FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 1

Les exercices plus difficiles ou faisant intervenir des notions avancées de théorie de la mesure sont indiqués par un astérisque.

Exercice 1. Rappeler la définition des espaces $\mathbb{L}^p := \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $p \in [1, +\infty]$.

Soit X une variable aléatoire positive. On dit que X est intégrable si $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$. De même, pour $p \geq 1$, on dit que X est p-fois intégrable si $|X|^p$ est intégrable, et on note $\mathcal{L}^p$ l'ensemble des v.a. p-fois intégrables. Par ailleurs, si Y est une autre variable aléatoire, alors $Y = X$ presque sûrement si $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$. L'égalité presque sûre définit une relation d'équivalence sur les variables aléatoires, notée $\sim$, et on note alors l'espace quotienté :

$$\mathbb{L}^p = \mathcal{L}^p / \sim .$$

Remarquons que cette définition est compatible avec la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires p-fois intégrables, et donc $\mathbb{L}^p$ est un espace vectoriel.

Exercice 2. Soit X une v.a. *positive*. En utilisant le théorème de Fubini, montrer que pour tout $r > 0$:

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_0^{+\infty} rx^{r-1}\mathbb{P}(X > x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} rx^{r-1}\mathbb{P}(X \geq x)\,\mathrm{d}x .$$

On remarque tout d'abord que pour tout $z \geq 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} rx^{r-1}\mathbf{1}_{0<x<z}\,\mathrm{d}x = \int_0^z rx^{r-1}\,\mathrm{d}x = z^r.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[X^r] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} rx^{r-1}\mathbf{1}_{0<x<X}\,\mathrm{d}x\right].$$

Remarquons que la fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$(\omega, x) \mapsto rx^{r-1}\mathbf{1}_{0<x<X(\omega)}$$

est positive. Ainsi par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} rx^{r-1}\mathbf{1}_{0<x<X}\,\mathrm{d}x\right] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[rx^{r-1}\mathbf{1}_{0<x<X}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} rx^{r-1}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{X>x}]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} rx^{r-1}\mathbb{P}(X > x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

De plus, l'égalité suivante est également vraie :

$$\int_0^{+\infty} rx^{r-1}\mathbf{1}_{0<x\leq z}\,\mathrm{d}x \int_0^z rx^{r-1}\,\mathrm{d}x = z^r.$$

La même méthode montre donc que

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_0^{+\infty} rx^{r-1}\mathbb{P}(X > x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} rx^{r-1}\mathbb{P}(X \geq x)\,\mathrm{d}x .$$

Exercice 3.

(1) Montrer qu'une v.a. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, est dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors pour tout $p \in [1, \infty[$

$$\mathbb{E}[|X|^p] = \mathbb{E}[X^p] = \sum_{k=0}^{\infty} k^p \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Or, d'après la formule de Stirling,

$$k! \sim \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}.$$

Ainsi,

$$k^p \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(k-p+\frac{1}{2})\log k + k(1+\log\lambda)} = o(e^{-k})$$

Cette dernière quantité est le terme général d'une série convergente, ce qui montre que $\mathbb{E}[\,|X|^p\,] < \infty$ et que $X \in \mathbb{L}^p$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

(2) *(lois de Pareto)* On se donne un réel $a > 0$ et X une v.a. de loi de fonction de répartition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = (1 - \frac{1}{x^a})\mathbf{1}_{x \geq 1}.$$

(a) Expliquer pourquoi F_X est bien une fonction de répartition.

La fonction F_X est croissante, continue à droite et

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to \infty} F_X(x) = \infty.$$

Il s'agit donc bien d'une fonction de répartition.

(b) Indiquer, selon la valeur de a, pour quelles valeurs de $p \in [1, \infty]$, la variable X appartient à $\mathbb{L}^p$.

La variable n'est pas bornée p.s. donc $X \notin \mathbb{L}^\infty$. De plus, X est p.s. supérieure à 1, ainsi $\mathbb{E}[\,|X|^p\,] = \mathbb{E}[\,X^p\,]$ quel que soit $p \in [1, \infty[$. Et, d'après l'exercice précédent :

$$\mathbb{E}[\,X^p\,] = \int_0^{+\infty} px^{p-1}\mathbb{P}(X \geq x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 px^{p-1}\,\mathrm{d}\,x + \int_1^{+\infty} px^{p-a-1}\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} +\infty & \text{si } p \geq a \\ \frac{a}{a-p} & \text{si } p < a \end{cases}$$

(on pourrait également calculer la densité de la loi et l'utiliser)
Ainsi, $X \in \mathbb{L}^p$ pour $p < a$.

