FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 0
RÉVISIONS

Dans tous les exercices, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne l'espace de probabilité sous-jacent. Les exercices plus difficiles ou faisant intervenir des notions avancées de théorie de la mesure sont indiqués par un astérisque.

1. Théorie des ensembles, dénombrement

Exercice 1. Soient A, B et C trois sous ensembles de Ω. Parmi les assertions suivantes, indiquer lesquelles sont toujours vraies. *(Faire un dessin !)*

— $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

VRAI

— $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

VRAI

— $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

FAUX

Exercice 2. Soit Ω un ensemble de cardinal n. Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω, est de cardinal 2^n.

On considère l'application qui, à toute partie de Ω, associe son indicatrice :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathcal{F}(\Omega, \{0,1\}) \\ A & \mapsto & \mathbf{1}_A \end{cases} .$$

On peut vérifier que l'application f est une bijection. On a donc $|\mathcal{P}(\Omega)| = |\mathcal{F}(\Omega, \{0,1\})| = |\{0,1\}|^{|\Omega|} = 2^n$.

Exercice 3. Soit n et k deux entiers positifs. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de sous-ensembles *non ordonnés* à k éléments d'un ensemble à n éléments.

(1) Montrer la formule du binôme de Newton :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} .$$

(2) Montrer la relation de Pascal : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

(3) Montrer que si $k \leq n$, alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(4) Exprimer en fonction de coefficients binomiaux le nombre de mains de 7 cartes, tirées dans un jeu de 52 cartes, contenant exactement 2 rois et 3 trèfles.

*** Exercice 4.**

(1) Soient $p \geq 2$, et $k_1, ..., k_n$, n entiers non nuls. Dénombrer les suites de longueur p contenant exactement k_1 fois 1, ..., k_n fois n.

(2) Soient n et p dans $\mathbf{N}^*$. Donner le nombre d'applications strictement croissantes de $\mathbf{N}_n^* = \{1, \ldots, n\}$ dans $\mathbf{N}_p^* = \{1, \ldots, p\}$.

(3) Soient p et k deux entiers non nuls, montrer que

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1}.$$

2. Théorie de la mesure et probabilités

Exercice 5.

(1) Qu'appelle-t-on tribu sur un ensemble Ω ?

Une tribu (ou σ-algèbre) sur un ensemble Ω un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de Ω (i.e. un sous ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que :

(a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(b) $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire dans $\mathcal{F}$: si $A \in \mathcal{F}$ alors $A^c \in \mathcal{F}$

(c) $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Intuitivement, en probabilités une tribu représente un ensemble d'informations disponibles sur l'univers Ω, i.e. un ensemble d'événements dont on peut dire si ils se sont produits ou pas.

(2) Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω. On suppose que $B \in \mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{G} \equiv \{A \cap B, A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur B.

Par construction, $\mathcal{G}$ contient exclusivement des sous-ensembles de B. De plus,

(a) $\emptyset = \emptyset \cap B \in \mathcal{F}$

(b) si $A \cap B \in \mathcal{G}$, alors $A \in \mathcal{F}$ et, comme $\mathcal{F}$ est une tribu, $A^c \in \mathcal{F}$. Donc, par définition de $\mathcal{G}$, le complémentaire de A dans B, $A^c \cap B$, appartient à $\mathcal{F}$.

(c) Par le même argument, on a que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap B \in \mathcal{G}$ alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap B \in \mathcal{G}$

Cela montre que $\mathcal{G}$ est bien une tribu sur B.

Exercice 6.

(1) Donner la définition d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ définie sur un ensemble mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$.

Une application $\mathbb{P}$ définie sur un ensemble mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeur dans $[0,1]$ est une mesure de probabilité si

(a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(b) $\mathbb{P}$ est σ-additive, c'est-à-dire, pour toute collection dénombrable (ou finie) $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles disjoints deux à deux, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(E_n)$$

Remarque : il n'est pas nécessaire d'imposer l'égalité précédente dans le cas de collections finies d'événements. C'est en effet une conséquence du cas dénombrable en complétant la collection avec une infinité d'ensembles vides.

(2) Soit A et B deux événements. Montrer que

(a) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

On considère les trois événements disjoints suivants

$$E_1 = A \cap B,\ E_2 = A \cap B^c \text{ et } E_3 = A^c \cap B$$

On a alors, par σ-additivité de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3)$$

et, d'autre part,

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbb{P}(E_1 \cup E_3) - \mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3)$$

D'où le résultat attendu.

(b) si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Si $A \subset B$, $B = A \cup (A^c \cap B)$ et A^c et B sont disjoints. Donc, par σ-additivité de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B) \geq \mathbb{P}(A)$$

car $\mathbb{P}$ est une application positive.

(c) $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A\right)$.

On décompose $\Omega = A \cup A^c$.

