

OPTIMISATION

Prof Adama COULIBALY

UFR de Mathématiques et Informatique,
Université Félix HOUPHOUET-BOIGNY D'ABIDJAN, 22
BP 582 Abidjan 22, Côte d'Ivoire.

28 août 2020

Table des matières

| | | |
|----------|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Introduction à l'optimisation | 3 |
| 1.1 | Introduction et Notations | 3 |
| 1.2 | Notion d'infimum, supremum, minimum, maximum | 3 |
| 1.3 | Programmes mathématiques | 5 |
| 1.3.1 | Définitions et premières propriétés | 5 |
| 1.3.2 | Typologie des programmes mathématiques | 10 |
| 2 | Optimisation d'une variable réelle | 11 |
| 2.1 | Optimisation sur un ouvert | 11 |
| 2.1.1 | Conditions nécessaires d'optimalité locale | 11 |
| 2.1.2 | Condition suffisante d'optimalité du second ordre | 13 |
| 2.1.3 | Une condition nécessaire et suffisante d'optimalité locale | 15 |
| 2.2 | Optimisation sur un compact | 15 |
| 2.3 | Optimisation des fonctions convexes concaves | 16 |
| 2.4 | Fiche pratique de résolution d'un programme d'optimisation | 16 |
| 3 | Optimisation à plusieurs variables sans contraintes | 18 |
| 3.1 | Résultats d'existence et unicité | 18 |
| 3.2 | Conditions d'optimalité | 20 |
| 3.2.1 | Conditions d'optimalité du premier ordre | 20 |
| 3.2.2 | Conditions d'optimalité du second ordre | 21 |
| 3.3 | Méthodes numériques | 22 |
| 3.3.1 | Algorithmes et vitesse de convergence | 22 |
| 3.3.2 | Méthodes de descente | 23 |
| 3.3.3 | Méthodes de directions conjuguées | 24 |
| 3.3.4 | Méthode de Newton | 26 |
| 3.3.5 | Algorithmes de recherche linéaire | 27 |
| 4 | Optimisation avec contraintes | 32 |
| 4.1 | Résultats d'existence et d'unicité | 32 |
| 4.2 | Cas des contraintes d'égalité | 34 |
| 4.3 | Problème avec contraintes d'inégalité | 36 |
| 4.4 | Problème avec contraintes d'égalité et d'inégalité | 36 |
| 5 | Notion de dualité | 39 |
| 5.1 | Généralités | 39 |
| 5.1.1 | Définitions | 39 |
| 5.1.2 | Liens entre problèmes primal et dual | 40 |

| | | |
|-----|--------------------------------|----|
| 5.2 | Dualité lagrangienne | 41 |
|-----|--------------------------------|----|

Chapitre 1

Introduction à l'optimisation

1.1 Introduction et Notations

L'optimisation, c'est-à-dire les techniques permettant de chercher les minima ou les maxima de fonctions ou de fonctionnelles intervient dans pratiquement tous les processus de modélisation actuels. Qu'il s'agisse de problèmes directs (ajustement de données, contrôle optimal, résolution des systèmes linéaires par moindres carrés, etc) ou inverses (identification de paramètres), il est rare qu'un problème d'optimisation plus ou moins complexe n'intervienne pas à un stade donné de la modélisation et/ou de la simulation.

Le cadre général de ce cours est un espace vectoriel réel de dimension n . On peut donc sans perdre de généralités considérer l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^n .

Nous considérons les notations suivantes.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\|\cdot\|$ désigneront respectivement le produit scalaire usuel et la norme euclidienne de \mathbb{R}^n .

1.2 Notion d'infimum, supremum, minimum, maximum

On définit ici les notions d'infimum, de supremum, minimum et de maximum qui sont des prérequis pour les démonstrations des résultats d'existence et d'unicité d'extrema d'une fonction donnée.

Définition 1.2.1 (Minorant/Majorant) Soit X une partie de \mathbb{R} .

$m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est un minorant de X si et seulement si

$$\forall x \in X, \quad m \leq x.$$

$M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est un majorant de X si et seulement si

$$\forall x \in X, \quad x \leq M.$$

Définition 1.2.2 (Infimum/Supremum) Soit X une partie de \mathbb{R} .

1) Si X est non vide et admet des minorants, par définition l'infimum de X est le plus grand des minorants de X . On le note $\inf(X)$ ou $\inf_{x \in X}(x)$.

Si X est non vide et n'admet pas de minorants, par convention, l'infimum de X est égal à $-\infty$.

Si $X = \emptyset$, par convention son infimum est égal à $+\infty$: $\inf(\emptyset) = +\infty$

2) Si X est non vide et admet des majorants, par définition le supremum de X noté $\sup(X)$ ou $\sup_{x \in X}(x)$ est le plus petit des majorants de X .

Si X est non vide et n'admet pas de majorants, par convention, le supremum de X est égal à $+\infty$.

Si $X = \emptyset$, par convention $\sup(\emptyset) = -\infty$.

Ces notions sont aussi caractérisées par :

Proposition 1.2.1 1) Si X est non vide et admet des minorants,

$$m = \inf(X) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x & \forall x \in X \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X : m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon. \end{cases}$$

2) Si X est non vide et admet des majorants,

$$M = \sup(X) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq M & \forall x \in X \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X : M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M. \end{cases}$$

On a le résultat suivant.

Proposition 1.2.2 Pour tout $X \subset \mathbb{R}$, on a $\sup_{x \in X}(x) = -\inf_{x \in X}(-x)$

Définition 1.2.3 (Suite minimisante/Suite maximisante) Soit X une partie non vide de \mathbb{R} .

On appelle suite minimisante de X , toute suite $\{x_k\}$ d'éléments de X telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \inf(X).$$

On appelle suite maximisante de X , toute suite $\{x_k\}$ d'éléments de X telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \sup(X).$$

On montre que

Proposition 1.2.3 Si X est une partie non vide de \mathbb{R} , alors il existe toujours une suite minimisante de X et une suite maximisante de X .

Preuve : Montrons d'abord l'existence d'une suite minimisante. Comme X est non vide, alors nécessairement $\inf(X) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

i) $\inf(X) \in \mathbb{R}$. D'après la proposition (1.2.1)

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \exists x_k \in X : \inf(X) \leq x_k \leq \inf(X) + \frac{1}{k}.$$

La suite $\{x_k\}$ ainsi construite converge vers $\inf(X)$.

ii) $\inf(X) = -\infty$. X admet seulement $-\infty$ comme minorant. Par conséquent pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_k \in X$ tel que

$$x_k \leq -k$$

La suite $\{x_k\}$ ainsi construite converge vers $-\infty$.

On montre de façon analogue l'existence d'une suite maximisante. □

Définition 1.2.4 (Minimum/Maximum) Soit X une partie de \mathbb{R} .

On dit que X a un minimum si $\inf(X) \in X$. Dans ce cas, on note $\min(X) = \inf(X)$.

On dit que X a un maximum si $\sup(X) \in X$. Dans ce cas, on note $\max(X) = \sup(X)$.

1.3 Programmes mathématiques

1.3.1 Définitions et premières propriétés

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D_f et C une partie de D_f .

Définition 1.3.1 On dit que la fonction f atteint un minimum sur C au point $x^* \in C$ si on a :

$$\forall x \in C, \quad f(x^*) \leq f(x).$$

Dans ce cas, $\alpha = f(x^*)$ est dit valeur minimale de f sur C .

De la même manière, on dit que la fonction f atteint un maximum sur C au point $x^* \in C$ si on a :

$$\forall x \in C, \quad f(x^*) \geq f(x).$$

Dans ce cas, $\beta = f(x^*)$ est dit valeur maximale de f sur C .

Minimiser la fonction f sur C consiste à déterminer la valeur minimale (le minimum) de f sur C ainsi que les point de C où f atteint cette valeur minimale. Dans ce cas on dit qu'on a résolu un programme de minimisation de f sur C . On le note symboliquement :

$$\min_{x \in C} f(x).$$

Les points où la valeur minimale est atteinte (on dit aussi les points qui réalisent le minimum) sont les solutions du programme de minimisation de f sur C . On note cet ensemble $\arg \min\{f(x) : x \in C\}$. Compte tenu de ce qui précède, on a :

$$\arg \min\{f(x) : x \in C\} = \{x^* \in C : \forall x \in C, \quad f(x^*) \leq f(x)\}.$$

Maximiser la fonction f sur C consiste à déterminer la valeur maximale (le maximum) de f sur C ainsi que le ou les point(s) de C s'ils existent où f atteint cette valeur maximale. Dans ce cas on dit qu'on a résolu un programme de maximisation de f sur C et on le note symboliquement :

$$\max_{x \in C} f(x).$$

Les points où la valeur maximale est atteinte (on dit aussi les points qui réalisent le maximum) sont les solutions optimales du programme de maximisation de f sur C . On note cet ensemble $\arg \max\{f(x) : x \in C\}$. On a :

$$\arg \max\{f(x) : x \in C\} = \{x^* \in C : \forall x \in C, \quad f(x^*) \geq f(x)\}.$$

Optimiser f sur C consiste à minimiser et à maximiser la fonction f sur C . On le note symboliquement :

$$\text{ext}_{x \in C} f(x) \text{ ou } \text{opt}_{x \in C} f(x).$$

Etant donné le programme mathématique "optimiser f sur C ", les éléments de C sont appelés solutions réalisables ou admissibles ou variables de commande ou variables de contrôle du programme et la fonction f , fonction-objectif ou critère du programme. La valeur minimale ou maximale selon qu'il s'agisse d'un problème de minimisation ou de maximisation est dite valeur optimale. Les points de C qui réalisent cet optimum sont dits solutions optimales.

Exemple 1.3.1

1) Considérons le programme de minimisation "minimiser $f(x) = x^2 + 1$ sur \mathbb{R} ". On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 1 = f(0).$$

Donc la fonction a un minimum en $x^* = 0$.

2) Le programme de maximisation "maximiser $f(x) = x + 3$ sur \mathbb{R} " n'a pas de solution. En effet supposons que la fonction f atteigne son maximum en un point x^* . On a alors

$$\forall x \in C, \quad f(x^*) \geq f(x).$$

Or la fonction f est strictement croissante. Ce qui entraîne que :

$$\forall x > x^*, \quad f(x) > f(x^*).$$

Ce qui est contradictoire.

On a alors

$$\arg \max \{f(x) = x + 3 : x \in \mathbb{R}\} = \emptyset.$$

On montre de même que le programme de minimisation de f sur \mathbb{R} n'a pas de solution.

A priori, un problème d'optimisation peut n'admettre aucune solution ou en admettre au moins une. En toute généralité, aucun argument mathématique ne garantit l'existence de solution(s). On dispose cependant d'une condition suffisante grâce au théorème de Weierstrass qui ne concerne que les fonctions continues sur un compact de \mathbb{R}^n .

La première idée qui vient à l'esprit est de calculer les valeurs que prend la fonction f pour toutes les valeurs prises par les arguments puis de repérer les plus grandes et les plus petites valeurs prises par les images. Ce n'est évidemment pas la bonne option si les arguments peuvent prendre une infinité de valeurs.

Si la fonction à optimiser est une fonction d'une variable réelle, on peut toujours construire le tableau de variations ou tracer la fonction dans le plan. C'est fastidieux dans la mesure où on ne s'intéresse qu'aux optima et à eux seuls.

Si la fonction à optimiser est à deux variables réelles, on peut à la rigueur demander à un logiciel approprié de tracer sa surface représentative ou des courbes de niveau et conclure au vu des graphes. Ce peut être parfois utile mais c'est frustrant dans la mesure où on ignore a priori où se trouvent les optima, ce qui entraîne qu'on est en peine de donner toutes les indications au traceur de fonction.

Quoiqu'il en soit, dès que la fonction a plus de trois variables, les méthodes graphiques ne sont d'aucun secours. Il faut disposer d'une théorie solide pour déterminer les optima. L'optimum peut être global (ou absolu) ou local (ou relatif). Il peut être aussi large ou strict (ou unique).

Résoudre le programme de minimisation $\min_{x \in C} f(x)$ (respectivement de maximisation $\max_{x \in C} f(x)$) consiste à déterminer les points $x^* \in C$ tels que $\forall x \in C, f(x^*) \leq f(x)$ (respectivement $f(x^*) \geq f(x)$).

Dans ce cas on dit f passe par un minimum global (respectivement un maximum global) en x^* sur C . Et x^* est alors dite solution optimale globale du programme d'optimisation.