Exercice 4. Soit X une v.a. réelle. On définit la fonction *queue* de cette v.a. par

$$\forall x \geq 0, \;\; Q(x) = \mathbb{P}(\,|X| > x\,)\;\; .$$

On suppose dans la suite de l'exercice que $X \in \mathbb{L}^p$ pour un certain $p \geq 1$.

(1) Montrer que pour tout $k < p$, $Q(x) \underset{x \to \infty}{=} o(1/x^k)$.

Remarquons que la fonction $x \mapsto x^p$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ est croissante. Ainsi, grâce à l'inégalité de Markov, pour tout $x > 0$

$$\mathbb{P}(|X| > x) = \mathbb{P}(|X|^p > x^p) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{x^p},$$

et donc pour tout $k < p$,

$$x^k Q(x) = x^k \mathbb{P}(|X| > x) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{x^{p-k}} \underset{x \to \infty}{\to} 0.$$

Par définition, on a donc

$$Q(x) = o(x^{-k}).$$

*(2) (a) Montrer que pour toute fonction f positive, décroissante et intégrable sur $[0, +\infty[$, on a $\lim_{x \to \infty} xf(x) = 0$.

Remarquons que comme f est positive et décroissante, on a

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \leq xf(x) \leq 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(y)\,\mathrm{d}\,y.$$

De plus, comme f est intégrable, on sait que

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}\,y = \lim_{x \to \infty} \int_0^{\frac{x}{2}} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_0^{+\infty} f(y)\,\mathrm{d}\,y.$$

Donc

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_0^{\frac{x}{2}} f(y)\,\mathrm{d}\,y \underset{x \to \infty}{\to} 0.$$

Ainsi, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to \infty} xf(x) = 0.$$

(b) En déduire qu'on a même $Q(x) \underset{x \to \infty}{=} o(x^{-p})$.

Comme $X \in \mathbb{L}^p$, on sait que

$$\mathbb{E}[\,|X|^p\,] = \int_0^{+\infty} px^{p-1}\mathbb{P}(|X| > x)\,\mathrm{d}\,x \underset{\substack{y=x^p \\ \mathrm{d}\,y = px^{p-1}\,\mathrm{d}\,x}}{=} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X| > y^{\frac{1}{p}})\,\mathrm{d}\,y.$$

La fonction $f : y \mapsto \mathbb{P}(|X| > y^{1/p})$ est donc intégrable. De plus pour $y' > y$, on a $(y')^{\frac{1}{p}} > y^{\frac{1}{p}}$. Donc

$$\mathbb{P}(|X| > (y')^{\frac{1}{p}}) \leq \mathbb{P}(|X| > y^{\frac{1}{p}})$$

et f est décroissante. La fonction f étant positive, on a, d'après la question précédente,

$$\lim_{y\to\infty} y\mathbb{P}(|X| > y^{\frac{1}{p}}) = 0.$$

En notant $x = y^{\frac{1}{p}}$, on obtient bien

$$\lim_{x\to\infty} x^p\mathbb{P}(|X| > x) = 0,$$

ce qui est le résultat souhaité.

Exercice 5.

(1) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les v.a. $\mathbb{L}^2$.
On pourra introduire la fonction polynomiale $t \in \mathbb{R} \to \mathbb{E}\big[(X+tY)^2\big]$.

On a le théorème suivant :

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soient X et Y des variables aléatoires réelles de carré intégrable ($X, Y \in \mathbb{L}^2$), alors*

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \|X\|_2\|Y\|_2.$$

De plus, l'égalité est vérifiée lorsqu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$X = \lambda Y \text{ presque sûrement.}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Ainsi si $XY \in \mathbb{L}^2$, $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$, et donc $XY \in \mathbb{L}^1$. Soit, comme suggéré dans l'énoncé, la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $P(t) = \mathbb{E}[(X+tY)^2]$. On sait que P est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ puisque $X, Y \in \mathbb{L}^2$ et que $P(t) \geq 0$. De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = \mathbb{E}[X^2] + 2t\mathbb{E}[XY] + t^2\mathbb{E}[Y^2].$$