Exercice 7. On se donne une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Est-ce que $\bigcup_n A_n$ et $\bigcap_n A_n$ sont encore des événements ?

Oui, par définition d'une tribu.

(2) On suppose que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$). Montrer que $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$.

On considère la suite des couronnes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $B_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$. Les B_n sont 2 à 2 disjoints et, de plus,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Ainsi, par σ-additivité,

$$\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(B_n\right).$$

La série des $\mathbb{P}\left(B_n\right)$ étant positive, convergente,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}\left(B_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{N} B_n) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(A_N\right)$$

où la dernière égalité provient de la croissance de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3) On suppose que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$). Montrer que $\mathbb{P}(\bigcap_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$.

Remarquons que $\mathbb{P}(\bigcap_n A_n) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_n A_n^c)$. Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors la suite $(A_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et on peut appliquer les résultat précédent. Donc,

$$\mathbb{P}(\bigcap_n A_n) = 1 - \lim_n \mathbb{P}(A_n^c) = \lim_n (1 - \mathbb{P}(A_n^c)) = \lim_n \mathbb{P}(A_n).$$

* **Exercice 8.** Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

(1) Montrer que

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup A_n)$$

Rappelons les définitions de lim inf et lim sup d'ensembles et de suites réelles : pour une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$\liminf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$ représente l'événement "une infinité de A_n se réalisent"

$\limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$ représente l'événement "tous les A_n se réalisent à partir d'un certain rang"

$\liminf u_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} u_k$ est la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\limsup u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} u_k$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Pour la première inégalité, remarquons que la suite d'événements $B_n = \bigcap_{k\geq n} A_k$ est croissante au sens de l'inclusion. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

De plus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall \ell \geq n,\ B_n = \bigcap_{k\geq n} A_k \subset A_\ell$$

et donc

$$\mathbb{P}(B_n) \leq \inf_{\ell\geq n} \mathbb{P}(A_\ell).$$

En passant à la limite, on obtient bien

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) = \lim_n \mathbb{P}(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{\ell \geq n} \mathbb{P}(A_\ell) = \liminf_n \mathbb{P}(A_n).$$

La seconde inégalité est évidente de par les définitions de $\liminf$ et de $\limsup$ et la troisième inégalité se démontre de manière analogue à la première.

(2) *Premier Lemme de Borel-Cantelli.*
On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

Par définition,

$$\limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

Notons $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$. La suite d'événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et donc

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(B_n\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_k\right)$$

Le terme de droite de l'inégalité précédente est le reste d'une série convergente par hypothèse et donc il tend vers 0 lorsque n tend vers ∞, ce qui démontre le résultat recherché.

(3) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. Comparer les ensembles $\{\limsup X_n > 0\}$ et $\limsup\{X_n > 0\}$ puis les ensembles $\{\limsup X_n \geq 0\}$ et $\limsup\{X_n \geq 0\}$.

— On étudie les deux premiers ensembles et on montre que

$$\{\limsup X_n > 0\} \subset \limsup\{X_n > 0\}$$

mais que l'autre inclusion n'est pas toujours vérifiée.
Remarquons tout d'abord que

$$\limsup\{X_n > 0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} \{X_k > 0\} = \{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n,\ X_k > 0\}.$$

Considérons maintenant $\omega \in \limsup X_n > 0$. Par définition de la $\limsup$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \geq n$, tel que $X_k(\omega) > (\limsup X_n(\omega))/2 > 0$, ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n,\ X_k(\omega) > 0,$$

et $\omega \in \limsup\{X_n > 0\}$.
Montrons que l'autre inclusion n'est pas vérifiée : soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite "aléatoire" définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{p.s.}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{X_n > 0\} = \Omega$ et donc $\limsup\{X_n > 0\} = \Omega$. Par contre, $\limsup X_n = 0$ p.s. et l'autre ensemble est donc vide : $\{\limsup X_n > 0\} = \emptyset$.

— On montre que

$$\limsup\{X_n \geq 0\} \subset \{\limsup X_n \geq 0\}$$

mais que l'autre inclusion n'est pas toujours vérifiée. On utilise là encore que

$$\limsup\{X_n \geq 0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} \{X_k \geq 0\} = \{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n,\ X_k \geq 0\}.$$

Ainsi sur cet ensemble, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend une infinité de valeurs positives et donc la plus grande valeur d'adhérence, $\limsup X_n$, appartient nécessairement à $[0;\infty]$, ce qui montre l'inclusion voulue.
Voici maintenant un contre-exemple démontrant que l'autre inclusion n'est pas toujours vérifiée. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite "aléatoire" définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = -\frac{1}{n+1} \quad \text{p.s.}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{X_n > 0\} = \emptyset$ et donc $\limsup\{X_n \geq 0\} = \emptyset$. Par contre, $\limsup_n X_n = \lim_n X_n = 0$ p.s. et donc : $\{\limsup X_n \geq 0\} = \Omega$.

