

## Couple de variables aléatoires, indépendance

# 1 Couple de variables aléatoires discrètes

## 1.1 Loi conjointe

**Définition 1** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes avec  $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$  et  $Y(\Omega) = \{y_j, j \in \mathbb{N}\}$ . La loi conjointe du couple  $(X, Y)$  est donnée par  $(X, Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$  ainsi que par les probabilités

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

pour  $i, j \in \mathbb{N}$ .

**Remarque** On a nécessairement  $\sum_{i,j \in \mathbb{N}} p_{i,j} = 1$ .

Plus généralement, si  $X_1, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires discrètes, la loi conjointe du vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  est donnée par  $(X_1, \dots, X_n)(\Omega)$  ainsi que par les probabilités  $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ , pour tout  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemple** On reprend une nouvelle fois l'exemple du dé. On note  $Y$  la variable qui vaut 1 si le résultat est impair et 2 si le résultat est pair et  $Z$  la variable qui vaut 0 si le résultat est 1, 1 si le résultat est 6 et 2 sinon. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 1 \cap Z = 0) &= \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(Y = 1 \cap Z = 1) &= \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \\ \mathbb{P}(Y = 1 \cap Z = 2) &= \mathbb{P}(X = 3 \cup X = 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(Y = 2 \cap Z = 0) &= \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \\ \mathbb{P}(Y = 2 \cap Z = 1) &= \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(Y = 2 \cap Z = 2) &= \mathbb{P}(X = 2 \cup X = 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On obtient alors le tableau des  $p_{i,j} = \mathbb{P}(Y = i \cap Z = j)$ .

		Z	0	1	2	
		Y				
		1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
		2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
			$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	1

## 1.2 Lois marginales

Dans l'exemple précédent, on remarque que si on fait la somme de la première ligne, on obtient  $\mathbb{P}(Y = 1)$ . De même, si on fait la somme de la seconde colonne, on obtient  $\mathbb{P}(Z = 1)$ . Connaître la loi d'un couple permet de connaître la loi de chacune des 2 variables du couple (on verra que la réciproque est fausse).

**Définition 2** On appelle première loi marginale (resp : deuxième loi marginale) la loi de la première composante  $X$  (resp : deuxième composante  $Y$ ). On les obtient de la façon suivante : Donc,  $\forall i, j \in \mathbb{N}$ ,

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_{i,j},$$

$$q_j = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_{i,j}.$$

Donc, si on connaît la loi du couple, on connaît les lois marginales. Il suffit de faire les sommes sur les lignes et les colonnes, ce qui donne la proposition :

**Proposition 3** On peut retrouver les lois marginales d'un couple par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_{j \in \mathbb{N}} p_{i,j} & \forall i \in \mathbb{N} \\ q_j &= \sum_{i \in \mathbb{N}} p_{i,j} & \forall j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Par contre, la réciproque est en général fausse. En effet, si on regarde l'exemple ci-dessus, il n'y a pas de lien entre  $p_{i,j}$  et  $(p_i, q_j)$ .

### 1.3 Indépendance de variables aléatoires discrètes

**Définition 4** Deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  sont dites **indépendantes** si pour tout  $x \in X(\Omega)$  et  $y \in Y(\Omega)$ , les événements  $\{X = x\}$  et  $\{Y = y\}$  sont indépendants, i.e.

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y).$$

On le notera  $X \perp\!\!\!\perp Y$ .

**Corollaire 5** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes. Si  $A$  est une partie de  $X(\Omega)$  et  $B$  une partie de  $Y(\Omega)$  alors les événements  $\{X \in A\}$  et  $\{Y \in B\}$  sont indépendants.

**Proposition 6** Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires discrètes indépendantes. La loi conjointe du couple  $(X, Y)$  est complètement déterminée par les lois marginales de  $X$  et de  $Y$

ATTENTION, encore une fois si les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes, il n'y a pas de lien a priori entre loi conjointe de  $(X, Y)$  et lois marginales.

