

Le modèle d'Harry Markowitz

(Travaux de 1954 et prix Nobel en 1990)

Le comportement optimal de l'investisseur

L'objet du modèle

- ▶ Défini de façon rigoureuse le comportement de l'agent investisseur dans un univers incertain
- ▶ Son développement aboutit à la détermination d'un portefeuille optimal pour chaque degré de risque
- ▶ L'ensemble de ces portefeuilles forme la frontière efficiente
- ▶ Ce modèle sera enrichi pour aboutir au MEDAF (Modèle d'Évaluation des Marché Financiers)

Les hypothèses

- ▶ Le taux de rentabilité d'un actif est : $R_t = [(P_t - P_{t-1}) + C_t]/P_{t-1}$ (P = Prix; C =Coupon).
- ▶ **H1** : Tout investissement est une décision prise dans une situation de risque. Le return d'un actif est donc une variable aléatoire dont ont fait l'hypothèse qu'elle suit une loi Normale : $N[E(R_i), \sigma^2(R_i)]$
- ▶ **H2** : Les returns des actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres. Ils sont corrélés : $\text{COV}(R_i, R_j) = \rho_{ij} \sigma(R_i) \sigma(R_j) \neq 0$ où ρ_{ij} est le coefficient de corrélation.
- ▶ **H3** : Le comportement de tous les investisseurs est caractérisé par un degré plus ou moins prononcé d'aversion vis à vis du risque. Celui-ci est mesuré par :
 ϕ
- ▶ **H4** : Les investisseurs sont rationnels : bien que leur fonction de préférence soit purement subjective, ils opèrent des choix strictement transitifs.
- ▶ **H5** : Tous les investisseurs ont le même horizon de décision qui comporte une seule période.

La détermination de la courbe enveloppe optimale

- ▶ Le problème consiste à maximiser l'espérance du return du portefeuille composé de n valeurs et à minimiser la variance du portefeuille qui représente le risque.
- ▶ Soit a_i la part du budget consacrée à l'actif i $i = 1, \dots, n$
- ▶ Avec $0 \leq a_i \leq 1$ et $\sum_i a_i = 1$
- ▶ Le return du portefeuille est donc $R = a_1 R_1 + \dots + a_n R_n = \sum a_i R_i$
- ▶ et l'espérance de ce return est : $E(R) = \sum a_i E(R_i)$
- ▶ La variance du portefeuille est : $\sigma^2_R = \sum a_i a_j \sigma(R_i R_j)$

$$\sigma^2_R = [a_1, \dots, a_n] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \sigma^2_R = \sum_i \sum_j a_i a_j \sigma(R_i R_j)$$

- ▶ Le programme d'optimisation peut ainsi s'écrire :

$$MAX = \rho E(R) - \sigma^2_R \quad \text{sous contrainte } \sum_i \alpha_i = 1$$

- ▶ Ainsi, cette fonction économique Z satisfait aux principes de :
 - ▶ – rationalité, puisqu'il y a maximisation du return
 - ▶ – aversion pour le risque , puisque la mesure du risque y est affectée d'un signe négatif, ce qui implique la minimisation du risque.
 - ▶ ρ est un paramètre qui représente les préférences de l'investisseur pour le return en relation avec le risque qu'il doit courir pour obtenir ce return. Il s'agit du taux marginal de substitution de ces deux grandeurs, c'est à dire la mesure dans laquelle l'investisseur est d'accord de courir un risque accru d'une unité pour obtenir un incrément donné de l'espérance du return du portefeuille.

- ▶ La solution du programme revient à maximiser le Lagrangien
- ▶ $z = \Phi \cdot \sum a_i E(R_i) - \sum \sum a_i a_j \sigma_{ij} - \lambda(1 - \sum a_i)$
- ▶ Les conditions de premier ordre nous donnent

$$\delta Z/a_1 = \Phi E(R_1) - 2a_1 \sigma_{11} - 2a_i \sigma_{1i} - 2a_n \sigma_{1n} - \lambda = 0$$

(...)