Exercice 9.

(1) Qu'appelle-t-on variable aléatoire ?

Une variable aléatoire sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (ou plus généralement dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ pour un $d \in \mathbb{N}^*$, on parle alors souvent de vecteur aléatoire).

(2) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle définie sur Ω. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sigma(X) := \{\{X \in A\},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Généraliser au cas où X est un vecteur aléatoire.

Il suffit de voir que $\sigma(X)$ vérifie les axiomes de tribu, cela découle de s propriétés de tribu de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

(a) $\emptyset = \{X \in \emptyset\} \in \sigma(X)$

(b) Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{X \in A\}^c = \{X \in A^c\} \in \sigma(X)$

(c) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X \in A_n\} = \{X \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\} \in \sigma(X).$$

Exercice 10. Montrer les inégalités suivantes.

(1) *Inégalité de Markov :* si X est une variable aléatoire *positive*, alors

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}\ .$$

On utilise successivement que l'espérance de l'indiactrice d'un événement est la probabilité de cet événement, que sur l'événement $X \geq t$, on a $X/t \geq 1$ et qu'une inidcatrice peut toujours être majorée par 1 :

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{E}\left[1_{X\geq t}\right] \leq \mathbb{E}\left[\frac{X}{t}\mathbf{1}_{X\geq t}\right] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$$

(2) *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :* si $X \in \mathbb{L}^2$ d'espérance m et de variance σ^2, alors

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(|X - m| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}\ .$$

On utilise l'inégalité de Markov avec $|X - m|^2$:

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(|X - m| \geq t) = \mathbb{P}(|X - m|^2 \geq t^2) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X - m|^2\right]}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

(3) Soit $X \in \mathbb{L}^2$ d'espérance m et de variance σ^2.

(a) Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq m + t) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(t + \lambda)^2}.$$

On utilise l'inégalité de Markov avec $(X - m + \lambda)^2$:

$$\begin{aligned}\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq m + t) &\leq \mathbb{P}\left((X - m + \lambda)^2 \geq (t + \lambda)^2\right)\\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left[(X - m + \lambda)^2\right]}{(t + \lambda)^2}\\ &= \frac{\sigma^2 + \lambda^2 + 2\lambda\mathbb{E}[X - m]}{(t + \lambda)^2} = \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(t + \lambda)^2}.\end{aligned}$$

(b) En déduire l'inégalité

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq m + t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}.$$

On optimise l'inégalité précédente en λ. Pour $t > 0$ et σ^2 fixé, la fonction

$$f : \lambda \to \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(t+\lambda)^2}$$

admet un minimum en $\lambda = \sigma^2/t$ (on le voit en étudiant la dérivée de la fonction). En ce point, on a $f(\sigma^2/t) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$. Comme

$$\forall \lambda > 0, \forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq m + t) \leq f(\lambda),$$

on a également

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq m+t) \leq \inf_{\lambda > 0} f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}.$$

4. Loi d'une variable aléatoire

Exercice 11. Qu'appelle-t-on loi d'une variable (ou d'un vecteur) aléatoire X ?

La loi d'une variable X est la mesure de probabilité induite par la variable sur l'espace d'arrivée : $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$ pour un $d \in \mathbb{N}^*$ dans le cas d'un vecteur aléatoire) :

$$\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) \end{array} \right. .$$

Exercice 12. Soit X et Y deux v.a. de même loi. Montrer que, pour toute fonction (borélienne) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.

La fonction f étant borélienne, $f(X)$ et $f(Y)$ sont bien des variables aléatoires. De plus, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}_{f(X)}(A) = \mathbb{P}(f(X) \in A) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A)) = \mathbb{P}(Y \in f^{-1}(A)) = \mathbb{P}(f(Y) \in A) = \mathbb{P}_{f(Y)}(A).$$

Donc $\mathbb{P}_{f(X)}(A) = \mathbb{P}_{f(Y)}(A)$ pour tout borélien A. et les deux lois sont identiques. *Remarque :* le résultat est également vrai avec des vecteurs aléatoires.

Exercice 13. Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On pose

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ t &\mapsto \mathbb{P}(]-\infty, t]) \end{aligned}$$

la *fonction de répartition* de la loi $\mathbb{P}$.

(1) Calculer et représenter F lorsque $\mathbb{P}$ est l'une des probabilités suivantes
   (a) $\mathbb{P} = \mathbf{1}_{[0,1]} \cdot \lambda$ où λ désigne la mesure de Lebesgue.
   (b) $\mathbb{P} = f \cdot \lambda$ où $f : x \mapsto e^{-x}\mathbf{1}_{x \geq 0}$.
   (c) $\mathbb{P} = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$ avec p fixé dans $[0,1]$
(2) Montrer que F est croissante et vérifie

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to -\infty} F(t) = 0.$$

(3) Montrer que F est continue à droite et que sa limite à gauche $F(t^-)$ en un point $t \in \mathbb{R}$ est donnée par

$$F(t^-) = \mathbb{P}(]-\infty, t[)$$

(4) Montrer que F est continue en $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mathbb{P}(\{t\}) = 0$.

