Université Côte d'Azur Année 2023/2024

M1 MF-MPA / IM Semestre 2

Optimisation et Éléments Finis

Corrigé du Soutien n°1

Partie 1 : Calcul différentiel

Exercice 1.1 : dérivée directionnelle
En utilisant la définition de la dérivée directionnelle, déterminer dans chacun des cas ci-dessous si la fonction f admet une dérivée au point a suivant le vecteur v.

1.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &\mapsto \boldsymbol{f(x,y) = 2x^2 + xy}, \end{aligned}$$

en $a = (0,1)$ et $v = (1,1)$;

Soit t dans $\mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{f\left((0,1)+t(1,1)\right)-f(0,1)}{t} = \frac{f\left(t,1+t\right)-f(0,1)}{t} = \frac{\left(2t^2+t(1+t)\right)-0}{t} = 2t+(1+t) \underset{t\to 0}{\to} 1,$$

donc f admet une dérivée au point $(0,1)$ suivant le vecteur $(1,1)$ qui vaut : $\mathrm{D}_{(1,1)}f(0,1) = 1$.

2.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &\mapsto \begin{cases} \boldsymbol{f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}}, & \textbf{si} \quad \boldsymbol{(x,y) \neq (0,0)}, \\ \boldsymbol{f(0,0) = 0}, \end{cases} \end{aligned}$$

en $a = (0,0)$ et **$v = (1,1)$.**

Soit t dans $\mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{f\left((0,0)+t(1,1)\right)-f(0,0)}{t} = \frac{f\left(t,t\right)-f(0,0)}{t} = \frac{\frac{t^3}{2t^2}-0}{t} = \frac{1}{2},$$

la fonction f admet ainsi une dérivée au point $(0,0)$ suivant le vecteur $(1,1)$ qui vaut : $\mathrm{D}_{(1,1)}f(0,0) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 1.2 : dérivées partielles
Étudier l'existence des dérivées partielles et calculer ces dérivées partielles aux points où elles existent pour les fonctions dont les expressions sont les suivantes :

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^2y - \mathrm{e}^{xy}, \quad v(x,y) = \left(y^5x^2,\ \ln(x+y)\right).}$$

Étude des dérivées partielles de f.
• La fonction polynôme $u : (x,y) \mapsto x^2y$ admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ données par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = 2ab, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = a^2.$$

• La fonction polynôme $p : (x,y) \mapsto xy$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ et : $p(a,b)$ est dans $\mathbb{R}$ pour tout (a,b) de $\mathbb{R}^2$. Elle admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ données par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial p}{\partial x}(a,b) = b, \qquad \frac{\partial p}{\partial y}(a,b) = a.$$

La fonction exp : $t \mapsto \exp(t) = \mathrm{e}^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\exp'(t) = \exp(t) = \mathrm{e}^t$ pour tout t de $\mathbb{R}$.
Par composition, $\exp \circ p$ admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial (\exp \circ p)}{\partial x}(a,b) = \exp'(p(a,b))\frac{\partial p}{\partial x}(a,b) = b\mathrm{e}^{ab}, \qquad \frac{\partial (\exp \circ p)}{\partial y}(a,b) = \exp'(p(a,b))\frac{\partial p}{\partial y}(a,b) = a\mathrm{e}^{ab}.$$

• Comme différence des fonctions u et $\exp \circ p$, la fonction f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 2ab - b\mathrm{e}^{ab} = b\left(2a - \mathrm{e}^{ab}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a^2 - a\mathrm{e}^{ab} = a\left(a - \mathrm{e}^{ab}\right).$$

Étude des dérivées partielles de v.
• L'ensemble de définition de v est :

$$\mathscr{D}_v = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y > 0\right\}.$$

• La fonction polynôme $u : (x,y) \mapsto y^5x^2$ admet des dérivées partielles sur $\mathscr{D}_v$ données par :

$$\forall (a,b) \in \mathscr{D}_v, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = 2ab^5, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = 5a^2b^4.$$

• La fonction polynôme $p : (x,y) \mapsto x + y$ est définie sur $\mathscr{D}_v$ et : $p(a,b)$ est dans $\mathbb{R}_+^*$ pour tout (a,b) de $\mathscr{D}_v$. Elle admet des dérivées partielles sur $\mathscr{D}_v$ données par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial p}{\partial x}(a,b) = 1, \qquad \frac{\partial p}{\partial y}(a,b) = 1.$$

La fonction ln : $t \mapsto \ln t$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\ln'(t) = \dfrac{1}{t}$ pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$.
Par composition, $\ln \circ p$ admet des dérivées partielles sur $\mathscr{D}_v$ et on a :

$$\begin{aligned}
\forall (a,b) \in \mathscr{D}_v, &\qquad \frac{\partial (\ln \circ p)}{\partial x}(a,b) = \ln'(p(a,b))\frac{\partial p}{\partial x}(a,b) = \frac{1}{a+b},\\
\forall (a,b) \in \mathscr{D}_v, &\qquad \frac{\partial (\ln \circ p)}{\partial y}(a,b) = \ln'(p(a,b))\frac{\partial p}{\partial y}(a,b) = \frac{1}{a+b}.
\end{aligned}$$

• La fonction f admet alors des dérivées partielles sur $\mathscr{D}_v$ et on a :

$$\begin{aligned}
\forall (a,b) \in \mathscr{D}_v, &\qquad \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = 2ab^5, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = 5a^2b^4;\\
\forall (a,b) \in \mathscr{D}_v, &\qquad \frac{\partial (\ln \circ p)}{\partial x}(a,b) = \frac{1}{a+b}, \qquad \frac{\partial (\ln \circ p)}{\partial y}(a,b) = \frac{1}{a+b}.
\end{aligned}$$

