

FEUILLE DE TD/TP 3

Exercice 1. Le but de cet exercice est de tester la méthode de Monte Carlo sur un exemple simple. On souhaite vérifier la qualité de l'approximation de

$$\mathbb{P}(U \leq \lambda),$$

où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$ et λ est un réel donné dans l'intervalle $]0, 1[$.

- (1) Montrer que la variance de la variable aléatoire $\mathbb{1}_{U \leq \lambda}$ est $\lambda(1 - \lambda)$ et est toujours inférieure à $1/4$. Mettre en place une représentation graphique de la fonction $x \in [0, 1] \mapsto x(1 - x)$ permettant de le vérifier.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. de même loi que U . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \mathbb{1}_{U_n \leq \lambda}$ et \bar{X}_n la moyenne empirique des n premières variables :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{U_i \leq \lambda}.$$

Le théorème central limite dit que l'intervalle aléatoire

$$[\bar{X}_n - 1,96 \frac{\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + 1,96 \frac{\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}}{\sqrt{n}}]$$

est un intervalle de confiance asymptotique pour $\lambda = \mathbb{P}(U \leq \lambda)$ au niveau de confiance 0,95. En particulier, l'intervalle de confiance $[\bar{X}_n - \frac{1,96}{2} n^{-1/2}, \bar{X}_n + \frac{1,96}{2} n^{-1/2}]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour λ au niveau de confiance supérieur ou égal à 0,95.

Si on choisit $n = \lceil (\frac{1,96}{2})^2 \varepsilon^{-2} \rceil$, pour $\varepsilon > 0$ donné, alors l'intervalle de confiance ci-dessus est contenu dans l'intervalle $[\bar{x}_n - \varepsilon, \bar{x}_n + \varepsilon]$.

- (2) Mettre en place une fonction `Python`, dépendant de deux paramètres λ et n , permettant de simuler les réalisations de n variables aléatoires indépendantes de même loi que $\mathbb{1}_{U \leq \lambda}$.
- (3) Mettre en place une boucle permettant de simuler les réalisations de M v.a. indépendantes de même loi que \bar{X}_n .
- (4) On choisit $n = \lceil (\frac{1,96}{2})^2 \varepsilon^{-2} \rceil$ pour $\varepsilon = 0,01$. Calculer la proportion de réalisations dans la boucle ci-dessus à l'intérieur de l'intervalle $[\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$ et comparer à 0,95. On choisirra successivement $\lambda = 0,75$ et $\lambda = 0,5$.

Exercice 2. Le but de cet exercice est d'étudier deux approches Monte-Carlo pour donner une approximation de la quantité :

$$I = \int_0^1 \cos(x^3) e^{-x} dx.$$

- (1) Montrer que I peut être écrit sous les formes suivantes :

$$I = \mathbb{E} [\cos(U^3) e^{-U}], \quad I = \mathbb{E} [\cos(X^3) \mathbb{1}_{X \in [0,1]}],$$

où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et X est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1.

- (2) Écrire une fonction `f_MC` permettant de calculer en `Python` les valeurs de la fonction $x \mapsto \cos(x^3) e^{-x}$.
- (3) En utilisant l'instruction `integrate.quad(f_MC, 0, 1)` du package `scipy.integrate`, donner une valeur approchée de I à l'aide de l'intégrateur numérique de `Python` (fondée sur une méthode déterministe).

- (4) Écrire une fonction `MC_1` renvoyant l'approximation Monte-Carlo avec n tirages, l'écart-type empirique associé, ainsi que la largeur et les bornes de l'intervalle de confiance asymptotique de niveau 0,95 lorsque I est représentée à l'aide de U . Tester avec $n = 10^4$. Répéter M fois l'approximation et calculer la proportion de fois où l'intervalle de confiance contient la valeur calculée dans la question (4) pour $M = n = 10^4$.
- (5) Écrire une fonction `MC_2` renvoyant l'approximation Monte-Carlo avec n tirages, l'écart-type empirique associé, ainsi que la largeur et les bornes de l'intervalle de confiance asymptotique de niveau 0,95 lorsque I est représentée à l'aide de X . Tester avec $n = 10^4$. Répéter M fois l'approximation et calculer la proportion de fois que l'intervalle de confiance contient la valeur calculée dans la question (4) pour $M = n = 10^4$.
- (6) Quelle est la meilleure des deux méthodes ?

