

Chap 2

L'équation de la chaleur (19)

I. Un pas de modélisation à la Fourier



On a une barre de fer de longueur L et on veut décrire la distribution de température

le long de cette barre, chauffée par une source extérieure

notée $f(t, x) \quad \{ x \in [0, L]$

$\} t \geq 0$ - car la chaleur va varier

Soit $T(t, x)$ température au temps $t \geq 0$ et à la position $x \in [0, L]$. On veut estimer T . L'énergie interne contenue dans la barre de fer entre deux pts

a et b s'écrit $E(t) = \int_a^b \rho c T(t, x) dx$

ρ densité du matériel

c capacité thermique

Soit $Q(t, x)$ le flux de la chaleur. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit

$$\frac{d}{dt} E(t) = Q(t, a) - Q(t, b) + \underbrace{\int_a^b f(t, x) dx}_{\text{chauffage extérieur}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_a^b \rho c T(t, x) dx - \int_a^b \frac{\partial Q(t, x)}{\partial x} dx = \int_a^b f(t, x) dx$$

Si $T \in \mathcal{C}^1$ en (t_1, x)

$$\Leftrightarrow \int_a^b \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t}(t_1, x) - \frac{\partial Q}{\partial x}(t_1, x) dx \right) = \int_a^b f(t_1, x) dx$$

$\forall a, b \in [0, L]$
 $x \in [a, b]$

Maintenant si $b \rightarrow \infty$, on obtient

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t}(t_1, x) - \frac{\partial Q}{\partial x}(t_1, x) = f(t_1, x) \quad \forall t \geq 0$$
$$\forall x \in [0, L]$$

Fourier a montré que par des expériences que le flux de chaleur est inversement proportionnel à gradient de température $Q(t_1, x) = -\sigma \frac{\partial T}{\partial x}(t_1, x)$
où σ - conductivité thermique.

(Loi Fourier)

On obtient alors l'équation aux dérivées partielles

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}(t_1, x) - \frac{\sigma}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t_1, x) = \frac{1}{\rho c} f(t_1, x)} \quad 0 \leq x \leq L$$
$$t \geq 0$$

On l'appelle l'équation de la chaleur. On doit pour pouvoir calculer des solutions imposer une donnée initiale et des conditions aux limites T_0 et T_1 . Dans toute la suite, on va donc s'intéresser à l'existence, à l'unicité, à la régularité et à

Definition 1

d'ensemble des fonctions périodiques de carré intégrable sur l'ensemble $[0, T]$ est défini comme

$$\mathcal{L}_{\text{per}} = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables : } f \text{ T-périodique et } \int_0^T |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}$$

Proposition

d'espace $\mathcal{L}([0, T])$ est un espace complet (de Hilbert) muni d'un produit scalaire $(f, g) = \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt$. Il est donc un espace de Hilbert.

$$\text{On notera } \|f\|_2 = (f, f) = \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

Definition 2

On appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à $N \in \mathbb{N}$, toute fonction de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \sum_{m=-N}^N c_m e^{2i\pi m t / T} \quad (c_m)_{m=-N}^N \in \mathbb{C}$$

monome trigonométrique : $e_m(t) = \exp(2i\pi m \frac{t}{T}) \quad t \in \mathbb{R}$

$$P_N = \left\{ \text{polynômes trigonométriques de degré } \leq N \right\}$$

Evidemment $P_N \subset \mathcal{L}_{\text{per}}([0, T])$, car tout monome trigonométrique est continue, donc carré intégrable.

Prop 2

\mathcal{P}_N est un sous-espace vectoriel de $L^2_{\text{per}}([0, T])$ de dimension $2N+1$.

Interessons nous aux propriétés élémentaires des monomes trigonométriques,

1- Si $m, n \in [-N, N]$,

$$\begin{aligned}
 (\epsilon_m, \epsilon_n) &= \int_0^T \epsilon_m(t) \overline{\epsilon_n(t)} dt \\
 &= \int_0^T \exp(i\omega \pi m \frac{t}{T}) \exp(-i\omega \pi n \frac{t}{T}) dt \\
 &= \int_0^T \exp(i\omega \pi (m-n) \frac{t}{T}) dt \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ T & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

2- En particulier, si $P \in \mathcal{P}_N$,

$$\begin{aligned}
 (P, \epsilon_m) &= \left(\sum_{m=-N}^N c_m \epsilon_m, \epsilon_m \right) \quad \text{produit sc bil. sym} \\
 &= \sum_{m=-N}^N c_m (\epsilon_m, \epsilon_m) \\
 &= T c_n
 \end{aligned}$$

3- Conséquence de (2)

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} (P, \epsilon_n) = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) e^{-i\omega \pi n \frac{t}{T}} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P(t) \exp(-i\omega \pi \frac{tn}{T}) dt
 \end{aligned}$$

