

Diagonalisation, trigonalisation.

Diagonalisation de matrices.

- Le principe pour diagonaliser en pratique une matrice est simple : calculer les espaces propres de la matrice et en déterminer des bases.
- Sauf théorème préliminaire (polynôme annulateur scindé à racines simples, matrice symétrique réelle, etc...), la diagonalisabilité d'une matrice en pratique s'obtient après le calcul des valeurs propres et des sous-espaces propres et le constat fait sur la dimension de ces espaces.
- Pour un confort de vocabulaire (et de compréhension), il peut être utile d'avoir une vision vectorielle du problème et d'évoquer l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice (dans : $E = \mathbb{R}^n$, ou \mathbb{C}^n suivant le cas).

Dans les exemples ci-dessous, la matrice sera notée A et l'endomorphisme canoniquement associé u .

exemple 1 : diagonaliser : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A sont données par son polynôme caractéristique χ_A , qui vaut :

$$\chi_A(x) = x.(x - 2)^2.$$

Donc : $Sp(u) = Sp(A) = \{0, 2\}$, avec 2 valeur propre double.

Puis : $E_0(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, et : $E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, et A est diagonalisable.

- diagonalisation vectorielle :

Dans la base : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, de \mathbb{R}^3 , avec : $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$,

la matrice représentative de u est diagonale et vaut : $mat_{\mathcal{B}}(u) = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: u est aussi

diagonalisable.

Si on note : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors la formule de changement de base donne : $D = P^{-1}.A.P$.

On a donc bien diagonalisé A .

Remarque :

P est ici clairement une matrice de passage, les bases utilisées (et l'espace de référence \mathbb{R}^3) étant bien identifiées.

- diagonalisation matricielle directe :

On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}.A.P$.

P peut ici être **interprétée** comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, à la

$$\text{base } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Remarques :

- la nouvelle base de \mathbb{R}^3 (ou la matrice P) permettant de diagonaliser u n'est pas unique.
- la similarité des objets manipulés fait qu'on identifiera couramment les espaces $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec \mathbb{R}^3 , tout comme les deux bases évoquées au dessus, et enfin A et u .

Trigonalisation de matrices.

- Pour trigonaliser une matrice, il n'y a pas de méthode globale à connaître a priori.
- La trigonalisabilité d'une matrice s'obtient après le calcul de son polynôme caractéristique et le constat que ce polynôme est scindé sur le corps de référence de la matrice.
- Si la matrice est considérée comme matrice complexe, elle est donc **toujours** trigonalisable.
- On verra les différentes situations pouvant se présenter pour une matrice 3×3 .

Dans les exemples ci-dessous, on continuera à noter A la matrice étudiée et u l'endomorphisme canoniquement associé à A (en pratique, il peut être nécessaire de préciser s'il s'agit de l'endomorphisme de : $E = \mathbb{C}^n$, ou de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A).

exemple 2 : A a deux valeurs propres, l'une simple, l'autre double et A n'est pas diagonalisable.

$$\text{Trigonaliser la matrice : } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve (et on factorise) χ_A en ajoutant toutes les colonnes à la première :

$$\chi_A(x) = (x-1).(x-2)^2.$$

$$\text{Les espaces propres de } A \text{ sont : } E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \text{ et : } E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

A n'est pas diagonalisable.

- Trigonalisation « standard » de A :

Si on choisit : $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (0,1,-1)$, et e_3 formant avec les deux premiers une base de \mathbb{R}^3 ,

$$\text{alors l'endomorphisme } u \text{ a pour matrice dans cette nouvelle base : } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

puisque la trace de A' étant égale à celle de A , elle vaut 5.

On choisit par exemple : $e_3 = (1,1,0)$, de telle sorte que : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base de \mathbb{R}^3 , et :

$$u(e_3) = (2,1,1) = 2.e_3 - e_2.$$

On en déduit que : $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T$, et avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $T = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

- Trigonalisation de A en réduite de Jordan :

On conserve les mêmes deux premiers vecteurs (propres de A) **dans cet ordre**, et il est possible de trouver e'_3 dans \mathbb{R}^3 de telle sorte que :

$$\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e'_3), \text{ soit une base de } \mathbb{R}^3, \text{ et : } \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur : $e'_3 = (x, y, z)$, s'obtient en résolvant : $u(e'_3) = e_2 + 2.e'_3$, soit en traduction

$$\text{matricielle dans la base canonique, en résolvant le système : } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors : $x = -1$, $y + z = -1$, ce qui laisse encore le choix.

