TD 6 : Tests d'hypothèses

Exercice 1. *(Généralités)*

Une publicité affirme que la durée de vie d'une ampoule Lux est de 20×10^3 heures en moyenne. Une association de consommateurs souhaite tester cette hypotèse au seuil 10%.

1. Sur quel paramètre porte le test ?

   Le paramètre à tester est la durée de vie moyenne μ de l'ensemble des ampoules Lux.

2. On note $\mu_0 = 20 \times 10^3$; quelle hypothèse l'association de consommateurs cherchera-t-elle à tester ?

   $\mathscr{H}_0 : \mu \leq \mu_0$ contre $\mathscr{H}_1 : \mu > \mu_0$.

3. En quoi consiste une erreur de type I dans ce contexte ?

   Commettre une erreur de type I, c'est affirmer à tort que la durée de vie moyenne d'une ampoule Lux est supérieure à 20×10^3 heures.

4. En quoi consiste une erreur de type II dans ce contexte ?

   Commettre une erreur de type II, c'est affirmer à tort que la durée de vie moyenne d'une ampoule Lux est inférieure à 20×10^3 heures.

5. Comment interprète-t-on le seuil de significativité : 10% ?

   Il y a au plus 10% de chances que l'association confirme la publicité, à tort.

M. Li, un statisticien indépendant, décide de tester $\mathscr{H}_0 : \mu = \mu_0$ contre $\mathscr{H}_1 : \mu = 21 \times 10^3$ en s'appuyant sur une statistique de décision u. Figure 1 représente les éléments graphiques associés au test de M. Li.

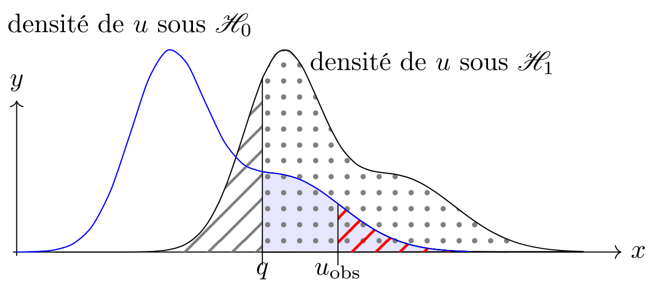

Figure 1: -

6. Que représente le réel q ?

   q est la valeur critique du test.

7. Caractérisez la zone de rejet.

   La zone de rejet est constituée des réels supérieurs à q.

8. Que repésente l'aire hachurée en rouge ?

   L'aire hachurée en rouge représente la p-valeur associée à la valeur observée de la statistique de test.

9. Que représente l'aire hachurée en gris ?

   L'aire hachurée en gris représente le risque de seconde espèce.

10. Que représente l'aire en bleu ?

    L'aire en bleu représente le seuil de risque.

11. Que représente l'aire en pointillés ?

    L'aire en pointillés représente la puissance du test

12. Dans la situation représentée par Figure 1, doit-on rejeter $\mathscr{H}_0$?

    Deux manières de justifier que $\mathscr{H}_0$ doit être rejetée : la valeur observée de la statistique de test est dans la zone de rejet ; la p-valeur est inférieure au seuil de risque.

Exercice 2. *(Test de comparaison d'une moyenne à une valeur de référence lorsque l'écart-type est connu.)*

Vingt téléspectateurs choisis au hasard regardent la télévision six heures et quarante-cinq minutes par jour en moyenne ; la variance des durées consacrées quotidiennement par les Français à la télévision est $\sigma^2 = 4$

M. Li souhaite tester : $\mathscr{H}_0 : \mu = \mu_0 = 6,25$ contre $\mathscr{H}_1 : \mu = \mu_1 = 6,50$ en s'appuyant sur la statistique de décision : $z = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)/\sigma$ où $\bar{x}$ désigne la durée moyenne passée devant la télévision par n téléspectateurs ; il propose de rejeter $\mathscr{H}_0$ au seuil α si $z > z_{1-\alpha}$.

