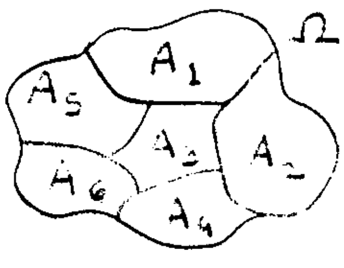
ch 1 ESPACES DE PROBABILITE.

(I) Espaces de probabilité $(\Omega, \mathcal{Q}, P)$.

(1) Ω = ensemble des issues de L'experience aléatoire
discret = $\Omega = \{\omega_1, \dots \omega_n\}$.
continue = $\Omega = \mathbb{R}$.

(2) Evenements =

Partie de Ω $P(\Omega)$	Evènements.
$\emptyset$	Impossible
Ω	Certain.
$\{\omega\}$	élémentaire
$A \subset B$	A implique B.
$\complement A$	$\bar{A}$ "le contraire de A"
$A \cup B$	$A + B$ "A ou B"
$A \cap B$	AB "A et B"
Partition.	Systeme complet d'évenement



$$\begin{cases} \Omega = \sum A_i \\ A_i A_j = \emptyset \\ i \neq j \end{cases}$$

Commentaire

- $A+B$ = " au moins un des 2 événements s'est réalisé "

- $\sum_i A_i$ = " au moins un des A_i s'est realisé "
- $\prod_i A_i$ = tous les A_i se sont realisés "

Propriétés

① $A \subset B$: $A+B=B$ $AB=A$

② $A(B+C) = AB + AC$.

③ Formule de MORGAN

$\boxed{\overline{\sum_i A_i} = \prod_i \overline{A_i}}$ produit $\overline{\prod_i A_i} = \sum_i \overline{A_i}$

Exercice 1

On tire 3 x sur 1 cible pour $i \in \overline{1,3}$ A_i = " le tir n° 1 réussi "

$B = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ = " 0 Reussite "

$C = A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3$ = " 1 seule reussite "

$D = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$
= " au moins 2 reussites "

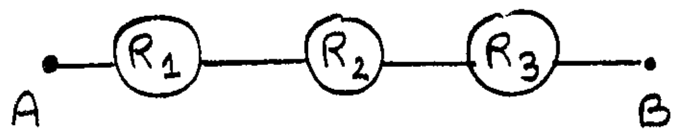
$\overline{C+D} = B.$

Exercice 2.

On transmet 1 informat° entre A et B.

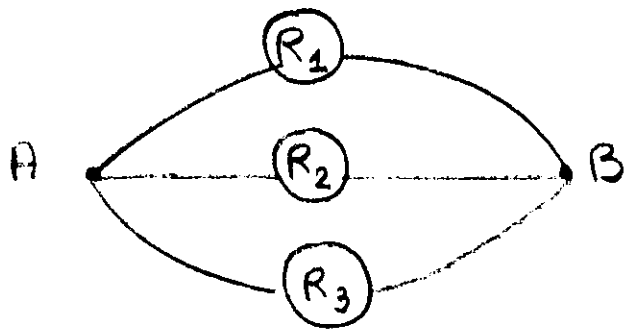
T = "transmission correcte entre A et B.

R_i = "Relais n° i connect"



