Feuilles d'exercices d'Optimisation

Alexandre Marino

1 Existence et Unicité

1.1 "semi-continuité inférieure"

La semi-continuité inférieure s'exprime d'une manière analytique ou géométrique comme suit :

1. En tout point $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\liminf_{x' \to x} f(x') \geq f(x)$.
   (inégalité dans $R \cup \{+\infty\}$).
2. Pout tout $\alpha \in \mathbb{R}$, "la coupe à hauteur α" $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq \alpha\}$ est fermé.
3. L'épigraphe de f, c'est à dire "ce qui est au dessus du graphe de f " : $\{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, f(x) \leq r\}$ est fermé.

Exercice 1. Vérifier l'équivalence des trois définitions précédentes.

Exercice 2. Montrer les propriétés suivantes

1. La fonction caractéristique d'un ouvert (resp fermé) est semi-continue inférieurement (resp supérieurement).
2. Une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$ est continue si et seulement si elle est à la fois semi-continue inférieurement et supérieurement.
3. La borne *sup* d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement.

1.2 "0- coercivité "

Exercice 3. Montrer que si f est continue 0-coercive ($\lim_{x \in K, \|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$) alors l'image réciproque d'un compact est un compact.

Exercice 4. Existence d'un minimum :
On considère le problème :

$$\min_{x \in K} f(x) \tag{1.1}$$

Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.1. *On suppose dans le problème (1.1) que :*

1. *K est fermé et il existe un point de K en lequel f est finie.*
2. *f est semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}^n$.*
3. *$\lim_{x \in K, \|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. ($f$ 0-coercive)*

Alors f est bornée inférieurement sur K et il existe $\hat{x} \in K$ tel que $f(\hat{x}) = \inf_{x \in K} f(x)$.

1.3 "Théorème de Weierstrass et convexité"

Exercice 5. Une fonction $f : O \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe sur un ouvert convexe O y est continue.

Exercice 6. Soit f une fonction convexe et K un ensemble convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$. Alors le problème (1.1) admet au moins une solution si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1. $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$
2. K est borné.

Sous ces hypothèses, montrer que l'ensemble des solutions optimales du problème (1.1) est un ensemble convexe et borné. Montrer que le problème (1.1) admet une unique solution si la fonction f est strictement convexe.

1.4 Applications

Exercice 7. Soit K fermé de $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : x \to \|a - x\|$ alors il existe $\hat{x}$ tel que $\|a - \hat{x}\| \leq \|a - x\|$.

Exercice 8. $f : x \in \mathbb{R}^n \to f(x) := \frac{1}{2} < Ax, x > + < b, x > +c$.
Avec A symétrique définie positive. Pour tout fermée K de $\mathbb{R}^n$, il existe alors un unique $\bar{x} \in K$ minimisant f sur K.

2 Condition de minimalité

2.1 Condition de minima local du premier ordre

Exercice 9. Soit $f : O \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (O ouvert de $\mathbb{R}^n$), Si $\bar{x}$ est un minimum local (ou maximum) de f et si f est différentiable en $\bar{x}$, alors :

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

Caractérisation de la convexité en termes du gradient :

Dans le cas où la fonction f n'est supposée qu'une fois différentiable, on a le résultat suivant :

Exercice 10. Soit $f : K \subset \mathbb{R}^n \to R$ une fonction une fois différentiable, alors f est convexe si et seulement si $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y-x)$ $\forall x, y \in K^2, x \neq y$

On voit bien l'interprétation géométrique de ce dernier resultat quand $n = 1$: le graphe d'une fonction convexe f se trouve toujours au-dessus de la tangente en un point donné.

Exercice 11. Montrer les résultats suivants

1. Soit $\bar{x}$ un point tq $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, $\bar{x}$ est un minimum local strict de la fonction $x \to f(x) + \epsilon\|x - \bar{x}\|$.
2. Soit $f : O \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe et différentiable sur l'ouvert convexe O. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
   - $\bar{x}$ est un minimum (global) de f sur O.
   - $\bar{x}$ est minimum local de f.
   - $\bar{x}$ est tq $\nabla f(\bar{x}) = 0$
3. **Exemple :** $f : x \in \mathbb{R}^n \to f(x) := \frac{1}{2} < Ax, x > + < b, x > +c$.

