

1 Quelques exercices sur la dualité

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie B, B' deux bases de E . Notons P la matrice de passage de B à B' . Quelle est la matrice de passage de la base duale B^* de B à la base duale $(B')^*$ de B' ?

Exercice 2. Soient a et b deux points distincts de K . Sur le K espace vectoriel E des polynômes de degré ≤ 3 , on considère les formes linéaires $f_1 : P \mapsto P(a)$, $f_2 : P \mapsto P'(a)$, $f_3 : P \mapsto P(b)$, $f_4 : P \mapsto P'(b)$.

1. Calculer $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}^o$ (l'ensemble des $P \in E$ tels que $f_1(P) = f_2(P) = f_3(P) = f_4(P) = 0$).
2. Démontrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de E^* .
3. Quelle est la base de E dont (f_1, f_2, f_3, f_4) est la base duale ?

Exercice 3. Soit E un K espace vectoriel.

1. Démontrer que deux formes linéaires sur E dont les noyaux sont égaux sont proportionnelles.
2. Soient f_1, \dots, f_k des formes linéaires sur E et $f \in E^*$. Démontrer que l'on a $f \in \text{Vect}\{f_1, \dots, f_k\}$ si et seulement si $\bigcap_{j=1}^k \ker f_j \subset \ker f$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit (f_1, \dots, f_n) une famille d'éléments de E^* . Notons $\varphi : E \rightarrow K^n$ l'application $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

1. On suppose que la famille (f_1, \dots, f_n) est une base de E^* .
 - a) Démontrer que φ est injective. En déduire qu'elle est bijective.
 - b) Démontrer qu'il existe une base B de E telle que $\varphi(B)$ soit la base canonique de K^n .
2. En déduire que toute base de E^* est duale d'une base de E .
3. Démontrer que l'on a les équivalences suivantes :
 - φ est injective si et seulement si la famille (f_1, \dots, f_n) est génératrice ;
 - φ est surjective si et seulement si la famille (f_1, \dots, f_n) est libre.

Exercice 5. Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F .

1. Démontrer que ${}^t f$ est injective si et seulement si f est surjective et ${}^t f$ est surjective si et seulement si f est injective.
2. Démontrer que $\ker {}^t f = (\text{im } f)^\perp$ et $\text{im } {}^t f = (\ker f)^\perp$.

Exercice 6. On se propose de donner deux démonstration du

Lemme de Schur. *Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie qui laisse stable tout hyperplan est une homothétie.*

1. Rappel : Démontrer qu'un endomorphisme qui laisse invariante toute droite vectorielle est une homothétie.
2. *Première méthode.*
 - a) Démontrer que la transposée de u laisse fixe toute droite - donc c'est est une homothétie.
 - b) En déduire que u est une homothétie.
3. *Deuxième méthode.* Démontrer que u laisse stable toute droite - donc c'est est une homothétie.

Exercice 7. Notons $b : \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \rightarrow K$ l'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$.

1. Démontrer que b est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.
2. On suppose que $n \geq 2$. Démontrer que tout F hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ contient une matrice inversible.
3. On suppose que $K = \mathbb{R}$. Quelle est la signature de b ?

Exercice 8. [Dual d'un espace vectoriel complexe] Remarquons que tout espace vectoriel complexe est naturellement un espace vectoriel réel. Soit E un espace vectoriel complexe. Notons $E_{\mathbb{C}}^*$ son dual et $E_{\mathbb{R}}^*$ le dual de E considéré comme espace vectoriel réel. Pour $\ell \in E_{\mathbb{C}}^*$, notons $\text{Re}(\ell)$ l'application $x \mapsto \text{Re}(\ell(x))$.

1. Démontrer que $\ell \mapsto \text{Re}(\ell)$ est une bijection de $E_{\mathbb{C}}^*$ sur $E_{\mathbb{R}}^*$.
2. En particulier, $E_{\mathbb{R}}^*$ s'identifie à l'espace vectoriel complexe $E_{\mathbb{C}}^*$. Décrire directement la structure d'espace vectoriel complexe sur $E_{\mathbb{R}}^*$, i.e. la multiplication d'un élément de $E_{\mathbb{R}}^*$ par un nombre complexe.

Exercice 9. Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel. Quelle est en fonction de la signature de q la plus grande dimension de sous-espace isotrope de E (i.e. sous-espace vectoriel de E formé de vecteurs isotropes)?

Exercice 10. Nature de la quadrique d'équation $xy + yz + zx + 1 = 0$.