On peut proposer alors : $e'_3 = (-1, -1, 0)$, la famille : $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e'_3)$, est bien libre et :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T', \text{ soit avec : } P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ alors : } P'^{-1} \cdot A \cdot P' = T'.$$

exemple 3 : A a une **valeur propre triple**, et un espace propre associé de **dimension 2**.

$$\text{Trigonaliser la matrice : } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En développant, on trouve : $\chi_A(x) = (x-1)^3$, puis on détermine l'espace propre associé à cette

$$\text{valeur propre triple et on trouve : } E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

A n'est bien sûr pas diagonalisable car elle aurait été semblable à I_3 : $A = P \cdot I_3 \cdot P^{-1} = I_3$, donc égale à I_3 , ce qui n'est pas le cas.

- Trigonalisation « standard » de A :

On choisit de même une base de vecteurs propres : $e_1 = (1, 0, 0)$, et : $e_2 = (0, -1, 1)$, et un troisième vecteur de \mathbb{R}^3 , pour qu'avec les deux premiers, on obtienne une base : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, de \mathbb{R}^3 , et on peut prendre : $e_3 = (0, 1, 1)$.

$$\text{Alors : } u(e_3) = (0, -1, 3) = 2.e_2 + e_3, \text{ ce qui conduit à poser : } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et : } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et on a l'égalité : $P^{-1} \cdot A \cdot P = T$.

On peut remarquer que : $(T - I_3)^2 = 0$, donc qu'également : $(A - I_3)^2 = 0$, et : $(u - id_E)^2 = 0$.

- Trigonalisation de A en réduite de Jordan :

$$\text{On peut trouver une base : } \mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3), \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ telle que : } \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce résultat est un théorème, mais on va le vérifier en pratique ci-dessous.

Pour obtenir \mathcal{B}' , on commence par chercher e'_3 , en remarquant qu'on doit avoir :

- $e'_3 \notin E_1(u)$, donc tel que : $(u - id_E)(e'_3) \neq 0$,
- $u(e'_3) = e'_2 + e'_3$, soit : $(u - id_E)(e'_3) = e'_2 \in E_1(u)$, car : $(u - id_E)(e'_2) = (u - id_E)^2(e'_3) = 0$,
- $e'_1 \in E_1(u)$, avec (e'_1, e'_2) libre.

On choisit pour ce faire e'_3 hors de $E_1(u)$, par exemple : $e'_3 = (0,1,0)$.

On pose alors : $e'_2 = u(e'_3) - e'_3$, qui est non nul puisque : $e'_3 \notin E_1(u)$.

En effet ici, on a bien : $e'_2 = (0,0,1) - (0,1,0) = (0,-1,1) \neq (0,0,0)$, et : $e'_2 \in E_1(u)$.

On complète alors e'_2 avec e'_1 en une base de $E_1(u)$, par exemple : $e'_1 = (1,0,0)$.

On peut montrer dans le cas général (ou vérifier à la main) que la famille : $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$,

est toujours libre donc forme une base de \mathbb{R}^3 , et par construction : $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si enfin, on pose : $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien finalement : $P'^{-1} \cdot A \cdot P' = T'$.

exemple 4 : A a une valeur propre triple, et un espace propre associé de dimension 1.

Trigonaliser la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On trouve (et on factorise χ_A) en ajoutant à la première colonne la troisième : $\chi_A(x) = (x-1)^3$.

Le seul espace propre de A vaut : $E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et A n'est pas diagonalisable, ce qui était encore prévisible pour la même raison que dans l'exemple précédent.

On peut alors procéder par analyse-synthèse pour trigonaliser A , mais le plus simple est d'appliquer systématiquement la technique qui suit.

• Trigonalisation en réduite de Jordan :

On cherche : $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, base de \mathbb{R}^3 , telle que :

$e'_3 \notin E_1(u)$, donc tel que : $(u - id_E)(e'_3) \neq 0$,

e'_2 tel que : $u(e'_3) = e'_2 + e'_3$, soit : $e'_2 = u(e'_3) - e'_3$,

e'_1 tel que : $u(e'_2) = e'_1 + e'_2$, soit $e'_1 = u(e'_2) - e'_2$,

et on veut que : $e'_1 \neq 0$, donc avec : $e'_2 \notin E_1(u)$.

e'_3 doit donc vérifier : $(u - id_E)^2(e'_3) = (u - id_E)(e'_2) = e'_1 \neq 0$, soit : $e'_3 \notin \ker((u - id_E)^2)$.

On calcule donc $\ker((u - id_E)^2)$, et pour cela : $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puis : $\ker((u - id_E)^2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = z\}$.

On choisit ainsi par exemple : $e'_3 = (1,0,0) \notin \ker((u - id_E)^2)$.

On pose ensuite : $e'_2 = u(e'_3) - e'_3 = (0,-1,-1) - (1,0,0) = (-1,-1,-1)$,

(on constate qu'on a bien : $e'_2 \notin E_1(u)$).