Outre les solutions optimales globales, on distingue aussi les solutions optimales locales définies comme suit :

Définition 1.3.2 *Un élément $x^* \in C$ est dit point de minimum local (respectivement de maximum local) de f sur C s'il existe un voisinage V de x^* tel que :*

$$\forall x \in C \cap V, \quad f(x) \geq f(x^*) \text{ (respectivement } f(x) \leq f(x^*) \text{)}.$$

Dans la suite on distinguera systématiquement les optima locaux appelés également optima relatifs et les optima globaux appelés également optima absolus. Tout optimum global a évidemment les propriétés d'un optimum local alors que la réciproque est fausse ; un optimum local peut ne pas être un optimum global.

Très souvent la nature des problèmes d'optimisation conduit à privilégier la recherche d'un optima globaux plutôt que des optima locaux. On peut penser que pour détecter les minima (resp. maxima) globaux il suffit de déterminer les minima (resp. maxima) locaux puis de repérer le plus petit (resp. le plus grand). Cette stratégie est logique mais parfois difficile à mettre en œuvre surtout dans les problèmes théoriques.

Dans le cas convexe le problème ne se pose pas comme indiqué dans le théorème ci-dessous.

Théorème 1.3.1 *Si C est convexe et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe (respectivement concave) sur C , alors :*

i) tout minimum (resp. maximum) local de f sur C est un minimum (resp. maximum) global de f sur C ,

ii) l'ensemble des solutions optimales globales $\arg \min\{f(x) : x \in C\}$ (resp. $\arg \max\{f(x) : x \in C\}$) est convexe (il peut être vide).

Preuve :

On donne la démonstration pour f convexe.

1) Montrons d'abord par l'absurde que tout minimum local est nécessairement global.

Soit x^* un minimum local qui n'est pas un minimum global. Il existe un $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in B(x^*, r) \cap C, \quad f(x) \geq f(x^*).$$

Comme x^* n'est pas minimum global, il existe x^{**} tel que $f(x^*) < f(x^{**})$.

Puisque C est convexe alors,

$$\forall \lambda \in]0, 1[, (1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**} \in C.$$

Et puisque f est convexe sur C , on aura :

$$f((1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**}) \leq (1 - \lambda)f(x^*) + \lambda f(x^{**}),$$

ce qui entraîne que

$$f((1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**}) < f(x^*).$$

Choisissons λ proche de 0 de sorte que $(1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**}$ soit dans $B(x^*, r)$. Alors, on a :

$$f((1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**}) < f(x^*).$$

Ce qui contredit le fait que f atteint un minimum local en x^* sur la boule ouverte $B(x^*, r)$.

2) Considérons à présent l'ensemble des solutions optimales

$$A = \arg \min\{f(x) : x \in C\}$$

Si A est vide, alors c'est terminé, il est convexe.

Si A est réduit à un singleton, là aussi c'est terminé, il est convexe.

Supposons que A a plus d'un élément, alors notons x^* et x^{**} deux éléments distincts quelconques. Si α est la valeur optimale, on a alors :

$$f(x^*) = f(x^{**}) = \alpha.$$

Comme f est convexe, on a

$$\forall \lambda \in]0, 1[, \alpha \leq f((1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**}) \leq (1 - \lambda)f(x^*) + \lambda f(x^{**}) = \alpha.$$

Donc on a

$$\forall \lambda \in]0, 1[, f((1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**}) = \alpha.$$

Par suite

$$(1 - \lambda)x^* + \lambda x^{**} \in A, \quad \forall \lambda \in]0, 1[.$$

D'où le théorème. □

Définition 1.3.3 (Optimum large) La fonction f atteint un minimum (respectivement : un maximum) global au sens large en x^* sur C si et seulement si :

$$\forall x \in C, \quad f(x) \geq f(x^*) \text{ (respectivement } f(x) \leq f(x^*) \text{)}.$$

La fonction f atteint un minimum (respectivement : un maximum) local au sens large en x^* sur C si et seulement s'il existe un voisinage V de x^* tel que :

$$\forall x \in C \cap V, \quad f(x) \geq f(x^*) \text{ (respectivement } f(x) \leq f(x^*) \text{)}.$$

Définition 1.3.4 (Optimum strict) La fonction f atteint un minimum (respectivement : un maximum) global strict en x^* sur C si et seulement si :

$$\forall x \in C, x \neq x^*, \quad f(x) > f(x^*) \text{ (respectivement } f(x) < f(x^*) \text{)}.$$

La fonction f atteint un minimum (respectivement : un maximum) local strict en x^* sur C si et seulement s'il existe un voisinage V de x^* tel que :

$$\forall x \in C \cap V, x \neq x^*, \quad f(x) > f(x^*) \text{ (respectivement } f(x) < f(x^*) \text{)}.$$

L'hypothèse de convexité ou de concavité stricte de la fonction-objectif sur un domaine convexe garantit l'unicité de la solution globale s'il y en a une.

Théorème 1.3.2 Si C est convexe et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe (respectivement strictement concave) sur C , alors : l'ensemble des solutions optimales globales $\arg \min\{f(x) : x \in C\}$ (resp. $\arg \max\{f(x) : x \in C\}$) est soit vide soit réduit à un singleton.

On donne à présent deux propriétés très générales des problèmes d'optimisation. En pratique elles peuvent permettre de transformer un problème en un autre problème parfaitement équivalent qui peut être plus simple à résoudre.

Proposition 1.3.1 On a :

$$\max_{x \in C} f(x) = - \min_{x \in C} (-f)(x).$$

Autrement dit la fonction f atteint un maximum sur C en un point x^* si et seulement si la fonction $-f$ atteint un minimum sur C en x^* .

Preuve : Si f atteint un maximum sur C en un point x^* , alors par définition,

$$\forall x \in C, \quad f(x) \leq f(x^*).$$

En multipliant par -1 les deux membres de l'inégalité, on a :

$$\forall x \in C, \quad -f(x) \leq -f(x^*).$$

Ce qui signifie que $(-f)$ atteint un minimum en x^* .

La réciproque est immédiate □

D'après cette proposition, les résultats concernant les programmes de maximisation peuvent être transposés dans les programmes de minimisation, à condition bien entendu de changer le signe de la fonction-objectif. Par conséquent, tout programme mathématique peut se ramener à un programme de minimisation.

Théorème 1.3.3 *Soit le programme de minimisation "minimiser f sur C " dans lequel l'ensemble-image $f(C)$ est un intervalle de \mathbb{R} .*

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante sur $f(C)$.

La fonction f atteint un minimum sur C en un point x^ si et seulement si la fonction $\varphi \circ f$ atteint un minimum sur C en x^* .*

Preuve :

Condition nécessaire :

Comme x^* minimise f sur C , on a :

$$\forall x \in C, \quad f(x^*) \leq f(x).$$

Ce qui entraîne (puisque φ est croissante sur $f(C)$) :

$$\forall x \in C, \quad \varphi \circ f(x^*) \leq \varphi \circ f(x).$$

Donc x^* minimise $\varphi \circ f$ sur C .

Condition suffisante :

Si x^* minimise $\varphi \circ f$ sur C , on a :

$$\forall x \in C, \quad \varphi \circ f(x^*) \leq \varphi \circ f(x).$$

Puisque φ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $f(C)$, elle réalise une bijection de $f(C)$ sur $\varphi(f(C))$ et admet donc une bijection réciproque φ^{-1} définie sur l'intervalle $\varphi(f(C))$ et à valeur dans $f(C)$. Cette bijection réciproque a même sens de variation que φ . Alors pour tout $x \in C$:

$$\varphi \circ f(x^*) \leq \varphi \circ f(x)$$

entraîne que :

$$\varphi^{-1}(\varphi \circ f(x^*)) \leq \varphi^{-1}(\varphi \circ f(x))$$

c'est-à-dire :

$$f(x^*) \leq f(x),$$

donc x^* minimise f sur C . □

Remarque 1.3.1 *Ce résultat reste valable pour les problèmes de maximisation.*

Ce théorème doit être utilisé pour rendre un problème d'optimisation plus maniable. Par exemple il est plus facile de résoudre le problème "maximiser $f(x, y) = \frac{2}{3} \ln x + \frac{4}{5} \ln y$ sur $\mathbb{R}_+^ \times \mathbb{R}_+^*$ " que celui-ci "maximiser $g(x, y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{4}{5}}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ ".*

1.3.2 Typologie des programmes mathématiques

On distingue plusieurs types de problèmes d'optimisation selon les critères suivants :

- si aucune contrainte ne s'exerce sur les variables de contrôle, alors l'ensemble des commandes admissibles est directement une partie du domaine de définition de la fonction-objectif et on a affaire à un problème d'optimisation libre.

Mais quasiment toujours, l'ensemble des commandes admissibles est défini en compréhension par la donnée d'une liste de contraintes auquel cas il faut résoudre un problème d'optimisation sous contraintes.

Définition 1.3.5 *Un programme mathématique $\text{opt}_{x \in C} f(x)$ est dit libre si $C \subset D_f$ (D_f est le domaine de définition de f) ne traduit aucune contrainte entre les variables de commande.*

A contrario, un programme d'optimisation est non libre ou sous contraintes, si des contraintes s'exercent sur les variables de commande. Il y a deux types de contraintes : des contraintes d'égalité et des contraintes d'inégalité.

Une contrainte d'égalité se présente formellement comme une équation cartésienne du type $h(x) = 0$ où h est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Elle signale une liaison entre les variables de commande.

Une contrainte d'inégalité se présente comme une inéquation du type $g(x) \leq 0$ où g est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Elle signale une liaison entre les variables de commande.

Le programme se présente donc sous la forme :

$$\begin{array}{ll} \text{opt} & f(x) \\ \left\{ \begin{array}{l} g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{array} \right. & \end{array}$$

Si f , les g_i et h_j sont toutes des applications affines, le programme est dit linéaire et dans le contraire, on parle de programme non linéaire. Un programme non linéaire est quadratique, si f est quadratique, et les fonctions g_i et h_j sont des applications affines,

Chapitre 2

Optimisation d'une variable réelle

Ce chapitre est familier pour tous ceux qui ont appris à étudier une fonction d'une variable réelle en suivant une méthode "mécanique" et qui savent détecter les points singuliers que sont les maxima et les minima locaux à coup d'annulation de dérivée première et d'examen du signe de la dérivée seconde. Tant mieux car ce bagage constitue sans aucun doute le coeur de la théorie de l'optimisation ou, la base sur laquelle viendront s'appuyer les développements ultérieurs quand la fonction-objectif sera définie sur \mathbb{R}^n .

2.1 Optimisation sur un ouvert

Soit f définie sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[$ avec $a < b$.

Théorème 2.1.1 *f admet un maximum local en x^* sur I si et seulement si f est croissante à gauche de x^* et décroissante à droite de x^* .*

f admet un minimum local en x^ sur I si et seulement si f est décroissante à gauche de x^* et croissante à droite de x^* .*

Preuve :

Démontrons ce résultat dans le cas d'un maximum local en x^* .

On a par définition : $f(x) \leq f(x^*)$ dans un voisinage $V(x^*)$ de x^* .

Donc pour tout $x \in V(x^*)$, on a $f(x) - f(x^*) \leq 0$.

Si $x > x^*$, on a

$$\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \leq 0$$

et

Si $x < x^*$, on a

$$\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \geq 0.$$

Ainsi, à gauche de x^* , le taux d'accroissement de f entre x et x^* est positif et à droite de x^* , le taux d'accroissement de f entre x^* et x est négatif. \square

2.1.1 Conditions nécessaires d'optimalité locale

Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre

Soit un intervalle ouvert $E =]a, b[$ avec $a < b$ de \mathbb{R} .

Définition 2.1.1 Si f est dérivable en point x^* , on dira qu'il est un point critique ou stationnaire de f s'il vérifie l'équation dite d'Euler : $f'(x) = 0$. On dit aussi point candidat.

Théorème 2.1.2 Soit f définie et dérivable sur l'intervalle ouvert E . Si f admet un extremum local en $x^* \in E$ alors x^* est un point stationnaire de f .

Preuve :

Démontrons ce résultat dans le cas d'un minimum local en x^* .

On a par définition : $f(x) \geq f(x^*)$ dans un voisinage V de x^* .

Pour $x \in V \cap E$ tel que $x > x^*$, alors on a :

$$\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \geq 0. \quad (1)$$

Pour $x \in V \cap E$ tel que $x < x^*$, alors on a :

$$\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \leq 0. \quad (2)$$

Et comme f est dérivable en x^* , on a :

$$f'(x^*) = \lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x > x^*}} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = \lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x < x^*}} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}.$$

Par passage à la limite dans (1), on obtient :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x > x^*}} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \geq 0,$$

soit $f'(x^*) \geq 0$.