La notion d'indépendance se généralise au cas de  $n$  variables discrètes :  $X_1, \dots, X_n$  sont **mutuellement** ou  $n$  à  $n$  indépendantes si, pour tout choix de  $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$ , on a

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Notons que l'indépendance  $n$  à  $n$  implique l'indépendance 2 à 2, mais la réciproque est fausse.

### 1.4 Espérance, matrice de covariance

Dans un souci de clarté, tous les résultats de ce paragraphe et du suivant sont énoncés pour les couples de variables aléatoires discrètes, et ils s'étendent sans peine aux vecteurs aléatoires discrets.

**Définition 7** 1. L'espérance du couple  $(X, Y)$  est définie si  $X$  et  $Y$  sont intégrable et on a alors

$$\mathbb{E}(X, Y) = (\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)).$$

2. Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes de carré intégrable, la **covariance** de  $X$  et de  $Y$ , ou covariance du couple  $(X, Y)$ , est donnée par

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))].$$

On dit que les variables  $X$  et  $Y$  sont **non corrélées** si leur covariance est nulle.

3. Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires de carré intégrable, la **matrice de covariance** du couple  $(X, Y)$  est la matrice

$$C = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, la matrice de covariance d'un vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$ , dont chacune des composantes est de carré intégrable, est une matrice  $n \times n$  dont les termes diagonaux sont les variances des  $X_i$  et dont le terme  $(i, j)$  est la covariance  $\text{cov}(X_i, X_j)$  pour tout  $i \neq j$ .

**Proposition 8** Soient  $X, X_1, X_2, Y, Y_1$  et  $Y_2$  des variables aléatoires discrètes de carré intégrables,  $a, b, c$  et  $d$  des réels. Alors on a les propriétés suivantes :

1.  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$ .
2.  $\text{cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a \text{cov}(X_1, Y) + b \text{cov}(X_2, Y)$ .
3.  $\text{cov}(X, cY_1 + dY_2) = c \text{cov}(X, Y_1) + d \text{cov}(X, Y_2)$ .

4.  $\text{cov}(aX_1 + bX_2, cY_1 + dY_2) = ac \text{ cov}(X_1, Y_1) + ad \text{ cov}(X_1, Y_2) + bc \text{ cov}(X_2, Y_1) + bd \text{ cov}(X_2, Y_2).$
5.  $\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{ cov}(X, Y).$

**Proposition 9** 1. Une matrice de covariance  $C$  est toujours une matrice symétrique et positive (i.e., pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle v, Cv \rangle \geq 0$ ).

2. Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes et intégrables, on a

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

et donc  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

ATTENTION, la réciproque de ce résultat est fausse en général.

3. Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes et  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que les variables aléatoires  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont intégrables, on a

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y)).$$

La réciproque de ce résultat est fausse.

4. Si les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et de carré intégrable, alors la matrice de covariance de  $(X_1, \dots, X_n)$  est diagonale. La réciproque de ce résultat est fausse.

**Théorème 10** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes de carré intégrable. Alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{ cov}(X, Y).$$

De plus, si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

**Preuve.** La seconde égalité est une conséquence de la première et de l'indépendance des variables. Il suffit donc de montrer la première égalité.

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= \mathbb{E}((X + Y)^2) - (\mathbb{E}(X + Y))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X))^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\ &= V(X) + V(Y) + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= V(X) + V(Y) + 2 \text{ cov}(X, Y). \end{aligned}$$

□

Pour deux variables aléatoires de carré intégrable, il est possible d'obtenir une majoration de  $\text{cov}(X, Y)$  à partir des variances de  $X$  et  $Y$  :

**Proposition 11 (Inégalité de Cauchy Schwarz)** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de carré intégrable. On a

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(XY)| &\leq \mathbb{E}(|XY|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}, \\ |\text{cov}(X, Y)| &\leq \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}. \end{aligned}$$

En particulier à partir de l'inégalité de Cauchy Schwarz et en prenant  $Y = 1$ , on obtient

$$\mathbb{E}(|X|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}.$$

On retrouve ainsi que si  $X$  est de carré intégrable, elle est également intégrable, ce qu'on avait montré au chapitre précédent.