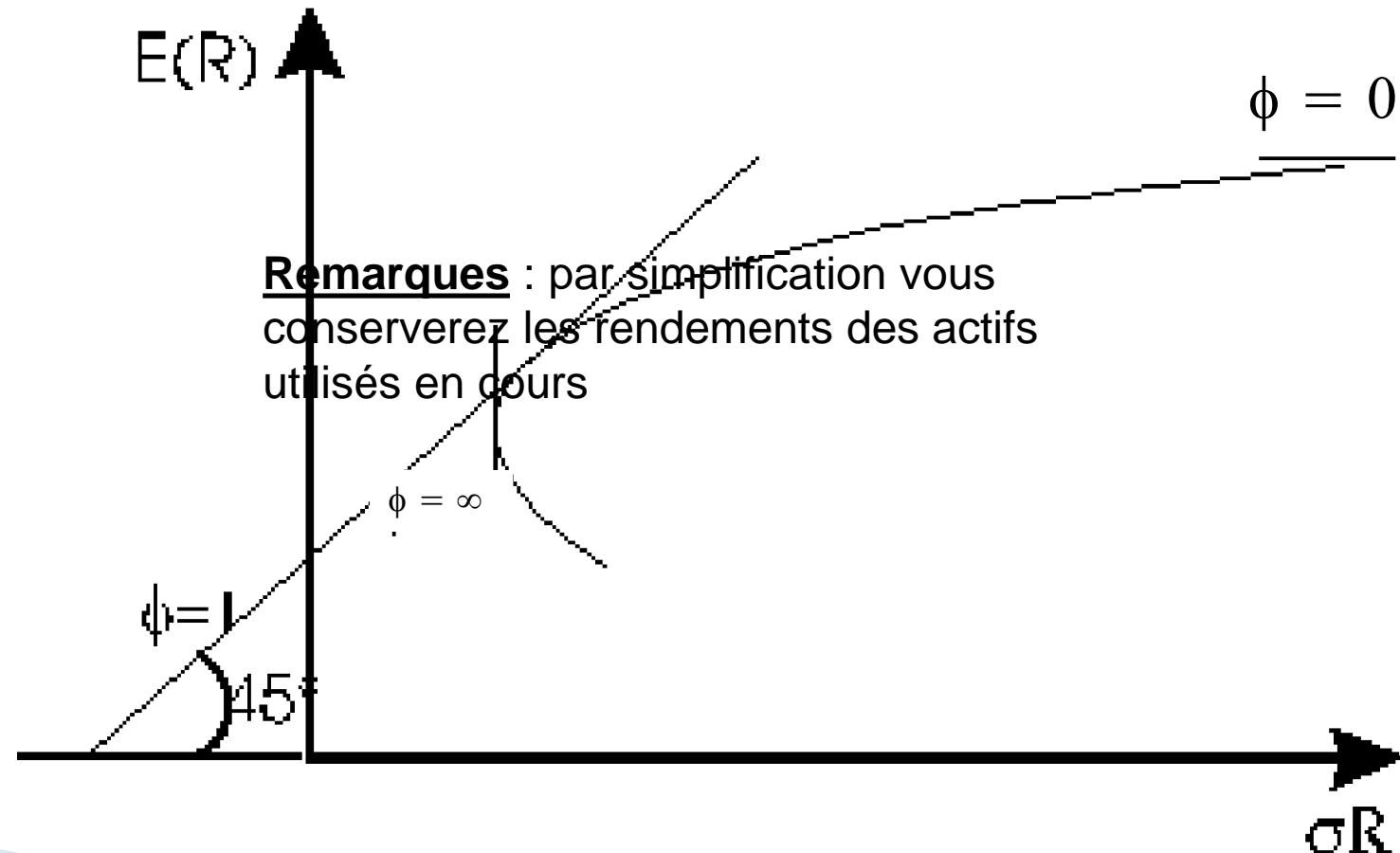
$$\delta Z/a_n = \Phi E(R_n) - 2a_1 \sigma_{n1} - 2a_i \sigma_{ni} - 2a_n \sigma_{nn} - \lambda = 0$$

$$\delta z/\lambda = 1 - a_1 - a_i - a_n = 0$$

- ▶ Sous forme matricielle, ce système peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi E(R_1) \\ \Phi E(R_n) \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow CA = k \Leftrightarrow A = C^{-1}k$$