2 Solutions

Exercice 1. Soient $x \in E$ et $f \in E^*$. Notons X et X' les vecteurs-colonne formés par les colonnes de x dans les bases B et B' respectivement. On a $X = PX'$. De même notons Y et Y' les vecteurs-colonne formés par les colonnes de f dans les bases B^* et $(B')^*$ respectivement. On a $f(x) = {}^tYX = {}^tY'X'$, donc ${}^tY'PX' = {}^tY'X'$. Comme cela est vrai pour tout X' , il vient ${}^tY'P = {}^tY'$, soit ${}^tPY = Y'$, soit $Y = {}^tP^{-1}Y'$, donc la matrice de passage de B^* de B à $(B')^*$ est ${}^tP^{-1}$.

Exercice 2. 1. Si $P(a) = P'(a) = 0$ alors $(X-a)^2|P$. De même, si $P(b) = P'(b) = 0$ alors $(X-a)^2|P$. Comme $(X-a)^2$ et $(X-b)^2$ sont premiers entre eux, si $P \in \{f_1, f_2, f_3, f_4\}^o$ alors $(X-a)^2(X-b)^2$ divise P , ce qui, vu que le degré de P est au plus 3, implique $P = 0$. Donc $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}^o = \{0\}$.

2. On a $\text{Vect}\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = (\{f_1, f_2, f_3, f_4\}^o)^\perp = E^*$. Comme $\dim(E^*) = \dim(E) = 4$, on en déduit que la famille génératrice (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de E^* .

3. Soit (P_1, P_2, P_3, P_4) la base de E dont (f_1, f_2, f_3, f_4) est la base duale. On a $P_2(a) = P_2(b) = P_2'(b)$, donc $(X-a)(X-b)^2|P_2$. Donc P_2 est de la forme $\alpha(X-a)(X-b)^2$ avec $\alpha \in K$. On trouve

$$1 = P_2'(a) = \alpha(a-b)^2, \text{ donc } P_2 = \frac{(X-a)(X-b)^2}{(a-b)^2}.$$

$$\text{vient } P_4 = \frac{(X-a)^2(X-b)}{(a-b)^2}.$$

On a $P_1(b) = P_1'(b) = 0$, donc P_1 est de la forme $(X-b)^2S$ où S est un polynôme du premier degré, donc il existe β et γ dans K tels que $P_1 = \beta(X-b)^2 + \gamma P_2$. Comme $P_1(a) = 1$, il vient

$$\beta(a-b)^2 = 1; \text{ comme } P_1'(a) = 0, \text{ il vient } 2\beta(a-b) + \gamma = 0. \text{ Enfin } P_1 = \frac{(X-b)^2(3a-b-2X)}{(a-b)^3}.$$

$$\text{De même (ou en intervertissant } a \text{ et } b), \text{ il vient } P_3 = \frac{(X-a)^2(3b-a-2X)}{(b-a)^3}.$$

Exercice 3. 1. Soient $f, g \in E^*$. Alors g est nulle sur $\ker f$ si et seulement si $g \in (\ker f)^\perp = (\{f\}^o)^\perp = \text{Vect}\{f\} = Kf$.

Plus explicitement, soit $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors $E = \ker f \oplus Kx$. Si $\ker g = \ker f$, posons

$$\lambda = \frac{g(x)}{f(x)}; \text{ les formes } g \text{ et } \lambda f \text{ coïncident sur } \ker f \text{ et en } x; \text{ elles sont égales.}$$

2. On a $\bigcap_{j=1}^k \ker f_j \subset \ker f$ si et seulement si $f \in \left(\bigcap_{j=1}^k \ker f_j \right)^\perp = (\{f_1, \dots, f_k\}^o)^\perp = \text{Vect}\{f_1, \dots, f_k\}$.

Autre solution. Il est d'abord clair que si $f = \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j$, alors f est nulle sur $\bigcap_{j=1}^k \ker f_j$. Supposons

inversement que $\bigcap_{j=1}^k \ker f_j \subset \ker f$ et démontrons par récurrence sur k que $f \in \text{Vect}\{f_1, \dots, f_k\}$.

– Le cas $k = 1$ est la question 1.

– Notons g_j et g les restrictions de f_j et f à $\ker f_k$. On a $\bigcap_{j=1}^{k-1} \ker g_j \subset \ker g$. L'hypothèse de

récurrence implique qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} \in K$ tels que $g = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j g_j$, donc $f - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j f_j$ est

nulle sur $\ker f_k$. Par la question 1, il existe $\lambda_k \in K$ tel que $f - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j f_j = \lambda_k f_k$.

Exercice 4. 1. a) Remarquons que $\ker \varphi = \{x \in E; f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0\} = \{f_1, \dots, f_n\}^o$. Puisque (f_1, \dots, f_n) est génératrice, on a $\{f_1, \dots, f_n\}^o = (E^*)^o = \{0\}$. Cela prouve que φ est injective donc bijective par égalité des dimensions de E et K^n .

b) L'image inverse de la base canonique (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n par l'application bijective φ est une base (x_1, \dots, x_n) de E . Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\varphi(x_i) = e_i$, soit $f_j(x_i) = \delta_{i,j}$; donc (f_1, \dots, f_n) est la base duale de (x_1, \dots, x_n) .