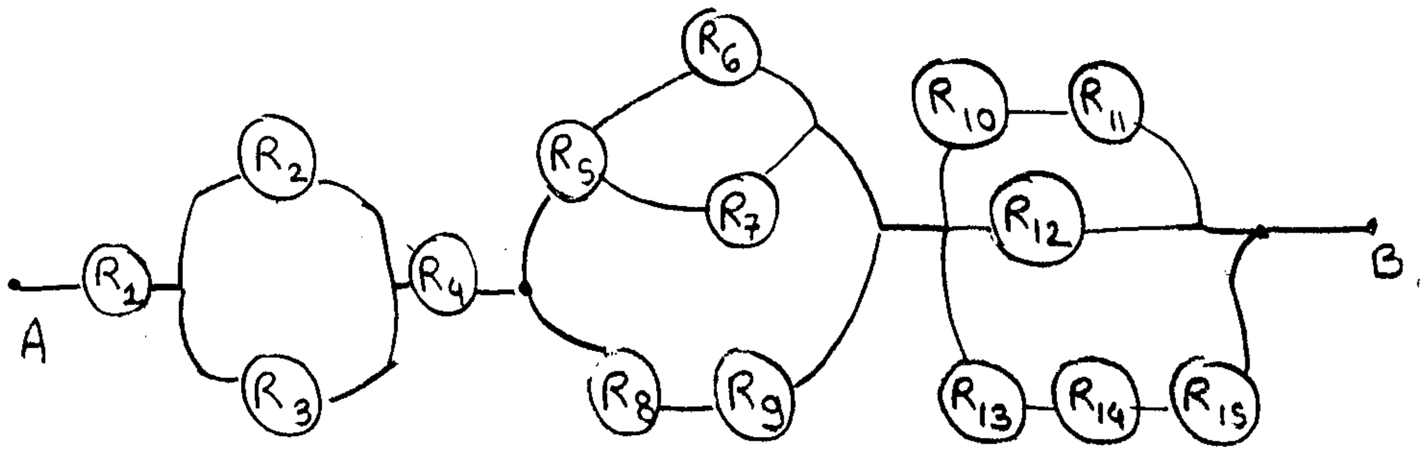
$$T = \overbrace{R_1 R_2 R_3}^{\text{Shema multiplicatif.}}. \quad (\text{série})$$

$$\overline{T} = \overline{R}_1 + \overline{R}_2 + \overline{R}_3$$



$$T = \overbrace{R_1 + R_2 + R_3}^{\text{Shema additif.}} \quad (\text{parallèle}).$$

$$\overline{T} = \overline{R}_1 \overline{R}_2 \overline{R}_3$$



$$R_1 \times (R_2 + R_3) \times R_4 \times \left(R_5 (R_6 + R_7) + R_8 R_9\right) \left[R_{10} R_{11} + R_{12} + R_{13} R_{14} R_{15}\right]$$

Definition : $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu si $\Omega \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ stable pour $\bar{\ }$, Σ, Π.

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$$
$$(A_i) \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_i A_i \in \mathcal{A}, \ \prod_i A_i \in \mathcal{A}.$$

$(\Omega, \mathcal{A})$ = espace probabilisable.

Exemple fondamentaux :

① : $\Omega = \{w_1, \dots w_n\}$. $\quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

② $\Omega = \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ "La tribu borélienne de $\mathbb{R}$" = La tribu engendrée par les intervales.

En fait, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendré par les intervalles de la forme $]-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$

③ Probabilité ; vraisemblance.

Definition 1 : $(\Omega, \mathcal{A})$ espace probabilisable
$\mathcal{P} \quad \mathcal{A} \longmapsto [0;1]$ est une probabilité si :

$$\begin{cases} 1) \ P(\Omega) = 1 \\ 2) \ A_i A_j = \emptyset \quad P(\sum_i A_i) = \sum_i P(A_i). \end{cases}$$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ = espace de probabilité.

Exemples fondamentaux.

① $\Omega = \{\omega_1, \dots \omega_n\}$ $\quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$i \in \overline{1,n}$ $\quad p_i = P(\{\omega_i\})$; $\Sigma p_i = 1$

$(\Leftrightarrow i \in \{1, \dots, n\})$

② $\Omega = \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathcal{P}$ definie par $\mathcal{P}(]-\infty; x])$.

⚠ La loi de probabilité d'1 variable aleatoire reelle X sera donc caracterisée par sa fonction de repartition $F(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \mathcal{P}(X \in]-\infty; x])$.

Definition 2.