Remarque

Cette dernière identité permet d'établir que

$$* P \text{ pair} \Leftrightarrow c_m = \bar{c}_m \quad \forall n$$

$$\leftarrow P \text{ impair} \Leftrightarrow c_n = -\bar{c}_n \quad \forall n$$

Prop 3 (Parseval)

Soit $P = \sum_{m=-N}^N c_m e_m \in \mathcal{P}_N$

$$\frac{1}{T} \|P\|_2^2 = \sum_{m=-N}^N |c_m|^2$$

Preuve

$$\begin{aligned} \|P\|_2^2 &= (P, P) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N c_m \bar{c}_n (e_m, e_n) \\ &= \sum_{m=-N}^N T |c_m|^2 \end{aligned}$$

□

2- Approximation par des polynômes orthogonaux

On va maintenant chercher à approcher une fonction $f \in L^2_{per}([0, T])$ par un polynôme trigonométrique de degré fixé $N \in \mathbb{N}$.

Pour approximation, on va en fait chercher à minimiser une certaine norme

$$\min_{c_m \in \mathbb{C}^{2N+1}} \|f - \sum_{m=-N}^N c_m e_m\| \quad (1)$$

C'est-à-dire à approcher f au sens des
"moindres carrés continues"

Théorème 1

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $f \in L_{per}(0, T)$. Alors le polynôme trigonométrique résolvant le problème de moindres carrés (1) est donné par

$$f_N = \sum_{m=-N}^N c_m(f) e_m \in P_N$$

et $c_m(f) = -\frac{1}{T} (f, e_m)$ est appelé $m^{ième}$ coefficient de Fourier de la fonction f .

On appelle parfois f_N la série de Fourier tronquée à l'ordre N de f .

Preuve

Soit $P = \sum_{m=-N}^N z_m e_m \in P_N$. On cherche à

minimiser $\|f - P\|$ en choisissant correctement

$$(z_m) \in \mathbb{C}^{2N+1}.$$

$$\begin{aligned} \|f - P\|^2 &= \|f\|^2 + \|P\|^2 - 2 \operatorname{Re}(f, P) \\ &= \|f\|^2 + T \sum_{m=-N}^N |z_m|^2 - 2 \operatorname{Re}(f, \sum_{m=-N}^N z_m e_m) \\ &= \|f\|^2 + T \sum_{m=-N}^N [|z_m|^2 - 2 \operatorname{Re}(\underbrace{\overline{z_m} f, e_m}_{T c_m(f)})] \end{aligned}$$

Bon

$$||f||^2 = ||f||_2^2 + T \sum_{m=-N}^N [|\alpha_m - c_m(f)|^2 - |c_m(f)|^2]$$

On complète
le bon

Peut Ainsi, $\|f - P\|$ sera minimal si
 $\alpha_m = c_m(f) \quad \forall n$ □

- Defi
- Prop 4
- Int Soient $N \in \mathbb{N}$, $f \in L_{per}(0, T)$, on a :
- 1- $\|f\|^2 = \|f - f_N\|^2 + T \sum_{m=-N}^N |c_m(f)|^2$
- Or
- 2- Inégalité de Bessel $\sum_{m=-N}^N |c_m(f)|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_2^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - 3- La série de terme général $(c_m(f))_{m \in \mathbb{Z}}$ converge dans $L^2(\mathbb{Z})$
 - 4- $\lim_{m \rightarrow \pm\infty} |c_m(f)| = 0$ (2)

$$\sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Théorème 2

Si $f \in L_{per}(0, T)$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f_N - f\|_2 = 0$

On peut donc approcher f aussi précisément que l'on veut par ses séries de Fourier tronquées.

Sos x :

Torsionnaire (Identité de Parseval)

$$\|f\|_2^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(f)|^2$$

Peut-on faire mieux ? Oui, si l'on demande plus à f !

Définition 3

Introduisons pour $N \in \mathbb{N}$ le noyau de Dirichlet

$$D_N = \sum_{m=-N}^N e_m \quad D_N - \text{polynôme trigo. } \in P_N$$

$$\text{D'où : (i) } D_N(t) = \sum_{m=-N}^N e^{2\pi i m t / T} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})2\pi t / T)}{\sin(\pi t / T)}$$

$$\text{(ii) } \int_0^T D_N(t) = \sum_{m=-N}^N (e_m, 1) = T \quad \in \mathbb{R}$$

$$\text{(iii) Si } f \in L_{per}^2(0, T),$$

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \sum_{m=-N}^N c_m(f) e_m(t) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-N}^N \left(\int_0^T f(s) \overline{e_m(s)} ds \right) e_m(t) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(s) \sum_{m=-N}^N \overline{e_m(t-s)} ds \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) \overline{D_N(t-s)} ds$$

$$= (f, s \longrightarrow D_N(t-s))$$

Théorème de Dirichlet

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, T -périodique. Si il existe $T_0 \in [0, T]$ tq $\lim_{s \rightarrow T^-} f(s) \rightarrow f(T_0^-)$, $f(T_0^+)$, $f'(T_0^-)$ existent alors $f_N(T_0) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{f(T_0^+) + f(T_0^-)}{2}$

Gorollaire

Si f est continue et dérivable en T_0 , alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(T_0) = f(T_0)$$

(Si f est discontinue, on obtient le phénomène de

Gibbs pour N grand (la fonction oscille même))

Et que se passe-t-il si f est plus régulier ?