**Preuve.** Le deuxième point s'obtient en appliquant le premier à  $X - \mathbb{E}(X)$  et  $Y - \mathbb{E}(Y)$ . □

## 1.5 Retour sur la loi binomiale

On considère une urne contenant  $a$  boules marquées A et  $b$  boules marquées B. On effectue  $n$  tirages avec remise, et on note  $X_j$  la variable qui vaut 1 si on tire une boule A au  $j^{eme}$  tirage et 0 sinon. Rappelons que  $X_j$  suit une loi de Bernouilli de paramètre  $p = \frac{a}{a+b}$ .

Comme chaque tirage est indépendant des autres (puisque l'on remet la boule tirée), on peut considérer que les variables  $X_j$  sont indépendantes. Posons

$$X = \sum_{j=1}^n X_j.$$

La variable aléatoire  $X$  correspond donc au nombre de boules A tirées avec remises lors de ces  $n$  tirages. On a vu qu'une telle variable suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Ainsi on a la

**Proposition 12** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Alors  $X$  peut être vu comme la somme de variables de Bernouilli indépendantes de paramètre  $p$ , i.e.

$$X = \sum_{j=1}^n X_j$$

où les  $X_j$  sont  $n$  variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernouilli de paramètre  $p$ .

Il existe une propriété de stabilité pour la loi binomiale, qui découle directement du résultat précédent.

**Proposition 13** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires suivant respectivement une loi binomiale  $b(n, p)$  et  $b(m, p)$  (les deux variables ont le même paramètre  $p$ ). Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $X + Y$  suit une loi binomiale  $b(n + m, p)$ .

**Preuve.** On peut voir  $X$  comme la somme de  $n$  variables  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  de même loi de Bernouilli de paramètre  $p$ , indépendantes. De même, on peut voir  $Y$  comme la somme de  $m$  variables  $(X_i)_{n+1 \leq i \leq n+m}$  de même loi de Bernouilli de paramètre  $p$ , indépendantes. Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, les  $(X_i)_{1 \leq i \leq n+m}$  sont indépendantes, et toutes de même loi de Bernouilli de paramètre  $p$ . De plus,

$$X + Y = \sum_{i=1}^{n+m} X_i,$$

par définition,  $X + Y$  suit une loi binomiale de paramètre  $n + m$  et  $p$ .  $\square$

## 1.6 Somme de deux variables aléatoires de loi de Poisson et indépendantes

La loi de Poisson pouvant être considérée comme la “limite” d’une loi binomiale, il paraît raisonnable de penser qu’elle possède, comme la loi binomiale, une propriété de stabilité. C’est effectivement le cas :

**Proposition 14** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires suivant les lois de Poisson respectives  $\mathcal{P}(a)$  et  $\mathcal{P}(b)$ . Alors, si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $X + Y$  suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(a + b)$ , c'est-à-dire :

$$X \perp\!\!\!\perp Y \implies X + Y \sim \mathcal{P}(a + b).$$

**Preuve.** Puisque  $X$  et  $Y$  sont à valeurs dans  $\mathcal{N}$ , leur somme  $X + Y$  l'est aussi. Soit  $n \in \mathcal{N}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n (X = k \cap Y = n - k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k \cap Y = n - k) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k) \quad \text{car } X \perp\!\!\!\perp Y \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-a} \frac{a^k}{k!} e^{-b} \frac{b^{n-k}}{(n - k)!} \\ &= \frac{e^{-(a+b)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n - k)!} a^k b^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(a+b)}}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \\ &= \frac{(a + b)^n}{n!} e^{-(a+b)} \quad (\text{formule du binôme}) \end{aligned}$$

On a donc bien  $X + Y \sim \mathcal{P}(a + b)$ . □

## 2 Couple de variables aléatoires réelles

Dans toute cette section,  $X$  et  $Y$  seront des variables aléatoires réelles de densité respective  $f_X$  et  $f_Y$ , et de fonction de répartition respective  $F_X$  et  $F_Y$ .