Exercice 14.

(1) Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$. Donner la loi de $1 - U$.

On utilise la méthode de la fonction muette : deux v.a. X et Y ont même loi ssi pour toute fonction f continue, bornée,

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = \mathbb{E}\left[f(Y)\right].$$

Ainsi, pour toute fonction f continue, bornée,

$$\mathbb{E}\left[f(1-U)\right] = \int_0^1 f(1-u)\,\mathrm{d}\,u \underset{v=1-u}{=} \int_0^1 f(v)\,\mathrm{d}\,v = \mathbb{E}\left[f(U)\right].$$

Donc $1-U$ suit également la loi uniforme sur $[0,1]$.

(2) Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et m, σ deux réels. Quelle est la loi de $Y = m + \sigma X$?

Là encore, un changement de variable $y = m + \sigma x$ montre que Y suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

(3) Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Expliquer pourquoi la v.a. $X = \tan(U)$ est bien p.s. à valeurs réelles et donner la loi de X.

Avec probabilité 1, la variable U prend ses valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$, intervalle sur lequel la fonction tangente est bien définie et finie. La variable X prend donc des valeurs réelles p.s. Pour la loi, nous allons utiliser à nouveau la méthode de la fonction muette : pour toute fonction f continue, bornée,

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = \mathbb{E}\left[f(\tan U)\right] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\tan u)\frac{\mathrm{d}\,u}{\pi}$$

Le changement de variable $x = \tan u$ dans l'intégrale donne :

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\mathrm{d}\,x}{\pi(1+x^2)}.$$

Cela signifie donc que X a même loi qu'une variable de densité $x \to \left[\pi(1+x^2)\right]^{-1}$ i.e. que X suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$.

5. Indépendance et loi jointe

Exercice 15.

(1) Rappeler la définition de l'indépendance de deux événements A et B, de trois événements A, B, C et d'une famille infinie d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Des événements sont indepéndants si la probabilité d'une intersection *finie* quelconque de ces événements est égale au produit des probabilités de ces événements. Ainsi :

- deux événements A et B sont indépendants si :

$$\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right).$$

- trois événements A, B et C sont indépendants si :

$$\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right), \quad \mathbb{P}\left(A \cap C\right) = \mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(C\right), \quad \mathbb{P}\left(B \cap C\right) = \mathbb{P}\left(B\right)\mathbb{P}\left(C\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(A \cap B \cap C\right) = \mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right)\mathbb{P}\left(C\right).$$

- une famille d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est indépendante si pour tout sous-ensemble $I \subset \mathbb{N}$ *fini*,

$$\mathbb{P}\left(\cap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}\left(A_i\right).$$

(2) Rappeler la définition de l'indépendance de $n \geq 1$ variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes ssi

$$\forall (A_1, \ldots A_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^n, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \left\{X_i \in A_i\right\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left(X_i \in A_i\right).$$

Exercice 16. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0, \ldots, 5\}$. On suppose que $\mathbb{P}(X=3) = 1/2$ et $\mathbb{P}(Y=2) = 1/3$. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(X=3, Y=2)$?

Il n'y a aucune hypothèse sur la loi jointe des v.a., la seule chose qu'on peut obtenir est une majoration :

$$\mathbb{P}(X=3, Y=2) \leq \min(\mathbb{P}(X=3), \mathbb{P}(Y=2)).$$

soit $0 \leq \mathbb{P}(X=3, Y=2) \leq 1/3$. Mais rien ne permet de comaprer directement $\mathbb{P}(X=3, Y=2)$ et $\mathbb{P}(X=3)\mathbb{P}(Y=2)$

Exercice 17. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Parmi les assertions suivantes, indiquer lesquelles sont toujours vraies.

(1) $\{X_1, X_4X_1\}$ sont indépendantes de $\{X_3, X_2X_1\}$.

FAUX

(2) $\{X_2, X_4^2X_1\}$ sont indépendantes de $\{X_3, X_5\}$.

VRAI

(3) Les variables $\{X_1X_2, X_1X_3, X_1X_4, \ldots\}$ sont indépendantes.

FAUX

(4) $\sup_{1\leq k\leq 15}\{\sin(X_k^2)\}$ est indépendante de $\sum_{k=18}^{144} e^{X_k+3X_{k-1}}$.

VRAI

(5) $\sum_{k=1}^{10} X_{2k}$ est indépendante de $\sum_{k=1}^{12} X_{2k+1}$.