On fait 1 experience aleatoire dépendant d'1 paramètre θ

On appelle vraisemblance $V(\theta) =$ la probabilité de ce que L'on a absenvé

On cherchera systematiquement la valeur $\hat{\theta}$ qui maximise $V(\theta)$.

Pour trouver $\hat{\theta}$ il y a 2 cas :

- Si $\theta \in$ à 1 intervalle de $\mathbb{R}$ on cherchera $V'(\theta) = 0$
- Si $\theta \in$ à $\mathbb{N}$ (entier) on s'interessera à $\dfrac{V(\theta)}{V(\theta - 1)}$.

Exemple :

Ds 1 urne il y a des boules blanches et noires.
(en quantité suffisante).

Soit $\theta = P(\circ) \implies 1 - \theta = P(\bullet)$.

On tire avec remise 5 boules de l'urne

On a observé ceci :

$$\circ \ \bullet \ \circ \ \circ \ \bullet$$

Calculer la vraisemblance $V(\theta)$?

- $V(\theta) = \theta \times (1-\theta) \times \theta \times \theta \times (1-\theta)$

$V(\theta) = \theta^3 \ (1-\theta)^2$

$$V'(\theta) = 3\theta^2 (1-\theta)^2 - \theta^3 \, 2(1-\theta)$$

$$= \theta^2 (1-\theta)(3-5\theta) = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{3}{5}.$$

(II) Espace de probabilité uniformes.

$\Omega = \{\omega_1 \dots \omega_n\}$. $\quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$\forall i \in \overline{1,n} \quad P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$.

$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots \omega_{i_k}\}$.

$= \{\omega_{i_1}\} + \{\omega_{i_2}\} + \{\omega_{i_3}\} \dots \{\omega_{i_k}\}$.

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{k \text{ fois}} = \frac{k}{n}$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Denombrement.

Exemple :
On lance 5 fois 1 pièce

F P F F P
2 × 2 × 2 × 2 × 2

$\Omega = \{a\ b\ c\ d\ e\}$. $\{b, d, e\}$.
Card $\mathcal{P}(\Omega) = 2^5$

Denombrement Fondamentaux de base.

Arrangements = A_n^k = nombre de façon de prendre dans L'ordre. k objets parmi n.
et sans remise

$$A_n^k = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times (n-k+1).$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_n^k = \binom{n}{k} \times k!$$

Permutations $A_n^n = n!$

Combinaisons $C_n^k = \binom{n}{k}$ = nombre de façon de prendre k. objets en vrac, en bloc parmi n.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

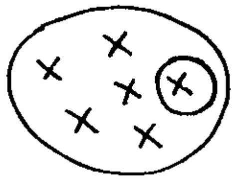
en vrac : sans ordre et sans remise

<u>Propriétés de la combinaison.</u>

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

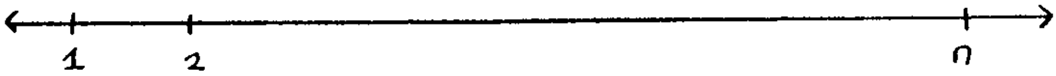
$$\binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{\text{contiennent pas}} + \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\text{contiennent}}$$



$\binom{n}{k}$ = <u>nb. d'alignements de n objets dont k sont d'1 type et $n-k$ d'un autre.</u>

<u>Generalisation.</u>

Quel est le nbr d'alignement $\neq$ de n boules dont n_1 de couleur n°1, n_2 de couleur n°2, ... n_r de couleur n°r