Ainsi P est une fonction polynomiale du second degré. Comme $P \geq 0$, P a au plus une racine, ce qui implique que

$$\Delta = 4\mathbb{E}[XY]^2 - 4\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] \leq 0,$$

et donc que

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \mathbb{E}[X^2]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}[Y^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Finalement, il y a égalité ssi $\Delta = 0$. Alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ telle que $P(t_0) = 0$ ce qui veut dire que

$$P(t_0) = \mathbb{E}[(X + t_0Y)^2] = 0.$$

Comme $(X + t_0Y)^2$ est une variable aléatoire positive, on a $(X + t_0Y)^2 = 0$ presque sûrement, et donc

$$X = -t_0Y,$$

on prend alors $\lambda = -t_0$. □

*(2) Généraliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz en démontrant l'inégalité de Hölder.
On pourra utiliser la croissance, en p, des normes $\mathbb{L}^p$ pour la mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \frac{|X|^p}{\mathbb{E}[|X|^p]}\right].$$

Nous allons montrer l'inégalité de Hölder suivante :

Théorème. *Soit $p \in [1, +\infty]$ et soit $q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $X \in \mathbb{L}^p$ et $Y \in \mathbb{L}^q$. Alors $XY \in \mathbb{L}^1$ et*

$$\|XY\|_1 \leq \|X\|_p\|Y\|_q.$$

Lorsque $p = +\infty$, $\|X\|_\infty = \operatorname{supess} X := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \,:\, |X| \leq \lambda \text{ presque sûrement}\}$.

Démonstration. On commence par traiter le cas $p=1$ et $q=\infty$. En effet dans ce cas, presque sûrement $|Y| \leq \|Y\|_\infty$, et alors presque sûrement $|XY| \leq |X|\|Y\|_\infty$, donc $XY \in \mathbb{L}^1$. De plus

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|]\|Y\|_\infty,$$

ce qui est l'inégalité souhaitée.

On suppose désormais et sans perte de généralité que $1 < p \leq q < +\infty$. On suppose de plus que $\|X\|_p > 0$, sinon X est $\mathbb{P}$-p.s. nulle et le résultat est évident. Et on prendra également les v.a. X et Y positives pour alléger les notations. (On repasse au cas général en prenant les valeurs absolues des variables.)

On considère donc la probabilité $\mathbb{Q}$ introduite dans l'énoncé et on note $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ l'espérance par rapport à cette nouvelle probabilité : pour toute v.a. Z,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z] = \mathbb{E}\left[Z\frac{X^p}{\mathbb{E}[X^p]}\right].$$

On a donc l'égalité :

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^p]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[YX^{1-p}]. \tag{1}$$

Par croissance (en p) des normes $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, comme $1 \leq q$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[YX^{1-p}] = \|YX^{1-p}\|_{1,\mathbb{Q}} \leq \|YX^{1-p}\|_{q,\mathbb{Q}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y^qX^{q-qp}]^{\frac{1}{q}}$$

L'égalité $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ est équivalente à $q-pq+p=0$. Ainsi, en revenant à la définition de $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$, on obtient :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y^qX^{q-qp}]^{\frac{1}{q}} = \mathbb{E}\left[Y^qX^{q-qp}\frac{X^p}{\mathbb{E}[X^p]}\right]^{\frac{1}{q}} = \frac{\mathbb{E}[Y^q]^{\frac{1}{q}}}{\mathbb{E}[X^p]^{\frac{1}{q}}}.$$

En reportant dans (1), cela nous donne :

$$\mathbb{E}[XY] \leq \mathbb{E}[X^p]^{1-\frac{1}{q}}\mathbb{E}[Y^q]^{\frac{1}{q}} = \|X\|_p\|Y\|_q$$

qui est le résultat recherché. □

Exercice 6.