En l'absence de convexité

Exercice 12. Soit $\bar{x} \in O$ un point en lequel f est continue et supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de $\bar{x}$ tel que :

1. f est différentiable sur $V \backslash \{\bar{x}\}$
2. $< \nabla f(x), x - \bar{x} > \geq 0$ (resp. > 0) pour tout $x \in V \backslash \{\bar{x}\}$.

Alors $\bar{x}$ est un minimum local (resp. minimum local strict) de f.

Exercice 13. Applications :

1. $f(x_1, x_2) := x_1^{2/3} + x_2^{4/5} + 1$
2. $f(x_1, x_2) := (x_1 - x_2)^4 + (x_1 - 1)^4 + 10$, on remarque que le second ordre ne suffit pas.

2.2 Condition de minimalité global du premier ordre

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction-objectif différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Alors $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si :

1. $\nabla f(\bar{x}) = 0$
2. $(conv f)(\bar{x}) = f(\bar{x})$.

2.3 Condition de minimalité du second ordre

Exercice 15. Si $\bar{x}$ est un minimum local de f et si f est deux fois différentiable en $\bar{x}$, alors : $\nabla f(\bar{x}) = 0$, et $\nabla^2 f(\bar{x})$ semi-définie positive.

Exercice 16. Si $\bar{x}$ est un minimum local de f et si f est deux fois différentiable en $\bar{x}$, et si : $\nabla f(\bar{x}) = 0$, et $\nabla^2 f(\bar{x})$ définie positive, alors :
$\bar{x}$ est un minimum local strict de f.

Remarque 2.1. *Attention il n'y a pas équivalence.*

Exercice 17. Montrer que pour $f(x_1, x_2) := 3x_1^4 - 4x_1^2 x_2 + x_2^2$ $(0,0)$ est un point critique semi-définie positif qui n'est pas un extremum local.

2.4 Convexité et Différentiabilité

Exercice 18. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2 fois continûment dérivable sur K convexe alors f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in K$ et strictement convexe si et seulement si $f''(x) > 0$ $\forall x \in K$ (sauf éventuellement en des points isolés).

Ce résultat se généralise pour $n > 1$:
le résultat suivant fait le lien entre le hessien et la propriété de convexité :

Exercice 19. Soit $f : K \subset \mathbb{R}^n \to R$ une fonction deux fois différentiable, alors f est convexe si et seulement si $\nabla^2 f(x) \geq 0$ $\forall x \in K$, et strictement convexe si et seulement si $\nabla^2 f(x) > 0$ $\forall x \in K$.

2.5 Exercices

Exercice 20. Soit K un ensemble convexe fermé. On considère la fonction :

$$p(x) := \frac{1}{2}\|x - Px\|^2$$

Où P désigne le projecteur sur K. Montrer que cette fonction est dérivable et calculer son gradient. En déduire que p est convexe.

Exercice 21. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) := \frac{1}{4}x^4 - xy + y^2$$

1. Montrer que f est 0- coercive. En déduire l'existence d'un minimum global.
2. Calculer le gradient en tout point. Determiner les points critiques.
3. En déduire le minimum global de f.

Exercice 22. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) := x^2y - xln(y) + z(z-1)(z+1)^2$$

Calculer le gradient et la matrice hessienne de f aux points $A = (1/e^2, e^2, -1)$ et $B = (0, 1, -1)$. Vérifier si A et B sont des extrema locaux de f.

Exercice 23. Chercher les extrema globaux de $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sous la contrainte $x+y+z = 1$ en se ramenant à un problème d'optimisation sans contrainte dans $\mathbb{R}^2$. Faites une interprétation géométrique.