Théorème 4

Si f est continue, T -périodique et dérivable sauf essentiellement en un nombre fini de points, alors on a :

1- Convergence absolue : de la série de Fourier

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(f)| < +\infty$$

2- Convergence uniforme : de la série de Fourier

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f_N - f\|_\infty = 0$$

3- Si f' est continue et f'' continue par morceaux (i.e., on rajoute un cran de dérivabilité), alors on peut dériver les coefficients de la série de Fourier

$$f' = \sum_{m \in \mathbb{Z}} C_m(f') e^{imt} = \frac{2i\pi}{T} \sum_{m \in \mathbb{Z}} m C_m(f) e^{imt}$$

Preuve (3)

f' est continue et f'' est défini partout sauf en un nombre fini de points, donc $\|f_N - f'\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

Calculons $C_m(f')$. On a vu que f' est \mathcal{C}' par morceaux (hypothèse minimale pour faire des IPP, par le théorème fondamental de l'analyse). On peut donc faire une intégration par partie (IPP)

$$\begin{aligned} C_m(f') &= \frac{1}{T} \int_0^T f'(t) e^{-2\pi i m \frac{t}{T}} dt \\ &= \frac{1}{T} \left[f(t) e^{-2\pi i m t / T} \right]_0^T + \frac{2\pi i m}{T^2} \int_0^T f(t) \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \left[e^{-2\pi i m t / T} \right]}_{g(t) - g(0) = 0} dt \\ &\quad \text{car } g \text{ est } T \text{ périodique} \end{aligned}$$

donc $C_m(f') = \frac{2\pi i m}{T} f_m(f)$.

En particulier $f'(t) = \frac{2i\pi t}{T} \sum_{m \in \mathbb{Z}} m C_m(f) e^{imt}$



Ainsi, dériver une fonction périodique revient à multiplier par $\frac{2\pi i}{T} m$ son m^{iem} coeff. de Fourier (G)

Corollaire

Si $f \in \mathcal{B}^{k+1}(\mathbb{R})$ et T -périodique,

$$c_m(f^{(k)}) = i^k \left(\frac{2\pi}{T}\right)^k m^k c_m(f)$$

{ k^{ieme} coeff de Fourier de la dérivé k^{ieme} de f }

Théorème 5

Si $f \in \mathcal{S}^k(\mathbb{R})$, T -périodique, $n \geq 2$, alors

$\forall N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ telle que

$$\|f - f_N\|_2 \leq \frac{c}{N^{k+1}}$$

17/10/2023

N1 Preuve du théorème sur l'eq de la chaleur

Commençons par remarquer que si $P \in \mathcal{P}_N$, il existe $(c_m) \in \mathbb{C}^{2N+1}$, $P(t) = \sum_{m=-N}^N c_m e^{2i\pi m t/T}$

$$P(t) = c_0 + \sum_{m=1}^N [c_m e^{-2\pi i m t/T} + c_m e^{2\pi i m t/T}]$$

Si l'on pose $a_m = \frac{c_m + \bar{c}_m}{2}$, $b_m = i \left(\frac{c_m - \bar{c}_m}{2} \right)$

$$\text{alors } P(t) = a_0 + \sum_{m=1}^N \left[a_m \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) \right]$$

$$\text{On a donc } a_m = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) dt \in \mathbb{R}$$

$$b_m = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) dt \in \mathbb{R}$$

Pour des raisons de T -périodicité et paire, on trouve :

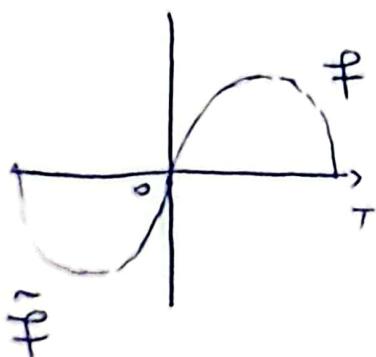
$$\begin{aligned} P \text{ paire} &\Leftrightarrow c_m = \bar{c}_m \quad \forall m \\ &\Leftrightarrow b_m = 0 \quad \forall m \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \text{ impaire} &\Leftrightarrow c_m = -\bar{c}_m \quad \forall m \\ &\Leftrightarrow a_m = 0 \quad \forall m \geq 1 \end{aligned}$$