Exercice 1.3 : différentielle
En utilisant la définition, montrer que les applications d'expressions suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle aux points où celle-ci existe :

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad g(x,y,z) = xy^2 + 2z^3.}$$

Différentiabilité de f.
Soient (a,b) et (h,k) dans $\mathbb{R}^2$. On a :

$$f\left((a,b) + (h,k)\right) = f\left(a+h, b+k\right) = \left(a^2 + b^2\right) + 2\left(ah + bk\right) + \left(h^2 + k^2\right)$$

c'est-à-dire :

$$f\left((a,b) + (h,k)\right) - f\left(a,b\right) - \mathrm{D}f(a,b)\left(h,k\right) = \|(h,k)\|\varepsilon\left(h,k\right)$$

où

$$\mathrm{D}f(a,b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \;\; (h,k) \mapsto 2\left(ah + bk\right), \quad \varepsilon\left(h,k\right) = \|(h,k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}.$$

Puisque $\mathrm{D}f(a,b)$ est une application linéaire sur $\mathbb{R}^2$, et $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon\left(h,k\right) = 0$, la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et sa différentielle en tout point (a,b) est $\mathrm{D}f(a,b)$.

Différentiabilité de g.
Soient (a,b,c) et (h,k,s) dans $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} g\left((a,b,c)+(h,k,s)\right) &= g\left(a+h,b+k,c+s\right) = \left(a+h\right)\left(b+k\right)^2 + 2\left(c+s\right)^3 \\ &= \left(a+h\right)\left(b^2+2bk+k^2\right) + 2\left(c^3+3cs+3cs^2+s^3\right) \\ &= \left(ab^2+2c^3\right) + \left(\left(2abk+b^2h\right)+6cs\right) + \left(\left(ak^2+2bhk+hk^2\right)+2\left(3cs^2+s^3\right)\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$g\left((a,b,c)+(h,k,s)\right) - g\left(a,b,c\right) - \mathrm{D}g(a,b,c)\left(h,k,s\right) = \|(h,k,s)\|\varepsilon\left(h,k\right)$$

où

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}g(a,b,c) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \ (h,k,s) \mapsto \left(\left(2abh+b^2h\right)+6cs\right), \\ &\varepsilon\left(h,k,s\right) = \frac{ak^2+2bhk+hk^2+2\left(3cs^2+s^3\right)}{\|(h,k,s)\|} \\ &\|(h,k,s)\| = \max\left\{|h|,\ |k|,\ |s|\right\}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} |\varepsilon\left(h,k,s\right)| &\leq \frac{\max\left\{|a|,\ 2|b|,\ 1,\ 6|c|,\ 2\right\} \times \left(\|(h,k,s)\|^2+\|(h,k,s)\|^2+\|(h,k,s)\|^3+\|(h,k,s)\|^2+\|(h,k,s)\|^3\right)}{\|(h,k,s)\|} \\ &= \max\left\{|a|,\ 2|b|,\ 6|c|,\ 2\right\} \times \left(3\|(h,k,s)\|+2\|(h,k,s)\|^2\right) \underset{(h,k,s)\to(0,0,0)}{\longrightarrow 0}, \end{aligned}$$

donc : $\lim\limits_{(h,k,s)\to(0,0)} \varepsilon\left(h,k,s\right) = 0$. Puisque $\mathrm{D}g(a,b,c)$ est une application linéaire sur $\mathbb{R}^3$, la fonction g est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et sa différentielle en tout point (a,b,c) est $\mathrm{D}g(a,b,c)$.

Exercice 1.4 : gradient
En utilisant les opérations usuelles sur les fonctions différentiables, étudier la différentiabilité et calculer les différentielles et le gradient des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\boldsymbol{f(x,y) = \ln(x+y^2), \qquad g(x,y,z) = xy^2\mathrm{e}^{xz^3}.}$$

Différentiabilité de f.
• L'ensemble de définition de f est :

$$\mathscr{D}_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \middle|\ x+y^2>0\right\}.$$

• La fonction polynôme $p : (x,y) \mapsto x+y^2$ est différentiable sur $\mathscr{D}_f$ de différentielle définie par :

$$\forall (a,b)\in\mathscr{D}_f, \quad \forall (h,k)\in\mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{D}p(a,b)\left(h,k\right) = \frac{\partial p}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial p}{\partial y}(a,b)k = h+2bk.$$

De plus, pour (x,y) de $\mathscr{D}_f$, on a : $x+y^2>0$.
• La fonction $\ln : t \mapsto \ln t$ est différentiable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\mathrm{D}\ln(t)\left(s\right) = \ln'(t)\, s = \dfrac{s}{t}$ pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout s de $\mathbb{R}$.
Par composition, $f = \ln\circ p$ est différentiable sur $\mathscr{D}_f$ et on a :

$$\forall (a,b)\in\mathscr{D}_f, \quad \forall (h,k)\in\mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{D}f(a,b)\left(h,k\right) = \mathrm{D}\ln\left(p(a,b)\right)\left[\mathrm{D}p(a,b)\left(h,k\right)\right] = \frac{\mathrm{D}p(a,b)\left(h,k\right)}{p(a,b)} = \frac{h+2bk}{a+b^2}.$$