(1) (Inégalité de Chernoff) Soit X une v.a. réelle. Montrer que

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq t) \leq \inf_{s \geq 0} \frac{\mathbb{E}\left[e^{sX}\right]}{e^{st}}$$

Soit $s, t > 0$, l'inégalité étant évidente pour $s=0$. On a, d'après l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}\left(e^{sX} \geq e^{st}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{sX}\right]}{e^{st}}.$$

L'inégalité étant vérifiée pour tout $s \geq 0$, on a bien

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq t) \leq \inf_{s \geq 0} \frac{\mathbb{E}\left[e^{sX}\right]}{e^{st}}$$

(2) (Un cas particulier de l'inégalité de Hoeffding) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.i.i.d. à valeurs dans $[-1,1]$ et de moyenne nulle.

(a) Montrer que, pour tout $s \geq 0$, $\mathbb{E}\left[e^{sX_1}\right] \leq \cosh s$.
On pourra utiliser la convexité de la fonction exponentielle et remarquer que

$$X_1 = (-1)\cdot\frac{1-X_1}{2} + 1\cdot\frac{1+X_1}{2}$$

Comme $\frac{1-X_1}{2}+\frac{1+X_1}{2}=1$ et que $\frac{1-X_1}{2}$ et $\frac{1+X_1}{2}$ sont positifs, la convexité de la fonction exponentielle implique :

$$e^{sX_1} = e^{-s\cdot\frac{1-X_1}{2}+s\cdot\frac{1+X_1}{2}} \leq \frac{1-X_1}{2}e^{-s} + \frac{1+X_1}{2}e^{s}.$$

De plus, X_1 étant d'espérance nulle, $\mathbb{E}\left[e^{sX_1}\right] \leq \frac{1}{2}(e^{-s}+e^{s}) = \cosh s$.

(b) Montrer que, pour tout $s \geq 0$, $\cosh s \leq e^{\frac{s^2}{2}}$.
On pourra comparer les développements en série entière de ces deux fonctions.

Pour tout $s \geq 0$,

$$\cosh s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad e^{\frac{s^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{2n}}{2^n n!}.$$

Or, pour tout $n \geq 0$,

$$2^n n! = \prod_{i=1}^{n} 2i \leq \prod_{i=1}^{2n} i = (2n)!$$

On a donc bien $\cosh s \leq e^{\frac{s^2}{2}}$ pour tout $s \geq 0$.

(c) Montrer que : $\forall t > 0,\ \mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq t\big) \leq \min_{s\geq 0} e^{\frac{ns^2}{2}-st}$

puis que : $\forall t > 0, \quad \mathbb{P}\big(\big|\sum_{i=1}^{n} X_i\big| \geq t\big) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2n}}$.

D'après la question (1), pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq t\right) \leq \min_{s\geq 0} \mathbb{E}\left[e^{s\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] e^{-st}.$$

En utilisant l'indépendance et l'identique distribution des v.a. X_i puis le résultat des deux questions précédentes, on obtient alors :

$$\mathbb{E}\left[e^{s\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = \mathbb{E}\left[e^{sX_1}\right]^n \leq e^{ns^2/2}.$$

Cela montre la première inégalité. Pour la seconde, on commence par rechercher le minimum de la fonction $s \to \frac{ns^2}{2} - st$. Par étude de fonction, celui-ci est obtenu pour $s = t/n$ et vaut $-\frac{t^2}{2n}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq t\right) \leq e^{-\frac{t^2}{2n}}.$$

De plus, les v.a. $-X_i$ sont également des v.a. comprises entre -1 et 1 et de moyenne nulle, l'inégalité suivante est donc aussi vérifiée

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq -t\right) \leq e^{-\frac{t^2}{2n}}.$$

Comme

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq t\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq t\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq -t\right),$$

on a bien le résultat recherché.

Exercice 7. *Deux lois différentes avec des moments identiques.*
On considère deux v.a.r. X et Y de densité respective :

$$\forall x > 0,\ p_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} \mathbf{1}_{x>0} \text{ et } p_Y(x) = (1 + \sin(2\pi \ln x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} \mathbf{1}_{x>0}\ .$$

(1) Montrer que p_X et p_Y sont bien des densités de probabilité.

