# Nombres réels

## Partie entière

### Exercice 1 ★★ - Partie entière et somme [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soient $a, b$ deux réels. Prouver que

$$\lfloor a\rfloor + \lfloor b\rfloor \leq \lfloor a+b\rfloor \leq \lfloor a\rfloor + \lfloor b\rfloor + 1.$$

Indication

Corrigé

Des inégalités $\lfloor a\rfloor \leq a < \lfloor a\rfloor + 1$ et $\lfloor b\rfloor \leq b < \lfloor b\rfloor + 1$, on en déduit

$$\lfloor a\rfloor + \lfloor b\rfloor \leq a+b < \lfloor a\rfloor + \lfloor b\rfloor + 2.$$

Or, $\lfloor a+b\rfloor$ est le plus grand entier $n$ tel que $n \leq a+b$. Puisque $\lfloor a\rfloor + \lfloor b\rfloor \leq a+b$, on en déduit qu $\lfloor a\rfloor + \lfloor b\rfloor \leq \lfloor a+b\rfloor$. De même, $\lfloor a+b\rfloor + 1$ est le plus petit entier $m$ tel que $m > a+b$. Puisque $\lfloor a\rfloor + \lfloor b\rfloor + 2 > a+b$, on en déduit $\lfloor a\rfloor + \lfloor b\rfloor + 2 \geq \lfloor a+b\rfloor + 1$, ce qui est l'autre inégalité demandée.

### Exercice 2 ★★ - Produit et division [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx\rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x\rfloor.$$

Indication

Corrigé

D'une part on a $\lfloor nx\rfloor \leq nx$ donc

$$\frac{\lfloor nx\rfloor}{n} \leq x$$

et puisque la fonction partie entière est croissante :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx\rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x\rfloor.$$

D'autre part, on a $\lfloor x\rfloor \leq x$ donc $n\lfloor x\rfloor \leq nx$ ou encore

$$\big\lfloor n\lfloor x\rfloor \big\rfloor \leq \lfloor nx\rfloor.$$

Maintenant, puisque $n\lfloor x\rfloor$ est un entier, $\big\lfloor n\lfloor x\rfloor \big\rfloor = n\lfloor x\rfloor$ et donc

$$\lfloor x\rfloor \leq \frac{\lfloor nx\rfloor}{n}.$$

En reprenant la partie entière de cette inégalité, on trouve

$$\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$$

ce qui est l'autre inégalité désirée.
Une autre méthode est d'introduire la fonction $\phi$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor.$$

Il est facile de voir que $\phi$ est périodique de période $1$. En effet, on a

$$\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

et

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\lfloor n(x+1) \rfloor}{n} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx+n \rfloor}{n} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + n}{n} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + 1 \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer que $\phi(x) = 0$ pour $x \in [0, 1[$. Mais pour $x \in [0, 1[$, on a $\lfloor x \rfloor = 0$ et

$$\lfloor nx \rfloor < n$$

d'où

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < 1$$

et

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = 0.$$

## Exercice 3 ★★ - Une somme [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Calculer $\sum_{k=1}^{2010} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Indication ▶

Corrigé ▶

## Exercice 4 ★★★ - Somme décalée [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit $x$ un nombre réel.

1. Démontrer que $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.
2. Plus généralement, démontrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor.$$

Indication ▶

Corrigé ▼

1. Notons $k=\lfloor x\rfloor$ et distinguons deux cas :
   - Soit $k\leq x<k+1/2$. Dans ce cas, $k+1/2\leq x+\frac{1}{2}<k+1$ et $2k\leq 2x<2k+1$ ce qui prouve que

     $$\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = k \text{ et } \lfloor 2x\rfloor = 2k.$$

     Dans ce cas, la formule demandée est bien prouvée.
   - Soit $k+\frac{1}{2}\leq x<k+1$. Dans ce cas, $k+1\leq x+\frac{1}{2}<k+\frac{3}{2}$ et $2k+1\leq 2x<2k+2$ ce qui prouve que

     $$\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = k+1 \text{ et } \lfloor 2x\rfloor = 2k+1.$$

     Dans ce cas également, la formule demandée est bien prouvée.
2. On pourrait procéder de la même façon, en encadrant $x$ entre $k+p/n$ et $k+(p+1)/n$. Voici une autre démonstration possible. Posons

