Suites et séries de fonctions.

Chap. 08 : cours complet.

1. Suites de fonctions : convergence simple et uniforme, continuité.

2. Séries de fonctions : convergence simple, uniforme et normale, continuité.

3. Liens avec l'intégration ou la dérivation des fonctions.

Suites et séries de fonctions.

Suites de fonctions : convergence simple et uniforme, continuité.

Définition 1.1 : suite de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On appelle suite de fonctions une application u de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$ de type $\{n_0, n_0 + 1, \ldots\}$) dans l'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbf{K})$ des fonctions de I dans **K**.

On note alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n\geq n_0}$) ou plus simplement (u_n).

Définition 1.2 : convergence simple d'une suite de fonctions sur un intervalle

Soit (u_n) une suite de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans **K**.

On dit que (u_n) converge simplement sur I ou qu'il y a convergence simple de la suite (u_n) sur I si et seulement si :

$\forall$ t $\in$ I, $(u_n(t))$ converge dans **K**.

Définition 1.3 : limite simple d'une suite de fonctions sur un intervalle

Soit (u_n) une suite de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans **K**, qui converge simplement sur I.

On note : $\forall$ t $\in$ I, u(t) = $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t)$.

La fonction u définie ainsi de I dans **K** est appelée limite simple de la suite (u_n) sur I.

Définition 1.4 : convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un intervalle

Soit (u_n) une suite de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans **K**.

On dit que (u_n) converge uniformément sur I ou qu'il y a convergence uniforme de la suite (u_n) sur I si et seulement si il existe une fonction u, définie de I dans **K**, telle que :

- pour tout entier n, la fonction $|u_n - u|$ est bornée sur I et y admet une borne supérieure,
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{t\in I}|u_n(t) - u(t)|\right) = 0$.

On dit aussi que u est la limite uniforme de la suite (u_n) sur I.

Théorème 1.1 : la convergence uniforme entraîne la convergence simple

Soit (u_n) une suite de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans **K**.

Si (u_n) converge uniformément sur I (vers une fonction u), alors (u_n) converge simplement sur I vers u, et u est donc la limite simple de la suite (u_n) sur I.

Démonstration :

Soit : a $\in$ I.

Alors : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $0 \leq |u_n(a) - u(a)| \leq \sup\limits_{t\in I}|u_n(t) - u(t)|$.

Le théorème des gendarmes montre alors que $(|u_n(a) - u(a)|)$ converge vers 0 et donc que $(u_n(a))$ converge vers u(a).

Théorème 1.2 : continuité d'une limite simple et convergence uniforme

Soit (u_n) une suite de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans **K**.

Si, pour : a $\in$ I, on a :

- pour tout entier n, la fonction u_n est continue en a,
- la suite (u_n) converge uniformément sur I vers u,

alors u est continue en a.

Plus généralement, si :

- pour tout entier n, la fonction u_n est continue sur I,
- la suite (u_n) converge uniformément sur I vers u,

alors u est continue sur I.

Démonstration :

- Commençons par la continuité en a, et pour cela, soit : $\varepsilon > 0$.

La convergence uniforme de (u_n) sur I vers u montre que : $\exists$ N $\in$ $\mathbb{N}$, $\forall$ n $\geq$ N, $\sup_{t\in I}|u_n(t)-u(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Dans ce cas, u_N est continue en a, et : $\exists\ \alpha > 0$, $\forall$ x $\in$ I, $(|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|u_N(x) - u_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3})$.

Mais alors : $\forall$ x $\in$ I, $(|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|u(x) - u(a)| \leq |u(x) - u_N(x)| + |u_N(x) - u_N(a)| + |u_N(a) - u(a)| \leq \varepsilon$.
La fonction u est donc bien continue en a.

• Etant donné que la continuité de u (ou de u_n, pour tout n) sur I correspond à la continuité de u (ou de u_n) en tout point a de I, il est alors clair que les hypothèses de la deuxième partie, avec ce que l'on a prouvé juste au-dessus entraîne la continuité de u en tout point de I donc sur I.

Théorème 1.3 : continuité d'une limite simple et convergence uniforme sur tout segment

Soit (u_n) une suite de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans **K**.
Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- pour tout entier n, la fonction u_n est continue sur I,
- la suite (u_n) converge uniformément sur tout segment : $[\alpha,\beta] \subset$ I, vers u, définie sur I,

alors u est continue sur I.