Exercice 24. Chercher les extrema globaux de $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sous la contrainte $x + y^2 = 1$ en se ramenant à un problème d'optimisation sans contrainte dans $\mathbb{R}^2$. Faites une interprétation géométrique.

Exercice 25. Chercher les extrema globaux de $f(x,y,z) = 5x^2 + y^2 - 2xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ en se ramenant à un problème d'optimisation sans contrainte dans $\mathbb{R}^2$. Faites une interprétation géométrique.

Exercice 26. On considère la fonction J_p définie dans $\mathbb{R}^3$ (p étant un paramètre réel).

$$J_p(x,y,z) := x^4 + y^4 + z^4 - p(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

1. Démontrer que la fonction J_p est coercive.
   En déduire que la proposition (P) suivante est vraie :Il existe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, J_p(x_0,y_0,z_0) \leq J_p(x,y,z)$.
2. On s'interesse aux points critiques de J_p. Montrer qu'il existe une valeur p_0 telle que :
   (a) Pour $p \leq p_0$, J_p admet un seul point critique.
   (b) Pour $p > p_0$, J_p admet 27 points critiques.

   On précisera la valeur de p ainsi que celle des 27 points critiques.

3. Trouver les minima globaux de J_p lorsque $p \leq p_0$
4. On suppose maintenant $p > p_0$
   Calculer le Hessien de J_p et étudier la nature des points critiques. En déduire que la fonction J_p admet 8 minima globaux que l'on précisera.

Exercice 27. Soit A une matrice symétrique définie positive de taille $n \times n$. On considère la fonction J_y (paramètre $y \in \mathbb{R}^n$) définie dans $\mathbb{R}^n$ par

$$J_y(x) :=< x, y > -\frac{1}{2} < Ax, x >$$

1. Calculer le maximum de J_y sur $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$2 < x, y > \leq < Ax, x > + < By, y >$$

Exercice 28. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 12xy$

1. Vérifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que l'ensemble $\Omega = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, xy > 1\}$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$.
3. Vérifier que f est strictement convexe sur Ω.
4. Vérifier que f est coercive.
5. Déterminer les minima globaux de f.
6. f est-convexe sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 29. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2 + sup(x, 1)$$

1. Vérifier qu'il existe un réel strictement positif α tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) \geq 1 + \alpha(x^2 + y^2)$$

2. En déduire que f est coercive.
3. Vérifier que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
4. En déduire que f admet un minimum global unique sur $\mathbb{R}^2$.
5. Soit l'ensemble $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 1\}$
   Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
6. Montrer que f est dérivable sur Ω.
7. Calculer le gradient de f sur Ω.
8. Trouver les points critiques de f sur Ω.
9. Trouver le minimum global de f sur R^2.
10. Montrer que f n'est pas dérivable au point $(1, t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3 Cônes tangent et normal

3.1 Notion de Cône tangent

Définition :
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in K$. Alors le cône tangent à K en a est :

$$T(K,a) := \{y \in \mathbb{R}^n, \exists x_k \in K, \exists \lambda_k > 0, k \in \mathbb{N} \ \ tel \ \ que : \ \ x_k \to a \ \ et \ \lambda_k(x_k - a) \to y\}$$

Propriétés :

1. Montrer que

   $$T(K,a) := \{d \in \mathbb{R}^n, \exists d_k \to d, \exists t_k > 0 \to 0, \ \ telles \ \ que : \ \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \ a + t_k d_k \in K\}$$

