Stabilité en norme L infinie.

vendredi 15 décembre 2023 15:53

On considère le schéma de Crank-Nikolson proposé dans la feuille de soutien du 14-15/12/23.
Pour montrer la stabilité en norme L^∞ nous allons montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \{0, \dots, N\}$, $\|U^n\|_\infty \leq C$ si $U^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_J^n \end{pmatrix}$ est solution du schéma proposé.

On a : $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \dfrac{u_{i+1}^{n+1/2} - 2u_i^{n+1/2} + u_{i-1}^{n+1/2}}{h^2}$ $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$, $\forall i \in \{1, \dots, J\}$.

$$= \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2}.$$

Donc : $\left(1 + \dfrac{\Delta t}{h^2}\right) u_i^{n+1} = \dfrac{\Delta t}{2h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) + \dfrac{\Delta t}{2h^2}\left(u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right) + u_i^n$

$$= \frac{\Delta t}{2h^2} u_{i+1}^n + \left(1 - \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_i^n + \frac{\Delta t}{2h^2} u_{i-1}^n + \frac{\Delta t}{2h^2} u_{i+1}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2h^2} u_{i-1}^{n+1}. \quad (1)$$

$\boxed{\text{Supposons que } 1 - \frac{\Delta t}{h^2} \geq 0.}$ On a alors $\left|\left(1 - \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_i^n\right| = \left(1 - \frac{\Delta t}{h^2}\right)|u_i^n|$. De plus, comme $1 + \frac{\Delta t}{h^2} \geq 0$, $\left|\left(1 + \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_i^{n+1}\right| = \left(1 + \frac{\Delta t}{h^2}\right)|u_i^{n+1}|$.

On "passe à la valeur absolue" dans (1), on utilise l'inégalité triangulaire dans le membre de droite obtenu et on obtient, comme on a aussi $\frac{\Delta t}{h^2} \geq 0$,

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{h^2}\right)|u_i^{n+1}| \leq \frac{\Delta t}{2h^2}|u_{i+1}^n| + \left(1 - \frac{\Delta t}{h^2}\right)|u_i^n| + \frac{\Delta t}{2h^2}|u_{i-1}^n| + \frac{\Delta t}{2h^2}\left(|u_{i+1}^{n+1}| + |u_{i-1}^{n+1}|\right)$$

En utilisant que $\forall n \in \{0, \dots, N\}$, $\forall i \in \{1, \dots, J\}$, $|u_i^n| \leq \max_{i \in \{1, \dots, J\}} |u_i^n| = \|U^n\|_\infty$, on en déduit que $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$, $\forall i \in \{1, \dots, J\}$,

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{h^2}\right)|u_i^{n+1}| \leq \frac{\Delta t}{2h^2}\|U^n\|_\infty + \left(1 - \frac{\Delta t}{h^2}\right)\|U^n\|_\infty + \frac{\Delta t}{2h^2}\|U^n\|_\infty + \frac{2\Delta t}{2h^2}\|U^{n+1}\|_\infty.$$

Et donc $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$, $\forall i \in \{1, \dots, J\}$,

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{h^2}\right)|u_i^{n+1}| \leq \|U^n\|_\infty + \frac{\Delta t}{h^2}\|U^{n+1}\|_\infty.$$

D'où

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{h^2}\right)\|U^{n+1}\|_\infty \leq \|U^n\|_\infty + \frac{\Delta t}{h^2}\|U^{n+1}\|_\infty$$

Finalement

$$\underbrace{\left(1 + \frac{\Delta t}{h^2} - \frac{\Delta t}{h^2}\right)}_{=1}\|U^{n+1}\|_\infty \leq \|U^n\|_\infty$$

__Conclusion :__ Si $\frac{\Delta t}{h^2} \leq 1$ alors $\forall n \in \{0, \dots, N\}$, $\|U^n\|_\infty \leq \|U^0\|_\infty$, i.e. si $\frac{\Delta t}{h^2} \leq 1$, alors le schéma est stable en norme L^∞.