A. Lourme, Faculté d'économie, gestion & AES, Université de Bordeaux http://alexandrelourme.free.fr

1. Quelle est la loi de z sous $\mathscr{H}_0$? sous $\mathscr{H}_1$?

   En supposant que la durée quotidienne passée devant la télévision par un téléspectateur choisi au hasard est distribuée selon une loi normale, sous $\mathscr{H}_0$ la statistique z est distribuée selon une loi normale centrée réduite. En effet, sous $\mathscr{H}_0$:

   - la durée x_i passée devant la télévision par le téléspectateur i est distribuée selon $\mathcal{N}(\mu_0; \sigma^2)$,
   - en supposant $x_1, \ldots, x_n$ indépendantes, $\sum_{i=1}^n x_i$ est distribuée selon $\mathcal{N}(n\mu_0; n\sigma^2)$
   - ainsi : $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ est distribuée selon $\mathcal{N}(\mu_0; \sigma^2/n)$ et z selon $\mathcal{N}(0; 1)$.

   En supposant $\mathscr{H}_1$ vraie on montre par un raisonnement similaire que z est distribuée selon une loi normale de moyenne $\sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0)/\sigma$ et de variance 1.

2. Doit-on rejeter $\mathscr{H}_0$ au seuil 5% ?

   - Statistique de Test (SdT) : $z = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)/\sigma = \sqrt{20} \times (6,75 - 6,25)/2 \approx 1,12$
   - Zone de Rejet (ZdR) à 5% : $z > z_{1-0,05} = z_{0,95} = 1,64$
   - Décision : on ne rejette pas $\mathscr{H}_0$ au seuil de 5%.

3. Déterminez et interprétez la valeur du risque de seconde espèce.

   $\beta = \mathbb{P}(\mathscr{H}_0|\mathscr{H}_1) = \mathbb{P}(z \leq 1,64|\mathscr{H}_1) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(m; 1) \leq 1,64)$ où $m = \sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0)/\sigma = \sqrt{20}(6,50 - 6,25)/2 = 0,56$. Ainsi, $\beta \approx 0,86$: M. Li a 86% de chances de ne pas rejeter $\mathscr{H}_0$ alors qu'il le devrait.

4. Déterminez et interprétez la puissance du test.

   $\gamma = \mathbb{P}(\mathscr{H}_1|\mathscr{H}_1) = 1 - \beta \approx 0,14$: M. Li a 14% de chances de rejeter $\mathscr{H}_0$ à juste titre.

Exercice 3. *(Test unilatéral/bilatéral de comparaison d'une moyenne à une valeur de référence lorsque la variance de la population est connue)*

La taille moyenne d'un échantillon de dix Suisses vaut 176 cm et la variance des tailles dans la population helvétique est 100 cm^2.

1. (a) Doit-on rejeter au seuil 5% que la taille moyenne des Suisses est égale à 170 cm ?
   - $\mathscr{H}_0 : \mu = 170$ contre $\mathscr{H}_1 : \mu \neq 170$
   - Statistique de Test (SdT) : $z = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)/\sigma = \sqrt{10} \times (176 - 170)/10 \approx 1,9$
   - Zone de Rejet (ZdR) à 5% : $|z| > z_{1-0,05/2} = z_{0,975} = 1,96$
   - Décision : on ne rejette pas $\mathscr{H}_0$ au seuil de 5%.

   (b) Déterminez et interprétez la p-valeur du test.

   $p_{\text{val}} = 2 \times \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 1,9) \approx 0,057$: l'hypothèse $\mathscr{H}_0$ est rejetée si et seulement si le seuil de significativité est supérieur à 5,7%.

2. (a) Doit-on rejeter au seuil 5% que la taille moyenne des Suisses est inférieure à 170 cm ?
   - $\mathscr{H}_0 : \mu \leq 170$ contre $\mathscr{H}_1 : \mu > 170$
   - Statistique de Test (SdT) : $z = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)/\sigma = \sqrt{10} \times (176 - 170)/10 \approx 1,9$
   - Zone de Rejet (ZdR) à 5% : $z > z_{1-0,05} = z_{0,95} = 1,64$
   - Décision : on rejette $\mathscr{H}_0$ au seuil de 5%.

   (b) Déterminez et interprétez la p-valeur du test.

   $p_{\text{val}} = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 1,9) \approx 0,029$: l'hypothèse $\mathscr{H}_0$ est rejetée si et seulement si le seuil de significativité est supérieur à 2,9%.

