

Exercices

1. Résoudre le programme linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } z = x_1 + x_2$$

$$\text{Sous contraintes } -5x_1 + 6x_2 \leq 25$$

$$9x_1 - 2x_2 \leq 43$$

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$3x_1 + x_2 \geq 8$$

$$\text{et } x_1, x_2 \geq 0$$

2. Dans une exploitation agricole, on élève des vaches et des moutons. Les étables peuvent contenir un maximum de 50 vaches et 200 moutons. De plus, 72 arpents de pâturages sont disponibles. On a besoin de 1 arpent par vache et de 0,2 arpent par mouton. Pour s'occuper du bétail, on dispose de 10 000 heures de travail par année. On estime qu'une vache nécessite 150 heures de travail par année et un mouton 25 heures. Le gain annuel net s'élève à 250 CHF par vache et à 45 CHF par mouton. Combien doit-on élever de vaches et de moutons pour que le gain net soit maximal ?

3. On nourrit des lapins exclusivement de carottes et de pommes de terre. Une mesure de carottes fournit 1 kcal, 4 mg de vitamine B et 3 mg

de vitamine A. Une mesure de pommes de terre fournit 2 kcal, 3 mg

de vitamine B et 1 mg de vitamine A. Les besoins du lapin sont d'au

moins 2 kcal, 6 mg de vitamine B et 3 mg de vitamine A. Une mesure

de carottes coûte autant que deux mesures de pommes de terre.

Quel menu coûte le moins cher ?

4. Une usine fabrique les produits P1 et P2. Elle utilise les matières premières M1, M2 et M3, à raison de 2 tonnes de M1, 1 tonne de M2 et 3 tonnes de M3 par unité produite de P1 et de 1 tonne de M1,

tonnes de M2 et 4 tonnes de M3 par unité produite de P2. Elle dispose mensuellement de 50 tonnes de M1, 25 tonnes de M2 et 60 tonnes de M3. Le bénéfice net est de 5 000 CHF par unité de P1 et de 2 000 CHF par unité de P2. Quelle quantité de chacun des deux produits l'entreprise doit-elle fabriquer pour que le bénéfice soit maximal ?

5. Un industriel doit livrer trois biens A, B et C à raison de 6 unités de A, 11 unités de B et 23 unités de C. Il dispose de deux facteurs de production X1 et X2. L'emploi d'une unité de X1 permet de réaliser une unité de A, une de B et une de C. Une unité de X2 permet de réaliser une unité de A, 2 de B et 5 de C. Le prix du facteur X1 est de 100 CHF l'unité, celui du facteur X2 de 400 CHF. Quelle quantité de chaque facteur l'industriel doit-il utiliser pour satisfaire la demande à un coût minimal ?

6. Résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}x + y &\geq 5 \\2x+3y &\geq 6 \\4x+2y &\geq 8 \\x + y &\text{ à minimiser}\end{aligned}$$

7. Il reste à un droguiste 1 kg de MNA et 2 kg de PCS. En mélangeant convenablement ces deux matières, il peut fabriquer trois produits (X,Y,Z). Les proportions par unité de produit sont de 5 MNA et 1 PCS pour X, 1 MNA et 1 PCS pour Y et 1MNA et 3 PCS pour Z. Ces produits sont vendus respectivement 10 CHF, 6 CHF et 12 CHF le kg. Trouver la production qui maximise la recette.

8. Une entreprise fabrique deux types de ceintures A et B. Le type A est de meilleure qualité que le type B. Le bénéfice net est de 2 CHF pour

le type A et de 1,50CHF pour le type B. Le temps de fabrication de A est deux fois plus élevée que le temps de fabrication de B. Si toutes les ceintures étaient de type B, l'entreprise pourrait en fabriquer 1 000 par jour. L'approvisionnement en cuir est suffisant pour 800 ceintures par jour (type A ou B). Enfin, on dispose de 400 boucles de type A et de 700 boucles de type B chaque jour. Quels sont les nombres respectifs de ceintures des deux types à fabriquer chaque jour de manière à maximiser le bénéfice total ?

9. Dans une usine, on distingue quatre centres de frais : la tôlerie (TO), les constructions en tubes (TU), la serrurerie (S) et la mécanique (M). Les capacités de ces centres de frais sont respectivement de 130, 240, 810 et 180. L'usine produit des colonnes de refroidissement (C) et des réfrigérateurs (R), dont les coefficients techniques sont les suivants :

	C	R
TO	10	10
TU	16	24
S	30	90
M	0	15

Les marges brutes de ces deux produits sont de 4 800 pour C et 6 000 pour R. Quelle est la production la plus avantageuse ?

10. On doit construire X_1 maison à 5 étages et X_2 maisons à 2 étages sur un terrain marécageux, où la construction des maisons hautes est très onéreuse. On désigne par pers.-mois le travail fourni par une personne pour un mois.

Nb d'étages	Coût	Pers.-mois	Superficie (m ²)	Nb d'occupants par maison
5	600 000	120	800	30
2	200 000	60	600	12
Disponibilité	18 000 000	4 500	42 000	

Comment choisir X1 et X2 de façon à loger le plus de personnes ?

11. Un mélange doit contenir au moins 15 g de fluore, 20 g de chlore, 10 g d'iode et 25 g de sodium. Il existe sur le marché trois produits qui contiennent ces quatre composants, dans les quantités suivantes (grammes par kg) :

	fluore	chlore	iode	sodium
1	1	1	0.5	1
2	1	2	0.5	3
3	1	1	1	2

Le premier produit coûte 3,50 CHF le kg, le deuxième 6,50 CHF le kg et le troisième 5 CHF le kg. Quel mélange faut-il faire pour minimiser le coût ?