2. résulte immédiatement de 1.

3. On a $\ker \varphi = \{f_1, \dots, f_n\}^o$, donc $\text{Vect}\{f_1, \dots, f_n\} = (\{f_1, \dots, f_n\}^o)^\perp = (\ker \varphi)^\perp$. Donc

– φ est injective si et seulement si $\text{Vect}\{f_1, \dots, f_n\} = E^*$.

– Il vient $\text{rg}\{f_1, \dots, f_n\} = \dim E - \dim\{f_1, \dots, f_n\}^o = \dim E - \dim \ker \varphi = \text{rg} \varphi$. La famille (f_1, \dots, f_n) est donc libre si et seulement si ce rang est égal à n , i.e. si φ est surjective.

Exercice 5. 1. On a $\text{rg}^t f = \text{rg} f$. Donc on a les équivalences

- f est surjective $\iff \text{rg} f = \dim F \iff {}^t f$ est injective;
- f est injective $\iff \text{rg} f = \dim E \iff {}^t f$ est surjective.

2. Par définition $\ker {}^t f = \{\ell \in F^*; \ell \circ f = 0\} = \{\ell \in F^*; \text{im} f \subset \ker \ell\} = (\text{im} f)^\perp$.

Si $g \in \text{im} {}^t f$, il existe $\ell \in F^*$ telle que $g = \ell \circ f$, donc g est nulle sur $\ker f$, soit $g \in (\ker f)^\perp$. On en déduit l'égalité d'après l'égalité des dimensions : $\text{rg}^t f = \text{rg} f = \dim E - \dim \ker f = \dim(\ker f)^\perp$.

Exercice 6. 1. Si u laisse toute droite invariante, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in K$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. Fixons $x \in E$ non nul et démontrons que u est l'homothétie de rapport λ_x . Soit $y \in E$.

- S'il existe $\alpha \in K$ tel que $y = \alpha x$, alors $u(y) = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$.
- Sinon, on a $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$, et comme x, y est libre il vient $\lambda_y = \lambda_{x+y} = \lambda_x$, donc $u(y) = \lambda_x y$.

2. *Première méthode.*

a) Si D est une droite de E^* , alors D^o est un hyperplan de E , donc est stable par u . Pour $x \in D^o$ et $\ell \in D$, on a $({}^t u(\ell))(x) = \ell(u(x)) = 0$, puisque $u(x) \in D^o$ et $\ell \in D$. Donc ${}^t u(\ell) \in (D^o)^\perp = D$. Par 1., ${}^t u$ est une homothétie.

b) L'application $\tau : v \mapsto {}^t v$ est linéaire. Si ${}^t v = 0$, alors $(\text{im} v)^\perp = \ker {}^t v = E^*$, donc $\text{im} v = \{0\}$, soit $v = 0$. Cela prouve que τ est injective. Or il existe $\lambda \in K$ tel que ${}^t u = \lambda \text{id}_{E^*} = {}^t(\lambda \text{id}_E)$ donc $u = \lambda \text{id}_E$.

3. *Deuxième méthode.* Soit D une droite de E . Il existe des hyperplans H_1, \dots, H_m de E tels que $D = \bigcap_{k=1}^m H_k$. Si $x \in D$, alors pour tout k on a $x \in H_k$, donc $u(x) \in H_k$. Il vient $u(x) \in D$. Par 1., u est une homothétie.

- Exercice 7.** 1. La bilinéarité est claire et la symétrie est la propriété de trace $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Notons $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$. Pour $A = (a_{i,j})$, on a $\text{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$. Si $\text{Tr}(AB) = 0$ pour tout B , il vient $a_{j,i} = 0$ pour tout i, j , donc $A = 0$. Cela prouve que b est non dégénérée.
2. L'hyperplan F est le noyau d'une forme linéaire. D'après 1. l'application $A \mapsto \text{Tr}(A)$ est bijective, donc il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tel que $F = \{B \in \mathcal{M}_n(K); \text{Tr}(AB) = 0\}$.
- Il existe des matrices inversibles P, Q telles que $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons J une matrice de permutation circulaire. La diagonale de la matrice $(PAQ)J$ est nulle, donc $\text{Tr}(PAQJ) = 0$. Or $\text{Tr}(PAQJ) = \text{Tr}(AQJP)$. Donc F contient la matrice inversible QJP .
3. Notons \mathcal{S} (*resp.* \mathcal{A}) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques (*resp.* antisymétriques). On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$. De plus, pour $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{Tr}({}^tMM) = \sum_{i,j} m_{i,j}^2 \geq 0$. On en déduit que la restriction de b à \mathcal{S} (*resp.* à \mathcal{A}) est définie positive (*resp.* définie négative). Enfin, si $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$, on a $b(S, A) = \text{Tr}(SA) = \text{Tr}({}^t(SA)) = \text{Tr}({}^tA{}^tS) = \text{Tr}(-AS) = -\text{Tr}(SA)$. Donc \mathcal{S} et \mathcal{A} sont orthogonaux pour b . On en déduit que la signature de b est $(n(n+1)/2, n(n-1)/2)$.