VRAI

(6) $\sum_{k=1}^{10} X_{3k+1}$ est indépendante de $\sum_{k=1}^{12} X_{2k+2}$.

FAUX

(7) Toute fonction de $\{X_{2k+1},\ k\in\mathbb{N}\}$ est indépendante de toute fonction de $\{X_{2k},\ k\in\mathbb{N}\}$.

VRAI

Exercice 18. Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $1/2$ indépendantes. On considère les événements

$$A=\{X=1\},\quad B=\{Y=1\}\quad \text{et}\quad C=\{X=Y\}\ .$$

(1) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Qu'en est-il de A et C d'une part et de B et C d'autre part ?

Les événements A et B sont indépendants car les v.a. X et Y le sont. Pour étudier les autres cas, il faut calculer les probabilités. Par hypothèse, on a $\mathbb{P}(A)1/2$. De plus,

$$\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(\{X=1,Y=1\}\cup\{X=0,Y=0\})=\mathbb{P}(X=1,Y=1)+\mathbb{P}(X=0,Y=0)$$

Par indépendance des variables X et Y, on obtient :

$$\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Finalement, $\mathbb{P}(A\cap C)=\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ et les deux événements A et C sont bien indépendants égalements. Un calcul analogue montre l'indépendance des événements B et C.

(2) Les événements A, B, C sont-ils indépendants ?

Ces trois événements sont indépendants si on a l'indépendance des événements 2 à 2 ce qui est vérifié d'après la question précédente et qu'on a de plus l'égalité $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$. Or $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)=1/8$ tandis que

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(X=1,Y=1)=1/4.$$

Les trois événements ne sont donc pas indépendants.

Exercice 19. Soient X et Y deux variables aléatoires i.i.d. de loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$ (on note $q=1-p$). On pose $M=\min(X,Y)$ et $Z=X-Y$. Montrer que

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \forall z\in\mathbb{Z},\ \mathbb{P}(M=m,\ Z=z)=p^2q^{2m-2}q^{|z|}.$$

Les variables M et Z sont-elles indépendantes ?

Fixons $m \in \mathbb{N}^*$. Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(M = m,\ Z = z) = \mathbb{P}\left(\min(X,Y) = m, X - Y = z\right)$$

Si $z > 0$, cela signifie que $X > Y$ et donc $\min(X,Y) = Y$. Ainsi, les v.a. X et Y étant de loi géométrique et indépendantes,

$$\mathbb{P}(M = m,\ Z = z) = \mathbb{P}\left(Y = m, X = m+z\right) = \mathbb{P}\left(Y = m\right)\mathbb{P}\left(X = m+z\right) = pq^{m-1} \times pq^{m+z-1}$$

et on obtient le résultat voulu, un raisonnement analogue donne le résultat pour $z < 0$ et pour $z = 0$. Les probabilités élémentaires $\mathbb{P}(M = m,\ Z = z)$ s'exprimant comme un produit $C^{te} f(m)g(z)$ avec $f(m) = q^{2m-2}$ et $g(z) = q^{|z|}$, les deux variables sont indépendantes. Pour trouver leur densité, il suffit de renormaliser f pour que la série associée soit égale à 1 :

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(m) = \sum_{m=1}^{\infty} q^{2m-2} = \frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{p(2-p)}.$$

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(M = m) = p(2-p)q^{2m-2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z = z) = \frac{p}{2-p}q^{|z|}.$$

Exercice 20. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Montrer que pour toutes fonctions mesurables $f_1, \ldots, f_n$, $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Soit $\phi_1, \ldots, \phi_n$ des fonctions mesurables à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telles que les v.a. $\phi_i(f_i(X_i))$ soient intégrables. Alors, les v.a. X_i étant indépendantes,

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \phi_i(f_i(X_i))\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \phi_i \circ f_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\phi_i \circ f_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\phi_i(f_i(X_i))\right],$$

ce qui montre que les v.a. $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Exercice 21. Soient $U \sim \mathcal{E}(1/2)$ et $\Theta \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi])$ deux variables aléatoires indépendantes. On pose $X = \sqrt{U}\cos\Theta$ et $Y = \sqrt{U}\sin\Theta$. Calculer la loi du couple (X,Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Quelle est la loi de X ? Quelle est celle de Y ?