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx\rfloor.$$

Alors $f$ est périodique de période $1/n$. En effet,

$$\begin{aligned} f(x+1/n) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k+1}{n}\right\rfloor - \lfloor nx+1\rfloor \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\left\lfloor x+\frac{\ell}{n}\right\rfloor - \lfloor nx+1\rfloor \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{\ell}{n}\right\rfloor + \lfloor x+1\rfloor - \lfloor nx+1\rfloor \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{\ell}{n}\right\rfloor + \lfloor x\rfloor + 1 - \lfloor nx\rfloor - 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

De plus, si $x$ est dans l'intervalle $[0,1/n[$, alors on peut vérifier que $f$ est nulle (toutes les parties entières intervenant dans sa définition le sont). Par périodicité, $f$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 5 ★★★ - Avec des racines carrées [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Vérifier que $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair. En déduire que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Indication ▶

Corrigé

## Borne inférieure, borne supérieure

### Exercice 6 - Quelques exemples [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soient $a, b$ deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures, inférieures.

1. $\{a+bn;\ n\in\mathbb{N}\}$
2. $\{a+(-1)^n b;\ n\in\mathbb{N}\}$
3. $\{a+b/n;\ n\in\mathbb{N}^*\}$
4. $\{(-1)^n a+b/n;\ n\in\mathbb{N}^*\}$
5. $\{a+(-1)^n b/n;\ n\in\mathbb{N}^*\}$.

Indication

Corrigé

### Exercice 7 - Des exemples [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Les ensembles suivants sont-ils majorés? minorés? Si oui, déterminer leur borne inférieure, leur borne supérieure.

$$A=\{x\in\mathbb{R};\ x^2<2\}\qquad B=\left\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

$$C=\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{p};\ (p,n)\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

Indication

Corrigé

### Exercice 8 - Atteint ou non? [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont elles-minorées, majorées? Dans chaque cas, déterminer s'il y a lieu la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$$A=\left\{\frac{n}{mn+1};\ (m,n)\in\mathbb{N}^{*2}\right\},\qquad B=\left\{\frac{n}{mn+1};\ (m,n)\in\mathbb{N}^2\right\}.$$

Indication

Corrigé

Commençons par $A$. On a, pour tout $n,m\in\mathbb{N}^*$,

$$0\leq\frac{n}{nm+1}\leq\frac{n}{nm}\leq\frac{1}{m}\leq 1.$$

$A$ est donc minorée par $0$ et majorée par $1$. Montrons que $\inf(A)=0$. Si $c>0$ est un minorant de $A$, alors pour tout couple $(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}$, on a

$$c\leq\frac{n}{nm+1}.$$

Prenons $n=1$, on obtient

$$c \leq \frac{1}{m+1} \iff m \leq \frac{1}{c} - 1.$$

Comme ceci doit être vrai pour tout entier $m \geq 1$, c'est une contradiction car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Ainsi, $0$ est le plus grand des minorants de $A$, et $\inf(A) = 0$. Démontrons de même que $1 = \sup(A)$. Si $d < 1$ est un majorant de $A$, alors pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, on a

$$d \geq \frac{n}{nm+1}.$$

Pour $m = 1$, on obtient

$$d \geq \frac{n}{n+1} \iff d \geq n(1-d) \iff n \leq \frac{d}{1-d}.$$

Cette inégalité est impossible à réaliser pour tout entier $n$, et donc $\sup(A) = 1$. De plus, 0 n'est pas un élément de $A$ -c'est trivial, et 1 non plus car on a toujours $nm + 1 > n$ pour $n, m \geq 1$. Étudions désormais $B$. $0$ est toujours un minorant de $B$, mais cette fois il est aussi élément de $B$. On a donc $\inf(B) = \min(B) = 0$. De plus, on a $\mathbb{N} \subset B$ (choisir $m = 0$). Ainsi, $B$ n'est pas majoré.

## Exercice 9 ★★ - Plus petit et plus grand [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soient $A$ et $B$ deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq b.$$

Démontrer que $A$ est majoré, $B$ est minoré et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Indication

Corrigé

Fixons $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$. Alors, pour tout $b \in B$, on a $a_0 \leq b$ et donc $a_0$ est un minorant de $B$. De même, $b_0$ est un majorant de $A$. Ainsi, $B$ admet une borne inférieure et $A$ admet une borne supérieure. Supposons par l'absurde que $\sup(A) > \inf(B)$, et posons $u = \frac{\sup(A) + \inf(B)}{2}$. Alors on a $\inf(B) < u < \sup(A)$. En particulier, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a > u$ et $b < u$. On obtient $a > b$, une contradiction avec les hypothèses.