2. $T(K,a)$ est un cône contenant l'origine.
3. Si $a \in K_1 \subset K_2$, alors $T(K_1,a) \subset T(K_2,a)$.
4. $T(\bigcup_{i=1}^{k} K_i, a) = \bigcup_{i=1}^{k} T(K_i, a)$ avec $K_i \subset K_{i+1}$.
5. Si d_K désigne la fonction-distance à K,

   $$d \in T(K,a) \Longleftrightarrow liminf_{t \to 0^+} d_K(a+td)/t = 0$$

6. Pour tout $r > 0$, $K \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in K$ on a :

   $$T(K,a) = T(K \bigcap B(a,r), a)$$

   Où $B(a,r)$ est la boule de centre a et de rayon r.
7. Si a est dans K ouvert, alors $T(K,a) = \mathbb{R}^n$.
8. Si a est dans l'intérieur de K, alors $T(K,a) = \mathbb{R}^n$.
9. $T(K,a)$ est fermé.
10. Soit K cône, K est convexe si et seulement si $K + K \subset K$.
11. Si K est convexe fermé, alors pour tout $a \in K$, on a :

    $$\bar{K} - a \subset T(K,a)$$

    De plus, $T(K,a)$ est convexe, fermé (c'est l'enveloppe cônique fermé de $K - a$).

3.2 Exercices :

Exercice 30. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^p$, de classe C^∞. On note :

$$Graph(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, y = f(x)\}$$

et $Jac(f, x)$ le jacobien de f au point x représenté par la matrice des dérivés partielles.
Montrer que :

$$T(Graph(f), (x, y)) = Graph(Jac(f, x))$$

Exercice 31. En reprenant l'énoncé de l'exercice précédent avec $p = 1$, on note $Epigraph(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/y \geq f(x)\}$.
Montrer que :

$$T(Epigraph(f), (x, f(x))) = Epigraph(Jac(f, x))$$

(On rappelle que $Epigraph(Jac(f, x)) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/v \geq \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)u_i\}$
Retrouver la propriété suivante : si f est de classe C^∞, si $\bar{x}$ est un minimum de f, alors $Jac(f, \bar{x})$ est nul.)

Exercice 32. Considérons l'application $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$. Vérifier qu'en tout point, le cône tangent au graphe de f est le translaté passant par l'origine du plan tangent usuel.

Exercice 33. Calculer le cône tangent du graphe de l'application $f(x_1, x_2) := |x_1| + |x_2|$ en $(0, 0)$ et calculer le cône normal.
$(N(K, a) := \{w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, < w, v > \leq 0, \forall v \in T(K, a)\})$.

Exercice 34. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble K défini par

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, x + y + z \leq 2\}$$

Calculez le cône tangent à K au point $(1, 0, 1)$.

Motivation :

Exercice 35. Si $\bar{x} \in O \bigcap K$ est un minimum local de f sur K et si f différentiable en $\bar{x}$, alors pour tout $d \in T(K, \bar{x})$:

$$< \nabla f(\bar{x}), d > \geq 0$$

Exercice 36. Montrer que l'on retrouve la condition nécessaire de minimalité du premier ordre si K est un ouvert.

Définition :
Si K est un cône, on appelle cône polaire de K l'ensemble suivant :

$$K^o := \{s \in \mathbb{R}^n / < s, d > \leq 0, \ \forall d \in K\}$$

Définition :
On appelle cône normal de K en a, l'ensemble suivant :

$$N(K, a) := (T(K, a))^o$$

Exercice 37. K^o est un cône convexe fermé ayant les propriétés suivantes :

1. $(K_1 \subset K_2) \Rightarrow (K_2^o \subset K_1^o)$.
2. Si K est un convexe fermé, $K^{oo} = K$.
3. Si H est un sous espace vectoriel, alors $H^o = H^\perp$.

Exercice 38. Si K est le cône convexe engendré par les v_i, c'est à dire

$$K = \{\sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j / \mu_j \geq 0, \ \forall j\}$$

Alors K est fermé et

$$K^o = \{s / < s, v_j > \leq 0, \ \forall j\}$$

Exercice 39. Si

$$K = \{d / < d, a_i >= 0, \ < d, s_j > \leq 0, \ \forall j, i\}$$

Alors

$$K = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j s_j / \mu_j \geq 0, \ \forall j\}$$

=(sous-espace vectoriel engendré par les a_i)+(cône convexe engendré par les s_j)

Exercice 40. Determiner et représenter les cônes tangents et normaux en $(0, 0)$ et $(1, 1)$ des ensembles

1. $K_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leq 1\}$
2. $K_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \max(|x|, |y|) \leq 1\}$
3. $K_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, y \leq (1 - x)^3\}$

4 Introduction à l'optimisation

4.1 Dans le linéaire :

Un cas très simple : fonction linéaire et contraintes linéaires.
Résolution avec l'algorithme du simplex.