De même pour (2) on obtient :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x < x^*}} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \leq 0,$$

soit $f'(x^*) \leq 0$.

Finalement, on obtient $f'(x^*) = 0$.

Pour le cas d'un maximum local, la démonstration est analogue. □

Condition nécessaire d'optimalité du second ordre

Théorème 2.1.3 Soit f définie et deux fois continûment dérivable sur l'intervalle ouvert E .

- Si f admet un maximum local en $x^* \in E$, alors x^* est un point stationnaire de f et on a $f''(x^*) \leq 0$.

Si f admet un minimum local en $x^* \in E$, alors x^* est un point stationnaire de f et on a $f''(x^*) \geq 0$.

Preuve :

Démontrons ce résultat dans le cas d'un maximum local en x^* . D'après la condition d'optimalité du premier ordre, on $f'(x^*) = 0$.

Par définition, comme x^* est un point de maximum local, alors il existe un voisinage $V(x^*)$ de x^* tel que :

$$f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in V(x^*) \cap E.$$

Comme f est deux fois continûment dérivable sur l'intervalle ouvert E , elle admet un développement de Taylor d'ordre 2 sur $V(x^*)$ de x^* qui s'écrit : $\forall x \in V(x^*) \cap E$, il existe c compris entre x et x^* tel que :

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^2 f''(c).$$

Mais comme $f'(x^*) = 0$, cette relation devient :

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^2 f''(c).$$

Posons $x = x^* + h$, on obtient donc :

$$f(x^* + h) = f(x^*) + \frac{1}{2}h^2 f''(c).$$

En posant $c = x^* + \theta h$ (avec θ qui dépend de x et x^* et vérifie $0 < \theta < 1$) on a :

$$f(x^* + h) = f(x^*) + \frac{1}{2}h^2 f''(x^* + \theta h).$$

L'inégalité $f(x) \leq f(x^*)$ équivaut alors à :

$$\frac{1}{2}h^2 f''(x^* + \theta h) \leq 0 \quad \forall h \text{ tel que } x^* + \theta h \in V(x^*) \cap E.$$

Soit encore $f''(x^* + \theta h) \leq 0$.

Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on a $\lim_{h \rightarrow 0} f''(x^* + \theta h) \leq 0$ et puisque f'' est continue en x^* , on en déduit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f''(x^* + \theta h) = f''(\lim_{h \rightarrow 0} (x^* + \theta h)) = f''(x^*) \leq 0.$$

D'où le théorème. □

2.1.2 Condition suffisante d'optimalité du second ordre

Théorème 2.1.4 Soit f définie et deux fois continûment dérivable sur l'intervalle ouvert E .

- Si x^* est un point stationnaire de f avec $f''(x^*) < 0$, alors f admet un maximum local strict en x^* .

- Si x^* est un point stationnaire de f avec $f''(x^*) > 0$, alors f admet un minimum local strict en x^* .

Preuve : Démontrons ce résultat dans le cas d'un maximum. On a donc les hypothèses : $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) < 0$.

On veut montrer qu'il existe un voisinage $V(x^*)$ de x^* dans lequel on a : $f(x) < f(x^*)$ pour tout $x \in V(x^*)$, $x \neq x^*$.

Comme f est deux fois continûment dérivable sur l'intervalle ouvert E , elle admet un développement de Taylor d'ordre 2 en tout point de E .

En x^* et en tenant compte du fait que $f'(x^*) = 0$, on a :

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^2 f''(c)$$

avec c compris entre x et x^* .

Puisque f'' est continue sur E , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \neq x^*$, vérifiant $|x - x^*| < \alpha$, alors $|f''(x) - f''(x^*)| < \varepsilon$, soit encore $f''(x^*) - \varepsilon < f''(x) < f''(x^*) + \varepsilon$.

Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < -f''(x^*)$ (cela est possible car on a $f''(x^*) > 0$); il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x^*| < \alpha \Rightarrow f''(x^*) - \varepsilon < f''(x) < f''(x^*) + \varepsilon$$

donc $f''(x) < 0$.

Puisque c est compris entre x et x^* , on a : $|c - x^*| \leq |x - x^*| < \alpha < \alpha$, ce qui entraîne $f''(c) < 0$ et par suite si $|x - x^*| < \alpha$ et si $x \neq x^*$ on a : $\frac{1}{2}(x - x^*)^2 f''(c) < 0$ donc

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^2 f''(c) < f''(x^*).$$

On a ainsi montré que pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \varepsilon < -f''(x^*)$, on peut trouver un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x^* - \alpha, x^* + \alpha[\text{ et } x \neq x^*, f(x) < f(x^*).$$

Ce qui signifie que dans un voisinage de demi-longueur α , centré sur x^* , la fonction atteint en x^* un maximum strict. \square

Remarque 2.1.1 *Ce théorème suggère une stratégie de recherche des optima. Dans la résolution pratique des problèmes d'optimisation, la première étape consiste à rechercher les points candidats. La seconde étape est de calculer la valeur de la dérivée seconde en chaque point candidat, ce qui permet de conclure sur leur nature.*

Remarque 2.1.2 *On note que les inégalités caractérisant le signe de la dérivée seconde au point candidat sont strictes alors qu'elles étaient larges dans la condition nécessaire du second ordre. Ainsi la condition nécessaire et la condition suffisante ne font pas une condition nécessaire et suffisante. moralité : quand on a un point candidat x avec $f''(x) = 0$, il ne faut rien conclure sans un examen complémentaire*

Exemple 2.1.1

La fonction f définie par $f(x) = x^2$ a un point candidat $x^* = 0$. En ce point on a : $f''(0) = 2 > 0$. D'après le théorème, f admet un minimum local strict au point 0.

La fonction f définie par $f(x) = x^3$ a un point candidat $x^* = 0$. En ce point on a : $f''(0) = 0$. On ne peut rien conclure à l'existence d'un extremum local en 0.

La fonction f définie par $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 5$ a deux points candidats $x_1^* = -3$ et $x_2^* = -\frac{1}{3}$. On calcule facilement $f''(x_1^*) = f''(-3) = -8$ et $f''(x_2^*) = f''(-\frac{1}{3}) = 8$. Par conséquent la fonction f passe par un maximum local en x_1^* et un minimum local en x_2^* .

2.1.3 Une condition nécessaire et suffisante d'optimalité locale

Cette condition convient aux fonctions définies et indéfiniment continûment dérivable sur un intervalle ouvert E . Elle doit être utilisée quand la dérivée seconde est nulle en un point candidat.

Théorème 2.1.5 *Soit f de classe \mathcal{C}^∞ sur l'ouvert E et soit $x^* \in E$ tel que $f''(x^*) = 0$.*

f admet un maximum local en x^ si et seulement si la première dérivée non nulle au point x^* est d'ordre pair et négative.*

f admet un minimum local en x^ si et seulement si la première dérivée non nulle au point x^* est d'ordre pair et positive.*

Remarque 2.1.3 *En pratique, ce théorème s'applique quand la dérivée seconde en un point candidat est nulle. Il faut dériver la fonction jusqu'à ce qu'une dérivée non nulle au point candidat soit détectée. Si l'ordre de celle-ci est paire, on est en présence d'un optimum : maximum si elle est négative, minimum si elle est positive. Et si son ordre est impair, on est en présence d'un point d'inflexion.*

Exemple 2.1.2

La fonction f définie par $f(x) = x^3$ admet un point d'inflexion en $x^* = 0$ car $f'(0) = f''(0) = 0$ et $f'''(0) = 6$. La première dérivée non nulle au point candidat est d'ordre impair.

La fonction f définie par $f(x) = x^4$ présente un minimum en $x^* = 0$ car $f'(0) = f''(0) = 0 = f'''(0)$ et $f^{(4)}(0) = 24$. La première dérivée non nulle au point candidat est d'ordre pair et est strictement positive.

2.2 Optimisation sur un compact

On s'intéresse ici à l'optimum d'une fonction f sur un intervalle fermé et borné de \mathbb{R} . On a le résultat d'existence suivant.

Théorème 2.2.1 (Théorème de Weierstrass) *Si f est continue sur E un intervalle non vide fermé et borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$, alors f admet au moins un minimum global et un maximum global sur I .*

D'après le théorème de Weierstrass, une fonction continue sur un intervalle compact $E = [a, b]$ a la propriété d'atteindre son maximum et son minimum en un point au moins. Dès lors :

- soit ce point est intérieur et les théorèmes de la section précédente permettent de le détecter ;
- soit ce point est une borne, et on dispose des théorèmes suivants, valables si la fonction est dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b .

Pour la borne inférieure a , on a une condition nécessaire et une condition suffisante.

Théorème 2.2.2 (Condition nécessaire) *On suppose que f est dérivable à droite en a . Si f admet un maximum (respectivement un minimum) local en a , alors on a : $f'_d(a) \leq 0$ (respectivement $f'_d(a) \geq 0$).*

Théorème 2.2.3 (Condition suffisante) *On suppose que f est dérivable à droite en a . Si $f'_d(a) < 0$ (respectivement $f'_d(a) > 0$), alors f admet un maximum (respectivement un minimum) local en a .*

Pour la borne supérieure b aussi, on a une condition nécessaire et une condition suffisante.

Théorème 2.2.4 (Condition nécessaire) *On suppose que f est dérivable à gauche en b . Si f admet un maximum (respectivement un minimum) local en a , alors on a : $f'_g(b) \geq 0$ (respectivement $f'_g(b) \leq 0$).*

Théorème 2.2.5 (Condition suffisante) *On suppose que f est dérivable à gauche en b . Si $f'_g(b) > 0$ (respectivement $f'_g(b) < 0$), alors f admet un maximum (respectivement un minimum) local en b .*

Exemple 2.2.1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3-x}{1+x}$ sur le compact $E = [0, 3]$.

Comme f est une fonction rationnelle définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et puisque E est inclus dans D_f , on sait que f est continue sur le compact E et passe donc par un maximum et un minimum en vertu du théorème de Weierstrass.

Sur $E' =]0, 3[$, la dérivée première $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ ne s'annule pas. Par conséquent f ne prend pas ses valeurs extrémales sur les points intérieurs de E .

Puisque $f'_d(0) = -4 < 0$ et $f'_g(3) = -\frac{1}{4} < 0$, on en déduit que f admet un maximum local (qui est aussi global dans ce cas) en 0 et un minimum local (qui est aussi global) en 3. On a :

$$\max_{x \in [0,3]} f(x) = f(0) = 3, \quad \min_{x \in [0,3]} f(x) = f(3) = 0.$$

2.3 Optimisation des fonctions convexes concaves

Les fonctions convexes et concaves deux fois dérivables présentent une particularité intéressante : la condition nécessaire d'optimisation locale est ipso facto une condition suffisante d'optimum global.

2.4 Fiche pratique de résolution d'un programme d'optimisation

L'hypothèse de base est que dans le programme d'optimisation, la fonction-objectif f est définie et au moins deux fois continûment dérivable sur un sous-ensemble E de \mathbb{R} . Deux cas principaux doivent être distingués : E est un intervalle ouvert, E est un compact.

- 1) E est un intervalle ouvert de \mathbb{R} : $E =]a, b[$ avec $a < b$.

On procède comme suit :

- a) Recherche des points candidats

- i) Calcul de $f'(x)$

- ii) Recherche des solutions de l'équation d'Euler : $f'(x) = 0$

- iii) S'il existe des solutions, ce sont des points candidats

- b) Etude de la nature de chaque point candidat

- i) Calcul de $f''(x)$

- ii) Etude du signe de $f''(x)$ sur E (cette étude permet de savoir si f est convexe, est concave ou ni convexe ni concave).

iii) Si $f''(x) \geq 0$ sur E , alors f est convexe sur E et la fonction admet un minimum global au sens large sur E au point candidat.

iv) Si $f''(x) > 0$ sur E , alors f est strictement convexe sur E et la fonction admet un minimum global unique sur E au point candidat.

v) Si $f''(x) \leq 0$ sur E , alors f est concave sur E et la fonction admet un maximum global au sens large sur E au point candidat.

vi) Si $f''(x) < 0$ sur E , alors f est strictement concave sur E et la fonction admet un maximum global unique sur E au point candidat.

vii) Si $f''(x)$ ne conserve pas un signe constant sur E , la fonction f n'est ni convexe ni concave sur E . On doit calculer $f''(x^*)$

- si $f''(x^*) > 0$, alors f admet un minimum local strict au point candidat
- si $f''(x^*) < 0$, alors f admet un maximum local strict au point candidat
- si $f''(x^*) = 0$, et si f est de classe \mathcal{C}^∞ sur E , on recherche la première dérivée non nulle en x^* soit $f^{(k)}(x^*)$ cette première dérivée. deux cas se présentent :

Cas 1 : k est pair alors :

si $f^{(k)}(x^*) > 0$, f présente un minimum local en x^* ;

si $f^{(k)}(x^*) < 0$, f présente un maximum local en x^* ;

Cas 2 : k est impair : alors f présente un point d'inflexion en x^* .