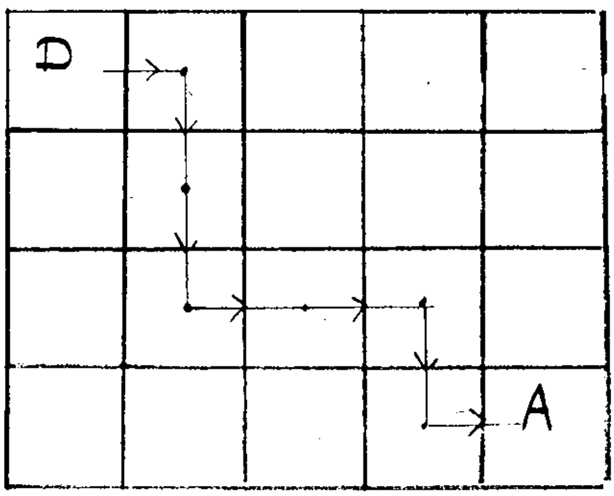


$$\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \times \ldots$$

$$\frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}} \times \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \times \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_3!\,\cancel{(n-n_1-n_2-3)!}} \times \ldots$$

Réponse : $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_r!}$ Coefficient multinomial.

Exercices : Combien y a t'il de trajet poss. pour arriver ?



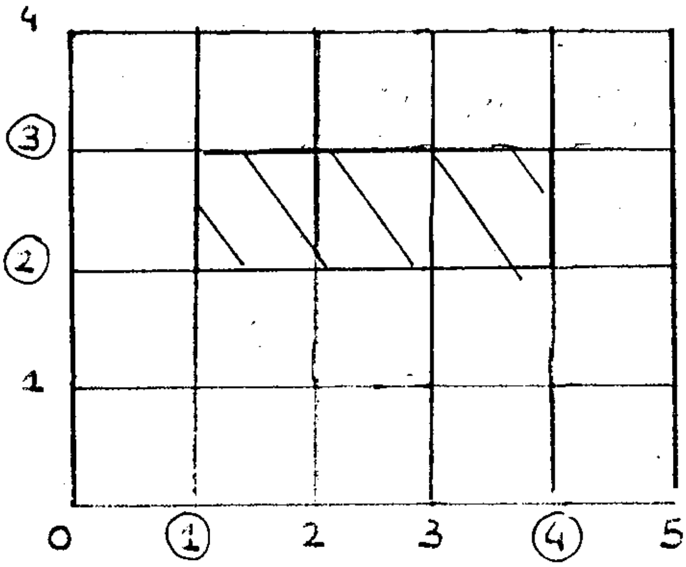
Pas poss : $\longrightarrow$

$\downarrow$

$\downarrow 3$ $\quad \xrightarrow{4}$ pour arriver je dois faire $\underset{\downarrow}{3}$ et $4 \rightarrow$

reponse $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$

Exercice 2.



Combien de rectangle peut'on former.

$\binom{6}{2} \times \binom{5}{2}$

Exercice 3.

8 cartes

De combien de façon peut-on ordonner ces 8 cartes:

1) Si on considere que les cartes sont differentes.

$8!$

2) Si on identifie les cartes de m̂ couleur (♤ ♡ ◇ ♧).

3 ♤
2 ♡
2 ◇
1 ♧

$$\frac{8!}{3! \times 2! \times 2! \times 1!}$$

3) Si on identifie les cartes rouges entre-elles et les noires entre-elles

$$\frac{8!}{4!\,4!}$$

loi hypergeométrique.

N boules $\begin{cases} M \ \bigcirc \\ N-M \ \oslash \end{cases}$

on retire en bloc n boules (« n-echantillon »).

Calculer la probabilité p_k = prob. qu'il y ait k $\bigcirc$ ds l'echantillon

$$p_k = \frac{C_M^k \times C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$ (ex ~~...~~ contrôle de la qualité)

Exercice 1.

Estimation du nbr. de poissons ds 1 étang.