4.2 Dans le convexe

Dans cette section on suppose que K est convexe.

Exercice 41. $T(K,a)$ est exactement l'adhérence du cône engendré par $K-a$:

$$T(K,a) = \overline{\mathbb{R}^+(K-a)}$$

Exercice 42. Une direction s est dans $[T(K,a)]^o$ si et seulement si, pour tout $x \in K$:

$$< s, x-a > \leq 0$$

(s fait un angle optus avec toute direction rentrant dans K à partir de a)

Exercice 43. Supposons f convexe et différentiable sur l'ouvert O à valeur dans $\mathbb{R}$, et K convexe. Alors les minima de f sur $O \bigcap K$ sont exactement les $\bar{x} \in K$ pour lesquels $-\nabla f(\bar{x}) \in N(K,\bar{x})$.

4.3 Introduction dans le différentiable :

Sans aucune hypothèse on cherche une expression du premier ordre pour le cône tangent.
Avec $K := \{x \in \mathbb{R}^n / h_i(x) = 0,\ \forall i \in [1,\ldots,m],\ g_j(x) \leq 0,\ \forall j \in [1,\ldots,p]\}$.
Où les fonctions h_i et g_j sont C^1.
On pose $J(\bar{x})$ le sous ensemble de $[1,\ldots,p]$ tq $g_j(\bar{x}) = 0$.

Exercice 44. Soit $\bar{x} \in K$. Alors :

1. $T(K,\bar{x}) \subset \{d / < \nabla h_i(\bar{x}), d >= 0,\ \forall i = 1,\ldots,m,\ ;< \nabla g_j(\bar{x}), d > \leq 0,\ \forall i \in J(\bar{x})\}$
2. $[T(K,\bar{x})]^o \supset$ (sous espace vectoriel engendré par les $\nabla h_i(\bar{x})$)+(cône convexe engendré par les $\nabla g_j(\bar{x})$, $j \in J(\bar{x})$)

5 Optimisation sous contraintes d'égalité

On suppose les fonctions h_i de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
Dans la suite nous posons $K := \{x/h_i(x) = 0, \ \forall i = 1, \dots, m\}$.

5.1 Calcul du cône tangent

On pose $A(\bar{x}) := \{d \in \mathbb{R}^n / < \nabla h_i(\bar{x}), d >= 0, \ \forall i = 1, \dots, m\}$.

Exercice 45. On n'a pas toujours $T(K, a) = A(a)$
On pose $K := \{x \in \mathbb{R}^2 / x_2 - x_1^2 - 1 = 0, \ x_2 + x_1^2 - 1 = 0\}$ Donnez le cône tangent aux point de K. Montrer que l'on a pas l'égalité. Pourquoi ?

Exercice 46. Si les h_i sont C^1 au voisinage de a dans K, et si les $\nabla h_i(a)$ sont linéairements indépendants, alors on a toujours :

$$T(K, a) = A(a)$$

Donc

$$T(K, a)^o = vect(\nabla h_i(a))$$

Ce théorème permet de donner des conditions suffisantes de minimalité appelées les conditions de Lagrange.
On dit qu'un point a est Lagrange- qualifié (L-Q) si les h_i vérifient les hypothèses du théorème en ce point.

Exercice 47. Si $\bar{x} \in O \bigcap K$ est un minimum de f sur K et si les vecteurs $\nabla h_i(\bar{x})$ sont linéairement indépendants, il existe alors

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$$

tel que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0$$

(ce sont les conditions de Lagrange)

Définition 5.1. *On appelle système de Lagrange (S-L), le système d'équations obtenu en juxtaposant les conditions de Lagrange et les contraintes.*

Exercice 48.
1. Si x est solution du problème initial et (L-Q) alors il existe λ tq (x, λ) solution du problème (S-L).
2. Si x est solution du problème initial alors :
   ou bien, il existe λ tq (x, λ) solution du problème (S-L).
   ou bien, x n'est pas qualifié.

