

**Exercice 1. Vecteur Gaussien** (*mercredi*)

Dans cet exercice  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$  désigne un vecteur gaussien de moyenne  $(0, 0, 0, 0)^T$  et de matrice de variance-covariance identité.

1. Quelle est la loi de  $(X_1 - X_2)^2/2 + (X_1 + X_2)^2/2$  ?
2. Quelle est la loi de  $\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2}$  ?
3. Quel est le projeté orthogonal  $P_E(X)$  de  $X$  sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs  $(1, 1, 0, 0)^T$  et  $(0, 0, 1, 1)^T$  ?
4. Quelle est la loi de  $\|P_E(X)\|^2$  ? Quelle est la loi de  $\frac{\|P_E(X)\|^2}{\|X - P_E(X)\|^2}$  ?

**Réponse**

1. Puisque  $\mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = 0$  et  $\text{Var}(X_1 - X_2) = \text{Var}(X_1 + X_2) = 2$ , on a  $(X_1 - X_2)/\sqrt{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $(X_1 + X_2)/\sqrt{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

On a aussi  $\mathbb{E}((X_1 - X_2)(X_1 + X_2)) = \mathbb{E}(X_1^2 - X_2^2) = 0$ , ainsi  $\text{Cov}((X_1 - X_2), (X_1 + X_2)) = \mathbb{E}((X_1 - X_2)(X_1 + X_2)) - \mathbb{E}(X_1 - X_2)\mathbb{E}(X_1 + X_2) = 0$ . Comme il s'agit de variable aléatoire gaussienne et la covariance est nulle, donc  $X_1 - X_2$  et  $X_1 + X_2$  sont indépendantes.

D'après la définition de la loi du  $\chi^2(n)$ ,  $(X_1 - X_2)^2/2 + (X_1 + X_2)^2/2 \sim \chi^2(2)$ .

2. On peut écrire  $\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2} = \frac{(X_1 - X_2)^2/2}{(X_1 + X_2)^2/2}$  qui est le quotient de deux variable aléatoire de loi du  $\chi^2(1)$ . Donc sa loi est  $F(1, 1)$ .

3. Notons  $e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$  et  $e_2 = (0, 0, 1, 1)^T$ . Comme  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ , l'espace  $E$  engendré par  $e_1$  et  $e_2$  est de dimension 2 et  $P_E X = \langle e_1, X \rangle \cdot e_1 / \|e_1\|^2 + \langle e_2, X \rangle \cdot e_2 / \|e_2\|^2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2, X_1 + X_2, X_3 + X_4, X_3 + X_4)^T$ .

4. D'après le théorème de Cochran et la question précédente,  $\|P_E(X)\|^2 \sim \chi^2(2)$  et  $\frac{\|P_E(X)\|^2}{\|X - P_E(X)\|^2} \sim F(2, 2)$ .

**Exercice 2. Vecteur Gaussien** (*jeudi*)

Dans cet exercice  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont trois variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

1. Quelle est la loi de  $X^2 + Y^2$  ?
2. Quelle est la loi de  $\sqrt{2} \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$  ?
3. Quelle est la loi de  $2 \frac{Z^2}{X^2 + Y^2}$  ?
4. Quelle est la loi de  $\frac{X - Y}{\sqrt{\frac{(X + Y)^2}{2} + Z^2}}$  ? (Cette question n'était pas faisable car c'était  $X^2 + Y^2$  à la place de  $(X + Y)^2$ .)

**Réponse**

1. D'après la définition de la loi du  $\chi^2(n)$ ,  $X^2 + Y^2 \sim \chi^2(2)$ .

2. D'après la définition de la loi de Student et la question précédente,  $\sqrt{2} \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{Z}{\sqrt{(X^2 + Y^2)/2}} \sim T(2)$ .

3.  $2 \frac{Z^2}{X^2 + Y^2} = \frac{Z^2}{(X^2 + Y^2)/2} \sim F(1, 2)$ .

4. Comme  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont indépendantes et  $(X + Y)/\sqrt{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\frac{(X + Y)^2}{2} + Z^2 \sim \chi^2(2)$ .

Les variables aléatoires  $X - Y$  et  $X + Y$  sont indépendantes, voir la question 1 du sujet de mercredi. On a donc  $\frac{X - Y}{\sqrt{\frac{(X + Y)^2}{2} + Z^2}} = \frac{(X - Y)/\sqrt{2}}{\sqrt{((X + Y)^2/2 + Z^2)/2}} \sim T(2)$ .