2) E est un compact de \mathbb{R} : $E = [a, b]$ avec $a < b$.

Il faut distinguer les points intérieurs de E et les bornes.

a) Pour les points intérieurs, l'étude est menée sur $]a, b[$ comme il a été indiqué dans 1).

b) Pour la borne a , on calcule $f'_d(a)$ et :

i) si $f'_d(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a

ii) si $f'_d(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a

iii) si $f'_d(a) = 0$, alors on est en présence d'un cas douteux

c) Pour la borne b , on calcule $f'_g(b)$ et :

i) si $f'_g(b) > 0$, alors f admet un minimum local en b

ii) si $f'_g(b) < 0$, alors f admet un maximum local en b

iii) si $f'_g(b) = 0$, alors on est en présence d'un cas douteux

Chapitre 3

Optimisation à plusieurs variables sans contraintes

Dans cette partie nous nous intéressons aux problèmes du type

$$\alpha = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (P)$$

où f est une fonction définie sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R} .

Un problème d'optimisation étant donné, deux questions se posent : existe-t-il des solutions ? Et comment détecter les solutions éventuelles ? La théorie de l'optimisation affronte donc deux problèmes classiques en mathématiques : celui de l'existence et celui de des méthodes de recherche.

3.1 Résultats d'existence et unicité

On considère d'abord la définition suivante.

Définition 3.1.1 *La fonction f est dite coercive (on dit aussi que f est infinie à l'infini) si on a : $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$.*

Exemple 3.1.1

- 1) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \|x\|$ est coercive.
- 2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = x^2 - y^2$ n'est pas coercive.
- 3) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a, x \rangle + b$ avec $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ n'est pas coercive.
- 4) $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$ est coercive sur \mathbb{R}^2 .
- 5) $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ où $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$ est coercive.

Pour montrer que f est coercive, on utilise souvent la proposition suivante :

Proposition 3.1.1 *Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une application et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie*

$$f(x) \geq g(\|x\|) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$$

alors f est infinie à l'infini.

Preuve : Immédiate

□

Théorème 3.1.1 *Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et coercive (infinie à l'infini), alors il existe un point qui réalise le minimum de f sur \mathbb{R}^n . Autrement dit, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve :

Soit $\alpha = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) < +\infty$. Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite minimisante c'est-à-dire telle que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \alpha < +\infty. \quad (3.1)$$

Montrons que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée. Par l'absurde, on suppose qu'elle ne l'est pas c'est-à-dire qu'il existe une sous suite notée $(x_{\varphi(k)})_k$ de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_{\varphi(k)}\| = +\infty$. Par coercivité de f , on a alors : $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(k)}) = +\infty$, ce qui contredit (3.1).

La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc bornée : il existe alors une suite extraite notée $(x_{\psi(k)})_k$ de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. En utilisant maintenant la continuité de f , on a alors :

$$f(\bar{x}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{\psi(k)}) = \alpha.$$

On en déduit alors deux choses : $\alpha > -\infty$ et \bar{x} solution du problème (\mathcal{P}) . □

Théorème 3.1.2 (Condition suffisante d'existence de solution optimale) *Considérons le problème (P) . Si f est continue et s'il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(\bar{x})\}$ soit borné alors le problème (P) admet au moins une solution optimale globale. Ce qui est le cas si f est continue et coercive.*

En ce qui concerne l'unicité de la solution optimale on a le théorème ci-dessous.

Théorème 3.1.3 (Condition suffisante d'unicité) *Si f est strictement convexe, alors le problème (P) a au plus une solution optimale globale.*

Ce théorème n'est pas une condition d'existence de minimum pour la fonction f . Par exemple la fonction $f(x) = e^x$ est strictement convexe mais n'atteint pas son minimum sur \mathbb{R} .

Théorème 3.1.4 (Condition d'existence et d'unicité) *Si f est continue, coercive et strictement convexe, alors le problème (P) admet une et une seule solution optimale globale.*

Remarque 3.1.1 *Il faut noter que l'hypothèse de continuité dans le théorème ci-dessus n'est pas nécessaire, car toute fonction convexe sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R} est continue.*

Définition 3.1.2 *On appelle fonction elliptique une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ fortement convexe.*

Théorème 3.1.5 (Condition suffisante d'existence et d'unicité) *Si f est une fonction elliptique alors le problème (P) admet une et une seule solution optimale globale.*

3.2 Conditions d'optimalité

3.2.1 Conditions d'optimalité du premier ordre

Les conditions que nous donnons ici concernent le cas où la fonction-objectif f est différentiable. On définit :

Définition 3.2.1 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On dit que x^* est un point stationnaire ou critique de f si $\nabla f(x^*) = 0$.

On a le théorème :

Théorème 3.2.1 (Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre) On suppose que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable. Si x^* réalise un minimum local (global) de f sur \mathbb{R}^n , alors on a $\nabla f(x^*) = 0$.

Preuve : Soit x^* réalisant un minimum local de f sur \mathbb{R}^n . Le développement de Taylor au voisinage de x^* donne :

$$f(x) = f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle + \|x - x^*\| \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow x^*} \varepsilon(x) = 0$.

Si $\nabla f(x^*) \neq 0$, alors en choisissant $x = x(\lambda) = x^* - \lambda \nabla f(x^*)$, on aurait, pour $\lambda > 0$ suffisamment petit, $f(x(\lambda)) < f(x^*)$. Ce qui contredirait le fait que x^* réalise un minimum local de f . Donc la condition est nécessaire. \square

Remarque 3.2.1 1) Ce théorème n'a pas de sens si la fonction f n'est pas différentiable en x^* .
2) Cette condition nécessaire du premier ordre permet de sélectionner un certain nombre de candidats à être des minima locaux ou globaux. La réciproque est fausse. Un point critique n'est pas nécessairement un minimum local (global). Ce peut être un minimum local ou global, un maximum local ou global ou ni l'un ni l'autre. C'est dire que ce résultat n'est en général pas une condition suffisante.

Dans le cas convexe, la condition nécessaire du premier ordre ci-dessus est suffisante.

Théorème 3.2.2 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe et différentiable, alors un point x^* réalise un minimum global de f sur \mathbb{R}^n si et seulement si

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Preuve : On sait que la condition est nécessaire. Montrons à présent qu'elle est suffisante.

Soit x^* un point tel que $\nabla f(x^*) = 0$. Comme f est convexe alors, on a :

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Par hypothèse, on a $\nabla f(x^*) = 0$; il vient alors que

$$f(x) \geq f(x^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ce qui termine la démonstration. \square

Corollaire 3.2.1 Si f est une fonction quadratique avec $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ où A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels, symétrique et définie positive, alors il existe un minimum unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ de f et qui est l'unique solution du système $Ax = b$.

3.2.2 Conditions d'optimalité du second ordre

Théorème 3.2.3 (Condition nécessaire d'optimalité du second ordre) *Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction deux fois différentiable sur \mathbb{R}^n , une condition nécessaire pour que x^* soit un minimum local (global) de f sur \mathbb{R}^n est que : $\nabla f(x^*) = 0$ et $\nabla^2 f(x^*)$ est semi défini positif.*

Preuve : Soit x^* un minimum local de f sur \mathbb{R}^n . On sait que la condition 1) est satisfaite. Il reste à montrer la condition 2). Par définition du minimum local, il existe un voisinage V de x^* dans \mathbb{R}^n tel que $f(x) \geq f(x^*)$ pour tout $x \in V$.

Soit $h \in \mathbb{R}^n$. En utilisant le développement de Taylor au voisinage de x^* , à l'ordre deux et la condition 1), on a : pour t suffisamment petit,

$$f(x^* + th) = f(x^*) + \frac{t^2}{2} \langle \nabla^2 f(x^*) h, h \rangle + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th),$$

avec ε continue et $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(th) = 0$.

Pour $t \neq 0$ suffisamment petit de sorte que $x^* + th \in V$, on a :

$$0 \leq \frac{f(x^* + th) - f(x^*)}{t^2} = \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x^*) h, h \rangle + \varepsilon(th).$$

En passant à la limite, t tendant 0, on obtient : $\langle \nabla^2 f(x^*) h, h \rangle \geq 0$. □

On a aussi une condition suffisante d'optimalité.

Théorème 3.2.4 (Condition suffisante d'optimalité du second ordre) *On suppose que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction deux fois différentiable sur \mathbb{R}^n . Si x^* est tel que $\nabla f(x^*) = 0$ et $\nabla^2 f(x^*)$ est défini positif, alors x^* est un minimum local strict de f .*

Preuve : La matrice étant définie positive, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \langle \nabla^2 f(x^*) h, h \rangle \geq \lambda \|h\|^2.$$

D'après la formule de Taylor on a :

$$f(x) - f(x^*) = \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x^*) (x - x^*), x - x^* \rangle + \|x - x^*\|^2 \varepsilon(x - x^*)$$

avec ε continue et $\lim_{x \rightarrow x^*} \varepsilon(x - x^*) = 0$.

On a alors

$$f(x) - f(x^*) \geq \|x - x^*\|^2 \left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon(x - x^*) \right)$$

Pour x suffisamment proche de x^* , $\frac{\lambda}{2} + \varepsilon(x - x^*)$ est du signe de λ c'est-à-dire strictement positif. □

On en déduit les corollaires suivants :

Corollaire 3.2.2 *Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 qui sont continues), si x est un point critique de f tel que la matrice hessienne de f en x (qui est une matrice carrée d'ordre n symétrique) a pour valeurs propres (qui sont réelles) ordonnées $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, alors :*

- Si $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, f admet un minimum local en x .
- Si $\lambda_i < 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, f admet un maximum local en x .
- Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_n > 0$, f n'admet pas d'extremum en x .
- S'il existe un $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_i = 0$ et les autres valeurs propres sont de même signe, on ne peut pas conclure.

Corollaire 3.2.3 (cas de dimension deux) Si x est un point critique de $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, on définit les coefficients r, s, t par :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x).$$

Alors

- Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un minimum local en x .
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un maximum local en x .
- Si $rt - s^2 < 0$, f n'admet pas d'extremum en x , c'est un point selle.
- Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

3.3 Méthodes numériques

Dans cette partie nous nous intéressons aux méthodes numériques pour résoudre le problème :

$$\alpha = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (P)$$

où f est une fonction définie et différentiable sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R} .

Les principales méthodes de résolution connues ne permettent pas la détermination d'un minimum global. Il faut alors parfois se contenter d'optimum locaux.

Les algorithmes les plus utilisés sont des procédures itératives où l'on engendre une suite de points $x^0, x^1, \dots, x^k, \dots$ convergeant vers un optimum local.

3.3.1 Algorithmes et vitesse de convergence

Définition 3.3.1 Un algorithme est défini par une application \mathcal{A} de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n permettant la génération d'une suite d'éléments de \mathbb{R}^n par la formule :

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné} & k := 0 & \text{Etape d'initialisation} \\ x^{k+1} = \mathcal{A}(x^k) & k := k + 1 & \text{Itération } k \end{cases}$$

Ecrire un algorithme c'est se donner une suite $\{x^k\}$ de \mathbb{R}^n .

Etudier la convergence de cet algorithme c'est étudier la convergence de la suite $\{x^k\}$.

Définition 3.3.2 On dit que l'algorithme \mathcal{A} converge si la suite $\{x^k\}$ engendrée par l'algorithme converge vers une limite x^* .

La convergence est dite locale si elle n'a lieu que pour des points de départ x^0 dans un voisinage de x^* . Dans le cas contraire la convergence est globale.

Définition 3.3.3 Soit $\{x^k\}$ une suite de limite x^* définie par la donnée d'un algorithme convergeant \mathcal{A} . On dit que la convergence de \mathcal{A} est :

- linéaire si l'erreur $e_k = \|x^k - x^*\|$ décroît linéairement i.e

$$\exists C \in [0, 1[, \exists k_0 : \forall k \geq k_0, e_{k+1} \leq C e_k.$$

- superlinéaire si l'erreur $e_k = \|x^k - x^*\|$ décroît de la manière suivante : $e_{k+1} \leq \alpha_k e_k$ où α_k est une suite positive qui converge vers 0.