5.2 Exemples :

Exercice 49. Minimiser $f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to f(x_1, x_2) := x_1 + x_2^2$ sous la contrainte $h(x_1, x_2) = 0$, avec $h(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2$.

Attention un minimum local d'un problème de minimisation avec contraintes est un point critique du Lagrangien correspondant. Mais pas forcement un minimum. Il n'y a pas de réciproque.
($f(x) = x^3$ sous la contrainte $h(x) = x + 1$)

5.3 Exercices

Exercice 50. Soit K un sous espace affine de $\mathbb{R}^n$ de la forme $K = u_0 + P$, où P est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit J une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si u est un point de minimum de J sur K alors

$$< \nabla J(u), w >= 0, \forall w \in P$$

2. On suppose que $P = \{v \in \mathbb{R}^n, < a_i, v >= 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$ où les a_i sont données dans $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que

$$P^{\perp} = \{w/w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}^n\}$$

   (b) Montrer que la condition nécessaire du (1) s'écrit

$$u \in K,\ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n,\ tq\ \nabla J(u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$$

Exercice 51. Etudier le problème suivant :
Etant donné Q symétrique défini positive, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang m $(m \leq n)$ et $b \in \mathbb{R}^m$,
On considère le problème de minimisation avec $K = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\}$:

$$\min f(x) := \frac{1}{2} < Qx, x > + < c, x >$$

Exercice 52. Soit $q \geq p > 1$. Donner la valeur maximale de $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q = 1$.

Exercice 53. Soit la fonction $f(x) = 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_1x_2$ et les deux contraintes d'égalité suivante : $h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 25 = 0,\ h_2(x) = 8x_1 + 14x_2 - 56 = 0$
Trouver le minimum de ce problème d'optimisation avec contraintes. Calculer les valeurs des contraintes au minimum. Calculer les valeurs des multiplicateurs de Lagrange et du Lagrangien au minimum.

Remarque :

On rappelle dans la feuille d'exo précedente on a vu que dans le cas convexe les conditions de Lagrange sont suffisantes.

6 Optimisation sous contraintes d'inégalités et d'égalités

6.1 Rappels de cours

6.1.1 Conditions nécessaires du premier ordre : contraintes sous forme d'inégalités :

On pose $K := \{x \in \mathbb{R}^n, g_1(x) \leq 0, \ldots, g_p(x) \leq 0\}$ et $J(x) := \{j, g_j(x) = 0\}$.

Théorème 6.1. *Si $x \in O \bigcap K$ est un minimum local de f sur K, il existe $\mu_0, \ldots, \mu_p$ non tous nuls tels que :*

1. $\mu_0 \nabla f(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla g_j(x) = 0$
2. $\mu_j \geq 0$ *pour tout* $j = 0, \ldots, p$
3. $\mu_j g_j(x) = 0$ *pour tout* $j = 1, \ldots, p$

Si l'on impose la condition supplémentaire suivante :

$(QC)_x$ *Il existe d_0 tel que* $< \nabla g_j(x), d_0 >< 0$ *pour tout* $j \in J(x)$,

On est alors assuré d'avoir $\mu_0 > 0$, et on peut réécrire (1) :
(1)' $\nabla f(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla g_j(x) = 0$

Proposition 6.2. $(QC)_x \Leftrightarrow$ *(il n'existe pas de vecteur non nul $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p) \in (\mathbb{R}^+)^p$ tel que $\sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla g_j(x) = 0$).*

6.1.2 Conditions nécessaires du premier ordre : contraintes sous forme d'inégalités et d'égalités :

On pose $K := \{x \in \mathbb{R}^n, g_1(x) \leq 0, \ldots, g_p(x) \leq 0, h_1(x) = 0, \ldots, h_m(x) = 0\}$ et $J(x) := \{j, g_j(x) = 0\}$.