Exercice 3. *Aiguilles de Buffon.* Sur un parquet constitué de lattes de largeur 1, on lance des aiguilles ayant elles-mêmes 1 pour largeur. On compte alors la proportion d'aiguilles touchant les bords d'une latte. On se restreint à 10 lattes. On oriente le repère de manière à ce que les lattes soient orientées verticalement avec les bords aux abscisses entières. On appelle (X_1, X_2) le vecteur aléatoire modélisant le centre de l'aiguille et θ l'angle que fait l'aiguille avec l'axe des ordonnées. On suppose que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes et de loi uniforme $\mathcal{U}([0; 10])$, et que la variable θ est indépendante de (X_1, X_2) et de loi uniforme $\mathcal{U}([0; \pi])$.

- (1) Faire un dessin.
- (2) Montrer que la probabilité qu'une aiguille touche le bord d'une latte est $2/\pi$.
- (3) Écrire un code python permettant de représenter dans le carré $[-1, 11]^2$ onze segments verticaux d'ordonnées allant de 0 à 10 aux abscisses suivantes : 0, 1, 2, ..., 10. On pourra utiliser l'instruction `plt.grid()`.
- (4) Écrire un code python pour simuler le lancer d'une aiguille. La fonction doit renvoyer 1 si l'aiguille touche le bord et 0 sinon. Elle doit aussi représenter l'aiguille sur le plancher : de couleur rouge si elle touche le bord et de couleur noire sinon.
- (5) Lancer $n = 10^4$ aiguilles (on peut faire plus, mais attention la représentation graphique ralentit beaucoup les choses). Calculer la proportion d'aiguilles touchant les bords d'une latte. Comparer cette proportion à $2/\pi$.

Exercice 4. Dans tout l'exercice, U désigne une v.a. de loi uniforme sur $]0, 1[$.

- (1) On considère l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.
 - (a) Montrer, que pour tout $u \in [0; 1]$,
$$(e^{-u^2} - e^{-1/4})(e^{-(1-u)^2} - e^{-1/4}) \leq 0.$$
 - (b) Déduire de la question précédente que
$$\text{Cov}(e^{-U^2}, e^{-(1-U)^2}) = \text{Cov}(e^{-U^2} - e^{-1/4}, e^{-(1-U)^2} - e^{-1/4}) \leq 0.$$

puis que

$$\mathbb{V}\left[\frac{1}{2}e^{-U^2} + \frac{1}{2}e^{-(1-U)^2}\right] \leq \frac{1}{2}\mathbb{V}[e^{-U^2}].$$
 - (c) Mettre en place deux méthodes de Monte-Carlo fondées sur les représentations :
$$I = \mathbb{E}[e^{-U^2}] \quad \text{et} \quad I = \frac{1}{2}\mathbb{E}[e^{-U^2} + e^{-(1-U)^2}].$$

Comparer les variances associées et vérifier numériquement (en utilisant une troisième méthode de Monte-Carlo) les deux bornes ci-dessus.
- (2) On considère maintenant l'intégrale $J = \int_0^1 e^{-(x-\frac{1}{2})^2} dx$.
 - (a) Vérifier mathématiquement que la méthode de la variable antithétique ne diminue pas la variance.

