Corrigé Contrôle Continu

Intégration.

Question de cours : Voir cours

Exercice 1 : Voir TD

Exercice 2 : 1) et 2) Voir TD

3) D'après la question 2), on a :

$$\sum_{p=2}^{\infty}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}\right)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1/n^2}{1-\frac{1}{n}}$$ (somme d'une série géométrique)

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2-1}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}$$ (somme d'une série telescopique convergente)

$$\sum_{p=2}^{\infty}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}\right)=\underline{1}$$

Exercice 3

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \to \frac{ne^{-x}}{nx+1}$ est continue sur $[0,1]$, donc borélienne. En plus elle est positive. Par application du lemme de Fatou, on a :

$$\int_0^1 \liminf_{n \to +\infty} (f_n(x))\,dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad (1)$$

. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ pour tout $x \in]0,1]$.

Donc $\liminf\limits_{n \to +\infty} (f_n(x)) = \frac{e^{-x}}{x}$, $\forall x \in]0,1]$.

D'où $\int_0^1 \liminf\limits_{n \to +\infty} (f_n(x))\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx$.

Or au voisinage de 0, $\frac{e^{-x}}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ diverge. D'autre part $\forall x \in]0,1]$, $\frac{e^{-x}}{x} > 0$, d'où $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx = +\infty$.

. De l'inégalité (1), on obtient que :

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = +\infty.$$

Or $\limsup\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \geq \liminf\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = +\infty$,

donc $\limsup\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = +\infty$.

. En conclusion, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = +\infty$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \longmapsto \dfrac{n \sin(x/n)}{x^2+1}$

est continue sur $[0,1]$, donc borélienne.

~~Comme~~ a : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$

$$|g_n(x)| = \frac{n}{x^2+1} \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \frac{x}{x^2+1} \quad \text{car } \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \frac{x}{n}$$

La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est intégrable car

$$\int_0^1 |g(x)|\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1$$

$$\int_0^1 |g(x)|\,dx = \frac{1}{2}\ln 2 < +\infty .$$

D'autre, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} = g(x)$$

D'après le théorème de la convergence dominée, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} g_n(x)\,dx$$

Ainsi $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln 2 .$