Ds 1 lac il y a 1 nbr inconnu θ de poissons dont 100 sont bagués

On pêche 100 poissons : on observe que 20 sont bagués

Calculer la vraisemblance $V\theta$

$$V(\theta) = \frac{\binom{100}{20} \times \binom{\theta-100}{80}}{\binom{\theta}{100}}$$

$$\frac{V(\theta)}{V(\theta-1)} = \frac{(\theta-100)^2}{\theta(\theta-180)}$$

$$\frac{V(\theta)}{V(\theta-1)} \geqslant 1 \iff (\theta-100)^2 \geqslant \theta(\theta-180)$$

$$\cancel{\theta^2} - 200\theta + 10000 \geqslant \cancel{\theta^2} - 180\theta$$

$$\iff \theta \leqslant 500.$$

$$\hat{\theta} = 500.$$

Exercice 2 :

18 personnes $\longrightarrow$ 12 h.

$\searrow$ 6 F.

avec ces 18 personnes on veut faire des commissions de 9 membres

il y a $\binom{18}{9}$ comissions possibles

- Probabilité que la commission comprenne 6 h. et 3 F.

$$\frac{\binom{12}{6} \times \binom{6}{3}}{\binom{18}{9}}$$

- la comission de 9 membres contient 1 président et 1 secrétaire

1^{er} methode = Je prend 9 membres puis je choisis le président et le secrétaire parmi les 9 membres.

$$\binom{18}{9} \times 9 \times 8$$

2^{eme} methode : je choisis le pr. et le secrétaire puis les 7 membres.

$$18 \times 17 \times \binom{16}{7}$$

$$\Rightarrow \binom{18}{9} \times 9 \times 8 = 18 \times 17 \binom{16}{7}$$

• Probabilité que le président et la secrétaire sont de m̂ sexe

$$\frac{[(12 \times 11) + (6 \times 5)] \times \binom{16}{7}}{18 \times 17 \times \binom{16}{7}}$$

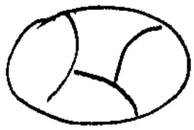
• Quelle est la probabilité que la commission comprenne 6h. 3F et que le président et le secrétaire soit de m̂ sexe

$$\frac{\binom{12}{6} \times \binom{6}{3} \times (6 \times 5 + 3 \times 2)}{\binom{18}{9} \times 9 \times 8}$$

III) Propriétés d'1 probabilité.

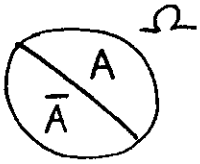
P_1) Additivité

Soit (A_i) système complet d'événements



la somme des $P(A_i) = 1$

Application



$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

P_2) Croissance

$A \subset B$: $P(A) \leqslant P(B)$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

⊖

P_3) Continuité

Si $A_n \longrightarrow A$ (soit en croissant soit en décroissant)
alors $P(A_n) \longrightarrow P(A)$

P_4) Formule de POINCARE.

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2).$$

$$P(A_1+A_2+A_3) = P(A_1) + P(A_2+A_3) - P(A_1A_2+A_1A_3)$$
$$= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) - P(A_2A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3)$$
$$+ P(A_1A_2A_3)$$

$$P(A_1+A_2+A_3+A_4) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)$$
$$- P(A_1A_2) - P(A_{13}) - P(A_1A_4) - P(A_2A_3)$$
$$- P(A_2A_4) - P(A_3A_4) + P(A_1A_2A_3)$$
$$+ P(A_1A_3A_4) + P(A_2A_3A_4) + P(A_1A_2A_4)$$
$$- P(A_1A_2A_3A_4)$$

$$(A_i)_{i=1}^{m} \qquad k \in \overline{1,n}$$

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2} \dots A_{i_k})$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k.$$

Remarques :

- S_k contient $\binom{n}{k}$ termes

- Si les A_i jouent ts le m̄ role on a la formule simplifiee:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \binom{n}{1} P(A_1) - \binom{n}{2} P(A_1A_2) + \binom{n}{3} P(A_1A_2A_3) - \dots$$

$$\boxed{\bullet\ \sum A_i = \text{au moins } 1 \text{ des } A_i}$$

Exercice 1.

Ds 1 placard on a 5 paires de chaussures en vrac
On prend 4 chaussures
Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 paire ?

