

## Séries temporelles, CORRIGÉ du contrôle no 3, sujet A

*Documents et calculatrices interdits. Rendre l'énoncé avec la copie (+0,5 point!). Pour le QCM : répondre sur la copie, sans justification, une seule réponse par question, un point par réponse juste (zéro pour une réponse fausse).*

DURÉE : 2h.

### 1. QCM (6 POINTS)

- (1) (d) (Définition 3.2).
- (2) (a) (Voir proposition 4.3).
- (3) (a) (Voir section 4.5).
- (4) (a) (Voir section 1.2).
- (5) (a).
- (6) (c) (Voir section 6.2).

### 2. EXERCICES

#### (1) (7 points)

(a) Puisque le processus est stationnaire, nous avons pour tout  $t$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t) &= \frac{\mathbb{E}(X_t)}{2} + 0 \\ \mathbb{E}(X_t) &= 0.\end{aligned}$$

(b) Nous calculons (en utilisant la stationnarité)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t^2) &= \frac{\mathbb{E}(X_{t-1}^2)}{4} + \mathbb{E}(Z_t^2) \\ \frac{3}{4}\mathbb{E}(X_t^2) &= 1 \\ \sigma^2 &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

(c) Nous calculons

$$\begin{aligned}X_2 - \hat{X}_2 &= \frac{X_1}{2} + Z_2 - a_1 X_1 - a_3 \left( \frac{X_2}{2} + Z_3 \right) \\ &= \frac{X_1}{2} + Z_2 - a_1 X_1 - \frac{a_3}{2} \left( \frac{X_1}{2} + Z_2 \right) - a_3 Z_3 \\ &= \left( \frac{1}{2} - a_1 - \frac{a_3}{4} \right) X_1 + \left( 1 - \frac{a_3}{2} \right) Z_2 - a_3 Z_3,\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}((X_2 - \hat{X}_2)^2) = \left( \frac{1}{2} - a_1 - \frac{a_3}{4} \right)^2 \sigma^2 + \left( 1 - \frac{a_3}{2} \right)^2 + a_3^2.$$

Le trinôme en  $a_3$  :  $\left(1 - \frac{a_3}{2}\right)^2 + a_3^2$  est minimal pour  $a_3 = 2/3$  (on s'en aperçoit en calculant la dérivée). La quantité  $\left(\frac{1}{2} - a_1 - \frac{a_3}{4}\right)^2$  est minimale pour  $a_1 = \frac{a_3}{4} - \frac{1}{2}$ . Donc les coefficients cherchés sont :

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_3 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

(d) Pour ces valeurs, nous avons :

$$\mathbb{E}((X_2 - \widehat{X}_2)^2) = 0 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

(2) **(7 points)**

(a) Nous calculons (car le processus est stationnaire et centré), pour tout  $t$  :

$$\begin{aligned}\sigma(0) &= \mathbb{E}(X_t^2) \\ &= \mathbb{E}((Z_t + \theta Z_{t-1})^2) \\ &= 1 + \theta^2, \\ \sigma(1) &= \mathbb{E}(X_t X_{t+1}) \\ &= \mathbb{E}((Z_t + \theta Z_{t-1})(Z_{t+1} + \theta Z_t)) \\ &= 0 + \theta \mathbb{E}(Z_t^2) \\ &= \theta.\end{aligned}$$

Donc

$$\rho(1) = \frac{\sigma(1)}{\sigma(0)} = \frac{\theta}{1 + \theta^2}.$$

(b) Nous étudions la fonction

$$g : \theta \in \mathbb{R} \mapsto g(\theta) = \frac{\theta}{1 + \theta^2}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}g'(\theta) &= \frac{(1 + \theta^2) - 2\theta \cdot \theta}{(1 + \theta^2)^2} \\ &= \frac{1 - \theta^2}{(1 + \theta^2)^2}.\end{aligned}$$

En remarquant que  $g$  est impaire, nous construisons facilement son tableau de variation (voir Tableau 1).

$\theta$	$-\infty$		$-1$		$0$		$1$		$+\infty$
$g'(\theta)$		-		+		+		-	
$g(\theta)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

TABLE 1. Tableau de variation.

(c) Pour  $h \geq 2$ ,  $\sigma(h) = 0$ . Nous avons déjà calculé  $\sigma(0)$  et  $\sigma(1)$ .

(d) Nous calculons

$$\begin{aligned}f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}}{2} \times \theta^* + 1 \times (1 + (\theta^*)^2) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (1 + (\theta^*)^2) \left( \cos(\lambda) \frac{\theta^*}{1 + (\theta^*)^2} + 1 \right) \\ &= \frac{1 + \cos(\lambda)}{\pi}.\end{aligned}$$