Démonstration :

Soit : a $\in$ I.
Si a est une extrémité de I, la continuité de u ou des u_n en a se ramène à la continuité à droite ou à gauche en ce point et la démonstration qui suit s'adapte.
Si a est intérieur à I (non situé aux extrémités), alors on peut trouver $[\alpha,\beta]$ tel que : a $\in\ ]\alpha,\beta[\ \subset [\alpha,\beta] \subset$ I.
La convergence uniforme de (u_n) sur $[\alpha,\beta]$ et la continuité des u_n en a, pour tout entier n, entraîne alors la continuité de u en a (à droite et à gauche puisque a est intérieur au segment).
Finalement, u est bien continue en tout point de I, donc sur I.

Théorème 1.4 : étude d'une limite simple aux bornes d'un intervalle ouvert, « double limite »

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, ouvert en au moins une de ses extrémités, notée a.
Soit (u_n) une suite de fonctions définies de I dans **K**, telle que :

- la suite (u_n) converge uniformément sur I vers u,
- pour tout entier n, la fonction u_n admet une limite L_n finie en a,
- la suite (L_n) admet une limite L finie ou non,

alors la fonction u admet L comme limite en a.

Démonstration (hors programme) :

• Cas où a est fini et où L est un élément de **K**.
Pour : $\varepsilon > 0$, on peut successivement écrire :

$\exists\ n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \geq n_1$, $\sup_{t\in I}|u_n(t)-u(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$,

$\exists\ n_2 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \geq n_2$, $|L_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{3}$,

et avec : N = $\max(n_1, n_2)$, $\exists\ \alpha > 0$, $\forall$ x $\in$ I, $(|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|u_N(x) - L_N| \leq \frac{\varepsilon}{3})$,

donc : $\forall$ x $\in$ I, $(|x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|u(x) - L| \leq |u(x) - u_N(x)| + |u_N(x) - L_N| + |L_N - L| \leq \varepsilon)$,
et u tend bien vers L en a.

• Cas où a est infini (par exemple : a = $+\infty$), et L est un élément de **K**.
Pour : $\varepsilon > 0$, on peut de même écrire :

$\exists\ n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \geq n_1$, $\sup_{t\in I}|u_n(t)-u(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$,

$\exists\ n_2 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \geq n_2$, $|L_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{3}$,

et avec : N = $\max(n_1, n_2)$, $\exists$ A $\in \mathbb{R}$, $\forall$ x $\in$ I, $(x \geq A) \Rightarrow (|u_N(x) - L_N| \leq \frac{\varepsilon}{3})$,

donc : $\forall$ x $\in$ I, $(x \geq A) \Rightarrow (|u(x) - L| \leq |u(x) - u_N(x)| + |u_N(x) - L_N| + |L_N - L| \leq \varepsilon)$.

• Les autres possibilités (a fini ou $\pm\infty$, L fini ou $\pm\infty$ dans le cas réel), se traitent de façon similaire.

Séries de fonctions : converge simple, uniforme et normale, continuité.

Définition 2.1 : série de fonctions

Soit (u_n) une suite de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans **K**.

On appelle série de fonctions de terme général u_n la suite $\sum_{n\geq 0} u_n$ des fonctions « sommes partielles » de la série définies par : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $\forall$ x $\in$ I, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$.

Définition 2.2 : convergence simple et limite simple d'une série de fonctions sur un intervalle

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans **K**.

On dit que la série converge simplement sur I ou qu'il y a convergence simple de la série sur I si et seulement si la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur I, soit si : $\forall$ t $\in$ I, $\sum_{n\geq 0} u_n(t)$ converge.

La fonction S définie sur I par : $\forall$ t $\in$ I, $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$, est alors appelée limite simple de la série ou somme de la série de fonctions et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Définition 2.3 : convergence uniforme d'une série de fonctions sur un intervalle

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans **K**.

On dit que la série converge uniformément sur I ou qu'il y a convergence uniforme de la série sur I si et seulement si la suite (S_n) converge uniformément sur I (vers la somme de la série).

Définition 2.4 : convergence normale d'une série de fonctions sur un intervalle

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans **K**.