Exercice 4. *(Test bilatéral/unilatéral de comparaison d'une moyenne à une valeur de référence lorsque la variance de la population est inconnue.)*

Seize Français interrogés au hasard disent épargner : 100, 200, 250, 500, 300, 250, 200, 150, 300, 250, 150, 150, 100, 100, 150 et 200 euros par mois.

1. (a) Au seuil 5%, doit-on rejeter l'hypothèse : les Français épargnent 160 euros par mois en moyenne ?
   - $\mathscr{H}_0 : \mu = 160$ contre $\mathscr{H}_1 : \mu \neq 160$
   - Statistique de Test (SdT) : $t = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)/s' = \sqrt{16} \times (209,375 - 160)/102,011 \approx 1,94$
   - Zone de Rejet (ZdR) à 5% : $|t| > t_{15;1-0,05/2} = t_{15;0,975} = 2,13$
   - Décision : on ne rejette pas $\mathscr{H}_0$ au seuil de 5%.

(b) Déterminez et interprétez la p-valeur du test.
$p_{\text{val}} = 2 \times (1 - \mathbb{P}(\mathscr{T}_{15} \leq 1,94)) \approx 0,072$: l'hypothèse $\mathscr{H}_0$ est rejetée si et seulement si le seuil de significativité est supérieur à $7,2\%$.

2. (a) Au seuil 5%, doit-on rejeter l'hypothèse : les Français épargnent au plus 160 euros par mois en moyenne ?
- $\mathscr{H}_0 : \mu \leq 160$ contre $\mathscr{H}_1 : \mu > 160$
- Statistique de Test (SdT) : $t = \sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)/s' = \sqrt{16} \times (209,375 - 160)/102,011 \approx 1,94$
- Zone de Rejet (ZdR) à 5% : $t > t_{15;1-0,05} = t_{15;0,95} = 1,75$
- Décision : on rejette $\mathscr{H}_0$ au seuil de 5%.

(b) Déterminez et interprétez la p-valeur du test.
$p_{\text{val}} = (1 - \mathbb{P}(\mathscr{T}_{15} \leq 1,94)) \approx 0,036$: l'hypothèse $\mathscr{H}_0$ est rejetée si et seulement si le seuil de significativité est supérieur à $3,6\%$.

Exercice 5. *(Test bilatéral/unilatéral de comparaison d'une proportion à une valeur de référence.)*

60% des usagers de la SNCF sont satisfaits, selon une enquête récente. Or, on observe treize usagers satisfaits parmi trente voyageurs interrogés au hasard.

1. (a) Au seuil 5%, doit-on rejeter le résultat de l'enquête ?
- $\mathscr{H}_0 : p = p_0 = 0,6$ contre $\mathscr{H}_1 : p \neq p_0 = 0,6$
- Statistique de Test (SdT) : $z = \sqrt{n}(f - p_0)/\sqrt{p_0(1-p_0)} = \sqrt{30} \times (13/30 - 0,6)/\sqrt{0,6 \times 0,4} \approx -1,86$
- Zone de Rejet (ZdR) à 5% : $|z| > z_{1-0,05/2} = z_{0,975} = 1,96$
- Décision : on ne rejette pas $\mathscr{H}_0$ au seuil de 5%.

(b) Déterminez et interprétez la p-valeur du test.
$p_{\text{val}} = 2 \times (1 - \mathbb{P}(\mathscr{N}(0;1) \leq 1,86)) \approx 0,063$: l'hypothèse $\mathscr{H}_0$ est rejetée si et seulement si le seuil de significativité est supérieur à $6,3\%$.

2. (a) Au seuil 5%, doit-on rejeter l'hypothèse : au moins 60% des usagers de la SNCF sont satisfaits ?
- $\mathscr{H}_0 : p \geq p_0 = 0,6$ contre $\mathscr{H}_1 : p < p_0 = 0,6$
- Statistique de Test (SdT) : $z = \sqrt{n}(f - p_0)/\sqrt{p_0(1-p_0)} = \sqrt{30} \times (13/30 - 0,6)/\sqrt{0,6 \times 0,4} \approx -1,86$
- Zone de Rejet (ZdR) à 5% : $z < z_{0,05} = -1,64$
- Décision : on rejette $\mathscr{H}_0$ au seuil de 5%.