$i \in \overline{1,5}$ A_i = "il y a la paire n° i"

$$P\left(\sum_{i=1}^{5} A_i\right) = \binom{5}{1} P(A_1) - \binom{5}{2} P(A_1 A_2)$$

$$P(A_1) = \frac{\binom{2}{2} \times \binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{4! \times 8 \times 7}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 2} = \frac{4! \; 4 \times 7}{10 \times 9 \times 8 \times 7}$$

$$P(A_1 A_2) = \frac{\binom{4}{4} \times \binom{0}{0}}{\binom{10}{4}} = \frac{4!}{10 \times 9 \times 8 \times 7}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{5} A_i\right) = 5 \times P(A_1) - 10 \, P(A_1 A_2)$$

$$= p = \frac{4!}{10 \times 9 \times 8 \times 7} \left[130 \right]$$

Passage au contraire

$1 - p$ = probabilité de ne pas avoir de paire.

$$1 - p = \frac{10 \times 8 \times 6 \times 4}{10 \times 9 \times 8 \times 7}$$

autre méthode

$$1 - p = \frac{\binom{5}{4} \times 2^4}{\binom{10}{4}}.$$

23/10

Exercice 2

« Jeu des rencontres ».

n cartes numérotées de 1 à n.

Pour $i \in \overline{1,n}$ A_i = " la carte n° i est à la place n° i "

Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 1 rencontre ?

Posons p_n = probabilité qu'il n'y ait pas de rencontre.

$$p_n = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \binom{n}{1} P(A_1) + \binom{n}{2} P(A_1 A_2) - \dots + (-1)^k \binom{n}{k} P(A_1 \dots A_k) + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} P(A_1 \dots A_n).$$

$$P(A_1 A_2 \dots A_k) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$\binom{n}{k} P(A_1 A_2 \dots A_k) = \frac{\cancel{n!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}} \times \frac{\cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}} = \frac{1}{k!}$$

Dc $p_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$

Rappel :

$$\boxed{\begin{array}{l} 1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}+\dots = e^{x} \\[2em] 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots = \dfrac{1}{1-x} \quad (\text{si } |x|<1). \end{array}}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = e^{-1} \simeq \frac{1}{3}$$

IV) Probabilité conditionnelle.

Definition 1

$P(A/B) =$ " Probabilité de A sachant B "

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Exemple :

« Paradoxe du 2^{eme} as ».

On tire 13 cartes d'1 jeu de 52

$A_1 =$ " il y a 1 as " (au moins)

$A_2 =$ " il y a 2 as "

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \frac{P(A_2)}{P(A_1)} =$$

$$P(A_1) = 1 - \frac{\binom{48}{13} \times \binom{4}{0}}{\binom{52}{13}}$$

$$P(A_2) = 1 - \frac{\binom{48}{13} \times \binom{4}{0}}{\binom{52}{13}} - \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}$$

$P(A_2 / A_1) \simeq 37\%.$

$\widetilde{A}_1$ = « il y a L'as de pique $\spadesuit$ »
$\widetilde{A}_2$ = « il y a 2 as dont L'as $\spadesuit$ »

$$P(\widetilde{A}_2 / \widetilde{A}_1) = \frac{P(\widetilde{A}_1 \widetilde{A}_2)}{P(\widetilde{A}_1)} = \frac{P(\widetilde{A}_2)}{P(\widetilde{A}_1)} = \frac{P(\widetilde{A}_1) - P(B)}{P(\widetilde{A}_1)}.$$

$\widetilde{A}_2 \subset \widetilde{A}_1$
$\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2 + B.$
B = " il y a L'os de $\spadesuit$ seul "

$$P(\widetilde{A}_2 / \widetilde{A}_1) = 1 - \frac{P(B)}{P(\widetilde{A}_1)}.$$

$$P(\widetilde{A}_1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{51}{12}}{\binom{52}{13}}$$

$$P(B) = \frac{\binom{1}{1} \times \binom{48}{12} \times \binom{3}{0}}{\binom{52}{13}}.$$

$$P(\tilde{A}_2 / \tilde{A}_1) > 50\%$$

Definition 2.