On utilise la méthode de la fonction muette. Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(X,Y)\right] &= \mathbb{E}\left[f(\sqrt{U}\cos\Theta, \sqrt{U}\sin\Theta)\right] \\
&= \int_{]0,\infty[\times]-\pi,\pi[} f(\sqrt{u}\cos\theta, \sqrt{u}\sin\theta)\frac{e^{-u/2}\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,u}{4\pi}
\end{aligned}$$

Considèrons le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :

$$G : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,\infty[\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{R}_- \times \{0\}\} \\ (u,\theta) & \mapsto & (x(u,\theta), y(u,\theta)) = (\sqrt{u}\cos\theta, \sqrt{u}\sin\theta) \end{array} \right.$$

de Jacobien :

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{2\sqrt{u}} & -\sqrt{u}\sin\theta \\ \frac{\sin\theta}{2\sqrt{u}} & \sqrt{u}\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Le changement de variables associé donne :

$$\mathbb{E}\left[f(X,Y)\right] = \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbb{R}_-\times\{0\}\}} f(x,y)\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

Comme l'ensemble $\mathbb{R}_- \times \{0\}$ est de mesure nulle, on a finalement :

$$\mathbb{E}\left[f(X,Y)\right] = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

Cela montre que X et Y sont deux v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 22. Soit $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $U = \min_{i=1,\ldots,n} X_i$ et $V = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$.

(1) Calculer les fonctions de répartition de U et V. En déduire que U et V ont des densités que l'on précisera.

On note F_U (resp. F_V) la fonction de répartition de U (resp. de V). Comme la variable V est p.s. positive, pour tout $t<0$, $F_V(t)=0$. Pour tout réel $t>0$,

$$F_V(t)=\mathbb{P}(V\leq t)=\mathbb{P}(\forall i\in\{1,\dots,n\},\ X_i\leq t)$$

Les X_i étant indépendantes et de même loi, la fonction de répartition de V s'écrit donc :

$$F_V(t)=\mathbb{P}(V\leq t)=\prod_{i=1}\mathbb{P}(X_i\leq t)=(\mathbb{P}(X_1\leq t))^n=\left(\int_0^t e^{-s}\,\mathrm{d}\,s\right)^n=(1-e^{-t})^n.$$

La fonction F_V étant $\mathcal{C}^1$ par morceaux, V admet une densité f_V qui vaut :

$$f_V(t)=\begin{cases} F_V'(t)=ne^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}$$

Avec le même type de raisonnement, on montre que :

$$f_U(t)=\begin{cases} ne^{-nt} & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}.$$

On remarque ainsi que U suit la loi $\mathcal{E}(n)$.

(2) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Les deux v.a. ne peuvent pas être indépendantes car U est p.s. plus grande que V. Ainsi,

$$\mathbb{P}(U\geq 2, V\leq 1)=0$$

alors que

$$\mathbb{P}(U\geq 2)\,\mathbb{P}(V\leq 1)\neq 0$$

Et donc,

$$\mathbb{P}(U\geq 2, V\leq 1)\neq\mathbb{P}(U\geq 2)\,\mathbb{P}(V\leq 1),$$

ce qui signifie que les deux v.a. ne sont pas indépendantes.

Exercice 23. Soit X et Y deux v.a indépendantes telles que $\mathbb{E}[X^2+Y^2]<+\infty$.

(1) Montrer que $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$ existent.

(2) Montrer que $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$.

(3) Donner un contre exemple à l'égalité ci-dessus lorsque X and Y ne sont pas indépendantes.

*** Exercice 24.** Énoncer et démontrer le second lemme de Borel-Cantelli pour des événements indépendants.

Théorème. *Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements indépendants d'un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.*

$$\textit{Si}\quad\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n)=+\infty\qquad\textit{alors}\qquad\mathbb{P}(\limsup_n A_n)=1.$$

Démonstration. Rappelons que

$$\left(\limsup_n A_n\right)^c=\bigcup_{n\geq 0}\bigcap_{k\geq n}A_k^c.$$

On note $B_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^c$. Comme $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, on sait que

$$\lim_n\mathbb{P}(B_n)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 0}B_n\right).$$

Posons maintenant pour $N\geq n$,

$$B_{n,N}=\bigcap_{k=n}^{N}A_k^c,$$

la suite $(B_{n,N})_{N\geq n}$ est décroissante et $\bigcap_{N\geq n}B_{n,N}=B_n$, d'où, $\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(B_{n,N})=\mathbb{P}(B_n)$. Finalement, grâce à l'indépendance des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\forall n\leq N,\quad\mathbb{P}(B_{n,N})=\prod_{k=n}^{N}\mathbb{P}(A_k^c)=e^{\sum_{k=n}^{N}\ln(1-\mathbb{P}(A_k))}\leq e^{-\sum_{k=n}^{N}\mathbb{P}(A_k)}\to_{N\to\infty}0.$$

On a donc montré que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 0}\bigcap_{k\geq n} A_k^c\right) = 0$$

et donc, par passage au complémentaire,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right) = 1.$$

□

6. Variables aléatoires discrètes

Exercice 25. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0,1[$.

(1) On définit le temps de premier succès : $T = \inf\{n \geq 1,\ X_n = 1\}$. Donner la loi de T.

La variable T suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

(2) Pour $n \geq 1$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Donner la loi de S_n.