En conséquence, si $f \in L^1_{per}(0, T)$, quitte à remplacer f par sa version symétrique par rapport à 0 $\tilde{f} \in L^1_{per}(0, 2T)$. \tilde{f} impaire et

$$c_m(f) = \frac{b_m(f)}{2} \quad \text{et}$$

$$a_m(f) = 0 \quad \forall m \geq 0$$



On ne va plus considérer que des fonctions impaires.

$$\partial b_m(u(t,\cdot)) = \pm \int_0^2 \pi u(t-\frac{1}{\pi}m) dx$$

On s'intéresse donc aux solutions $u(t,x)$ de

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 & t \geq 0, x \in [0,1] \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{donnée } x \in [0,1] \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \end{cases}$$

On va se placer dans le cadre $u_0 \in L^2_{per}(0,2)$
 (par abus $u_0 = \hat{u}_0$, la symétrique de u_0). La solution
 u sera définie sur $[0,2]$ et on la restreindra à
 $[0,1]$.

Preuve du théorème sur l'eq de la chaleur

Commençons par unicité et formule de représentation
 Soit u solution de (1), Nécessairement $u(\cdot, x) \in C([0,+\infty[\times [0,1])$
 et $u(t, \cdot) \in \mathcal{C}([0,2])$, $\forall (t,x) \in [0,+\infty[\times [0,1]$

Les fonctions $\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, \cdot)$ admettent donc

un dev. en série de Fourier avec convergence absolue

$$u(t,x) = \sum_{m \geq 1} b_m(u(t,\cdot)) \sin(\pi m x)$$

$$b_m(u(t,\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^2 u(t,x) \sin(\pi m x) dx$$

Regardons les séries de Fourier de $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\text{Calculons } \frac{\partial}{\partial t} b_m(u(t,\cdot)) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^2 u(t,x) \sin(\pi m x) dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t} b_m(u(t, \cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \sin(\pi m x) dx$$

(26)

$$= b_m \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right)$$

par convergence
dominée de
Lebesgue car $u \in \mathcal{C}^1$
donc intégrable.

Ainsi $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m \geq 1} b_m(u(t, \cdot)) \sin(\pi m x)$

$$\sum_{m \geq 1} b_m(u(t, \cdot)) \xrightarrow{\quad} \sum_{m \geq 1} b_m \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right) \sin(\pi m x)$$

Converge absolument

Séparation de variables.

Le premier terme dépend de t

Le second terme dépend de x

D'autre part $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{m \geq 1} b_m(u(t, \cdot)) \sin(\pi m x)$

$$= \sum_{m \geq 1} b_m(u(t, \cdot)) (-\pi^2 m^2) \sin(\pi m x)$$

Finallement, $0 = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$= \sum_{m \geq 1} b_m \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right) \sin(\pi m x)$$

$$- \sum_{m \geq 1} (-\pi^2 m^2) \sin(\pi m x)$$

$$b_m(u(t, \cdot))$$

avec CV absolue.

$$= \sum_{m \geq 1} \left[\frac{\partial}{\partial t} (b_m(u(t, \cdot))) + \pi^2 m^2 b_m(u(t, \cdot)) \right]$$

En particulier, $\forall m \geq 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (b_m(u(t, \cdot))) + \pi^2 m^2 b_m(u(t, \cdot)) = 0 \\ b_m(u(0, \cdot)) = b_m(u_0) \text{ donnée} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(t) + \pi^2 m^2 y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Donc } y(t) = y_0 e^{-\pi^2 m^2 t} \Leftrightarrow b_m(u(t, \cdot)) = b_m(u(0, \cdot)) e^{-\pi^2 m^2 t}$$

$$\text{Enfin } u(t, x) = \sum_{m \geq 1} b_m(u(t, \cdot)) \sin(\pi m x)$$

$$= \sum_{m \geq 1} b_m(u_0) e^{-\pi^2 m^2 t} \sin(\pi m x) \quad (*)$$

D'où l'unicité et la formule

Existence: Dès que $u_0 \in L^2_{per}(0, 1)$, la formule (*)
à un sens car $(e^{-\pi^2 m^2 t})_{m \geq 1}$ décroît plus

vite que tout polynôme et $(b_m(u_0))_{m \geq 1}$ est sommable.

On a donc exhibé une solution.



Corollaire: Convergence exponentielle vers 0 en norme L^2 de la solution u de (1)

$$\int_0^1 u^2(t, x) dx = \|u(t, \cdot)\|_2^2 \leq e^{-2\pi^2 t} \|u_0\|_2^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (27)$$

Preuve

De deux manières différentes

(1) Avec la formule de représentation

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_2^2 &= \sum_{m \geq 1} |b_m(u(t, \cdot))|^2 = \sum_{m \geq 1} |b_m(u_0)|^2 e^{-2\pi^2 m t} \\ \text{Identité de Parseval} &\leq e^{-2\pi^2 t} \sum_{m \geq 1} |b_m(u_0)|^2 = e^{-2\pi^2 t} \|u_0\|_2^2 \end{aligned}$$

↑
Parseval.