On dit que la série converge normalement sur I ou qu'il y a convergence normale de la série sur I si et seulement si :

- pour tout entier n, la fonction u_n est bornée sur I et y admet donc une borne supérieure,
- la série numérique $\sum \sup_{x\in I} |u_n(x)|$ converge.

Théorème 2.1 : liens entre les différentes convergences d'une série de fonctions

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans **K**.

Pour la série $\sum_{n\geq 0} u_n$, les implications suivantes sont alors vérifiées :

- (convergence normale sur I) $\Rightarrow$ ($\forall$ t $\in$ I, convergence absolue de $\sum_{n\geq 0} u_n(t)$) $\Rightarrow$ (convergence simple sur I) .
- (convergence normale sur I) $\Rightarrow$ (convergence uniforme sur I) $\Rightarrow$ (convergence simple sur I).

Démonstration :

Du fait des études faites précédemment, on sait déjà que la convergence uniforme sur I entraîne la convergence simple sur I.

De même, la convergence absolue pour tout : t $\in$ I, de $\sum_{n\geq 0} u_n(t)$, entraîne la convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n(t)$ pour tout : t $\in$ I, ce qui correspond à la convergence simple de la série sur I.

- Montrons que la convergence normale entraîne l'absolue convergence pour tout élément de I.

Pour cela, soit : a $\in$ I.

Alors : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $|u_n(a)| \leq \sup_{x\in I} |u_n(x)|$, et par comparaison de séries à termes réels positifs, la série

$\sum_{n\geq 0} u_n(a)$ est absolument convergente donc convergente.

• Montrons maintenant que la convergence normale entraîne la convergence uniforme de la série.
On vient de voir que, pour tout élément a de I, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(a)$ est convergente.
Autrement dit la série de fonctions converge simplement sur I.
De plus : $\forall$ n $\in$ ℕ, $\forall$ p $\geq$ 1, $\forall$ t $\in$ I, $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(t)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \sup_{x\in I} |u_n(x)|$,
et en examinant la limite lorsque p tend vers +∞ (toutes les sommes partielles convergent), on obtient :
$\forall$ n $\in$ ℕ, $\forall$ t $\in$ I, $|S(t) - S_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sup_{x\in I} |u_n(x)|$, où S_n désigne la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de fonctions, et S sa somme.
La fonction $|S - S_n|$ est alors, pour tout entier n, majorée sur I et sa borne supérieure sur I vérifie :
$\forall$ n $\in$ ℕ, $\sup_{x\in I} |S(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sup_{x\in I} |u_n(x)| = R_n$.
Puisqu'enfin, la suite majorante tend vers 0 quand n tend vers +∞ (puisque c'est le reste d'ordre n d'une série numérique convergente), on en déduit que : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)|\right) = 0$.

Théorème 2.2 : continuité de la somme et convergence uniforme

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions définies d'un intervalle I de ℝ dans **K**.
Si, pour : a $\in$ I, on a :
- pour tout entier n, la fonction u_n est continue en a,
- la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément ou normalement sur I,

alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série de fonctions est continue en a.

En particulier cela permet d'écrire : $\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} u_n(x)\right)$

Plus généralement, si :
- pour tout entier n, la fonction u_n est continue sur I,
- la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément ou normalement sur I,

alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série de fonctions est continue sur I.

Démonstration :
Puisque, pour tout entier n, la fonction S_n est continue en a (comme somme de fonctions continues en a) et (S_n) converge uniformément sur I vers S, S est également continue en a.
Le même argument est utilisé pour montrer que si toutes les fonctions u_n sont continues sur I, la somme est également continue sur I.
On en déduit alors que : $\forall$ a $\in$ I,
- S(a) = $\lim_{x\to a} S(x) = \lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)$, d'une part, et :
- $S(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} u_n(x)\right)$, puisque les fonctions u_n sont toutes continues en a.

Théorème 2.3 : continuité de la somme et convergence uniforme sur tout segment

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions définies d'un intervalle I de ℝ dans **K**.
On suppose que :

- pour tout entier n, la fonction u_n est continue sur I,
- la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément ou normalement sur tout segment : $[\alpha,\beta] \subset$ I.

Alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série de fonctions est continue sur I.

Démonstration :

La démonstration utilise là encore que toutes les fonctions S_n sont continues sur I, et le théorème démontré dans le cadre des suites de fonctions (avec des hypothèses identiques) donne le résultat voulu.

