TP: LOGICIEL LATEX

Kra Kouamé Gérard

15 juillet 2025

Exercice 3. La fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-\alpha} e^{-t} dt$$

et appelée “la fonction Gamma (d’Euler)", généralise la factorielle. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,$\Gamma(n+1)$=n!. On peut aussi montrer que :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

en se ramenant à l’intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ (par changement de variables), cette dernière valant $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (par exemple en considérant le carré de I et un passage en coordonnées polaires).

υ *Exercice* 4. Pour $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$,

$$\mathbb{M} \in GL_n(\mathbb{Z}) \Longleftrightarrow det\mathbb{M} = \pm 1$$

Exercice 6. Écrivons le moment magnétique.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{OP} \Lambda \overrightarrow{j}(P) d\tau (\mathcal{V} \text{ étant un volume}).$$

Exercice 9. Soit $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^*$. Supposons les a_i premiers entre eux dans leur ensemble (pour i $\in \{1, \ldots, k\}$) et notons,pour n ≥ 1, un le nombre de k-uplets $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = n$. Aors

$$U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Exercice 10. Pour avoir la valeur d'une intégrale, deux moyens existent :

1. Calculer sa valeur exacte. Différents outils peuvent être utilisés, en particulier :
   - la règle des invariants de Bioche :
     - si $-x \leftarrow x$ est un invariant, on utilise u=$\cos x$,
     - si c'est $\pi - x \leftarrow x$, on utilise u=$\sin x$,
     - si c'est $\pi - x \leftarrow x$, on utilise u=$\tan x$;
   - le théorème des résidus ;
   - l'égalité de Plancherel-Parseval.
2. Calculer une valeur approchée. On distingue deux types de méthodes :
   (a) des méthodes déterministes, contenant :
      i. les méthodes de Newton-Cotes,
      ii. les méthodes de Gauss ;
   (b) une méthode probabiliste : la méthode de Monte-Carlo.

.

Exercice 11. À savoir sur les méthodes de quadrature :

Méthode	ordre
Rectangles à gauche	0
Rectangles à droite	0
Point milieu	1
Trapèzes	1
Simpson	3

.

Exercice 16. Pour tout $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n$, le déterminant de Vandermonde est :

$$V(a_1,\dots,a_n)=\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & {a_1}^{n-1}\\ 1 & a_2 & \cdots & {a_2}^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & \dots & {a_n}^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i\leq j\leq n}(a_j-a_i).$$

Exercice 17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sin(u_n)$. Alors on peut montrer successivement que :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0,$$

$$u_n\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{3}{n}},$$

$$u_n\underset{+\infty}{=}\sqrt{\frac{3}{n}}-\underbrace{\frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}+\circ\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)}_{=\circ\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)}.$$

Exercice 18 Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{\sin x}{x}\end{array}$. On peut prolonger f par continuité en $\sin_c(x)=\begin{cases}f(x) & si\ x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[\\ 1 & sinon\end{cases}$.

Si on note $\Delta_t=\frac{(t_f-t_0)}{(N-1)}$ la longeur d'un pas de temps alors $\forall n\geq 0,\ y_{n+1}=y_n+\Delta_t(-ky_n+r)$ On reconnait une suite arithmético-géométrique, et on en déduit que $y_n=(1-k\Delta_t)^n\left(y_0-\frac{r}{k}\right)+\frac{r}{k}$

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$