- A chaque valeur de ϕ correspond donc un vecteur A c'est à dire un portefeuille optimal.
- L'ensemble de tous ces portefeuilles optimaux, compte tenu de toutes les valeurs de ϕ , forme une enveloppe optimale que l'on peut représenter ainsi :

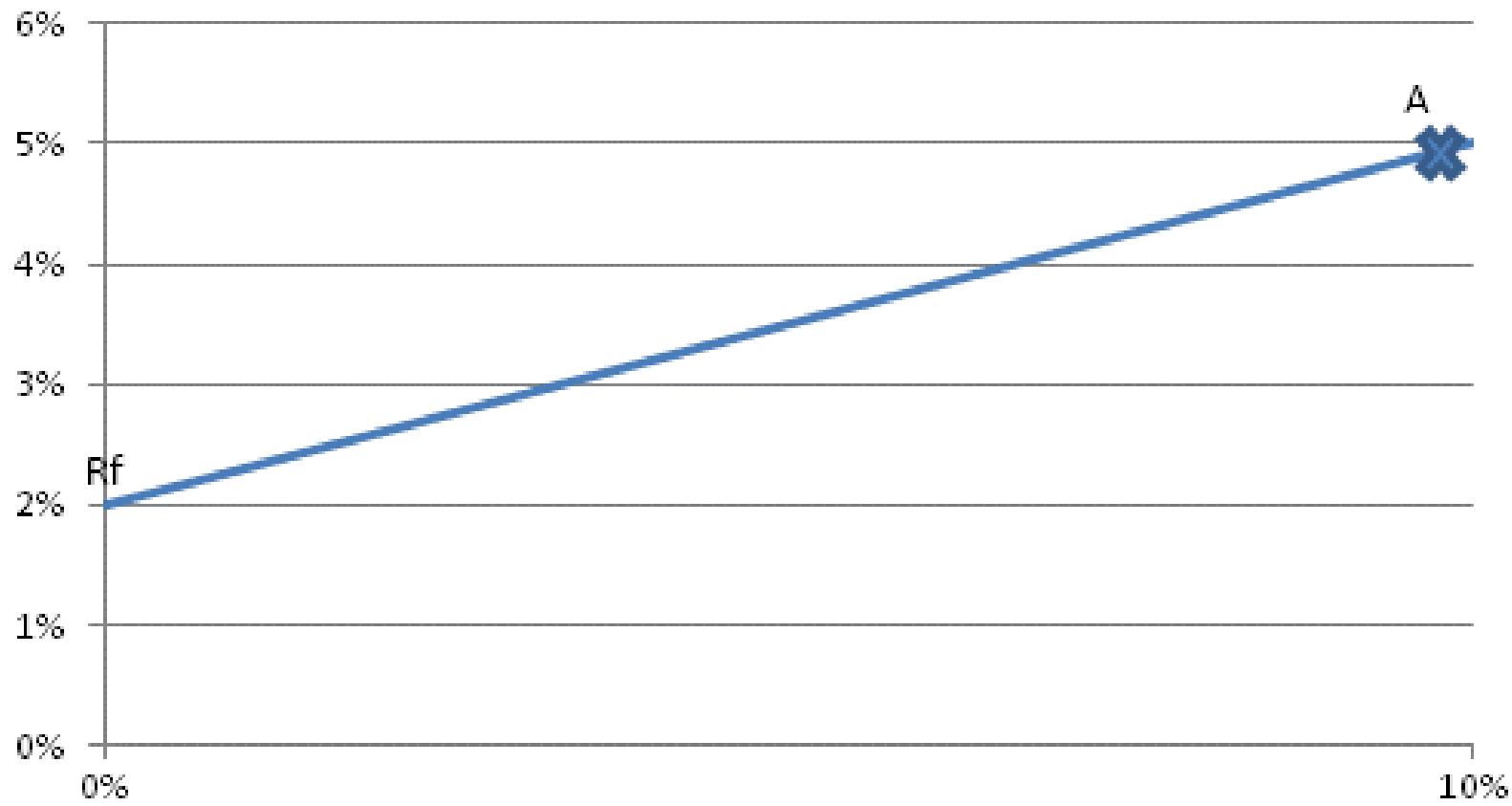


**La droite d'efficiency (Tobin 1958)
(Capital Market Line):**

Une invitation à l'effet de levier

- Dans le modèle d'Markowitz, aucun actifs sans risque n'est utilisé.
- En introduisant cet actif F non risqué de rendement R_f et de risque $\sigma_f = 0$, il est possible de trouver une combinaison avec les actifs risqués A pour augmenter le rendement R_p du portefeuille quel que soit son risque σ_p .
- Soit A (a_1, \dots, a_n) un portefeuille appartenant à la courbe d'efficience.
- soit w le poids de A dans la combinaison entre A et l'actif sans risque
- $R_p = wR_A + (1-w)R_f = R_f + w(R_A - R_f)$
- L'écart type d'un portefeuille constitué de 2 actifs A et F se note :
- $\sigma_p^2 = w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_f^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_A\sigma_f = w\sigma_A^2$ car $\sigma_f = 0 \Leftrightarrow w = \sigma_p / \sigma_A$
- Exprimons R_p en fonction de σ_p
- $R_p = R_f + w(R_A - R_f) = R_f + \sigma_p/\sigma_A * (R_A - R_f) = R_f + [(R_A - R_f)/\sigma_A]^*\sigma_p$
- Graphiquement, cette combinaison est un segment de droite FA de pente $b = [(R_A - R_f)/\sigma_A]$. Notons que b est le ratio de Sharpe du portefeuille A ...

Ensemble des portefeuilles constitués de A et de l'actif sans risque