SOLUTIONS

Exercice 1

$$x_1 = 7 \quad x_2 = 10 \quad z = 17$$

Exercice 2

Formulation du problème:

$$\text{Maximiser } z = 250x_1 + 45x_2$$

$$\text{sous contraintes } x_1 + 0,2x_2 \leq 72$$

$$150x_1 + 25x_2 \leq 10\ 000$$

$$x_1 \leq 50$$

$$x_2 \leq 200$$

$$\text{et } x_1, x_2 \geq 0$$

Solution: $x_1 = 40$ $x_2 = 160$ $z = 17200$

Exercice 3

Formulation du problème:

Minimiser $z = 2x_1 + x_2$

sous contraintes $x_1 + 2x_2 \geq 2$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6$

$3x_1 + x_2 \geq 3$

et $x_1, x_2 \geq 0$

Solution : $x_1 = 0, 6$ $x_2 = 1, 2$ $z = 2, 4$

Exercice 4

Formulation du problème:

Maximiser $z = 5\ 000x_1 + 2\ 000x_2$

sous contraintes $2x_1 + x_2 \leq 50$

$x_1 + 3x_2 \leq 25$

$3x_1 + 4x_2 \leq 60$

et $x_1, x_2 \geq 0$

Solution: $x_1 = 20$ $x_2 = 0$ $z = 10\ 000$

Exercice 5

Formulation du problème:

Minimiser $z = 100x_1 + 400x_2$

sous contraintes $x_1 + x_2 \geq 6$

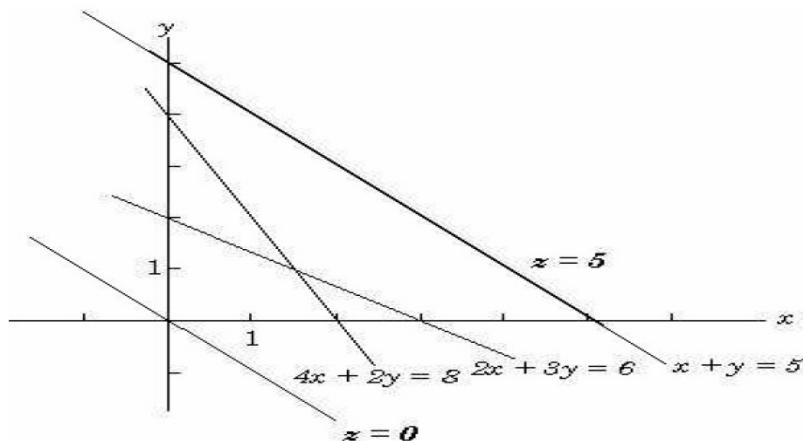
$x_1 + 2x_2 \geq 11$

$x_1 + 5x_2 \geq 23$

et $x_1, x_2 \geq 0$

Solution: $x_1 = 3$ $x_2 = 4$ $z = 1\ 900$

Exercice 6



Il existe une infinité de solutions optimales pourvu que $z = x + y = 5$.

Exercice 7

Formulation du problème:

$$\text{Maximiser } z = 10x_1 + 6x_2 + 12x_3$$

$$\text{sous contraintes } 5x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 2$$

$$\text{et } x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Solution: } x_1 = 0, x_2 = 0, 5, x_3 = 0, 5 \quad z = 9$$

Exercice 8

Formulation du problème:

$$\text{Maximiser } z = 2x_1 + 1, 5x_2$$

$$\text{Sous contraintes } 2x_1 + x_2 \leq 1\ 000$$

$$x_1 + x_2 \leq 800$$

$$x_1 \leq 400$$

$$x_2 \leq 700$$

$$\text{et } x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Solution: } x_1 = 200, x_2 = 600 \quad z = 1\ 300$$

Exercice 9

Formulation du problème:

$$\text{Maximiser } z = 4\ 800C + 6\ 000R$$

$$\text{sous contraintes } 10C + 10R \leq 130$$

$$16C + 24R \leq 240$$

$$30C + 90R \leq 810$$

$$15R \geq 180$$

$$\text{et } C, R \geq 0$$

$$\text{Solution: } C = 9 \text{ R} = 4 z = 67 \text{ 200}$$

Exercice 10

Formulation du problème:

$$\text{Maximiser } z = 30x_1 + 12x_2$$

$$\text{sous contraintes } 600\ 000x_1 + 200\ 000x_2 \leq 18\ 000\ 000$$

$$120x_1 + 60x_2 \leq 4\ 500$$

$$800x_1 + 600x_2 \leq 42\ 000$$

$$\text{et } x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Solution: } x_1 = 12 \ x_2 = 54 \ z = 1\ 008$$

Exercice 11

Formulation du problème:

$$\text{Minimiser } z = 3,5x_1 + 6,5x_2 + 5x_3$$

$$\text{sous contraintes } x_1 + x_2 \geq 15$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20$$

$$0,5x_1 + 0,5x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 25$$

$$\text{et } x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Solution: } x_1 = 15,5 \ x_2 = 2,5 \ x_3 = 1 \ z = 75,5$$

Bibliographie :

Yadolah Dodge, Sylvie Gonano-Weber et Jean-Pierre Renfer(2005)
Optimisation appliquée. Edition Springer.