(2) Sans cette formule (et sans Parseval)

Soit $u \in C([0, +\infty] \times [0, 1])$ solution de (1).

Calculons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 u^2(t, x) dx &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (u^2(t, x)) dx \\ &= \int_0^1 2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot u(t, x) dx \\ &= \int_0^1 2u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \frac{d}{dt} \int_0^1 u^2(t, x) dx &= 2 \left[u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right]_0^1 \\ &\quad - 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx \\ &\quad \underbrace{- 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx}_{\geq 0} \end{aligned}$$

R. On a $u(t_1, x) \frac{\partial u(t_1, x)}{\partial x} \Big|_0 = 0$ car $u(0, x) = 0$
 Ainsi $\frac{d}{dt} \|u(t_1, \cdot)\|_2^2 \leq 0$, donc $\|u(t_1, \cdot)\|_2$ décroît

Théorème (Inégalité de Poincaré)

Soit $f \in L^2(0,1)$ tq $\int_0^1 f(x) dx = 0$, alors si

$f \in C([0,1])$ alors $\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq (2\pi) \int_0^1 |f(x)|^2 dx$

Preuve

$f \in L^2(0,1) \Rightarrow f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e^{2\pi i mx}$
 or $\int_0^1 f(x) dx = c_0(f) = 0$, où $f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e^{2\pi i mx}$
 par définition

Donc $\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} |c_m(f)|^2$ et $m \neq 0, m^2 \geq 1$
 $\leq \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} m^2 |c_m(f)|^2$

On a vu que $c_m(f') = 2\pi i m c_m(f)$

$$= \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} \frac{|c_m(f')|^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx$$

par définition □

Revenons à la température. On a

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) dx = 0 \quad \text{dans l'inégalité de Poincaré}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right)^2 dx \geq (2\pi)^2 \int_0^1 (u(t, x))^2 dx$$

$$\text{Donc } \frac{d}{dt} \int_0^1 u^2(t, x) dx \leq (2\pi)^2 \int_0^1 u^2(t, x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u^2(t, x) dx \leq e^{-4\pi^2 t} \int_0^1 u_0^2(x) dx \quad \square$$

Remarque Comme $b_m(u(t, \cdot)) = e^{-\pi^2 m^2 t} b_m(u_0)$

implique que $|b_m(u(t, \cdot))| \leq C_0 e^{-\pi^2 m^2 t}$ et donc

$u(t, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty([0, 1])$ si $t > 0$ (On a vu thm 4
équivalence et on $f \in \mathcal{C}^2$ et $|b_m(f)| \leq \frac{C}{m^2}$).

On appelle cela "caractère instantanément régularisant"
de l'éq de la chaleur si $u_0 \in \mathcal{C}^1$, $u(t, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty$
disque $t > 0$

IV Resolution Différences Finies de l'éq chaleur

On vient de voir que les solutions $u(t, x)$ de (1)
sont très régulières, on a (au moins \mathcal{C}^4). On a
donc envie de les approcher en x par le schéma aux
différences finies vu au chap précédent.

Fixons $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_j = jh$, $j \in \mathbb{Z}^+$

notons $v_j^m = \dots$ $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (Encore) un peu d'algèbre linéaire

Q.1)

Notons $A_{0h} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & & \\ & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ pour $N \in \mathbb{N}^*$
 $h = \frac{1}{N+1}$

(A) Théorème
Soit $N \in \mathbb{N}^*$, les valeurs propres $(\lambda_j)_{j=1}^N$ de A_{0h} sont données par $\lambda_j = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi j}{2(N+1)} \right) \quad j \in \{1, \dots, N\}$

Preuve

A_{0h} est symétrique définie positive, donc les $\lambda_j > 0$
existe $\lambda_j \in \mathbb{R}$ vérifiant $\exists \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ tq

$$A_{0h}V = \lambda_j V.$$

Le problème aux valeurs propres est l'analogie

Diff. finies de " Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{S}([0, 1])$ tq

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Le problème continu admet pour solution

$$u(x) = \sin(\sqrt{\lambda} x) \text{ pour } \lambda = (m\pi)^2, m \in \mathbb{Z}$$

Remarque : la famille $((m\pi)^2, \sin(m\pi x))$ est la famille des éléments propres de l'opérateur $-u''(x)$

Fixons $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_j = jh$, $j \in \{1, \dots, N\}$ et

notons $v_j^m = \sin(\pi m \lambda_j)$ et $v_N^m = \begin{pmatrix} v_1^m \\ \vdots \\ v_N^m \end{pmatrix}$

$$\text{On a } (A_{0h} v^m)_j = \frac{-v_{j+1}^m + 2v_j^m + v_{j-1}^m}{h^2} \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$$