Si α_k est une suite géométrique, la convergence de l'algorithme est dite géométrique.
- superlinéaire d'ordre $p > 1$ si l'erreur $e_k = \|x^k - x^*\|$ décroît de la manière suivante :

$$\exists C \geq 0, \exists k_0 : \forall k \geq k_0, e_{k+1} \leq C[e_k]^p.$$

Dans le cas $p = 2$, la convergence de l'algorithme est dite quadratique.

3.3.2 Méthodes de descente

A chaque étape k , x^{k+1} est défini par :

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$$

où d^k est une direction de déplacement et λ_k le pas de déplacement.

La plupart des méthodes numériques usuelles sont des méthodes de descente c'est-à-dire que la direction de déplacement à chaque étape x^k est une direction de descente pour la fonction en ce point.

Définition 3.3.4 On dit qu'une direction d est une direction de descente pour f en x , si

$$\exists \bar{\alpha} > 0 : f(x + \alpha d) < f(x) \quad \forall \alpha \in]0, \bar{\alpha}[.$$

On montre facilement que :

Proposition 3.3.1 Soit f différentiable en x , si d est telle que $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$ alors d est une direction de descente pour f en x .

Corollaire 3.3.1 Soit f différentiable en x . Si $\nabla f(x) \neq 0$, alors $d = -\nabla f(x)$ est une direction de descente pour f en x .

Le principe des méthode à directions de descente est le suivant :

0) Choix d'un itéré initial $x^0 \in \mathbb{R}^n$;

Initialisation : $k := 0$;

1) Arrêt de l'algorithme si test d'arrêt vérifié ;

2) Choix d'une direction de descente d^k ;

3) Détermination d'un pas de déplacement $\lambda_k > 0$ le long de d^k de manière à "faire décroître f suffisamment" ;

4) $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$, $k := k + 1$ et aller en 1.

Méthodes du gradient

Il s'agit d'une famille de méthodes itératives qui s'appliquent à des fonctions différentiables et qui utilisent l'opposé du gradient comme direction de déplacement c'est-à-dire : à l'étape k , on prend comme pas de déplacement, $d^k = -\nabla f(x^k)$. Il reste ensuite le choix du pas de déplacement, c'est la phase de recherche linéaire. Ce choix détermine la méthode. Il existe plusieurs possibilités :

- prendre un pas constant, on parle alors d'algorithme à pas constant ;
- prendre un pas optimal, i. e. λ_k qui minimise $\varpi(\lambda) = f(x^k - \lambda \nabla f(x^k))$, ($\lambda \geq 0$), on parle alors d'algorithme du gradient à pas optimal ;
- prendre un pas qui respecte certaines règles tout en nécessitant peu de calculs au niveau de la recherche linéaire.

Nous nous intéressons ici à l'algorithme du gradient à pas optimal on dit aussi de la plus forte pente qui est le suivant :

a) Algorithme du gradient à pas optimal

- 0) Choix d'un itéré initial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ initialisation : $k := 0$;
- 1) Arrêt de l'algorithme si test d'arrêt vérifié;
- 2) Prendre $d^k = -\nabla f(x^k)$;
- 3) Déterminer $\lambda_k > 0$ tel que $f(x^k + \lambda_k d^k) = \min_{\lambda \geq 0} f(x^k + \lambda d^k)$;
- 4) $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$, $k := k + 1$ et aller en 1.

Le test d'arrêt peut être par exemple :

- le gradient est très petit : $\|\nabla f(x^k)\| \leq \varepsilon$, où ε est un paramètre donné;
- la suite $\{x^k\}$ est "presque" stationnaire : $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| \leq \varepsilon$, (ε donné).

On peut aussi exiger que l'un de ces tests soit vérifié sur plusieurs itérations ou que plusieurs tests soient satisfaits simultanément.

On montre que dans la méthode du gradient à pas optimal, les directions de déplacement successives sont orthogonales :

Théorème 3.3.1 *Etant donné l'algorithme du gradient à pas optimal, on a pour tout k , $\langle d^k, d^{k+1} \rangle = 0$.*

On a le résultat de convergence suivant :

Théorème 3.3.2 *Si la fonction f est de classe C^1 et coercive, alors pour tout point de départ x^0 , la méthode du gradient à pas optimal converge vers un point stationnaire de f .*

On remarque que dans la pratique, pour certaines fonctions comme la fonction banane de Rosenbrock, la convergence est très lente, par exemple, les fonctions mal conditionnées du type vallée étroite et allongée. Il existe des techniques d'accélération de la convergence.

3.3.3 Méthodes de directions conjuguées

Principe des méthodes des directions conjuguées

Il s'agit de méthodes itératives qui, appliquées à une fonction quadratique de n variables conduisent à l'optimum en n étapes au plus.

Définition 3.3.5 *Soit A une matrice carrée d'ordre n symétrique définie positive.*

On dit que les vecteurs x et y de \mathbb{R}^n sont conjugués par rapport à A ou encore A -conjugués s'ils vérifient $x^T A y = 0$.

La matrice A étant symétrique définie positive, la forme bilinéaire $a(x, y) = x^T A y$ définit un produit scalaire et la relation $x^T A y = 0$ traduit l'orthogonalité des vecteurs x et y par ce produit scalaire.

Théorème 3.3.3 *Si $\{d^0, \dots, d^k\}$ sont des directions 2 à 2 conjuguées par rapport à A , soit $\langle d^i, A d^j \rangle = 0 \forall i, j \in \{0, \dots, k\}, i \neq j$ alors elles sont linéairement indépendantes.*

Algorithme du gradient conjugué : cas des fonctions quadratiques

On considère la fonction quadratique

$$q(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$$

où A est une matrice carrée d'ordre n symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.

La méthode consiste à partir d'un point x^0 , à minimiser q suivant n directions d^0, d^1, \dots, d^{n-1} mutuellement conjuguées par rapport à A .

Soient n telles directions : d^0, d^1, \dots, d^{n-1} .

Ayant déterminé x^k , le point x^{k+1} est le point : $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$ où λ_k est choisi de façon à minimiser $q(x^k + \lambda d^k)$ par rapport à λ . On a donc $\langle d^k, \nabla q(x^k + \lambda_k d^k) \rangle = 0$ ou encore $\langle d^k, A(x^k + \lambda_k d^k) + b \rangle = 0$ d'où l'on déduit : $\lambda_k = -\frac{\langle d^k, Ax^k + b \rangle}{\langle Ad^k, d^k \rangle}$.

On montre que

Lemme 3.3.1 *Si d^0, d^1, \dots, d^{k-1} sont mutuellement conjuguées par rapport à A , alors on a pour tout $i < k$ la relation : $\langle d^i, \nabla q(x^k) \rangle = 0$.*

Preuve : On a en effet :

$$\begin{aligned} \langle d^i, \nabla q(x^k) \rangle &= \langle d^i, Ax^k + b \rangle \\ &= \langle d^i, A(x^i + \sum_{j=i}^{k-1} \lambda_j d^j) + b \rangle \\ &= \langle d^i, Ax^i + b \rangle + \lambda_i \langle d^i, Ad^i \rangle \\ &= 0 \text{ d'après la valeur de } \lambda_i \text{ calculée ci-dessus} \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Théorème 3.3.4 *Le point x^n est l'optimum de $q(x)$ sur \mathbb{R}^n .*

Preuve : Les directions d^0, d^1, \dots, d^{n-1} étant mutuellement conjuguées, elles forment une base de \mathbb{R}^n . D'après le lemme, $\nabla q(x^n) = 0$, ce qui démontre le théorème. □

La méthode de Fletcher et Reeves engendre au fur et à mesure les directions d^k . A chaque étape k , la direction d^k est obtenue comme combinaison linéaire du gradient de q en x^k et de la direction précédente d^{k-1} , les coefficients étant choisis de telle manière que d^k soit A -conjuguée avec toutes les directions précédentes.

Algorithme de Fletcher et Reeves

On considère dans cet algorithme $g^k = \nabla q(x^k) = Ax^k + b$

- Choisir un point initial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et poser $d^0 = -g^0$;
- Pour k variant de 0 à n faire :
 - $\lambda_k = -\frac{\langle d^k, g^k \rangle}{\langle Ad^k, d^k \rangle}$
 - $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$
 - $\beta_k = -\frac{\langle g^{k+1}, Ad^k \rangle}{\langle Ad^k, d^k \rangle}$;
 - $d^{k+1} = -g^k + \beta_k d^k$.

(on pourra remarquer l'égalité suivante : $\langle d^k, g^k \rangle = -\|g^k\|^2$).

La convergence de l'algorithme est assurée par le fait que les directions d^0, d^1, \dots, d^{n-1} sont mutuellement conjuguées. Montrons cela par récurrence. pour cela, soit k compris entre 0 et $n-2$; on suppose que les directions d^0, d^1, \dots, d^k sont mutuellement conjuguées. On a alors pour $k+1$:

$$\begin{aligned} \langle d^k, Ad^{k+1} \rangle &= \langle d^k, A(-g^{k+1} + \beta_k d^k) \rangle \\ &= -\langle d^k, Ag^{k+1} \rangle + \beta_k \langle d^k, Ad^k \rangle = 0 \text{ d'après le choix de } \beta_k \end{aligned}$$

Pour $i < k$,

$$\langle d^{k+1}, Ad^i \rangle = -\langle g^{k+1}, Ad^i \rangle + \beta_k - \langle d^k, Ad^i \rangle = -\langle g^{k+1}, Ad^i \rangle.$$

Or

$$Ad^i = A \left(\frac{x^{i+1} - x^i}{\lambda_i} \right) = \frac{Ax^{i+1} - Ax^i}{\lambda_i} = \frac{g^{i+1} - g^i}{\lambda_i}.$$

D'autre part, $g^{i+1} = -d^{i+1} + \beta_i d^i$ et $g^i = -d^i + \beta_{i-1} d^{i-1}$.

D'après le lemme, g^{i+1} est orthogonal à d^{i+1} , d^i et d^{i-1} : Ad^i étant combinaison linéaire de ces trois vecteurs, $\langle g^{k+1}, Ad^i \rangle = 0$, ce qui montre l'égalité $\langle d^{k+1}, Ad^i \rangle$. \square

Pour terminer nous montrons une formule qui nous sera très utile dans le paragraphe suivant.

Proposition 3.3.2 On a $\beta_k = \frac{\|g^{k+1}\|^2}{\|g^k\|^2}$.

Preuve : On a $g^{k+1} - g^k = A(x^{k+1} - x^k) = \lambda_k Ad^k$.

D'où $\langle g^{k+1}, Ad^k \rangle = \frac{\langle g^{k+1}, g^{k+1} - g^k \rangle}{\lambda_k}$.

Comme $g^k = -d^k + \beta_{k-1} d^{k-1}$, le lemme montre l'égalité $\langle g^{k+1}, g^k \rangle = 0$

D'où : $\beta_k = \frac{1}{\lambda_k} \frac{\langle g^{k+1}, g^{k+1} \rangle}{\langle d^k, Ad^k \rangle} = -\frac{\langle g^{k+1}, g^{k+1} \rangle}{\langle g^k, d^k \rangle}$.

Or $\langle g^k, d^k \rangle = \langle g^k, -g^k + \beta_{k-1} d^{k-1} \rangle = -\langle g^k, g^k \rangle$ d'après le lemme.

On en déduit le résultat : $\beta_k = \frac{\|g^{k+1}\|^2}{\|g^k\|^2}$. \square

Algorithme du gradient conjugué : cas d'une fonction quelconque

L'algorithme de Fletcher et Reeves pour une fonction quelconque est le suivant :

- Choisir un point initial $x^0 \in \mathbb{R}^n$, poser $d^0 = -\nabla f(x^0)$ et $k = 0$;
- répéter :
 - choisir λ_k minimisant $f(x^k + \lambda d^k)$, par rapport à λ
 - $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$
 - $\beta_k = \frac{\|g^{k+1}\|^2}{\|g^k\|^2}$
 - $d^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k d^k$ ◦ $k := k + 1$.

Cette méthode a deux avantages : elle nécessite le stockage de très peu d'informations et sa vitesse de convergence est très supérieure à celle des algorithmes de gradient classiques.

3.3.4 Méthode de Newton

La méthode de Newton permet de construire un algorithme permettant de résoudre le système d'équation non linéaire

$$g(x) = 0$$

où $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable : on se donne $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et on fait les itérations

$$x^{k+1} = x^k - [g'(x^k)]^{-1} g(x^k) \tag{3.2}$$

où $g'(x)$ est la dérivée (ou jacobienne) de g au point x .