A et B indépendants ($A \perp B$)

Si $P(AB) = P(A)P(B)$.

$(A_i)_{i=1}^{n}$ sont $\perp$ si $\forall k \in \overline{2,n}$ $P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) P(\dots$ $P(A_{i_k})$.

Propriétés d'1 probabilité conditionnelle.

① $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 A_2) \dots P(A_n / A_1 A_n)$

② Theoreme des probabilités totales

(A_i) systeme complet : $P(B) = \sum_i P(B/A_i) P(A_i)$

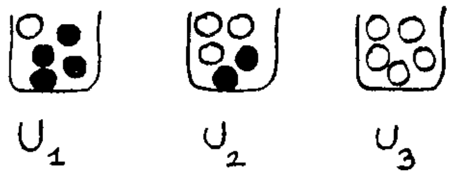
③ "Theoreme de BAYES"

(A_i) systeme complet : $P(A_i / B) = \dfrac{P(B/A_i) P(A_i)}{P(B)}$.

$$P(A_i / B) = \frac{P(B/A_i) P(A_i)}{\sum_i P(B/A_i) P(A_i)}.$$

Exercice 1.

3 urnes



je choisis 1 urne et je tire 1 boule.

$P(O)$?

$$P(O) = P(O/U_1)\,P(U_1) + P(O/U_2)\,P(U_2) + P(O/U_3)\,P(U_3)$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{5} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{9}{15}$$

Même expérience :

la boule tirée blanche probas qu'elle vienne de U_3.

$$P(U_3/O) = \frac{P(O/U_3)\,P(U_3)}{P(O)} = \frac{\frac{5}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{9}{15}} = \frac{5}{9}$$

$$P(U_2/O) = \frac{3}{9}$$

$$P(U_1/O) = \frac{1}{9}$$

Exercice 2.

2 urnes indicernables.

U_1 $\quad$ U_2

On choisit 1 urne.
Puis on tire n x avec remise
O^n = « les n boules tirées sont blanches »

$$P(O^n) = P(O^n/U_1)\,P(U_1) + P(O^n/U_2)\,P(U_2)$$

$$P(O^n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{1}{2}$$

Tjs la m̂ experience
j'ai obtenu n boules blanches. $P(U_2)$?

$$P(U_2/O^n) = \frac{P(O^n/U_2)\,P(U_2)}{P(O^n)} = \frac{\left(\frac{3}{\cancel{4}}\right)^{\cancel{n}} \times \cancel{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{\cancel{4}}\right)^{\cancel{n}} \times \cancel{\frac{1}{2}} + \left(\frac{3}{\cancel{4}}\right)^{\cancel{n}} \times \cancel{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{3^n}{1^n + 3^n} = \frac{3^n}{1+3^n}.$$

Exercice 3

On veut installer 1 alarme sonore contre l'incendie de 1 grand magasin.

I = « incendie »
A = « l'alarme se déclenche »

$P(I) = \frac{1}{1000}$

$P(A/I) = \frac{999}{1000}$

$P(A/\bar{I}) = \frac{7}{1000}$

Calculer $P(A)$?

$$P(A) = P(A/I)\,P(I) + P(A/\bar{I})\,P(\bar{I})$$
$$= \frac{999}{1000} \times \frac{1}{1000} + \frac{7}{1000} \times \frac{999}{1000} = \frac{999}{1000} \times \frac{8}{1000}$$

Calculer la probas de fausse Alerte ?

$$P(\bar{I}/A) = \frac{P(A/\bar{I})\,P(\bar{I})}{P(A)} = \frac{\frac{7}{1000} \times \cancel{\frac{999}{1000}}}{\cancel{\frac{999}{1000}} \times \frac{8}{1000}} = \frac{7}{8} \simeq 90\%$$