

Nom :

Prénom :

### Contrôle no 1, sujet D (durée 1h30)

*Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que le premier exercice.*

#### Exercice 1.

- (1) Donner deux manières de calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} e^{-x} dx$$

par une méthode de Monte-Carlo.

- (2) Écrire un programme (en R) qui calcule  $I$  de manière approchée par une des deux méthodes proposées dans la question précédente. Répondre dans le cadre ci-dessous. Dans la suite, nous noterons  $\sigma^2$  la variance de cette méthode.

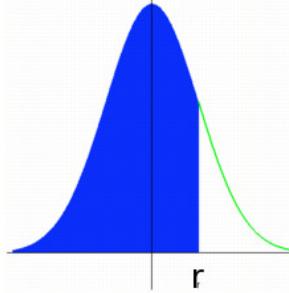
- (3) On fixe  $n = 10000$ . Notons  $E_n$  la différence entre  $I$  et l'approximation de Monte-Carlo du programme de la question précédente. Trouver  $\delta$  tel que

$$\mathbb{P}(|E_n| \leq \delta) \geq 0,9$$

(il n'est pas nécessaire de simplifier l'expression trouvée).

#### Exercice 2. On s'intéresse à la fonction codée dans l'algorithme 1

$$P(X \leq r) \text{ avec } X \sim N(0,1)$$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

FIGURE 0.1. Table de la loi normale

(1) Soient

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{[-2;0]}(x) \frac{2}{\pi} \sqrt{-2x - x^2},$$

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{[-2;0]}(x) \frac{1}{2}.$$

Montrer que  $f$  et  $g$  sont des densités de probabilité (on pourra remarquer que  $-2x - x^2 = 1 - (1 + x)^2$ ).

(2) Montrer que pour tout  $x \in [-2; 0]$ ,

$$f(x) \leq \frac{4}{\pi} g(x).$$

- (3) Quelle est la loi de la variable aléatoire renvoyée par l'appel de `simu1(1)` ? Écrire la réponse dans le cadre ci-dessous.

---

**Algorithme 1** Simulation d'une variable aléatoire.

---

```
simu1<-function(t)
{
  b=0
  while (b==0)
  {
    u=runif(1,-2,0)
    v=runif(1,0,1)
    if (v*(1/2)*(4/pi)<(2/pi)*sqrt(-2*u-u^2))
    {
      b=1
    }
  }
  return(u)
}
```

---