Théorème 2.4 : étude d'une somme de série de fonctions aux bornes d'un intervalle ouvert

Soit I un intervalle de ℝ, ouvert en au moins une de ses extrémités, notée a.

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions définies d'un intervalle I de ℝ dans **K**, telle que :

- la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément ou normalement sur I,
- pour tout entier n, la fonction u_n admet une limite L_n finie en a,
- la série $\sum_{n\geq 0} L_n$ converge.

Alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série de fonctions admet $\sum_{n=0}^{+\infty} L_n$ comme limite en a, autrement dit, on peut écrire : $\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} u_n(x)\right)$.

Démonstration (hors programme) :

Là encore, il suffit d'adapter la démonstration faite dans le cadre des suites, en notant par exemple :

$\forall$ n $\in$ ℕ, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} L_k$.

On constate alors que :

- la suite (S_n) converge alors uniformément sur I vers S, somme de la série de fonctions,
- pour tout entier n, la fonction S_n admet pour limite β_n en a,
- la suite (β_n) converge vers L, somme de la série numérique.

Dans ce cas, la limite uniforme S de la suite de fonctions (S_n) admet pour limite L en a.

Liens avec l'intégration ou la dérivation des fonctions.

Théorème 3.1 : convergence uniforme et intégrales sur un segment, cas des suites

Soit (u_n) une suite de fonctions définies d'un segment [a,b] de ℝ dans **K**, continues sur [a,b].

Si la suite (u_n) converge uniformément sur [a,b] vers u, alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b u_n(t).dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty}(u_n(t)).dt = \int_a^b u(t).dt .$$

Démonstration :

Il suffit d'écrire :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \left|\int_a^b u_n(t).dt - \int_a^b u(t).dt\right| \leq \int_a^b |u_n(t) - u(t)|.dt \leq \int_a^b \sup_{[a,b]}|u_n - u|.dt = (b-a).\sup_{[a,b]}|u_n - u| .$$

Si on fait tendre n vers +∞, le théorème des gendarmes montre alors qu'on a bien :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b u_n(t).dt = \int_a^b u(t).dt .$$

Théorème 3.2 : convergence uniforme (ou normale) et intégrales sur un segment, cas des séries

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions définies d'un segment [a,b] de ℝ dans **K**, continues sur [a,b].

Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément ou normalement sur [a,b], alors :

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)\right).dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b u_n(t).dt\right).$$

Démonstration :

Lé encore, on s'appuie sur la démonstration précédente en remarquant que la suite (S_n) des sommes partielles converge uniformément sur [a,b], et donc, comme :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b S_n(t).dt=\sum_{k=0}^{n}\int_a^b u_k(t).dt$, par linéarité de l'intégrale sur [a,b], on en déduit bien que :

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)\right).dt=\int_a^b\lim_{n\to+\infty}(S_n(t)).dt=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b S_n(t).dt=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_a^b u_k(t).dt\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b u_n(t).dt\right).$$

Théorème 3.3 : caractère C^1 de la limite d'une suite de fonctions

Soit (u_n) une suite de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans **K**, de classe C^1 sur I.

On suppose que :

- la suite (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, de I dans **K**,
- la suite (u'_n) converge uniformément sur I (ou sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans I) vers v.

Alors u est de classe C^1 sur I, et : u' = v.

De plus, la convergence de la suite (u_n) est uniforme sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans I.

Démonstration :

Soit $[\alpha,\beta]$ un segment inclus dans I.

Posons alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$, $v_n(x)=\int_\alpha^x u_n'(t).dt$.

On constate alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [\alpha,\beta],\ \left|v_n(x)-\int_\alpha^x v(t).dt\right|=\left|\int_\alpha^x (u_n(x)-v(t)).dt\right|\le\int_\alpha^x|u_n'(x)-v(t)|.dt\le|x-\alpha|.\sup_{[\alpha,\beta]}|u_n'-v|,$$

et donc, pour tout entier n, la fonction : $x\mapsto v_n(x)-\int_\alpha^x v(t).dt$, est bornée sur $[\alpha,\beta]$ et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{[x\in\alpha,\beta]}\left|v_n(x)-\int_\alpha^x v(t).dt\right|\le|\beta-\alpha|.\sup_{[\alpha,\beta]}|u_n'-v|.$$

Il y a alors convergence uniforme (donc convergence simple) de la suite de fonctions (v_n) sur $[\alpha,\beta]$, étant donné que (u'_n) converge uniformément sur $[\alpha,\beta]$ vers v.