Enfin : $e'_1 = u(e'_2) - e'_2 = (-2,-1,-2) - (-1,-1,-1) = (-1,0,-1)$,

(on constate à nouveau qu'on a toujours : $e'_1 \in E_1(u)$).

Ce dernier point était prévisible car : $(u - id_E)(e'_1) = (u - id_E)^3(e'_3) = 0$,

résultat garanti par le théorème de Cayley-Hamilton.

La famille : $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, est alors une base de \mathbb{R}^3 (ce qu'on peut montrer dans le cas

général ou constater à la main dans ce cas particulier), et on a : $mat_{\mathcal{M}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$.

En posant : $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a alors : $T = P^{-1}.A.P$.

Remarques :

- la matrice P (ou la nouvelle base de \mathbb{R}^3) permettant de trigonaliser A n'est pas unique,
- dans les deux derniers exemples, si la matrice A admet pour valeur propre triple la valeur α , la matrice T semblable à A sera égale à celle proposée, mais en changeant ses coefficients diagonaux en α .

Puissance k^{ième} de matrice.

Utilisation de la diagonalisabilité ou de la trigonalisabilité.

Si A est diagonalisable.

Si A est diagonalisable, alors : $\exists P \in \text{Gl}_n(\mathbf{K})$, $\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, diagonale, $D = P^{-1}.A.P$.

Dans ce cas : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = P.D^k.P^{-1}$.

exemple 5 : calculer A^k , avec : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

A est diagonalisable, et en notant : $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $P^{-1}.A.P = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

D'où on en déduit : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = P.D^k.P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$,

soit : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} + \frac{9}{14}.3^k + \frac{9}{35}.(-4)^k & \frac{3}{7}.3^k - \frac{3}{7}.(-4)^k & \frac{3}{10} - \frac{3}{14}.3^k - \frac{3}{35}.(-4)^k \\ \frac{3}{7}.3^k - \frac{3}{7}.(-4)^k & \frac{2}{7}.3^k + \frac{5}{7}.(-4)^k & -\frac{1}{7}.3^k + \frac{1}{7}.(-4)^k \\ \frac{3}{10} - \frac{3}{14}.3^k - \frac{3}{35}.(-4)^k & -\frac{1}{7}.3^k + \frac{1}{7}.(-4)^k & \frac{9}{10} + \frac{1}{14}.3^k + \frac{1}{35}.(-4)^k \end{pmatrix}$.

Si A est trigonalisable.

Si A est trigonalisable, alors : $\exists P \in \text{Gl}_n(\mathbf{K})$, $\exists T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, triangulaire supérieure, telles que : $T = P^{-1}.A.P$.

Dans ce cas : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P.T^k.P^{-1}$.

Il est plus intéressant d'utiliser une réduite de Jordan.

reprise de l'exemple 2 : calculer A^k , avec : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

A est trigonalisable et en notant : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $P^{-1}.A.P = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Puis : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P.T^k.P^{-1}$.

Pour calculer T^k , on peut procéder par récurrence, ou utiliser le binôme de Newton.

En effet, T s'écrit : $T = D + N$, avec : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et : $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D est diagonale, N nilpotente ($N^2 = 0$) et D et N commutent (c'est toujours le cas avec une réduite de Jordan).

Donc : $\forall k \in \mathbb{N}, T^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D^{k-i} \cdot N^i = D^k + k \cdot D^{k-1} \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k \cdot 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$.

On en déduit que : $A^k = \begin{pmatrix} 2^{k+1}-1 & 1-2^k & 1-2^k \\ -1+(1-k) \cdot 2^k & 1+k \cdot 2^{k-1} & 1-2^k+k \cdot 2^{k-1} \\ -1+(1+k) \cdot 2^k & 1-2^k-k \cdot 2^{k-1} & 1-k \cdot 2^{k-1} \end{pmatrix}$.

reprise de l'exemple 4 : calculer A^k , avec : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A est trigonalisable, et en notant : $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $P^{-1}.A.P = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut encore écrire : $T = D + N$, avec : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$, et : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D est évidemment diagonale, N nilpotente ($N^3 = 0$), et D et N commutent, et comme au-dessus :

$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P.T^k.P^{-1} = P.(I_3 + k.N + \frac{k.(k-1)}{2}.N^2).P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{k.(k+1)}{2} & k & \frac{k.(k+1)}{2} \\ -\frac{k}{2} & 1 & \frac{k}{2} \\ -\frac{k.(k+1)}{2} & k & 1 + \frac{k.(k+1)}{2} \end{pmatrix}$.

Utilisation d'un polynôme annulateur (polynôme caractéristique ou minimal).

Cas 1 : les racines du polynôme annulateur dont on dispose sont simples (A est diagonalisable).

reprise de l'exemple 5 :

Pour : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on dispose du polynôme caractéristique comme polynôme annulateur,

soit : $\chi_A(x) = (x-1).(x-3).(x+4)$.