On en déduit le gradient de f donné par :

$$\forall (a,b)\in\mathscr{D}_f, \quad \mathrm{grad}f(a,b) = {}^{\boldsymbol{t}}\!\left(\frac{1}{a+b^2}, \frac{2b}{a+b^2}\right).$$

On peut calculer directement le gradient de f grâce aux dérivées partielles :

$$\forall (a,b)\in\mathscr{D}_f, \quad \mathrm{grad}f(a,b) = {}^{\boldsymbol{t}}\!\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) = {}^{\boldsymbol{t}}\!\left(\frac{1}{a+b^2}, \frac{2b}{a+b^2}\right).$$

Différentiabilité de g.
• La fonction polynôme $u : (x,y,z) \mapsto xy^2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ de différentielle définie par :

$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3, \quad \forall (h,k,s)\in\mathbb{R}^3, \qquad \mathrm{D}u(a,b,c)\left(h,k,s\right) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b,c)h + \frac{\partial u}{\partial y}(a,b,c)k + \frac{\partial u}{\partial z}(a,b,c)s = h+2abk.$$

• La fonction polynôme $p:(x,y,z)\mapsto xz^3$ est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ de différentielle définie par :

$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad \forall (h,k,s)\in\mathbb{R}^3,\qquad \mathrm{D}p(a,b,c)\,(h,k,s)=\frac{\partial p}{\partial x}(a,b,c)h+\frac{\partial p}{\partial y}(a,b,c)k+\frac{\partial p}{\partial z}(a,b,c)s=c^3h+3ac^2s.$$

De plus, pour (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$, on a : ac^3 est dans $\mathbb{R}$.
• La fonction $\exp : t\mapsto \exp(t)=\mathrm{e}^t$ est différentiable sur $\mathbb{R}$, et $\mathrm{D}\exp(t)\,(s)=\exp'(t)\,s=\mathrm{e}^t\,s$ pour tout t de $\mathbb{R}$ et pour tout s de $\mathbb{R}$.
Par composition, $\exp\circ p$ est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall (h,k,s)\in\mathbb{R}^2,\qquad \mathrm{D}\left(\exp\circ p\right)(a,b,c)\,(h,k,s)&=\mathrm{D}\left(\exp(p(a,b,c))\right)\left[\mathrm{D}(p(a,b,c))\,(h,k,s)\right]\\&=\left(\exp(p(a,b,c))\right)\mathrm{D}p(a,b,c)\,(h,k,s)\\&=\left(c^3h+3ac^2s\right)\mathrm{e}^{ac^3}.\end{aligned}$$

• Comme produit des fonctions u et $\exp\circ p$, la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ de différentielle définie par :

$$\begin{aligned}\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad \forall (h,k,s)\in\mathbb{R}^3,\qquad \mathrm{D}f(a,b,c)\,(h,k,s)&=\mathrm{D}[u\times(\exp\circ p)](a,b,c)\,(h,k,s)\\&=[(\exp\circ p)(a,b,c)]\,\mathrm{D}u(a,b,c)\,(h,k,s)\\&\quad+u(a,b,c)\,\mathrm{D}\left(\exp\circ p\right)(a,b,c)\,(h,k,s)\\&=(h+2abk)\,\mathrm{e}^{ac^3}+ab^2\left(c^3h+3ac^2s\right)\mathrm{e}^{ac^3}\\&=\left[(h+2abk)+ab^2\left(c^3h+3ac^2s\right)\right]\mathrm{e}^{ac^3}.\end{aligned}$$

• On en déduit le gradient de f donné par :

$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad \mathrm{grad}f(a,b,c)=\Big(\left(1+ab^2c^3\right)\mathrm{e}^{ac^3},\,2ab\mathrm{e}^{ac^3},\,3a^2b^2c^2\mathrm{e}^{ac^3}\Big).$$

On peut calculer directement le gradient de f grâce aux dérivées partielles :

$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad \mathrm{grad}f(a,b)={}^{t}\!\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c),\,\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c),\,\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\right)={}^{t}\!\Big(\left(1+ab^2c^3\right)\mathrm{e}^{ac^3},\,2ab\mathrm{e}^{ac^3},\,3a^2b^2c^2\mathrm{e}^{ac^3}\Big).$$

Exercice 1.5 : fonctions convexes
1. Pour tous nombres réels a et b, montrer que : $2ab\leq a^2+b^2$. En déduire, en utilisant la définition de la convexité, que la fonction $f:x\mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Soient a et b dans $\mathbb{R}$. On a :

$$0\leq (a+b)^2\iff 0\leq a^2+b^2-2ab\iff 2ab\leq a^2+b^2.$$

Soient a et b dans $\mathbb{R}$, et λ dans $[0,1]$. On a :

$$\begin{aligned}(\lambda a+(1-\lambda)b)^2=\lambda^2a^2+(1-\lambda)^2b^2+2(1-\lambda)\lambda ab&\leq\left(\lambda^2+(1-\lambda)\lambda\right)a^2+\left((1-\lambda)^2+(1-\lambda)\lambda\right)b^2\\&=\left(\lambda^2-\lambda^2+\lambda\right)a^2+(1-\lambda)\left((1-\lambda)+\lambda\right)b^2\\&=\lambda a^2+(1-\lambda)b^2,\end{aligned}$$

car $\lambda(1-\lambda)\geq 0$ pour λ dans $[0,1]$. En conséquence, la fonction $f:x\mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. En utilisant que la fonction $f:x\mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

La fonction polynôme $f:x\mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $f':x\mapsto 2x$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Comme $2\geq 0$, la fonction linéaire $f':x\mapsto 2x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

