

Variables aléatoires : Exercices corrigés.

Exercice 1 :

Soit une variable aléatoire discrète associée à la loi de probabilité suivante. Calculer son espérance et sa variance.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5

Exercice 2 :

Une variable aléatoire X est établie par la loi de probabilité suivante :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,3	0,05	0,1	0,05	0,2	p

Soit F sa fonction de répartition.

- a) Calculer p .
- b) Calculer $F(0,5)$
- c) Calculer $E(X)$.
- d) Calculer $\sigma(X)$.

Exercice 3 :

On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. On appelle cela une main.

Si la main contient 4 rois on gagne 100 €, si la main contient 3 rois, on gagne 50 €, si la main contient 2 rois, on ne gagne rien et on ne perd rien, si la main contient 1 rois, on perd 10 € et si la main ne contient aucun roi, on perd 50 €.

Soit X la variable aléatoire correspondant au gain.

- a) Etablir la loi de probabilité de X .
- b) Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 4:

On lance deux dés triangulaires de couleurs distinctes à 4 faces numérotées de 1 à 4. Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le résultat du dé bleu. Et X la variable aléatoire prenant pour valeur le résultat le plus grand.

- a) Quelle est la loi de probabilité conjointe de X et Y ?
- b) Quelles sont les lois marginales de X et de Y ?
- c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.

Exercice 5 :

Pour la fonction définie sur l'intervalle $[0;3]$ par $f(x) = kx$, déterminer la valeur de k pour qu'elle soit une densité de probabilité.

Exercice 6 :Partie A.

Soit X la variable aléatoire dont la fonction densité est définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = 4e^{-4x}$.

- a) Calculer $F(5)$.
- b) Calculer $p(1 < X < 3)$.

Partie B.

Pour la fonction suivante, définie sur l'intervalle $[0;2]$, déterminer la valeur de k pour qu'elle soit une densité de probabilité.

$$f(x) = kx^3$$

CORRECTION

Exercice 1 :

$$E(X) = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.1 + \dots + 6 \times 0.5 = 4.5$$

$$V(X) = 0.1 \times 1^2 + 0.1 \times 2^2 + \dots + 0.5 \times 6^2 - 4.5^2 = 3.25$$

Exercice 2 :

$$0.3 + 0.05 + 0.1 + 0.05 + 0.2 + p = 1 \text{ donc } p = 0.3$$

a) $F(0.5) = p(X \leq 0.5) = 0.3 + 0.05 + 0.1 = 0.45$

b) $E(X) = 0.3 \times (-2) + 0.05 \times (-1) + \dots + 0.3 \times 3 = 0.7$

$$V(X) = 0.3 \times (-2)^2 + 0.05 \times (-1)^2 + \dots + 0.3 \times 3^2 - 0.7^2 = 4.8 - 0.7^2 = 4.31$$

c) $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 2.077$

Exercice 3 :

a)

x_i	100	50	0	-10	-50
$p(X = x_i)$	$\frac{C_4^4 \times C_{28}^1}{C_{32}^5}$ $\cong 0.00014$	$\frac{C_4^3 \times C_{28}^2}{C_{32}^5}$ $\cong 0.00751$	$\frac{C_4^2 \times C_{28}^3}{C_{32}^5}$ $\cong 0.09761$	$\frac{C_4^1 \times C_{28}^4}{C_{32}^5}$ $\cong 0.40670$	$\frac{C_{28}^5}{C_{32}^5}$ $\cong 0.48804$

b) $E(X) = 100 \times 0.00014 + 50 \times 0.00751 + \dots + (-50) \times 0.48804 = -28.0795$

Exercice 4:

a) Y \ X	1	2	3	4	Loi marginale de Y
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Loi marginale de X	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

b) Voir tableau

c) Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car par exemple

$$p[(X = 1) \cap (Y = 3)] = 0 \neq p(X = 1) \times p(Y = 3) = \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

Exercice 5 :

f est une densité de probabilité ssi

$$\int_0^3 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^3 kx dx = 1 \Leftrightarrow \left[k \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 1 \Leftrightarrow \left(k \times \frac{3^2}{2} \right) - \left(k \times \frac{0^2}{2} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{9k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{2}{9}$$

Exercice 6 :

Partie A.

$$\begin{aligned} \text{a) } F(5) = p(X \leq 5) &= \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 4e^{-4x} dx = \left[\frac{4}{-4} e^{-4x} \right]_0^5 = \left[-e^{-4x} \right]_0^5 \\ &= (-e^{-4 \times 5}) - (-e^{-4 \times 0}) = -e^{-20} + 1 \cong 0.99 \end{aligned}$$

$$\text{b) } p(1 < X < 3) = \int_1^3 f(x)dx = \left[-e^{-4x} \right]_1^3 = (-e^{-4 \times 3}) - (-e^{-4 \times 1}) = -e^{-12} + e^{-4} \cong 0.0183$$

Partie B.

f est une densité de probabilité ssi

$$\int_0^2 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 kx^3 dx = 1 \Leftrightarrow \left[k \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 1 \Leftrightarrow \left(k \times \frac{2^4}{4} \right) - \left(k \times \frac{0^4}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow 4k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$