Université Côte d'Azur — Année 2023/2024

M1 MF-MPA / IM — Semestre 2

Optimisation et Éléments Finis

Soutien n°1

Partie 1 : Calcul différentiel

Exercice 1.1 : dérivée directionnelle
En utilisant la définition de la dérivée directionnelle, déterminer dans chacun des cas ci-dessous si la fonction f admet une dérivée au point a suivant le vecteur $\boldsymbol{v}$.

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = 2x^2 + xy, \end{aligned}$$

en $a = (0,1)$ et $\boldsymbol{v} = (1,1)$;

2.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0, & \end{cases} \end{aligned}$$

en $a = (0,0)$ et $\boldsymbol{v} = (1,1)$.

Exercice 1.2 : dérivées partielles
Étudier l'existence des dérivées partielles et calculer ces dérivées partielles aux points où elles existent pour les fonctions dont les expressions sont les suivantes :

$$f(x,y) = x^2 y - \mathrm{e}^{xy}, \quad v(x,y) = \big(y^5 x^2,\ \ln(x+y)\big).$$

Exercice 1.3 : différentielle
En utilisant la définition, montrer que les applications d'expressions suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle aux points où celle-ci existe :

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad g(x,y,z) = xy^2 + 2z^3.$$

Exercice 1.4 : gradient
En utilisant les opérations usuelles sur les fonctions différentiables, étudier la différentiabilité et calculer les différentielles et le gradient des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x,y) = \ln\big(x + y^2\big), \qquad g(x,y,z) = xy^2 \mathrm{e}^{xz^3}.$$

Exercice 1.5 : fonctions convexes
1. Pour tous nombres réels a et b, montrer que : $2ab \leq a^2 + b^2$. En déduire, en utilisant la définition de la convexité, que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. En utilisant que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

3. En utilisant que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante. En utilisant la définition de la convexité, montrer que la fonction $\Psi \circ \varphi$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : parties ouvertes, fermées, convexes

Exercice 2.1 : ensembles ouverts
En utilisant la caractérisation des ouverts comme **images réciproques de parties ouvertes par des applications continues**, montrer que chacun des sous-ensembles suivants est ouvert :

$$\mathscr{Z} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 1\right\}, \quad \mathscr{T} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y < 4\right\}, \quad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 9\right\},$$
$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x > y + 1\right\}, \quad \Lambda = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - y^2 < 1\right\}, \quad \Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\}.$$

Exercice 2.2 : ensembles fermés
En appliquant la caractérisation des fermés comme **images réciproques de parties fermées par des applications continues**, montrer que chacun des sous-ensembles suivants est fermé :

$$\mathscr{K} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 1\right\}, \quad \mathscr{L} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y = 4\right\}, \quad \mathscr{M} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 9\right\},$$
$$\mathscr{N} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = 3\right\}, \; \mathscr{O} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - z = 4\right\}, \; \mathscr{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{4} + (z-1)^2 = 1\right\},$$
$$\mathscr{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 1\right\}, \quad \mathscr{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y \leq 4\right\}, \quad \mathscr{S} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ x + y - 1 \leq 0\right\},$$
$$\mathscr{U} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \leq 3\right\}, \; \mathscr{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y - z \geq 4\right\},$$
$$\mathscr{W} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y \leq 0,\ x^2 + \frac{y^2}{4} + (z-1)^2 = 1\right\}.$$

Exercice 2.3 : ensembles convexes
Montrer que chacun des sous-ensembles suivants est **convexe** :

$$\mathscr{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 1\right\}, \quad \mathscr{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y = 2\right\}, \quad \mathscr{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 9\right\},$$
$$\mathscr{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = 2\right\}, \; \mathscr{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y - z = 2\right\}, \; \mathscr{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{9} + (y-2)^2 + z^2 \leq 1\right\},$$
$$\mathscr{G} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 1\right\}, \; \mathscr{H} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y \leq 4\right\}, \; \mathscr{I} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y - 1 \leq 0\right\},$$
$$\mathscr{J} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y \leq -1\right\}, \; \mathscr{X} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - 2y - z \geq 2\right\},$$
$$\mathscr{Y} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \geq 0,\ x^2 + \frac{y^2}{4} + (z-1)^2 \leq 1\right\}.$$

Partie 3 : Algèbre linéaire

Exercice 3.1 : systèmes linéaires et matrices
Soient x_1, x_2 et x_3 des nombres réels. On considère le système linéaire d'inconnues x_1, x_2 et x_3 suivant :

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 2, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & -6. \end{array} \right.$$

Montrer que ce système (Σ) est équivalent à

$$Ax = b,$$

où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, A est une matrice à coefficients réels et b est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ à déterminer.

Le système (Σ) admet-il une solution ? Si oui, est-elle unique ?