On rappelle que des densités de probabilité sont des fonctions positives, intégrables sur $\mathbb{R}$ et telle que leurs intégrale vaut 1. Or p_X est clairement positive et

$$\int_0^{+\infty} p_X(x)\,\mathrm{d}\,x \underset{\substack{y=\ln(x) \\ \mathrm{d}\,y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y$$

On reconnaît alors l'intégrale de la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ sur $\mathbb{R}$ qui vaut donc 1. On note également que $1 + \sin \geq 0$, et donc que p_Y est également positive. De plus par le même changement de variables, on a

$$\int_0^{\infty} p_Y(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \sin(2\pi y)) e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}\,y.$$

Par ailleurs, notons que la fonction $x \mapsto \sin(2\pi x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et impaire. Donc son intégrable est nulle, et on a bien

$$\int_0^{\infty} p_Y(x)\,\mathrm{d}\,x = 1.$$

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[|X|^n] = \mathbb{E}[|Y|^n]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $X \sim p_X(x)\,\mathrm{d}\,x$ et $Y \sim p_Y(x)\,\mathrm{d}\,x$. Notons que grâce au même changement de variable que précédemment,

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{nx} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{e^{\frac{n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-n)^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x = e^{\frac{n^2}{2}}.$$

Par ailleurs, en utilisant le même type de calcul, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^n] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{nx}(1+\sin(2\pi x))e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{e^{\frac{n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (1+\sin(2\pi(x-n)+2\pi n))e^{-\frac{(x-n)^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x.\end{aligned}$$

En remarquant que $\sin(2\pi(x-n)+2\pi n) = \sin(2\pi(x-n))$ et en faisant le changement de variable $y = x-n$ on obtient bien

$$\mathbb{E}[Y^n] = e^{\frac{n^2}{2}}.$$

Ainsi, les variables aléatoires X et Y n'ont pas les même densités, mais leurs moments sont les mêmes.

Exercice 8. Calculer la fonction caractéristique des lois usuelles suivantes : Bernoulli, binomiale, Poisson, géométrique, exponentielle, uniforme continue et Cauchy (* Pour cette dernière loi, on pourra passer par les fonctions holomorphes ou utiliser le théorème d'inversion).

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi

- de Bernoulli et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ pour $p \in [0,1]$ si $\mathbb{P}(X=1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = p$.
Ainsi, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = pe^{it} + (1-p).$$

Donc

$$\varphi_X(t) = 1 + p(e^{it} - 1).$$

- binomiale et on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $p \in [0,1]$ si pour tout $k \in \{0,\cdots,n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ainsi, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(pe^{it}\right)^k (1-p)^{n-k} = \left(1 + p(e^{it}-1)\right)^n$$

Donc

$$\varphi_X(t) = \left(1 + p(e^{it}-1)\right)^n.$$

- de Poisson et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$ si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Ainsi, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk}\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!} = e^{-\lambda + \lambda e^{it}}$$

Donc

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

- Géométrique et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ pour $p \in (0,1)$ si pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$. Ainsi, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{itk}\mathbb{P}(X=k) = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)e^{it}\right)^k = \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)e^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$$

Donc

$$\varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}.$$

- Exponentielle et on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$ si la densité de X est la fonction $x \mapsto f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$. Ainsi, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{+\infty} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{\lambda e^{-(\lambda - it)x}}{-(\lambda - it)}\right]_0^{+\infty}.$$

Donc

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

- Uniforme et on note $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ pour $a < b$ si la densité de X est la fonction $x \mapsto f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$. Ainsi, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b e^{itx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{e^{itb} - e^{itb}}{it(b-a)}.$$

Donc

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{itb}}{it(b-a)}.$$

- de Cauchy et on note $X \sim \mathcal{C}(0,1)$ si la densité de X est la fonction $x \mapsto f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Ainsi, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) =& \mathbb{E}[e^{itX}] \\ =& \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) \, \mathrm{d}\, x \\ =& \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}\, x\end{aligned}$$

On remarque par un changement de variable ($y = -x$) que la fonction caractéristique est paire. Ainsi il suffit de la calculer pour $t > 0$. Par ailleurs, nous constatons que

$$e^{itx} \frac{1}{\pi(1+x^2)} = -\frac{e^{itx}}{\pi} \left(\frac{i}{2} \frac{1}{i-x} + \frac{i}{2} \frac{1}{i+x} \right).$$

Ainsi la fonction

$$f : z \mapsto \frac{e^{itz}}{1+z^2}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \{i, -i\}$ et le résidu de f en i est

$$res(f,i) = -\frac{i}{2} \frac{e^{it(i)}}{\pi} = -\frac{ie^{-t}}{2\pi}.$$

Soit $R > 1$ et soit $\mathcal{C}_R$ le contour du demi cercle

$$\{z = x \ : \ x \in [-R, R]\} \bigcup \{z = Re^{i\theta} \ : \ \theta \in [0, \pi]\}.$$