### 2.1 Densité et fonction de répartition

Comme on l'a fait pour une v.a.r., on peut définir la densité et la fonction de répartition d'un couple de v.a.r. Il suffit de passer de la dimension 1 à la dimension 2, c'est-à-dire de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 15** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs réelles. On dit que  $f$  est une **densité de probabilité** sur  $\mathbb{R}^2$  si :

1.  $f$  est continue “par morceaux” sur  $\mathbb{R}^2$ .
2.  $f \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
3.  $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$ .

**Définition 16** Soit  $f$  une densité sur  $\mathbb{R}^2$ .

On dira que le couple de v.a.r.  $(X, Y)$  a **pour densité**  $f$  si, pour tout couple de réels  $(x, y)$ , on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) &= \int_{-\infty}^x \left( \int_{-\infty}^y f(u, v) dv \right) du \\ &= \int_{-\infty}^y \left( \int_{-\infty}^x f(u, v) du \right) dv.\end{aligned}$$

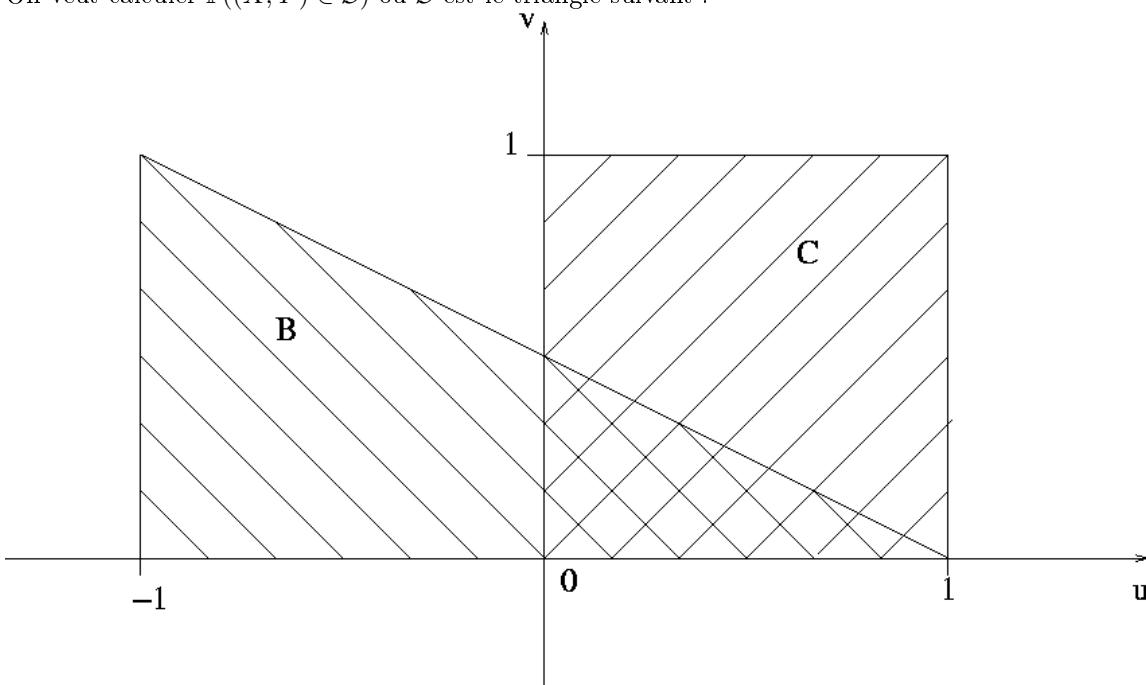
De manière générale, quel que soit le domaine  $B \subset \mathbb{R}^2$  ( $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ),