L'application de cette méthode au problème d'optimisation

$$\alpha = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{P}$$

consiste à l'utiliser pour résoudre le système d'optimalité du problème (P) , c'est-à-dire que l'on pose $g(x) = \nabla f(x)$ dans (3.2). Cela suppose donc que f est deux fois différentiable et que l'on sait calculer ses dérivées secondes. On obtient les itérations

$$x^{k+1} = x^k - [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k) \quad (3.3)$$

On remarque qu'il est nécessaire qu'en x^k , $\nabla^2 f(x^k)$ soit inversible : ce qui est le cas si $\nabla^2 f(x^k)$ est défini positif.

La méthode de Newton est intéressante car sa convergence est quadratique au voisinage de la solution x^* si $\nabla^2 f(x^*)$ est défini positif c'est-à-dire que l'on a

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \gamma \|x^k - x^*\|^2, \quad \gamma > 0.$$

Mais cette convergence n'est assurée que si x^0 est suffisamment proche de x^* , ce qui limite l'intérêt. On pourra éventuellement appliquer d'abord une autre méthode pour s'approcher de x^* , puis appliquer la méthode de Newton.

Pour améliorer la précision de la méthode de Newton, on peut penser à lui ajouter une phase de recherche linéaire dans la direction $d^k = -[\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$.

Cela est possible uniquement si d^k est une direction de descente pour f en x^k , soit

$$\langle \nabla f(x^k), d^k \rangle = -\langle \nabla f(x^k), [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k) \rangle < 0$$

ce qui sera le cas si $\nabla^2 f(x^k)$ est une matrice définie positive. L'algorithme s'écrit alors :

- 0) Choix d'un itéré initial $x^0 \in \mathbb{R}^n$, initialisation : $k := 0$;
- 1) Arrêt de l'algorithme si test d'arrêt vérifié ;
- 2) Prendre $d^k = -[\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$;
- 3) Déterminer $\lambda_k > 0$ tel que $f(x^k + \lambda_k d^k) = \min_{\lambda \geq 0} f(x^k + \lambda d^k)$;
- 4) $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$, $k := k + 1$ et aller en 1.

3.3.5 Algorithmes de recherche linéaire

Une grande classe d'algorithmes que nous avons considérés pour résoudre le problème d'optimisation

$$(\mathcal{P}) \quad \alpha = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

sont de la forme générale suivante :

$$x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ étant donné, calculer } x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$$

Le vecteur d^k étant la direction de déplacement et λ_k le pas de déplacement de la méthode à la k -ième itération.

La direction de déplacement étant choisie, on est plus ou moins ramené à un problème unidimensionnel pour la détermination de $\lambda_k = \arg \min_{\lambda \geq 0} \varphi(\lambda) = f(x^k + \lambda d^k)$.

Il existe trois familles d'algorithmes de recherche linéaire :

- **méthodes de dichotomie ou d'exploration planifiée** : ces méthodes sont hyper-robustes mais lentes.

- **méthodes d'interpolation** : on prend trois de la courbe de φ on fait passer une parabole, on calcule le minimum, on élimine un point, on recommence.

- **méthodes modernes efficaces** : on n'optimise plus, on s'arrête après quelques itérations dès que φ a assez décré par rapport à $\varphi(0)$.

On donne ici quelques algorithmes unidimensionnels ou de recherche du pas.

Supposons que l'on connaisse un intervalle $[a, b]$ contenant le minimum λ^* de φ et tel que φ soit décroissante sur $[a, \lambda^*]$ et croissante sur $[\lambda^*, b]$ (φ est alors appelée une fonction unimodale).

Méthode de la section dorée

Supposons que l'on connaisse un intervalle $[a, b]$ contenant le minimum λ^* de φ et tel que φ soit décroissante sur $[a, \lambda^*]$ et croissante sur $[\lambda^*, b]$ (φ est alors appelée une fonction unimodale).

On construit une suite décroissante d'intervalles $[a_i, b_i]$ qui contiennent tous le minimum λ^* . Pour passer de $[a_i, b_i]$ à $[a_{i+1}, b_{i+1}]$, on procède de la manière suivante.

On introduit deux nombres a' et b' de l'intervalle $[a_i, b_i]$ et tels que $a' < b'$ puis on calcule $\varphi(a')$ et $\varphi(b')$. Trois possibilités se présentent alors à nous.

- $\varphi(a') < \varphi(b')$.

Alors le minimum λ^* se trouve nécessairement à gauche de b' . Ceci définit alors le nouvel intervalle en posant $a_{i+1} = a_i$ et $b_{i+1} = b'$.

- $\varphi(a') > \varphi(b')$.

Dans ce cas il est évident que le minimum se trouve cette fois-ci à droite de a' . On pose alors $a_{i+1} = a'$ et $b_{i+1} = b_i$.

- $\varphi(a') = \varphi(b')$.

Alors le minimum se trouve dans l'intervalle $[a', b']$. On se restreint donc à $a_{i+1} = a'$ et $b_{i+1} = b'$.

Le choix de a' et b' se fait en tenant compte du fait que le facteur de réduction τ qui représente le ratio du nouvel intervalle par rapport au précédent soit constant et que l'on désire réutiliser le point qui n'a pas été choisi dans l'itération précédente afin de diminuer les coûts de calculs.

Le N^{max} est le nombre maximal d'itérations que l'on se fixe. A cette fin, on doit valider un critère d'arrêt de la forme : $|b_{i+1} - a_{i+1}| < \varepsilon$, où ε est l'erreur (ou tolérance) que l'on se permet sur la solution λ^* du problème.

Algorithme de la section dorée

```
poser  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 
poser  $a_0 = a$ 
poser  $b_0 = b$ 
pour  $i = 0, \dots, N^{max}$ 
    poser  $a' = a_i + \frac{1}{\tau^2}(b_i - a_i)$ 
    poser  $b' = b_i + \frac{1}{\tau}(b_i - a_i)$ 
    si  $(\varphi(a') < \varphi(b'))$  alors
        poser  $a_{i+1} = a_i$ 
        poser  $b_{i+1} = b'$ 
    sinon si  $(\varphi(a') > \varphi(b'))$  alors
        poser  $a_{i+1} = a'$ 
        poser  $b_{i+1} = b_i$ 
    sinon si  $(\varphi(a') = \varphi(b'))$  alors
        poser  $a_{i+1} = a'$ 
        poser  $b_{i+1} = b'$ 
    fin si
fin pour  $i$ .
```

Méthode d'interpolation parabolique

L'idée maîtresse de la méthode d'interpolation parabolique consiste à remplacer la fonction coût φ par son polynôme d'interpolation p d'ordre deux (d'où l'appellation d'interpolation parabolique) en trois points x_0, y_0 et z_0 de l'intervalle $[a, b]$. Ces points sont choisis tels que : $\varphi(x_0) \geq \varphi(y_0)$ et

$\varphi(z_0) \geq \varphi(y_0)$. On peut montrer que si on pose

$$\varphi[x_0; y_0] = \frac{\varphi(y_0) - \varphi(x_0)}{y_0 - x_0}, \quad \varphi[x_0; z_0] = \frac{\varphi(z_0) - \varphi(x_0)}{z_0 - x_0}$$

et

$$\varphi[x_0; y_0; z_0] = \frac{\varphi[x_0; z_0] - \varphi[x_0; y_0]}{z_0 - x_0},$$

alors, le minimum est donné par :

$$y_1 = \frac{x_0 + y_0}{2} - \frac{\varphi[x_0; y_0]}{2\varphi[x_0; y_0; z_0]}.$$

Il est clair que $\lambda^* \in [x_0, y_0]$ selon les choix précédents. On choisit ensuite les trois nouveaux points de la manière suivante

- si $y_1 \in [x_0, y_0]$, on pose alors $x_1 = x_0$, $y_1 = y_1$ et $z_1 = y_0$ puisque $\lambda^* \in [x_0, y_0]$,
- si $y_1 \in [y_0, z_0]$, on pose alors $x_1 = y_0$, $y_1 = y_1$ et $z_1 = z_0$ car $\lambda^* \in [x_0, y_0]$.

Puis on recommence.

Cette méthode est d'ordre 1.3, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ telle que l'on ait l'inégalité

$$|y_{i+1} - \lambda^*| \leq C|y_{i+1} - \lambda^*|^{1.3}.$$

On obtient l'algorithme suivant.

Algorithme de l'interpolation parabolique

choisir x_0, y_0, z_0 dans $[a, b]$ tels que $\varphi(x_0) \geq \varphi(y_0)$ et $\varphi(z_0) \geq \varphi(y_0)$.

pour $i = 0, \dots, N^{max}$

poser $\varphi[x_i; y_i] = \frac{\varphi(y_i) - \varphi(x_i)}{y_i - x_i}$,

poser $\varphi[x_i; y_i; z_i] = \frac{\varphi[x_i; z_i] - \varphi[x_i; y_i]}{z_i - x_i}$,

poser $y_{i+1} = \frac{x_i + y_i}{2} - \frac{\varphi[x_i; y_i]}{2\varphi[x_i; y_i; z_i]}$.

si $y_{i+1} \in [x_i; y_i]$ alors

poser $x_{i+1} = x_i$

poser $z_{i+1} = y_i$

sinon si $y_{i+1} \in [y_i; z_i]$ alors

poser $x_{i+1} = y_i$

poser $z_{i+1} = z_i$

fin si

fin pour i .

Une des difficultés concerne l'initialisation de l'algorithme. Pratiquement, on peut procéder de la façon suivante.

On choisit un point α_0 de l'intervalle $[a, b]$ ainsi qu'un pas de déplacement positif δ . On calcule ensuite $\varphi(\alpha_0)$ et $\varphi(\alpha_0 + \delta)$. On a alors deux situations

- si $\varphi(\alpha_0) \geq \varphi(\alpha_0 + \delta)$, alors φ décroît et donc λ' est à droite de $\alpha_0 + \delta$. On continue alors à calculer $\varphi(\alpha_0 + 2\delta)$, $\varphi(\alpha_0 + 3\delta)$, \dots , $\varphi(\alpha_0 + k\delta)$ jusqu'à tomber sur un entier k tel que φ croît, c'est-à-dire : $\varphi(\alpha_0 + k\delta) > \varphi(\alpha_0 + (k-1)\delta)$, avec $k \geq 2$. On pose alors

$$x_0 = \varphi(\alpha_0 + (k-2)\delta), y_0 = \varphi(\alpha_0 + (k-1)\delta), z_0 = \varphi(\alpha_0 + k\delta).$$

• si $\varphi(\alpha_0) < \varphi(\alpha_0 + \delta)$, alors λ' est à gauche de α_0 . On prend $-\delta$ comme pas jusqu'à tomber sur un entier k tel que $\varphi(\alpha_0 - k\delta) \geq \varphi(\alpha_0 - (k-1)\delta)$. On pose alors

$$x_0 = \varphi(\alpha_0 - k\delta), y_0 = \varphi(\alpha_0 - (k-1)\delta), z_0 = \varphi(\alpha_0 - (k-2)\delta).$$

Ceci donne l'algorithme ci-dessous

Algorithme d'initialisation de l'interpolation parabolique

```
choisir  $\alpha_0$  dans  $[a, b]$ 
choisir  $\delta > 0$ 
poser  $q_0 = \varphi(\alpha_0)$ 
poser  $q_1 = \varphi(\alpha_0 + \delta)$ 
si ( $q_1 \leq q_0$ ) alors
    poser  $k = 2$ 
    poser  $q_2 = \varphi(\alpha_0 + k\delta)$ 
    tant que ( $q_2 \leq q_1$ ) faire
        poser  $k = k + 1$ 
        poser  $q_0 = q_1$ 
        poser  $q_1 = q_2$ 
        poser  $q_2 = \varphi(\alpha_0 + k\delta)$ 
    fin tant que
    poser  $x_0 = q_0$ 
    poser  $y_0 = q_1$ 
    poser  $z_0 = q_2$ 
sinon si ( $q_1 > q_0$ ) alors
    poser  $k = 1$ 
    poser  $q_2 = \varphi(\alpha_0 - k\delta)$ 
    tant que ( $q_2 \leq q_0$ ) faire
        poser  $k = k + 1$ 
        poser  $q_0 = q_2$ 
        poser  $q_1 = q_0$ 
        poser  $q_2 = \varphi(\alpha_0 - k\delta)$ 
    fin tant que
    poser  $x_0 = q_2$ 
    poser  $y_0 = q_0$ 
    poser  $z_0 = q_1$ 
fin si
```


Chapitre 4

Optimisation avec contraintes

Dans ce chapitre on s'intéresse au problème

$$\alpha = \inf_{x \in C} f(x) \quad (P)$$

où C est une partie de \mathbb{R}^n et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

4.1 Résultats d'existence et d'unicité

On considère tout d'abord la définition suivante :

Définition 4.1.1 *On appelle suite minimisante de f sur C toute suite $\{x^k\}$ de C telle*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^k) = \inf_{x \in C} f(x).$$

On montre le résultat d'existence suivant dans le cas où C est borné.