Mais comme de plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$, $v_n(x) = u_n(x) - u_n(\alpha)$, et que cette suite de fonctions converge simplement sur I (donc sur $[\alpha,\beta]$) vers la fonction définie sur $[\alpha,\beta]$ par : $x \mapsto u(x) - u(\alpha)$, on conclut que :

$\forall x \in [\alpha,\beta]$, $u(x) = u(\alpha) + \int_\alpha^x v(t).dt$.

La fonction v étant de plus continue sur $[\alpha,\beta]$, comme limite uniforme de suite de fonctions continues sur $[\alpha,\beta]$, u est donc de classe C^1 (comme primitive de v sur $[\alpha,\beta]$) sur tout $[\alpha,\beta]$ inclus dans I, donc sur I, et :

$\forall x \in [\alpha,\beta]$, $u'(x) = v(x)$.

Enfin : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$,

$$|u_n(x)-u(x)|\le|u_n(\alpha)-u(\alpha)|+\left|\int_\alpha^x(u_n'(x)-v(t)).dt\right|\le|u_n(\alpha)-u(\alpha)|+|\beta-\alpha|.\sup_{[\alpha,\beta]}|u_n'-v|,$$

et on en déduit la convergence uniforme de (u_n) sur $[\alpha,\beta]$ vers u.

Théorème 3.4 : extension aux suites de fonctions de classe C^k

Soit (u_n) une suite de fonctions définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans **K**, de classe C^k sur I.

On suppose que :

- pour : $0 \le i \le k-1$, la suite $(u_n^{(i)})$ converge simplement sur I vers une fonction u_i, de I dans **K**,
- la suite $(u_n^{(k)})$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans I) vers u_k.

Alors u est de classe C^k sur I, et : $\forall\ 0 \le i \le k$, $u^{(i)} = u_i$.

De plus, la convergence de la suite (u_n) est uniforme sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans I.

Démonstration :

Puisque la suite $(u_n^{(k-1)})$ vérifie les hypothèses du théorème 3.3, on en déduit que u_{k-1} est de classe C^1, on a : $u_{k-1}' = u_{k-1}$, et la convergence de la suite $(u_n^{(k-1)})$ est uniforme sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans I.

Il suffit ensuite de raisonner par récurrence « remontante » pour en déduire que pour tout : $0 \le i \le k-1$,

la suite $(u_n^{(i)})$ converge uniformément sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans I vers u_i, que u_i est de classe C^1 sur I, et que : $u_i' = u_i$.
Finalement, u est de classe C^k sur I, on a : $\forall\ 0 \leq i \leq k$, $u^{(i)} = u_i$, et la convergence de toutes les suites dérivées est uniforme sur tout segment inclus dans I.

Théorème 3.5 : caractère C^1 de la somme d'une série de fonctions

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions définies d'un intervalle I de ℝ dans **K**, de classe C^1 sur I.

On suppose que :

- la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur I,
- la série $\sum_{n\geq 0} u'_n$ converge uniformément ou normalement sur I (ou sur tout segment : $[\alpha,\beta] \subset$ I).

Alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série de fonctions est de classe C^1 sur I, et : $(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$.

Démonstration :

Là encore, la démonstration découle de celle du théorème 3.3 en remarquant simplement que (S_n) converge simplement sur I, et que (S_n') converge uniformément sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans I.

Théorème 3.6 : extension aux séries de fonctions de classe C^k

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions définies d'un intervalle I de ℝ dans **K**, de classe C^k sur I.

On suppose que :

- pour : $0 \leq i \leq k - 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n^{(i)}$ converge simplement sur I,
- la série $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ converge uniformément ou normalement sur I (ou sur tout segment : $[\alpha,\beta] \subset$ I).

Alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série de fonctions est de classe C^k sur I, et : $\forall\ 0 \leq i \leq k$, $(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$.

De plus, la convergence de la suite (u_n) est uniforme sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans I.

Démonstration :

Là encore, la démonstration découle de celle du théorème 3.4 en remarquant simplement que pour tout : $0 \leq i \leq k - 1$, la suite $(S_n^{(i)})$ converge simplement sur I, et que $(S_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans I.