Optimisation et Éléments Finis

Corrigé du Soutien n°2 : annale de l'interrogation 1 du 2 mars 2022

Exercice 2 ***Position d'un fil élastique suspendu***

On travaille dans le plan $\mathbb{R}^2$. Deux points fixés P et Q du plan sont connectés par une chaîne constituée de n (n élement de $\mathbb{N}^*$) masses reliées par un élastique. Chaque masse a une masse m, et la constante d'élasticité du fil est $K > 0$. L'énergie potentielle de la chaîne comporte des termes d'élasticité et des termes de gravité. Au total, pour une chaîne avec n masses placées aux points A_i de coordonnées $(x_i, y_i), i$ dans $[\![1, n]\!]$, l'énergie potentielle est donnée par l'expression

$$\frac{K}{2}\sum_{i=0}^{n}\|A_{i+1}-A_i\|^2 + mg\sum_{i=1}^{n} y_i, \tag{1}$$

avec la convention $A_0 = P$ et $A_{n+1} = Q$ et où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle. On suppose que la chaîne ne rencontre aucun obstacle. On peut représenter tout cela par le dessin de la Figure 1. On cherche à déterminer la position d'équilibre de la chaîne (au sens position de chaque points A_i pour i élément de $[\![1, n]\!]$) qui minimise l'énergie potentielle.

Dans toute la suite, on considère le cas particulier où $n = 2$ et les points $P = (0, 1)$ et $Q = (1, 0)$. On notera donc $A_0 = P$, $A_3 = Q$ et A_1 et A_2 représentent les emplacements des deux masses dont on cherche la position.

1. **En notant (x_i, y_i) les coordonnées de A_i pour i appartenant à $\{1, 2\}$ exprimer l'énergie potentielle (1) comme une fonction qui dépend des variables (x_1, x_2, y_1, y_2) élément de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{E} : (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mapsto \mathcal{E}(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}$ et montrer que pour tout u de $\mathbb{R}^4$:**

$$\mathcal{E}(u) = \frac{K}{2}\langle Au, u\rangle + \langle b, u\rangle + K, \tag{2}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -K \\ mg-K \\ mg \end{pmatrix}. \tag{4}$$

En déduire que $\mathcal{E}$ est une fonctionnelle quadratique.

On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{K}{2}\sum_{i=0}^{2}\|A_{i+1}-A_i\|^2 + \sum_{i=1}^{2} y_i,\\
&\quad = \frac{K}{2}\left[\left((x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2\right)+\left((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right)+\left((x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2\right)\right] + mg\,(y_1+y_2)\\
&\quad = \frac{K}{2}\left[\left((x_1-0)^2+(y_1-1)^2\right)+\left((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right)+\left((1-x_2)^2+(0-y_2)^2\right)\right] + mg\,(y_1+y_2)\\
&\quad = \frac{K}{2}\left[\left(x_1^2+y_1^2-2y_1+1\right)+\left(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2\right)+\left(x_2^2-2x_2+1+y_2^2\right)\right] + mg\,(y_1+y_2)\\
&\quad = \frac{K}{2}\left[2x_1^2+2x_2^2+2y_1^2+2y_2^2-2x_1x_2-2y_1y_2-2x_2-2y_1+2\right] + mg\,(y_1+y_2)\\
&\quad = \frac{K}{2}\left[2x_1^2+2x_2^2+2y_1^2+2y_2^2-2x_1x_2-2y_1y_2\right] + \left[\frac{K}{2}(-2x_2-2y_1)+mg\,(y_1+y_2)\right] + \frac{K}{2}\times 2,
\end{aligned}$$

ce que l'on peut mettre sous la forme (2)–(4) annoncée.

On a :

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\langle \widetilde{A}u, u\rangle - \langle \widetilde{b}, u\rangle + K, \tag{5}$$

où

$$\widetilde{A} = KA \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}), \qquad \widetilde{b} = -b \in \mathbb{R}^4, \tag{6}$$

la fonctionnelle $\mathcal{E}$ est ainsi quadratique d'après le Cours.

2. Écrire le problème d'optimisation considéré, préciser la/les variable/s d'optimisation et la fonction coût et donner les caractéristiques usuelles du problème d'optimisation.

On prend $V = \mathbb{R}^4$.

La fonction coût est $\mathcal{E}$.

Le problème d'optimisation est le suivant : trouver $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$ de V qui minimise $\mathcal{E}$ sur V, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) = \min_{(x_1,x_2,y_1,y_2)\in V} \mathcal{E}(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

Les variables d'optimisation sont les nombres réels x_1, x_2, y_1 et y_2 ou encore la variable d'optimisation

$$u = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4.$$

3. Montrer que E est α-convexe et déterminer $\alpha > 0$. *Indication : on pourra par exemple montrer que pour tout $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ élément de $\mathbb{R}^4$, $\langle Aw, w\rangle = \|w\|^2 + (w_1 - w_2)^2 + (w_3 - w_4)^2$.*

On a :

$$\begin{aligned}
\langle Aw, w\rangle &= \left[2w_1^2 + 2w_2^2 + 2w_3^2 + 2w_4^2 - 2w_1w_2 - 2w_3w_4\right] \\
&= \left[\left(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2\right) + \left(w_1^2 + w_2^2 - 2w_1w_2\right) + \left(w_3^2 + w_4^2 - 2w_3w_4\right)\right] \\
&= \|w\|^2 + (w_1 - w_2)^2 + (w_3 - w_4)^2 \\
&\geq \|w\|^2.
\end{aligned}$$

• La Hessienne de la fonctionnelle quadratique $\mathcal{E}$ en (a_0, b_0, c_0, d_0) est : $Hess\,\mathcal{E}(a_0, b_0, c_0, d_0) = KA$. Comme $\langle Aw, w\rangle \geq \|w\|^2$, on a : $\langle Hess\,\mathcal{E}(a_0, b_0, c_0, d_0)w, w\rangle \geq K\|w\|^2$, c'est-à-dire $\mathcal{E}$ est K-convexe.