-Cas par construction $\begin{cases} v_0^m = u(0) = 0 \\ v_{N+1}^m = u(1) = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} (A_{0h} v^m)_j &= \frac{1}{h^2} \left[-\sin(\pi m (j+1)h) + 2 \sin(\pi m j h) \right. \\ &\quad \left. - \sin(\pi m (j-1)h) \right] \\ &= \frac{1}{h^2} \left[-\sin(\pi m h) \cos(\pi m j h) - \sin(\pi m j h) \cos(\pi m h) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin(\pi m j h) \right] + \sin(\pi m h) \cos(\pi m j h) \\ &\quad - \sin(\pi m j h) \cos(\pi m h) \\ &= \frac{2 \sin(\pi m j h)}{h^2} \left[-\cos(\pi m h) + 1 \right] \\ &= \frac{4}{h^2} \sin(\pi m j h) \sin^2\left(\frac{\pi m h}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $(A_{0h} v^m)_j = \alpha_j v_j^m$ et α_j est vp de A_{0h} de valeur propre $v^m \in \mathbb{R}^N$ \square

Remarque (1) Il reste à montrer que les α_j ainsi trouvés sont bien tous distincts.

2) On vient de diagonaliser la matrice A_{0h} vu que

$P = (v^0, v^1, \dots, v^{N-1}) \in M_{N,N}(\mathbb{R})$, alors

$$A_{\text{oh}} = \bar{P}^{-1} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} & 0 \\ 0 & I_N \end{pmatrix} P$$

14/11/23

On a donc vu que la matrice A_{oh} est diagonalisable dans une base de valeurs propres (v_h^0, \dots, v_h^N) explicite

IV.2] Discretisation(s) du problème de la chaleur

On s'intéresse à l'approximation des solutions u de (1) sur une grille $(x_j)_{j=1}^N$. On a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x_j) = 0 \quad \forall t > 0 \\ 1 \leq j \leq N$$

En particulier, $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_j) - A_{\text{oh}} u(t, x_j) = R_j$.

De plus, on a vu que $u \in \tilde{\Sigma}([0, +\infty[\times]0, 1[)$. Donc

$$|R_j| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x^2}(t, \cdot) \right\|_\infty h^2, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Il est donc raisonnable d'approcher cette dernière équation par

Forme semidiscrete (3) de (1)

$$\begin{cases} u'_h(t) - A_{\text{oh}} u_h(t) = 0_N & t > 0 \\ u_h(0) = \begin{pmatrix} u_h(x_0) \\ \vdots \\ u_h(x_N) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{pmatrix}$$

$$u_j(t) \approx u(t, x_j)$$

* Première tentative : $A_{th} = P_h D \tilde{P}_h^T$

D'après le thm 5, on a :

$$\text{où } D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } CS &\Leftrightarrow u_n(t) - P_h D \tilde{P}_h^T u_n(t) = 0_N \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\tilde{P}_h^T u_n(t)}_{w_n(t)} - \underbrace{D \tilde{P}_h^T u_n(t)}_{w_h(t)} = 0_N \\ &\Leftrightarrow w_n(t) - D w_h(t) = 0_N \end{aligned}$$

que l'on associe à la donnée initiale $w_0 = \tilde{P}_h^T u_0$

$$\text{Donc } w_h(t) = e^{Dt} w_0 \quad \text{et} \quad e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{d_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_N t} \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } w_n(t) = \begin{pmatrix} e^{d_1 t} & & w_0(1) \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_N t} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_h(t) = \tilde{P}_h w_h(t)$$

Problème: On ne connaît pas \tilde{P}_h^T . Le calculer coûterait cher (N pivots de Gauss, soit $\frac{4}{3}N^4 + O(N)$ opérations) !

* Deuxième tentative

Faisons des différences finies en temps. C'est ce qu'on appelle plus communément un schéma à un pas. L'équation (3) s'écrira de manière prototypique

Trouvons $y : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^N$ de classe \mathcal{C}^1 , solution de $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) & t \in [0, +\infty[\\ (4) \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^N \end{cases}$

$$\text{où } y(t) = u_n(t) \quad f(y(t)) = A u_n y(t)$$

Utilisons un schéma à un pas pour résoudre ce problème autonome. Soit $T > 0$ fini.

Introduisons $\Delta t > 0$ et subdivisons $[0, T]$ en M sous intervalles d'extrémités