## Exercice 10 ★★★ - Borne sup non atteinte [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ majorée et on note $M = \sup A$. On suppose que $M \notin A$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]M - \varepsilon, M[$ contient une infinité d'éléments de $A$.

Indication

Corrigé

On raisonne par l'absurde, et on suppose que $]M - \varepsilon, M[\, \cap A$ est fini. Soit $\{a_1, \ldots, a_p\} = ]M - \varepsilon, M[\, \cap A$. Posons $a = \max(a_1, \ldots, a_p)$. Alors $a < M$. On pose $\delta = M - a$. On a $\delta > 0$, donc il existe $a_{p+1} \in A$ tel que $M - \delta < a_{p+1} \leq M$. On a même $a_{p+1} < M$ car $M \notin A$. De plus, $a_{p+1} > M - \delta = a \geq M - \varepsilon$. On en déduit que $a_{p+1} \in ]M - \varepsilon, M[$ et que $a_{p+1} \neq a_i$, $i = 1, \ldots, p$. Ceci contredit l'hypothèse initiale.

## Exercice 11 ★★★ - Diverses opérations [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soient $A$ et $B$ deux parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$\begin{array}{ll} -A = \{-a;\ a \in A\} & A + B = \{a + b;\ a \in A, b \in B\} \\ x + A = \{x + a;\ a \in A\} & AB = \{ab;\ a \in A, b \in B\}. \end{array}$$

1. Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
2. Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
3. Montrer que $\sup(x+A) = x + \sup(A)$.
4. A-t-on toujours $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai?

Indication

Corrigé

1. Soit $m = \inf(A)$ et notons $M = -m$. Alors, pour tout $a \in A$, on a $m \leq a$ ce qui implique $-a \leq M$. Ainsi, $M$ majore $-A$. De plus, soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que $m \leq a \leq m + \varepsilon$. Multipliant cette inégalité par -1, on trouve que

$$M - \varepsilon \leq -a \leq M.$$

C'est bien que $M = \sup(-A)$.
2. Notons $M = \sup(A) + \sup(B)$. Soit $x \in A + B$, $x$ s'écrit $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Alors $a \leq \sup(A)$, $b \leq \sup(B)$ et donc en effectuant la somme, on trouve

$$a + b \leq M.$$

$M$ est donc un majorant de $A + B$. De plus, soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon/2 \leq a \leq \sup(A)$, et il existe $b \in A$ tel que $\sup(B) - \varepsilon/2 \leq b \leq \sup(B)$. Faisant la somme de ces deux inégalités, on trouve

$$M - \varepsilon \leq a + b \leq M.$$

Ceci achève la preuve que $M = \sup(A+B)$.
3. On peut reprendre le raisonnement précédent, ou tout simplement appliquer le résultat précédent avec $B = \{x\}$.
4. Le raisonnement utilisé aux questions précédentes ne marche pas ici, car le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif. Prenons par exemple $A = \{-1, 0\}$ et $B = \{-2\}$. Alors $AB = \{0, 2\}$ et $\sup(AB) = 2 \neq \sup(A) \times \sup(B) = 0$. Le résultat est cependant vrai si $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$. La preuve est tout à fait similaire à celle produite un peu plus haut pour la somme.

## Exercice 12 ★★★ - Écart [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit $A$ une partie non-vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $B = \{|x-y|;\ (x,y) \in A^2\}$.

1. Justifier que $B$ est majorée.
2. On note $\delta(A)$ la borne supérieure de cet ensemble. Prouver que $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Indication