$$\mathbb{P}((X, Y) \in B) = \iint_B f(u, v) du dv.$$

Faisons un exemple. Considérons la densité du couple  $(X, Y)$  suivante :

$$f(u, v) = \begin{cases} 4uv & \text{si } (u, v) \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $\mathbb{C}$  est le domaine de  $\mathbb{R}^2$  correspondant au carré unité,  $\mathbb{C} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 1 \text{ et } 0 < v < 1\}$ . On veut calculer  $\mathbb{P}((X, Y) \in \mathcal{B})$  où  $\mathcal{B}$  est le triangle suivant :



La seule partie qu'il est nécessaire d'étudier est celle où la densité est non nulle, c'est-à-dire l'intersection de  $\mathcal{B}$  et de  $\mathcal{C}$ ; il faut alors paramétriser  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X, Y) \in \mathcal{B}) &= \iint_{\mathcal{B}} f(u, v) \, dudv = \iint_{\mathcal{B} \cap \bar{\mathcal{C}}} f(u, v) \, dudv + \iint_{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} f(u, v) \, dudv \\ &= \iint_{\mathcal{B} \cap \bar{\mathcal{C}}} 0 \, dudv + \iint_{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} 4uv \, dudv = 0 + \int_0^{1/2} \left( \int_0^{1-2v} 4uv \, du \right) \, dv \\ &= \int_0^{1/2} [2vu^2]_0^{1-2v} \, dv = \int_0^{1/2} 2v(1-2v)^2 \, dv \\ &= \left[ v^2 - \frac{8v^3}{3} + 2v^4 \right]_0^{1/2} = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

Ici, on a choisi d'intégrer d'abord par rapport à  $u$ , puis par rapport à  $v$ . On peut évidemment le faire dans l'autre sens, en obtenant le même résultat (heureusement!):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X, Y) \in \mathcal{B}) &= \iint_{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} 4uv \, dudv = \int_0^1 \left( \int_0^{(1-u)/2} 4uv \, dv \right) \, du \\ &= \int_0^1 [2uv^2]_0^{(1-u)/2} \, du = \int_0^1 \frac{u(1-u)^2}{2} \, du = \left[ \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

**Définition 17** On appelle fonction de répartition du couple  $(X, Y)$  de densité  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \, dv \, du \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On a alors les propriétés usuelles de la fonction de répartition, adaptées à  $\mathbb{R}^2$ :

**Proposition 18** La fonction de répartition  $F$  d'un couple de variables aléatoires réelles  $(X, Y)$  vérifie les propriétés suivantes :

1.  $F(x, y) \in [0, 1]$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
2.  $F$  est croissante en  $x$  et croissante en  $y$ .
3.  $F(x, y) \mapsto 0$  si  $x \mapsto -\infty$  ou  $y \mapsto -\infty$ .
4.  $F(x, y) \mapsto 1$  si  $x \mapsto +\infty$  et si  $y \mapsto +\infty$ .
5.  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
6. Pour tous réels  $a < b$  et  $c < d$ , on a :

$$\mathbb{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = (F(b, d) - F(b, c)) - (F(a, d) - F(a, c)).$$

## 2.2 Lois marginales

**Proposition 19** Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a.r. de fonction de répartition  $F$ . Soit  $F_X$  et  $F_Y$  les fonctions de répartition respectives de  $X$  et de  $Y$ . Alors :

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ F_Y(y) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Grâce à cette propriété, on peut obtenir les lois de  $X$  et de  $Y$ . Il suffit de dériver les fonctions de répartition de  $X$  et de  $Y$  ainsi obtenues. Ce qui nous donne la proposition suivante :

**Proposition 20** Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a.r. de densité  $f$ . Alors  $X$  et  $Y$  ont les densités suivantes :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dy \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dx \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Les lois de  $X$  et  $Y$  ainsi obtenues sont appelées **lois marginales**.