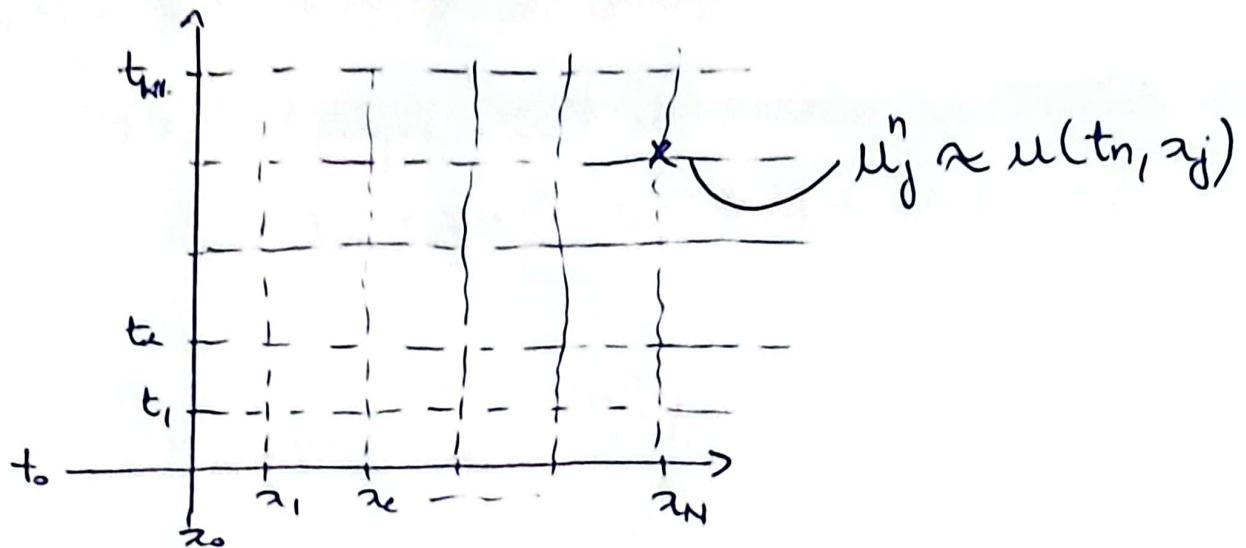
$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_{M-1} < t_M = T$$

On a $t_{n+1} - t_n = \Delta t \quad \forall n \Leftrightarrow t_n = n \Delta t$. On cherche

une approximation y^n de $y(t_n)$

Remarque Comme $y = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{pmatrix} \quad y^n \approx \begin{pmatrix} u_1(t_n) \\ \vdots \\ u_N(t_n) \end{pmatrix}$

Si $0 \leq n \leq M$, on a donc une approximation sur une grille bidimensionnelle



IV 3 | Sur les méthodes à un pas de Runge-Kutta

Bonne Ref Tous
de Hairer et
Wanner - Lausanne

Le problème (4) est équivalent à trouver

$y_t : [0, t_N] \rightarrow \mathbb{R}^N$ solution de

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s)) ds$$

En particulier, si y est une telle solution

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(s)) ds$$

Utilisons de l'intégration numérique pour approcher cette intégrale sur $[t_n, t_{n+1}]$.

* Rectangle à gauche : On approche $\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s) ds$ par $(t_{n+1} - t_n) g(t_n) \rightsquigarrow y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + \Delta t f(y(t_n))$

On obtient le schéma de Euler explicite (EE)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ y_0 \text{ donné} \end{cases}$$

* Rectangle à droite : $\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s) ds \approx \Delta t y(t_{n+1})$.

On obtient le schéma de Euler Implicit (EI)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{\lambda} [f(y_{n+1})] & 0 \leq n \leq M-1 \\ y_0 \text{ donné} \end{cases}$$

* Trapeze $\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s) ds \approx \frac{\Delta t}{2} [g(t_n) + g(t_{n+1})]$

On obtient le schéma de Crank Nicolson

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2} [f(y_n) + f(y_{n+1})] \\ y_0 \text{ donné} & 0 \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

* Méthodes de Runge Kutta : On se donne q réels

c_1, \dots, c_q (pas nécessairement distincts). On va les utiliser pour (sous) subdiviser l'intervalle

$[t_n, t_{n+1}]$ en des instants "intermédiaires"

$$t_{n,i} = t_n + c_i \Delta t$$

$$\text{On a donc } y(t_{n,i}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(y(s)) ds$$

On a donc besoin de savoir approché

$$\int_0^{c_i} f(s) ds \approx \sum_{j=1}^q a_{ij} f(c_j) \quad 1 \leq i \leq q$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^1 f(s) ds \approx \sum_{j=1}^q b_j f(c_j) \quad b_j \in \mathbb{R}$$

En utilisant ces approximations, on trouve

$$y(t_{n,i}) = y(t_n) + \Delta t \sum_{j=1}^q a_{ij} f(y(t_{n,j})) \quad \forall 1 \leq i \leq q$$

les valeurs "intermed

Ainsi, on peut calculer $y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + \Delta t \sum_{j=1}^q b_j f(c_j)$

Definition

On appelle méthode de Runge Kutta tout schéma à pas de la forme

$$\begin{cases} y_{n,i} = y_n + \Delta t \sum_{j=1}^q a_{ij} f(y_{n,j}) & 1 \leq i \leq q \\ y_{n+1} = y_n + \Delta t \sum_{j=1}^q b_j f(y_{n,j}) \end{cases}$$

