

Exercice 1:

Soit $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, une application de classe \mathcal{C}^3 . On note

$$\begin{aligned}x_0 &= 1, & x_1 &= 2, & x_2 &= 4. \\y_0 &= 4, & y_1 &= 2, & y_2 &= 1.\end{aligned}$$

où, pour $i = 0, 1, 2$, les x_i sont des points sur $[1, 4]$ et les y_i les valeurs respectives prises par f en ces points.

(1) Déterminer le polynôme d'interpolation P_2 , ci-dessous, de f aux points $x_i, i = 0, 1, 2$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)(x - 2)$$

en évaluant les coefficients a_i grâce à la résolution d'un système obtenu par l'écriture des conditions $P(x_i) = y_i$, pour $i = 0, 1, 2$.

(2) Donner le nom de cette méthode.

(3) Eprimer le polynôme P_2 dans la base de polynôme de Lagrange associées aux points x_0, x_1 et x_2 .

(4) Exprimer P_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 2:

Soit P le polynôme interpolation la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ aux points $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 7.5, x_3 = 9.1$ et $x_4 = 12$, exprimé dans la base des polynômes de Newton comme suit :

$$P(x) = \underbrace{a_0}_{P_1(x)} + \underbrace{a_1(x - 1)}_{P_2(x)} + \underbrace{a_2(x - 1)(x - 3)}_{P_3(x)} + \underbrace{a_3(x - 1)(x - 3)(x - 7.5)}_{P_4(x)} + a_4(x - 1)(x - 3)(x - 7.5)(x - 9.1)$$

avec $a_0 = 1, a_1 \simeq 0.366, a_2 \simeq -0.0219, a_3 \simeq 0.0017$, et $a_4 \simeq -1.1491 \cdot 10^{-4}$.

Nous désignons par P_i , $1 \leq i \leq 4$, le polynôme interpolant les points $A_j(x_j, f(x_j))$, $0 \leq j \leq i$.

1. Calculer les erreurs $E_{P_i}(8) = |P_i(8) - f(8)|$, $1 \leq i \leq 4$.

Nous ordonnons maintenant les abscisses x_i en fonction de leurs distances par rapport à $x = 8$. Nous considérons ainsi $B_0 = A_2, B_1 = A_3, B_2 = A_4, B_3 = A_1$ et $B_4 = A_0$.

2. Pour tout $1 \leq i \leq 4$, déterminer l'expression de Q_i , le polynôme interpolant les points $B_j(x_j, f(x_j))$, $0 \leq j \leq i$.
3. Calculer les erreurs $E_{Q_i}(8) = |Q_i(8) - f(8)|$, $1 \leq i \leq 4$.
4. Comparer les résultats des questions (1) et (3) et Conclure.

Exercice 3:

Soit la fonction $f(x) = 2xe^{-(4x+2)}$ définie sur l'intervalle $[0.2, 1]$.

- a. Utiliser la valeur de la fonction aux points $x = 0.2$ et $x = 1$ et employer la méthode de Newton afin de trouver le polynôme passant par ces points.
- b. Calculer une approximation de $f(0.5)$.
- c. Calculer le polynôme de Newton passant par $x = 0.2$, $x = 0.4$ et $x = 1$ et calculer, de nouveau, une approximation de $f(0.5)$.
- d. Comparer les deux approximations.
- e. Trouver la coordonnée x pour laquelle l'erreur d'interpolation du polynôme obtenu en (c.) est maximale dans l'intervalle $[0.2, 1]$.

Exercice

Partie I : Interpolation polynomiale

- (1) Justifier l'existence d'un unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ interpolant les points $(-2, 16)$, $(0, -4)$ et $(2, 8)$.
- (2) Déterminer l'expression du polynôme P_2 par une méthode (vue en cours) de votre choix.

Partie

Dans l'objectif d'étudier le chemin de freinage d'un véhicule, correspondant à la distance parcourue en mètres (m) du début du freinage jusqu'à l'arrêt total du véhicule, en fonction de la vitesse en Kilomètres par heure (Km/h) de ce dernier, 12 expériences indépendantes ont été réalisées. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous. On note par $X = (x_i)_{1 \leq i \leq 12}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq 12}$, où x_i , et y_i , désignent, respectivement, la vitesse du véhicule et le chemin de freinage associés à l'expérience i .

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
y_i	9	11	20	27	39	45	58	78	79	93	108	124

- (1) Déterminer les coefficients $\Lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de la droite $f(t; \Lambda) = a + bt$, qui ajuste au mieux les points $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq 12}$ au sens des moindres carrés.

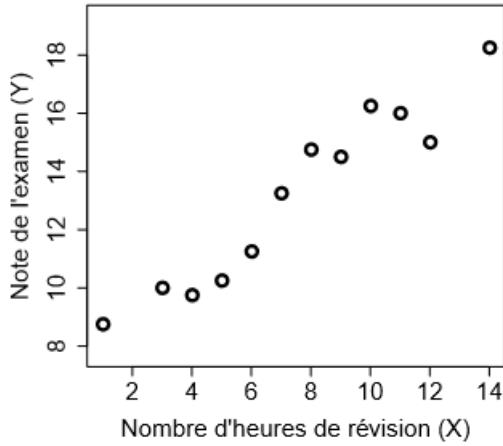
On donne les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 1140, \quad \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 122600, \quad \sum_{i=1}^{12} y_i = 691, \quad \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 80840$$

- (2) Rouler à une vitesse de 105 Km/h, le conducteur de ce véhicule pourrait-il éviter un obstacle survenant à une distance de 60 m? Justifier votre réponse.

Exercice 5:(Exercice facultatif)

La figure ci-dessous illustre les notes (sur 20) obtenues par 12 étudiants en examen de mathématiques, en fonction du temps (en heure) consacré pour la préparation de ce dernier. On note par $X = (x_i)_{1 \leq i \leq 12}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq 12}$, où x_i , et y_i , désignent, respectivement, les heures de révision et la note obtenue relatives à l'étudiant i .



On présente, dans le tableau suivant, les valeurs des couples $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq 12}$:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	4	9	10	14	5	7	12	1	3	8	11	6
y_i	9.75	14.50	16.25	18.25	10.25	13.25	15.00	8.75	10.00	14.75	16.00	11.25

Déterminer les coefficients $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ de la droite $f(t; \Lambda) = \lambda_0 + \lambda_1 t$, qui ajuste au mieux les points $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq 12}$ au sens des moindres carrés.

On donne les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 90, \quad \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 842, \quad \sum_{i=1}^{12} y_i = 158, \quad \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 1311.75$$

Donner une estimation du nombre d'heures de préparation, de l'examen de mathématiques, à consacrer pour le réussir avec une note de 12 sur 20.