Théorème 4.1.1 (Théorème de Weierstrass) *Si f est continue et C est compact non vide, alors le problème (P) admet au moins une solution optimale.*

Pour le cas où C est non borné, on considère d'abord les définitions suivantes.

Définition 4.1.2 *la fonction f est p -coercive sur C si*

$$\lim_{\substack{\|x\|^p \rightarrow +\infty \\ x \in C}} \frac{f(x)}{\|x\|^p} = +\infty.$$

Si $p = 0$ on dit que la fonction f est coercive.

Théorème 4.1.2 *Si f est continue, coercive, C est non vide, fermé alors le problème (P) admet au moins une solution optimale.*

Preuve :

Soit $\{x^k\}$ une suite minimisante de f sur C .

La suite $\{x^k\}$ est bornée. En effet si ça n'était pas le cas, il existerait une sous suite $\{x^{k_l}\}$ de $\{x^k\}$ telle que $\|x^{k_l}\| \rightarrow +\infty$. Comme f est coercive, cela impliquerait que $\alpha = \lim_l f(x^{k_l}) = +\infty$. Ce qui est impossible car f est finie en au moins un point de C car non vide.

La suite $\{x^k\}$ étant bornée, il existe une sous suite $\{x^{k_l}\}$ de $\{x^k\}$ qui converge vers un point \bar{x} de C car C est fermé.

Comme f est continue, alors on a

$$\alpha = \lim_l f(x^{k_l}) = f(\lim_l x^{k_l}) = f(\bar{x}).$$

Donc $\alpha = f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$. □

Dans le cas où la fonction f est convexe, on a les propriétés suivantes.

Proposition 4.1.1 *Soit*

$$S_{opt} = \{x \in C : f(x) = \alpha\}$$

l'ensemble des solutions optimales de (P).

Si C est convexe non vide et f concave sur C alors

- *ou bien $S_{opt} \subset \text{Fr}(C)$*
- *ou bien f est constante sur C .*

Preuve : Supposons f non constante sur C et $S_{opt} \neq \emptyset$.

Si $S_{opt} \cap \text{int}(C) \neq \emptyset$, alors soit $x^* \in \text{int}(C) \cap S_{opt}$. On a alors $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in C$.

Comme la fonction f est non constante sur C , il existe $\bar{x} \in C$ tel que $f(\bar{x}) > f(x^*) = \alpha$.

On a $x^* \in \text{int}(C)$, alors il existe $\tilde{x} \in C$, et $t \in]0, 1[$ tels que $x^* = t\bar{x} + (1-t)\tilde{x}$.

La fonction f étant concave, on a $\alpha = f(x^*) \geq tf(\bar{x}) + (1-t)f(\tilde{x}) > t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha$ Ce qui est contradictoire. Donc $S_{opt} \cap \text{int}(C) = \emptyset$ par suite $S_{opt} \subset \text{Fr}(C)$. □

Proposition 4.1.2 *Si C est convexe compact non vide et f continue et concave sur C , alors l'ensemble des solutions optimales de (P) est non vide et contient des points extrêmes de C .*

Preuve : Comme C est compact non vide, f continue, alors (P) admet au moins une solution optimale.

On sait que tout convexe compact est égal à l'enveloppe convexe de ses points extrêmes.

Soit x^* une solution optimale. Comme $x^* \in C$ alors il existe $a^i, i = 1, \dots, p$ des points extrêmes de C tels que

$$x^* = \sum_{i=1}^p \lambda_i a^i \text{ avec } \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1.$$

Comme f est concave sur C , on a

$$f(x^*) \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(a^i).$$

Or on a $f(a^i) \geq f(x^*)$. Ce qui implique que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on a $f(a^i) = f(x^*)$ et par suite a^i est une solution optimale de (P). □

Proposition 4.1.3 *Si C est un polyèdre convexe non vide et f concave et continue sur C et si $\alpha > -\infty$ alors l'ensemble des solutions optimales de (P) est non vide et contient au moins un sommet de C .*

Preuve : Comme C est un polyèdre convexe, on peut écrire $C = P + D$ où P est un polytope et

$$D = \left\{ d = \sum_{j=1}^q \mu_j d^j, d^j \in \mathbb{R}^n, \mu_j \geq 0 \right\}.$$

Soit \tilde{x} fixé, $\tilde{x} \in P$. On a

$$\alpha \leq \inf_{d \in D} [f(\tilde{x} + d)] = \inf_{d \in D} \left[\inf_{t \geq 0} f(\tilde{x} + td) \right].$$

Pour tout $d \in D$; f étant concave et minorée sur l'ensemble $\{x = \tilde{x} + td : t \geq 0\}$, on a

$$\inf_{t \geq 0} [f(\tilde{x} + td)] = f(\tilde{x}).$$

En effet, raisonnons par l'absurde, sinon il existerait $\bar{t} > 0$ tel que

$$f(\tilde{x} + \bar{t}d) < f(\tilde{x}).$$

Mais alors pour tout $t > \bar{t}$ on a

$$\frac{f(\tilde{x} + td) - f(\tilde{x})}{t} \leq \frac{f(\tilde{x} + \bar{t}d) - f(\tilde{x})}{\bar{t}}$$

et donc $f(\tilde{x} + td) \rightarrow -\infty$ si $t \rightarrow +\infty$ ce qui est impossible car $\alpha > -\infty$.

Il s'ensuit que

$$\inf_{d \in D} [f(\tilde{x} + d)] = f(\tilde{x}), \quad \forall \tilde{x} \in P.$$

Par suite

$$\inf_{x \in C} f(x) = \inf_{x \in P} f(x).$$

Comme P est un polytope donc compact, le minimum est atteint et il l'est en un des points extrémaux du polytope. \square

On a le résultat sur l'unicité de la solution optimale.

Théorème 4.1.3 *Si C est convexe et f strictement convexe sur C alors (P) admet au plus une solution optimale.*

La démonstration est immédiate.

4.2 Cas des contraintes d'égalité

On suppose ici que :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : h_j(x) = 0, j = 1, \dots, q\}$$

où les fonctions $h_j, j = 1, \dots, q$ sont définies sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R} .

On considère la définition suivante :

Définition 4.2.1 *Soit $x \in C$. On suppose que les fonction h_j ($j = 1, \dots, q$) sont différentiables dans un voisinage de x . On dira que point x est qualifié si le système $\{\nabla h_j(x^*), j = 1, \dots, q\}$ est libre.*

On a les conditions nécessaires d'optimalité.

Théorème 4.2.1 (Conditions Nécessaires d'optimalité du premier ordre) Soit $x^* \in C$. On suppose que f est différentiable en x^* , que les fonctions h_j , $j = 1, \dots, q$ sont de classe C^1 dans un voisinage de $x^* \in C$ et que x^* est qualifié. Alors une condition nécessaire pour que x^* soit une solution optimale locale de (P) est que :

$$\exists! \mu^* \in \mathbb{R}^q \text{ tel que } \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0.$$

(le vecteur μ^* est appelé vecteur multiplicateur de Lagrange)

On peut reformuler ces résultats en considérant la fonction de Lagrange.

Définition 4.2.2 On appelle lagrangien associé au problème (P) avec contraintes d'égalité, c'est-à-dire

$$\min [f(x) : h_j(x) = 0, j = 1, \dots, q]$$

la fonction

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \mu) &\longmapsto f(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x). \end{aligned}$$

Les conditions nécessaires du premier ordre s'écrivent alors avec la fonction de Lagrange de la façon suivante.

Proposition 4.2.1 On suppose qu f est différentiable en $x^* \in C$, que les fonctions h_j , $j = 1, \dots, q$ sont de classe C^1 dans un voisinage de x^* et que le point x^* est qualifié. Alors une condition nécessaire pour que x^* soit une solution optimale locale de (P) est que :

$$\exists! \mu^* \in \mathbb{R}^q \text{ tel que } \begin{cases} \nabla_x L(x^*, \mu^*) = 0 \\ \nabla_\mu L(x^*, \mu^*) = 0 \end{cases}$$

Y a-t-il des situations où la condition nécessaire du théorème (4.2.1) ci-dessus est suffisante pour que x^* minimise f sur C ? Oui.

Théorème 4.2.2 (CNS d'optimalité du premier ordre) Supposons f convexe sur un ouvert contenant C et les h_j affines (i.e. de la forme $x \mapsto h_j(x) = \langle a_j, x \rangle - b_j$) linéairement indépendantes. Alors, un élément $x^* \in C$ pour lequel

$$\exists \mu^* \in \mathbb{R}^q \text{ tel que } \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

est un minimum global de f sur C .

4.3 Problème avec contraintes d'inégalité

On suppose ici que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, p\}$$

où les fonctions g_i , $i = 1, \dots, p$ sont définies sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 4.3.1 Soit $\bar{x} \in C$. On dit que la contrainte d'inégalité $g_i(x) \leq 0$ est active en \bar{x} , si on a $g_i(\bar{x}) = 0$.

Pour $x \in C$ on note $I(x) = \{i \in \{1, \dots, p\} : g_i(x) = 0\}$ l'ensemble des indices des contraintes actives en x .

Définition 4.3.2 On dira que les contraintes sont qualifiées en un point \bar{x} de C , si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- **Condition de qualification globale de Karlin** : toutes les fonctions g_i sont affines et C non vide.
- **Condition de qualification globale de Slater** : toutes les fonctions g_i sont convexes et différentiables sur un ouvert contenant C , et $\exists \tilde{x} \in C$ tel que : $g_i(\tilde{x}) < 0$ pour tout i , c'est-à-dire que C est d'intérieur non vide.
- **Condition de qualification locale d'indépendance linéaire** : les fonctions g_i sont toutes différentiables dans un voisinage de \bar{x} et le système formé des gradients des contraintes actives en \bar{x} est libre.

On a les conditions d'optimalité :

Théorème 4.3.1 (CN d'optimalité de Kuhn- Tucker)

Soit $x^* \in C$. On suppose que pour tout i , les g_i sont toutes différentiables dans un voisinage de x^* et que les contraintes sont qualifiées en x^* . Alors une condition nécessaire pour x^* soit une solution optimale locale de (P) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^p \text{ tel que :} \\ \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}. \end{array} \right.$$

Dans le cas où le problème (P) est convexe, la condition nécessaire d'optimalité de Kuhn-Tucker est aussi suffisante.

4.4 Problème avec contraintes d'égalité et d'inégalité

On s'intéresse ici au

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, p, \\ h_j(x) = 0, j = 1, \dots, q \end{array} \right\}$$

où les fonctions g_i , $i = 1, \dots, p$ et h_j , $j = 1, \dots, q$ sont définies sur \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R} .

Comme dans le cas précédent, pour $x \in C$ on note $I(x) = \{i \in \{1, \dots, p\} : g_i(x) = 0\}$ l'ensemble des indices des contraintes actives en x .

On définit ici aussi les conditions de qualification.

Définition 4.4.1 On dira que les contraintes sont qualifiées en un point \bar{x} de C , si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- **Condition de qualification globale de Karlin** : toutes les fonctions g_i et h_j sont affines et C non vide.

- **Condition de qualification globale de Slater** : toutes les fonctions g_i sont convexes et différentiables sur un ouvert contenant C , les fonctions h_j sont affines linéairement indépendantes, et $\exists \tilde{x} \in C$ tel que : $g_i(\tilde{x}) < 0$ pour tout i .

- **Condition de qualification locale d'indépendance linéaire** : les fonctions g_i et h_j sont toutes différentiables dans un voisinage de \bar{x} et le système formé des gradients de toutes les contraintes actives en \bar{x} est libre c'est-à-dire : $\{\nabla g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x}) j = 1, \dots, q\}$ est libre.