- (b) Vérifier numériquement que la méthode de la variable antithétique ne diminue pas la variance.
(3) On définit la fonction φ par :

$$\varphi(u) = \left(\frac{1}{2} - u\right)\mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(u) + \left(\frac{3}{2} - u\right)\mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}(u).$$

- (a) Vérifier que $\varphi(U)$ a même loi que U .
(b) Coder la fonction φ en Python.
(c) Montrer que, pour tout $u \in [0; 1]$,

$$(e^{-(u-1/2)^2} - e^{-1/16})(e^{-(\varphi(u)-1/2)^2} - e^{-1/16}) \leq 0.$$

En déduire que

$$\mathbb{V}\left[\frac{1}{2}e^{-(U-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{2}e^{-(\varphi(U)-\frac{1}{2})^2}\right] \leq \frac{1}{2}\mathbb{V}\left[e^{-(U-\frac{1}{2})^2}\right].$$

- (4) Mettre en place deux méthodes de Monte-Carlo fondées sur les représentations suivantes :

$$J = \mathbb{E}\left[e^{-(U-\frac{1}{2})^2}\right] \quad \text{et} \quad J = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[e^{-(U-\frac{1}{2})^2} + e^{-(\varphi(U)-\frac{1}{2})^2}\right].$$

Comparer les variances associées et vérifier numériquement (en utilisant une troisième méthode de Monte-Carlo) les deux bornes de la question ci-dessus.

Exercice 5. Le but de ce problème est d'illustrer, sur un exemple simple, le principe suivant : *Afin de réduire la variance dans une méthode de Monte-Carlo, il est souhaitable d'écrire la quantité à approcher sous la forme de l'espérance d'une fonction aussi proche que possible d'une constante contre la loi d'une variable aléatoire simulable.*

A cet égard, nous allons voir qu'il est en particulier souhaitable que la fonction soit aussi proche que possible d'une constante **aux valeurs typiques** de la variable aléatoire. A contrario, nous allons également voir que, dans certains cas, les petites variations peuvent avoir une contribution non négligeable parce qu'accumulées sur des événements de probabilité trop importante. Ceci peut par exemple être le cas si la fonction à intégrer est proche de 0 : le cas échéant, l'erreur relative commise par la méthode de Monte-Carlo peut être significative si trop de variations, même petites, sont accumulées.

Tout au long du problème, nous cherchons à mettre en évidence ces idées sur l'exemple suivant :

$$I_{a,b} = \int_a^{a+b} e^{-x^2} dx,$$

où $a > 0$ et $b \geq 1$, a étant pensé comme grand.

Finalement, on note $f(a) \underset{a \rightarrow \infty}{\lesssim} g(a)$ si f est asymptotique inférieur à g :

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall a \geq A, \quad f(a) \leq g(a)(1 + \epsilon)$$

soit, si g est strictement positive pour a assez grand, $\limsup_{a \rightarrow \infty} f(a)/g(a) \leq 1$.

- (1) Montrer que

$$e^{-(a^2+1)} \int_0^1 e^{-2ax} dx \leq I_{a,b} \leq e^{-a^2} \int_0^b e^{-2ax} dx.$$

Et en déduire que

$$\frac{1}{2a}e^{-(a^2+1)}(1 - e^{-2a}) \leq I_{a,b} \leq \frac{1}{2a}e^{-a^2}(1 - e^{-2ab})$$

et donc que

$$\frac{1}{2a}e^{-(a^2+1)} \underset{a \rightarrow \infty}{\lesssim} I_{a,b} \underset{a \rightarrow \infty}{\lesssim} \frac{1}{2a}e^{-a^2}$$

- (2) (a) Montrer que $I_{a,b}$ peut être mis sous la forme

$$I_{a,b} = \sqrt{\pi} \mathbb{E} [\mathbf{1}_{[a,a+b]}(X)] ,$$

où X suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1/2)$.

- (b) Montrer que la variance σ^2 associée à l'estimateur Monte-Carlo ci-dessus vérifie

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-(a^2+1)} (1 - e^{-2a}) \leq \sigma^2 + I_{a,b}^2 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-a^2} (1 - e^{-2ab}).$$

Montrer que l'erreur relative $\frac{\sigma}{\sqrt{n} I_{a,b}}$ vérifie, pour b et n fixés, quand a est grand :

$$\frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{n}} \sqrt{2ae^{\frac{a^2+1}{2}}} \underset{a \rightarrow \infty}{\lesssim} \frac{\sigma}{\sqrt{n} I_{a,b}} \underset{a \rightarrow \infty}{\lesssim} \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{n}} \sqrt{2ae^{\frac{a^2}{2}+1}}$$

- (c) Mettre en place sous la forme d'une fonction Python une méthode de Monte-Carlo à n tirages renvoyant la valeur estimée ainsi que la variance associée. Calculer le rapport écart-type / valeur estimée pour $b = 1$ et a variant de 1 à 2 par pas de 1/10 et vérifier que le rapport est alors une fonction croissante de a .