3. En utilisant que la fonction $f:x\mapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

La fonction polynôme $f:x\mapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée seconde $f'':x\mapsto 2$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Comme $f''(x)=2\geq 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $\Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante. En utilisant la définition de la convexité, montrer que la fonction $\Psi\circ\varphi$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Soient a et b dans $\mathbb{R}$, et λ dans $[0,1]$. On a :
Comme φ est convexe sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\varphi\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right) \leq \lambda\varphi(a)+(1-\lambda)\varphi(b).$$

La fonction Ψ étant croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\Psi\left(\varphi\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right) &\leq \Phi\left(\lambda\varphi(a)+(1-\lambda)\varphi(b)\right)\\ &\leq \lambda\Psi\left(\varphi(a)\right)+(1-\lambda)\Psi\left(\varphi(b)\right),\end{aligned}$$

la fonction Ψ est convexe sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction $\Psi\circ\varphi$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : parties ouvertes, fermées, convexes

Exercice 2.1 : ensembles ouverts
En utilisant la caractérisation des ouverts comme images réciproques de parties ouvertes par des applications continues, montrer que chacun des sous-ensembles suivants est ouvert :

$$\mathscr{X}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x>1\right\},\quad \mathscr{T}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y<4\right\},\quad \Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2<9\right\},$$
$$\Delta=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x>y+1\right\},\quad \Lambda=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2-y^2<1\right\},\quad \Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2<1\right\}.$$

• $\boldsymbol{\mathscr{X}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x>1\right\}}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x$ est continue, $\mathscr{K}=\varphi^{-1}\left(]1,+\infty[\right)$ est donc ouvert.

• $\boldsymbol{\mathscr{T}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y<4\right\}}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x+y$ est continue, $\mathscr{L}=\varphi^{-1}\left(]-\infty,4[\right)$ est ainsi ouvert.

• $\boldsymbol{\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2<9\right\}}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x^2+y^2$ est continue, par conséquent $\Omega=\varphi^{-1}\left(]-\infty,9[\right)$ est ouvert.

• $\boldsymbol{\Delta=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x>y+1\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x-y-1>0\right\}}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto 2x-y-1$ est continue, $\Delta=\varphi^{-1}\left(]0,+\infty[\right)$ est donc ouvert.

• $\boldsymbol{\Lambda=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2-y^2<1\right\}}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x^2-y^2$ est continue, en conséquence $\Lambda=\varphi^{-1}\left(]-\infty,1[\right)$ est ouvert.

• $\boldsymbol{\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2<1\right\}}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2$ est continue, $\Sigma=\varphi^{-1}\left(]-\infty,1[\right)$ est ainsi ouvert.

Exercice 2.2 : ensembles fermés
En appliquant la caractérisation des fermés comme images réciproques de parties fermées par des applications continues, montrer que chacun des sous-ensembles suivants est fermé :

$$\mathscr{K}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}=\mathbf{1}\right\},\quad \mathscr{L}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{4}\right\},\quad \mathscr{M}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}=\mathbf{9}\right\},$$
$$\mathscr{N}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^{\mathbf{3}}\ \middle|\ \boldsymbol{y}=\mathbf{3}\right\},\ \mathscr{O}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^{\mathbf{3}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}=\mathbf{4}\right\},$$
$$\mathscr{P}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^{\mathbf{3}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}+(\boldsymbol{z}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}=\mathbf{1}\right\},\quad \mathscr{Q}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}\geq\mathbf{1}\right\},$$
$$\mathscr{R}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\leq\mathbf{4}\right\},\quad \mathscr{S}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}\geq\mathbf{0},\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\mathbf{1}\leq\mathbf{0}\right\},$$
$$\mathscr{U}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^{\mathbf{3}}\ \middle|\ \boldsymbol{z}\leq\mathbf{3}\right\},\ \mathscr{V}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^{\mathbf{3}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\geq\mathbf{4}\right\},$$
$$\mathscr{W}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^{\mathbf{3}}\ \middle|\ \boldsymbol{y}\leq\mathbf{0},\ \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}+(\boldsymbol{z}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}=\mathbf{1}\right\}.$$

• $\mathscr{K}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}=\mathbf{1}\right\}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x$ est continue, $\mathscr{K}=\varphi^{-1}(\{1\})$ est donc fermé.

• $\mathscr{L}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{4}\right\}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x+y$ est continue, $\mathscr{L}=\varphi^{-1}(\{4\})$ est ainsi fermé.

• $\mathscr{M}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}=\mathbf{9}\right\}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x^2+y^2$ est continue, par conséquent $\mathscr{M}=\varphi^{-1}(\{9\})$ est fermé.

• $\mathscr{N}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^{\mathbf{3}}\ \middle|\ \boldsymbol{y}=\mathbf{3}\right\}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto y$ est continue, $\mathscr{N}=\varphi^{-1}(\{3\})$ est donc fermé.

• $\mathscr{O}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^{\mathbf{3}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}=\mathbf{4}\right\}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto x+y-z$ est continue, $\mathscr{O}=\varphi^{-1}(\{4\})$ est donc fermé.

• $\mathscr{P}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^{\mathbf{3}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}+(\boldsymbol{z}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}=\mathbf{1}\right\}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto x^2+\dfrac{y^2}{4}+(z-1)^2$ est continue, $\mathscr{P}=\varphi^{-1}(\{1\})$ est donc fermé.

• $\mathscr{Q}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}\geq\mathbf{1}\right\}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x$ est continue, $\mathscr{Q}=\varphi^{-1}([1,+\infty[\})$ est donc fermé.