Théorème 4.4.1 Soit $x^* \in C$. On suppose que les fonctions f , g_i et les h_j sont continûment différentiables dans un voisinage de x^* et que les contraintes sont qualifiées en x^* . Alors une condition nécessaire pour que x^* soit une solution optimale locale de (P) est que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda_i^* \geq 0, i = 1, \dots, p, \mu_j^* \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, q \\ \text{tels que} \\ \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0, \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, p. \end{array} \right.$$

Dans le cas convexe la condition nécessaire devient aussi suffisante.

Théorème 4.4.2 (CNS d'optimalité de Kuhn-Tucker)

Soit $x^* \in C$. On suppose que les fonctions f , g_i sont convexes et continûment différentiables dans un voisinage de x^* , les h_j sont affines et que les contraintes sont qualifiées en x^* . Alors x^* est une solution optimale globale de (P) si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda_i^* \geq 0, i = 1, \dots, p, \mu_j^* \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, q \\ \text{tels que} \\ \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0, \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, p. \end{array} \right.$$

Comme dans les cas précédents, on définit la fonction de Lagrange.

Définition 4.4.2 On appelle lagrangien associé au problème (P) avec contraintes d'égalité et d'inégalité, c'est-à-dire

$$\min [f(x) : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, p, h_j(x) = 0, j = 1, \dots, q]$$

la fonction

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \lambda, \mu) &\longmapsto f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x). \end{aligned}$$

On montre alors

Proposition 4.4.1 *Soit $x^* \in C$, on suppose que les fonctions f , les g_i et les h_j sont continûment différentiables dans un voisinage de x^* et que les contraintes sont qualifiées en x^* . Alors une condition nécessaire pour qu'il soit une solution optimale locale de (P) est :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lambda^* \in \mathbb{R}_+^p, \mu_j^* \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, q \text{ tel que :} \\ \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}. \end{array} \right.$$

Chapitre 5

Notion de dualité

5.1 Généralités

5.1.1 Définitions

La notion de dualité introduite dans cette section est très générale.

On suppose donnés deux ensembles X et Y quelconques qui ne doivent donc pas être des espaces vectoriels.

Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On considère le problème d'optimisation

$$(P) \qquad \inf_{x \in X} f(x)$$

que l'on appelle problème primal.

Supposons que l'on puisse représenter $f(x)$ par un supremum

$$f(x) = \sup_{y \in Y} \varphi(x, y) \tag{5.1}$$

où $\varphi : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$.

Lorsque f s'écrit comme ci-dessus, le problème primal devient

$$(P) \qquad \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} \varphi(x, y)$$

On définit

Définition 5.1.1 On appelle problème dual de (P) relatif à φ le problème noté (P^*) et défini par

$$(P^*) \qquad \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \varphi(x, y)$$

Le problème dual consiste à minimiser la fonction

$$y \longmapsto \inf_{x \in X} \varphi(x, y).$$

Pour chaque $y \in Y$, il faut résoudre un problème de minimisation pour connaître la valeur de la fonction à maximiser ! Le problème

$$\inf_{x \in X} \varphi(x, y)$$

est appelé problème interne associé à $y \in Y$.

On peut souvent représenter f comme en (5.1) au moyen de différentes fonctions φ . A chacune d'elles correspond un problème dual différent. Il n'y a pas unicité du problème dual.

5.1.2 Liens entre problèmes primal et dual

La proposition suivante donne une relation entre les valeurs optimales de (P) et (P^*) .

Proposition 5.1.1 *On a*

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \varphi(x, y) \leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} \varphi(x, y). \quad (5.2)$$

Preuve : On a

$$\inf_{x \in X} \varphi(x, y') \leq \varphi(x', y') \quad \forall x' \in X, \forall y' \in Y.$$

En prenant le supremum en $y' \in Y$, on obtient

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \varphi(x, y) \leq \sup_{y \in Y} \varphi(x', y) \quad \forall x' \in X.$$

Le membre de gauche est indépendant de x' , on peut donc prendre l'infimum en $x' \in X$ à droite et garder l'inégalité. Ceci conduit au résultat. \square

En général, lorsqu'on n'a pas égalité en (5.2), les solutions éventuelles des problèmes primal et dual n'ont pas de rapports entre elles. D'autre part, l'existence de solutions primale et duale et l'égalité en (5.2) sont étroitement liés à l'existence de point-selle de φ .

Définition 5.1.2 *On dit que $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ est un point-selle de φ sur $X \times Y$ si on a*

$$\varphi(\bar{x}, y) \leq \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leq \varphi(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Donc $x \mapsto \varphi(x, \bar{y})$ atteint un minimum en \bar{x}
et $y \mapsto \varphi(\bar{x}, y)$ atteint un maximum en \bar{y} .

La proposition suivante précise le lien entre la notion de point-selle et l'existence de solutions pour les problèmes primal et dual.

Proposition 5.1.2 *Un couple de points $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ est un point selle de φ sur $X \times Y$ si et seulement si \bar{x} est solution du problème primal, \bar{y} est solution du problème dual et on a*

$$\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \varphi(x, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} \varphi(x, y). \quad (5.3)$$

Dans ces conditions la valeur en (5.3) est $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$.

Définition 5.1.3 *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ et $Y \subset \mathbb{R}^m$ deux convexes non vides et $\varphi : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que φ est convexe-concave sur $X \times Y$ si :*

i) pour tout $y \in Y$ la fonction

$$\varphi(., y) : X \rightarrow \mathbb{R}$$

est convexe

ii) pour tout $x \in X$ la fonction

$$\varphi(x, .) : Y \rightarrow \mathbb{R}$$

est concave.

On a le theoreme d'existence de points-selles suivant :

Théorème 5.1.1 Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ et $Y \subset \mathbb{R}^m$ deux convexes fermés non vides et

$$\varphi : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

convexe-concave sur $X \times Y$.

On suppose que :

i) X est borné ou bien il existe un $y_0 \in Y$ tel que

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow +\infty \\ x \in X}} \varphi(x, y_0) = +\infty,$$

ii) Y est borné ou bien il existe un $x_0 \in X$ tel que

$$\lim_{\substack{\|y\| \rightarrow +\infty \\ y \in Y}} \varphi(x_0, y) = +\infty.$$

Alors l'ensemble des points-selles de φ sur $X \times Y$ est un compact non vide de $X \times Y$.

5.2 Dualité lagrangienne

On considère le programme mathématique sous la forme générale

$$(P) \quad \alpha = \inf_{x \in C} f(x)$$

où

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \\ x \in X \end{array} \right\}$$

avec

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p, \quad h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q \quad \text{et} \quad X \subset \mathbb{R}^n.$$

On considère le lagrangien associé à (P) suivant :

$$L : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \lambda, \mu) \longmapsto L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle.$$

On montre facilement que

Proposition 5.2.1 On a

$$\alpha = \inf_{x \in X} \sup_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \mu}} L(x, \lambda, \mu)$$

Proposition 5.2.2 On a

$$\sup_{\lambda \geq 0} \inf_{\mu} L(x, \lambda, \mu) \leq \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda, \mu)$$

Considérons la fonction

$$\theta : \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, \mu) \longmapsto \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \mu),$$

c'est-à-dire que

$$\theta(\lambda, \mu) = \inf_{x \in X} [f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle]$$

On définit le dual de (P)

Définition 5.2.1 On appelle dual de (P) relativement au lagrangien L, le programme

$$(D) \quad \beta = \sup_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \mu}} \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \mu).$$

c'est-à-dire

$$\beta = \sup_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \mu}} \theta(\lambda, \mu).$$

La fonction θ est appelée fonction duale.

Par opposition le problème (P) est appelé problème primal et la fonction f , fonction primale.

Remarque 5.2.1 Etant donné un programme mathématique, plusieurs problèmes duals peuvent être obtenus en fonction des contraintes retenues dans le lagrangien.

Le choix est lié aux difficultés qu'on peut rencontrer dans l'évaluation de la fonction duale.

On a la propriété suivante :

Proposition 5.2.3 La fonction duale θ est concave en (λ, μ) .

Théorème 5.2.1 (de dualité faible) Si x et (λ, μ) sont respectivement solutions réalisables de (P) et (D), alors on a $f(x) \geq \theta(\lambda, \mu)$.

On en déduit les résultats suivants :

Corollaire 5.2.1 On a $\alpha \geq \beta$.

Définition 5.2.2 la différence $\alpha - \beta$ est appelée saut de dualité.

Corollaire 5.2.2 Si \bar{x} et $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ sont respectivement solutions réalisables de (P) et (D) et vérifient $f(\bar{x}) \leq \theta(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ alors \bar{x} est solution optimale de (P) et $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ est solution optimale de (D)

Définition 5.2.3 On dit que le problème (P) respectivement (D) est non borné si $\alpha = -\infty$ respectivement $\beta = +\infty$.

Corollaire 5.2.3 Si le problème (P) est non borné alors (D) est impossible c'est-à-dire n'admet pas de solution réalisable. Si le problème (D) est non borné alors (P) est impossible.

Théorème 5.2.2 (de dualité forte) *On suppose dans le problème (P) que X est convexe et non vide, f et g sont convexes c'est-à-dire que les composantes de g sont convexes, h est affine $0 \in \text{int}(h(X))$. Si*

$$\exists \tilde{x} \in X, \text{ tel que } g(\tilde{x}) < 0, \quad h(\tilde{x}) = 0,$$

alors il n'y a pas de saut de dualité c'est-à-dire que $\alpha = \beta$.

En outre, si α est fini et est atteint en un point \bar{x} alors β est fini et est atteint en $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ avec $\bar{\lambda} \geq 0$ et $\langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle = 0$.

On sait que

Proposition 5.2.4 *Si $(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ est un point-selle du lagrangien avec $x^* \in X$, alors x^* est solution optimale de (P) et (λ^*, μ^*) est solution optimale de (D).*

On montre que

Théorème 5.2.3 *On suppose dans le problème (P) que X est convexe et non vide, f et g sont convexes, h est affine, $0 \in \text{int}(h(X))$ et que*

$$\exists \tilde{x} \in X, \text{ tel que } g(\tilde{x}) < 0, \quad h(\tilde{x}) = 0.$$

Si x^ est solution optimale de (P), alors il existe (λ^*, μ^*) réalisable pour (D) tel que $(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ soit un point-selle du lagrangien.*

On a la relation suivante entre point-selle du lagrangien et point de Kuhn-Tucker.

Définition 5.2.4 *On considère le problème (P) avec les fonctions f, g différentiables et h est affine. Si pour $x^* \in C$ il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^p, \mu^* \in \mathbb{R}^q$ tel que*

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0, \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \end{cases}$$

on dit que le point (x^, λ^*, μ^*) est un point de Kuhn-Tucker pour le problème (P).*

On montre que

Théorème 5.2.4 *On suppose que les fonction f, g sont convexes différentiables et que h est affine.*

Si (x^, λ^*, μ^*) est un point de Kuhn-Tucker pour le problème (P) alors il est un point-selle pour le lagrangien.*

Réciproquement, si (x^, λ^*, μ^*) est un point-selle pour le lagrangien avec $x^* \in C, x^* \in \text{int}X$ et $\lambda^* \geq 0$, alors (x^*, λ^*, μ^*) est un point de Kuhn-Tucker pour le problème (P).*

Bibliographie

- [1] Bazaraa, Mokhtar S. and Shetty, C. M., 1979. Nonlinear Programming Theory and Algorithms, *John Wiley and Sons*.
- [2] Bazaraa, Mokhtar S. and Shetty, C. M., 1976. Foundations of Optimization, *Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems, No 122, Springer-Verlag New-York*.
- [3] Bergounioux Maïtine, 2001. Optimisation et Contrôle des systèmes linéaires, *Donod*.
- [4] Bertsekas, Dimiri P. 1995. Non Linear Programming, *Athena Scientific*.
- [5] Bonnans, J. Frédéric and Shapiro, Alexander 2000. Perturbations Analysis of Optimization Problems, *Springer*.
- [6] Culioli, Jean-Christophe, 1994. Introduction à l'optimisation, *Ellipses*.
- [7] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste, 1998. Optimisation et Analyse Convexe, *Presse Universitaire de France*.
- [8] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste and Lemaréchal, Claude, 1993. Convex Analysis and Minimization algorithms, *Vol I et II Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 305 and 306, Springer-Verlag*.
- [9] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste, 1996. L'Optimisation, in collection "Que sais-je?", *Presse Universitaire de France*.
- [10] Minoux, Michel, 1983. Programmation mathématique : Théorie et Algorithmes, Vol I, *Dunod*.
- [11] Rockafellar, R. Tyrrel, 1970. Convex Analysis, *Princeton University Press, Princeton N. J.*
- [12] Roberts, A. Wayne and Varberg, Dale E., 1973. Convex Functions, *Academic Press*.