4. Montrer que le problème de minimisation admet un unique point de minimum.

• On a : $V = \mathbb{R}^4$. La fonction $\mathcal{E} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$. D'après la question 3., la fonction $\mathcal{E}$ est K-convexe, donc $\mathcal{E}$ est infinie à l'infini c'est-à-dire : $\displaystyle\lim_{\|w\|\to+\infty} \mathcal{E}(w) = +\infty$. Comme $V = \mathbb{R}^4$ est un ensemble fermé et non vide de $\mathbb{R}^4$, il existe au moins un point de minimum.

• $V = \mathbb{R}^4$ est un ensemble convexe. Puisque $\mathcal{E}$ est K-convexe, elle est strictement convexe sur V, et elle admet au plus point de minimum pour $\mathcal{E}$.

• Finalement, $\mathcal{E}$ admet un unique point de minimum sur $V = \mathbb{R}^4$.

5. Résoudre ce problème d'optimisation. Représenter ensuite sur un dessin la configuration de l'élastique au point de minimum en prenant $m = g = K = 1$.

Soit $w^* = (w_1, w_2, w_3, w_3)$, l'unique point de minimum de $\mathcal{E}$. La condition d'optimalité s'écrit :

$$\begin{aligned}
\nabla\mathcal{E}(w^*) = \nabla\mathcal{E}(w_1, w_2, w_3, w_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff KAw + b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff KAw = -b \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{K} \begin{pmatrix} 0 \\ -K \\ mg - K \\ mg \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2w_1 - w_2 = 0, \\ -w_1 + 2w_2 = 1, \\ 2w_3 - w_4 = 0, \\ -w_3 + 2w_4 = -1 \end{cases} \\
&\iff w_1 = \frac{1}{3}, \quad w_2 = \frac{2}{3}, \quad w_3 = -\frac{1}{3}, \quad w_4 = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

6. Vérifiez si l'algorithme de gradient à pas optimal converge pour cette fonctionnelle.

●● La fonctionnelle $\mathcal{E}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^4$.

●● La fonctionnelle $\mathcal{E}$ est K-convexe sur $\mathbb{R}^4$.

●● Soient $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ des éléments de $\mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{aligned}
\|\nabla\mathcal{E}(u) - \nabla\mathcal{E}(v)\| &= \|((KAu) + b) - ((KAv) + b)\| = \|(KAu) - (KAv)\| \\
&= \|KAu - KAv\| \\
&= K\,\|A(u-v)\| \\
&= K \left\| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \\ u_4 - v_4 \end{pmatrix} \right\| \\
&= K \left\| \begin{pmatrix} 2(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2) \\ -(u_1 - v_1) + 2(u_2 - v_2) \\ 2(u_3 - v_3) - (u_4 - v_4) \\ -(u_3 - v_3) + 2(u_4 - v_4) \end{pmatrix} \right\|
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\frac{1}{K^2}\|\nabla\mathcal{E}(u) - \nabla\mathcal{E}(v)\|^2 &= (2(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2))^2 + (-(u_1 - v_1) + 2(u_2 - v_2))^2 + (2(u_3 - v_3) - (u_4 - v_4))^2 \\
&\quad + (-(u_3 - v_3) + 2(u_4 - v_4))^2 \\
&\le \left[4(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + 2\left((u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2\right)\right] \\
&\quad + \left[(u_1 - v_1)^2 + 4(u_2 - v_2)^2 + 2\left((u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2\right)\right] \\
&\quad + \left[4(u_3 - v_3)^2 + (u_4 - v_4)^2 + 2\left((u_3 - v_3)^2 + (u_4 - v_4)^2\right)\right] \\
&\quad + \left[(u_3 - v_3)^2 + 4(u_4 - v_4)^2 + 2\left((u_3 - v_3)^2 + (u_4 - v_4)^2\right)\right] \\
&= \left[6(u_1 - v_1)^2 + 3(u_2 - v_2)^2\right] + \left[3(u_1 - v_1)^2 + 6(u_2 - v_2)^2\right] \\
&\quad + \left[6(u_3 - v_3)^2 + 3(u_4 - v_4)^2\right] + \left[3(u_3 - v_3)^2 + 6(u_4 - v_4)^2\right] \\
&= 9\left[(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 + (u_4 - v_4)^2\right] \\
&= 9\,\|u - v\|^2
\end{aligned}$$

ensuite

$$\frac{1}{K^2}\|\nabla\mathcal{E}(u) - \nabla\mathcal{E}(v)\|^2 \le 9\,\|u - v\|^2 \iff \|\nabla\mathcal{E}(u) - \nabla\mathcal{E}(v)\| \le 3K\,\|u - v\|,$$

où nous avons utilisé : $2XY \le X^2 + Y^2$, pour tout (X, Y) de $\mathbb{R}^2$. L'algorithme de gradient à pas optimal converge ainsi pour tout u_0 donné dans $\mathbb{R}^4$.