Interro 2, 1h.

Les documents du cours, TD, TP de l'UE sont autorisés. Communications et recherche internet non autorisées.

Si un résultat du cours est utilisé, il faut le citer soit par son nom, soit par son numéro dans le pdf du cours.

Notations.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^3$ et $\| \cdot \|$ la norme associée.

On pourra utiliser sans démonstration que pour une matrice symétrique $M \in M_3(\mathbb{R})$, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\langle Mu, u \rangle \geq \lambda_{min} \|u\|^2$, avec λ_{min} la plus petite valeur propre de M.

On rappelle également une inégalité qui pourrait servir : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $2ab \geq -a^2 - b^2$.

Partie I : une minimisation sous contrainte.

Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy$$

et

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 2z = 1 \right\}.$$

On s'intéresse au problème de minimisation de f sur K.

1. Montrer que f est α-convexe sur $\mathbb{R}^3$. On précisera la valeur de α.

2. Montrer que K est un ensemble convexe et fermé.

3. Que peut-on dire de l'existence et l'unicité d'un point de minimum de f sur K. On **justifiera** sa réponse.

4. Résoudre ce problème d'optimisation (i.e. trouver le ou les points de minimum de f sur K s'il(s) existe(nt)).

Partie II : Approximation numérique.

On souhaite tester la convergence d'un algorithme permettant d'approcher la solution de ce type de problème.

On va décrire un algorithme pour une fonctionnelle

$$\mathcal{J} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, u \mapsto \frac{1}{2}\langle Au, u \rangle - \langle b, u \rangle + c,$$

avec $A \in M_3(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ et un espace

$$\mathcal{Q} = \left\{ u \in \mathbb{R}^3, \langle d, u \rangle - e = 0 \right\},$$

avec $d \in \mathbb{R}^3$, $d \neq (0, 0, 0)$, $e \in \mathbb{R}$. On note également $g : u \mapsto \langle d, u \rangle - e$, définie sur $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f et K définis en partie I rentrent bien dans ce cadre, i.e. identifier A, b, c, d, e.

2. On se place maintenant dans le cadre général décrit en début de cette partie II.

a. Pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, donner les expressions de $\nabla\mathcal{J}(u)$, $\nabla g(u)$ en fonction de A, b, c, d, e.

b. Soit $u^* \in \mathcal{Q}$ un point de minimum de $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{Q}$. Écrire la condition nécessaire d'optimalité en u^* en fonction de A, b, c, d, e. On notera λ^* le vecteur de multiplicateur de Lagrange et on précisera l'espace auquel il appartient.

3. On se place toujours dans le cadre général décrit en partie II. On considère l'algorithme suivant que l'on souhaite utiliser pour approcher un point de minimum sur $\mathcal{Q}$ que l'on notera u^*.

Trouver pour tout $k \in \mathbb{N}$, (λ_k, u_k) suivant l'algorithme suivant :

Initialisation : λ_0, $\rho > 0$ donnés.

Itération : pour $k \in \mathbb{N}$,

- u_k est calculé comme étant le point de minimum sur $\mathbb{R}^3$ de la fonction $\varphi_k : u \mapsto \mathcal{J}(u) + \lambda_k g(u)$, i.e. $\varphi_k(u_k) = \min_{u\in\mathbb{R}^3} \varphi_k(u)$.
- $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho g(u_k)$.

a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il y a existence et unicité d'une solution au problème de minimisation à résoudre à chaque itération : $\min_{u\in\mathbb{R}^3} \varphi_k(u)$.

b. Étude des itérations. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(i) Écrire la condition nécessaire d'optimalité en u_k associée au problème de minimisation de φ_k sur $\mathbb{R}^3$ à chaque itération en fonction de A, b, c, d, e.

(ii) En déduire que $A(u_k - u^*) + (\lambda_k - \lambda^*)d = 0$, avec (u^*, λ^*) définis comme en 2.b.

(iii) Montrer que $\lambda_{k+1} - \lambda^* = \lambda_k - \lambda^* + \rho\langle d, u_k - u^*\rangle$, où u^* et λ^* ont été définis en question 2.b.

(iv) Montrer que

$$(\lambda_{k+1} - \lambda^*)^2 \leq (\lambda_k - \lambda^*)^2 - \rho(2\lambda_{min} - \rho\|d\|^2)\|u_k - u\|^2,$$

où λ_{min} est la plus petite valeur propre de A.

c. En déduire que si $0 < \rho < \frac{2\lambda_{min}}{\|d\|^2}$, la suite $((\lambda_k - \lambda^*)^2)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

d. En déduire que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u^*.

3. Proposer un code de calcul en Scilab ou python permettant de résoudre le problème de minimisation en utilisant cet algorithme.