Corrigé

1. Soient $(x,y) \in A^2$ et soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \in A \implies |x| \leq M$. Alors on a

$$|x-y| \leq |x| + |y| \leq 2M,$$

ce qui prouve que $B$ est majoré.
2. Posons $m = \inf(A)$ et $M = \sup(A)$. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a

$$m \leq x \leq M \text{ et } -M \leq -y \leq -m \implies -(M-m) \leq x - y \leq M - m$$

d'où on tire $|x-y| \leq M - m$. On en déduit donc que $M - m$ est un majorant de $B$ et que $\delta(A) \leq M - m$. Pour prouver l'autre inégalité, on fixe $\varepsilon > 0$, et on construit un élement $b \in B$ tel que $b > M - m - \varepsilon$. Pour cela, on sait qu'il existe $(x,y) \in A^2$ tels que

$$x \geq M - \varepsilon/2 \text{ et } y \leq m + \varepsilon/2.$$

Alors $x - y \geq M - m - \varepsilon$, ce qui est le résultat voulu. On a donc bien $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

### Exercice 13 ★★★★ - Avec $n$ termes [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

1. Vérifier que, pour tous réels $x_i, x_j > 0$, on a

$$\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} = \frac{x_i^2 + x_j^2}{x_i x_j} \geq 2.$$

2. Soit $n \geq 1$ fixé. Déterminer

$$\inf \left\{ (x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right);\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

Indication

Corrigé

### Exercice 14 ★★★★ - Application à l'existence d'un point fixe d'une application croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On note $E = \{x \in [0,1]; f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que $E$ admet une borne supérieure $b$.
2. Prouver que $f(b) = b$.

Indication

Corrigé

1. $E$ est une partie non-vide (car elle contient $0$), et majorée (par $1$) de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure que l'on note $b$.
2. On va raisonner par l'absurde pour démontrer que $f(b) = b$.
   - Si $f(b) < b$, comme $b$ est le plus petit des majorants de $E$, $f(b)$ ne majore pas $E$. Il existe donc un élément $c$ de $E$ tel que $f(b) < c \leq b$. Mais alors $f(c) \geq c > f(b)$ alors que $c \leq b$. Ceci contredit que $f$ est croissante.
   - Si $f(b) > b$, comme $f$ est croissante, on a $f(f(b)) \geq f(b)$, et donc $f(b) \in E$, ce qui est impossible puisque $f(b)$ est strictement supérieur à la borne supérieure de $E$.

## Nombres rationnels et irrationnels

### Exercice 15 ★★ - Irrationnels! [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Démontrer que les réels suivants sont irrationels :

1. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ où $x$ et $y$ sont des rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels.
2. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Indication

Corrigé

### Exercice 16 ★★ - Intervalles et rationnels [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soient $I$ et $J$ deux intervalles ouverts. On suppose que $(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \emptyset$. Démontrer que $I \cap J = \emptyset$.

Indication

Corrigé

### Exercice 17 ★★ - Homographie [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit $x$ un nombre irrationnel et $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$. Prouver que, si $ad - bc \neq 0$, alors $\frac{ax+b}{cx+d}$ est un nombre irrationnel.

Indication

Corrigé

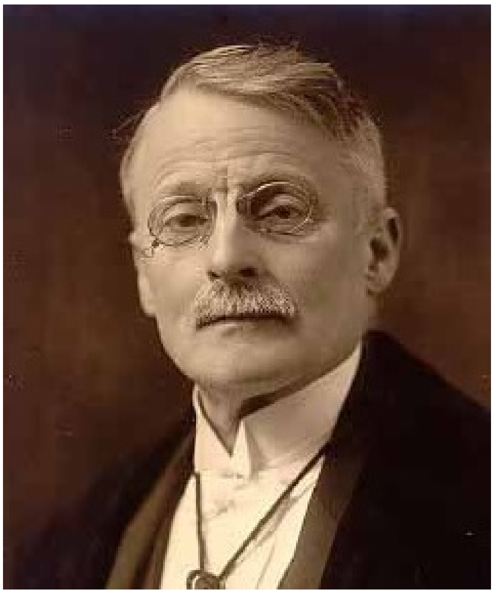
# Discussions des forums

- *Avant 1917*
- *[FF++] Question sur un bo …*
- *Equation*
- *Programme python x²=r*
- *Série de Dirichlet, produ …*
- *Exercice de Mathématique*
- *Matrices equivalentes*
- *Changer la place d'un chiffre*
- *Analyse complexe niveau L3*
- *Aide Probabilité*
- *probabilité que je n'arri …*
- *Espérance et probabilité …*
- *La réduction des polyèdre …*
- *Décomposition E en une so …*
- *Nouveau forum consacré à …*

*Accéder aux forums*



# Mathématicien du mois



*Charles-Jean de La Vallée Poussin (1866 - 1962)*