Grâce au théorème des résidus on sait que

$$\int_{\mathcal{C}_R} f(z) \, \mathrm{d}\, z = 2i\pi res(f,i) = e^{-t}.$$

De plus, en passant aux coordonnées polaires, on a

$$\int_{\mathcal{C}_R} f(z) \, \mathrm{d}\, z = \int_{-R}^{R} e^{itx} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}\, x + \int_0^{\pi} e^{itRe^{i\theta}} \frac{1}{1+R^2e^{2i\theta}} Rie^{i\theta} \, \mathrm{d}\, \theta$$

Par ailleurs, on remarque que

$$|1 + R^2 e^{2i\theta}|^2 = 1 + R^4 + 2R^2 \cos^2(2\theta) = \left(R^2 + \cos(2\theta)\right)^2 + 1 - \cos^2(2\theta),$$

donc

$$|1 + R^2 e^{2i\theta}| \geq |R^2 + \cos(2\theta)| \geq R^2 - 1,$$

où on rappelle que $R > 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{\pi} e^{itRe^{i\theta}} \frac{1}{1+R^2e^{2i\theta}} Rie^{i\theta} \, \mathrm{d}\, \theta \right| &\leq \int_0^{\pi} R \frac{1}{|1+R^2e^{2i\theta}|} e^{-tR\sin(\theta)} |e^{itR\cos(\theta)}| \, \mathrm{d}\, \theta \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-1} \, \mathrm{d}\, \theta \\ &= \pi \frac{R}{R^2-1}.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{R \to \infty} \left| \int_0^{\pi} e^{itRe^{i\theta}} \frac{1}{1+R^2e^{2i\theta}} Rie^{i\theta} \, \mathrm{d}\, \theta \right| = 0,$$

et en mettant tout bout à bout, pour tout $t \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\pi(1+x^2)} \, \mathrm{d}\, x = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} e^{itx} \frac{1}{\pi(1+x^2)} \, \mathrm{d}\, x = e^{-t}.$$

On a donc par parité de φ_X,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = e^{-|t|}.$$

Exercice 9. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On note Φ sa fonction caractéristique.

(1) Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $\Phi'(t) = -t\Phi(t)$. En déduire que pour $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) = e^{-t^2/2}$.

Nous allons utiliser le théorème de dérivation sous l'intégrale. On rappelle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt{2\pi}}.$$

On note

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On sait que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = ixe^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Par ailleurs,

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(t,x)| + \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right| \leq (1+|x|) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = (1+|x|) g(x),$$

et $x \mapsto (1+|x|)g(x)$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on sait donc que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(t) = \int_{\mathbb{R}} ixe^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\partial x}{\sqrt{2\pi}} \partial x.$$

En effectuant un intégration par parties, on obtient alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(t) = \left[-ie^{itx} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - t \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}\, x = -t\Phi(t).$$

L'égalité précédente est une équation différentielle linéaire du premier ordre. La solution générale est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(t) = \Phi(0) e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

De plus,

$$\Phi(0) = \mathbb{E}[1] = 1.$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

(2) Calculer les moments de X.

La fonction caractéristique de X est analytique et donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on sait donc que la variable X admet des moments de tout ordre et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Phi^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}\left[X^n\right]. \tag{2}$$

Par ailleurs, le résultat de la question précédente et le développement en série entière de la fonction exponentielle montrent que Φ admet le développement en série entière suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} t^{2n}.$$

Comme par ailleurs, pour toute fonction analytique,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!} t^n,$$

l'unicité du développement en série entière montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\Phi^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \quad \text{et} \quad \Phi^{(2n+1)}(0) = 0.$$

En reportant dans (2), on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0$$

et

$$i^{2n} \mathbb{E}[X^{2n}] \frac{1}{(2n)!} = (-1)^n \frac{1}{n!},$$

d'où

$$\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{n! 2^n}.$$

(3) Calculer la fonction caractéristique d'une variable de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$.