On définit, comme pour les couples discrets l'espérance d'un couple de variables aléatoires intégrables comme étant le couple des espérances. On a de plus la

### **Définition 21 Théorème de transfert**

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a.r. de densité  $f$  et  $\varphi$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  à valeurs réelles, alors :

$$\mathbb{E}(\varphi(X, Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(u, v) f(u, v) dudv$$

quand elle existe.

On a également la définition de matrice de covariance d'un couple  $(X, Y)$  : si les variables aléatoires sont de carré intégrable, le terme  $(1, 2)$  (et  $(2, 1)$ ) de cette matrice est

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

où par définition

$$\mathbb{E}(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x, y)dxdy.$$

La matrice de covariance est comme dans le cas discret une matrice symétrique et positive (au sens des formes bilinéaires). Ces définitions s'étendent naturellement au cas des vecteurs aléatoires à densité, en remplaçant les intégrales doubles par des intégrales multiples.

## 2.3 Indépendance

**Définition 22** Les variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** (noté  $X \perp\!\!\!\perp Y$ ) si, pour tout  $x$  et  $y$  réels,

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) \mathbb{P}(Y \leq y),$$

ce qu'on peut encore écrire

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y).$$

Plus généralement,  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont **mutuellement indépendantes** si, pour tout  $x_1, \dots, x_n$  réels,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \mathbb{P}(X_n \leq x_n).$$

**Proposition 23** Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a.r. de densité  $f$  et de fonction de répartition  $F$ . Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $X \perp\!\!\!\perp Y$ .
2.  $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
3.  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Preuve.** La première équivalence  $(1 \iff 2)$  est évidente d'après ce qui est dit avant la proposition. C'est la définition de l'indépendance écrite avec des fonctions de répartition.

Reste à montrer l'équivalence avec le deuxième point  $(2 \iff 3)$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F_X(x) F_Y(y) \\ \iff \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du &= \int_{-\infty}^x f_X(u) du \int_{-\infty}^y f_Y(v) dv \\ \iff \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_X(u) f_Y(v) dv du \\ \iff f(u, v) &= f_X(u)f_Y(v) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

□

Cette caractérisation va nous permettre de montrer une autre propriété de l'espérance, que nous n'avions pas pu montrer dans le chapitre précédent.

**Proposition 24** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. admettant chacune une espérance. Alors, si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y).$$

**Preuve.** Grâce au théorème de transfert, on sait que, si elle existe,

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uv f(u, v) dudv.$$

Si  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , on a vu que  $f(u, v) = f_X(u)f_Y(v)$  pour tout couple  $(u, v)$  de réels, donc :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uv f(u, v) dudv &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uv f_X(u) f_Y(v) du dv \\ &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u f_X(u) du \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} v f_Y(v) dv \right) \\ &= \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

□

**Proposition 25** Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.r. indépendantes et si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux fonctions réelles, alors  $\varphi(X)$  et  $\psi(Y)$  sont également indépendantes.

**Preuve.** Notons  $G$  la fonction de répartition du couple  $(\varphi(X), \psi(Y))$  et  $g$  sa densité. Alors, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \mathbb{P}(\varphi(X) \leq x, \psi(Y) \leq y) \\ &= \mathbb{P}\{X \in \varphi^{-1}(-\infty, x]), Y \in \psi^{-1}(-\infty, y]\} \\ &= \mathbb{P}(X \in \varphi^{-1}(-\infty, x]) \mathbb{P}(Y \in \psi^{-1}(-\infty, y]) \quad \text{car } X \perp\!\!\!\perp Y \\ &= \mathbb{P}(\varphi(X) \leq x) \mathbb{P}(\psi(Y) \leq y) \\ &= F_{\varphi(X)}(x) F_{\psi(Y)}(y). \end{aligned}$$

Donc d'après la proposition 5.3.1,  $\varphi(X) \perp\!\!\!\perp \psi(Y)$ . □

## 2.4 Loi de $\psi(X, Y)$

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles. On cherche une technique pour calculer la densité de la variable aléatoire  $X + Y$ , ou  $XY$  ou encore  $X/Y$ , par exemple. C'est-à-dire, de manière générale, de  $\Psi(X, Y)$  où  $\Psi$  est à valeurs réelles.