- Exercice 8.** 1. Soit $\ell \in E_{\mathbb{C}}^*$, et posons $h = \text{Re}(\ell)$, en d'autres termes, $h(x) = \text{Re}(\ell(x))$. On a $\ell(ix) = i\ell(x)$, donc $h(ix) = -\text{Im}(\ell(x))$. Cela prouve que $\ell(x) = h(x) - ih(ix)$. En particulier l'application $\ell \mapsto \text{Re}(\ell)$ est injective.
- Soit $h \in E_{\mathbb{R}}^*$ et notons $\ell : E \rightarrow \mathbb{C}$ l'application $x \mapsto h(x) - ih(ix)$. L'application ℓ est clairement \mathbb{R} -linéaire et l'on a $\ell(ix) = h(ix) - ih(-x) = h(ix) + ih(x) = i\ell(x)$. Donc ℓ est \mathbb{C} -linéaire (autrement dit $\ell \in E_{\mathbb{C}}^*$) et l'on a $\text{Re}(\ell) = h$. Cela prouve que $\ell \mapsto \text{Re}(\ell)$ est surjective.
2. On veut définir l'action $\lambda.h$ de $\lambda \in \mathbb{C}$ sur $h \in E_{\mathbb{R}}^*$, de telle sorte que la bijection $\ell \mapsto \text{Re}(\ell)$ soit \mathbb{C} -linéaire. Si $h = \text{Re}(\ell)$, on aura $\lambda.h = \text{Re}(\lambda\ell)$ ce qui donne $(\lambda.h)(x) = \text{Re}(\lambda\ell(x)) = \text{Re}(\ell(\lambda x)) = h(\lambda x)$.

- Exercice 9.** Notons (r, s) la signature de q . Démontrons que cette dimension maximale est $n - \max(r, s)$. Quitte à changer q en $-q$ on peut supposer que $r \geq s$. Dans une base (e_1, \dots, e_n) bien choisie, q s'écrit $q(x) = \sum_{k=1}^r x_k^2 - \sum_{k=r+1}^{r+s} x_k^2$. Les vecteurs $e_i - e_{i+r}$ pour $i = 1, \dots, s$ et les vecteurs e_ℓ avec $\ell > r + s$ sont deux à deux orthogonaux et isotropes donc engendrent un espace isotrope de dimension $n - r$.
- Par ailleurs, tout sous-espace de dimension $p > n - r$ a une intersection non nulle avec $\text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ donc contient des vecteurs non isotropes.

- Exercice 10.** Rappelons qu'une équation du type $q(x) = 1$ est celle d'un ellipsoïde si q est définie positive, un hyperboloïde à une nappe si la signature de q est $(2, 1)$ et un hyperboloïde à deux nappes si la signature de q est $(1, 2)$.

Pour trouver la signature de q peut utiliser la réduction de Gauss. On écrit donc

$xy + yz + zx = (x + z)(y + z) - z^2 = X^2 - Y^2 - Z^2$ où $X = \frac{x + y + 2z}{2}$, $Y = \frac{x - y}{2}$ et $z = Z$. Ces formes linéaires sont des coordonnées dans la base $(e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3 - e_1 - e_2)$. Dans cette nouvelle base, l'équation est $X^2 - Y^2 - Z^2 + 1 = 0$. La quadrique est un hyperboloïde à une nappe.

Si on cherche à étudier les propriétés métriques de notre quadrique, on doit la réduire dans une base orthonormée. Cela revient à diagonaliser la matrice de $b = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

Ses valeurs propres sont 1 et $-1/2$ (avec multiplicité 2) et une base orthoormée de vecteurs propres est $e_1 = 1/\sqrt{3}(1, 1, 1)$, $e_2 = 1/\sqrt{2}(1, -1, 0)$ et $e_3 = 1/\sqrt{6}(1, 1, -2)$. Dans cette base orthonormée l'équation de notre quadrique est $2X^2 - Y^2 - Z^2 + 2 = 0$ On en déduit que c'est un hyperboloïde (à une nappe évidemment) de révolution (autour de l'axe des X).