(b) Déterminez et interprétez la p-valeur du test.
$p_{\text{val}} = \mathbb{P}(\mathscr{N}(0;1) \leq -1,86)) \approx 0,031$: l'hypothèse $\mathscr{H}_0$ est rejetée si et seulement si le seuil de significativité est supérieur à $3,1\%$.

Exercice 6. *(Test bilatéral/unilatéral de comparaison de deux moyennes lorsque les variances sont connues.)*

Neuf placements de type A donnent des intérêts annuels de 2%, 0,3%, 4,2%, 6,3%, 9,6%, 4,3%, 10,2%, 11%, 12,4%. Onze placements de type B donnent des intérêts de 4,3%, 6,3%, 8%, 11,3%, 12,3%, 8%, 2,6%, 14,7%, 5,7%, 13,1%, 16%. L'écart-type des intérêts annuels est de 4,5% pour le placement de type A et de 4% pour le placement de type B.

1. (a) Au seuil 5%, doit-on rejeter l'hypothèse : l'intérêt moyen est le même pour les deux types de placements ?
- $\mathscr{H}_0 : \mu_{\text{A}} = \mu_{\text{B}}$ contre $\mathscr{H}_1 : \mu_{\text{A}} \neq \mu_{\text{B}}$
- Statistique de Test (SdT) : $z = (\bar{x}_{\text{A}} - \bar{x}_{\text{B}})/\sqrt{\sigma_{\text{A}}^2/n_{\text{A}} + \sigma_{\text{B}}^2/n_{\text{B}}} = (6,7 - 9,3)/\sqrt{4,5^2/9 + 4^2/11} \approx -1,35$
- Zone de Rejet (ZdR) à 5% : $|z| > z_{1-0,05/2} = z_{0,975} = 1,96$
- Décision : on ne rejette pas $\mathscr{H}_0$ au seuil de 5%.

(b) Déterminez et interprétez la p-valeur du test.
$p_{\text{val}} = 2 \times (1 - \mathbb{P}(\mathscr{N}(0;1) \leq 1,35)) \approx 0,177$: l'hypothèse $\mathscr{H}_0$ est rejetée si et seulement si le seuil de significativité est supérieur à $17,7\%$.

2. (a) Au seuil 10%, doit-on rejeter l'hypothèse : les placements A sont plus rentables que les placements B ?
- $\mathscr{H}_0 : \mu_{\text{A}} \geq \mu_{\text{B}}$ contre $\mathscr{H}_1 : \mu_{\text{A}} < \mu_{\text{B}}$
- Statistique de Test (SdT) : $z = (\bar{x}_{\text{A}} - \bar{x}_{\text{B}})/\sqrt{\sigma_{\text{A}}^2/n_{\text{A}} + \sigma_{\text{B}}^2/n_{\text{B}}} = (6,7 - 9,3)/\sqrt{4,5^2/9 + 4^2/11} \approx -1,35$
- Zone de Rejet (ZdR) à 10% : $z < z_{0,10} = -1,28$
- Décision : on rejette $\mathscr{H}_0$ au seuil de 10%.

(b) Déterminez et interprétez la p-valeur du test.
$p_{\text{val}} = \mathbb{P}(\mathscr{N}(0;1) \leq -1,35) \approx 0,089$: l'hypothèse $\mathscr{H}_0$ est rejetée si et seulement si le seuil de significativité est supérieur à $8,9\%$.

Exercice 7. *(Test bilatéral de comparaison de deux moyennes lorsque les écarts-types sont (i) inconnus ou (ii) inconnus mais égaux.)*

On observe une durée de vie moyenne de $22,4 \times 10^3$ heures (resp. $23,6 \times 10^3$ heures) parmi quarante disques durs de type A (resp. parmi trente disques de type B) avec un écart-type corrigé de $2,8 \times 10^3$ heures (resp. $3,1 \times 10^3$ heures).

La durée de vie moyenne est-elle différente pour les disques durs de types A et B ? Vous répondrez par un test bilatéral au niveau 10% en considérant successivement (i) que les écarts-types des durées de vie des disques A et B sont inconnus puis (ii) que ces écarts-types sont inconnus mais égaux.