**Théorème 26** Soit  $A$  et  $B$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^2$  et  $\varphi$  un  $C^1$ -difféomorphisme de  $A$  sur  $B$ , c'est-à-dire une application bijective de  $A$  dans  $B$  telle que  $\varphi$  et sa réciproque  $\varphi^{-1}$  soient continument différentiables.

Alors, si la densité  $f$  d'un couple de v.a.r.  $(X, Y)$  est nulle presque partout sur  $\mathbb{R}^2 \setminus A$ , le vecteur  $(U, V) = \varphi(X, Y)$  admet la densité de probabilité  $g = f \circ \varphi^{-1} \times |\Delta\varphi^{-1}| \times 1_B$ , qu'on peut écrire ainsi :

$$g(u, v) = \begin{cases} f(\varphi^{-1}(u, v)) |\Delta\varphi^{-1}(u, v)| & \text{si } (u, v) \in B \\ 0 & \text{si } (u, v) \notin B \end{cases}$$

On rappelle que  $\Delta\varphi^{-1}$  est le jacobien de  $\varphi^{-1}$ , c'est-à-dire le déterminant de la matrice jacobienne. Si  $\varphi^{-1}(u, v) = (\alpha(u, v), \beta(u, v))$ , alors :

$$\Delta\varphi^{-1}(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \beta}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \beta}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}.$$

**Preuve.** Puisque  $\varphi$  est une bijection de  $A$  sur  $B$ , il n'est intéressant de regarder que les valeurs de  $f$  sur  $B$  (presque partout ailleurs, ce sera forcément nul).

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $B$ . Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((U, V) \in \mathcal{D}) &= \mathbb{P}(\varphi(X, Y) \in \mathcal{D}) \\ &= \mathbb{P}((X, Y) \in \varphi^{-1}(\mathcal{D})) \\ &= \iint_{\varphi^{-1}(\mathcal{D})} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

On va procéder au changement de variable  $(x, y) = \varphi^{-1}(u, v)$  (ce qu'on peut faire car  $\varphi$  est un difféomorphisme de  $A$  sur  $B$ ). On a alors :

$$\mathbb{P}((U, V) \in \mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} f(\varphi^{-1}(u, v)) |\Delta\varphi^{-1}(u, v)| dudv.$$

Puisque la fonction de répartition est une caractérisation de la loi, la fonction intégrée est la densité de  $(U, V)$  sur  $B$ .  $\square$

En pratique, il s'agira de refaire le raisonnement de la démonstration précédente dans chaque cas de figure (inutile d'apprendre cette formule compliquée par coeur...).

**Exemple** Supposons que  $X$  et  $Y$  suivent la même loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  et que  $X$  et  $Y$  soient indépendantes. Alors, si on note  $f$  la densité de  $(X, Y)$ , pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Cherchons la densité  $g$  du couple  $(R, \Theta)$  obtenu par le passage en coordonnées polaires  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^2$ ;  $\varphi$  est un difféomorphisme de  $A$  sur  $B$  où  $A$  est  $\mathbb{R}^2$  privé de la demi-droite  $\{y = 0, x \geq 0\}$  et  $B = \mathbb{R}_+^* \times ]0, 2\pi[$ . Pour tout  $(r, \theta) \in B$ ,

$$\varphi^{-1}(r, \theta) = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Calculons le jacobien de  $\varphi^{-1}$ ; pour tout  $(r, \theta) \in B$ ,

$$\Delta\varphi^{-1}(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

Donc, d'après le théorème précédent, pour tout  $(r, \theta) \in B$ ,

$$\begin{aligned} g(r, \theta) &= |\Delta\varphi^{-1}(r, \theta)| f(\varphi^{-1}(r, \theta)) = r f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \frac{r}{2\pi} e^{-(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)/2} = \frac{r}{2\pi} e^{-r^2/2}. \end{aligned}$$

et, pour tout  $(r, \theta) \notin B$ ,  $g(r, \theta) = 0$ .