La variable S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Exercice 26. Calculer, quand elles existent, l'espérance et la variance de la variable X dans chacun des cas suivants :

(1) X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

On rappelle qu'une variable X suit la loi $\mathcal{B}(p)$ si X prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[X] = 0\cdot\mathbb{P}(X=0) + 1\cdot\mathbb{P}(X=1) = 0(1-p) + 1\cdot p = p$$

et

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = 0^2\cdot\mathbb{P}(X=0) + 1^2\cdot\mathbb{P}(X=1)\,p$$

Donc

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

(2) X suit la loi binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$.

Soit $X_1,\ldots,X_n$ n v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1,p)$. On sait que X a même loi que $\sum_{i=1}^n X_i$. AInsi

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^n p = np.$$

et comme les v.a. sont indépendantes,

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[X_i] = \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p).$$

(3) X suit la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$.

Une v.a. X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ si X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} np(1-p)^{n-1}$$

Considérons la fonction

$$f : \left\{\begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & 1/(1-x) \end{array}\right.$$

Cette fonction est développable en série entière :

$$\forall x\in [0,1[,\quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n.$$

Comme son rayon de convergence est 1, la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$ et f' est la série des dérivées terme à terme :

$$\forall x\in [0,1[,\quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} nx^{n-1}.$$

On remarque alors

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\mathbb{P}(X=n) = pf'(1-p) = \frac{p}{1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

Par le même type d'arguments, on montre que $\mathbb{V}[X] = \frac{1-p}{p^2}$.

(4) X suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha > 0$.

Une v.a. X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$ si X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}.$$

(On rappelle le DSE de la fonction exponentielle : $e^\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha^n}{n!}$) L'espérance de X s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(X=n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} ne^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{(n-1)!}\\ &= \alpha e^{-\alpha}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

Le DSE de l'exponentielle nous dit donc que

$$\mathbb{E}[X] = \alpha e^{-\alpha}e^{\alpha} = \alpha.$$

Par le même type d'arguments, on montre que $\mathbb{V}[X] = \alpha$.

(5) X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}$.

La v.a. X est à valeurs positives, l'espérance de X est donc bien définie (finie ou égale à $+\infty$) et :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\frac{6}{\pi^2 n^2} = \frac{6}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}.$$

On sait que la série harmonique $\sum 1/n$ diverge vers $+\infty$, donc $\mathbb{E}[X] = +\infty$.

Exercice 27. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ telles que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(Y=n) = 2^{-n}$.

(1) Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

(2) Calculer les probabilités suivantes :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(\min(X,Y)\le n),\quad \mathbb{P}(Y=X),\quad \mathbb{P}(Y>X)\quad \text{et}\quad \mathbb{P}(X>nY)\ .$$

Exercice 28. On considère que le nombre N d'œufs pondus par un insecte donné suit une loi de Poisson de paramètre α et que la probabilité qu'un œuf donne une larve est p. On note L le nombre de larves. Les développements des œufs sont supposés indépendants. Donner la loi de L.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ indépendante de N. D'après l'énoncé, L a même loi que $\sum_{i=1}^N X_i$ (avec la convention que $\sum_{i=1}^0 = 0$), la variable X_i indique si le i^e oeuf pondu donne une larve ou non. Il est alors immédiat que L prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Il reste pour connaître la loi à calculer pour tout $k\in\mathbb{N}$. d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L=k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^N X_i = k\right) &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right)\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^n X_i$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L=k) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{(\alpha p)^k e^{-\alpha}}{k!}\sum_{n\geq k}\frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!}(1-p)^{n-k} \\
&\underset{m=n-k}{=} \frac{(\alpha p)^k e^{-\alpha}}{k!}\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{\alpha^m}{m!}(1-p)^m \\
&= \frac{(\alpha p)^k e^{-\alpha}}{k!}e^{-\alpha(1-p)} = \frac{(\alpha p)^k e^{-\alpha p}}{k!}.
\end{aligned}$$

Ainsi, L suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha p)$.

7. Variables aléatoires à densité

Exercice 29. Pour tous réels a et c, on définit la fonction p par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ p(x) = cx^{a-1}\mathbf{1}_{]0,1[}(x).$$

(1) À quelles conditions sur a et c, la fonction p est-elle une densité de probabilité ?

La fonction p est une densité de probabilité ssi :

- $p \geq 0$ soit $c \geq 0$
- p est intégrable d'intégrale 1. Or,

$$\int_{\mathbb{R}} p(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 cx^{a-1}\,\mathrm{d}\,x.$$

Cette intégrale est finie ssi $a > 0$. Dans ce cas, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} p(x)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{c}{a}x^a\right]_0^1 = \frac{c}{a}.$$

La fonction est donc une densité de probabilité ssi $a = c > 0$ soit

$$\forall x\in\mathbb{R},\ p(x) = ax^{a-1}\mathbf{1}_{]0,1[}(x).$$

(2) On suppose que p vérifie les conditions de la question précédente et on se donne une variable aléatoire X ayant pour densité p. Calculer la loi de $Y = -a\ln X$, puis $\mathbb{E}[Y]$.