On rappelle que la densité d'une variable aléatoire Y telle que $Y \sim (m, \sigma^2)$ est donnée par la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ainsi

$$\Phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}\,x = \int_{\mathbb{R}} e^{itm} e^{it\sigma\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}\,x = e^{itm}\Phi(t\sigma)$$

où nous avons fait le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma}$. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_Y(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Exercice 10. Utiliser les fonctions caractéristiques pour montrer que

(1) la somme de n v.a.i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $p \in [0,1]$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

On rappelle que si $(X_1, \cdots, X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_n} = \varphi_{X_1} \cdots \varphi_{X_n}.$$

Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ des variables aléatoire iid de loi $\mathcal{B}(p)$. On sait (voir l'exercice 8) que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\varphi_{X_i}(t) = 1 + p(e^{it} - 1).$$

Donc

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) = (1 + p(e^{it} - 1))^n.$$

On reconnaît la fonction caractéristique d'une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Donc $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.

(2) la somme de n v.a.i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, suit la loi $\mathcal{P}(n\lambda)$.

Toujours grâce à l'exercice 8, si $X_1, \cdots, X_n$ sont de variables aléatoires iid de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{X_i}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)},$$

et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = e^{n\lambda(e^{it}-1)}.$$

On reconnaît la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$, donc $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$.

Exercice 11. *Vecteurs gaussiens.*
Soit $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On suppose de plus que $\mathbb{X}$ est un vecteur aléatoire *gaussien*, i.e.

$$\forall \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d, \ \langle \mathbf{a} | \mathbb{X} \rangle = \sum_{k=1}^{d} a_k X_k \ \text{ est une v.a. gaussienne.}$$

On note le vecteur des moyennes des X_k : $m = (\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_d])$ et la matrice de covariance :

$$\Gamma = (\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell))_{1 \le k, \ell \le d}.$$

(1) Calculer pour tout vecteur $\mathbf{a}$, l'espérance et la variance de la variable $\langle \mathbf{a} | \mathbb{X} \rangle$.

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$. On rappelle qu'une variable aléatoire gaussienne en dimension 1 est caractérisée par sa variance et son espérance. Ainsi, il suffit de calculer $\mathbb{E}[\langle \mathbf{a} | \mathbb{X} \rangle]$ et $\mathbb{V}[\langle \mathbf{a} | \mathbb{X} \rangle]$. On a

$$\mathbb{E}[\langle \mathbf{a} | \mathbb{X} \rangle] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{d} a_k X_k\right] = \sum_{k=1}^{d} a_k \mathbb{E}[X_k] = \langle \mathbf{a} | m \rangle.$$

On a également

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[\langle \mathbf{a}|\mathbb{X}\rangle] =& \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{d} a_k X_k - \mathbb{E}[\langle \mathbf{a}|\mathbb{X}\rangle]\right)^2\right] \\
=& \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{d} a_k (X_k - \mathbb{E}[X_k])\right)^2\right] \\
=& \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} a_k a_l \mathbb{E}[(X_k - \mathbb{E}[X_k])(X_l - \mathbb{E}[X_l])] \\
=& \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} a_k a_l \mathrm{Cov}(X_k, X_l) \\
=& \langle \Gamma \mathbf{a}|\mathbf{a}\rangle .
\end{aligned}$$

(2) Calculer la fonction caractéristique du vecteur gaussien $\mathbb{X}$. En déduire que la loi d'un vecteur gaussien est entièrement caractérisée par son vecteur moyenne et sa matrice de covariance.

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$. La variable $\langle \mathbf{a}|\mathbb{X}\rangle$ étant gaussienne. On sait, d'après l'exercice 9, que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}\left[e^{it\langle \mathbf{a}|\mathbb{X}\rangle}\right] = e^{i\mathbb{E}[\langle \mathbf{a}|\mathbb{X}\rangle]t - \frac{\mathbb{V}[\langle \mathbf{a}|\mathbb{X}\rangle]t^2}{2}}.$$

Grâce à la question précédente, on a alors en prenant $t = 1$,

$$\Phi_{\mathbb{X}}(\mathbf{a}) = e^{i\langle \mathbf{a}|m\rangle - \frac{\langle \Gamma \mathbf{a}|\mathbf{a}\rangle}{2}}.$$

Comme la fonction caractéristique caractérise la loi d'un vecteur aléatoire, la loi d'un vecteur Gaussien est entièrement déterminée par son espérance et sa matrice de covariance.