FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 1

Pour tous les exercices dans lesquels vous proposerez une méthode de simulation, il est conseillé de faire une vérification par histogramme.

Exercice 1.
Simuler n tirages de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$, pour n arbitraire. Tracer un histogramme des variables simulées par cette méthode. Comparer, pour différentes valeurs de n, avec un tracé de la densité de la loi uniforme.

Rappel. Après avoir importé `numpy` comme `np` et `matplotlib.pyplot` comme `plt`, utiliser l'instruction `np.random.rand(`n`)` pour la simulation de n v.a. indépendantes de loi uniforme sur $]0,1[$ et l'instruction `plt.hist(x,bins=M,density=True)` pour représenter les valeurs d'un vecteur x sous la forme d'un histogramme avec M classes.

Exercice 2.

(1) Simuler des variables exponentielles par inversion de la fonction de répartition. On écrira une fonction permettant de réaliser n tirages d'une loi exponentielle de paramètre λ, pour n et λ arbitraires.

(2) Pour un choix de λ, tracer un histogramme des variables simulées par cette méthode. Comparer, pour différentes valeurs de n, avec un tracé de la densité de la loi exponentielle (de paramètre λ)

$$f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x) \end{array}$$

Exercice 3.

(1) Simuler des variables de Bernoulli de paramètre p par inversion de la fonction de répartition. On écrira une fonction permettant de réaliser n tirages d'une loi de Bernoulli de paramètre p, pour n et p arbitraires.

(2) Pour un choix de p, représenter les variables simulées sous la forme d'un diagramme en bâtons à l'aide de l'instruction `plt.bar`. Comparer pour différentes valeurs de n.

(3) Construire un simulateur d'une loi binomiale de paramètres N et p (attention ici : N est le nombre d'essais dans la loi binomiale). En déduire une fonction permettant de simuler n réalisations indépendantes de loi binomiale de paramètres N et p.

(4) On rappelle que, pour S_N une v.a. de loi binomiale de paramètres N et p, la variable $N^{-1/2}(S_N - Np)$ se comporte, pour N grand, comme une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance $p(1-p)$ (théorème de Moivre-Laplace).

Utiliser le simulateur construit dans la question précédente pour mettre en évidence le théorème de Moivre Laplace : on choisira par exemple $p = .4$, $N = 10000$ et on représentera les simulations de $n = 10^6$ réalisations de la loi binomiale sous la forme d'un histogramme et on comparera à la densité gaussienne correspondante.

Exercice 4.
Soit X une v.a. de loi géométrique de paramètre p, i.e. $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le simulateur de la loi de Bernoulli, construire un simulateur de `n` réalisations indépendantes de X. Comparer avec la loi théorique à l'aide d'un diagramme en bâtons.

Exercice 5.
Construire un simulateur de n v.a. indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ de loi

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = 1/6,\ \mathbb{P}(X_i = 2) = 1/2,\ \mathbb{P}(X_i = 3) = 1/3.$$

On utilisera l'instruction `cumsum` pour construire la fonction de répartition sous-jacente.

Exercice 6.

(1) On considère une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X et de fonction quantile Q_X. Montrer que si F_X est continue, alors, pour tout $x \in]0,1[$, $F_X(Q_X(x)) = x$.
Attention, cela ne veut pas dire que Q_X est la réciproque de F_X !

(2) On considère la fonction F définie de la manière suivante :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{si } x \leq 1/3, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ \frac{3}{2}(x - 2/3) + 1/2, & \text{si } 2/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Montrer que F est une fonction de répartition continue mais qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q(F(x)) \neq x$ où Q est la fonction quantile associée à F.