On utilise, là encore, la méthode de la fonction muette. Sot f une fonction continue, bornée sur $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}[f(-a\ln X)] = \int_0^1 f(-a\ln x)ax^{a-1}\,\mathrm{d}\,x.$$

En effectuant le changement de variables $y = -a\ln x$, on obtient :

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_0^\infty f(y)\left(e^{-y/a}\right)^a\mathrm{d}\,y = \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-y}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y)\,\mathrm{d}\,y.$$

Cela montre que Y suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ et donc $\mathbb{E}[Y] = 1$.

Exercice 30. Calculer, quand elles existent, l'espérance et la variance de la variable X dans chacun des cas suivants :

(1) X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$. Donner sa fonction de répartition.
(2) X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Donner sa fonction de répartition.
(3) X suit la loi gaussienne (ou loi normale) $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ où $\mu\in\mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$.
(4) X suit la loi de Cauchy de paramètres x_0 et a. Donner sa fonction de répartition. On rappelle que cette loi a pour densité de probabilité :

$$\frac{1}{\pi a\left[1+\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2\right]}.$$

Exercice 31. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Donner la loi de $\min(X,Y)$ lorsque X et Y suivent respectivement la loi $\mathcal{E}(\lambda_X)$ et la loi $\mathcal{E}(\lambda_Y)$.

Notons $Z = \min(X,Y)$. La fonction de répartition de Z s'écrit, par indépendance de X et de Y :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ F_Z(t) &= \mathbb{P}(\min(X,Y) \le t) = 1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) > t)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X > t, Y > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t)\\ &= 1 - (e^{-\lambda_X t} \wedge 1)(e^{-\lambda_Y t} \wedge 1) = 1 - e^{-(\lambda_X + \lambda_Y)t} \wedge 1.\end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda_X + \lambda_Y)$. La v.a. Z suit donc cette loi.

Exercice 32. Soit U et V deux v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Quelle est la loi de $\max(U,V)$? Quelle est la loi du couple $(\min(U,V), \max(U,V))$?

Notons $(X,Y) = (\min(U,V), \max(U,V))$. On peut directement étuider la loi du couple en utilisant la méthode de la fonction muette. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue, bornée. On a, connaissant la loi du couple (U,V),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(X,Y)] = \mathbb{E}[\phi(\min(U,V), \max(U,V))] &= \int_0^1 \int_0^1 \phi(\min(u,v), \max(u,v))\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v\\ &= \int_0^1 \int_0^1 \phi(\min(u,v), \max(u,v))(\mathbf{1}_{u\le v} + \mathbf{1}_{u>v})\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v\\ &= \int_0^1 \int_0^1 \phi(u,v)\mathbf{1}_{u\le v}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v + \int_0^1 \int_0^1 \phi(v,u))\mathbf{1}_{u>v}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v\\ &= \int_0^1 \int_0^1 \phi(x,y)\mathbf{1}_{x\le y}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \int_0^1 \int_0^1 \phi(x,y)\mathbf{1}_{y>x}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_0^1 \int_0^1 \phi(x,y) \times 2\mathbf{1}_{x\le y}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\end{aligned}$$

On obtient la dernière ligne avec le théorème de Fubini et en remarquant que la fonction $\mathbf{1}_{x=y}$ est presque partout nulle. Ce résultat montre que le couple X admet pour densité la fonction $f_{(X,Y)}(x,y) = 2\mathbf{1}_{0\le x\le y\le 1}$.

On peut alors récupérer la densité f_Y de la v.a. $Y = \max(U,V)$ en intégrant la densité par rapport à la variable x :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}\,x = 2\mathbf{1}_{[0,1]}(y) \int_0^y \mathrm{d}\,x = 2y\mathbf{1}_{[0,1]}(y).$$

Exercice 33. Soit X, Y deux v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $X - Y$ et $X + Y$ sont indépendantes.

Exercice 34. *Autour de la loi* Γ.
On dit que X suit une loi $\Gamma(\lambda, a)$ avec $\lambda > 0$ et $a > 0$, si la mesure image P_X admet pour densité

$$p_X(x) = \lambda^a \exp(-\lambda x) x^{a-1} \mathbf{1}_{\{x>0\}}/\Gamma(a), \quad \text{où} \quad \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} \exp(-x) x^{a-1} dx\ .$$

(1) Vérifier que les lois exponentielles sont des lois Γ.
(2) Si Y suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, montrer que Y^2 suit une loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
(3) Calculer l'espérance d'une v.a. X de loi $\Gamma(\lambda, a)$.