• $\mathscr{R}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\leq\mathbf{4}\right\}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x+y$ est continue, par conséquent $\mathscr{R}=\varphi^{-1}(]-\infty,4])$ est donc fermé.

• $\mathscr{S}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\ \middle|\ \boldsymbol{x}\geq\mathbf{0},\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\mathbf{1}\leq\mathbf{0}\right\}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x$ est continue, donc $\mathscr{S}_1=\varphi^{-1}([0,+\infty[)$ est fermé. L'application polynôme $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x+y-1$ est continue, $\mathscr{S}_2=\psi^{-1}(]-\infty,0])$ est donc fermé. En conséquence, $\mathscr{S}=\mathscr{S}_1\cap\mathscr{S}_2$, est fermé.

• $\mathscr{U}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^{\mathbf{3}}\ \middle|\ \boldsymbol{z}\leq\mathbf{3}\right\}$**.** L'application polynôme $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto z$ est continue, $\mathscr{U}=\varphi^{-1}(]-\infty,3])$ est donc fermé.

• $\mathscr{V} = \left\{ \boldsymbol{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} \;\middle|\; \boldsymbol{x + 2y - z \geq 4} \right\}$. L'application polynôme $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x + 2y - z$ est continue, $\mathscr{V} = \varphi^{-1}\left([4, +\infty[\right)$ est donc fermé.

• $\mathscr{W} = \left\{ \boldsymbol{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} \;\middle|\; \boldsymbol{y \leq 0,\ x^2 + \frac{y^2}{4} + (z-1)^2 = 1} \right\}$. L'application polynôme $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto y$ est continue, $\mathscr{W}_1 = \varphi^{-1}\left(]-\infty, 0]\right)$ est donc fermé. L'application polynôme $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x^2 + \dfrac{y^2}{4} + (z-1)^2$ est continue, $\mathscr{W}_2 = \varphi^{-1}\left(\{1\}\right)$ est donc fermé. Par conséquent, $\mathscr{W} = \mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2$, est fermé.

Exercice 2.3 : ensembles convexes
Montrer que chacun des sous-ensembles suivants est convexe :

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A} = \left\{ \boldsymbol{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \;\middle|\; \boldsymbol{y = 1} \right\}, \quad \mathscr{B} = \left\{ \boldsymbol{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \;\middle|\; \boldsymbol{x + y = 2} \right\}, \quad \mathscr{C} = \left\{ \boldsymbol{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \;\middle|\; \boldsymbol{x^2 + y^2 \leq 9} \right\}, \\
&\mathscr{D} = \left\{ \boldsymbol{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} \;\middle|\; \boldsymbol{x = 2} \right\}, \ \mathscr{E} = \left\{ \boldsymbol{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} \;\middle|\; \boldsymbol{x - y - z = 2} \right\}, \\
&\mathscr{F} = \left\{ \boldsymbol{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} \;\middle|\; \boldsymbol{\frac{x^2}{9} + (y-2)^2 + z^2 \leq 1} \right\}, \\
&\mathscr{G} = \left\{ \boldsymbol{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \;\middle|\; \boldsymbol{x \geq 1} \right\}, \ \mathscr{H} = \left\{ \boldsymbol{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \;\middle|\; \boldsymbol{x + y \leq 4} \right\}, \\
&\mathscr{I} = \left\{ \boldsymbol{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \;\middle|\; \boldsymbol{x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y - 1 \leq 0} \right\}, \\
&\mathscr{J} = \left\{ \boldsymbol{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} \;\middle|\; \boldsymbol{y \leq -1} \right\}, \ \mathscr{X} = \left\{ \boldsymbol{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} \;\middle|\; \boldsymbol{x - 2y - z \geq 2} \right\}, \\
&\mathscr{Y} = \left\{ \boldsymbol{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} \;\middle|\; \boldsymbol{z \geq 0,\ x^2 + \frac{y^2}{4} + (z-1)^2 \leq 1} \right\}.
\end{aligned}$$

• $\mathscr{A} = \left\{ \boldsymbol{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \;\middle|\; \boldsymbol{y = 1} \right\}$. Soient λ dans $[0,1]$, (x,y) et (s,t) dans $\mathscr{A}$, c'est-à-dire (x,y) et (s,t) sont dans $\mathbb{R}^2$ et : $y = 1$ et $t = 1$. Alors

$$\lambda(x,y) + (1-\lambda)(s,t) = \Big(\lambda x + (1-\lambda)s,\ \lambda y + (1-\lambda)t\Big) \in \mathbb{R}^2,$$

et

$$\lambda x + (1-\lambda)s = \lambda \times 1 + (1-\lambda) \times 1 = \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

donc $\mathscr{A}$ est convexe.

• $\mathscr{B} = \left\{ \boldsymbol{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \;\middle|\; \boldsymbol{x + y = 2} \right\}$. Soient λ dans $[0,1]$, (x,y) et (s,t) dans $\mathscr{B}$, c'est-à-dire (x,y) et (s,t) sont dans $\mathbb{R}^2$ et : $x + y = 2$ et $s + t = 2$. Alors

$$\lambda(x,y) + (1-\lambda)(s,t) = \Big(\lambda x + (1-\lambda)s,\ \lambda y + (1-\lambda)t\Big) \in \mathbb{R}^2,$$

et

$$\Big(\lambda x + (1-\lambda)s\Big) + \Big(\lambda y + (1-\lambda)t\Big) = \lambda(x+y) + (1-\lambda)(s+t) = \lambda \times 2 + (1-\lambda) \times 2 = 2\left(\lambda + (1-\lambda)\right) = 2 \times 1 = 2,$$

donc $\mathscr{B}$ est convexe.