On peut en déduire les lois marginales :

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(r, \theta) d\theta = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi} e^{-r^2/2} d\theta &= r e^{-r^2/2} \quad \text{si } r > 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} 0 d\theta &= 0 \quad \text{si } r \leq 0 \end{cases} \\ f_\Theta(\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(r, \theta) dr = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{r}{2\pi} e^{-r^2/2} dr &= \left[ -\frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\pi} \quad \text{si } 0 < \theta < 2\pi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dr &= 0 \quad \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Remarque** Si  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]0, 2\pi[$ , alors on a :

$$g(r, \theta) = f_R(r) f_\Theta(\theta).$$

Sinon, soit  $f_R(r) = 0$ , soit  $f_\Theta(\theta) = 0$  et donc :

$$f_R(r) f_\Theta(\theta) = 0 = g(r, \theta).$$

Donc, pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ , on a bien :

$$g(r, \theta) = f_R(r) f_\Theta(\theta).$$

On en conclue que  $R$  et  $\Theta$  sont indépendantes.

**Proposition 27** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. et  $f$  la densité du couple  $(X, Y)$ . Alors  $X + Y$  a pour densité la fonction suivante :

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-v, v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v, u-v) dv \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

**Preuve.** Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\varphi(x, y) = (x + y, y) = (u, v) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

C'est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et :

$$\varphi^{-1}(u, v) = (u - v, v) = (x, y) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

On pose  $(U, V) = \varphi(X, Y) = (X + Y, Y)$ . On cherche la densité de  $U = X + Y$ , et pour cela il faut d'abord déterminer la densité du couple  $(U, V)$ . Notons  $g$  cette densité.

D'après le théorème, pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$g(u, v) = |\Delta\varphi^{-1}(u, v)| f(\varphi^{-1}(u, v)).$$

On peut calculer facilement le jacobien de  $\varphi^{-1}$  : pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\Delta\varphi^{-1}(u, v) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Donc pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$g(u, v) = 1 \times f(u - v, v) = f(u - v, v).$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la loi marginale de  $U = X + Y$ . Soit  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$f_U(u) = f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u, v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u - v, v) dv.$$

Pour obtenir l'autre formule, il suffit de procéder au changement de variable  $v = u - w$ ,  $dv = -dw$  :

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u - u + w, u - w) \times -dw = \int_{-\infty}^{+\infty} f(w, u - w) dw.$$

□

**Corollaire 28** Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors :

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u - v) f_Y(v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(u - v) f_X(v) dv \end{aligned}$$

On dit dans ce cas que  $f_{X+Y}$  est le **produit de convolution** de  $f_X$  et de  $f_Y$ .

Comme application de ce résultat, on a la

**Proposition 29** Si  $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$  et  $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ , et si  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , alors :

$$X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

**Preuve.** On peut utiliser le corollaire ci-dessus, puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. Soit  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-v) f_Y(v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(u-v-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(v-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} dv. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant faire le changement de variable affine :

$$w = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2} v - \frac{\sigma_1^2 m_2 + \sigma_2^2 (u - m_1)}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

c'est-à-dire :

$$v = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} w + \frac{\sigma_1^2 m_2 + \sigma_2^2 (u - m_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

et  $dv = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} dw$ .

On obtient alors :

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{(u-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} - \frac{w^2}{2}} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{(u-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2} dw. \end{aligned}$$

L'intégrale restante est l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  de la densité de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , donc elle vaut 1 et :

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{(u-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}.$$

On reconnaît la densité de la loi normale de paramètres  $m_1 + m_2$  et  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ , et donc on a bien :

$$X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}).$$

□