- (3) (a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_{a,b}$ peut être mis sous la forme

$$I_{a,b} = \sqrt{\pi} e^{-a^2} \mathbb{E} [e^{-2aX} \mathbf{1}_{[0,b]}(X)] ,$$

où X suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1/2)$.

Cette nouvelle écriture permet de ramener l'intervalle d'intégration à des valeurs qui sont typiques de la loi gaussienne.

- (b) Montrer que la variance σ^2 associée à l'estimateur Monte-Carlo ci-dessus vérifie

$$\sigma^2 + I_{a,b}^2 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{4a} e^{-2a^2}.$$

En déduire que l'erreur relative vérifie :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n} I_{a,b}} \underset{a \rightarrow \infty}{\lesssim} \frac{e\pi^{1/4}}{n} \sqrt{2a} .$$

- (c) Mettre en place sous la forme d'une fonction Python une méthode de Monte-Carlo avec n tirages renvoyant la valeur estimée ainsi que la variance associée. Comparer (pour $n = 10^4$) les résultats obtenus avec ceux de la question précédente : on prendra $b = 1$ et on fera varier a de 1 à 2 par pas de 1/5.

- (4) (a) À l'aide d'une méthode d'échantillonnage préférentiel, montrer que $I_{a,b}$ peut être mis sous la forme

$$I_{a,b} = \frac{1}{2a} e^{-a^2} \mathbb{E} [e^{-Y^2} \mathbf{1}_{[0,b]}(Y)] ,$$

où Y suit une loi exponentielle de paramètre $2a$.

Cette nouvelle écriture est intéressante en particulier lorsque a est grand : le cas échéant, les valeurs typiques de Y sont concentrées au voisinage de 0 et la fonction à intégrer peut être vue comme très proche d'une constante.

- (b) Montrer que la variance σ^2 associée à l'estimateur Monte-Carlo ci-dessus vérifie

$$\sigma^2 + I_{a,b}^2 \leq \frac{1}{4a^2} e^{-2a^2}.$$

En déduire que l'erreur relative vérifie

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n} I_{a,b}} \underset{a \rightarrow \infty}{\lesssim} \frac{e}{\sqrt{n}}$$

- (c) Mettre en place sous la forme d'une fonction Python une méthode de Monte-Carlo avec n tirages renvoyant la valeur estimée ainsi que la variance associée. Comparer (pour $n = 10^4$) les résultats obtenus avec ceux de la question précédente : on prendra $b = 1$ et on fera varier a de 1 à 2 par pas de $1/5$.
 Calculer par ailleurs le rapport écart-type / valeur estimée pour $b = 1$ et a variant de 1 à 2 par pas de $1/10$.
- (5) (a) À l'aide d'une autre méthode d'échantillonnage préférentiel, montrer que $I_{a,b}$ peut être mis sous la forme

$$I_{a,b} = be^{-a^2} \mathbb{E} \left[e^{-U^2 - 2aU} \right],$$

où U suit une loi uniforme sur $[0, b]$.

Cette nouvelle écriture est particulièrement intéressante lorsque b et a sont petits: le cas échéant, l'exponentielle dans l'espérance ne varie pas trop.

- (b) Montrer que la variance σ^2 associée à l'estimateur Monte-Carlo ci-dessus vérifie

$$\sigma^2 + I_{a,b}^2 \leq \frac{b}{4a} e^{-2a^2}.$$

- (c) Mettre en place sous la forme d'une fonction Python une méthode de Monte-Carlo avec n tirages renvoyant la valeur estimée ainsi que la variance associée. Comparer (pour $n = 10^4$) les résultats obtenus avec ceux de la question précédente : on prendra $a = 0,5$ et on fera varier b de 1 à 3 par pas de $1/5$.