- S'il est possible d'emprunter au taux sans risque R_f pour investir dans le portefeuille A, il est alors possible de prolonger la segment FA pour obtenir une droite.
- Il existe un portefeuille A^* , sur la frontière efficiente, tel que cette droite soit située en tout point au dessus de la frontière efficiente. En ce point A^* , cette droite est tangente avec la frontière efficiente. Autrement dit, la droite tangente en A^* bat tous les portefeuilles de la frontière efficiente et il n'est pas possible de trouver des portefeuilles plus efficents que ceux de cette droite.

Cette droite s'appelle la droite d'efficience

- Trouvons ce point A^* . Comme A^* correspond au point de tangence entre la courbe efficiente et la droite, mathématiquement il faut que la dérivé de la droite et celle de la frontière efficiente soient égale.
- Donc, en A^* : $\delta R_p / \delta \sigma_p = b = [(R_A - R_f) / \sigma_A]$ (Ratio de Sharpe S_{A^*} en A^*). Il n'existe qu'un portefeuille A^* tel que cette égalité soit vraie.
- Remarques : la difficulté est trouver ce point dans la mesure où la courbe est une fonction inconnue et donc de dérivée inconnue... De plus, R_f n'est pas toujours compatible avec l'existence d'un point A^* de tangence ...
- Si ce point A^* est possible, alors l'effet de levier, mesurer par la pente de la droite (b) est d'autant plus fort que R_f est faible ! On comprend mieux l'enjeu pour les marchés financiers de bénéficier de taux d'intérêts bas : emprunter à faible coût pour investir dans des actifs risqués à plus fort rendement. Le carry trade en est un exemple.

