée d'un nombre positif est positive. Ainsi, $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \geq 0$ car $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$ (car $x + 2 \geq x$ puisque x est positif).

Étape 2 : Montrons que $f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$

Remarquons que $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ peut être réarrangée comme suit :

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \frac{(x+2) - x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

Puisque x est positif, on a $\sqrt{x} > 0$ et $\sqrt{x+2} > 0$, donc $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} > \sqrt{x} > 0$. Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} < 1$.

En utilisant cette information, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Donc, $f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Par conséquent, $\forall x \in, [0, +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.