Il doit à un mathématicien néo-zélandais, Butcher
La notation dite de "tableau de Butcher"

c_1	$a_{q,1}, \dots, a_{q,n}$
\vdots	\vdots
c_q	$\frac{a_{q,1}}{b_1}, \dots, \frac{a_{q,q}}{b_q}$

$$y_{n,j} \approx y(t_n + c_j \Delta t)$$

Exemple $q=1$ $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$ est la méthode de Euler Explicite

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n,1} = y_n + \Delta t \times 0 = y_n \\ y_{n+1} = y_n + \Delta t \times 1 f(y_n) \end{array} \right.$$

* $\begin{array}{c|cc} 1 & 1 \\ \hline & 1 \\ b & \end{array}$ est la méthode de Euler Implicité

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n,1} = y_n + \Delta t \times 1 f(y_{n,1}) \\ y_{n+1} = y_n + \Delta t \times 1 f(y_{n+1}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n,1} = y_n + \Delta t \times 1 f(y_{n,1}) \\ y_{n+1} = y_n + \Delta t \times 1 f(y_{n+1}) \end{array} \right.$$

$$y_{n,1} \approx y(t_{n,1}) = y(t_n + 1 \cdot \Delta t) = y(t_{n+1})$$

$$\underline{q=2}$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline \alpha & \alpha & 0 \\ \hline 1 - \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n,1} = y_n + 0 = y_n \\ y_{n,2} = y_n + \Delta t \times \alpha f(y_{n,1}) \\ y_{n+1} = y_n + \Delta t \left[\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(y_n) + \frac{1}{2\alpha} f(y_{n,2}) \right] \end{array} \right.$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, méthode de Euler Améliorée (quadrature du point milieu)

Si $\alpha = 1$, méthode de Heun

$q=4$: LA méthode de Runge Kutta (RK4)

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

qui correspond à

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n,1} = y_n \\ y_{n,2} = y_n + \Delta t \times \frac{1}{2} f(y_{n,1}) \\ y_{n,3} = y_n + \Delta t \times \frac{1}{2} f(y_{n,2}) \\ y_{n,4} = y_n + \Delta t \times \frac{1}{2} f(y_{n,3}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6} [f(y_n) + 2f(y_{n,2}) + 2f(y_{n,3}) + f(y_{n,4})] \end{array} \right.$$

$q=2$

$$\begin{array}{c} \theta \\ \frac{1}{2} \\ \theta \end{array} \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \theta & 1-\theta \\ \theta & \theta & 1-\theta \end{array} \sim \begin{array}{l} \text{θ-schéma, qui correspond} \\ \text{à Crank-Nicolson pour} \\ \theta = \frac{1}{2} \end{array}$$

implicite

Remarque Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq q}$ la matrice apparaissant dans le Tableau de Butcher

- Si A est triangulaire strictement inférieur ($a_{ij} = 0$ si $i \leq j$) la résolution du schéma se fait

étape par étape \rightsquigarrow le schéma est explicite

- Si A est triangulaire inférieur ($a_{ij} = 0$ si $i < j$),
la résolution du schéma consiste pour chaque étape $1 \leq j \leq q$ à résoudre de "proche en proche" une équation implicite en $y_{n,j}$ \rightsquigarrow méthode diagonale implicite

DIRK

(Implicite, Runge Kutta)

- Si A est pleine, la méthode est totalement implicite et on doit donc résoudre d'un bloc un système non-linéaire à q inconnues dans \mathbb{R}^N

Théorème (Stabilité pour RK)

Supposons $N=1$ et $\Delta t \cdot \rho(|A|) \Delta t < 1$ ($\rho(|A|)$ plus grande valeur propre de A). Alors le schéma de RK admet une unique solution et le schéma est stable (Δt étant la constante de Lipschitz de f)

Corollaire

Dans le cas explicite, la diagonale de A étant composée de 0, $\rho(|A|) = 0$ aussi et la condition est toujours satisfaite.

Théorème (Consistance et ordre)

On appelle qu'un schéma à un pas stable et constant

est convergent si $\max_{0 \leq n \leq M-1} |y_n - y(t_n)| \rightarrow 0$

Un schéma de RK est consistant si

$$c_i = \sum_{j=1}^q a_{ij} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^q b_j = 1$$

Le schéma sera d'ordre 2 si en plus $\sum_{j=1}^q c_j b_j = \frac{1}{2}$

preuve

Crouzein - Mignot
Dunod.

IV. 4] Stabilité dans le cas général

Tes méthodes sont consistantes et d'un ordre p en Δt potentiellement grand ($p=4$ pour RK) mais la stabilité lorsque N est grand peut être subtile. Si on faisait les preuves, on obtiendrait

$$\max_{0 \leq n \leq M-1} |y_n - y(t_n)| \leq (\Delta t)^p e^{N \|A\|_\infty T}$$

et la constante dépend de Δt .

Pour étudier plus précisément cet erreur, on a tendance à utiliser le test de Dahlquist