Pour : $k \in \mathbb{N}, \exists (Q_k, R_k) \in \mathbb{R}[X]^2, X^k = \chi_A \cdot Q_k + R_k$, avec : $R_k = a_k \cdot X^2 + b_k \cdot X + c_k$, et on détermine ces valeurs à l'aide des racines (simples) de χ_A :

$$1^k = a_k \cdot 1^2 + b_k \cdot 1 + c_k,$$

$$3^k = a_k \cdot 3^2 + b_k \cdot 3 + c_k,$$

$$(-4)^k = a_k \cdot (-4)^2 + b_k \cdot (-4) + c_k,$$

ce qui donne, après résolution du système :

$$a_k = -\frac{1}{10} + \frac{1}{14} \cdot 3^k + \frac{1}{35} \cdot (-4)^k, \quad b_k = -\frac{1}{10} + \frac{3}{14} \cdot 3^k - \frac{4}{35} \cdot (-4)^k, \quad c_k = \frac{12}{10} - \frac{2}{14} \cdot 3^k + \frac{3}{35} \cdot (-4)^k.$$

Il suffit alors de calculer A^2 , pour obtenir : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = a_k \cdot A^2 + b_k \cdot A + c_k \cdot I_3$, et de remplacer par les valeurs trouvées, retrouvant ainsi le résultat précédent.

reprise de l'exemple 1 :

Pour : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on peut vérifier que le polynôme : $\mu_A(x) = x \cdot (x-2)$, est un polynôme annulateur pour A (polynôme « minimal »).

Pour : $k \in \mathbb{N}, \exists (Q_k, R_k) \in \mathbb{R}[X]^2, X^k = \mu_A \cdot Q_k + R_k$, avec : $R_k = a_k \cdot X + b_k$,

et on détermine ces valeurs à l'aide des racines (simples) de μ_A :

$$1^k = a_k \cdot 1 + b_k,$$

$$2^k = a_k \cdot 2 + b_k,$$

soit : $a_k = 2^k - 1$, $b_k = 2 - 2^k$, puis : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = a_k \cdot A + b_k \cdot I_3$.

Cas 2 : certaines des racines du polynôme annulateur sont multiples.

reprise de l'exemple 2 :

Pour : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, on dispose du polynôme caractéristique comme polynôme annulateur

qui est ici : $\chi_A(x) = (x-1).(x-2)^2$.

Pour : $k \in \mathbb{N}, \exists (Q_k, R_k) \in \mathbb{R}[X]^2, X^k = \chi_A \cdot Q_k + R_k$, avec : $R_k = a_k \cdot X^2 + b_k \cdot X + c_k$,

mais on ne dispose plus que de deux racines pour χ_A (et donc de deux équations seulement alors que l'on a trois inconnues) :

$$1^k = a_k \cdot 1^2 + b_k \cdot 1 + c_k,$$

$$2^k = a_k \cdot 2^2 + b_k \cdot 2 + c_k,$$

On peut alors penser à dériver (2 comme racine double de χ_A , est aussi racine de χ_A') :

$$k \cdot X^{k-1} = \chi_A' \cdot Q_k + \chi_A \cdot Q_k' + R_k', \text{ avec } R_k' = 2 \cdot a_k \cdot X + b_k,$$

et avec la valeur 2, cela donne une troisième équation :

$$k \cdot 2^{k-1} = 2 \cdot a_k \cdot 2 + b_k.$$

On résout alors le système formé par ces trois équations, ce qui permet d'obtenir :

$$a_k = 1 - 2^k + k \cdot 2^{k-1}, \quad b_k = 2^{k+2} - 3 \cdot k \cdot 2^{k-1} - 4, \quad c_k = 4 + (k-3) \cdot 2^k,$$

Il suffit alors de calculer A^2 , pour obtenir : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = a_k \cdot A^2 + b_k \cdot A + c_k \cdot I_3$, et de remplacer par les valeurs trouvées pour obtenir A^k .

reprise de l'exemple 4 :

Pour : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a le polynôme annulateur : $\chi_A(x) = (x-1)^3$.

A partir de : $X^k = \chi_A \cdot Q_k + (a_k \cdot X^2 + b_k \cdot X + c_k)$

on utilise alors le fait que 1 est racine triple de χ_A , donc racine de χ_A , χ_A' , et χ_A'' .

On dérive alors deux fois l'égalité pour obtenir un système qui après résolution donne :

$$a_k = \frac{k \cdot (k-1)}{2}, \quad b_k = 2 \cdot k - k^2, \quad c_k = 1 + \frac{k \cdot (k-3)}{2},$$

et on termine avec : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = a_k \cdot A^2 + b_k \cdot A + c_k \cdot I_3$.