• $\mathscr{C} = \left\{ \boldsymbol{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \;\middle|\; \boldsymbol{x^2 + y^2 \leq 9} \right\}$. Soient λ dans $[0,1]$, (x,y) et (s,t) dans $\mathscr{C}$, c'est-à-dire (x,y) et (s,t) sont dans $\mathbb{R}^2$ et : $x^2 + y^2 \leq 9$ et $s^2 + t^2 \leq 9$. Alors

$$\lambda(x,y) + (1-\lambda)(s,t) = \Big(\lambda x + (1-\lambda)s,\ \lambda y + (1-\lambda)t\Big) \in \mathbb{R}^2,$$

et

$$\begin{aligned}\Big(\lambda x+(1-\lambda)s\Big)^2+\Big(\lambda y+(1-\lambda)t\Big)^2 &= \lambda^2(x^2+y^2)+(1-\lambda)^2(s^2+t^2)+\lambda(1-\lambda)\Big(2xs+2yt\Big)\\ &\leq \lambda(x^2+y^2)+(1-\lambda)(s^2+t^2)+\lambda(1-\lambda)\Big((x^2+s^2)+(y^2+t^2)\Big)\\ &\leq \lambda(x^2+y^2)+(1-\lambda)(s^2+t^2)+\lambda(1-\lambda)\Big((x^2+y^2)+(s^2+t^2)\Big)\\ &= \Big(\lambda^2+(1-\lambda)\lambda\Big)(x^2+y^2)+\Big(\lambda(1-\lambda)+(1-\lambda)^2\Big)(s^2+t^2)\\ &= \lambda(x^2+y^2)+(1-\lambda)(s^2+t^2)\leq \lambda\times 9+(1-\lambda)\times 9\\ &= 9\,(\lambda+(1-\lambda))=9\times 1=9,\end{aligned}$$

puisque :

$$0\leq (x-s)^2 \Longleftrightarrow 2xs\leq x^2+s^2,\quad 0\leq (y-t)^2 \Longleftrightarrow 2yt\leq y^2+t^2.$$

Par conséquent, donc $\mathscr{C}$ est convexe.

• $\boldsymbol{\mathscr{D}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\; x=2\right\}}$. Soient λ dans $[0,1]$, (x,y,z) et (s,t,r) dans $\mathscr{D}$, c'est-à-dire (x,y,z) et (s,t,r) sont dans $\mathbb{R}^3$ et : $x=2$ et $s=2$. Alors

$$\lambda(x,y,z)+(1-\lambda)(s,t,r)=\Big(\lambda x+(1-\lambda)s,\ \lambda y+(1-\lambda)t,\ \lambda z+(1-\lambda)r\Big)\in\mathbb{R}^3,$$

et

$$\lambda x+(1-\lambda)s=\lambda\times 2+(1-\lambda)\times 2=2\,(\lambda+(1-\lambda))=2\times 1=2,$$

donc $\mathscr{D}$ est convexe.

• $\boldsymbol{\mathscr{E}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\; x-y-z=2\right\}}$. Soient λ dans $[0,1]$, (x,y,z) et (s,t,r) dans $\mathscr{E}$, c'est-à-dire (x,y,z) et (s,t,r) sont dans $\mathbb{R}^3$ et : $x-y-z=2$ et $s-t-r=2$. Alors

$$\lambda(x,y,z)+(1-\lambda)(s,t,r)=\Big(\lambda x+(1-\lambda)s,\ \lambda y+(1-\lambda)t,\ \lambda z+(1-\lambda)r\Big)\in\mathbb{R}^3,$$

et

$$\begin{aligned}\Big(\lambda x+(1-\lambda)s\Big)-\Big(\lambda y+(1-\lambda)t\Big)-\Big(\lambda z+(1-\lambda)r\Big) &= \lambda(x-y-z)+(1-\lambda)(s-t-r)=\lambda\times 2+(1-\lambda)\times 2\\ &= 2\,(\lambda+(1-\lambda))=2\times 1=2,\end{aligned}$$

donc $\mathscr{E}$ est convexe.

• $\boldsymbol{\mathscr{F}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\; \frac{x^2}{9}+(y-2)^2+z^2\leq 1\right\}}$. Soient λ dans $[0,1]$, (x,y,z) et (s,t,r) dans $\mathscr{F}$, c'est-à-dire (x,y,z) et (s,t,r) sont dans $\mathbb{R}^3$ et : $\dfrac{x^2}{9}+(y-2)^2+z^2\leq 1$ et $\dfrac{s^2}{9}+(t-2)^2+r^2\leq 1$. Alors

