CONTRÔLE CONTINU :

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Durée : 1 *heure*

La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1

En utilisant la définition de la convergence d'une intégrale généralisée , montrer la convergence et donner la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$$

Exercice 2

Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x^2})}{\ln(1+x)}dx$$

est convergente.

Exercice 3

Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \left(1+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)dx$$

est divergente.

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ $(\alpha > 0)$ Étudier selon la valeur de α la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin(x)}{x^\alpha}dx$$

On rappelle qu'au voisinage de 0 , $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.