

TRAVAUX DIRIGÉS :

SÉRIES NUMÉRIQUES

Les différents exercices doivent être préparés par les étudiants avant les séances de travaux dirigés.

Exercice 1

Étudier la convergence des séries suivantes, puis en cas de convergence, calculer leur somme.

1)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

2)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

3)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

4)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 2

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$,

1)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

3)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right).$$

5)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n.$$

2)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

4)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}.$$

6)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Exercice 3

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$,

1)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}.$$

3)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

2)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}.$$

4)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right).$$

Exercice 4

- Déterminer l'ensemble des triplets (a, b, c) de nombres réels tels que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ de terme général $u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}$ soit convergente. Déterminer alors sa somme.

- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

- Montrer que la suite $(a_n)_n$ est convergente.

- En déduire la nature de la série numérique $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$.