(i) - $\mathscr{H}_0 : \mu_\mathrm{A} = \mu_\mathrm{B}$ contre $\mathscr{H}_1 : \mu_\mathrm{A} \neq \mu_\mathrm{B}$

- Statistique de Test (SdT) : $z = (\bar{x}_\mathrm{A} - \bar{x}_\mathrm{B})/\sqrt{s'^2_\mathrm{A}/n_\mathrm{A} + s'^2_\mathrm{B}/n_\mathrm{B}} = (22,4\times10^3 - 23,6\times10^3)/\sqrt{2,8^2 \times 10^6/40 + 3,1^2 \times 10^6/30} \approx -1,67$

- Zone de Rejet (ZdR) à 10% : $|z| > z_{1-0,10/2} = z_{0,95} = 1,64$

- Décision : la valeur observée de la statistique de test est trop proche de la valeur critique associée au seuil de 10% pour que l'on décide de rejeter ou non $\mathscr{H}_0$.

(ii) - $\mathscr{H}_0 : \mu_\mathrm{A} = \mu_\mathrm{B}$ contre $\mathscr{H}_1 : \mu_\mathrm{A} \neq \mu_\mathrm{B}$

- Statistique de Test (SdT) : $t = (\bar{x}_\mathrm{A} - \bar{x}_\mathrm{B})/\sqrt{(1/n_\mathrm{A} + 1/n_\mathrm{B}) \times [(n_\mathrm{A}-1)s'^2_\mathrm{A} + (n_\mathrm{B}-1)s'^2_\mathrm{B}]/(n_\mathrm{A} + n_\mathrm{B} - 2)} = (22,4 \times 10^3 - 23,6 \times 10^3)/\sqrt{(1/40 + 1/30) \times [39 \times 2,8^2 \times 10^6 + 29 \times 3,1^2 \times 10^6]/(40 + 30 - 2)} \approx -1,69$

- Zone de Rejet (ZdR) au seuil 10% : $|t| > t_{68;1-0,10/2} = t_{68;0,95} = 1,67$

- Décision : la valeur observée de la statistique de test est trop proche de la valeur critique associée au seuil de 10% pour que l'on décide de rejeter ou non $\mathscr{H}_0$.

Exercice 8. *(Test unilatéral de comparaison de deux moyennes lorsque les variances sont inconnues.)*

Voici la moyenne et l'écart-type (corrigé) des rendements de deux échantillons de parcelles de riz situées en Casamance et traitées avec ou sans engrais.

nbre de parcelles	engrais	moyenne (q/ha)	écart-type (q/ha)
31	oui	88,3	15,7
31	non	79,2	10,8

En supposant que la variance des rendements est la même avec et sans engrais, doit-on rejeter au seuil de significativité de 5% l'hypothèse : les engrais sont sans effets sur le rendement moyen des parcelles de riz de Casamance ? Quelle est la p-valeur du test ?

- $\mathscr{H}_0 : \mu_\mathrm{A} \leq \mu_\mathrm{B}$ contre $\mathscr{H}_1 : \mu_\mathrm{A} > \mu_\mathrm{B}$
- Statistique de Test (SdT) : $t = (\bar{x}_\mathrm{A} - \bar{x}_\mathrm{B})/\sqrt{(1/n_\mathrm{A} + 1/n_\mathrm{B}) \times [(n_\mathrm{A}-1)s'^2_\mathrm{A} + (n_\mathrm{B}-1)s'^2_\mathrm{B}]/(n_\mathrm{A} + n_\mathrm{B} - 2)} = (88,3 - 79,2)/\sqrt{(1/31 + 1/31) \times [30 \times 15,7^2 + 30 \times 10,8^2]/(31 + 31 - 2)} \approx 2,66$
- Zone de Rejet (ZdR) au seuil 5% : $t > t_{60;1-0.05} = t_{60;0.95} = 1,67$
- Décision : au seuil de 5% on rejette $\mathscr{H}_0$.
- p-valeur : $p_\mathrm{val} = \mathbb{P}(\mathscr{T}_{60} > 2,66) \approx 0,005$: l'hypothèse $\mathscr{H}_0$ est rejetée si et seulement si le seuil de significativité est supérieur à $0,5\%$.