$$\lambda(x,y,z)+(1-\lambda)(s,t,r)=\Big(\lambda x+(1-\lambda)s,\ \lambda y+(1-\lambda)t,\ \lambda z+(1-\lambda)r\Big)\in\mathbb{R}^3,$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{1}{9}\Big(\lambda x+(1-\lambda)s\Big)^2+\Big(\lambda y+(1-\lambda)t-2\Big)^2+\Big(\lambda z+(1-\lambda)r\Big)^2\\ &=\frac{1}{9}\Big(\lambda x+(1-\lambda)s\Big)^2+\Big(\lambda(y-2)+(1-\lambda)(t-2)\Big)^2+\Big(\lambda z+(1-\lambda)r\Big)^2\\ &=\lambda^2\left(\frac{1}{9}x^2+(y-2)^2+z^2\right)+(1-\lambda)^2\left(\frac{1}{9}s^2+(t-2)^2+r^2\right)+\lambda(1-\lambda)\Big(\frac{1}{9}2xs+2(y-2)(t-2)+2zr\Big)\\ &\leq \lambda^2\left(\frac{1}{9}x^2+(y-2)^2+z^2\right)+(1-\lambda)^2\left(\frac{1}{9}s^2+(t-2)^2+r^2\right)\\ &\qquad+\lambda(1-\lambda)\Big(\frac{1}{9}(x^2+s^2)+((y-2)^2+(t-2)^2)+(z^2+r^2)\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda^2\left(\frac{1}{9}x^2+(y-2)^2+z^2\right)+(1-\lambda)^2\left(\frac{1}{9}s^2+(t-2)^2+r^2\right)\\
&\qquad +\lambda(1-\lambda)\left(\left(\frac{1}{9}x^2+(y-2)^2\right)+\left(\frac{1}{9}s^2+(t-2)^2\right)+\left(z^2+r^2\right)\right)\\
&= \lambda\left(\frac{1}{9}x^2+(y-2)^2+z^2\right)+(1-\lambda)\left(\frac{1}{9}s^2+(t-2)^2+r^2\right)\\
&\le \lambda\times 1+(1-\lambda)\times 1=\lambda+(1-\lambda)=1,
\end{aligned}
$$

puisque :

$$
\begin{aligned}
&0\le (x-s)^2 \Longleftrightarrow 2xs\le x^2+s^2, \qquad 0\le ((y-2)-(t-2))^2 \Longleftrightarrow 2(y-2)(t-2)\le (y-2)^2+(t-2)^2,\\
&0\le (z-r)^2 \Longleftrightarrow 2zr\le z^2+r^2.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $\mathscr{F}$ est convexe.

• $\boldsymbol{\mathscr{G}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\ge 1\right\}}$**.** Soient λ dans $[0,1]$, (x,y) et (s,t) dans $\mathscr{G}$, c'est-à-dire (x,y) et (s,t) sont dans $\mathbb{R}^2$ et : $x\ge 1$ et $s\ge 1$. Alors

$$
\lambda(x,y)+(1-\lambda)(s,t)=\Big(\lambda x+(1-\lambda)s,\ \lambda y+(1-\lambda)t\Big)\in\mathbb{R}^2,
$$

et

$$
\lambda x+(1-\lambda)s\ge \lambda\times 1+(1-\lambda)\times 1=\lambda+(1-\lambda)=1,
$$

donc $\mathscr{G}$ est convexe.

• $\boldsymbol{\mathscr{H}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y\le 4\right\}}$**.** Soient λ dans $[0,1]$, (x,y) et (s,t) dans $\mathscr{H}$, c'est-à-dire (x,y) et (s,t) sont dans $\mathbb{R}^2$ et : $x+y\le 4$ et $s+t\le 4$. Alors

$$
\lambda(x,y)+(1-\lambda)(s,t)=\Big(\lambda x+(1-\lambda)s,\ \lambda y+(1-\lambda)t\Big)\in\mathbb{R}^2,
$$

et

$$
\Big(\lambda x+(1-\lambda)s\Big)+\Big(\lambda y+(1-\lambda)t\Big)=\lambda(x+y)+(1-\lambda)(s+t)\le\lambda\times 4+(1-\lambda)\times 4=4\left(\lambda+(1-\lambda)\right)=4\times 1=4,
$$

donc $\mathscr{H}$ est convexe.

• $\boldsymbol{\mathscr{I}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y-1\le 0\right\}}$**.** Soient λ dans $[0,1]$, (x,y) et (s,t) dans $\mathscr{I}$, c'est-à-dire (x,y) et (s,t) sont dans $\mathbb{R}^3$ et : $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y-1\le 0$, et $s\ge 0$, $t\ge 0$, $s+t-1\le 0$. Alors

$$
\lambda(x,y)+(1-\lambda)(s,t)=\Big(\lambda x+(1-\lambda)s,\ \lambda y+(1-\lambda)t\Big)\in\mathbb{R}^2,
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\lambda x+(1-\lambda)s\ge 0,\\
&\lambda y+(1-\lambda)t\ge 0,\\
&\Big(\lambda x+(1-\lambda)s\Big)+\Big(\lambda y+(1-\lambda)t\Big)-1=\Big(\lambda x+(1-\lambda)s\Big)+\Big(\lambda y+(1-\lambda)t\Big)-\Big(\lambda+(1-\lambda)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad=\lambda(x+y-1)+(1-\lambda)(s+t-1)\le 0,
\end{aligned}
$$

donc $\mathscr{I}$ est convexe.

• $\boldsymbol{\mathscr{J}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; y\le -1\right\}}$**.** Soient λ dans $[0,1]$, (x,y,z) et (s,t,r) dans $\mathscr{J}$, c'est-à-dire (x,y,z) et (s,t,r) sont dans $\mathbb{R}^3$ et : $y\le -1$ et $t\le -1$. Alors

$$
\lambda(x,y,z)+(1-\lambda)(s,t,r)=\Big(\lambda x+(1-\lambda)s,\ \lambda y+(1-\lambda)t,\ \lambda z+(1-\lambda)r\Big)\in\mathbb{R}^2,
$$

et

$$
\lambda y+(1-\lambda)t\le -1\Big(\lambda y+(1-\lambda)\Big)=-1,
$$

donc $\mathscr{J}$ est convexe.

• $\mathscr{X} = \left\{ \boldsymbol{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} \;\middle|\; \boldsymbol{x - 2y - z \geq 2} \right\}$**.** Soient λ dans $[0,1]$, (x,y,z) et (s,t,r) dans $\mathscr{E}$, c'est-à-dire (x,y,z) et (s,t,r) sont dans $\mathbb{R}^3$ et : $x-2y-z \geq 2$ et $s-2t-r \geq 2$. Alors

$$\lambda(x,y,z) + (1-\lambda)(s,t,r) = \Big(\lambda x + (1-\lambda)s,\ \lambda y + (1-\lambda)t,\ \lambda z + (1-\lambda)r\Big) \in \mathbb{R}^3,$$

et

$$\begin{aligned}\Big(\lambda x + (1-\lambda)s\Big) - 2\Big(\lambda y + (1-\lambda)t\Big) - \Big(\lambda z + (1-\lambda)r\Big) &= \lambda(x-2y-z) + (1-\lambda)(s-2t-r) \geq \lambda \times 2 + (1-\lambda) \times 2 \\ &= 2\left(\lambda + (1-\lambda)\right) = 2 \times 1 = 2,\end{aligned}$$

donc $\mathscr{X}$ est convexe.

• $\mathscr{Y} = \left\{ \boldsymbol{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} \;\middle|\; \boldsymbol{z \geq 0,\ x^2 + \frac{y^2}{4} + (z-1)^2 \leq 1} \right\}$**.** Soient λ dans $[0,1]$, (x,y,z) et (s,t,r) dans $\mathscr{Y}$, c'est-à-dire (x,y,z) et (s,t,r) sont dans $\mathbb{R}^3$ et : $z \geq 0$, $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + (z-1)^2 \leq 1$, et $r \geq 0$, $s^2 + \dfrac{t^2}{4} + (r-1)^2 \leq 1$. Alors

$$\lambda(x,y,z) + (1-\lambda)(s,t,r) = \Big(\lambda x + (1-\lambda)s,\ \lambda y + (1-\lambda)t,\ \lambda z + (1-\lambda)r\Big) \in \mathbb{R}^3,$$

et

$$\begin{aligned}&\Big(\lambda x + (1-\lambda)s\Big)^2 + \frac{1}{4}\Big(\lambda y + (1-\lambda)t\Big)^2 + \Big(\lambda z + (1-\lambda)r - 1\Big)^2 \\ &= \Big(\lambda x + (1-\lambda)s\Big)^2 + \Big(\lambda y + (1-\lambda)t\Big)^2 + \Big(\lambda(z-1) + (1-\lambda)(t-1)\Big)^2 \\ &= \lambda^2\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + (z-1)^2\right) + (1-\lambda)^2\left(s^2 + \frac{1}{4}t^2 + (r-1)^2\right) + \lambda(1-\lambda)\Big(2xs + \frac{1}{4}yt + (z-1)(r-1)\Big) \\ &\leq \lambda^2\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + (z-1)^2\right) + (1-\lambda)^2\left(s^2 + \frac{1}{4}t^2 + (r-1)^2\right) \\ &\qquad + \lambda(1-\lambda)\Big((x^2+s^2) + \frac{1}{4}(y^2+t^2) + ((z-1)^2 + (r-1)^2)\Big) \\ &= \lambda^2\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + (z-1)^2\right) + (1-\lambda)^2\left(s^2 + \frac{1}{4}t^2 + (r-1)^2\right) \\ &\qquad + \lambda(1-\lambda)\left(\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2\right) + \left(s^2 + \frac{1}{4}t^2\right) + ((z-1)^2 + (r-1)^2)\right) \\ &\leq \lambda\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + (z-1)^2\right) + (1-\lambda)\left(s^2 + \frac{1}{4}t^2 + (r-1)^2\right) \\ &\leq \lambda \times 1 + (1-\lambda) \times 1 = \lambda + (1-\lambda) = 1,\end{aligned}$$

puisque :

$$\begin{gathered}0 \leq (x-s)^2 \iff 2xs \leq x^2 + s^2, \qquad 0 \leq (y-t)^2 \iff 2yt \leq y^2 + t^2, \\ 0 \leq ((z-1)-(r-1))^2 \iff 2(z-1)(r-1) \leq (z-1)^2 + (r-1)^2.\end{gathered}$$

Par conséquent, $\mathscr{Y}$ est convexe.

Partie 3 : Algèbre linéaire

Exercice 3.1 : systèmes linéaires et matrices
Soient x_1, x_2 et x_3 des nombres réels. On considère le système linéaire d'inconnues x_1, x_2 et x_3 suivant :

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 2, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & -6. \end{array}\right.$$

Montrer que ce système (Σ) est équivalent à

$$Ax = b,$$

où $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ est une matrice à coefficients réels et b est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ à déterminer.

On a :

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 2, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & -6. \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad Ax = b,$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Le système $(\boldsymbol{\Sigma})$ admet-il une solution ? Si oui, est-elle unique ?

• Échelonnons la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On effectue les opérations :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{1} L_2$$

La matrice carrée A de taille 3×3 est de rang 3, donc elle est inversible. Le système (Σ) admet ainsi une unique solution x.

• Échelonnons à nouveau la matrice A augmentée du vecteur b :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On effectue les opérations :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{1} L_2$$

En utilisant l'algorithme de remontée on trouve

$$x_3 = -1,\ x_2 = -1,\ x_1 = 5,$$

d'où l'unique solution de (Σ) est : $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.