Théorème 6.3. *Si $x \in O \bigcap K$ est un minimum local de f sur K, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_0, \ldots, \mu_p$ non tous nuls tels que :*

1. $\mu_0 \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla g_j(x) = 0$
2. $\mu_i \geq 0$ *pour tout* $j = 0, \ldots, p$
3. $\mu_j g_j(x) = 0$ *pour tout* $j = 1, \ldots, p$

Si l'on impose la condition supplémentaire suivante :

$$(QC)_x \begin{cases} \textit{Il existe } d_0 \textit{ tel que } < \nabla g_j(x), d_0 >< 0 \textit{ pour tout } j \in J(x), & ; \\ \textit{et } < \nabla h_i(x), d_0 >= 0 \textit{ pour tout } i \ , & ; \\ \textit{Les vecteurs } \nabla h_i(x) \textit{ sont linéairement indépendants,} & . \end{cases}$$

On est alors assuré d'avoir :

(1)' $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla g_j(x) = 0$

Proposition 6.4. $(QC)_x \Leftarrow (QC)'_x$ *(Les vecteurs* $\nabla h_1(x), \ldots, \nabla h_m(x), \nabla g_i(x)$ $j \in J(x)$ *sont linéairement indépendants.)*

Conclusion :

Théorème 6.5. *Sous l'hypothèse* $(QC)_x$ *on a bien*

$T(K,x) = \{d / < \nabla h_i(x), d >= 0,\ \forall i = 1, \ldots, m,\ ; < \nabla g_j(x), d > \leq 0,\ \forall i \in J(x)\}$

et donc

$$\begin{aligned} N(K,x) \quad = \quad & \text{(sous espace vectoriel engendré par les } \nabla h_i(x)\text{)} \\ & +\text{(cône convexe engendré par les } \nabla g_j(x),\ j \in J(x)\ \text{)} \end{aligned}$$

6.2 Exercices :

Exercice 54. Etudier la famille de fonctions $f_m(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - m)^2 - m^2$ sur $X = \{x \in \mathbb{R}, x_2 \leq x_1^2\}$ où $m > 0$.

Exercice 55. Soit A une matrice $n \times n$ symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$ non nul.
Montrer que les problèmes :

$$\sup_{<Ax,x> \leq 1} < b, x >$$

et

$$\sup_{<Ax,x> = 1} < b, x >$$

sont équivalent et qu'ils ont une solution.
Déterminer cette solution et montrer qu'elle est unique.

Exercice 56. Soit Q une matrice $n \times n$ symétrique dont la plus petite valeur propre λ_{min} est supposée strictement négative.
Montrer que le problème (P) :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} < Qx, x >$$

Alors λ_{min} est la valeur minimale dans (P) et les solutions de (P) sont les vecteurs propres unitaires de Q associé à λ_{min}.

Exercice 57. On pose $K := \{x \in \mathbb{R}^n, x_i \geq 0, \forall i, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$
Regarder la qualification des points de K.

Remarque 6.6. *On rappelle le résultat de la feuille 4 : pour des contraintes linéaires, tous les points sont qualifiés.*

Exercice 58. Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 \leq 0\}$

1. ...tudier la qualification des points de C.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) := 4(x - \frac{3}{2})^4 + y^2 + 3$. On considère le problème suivant (p) :

$$\min_{x^2 - y^2 \leq 0} f(x, y)$$

   (a) Montrez que (P) admet une solution.
   (b) Montrez que les points intérieurs de C ne peuvent être solution de (P).
   (c) Résolvez (P).

Exercice 59. On considère le problème suivant :
Trouver les extrema de la fonction

$$\min_{(x,y) \in K} x$$

où K est défini par les contraintes d'inégalités suivantes :

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0, -y \leq 0, y \leq (1 + x)^3\}$$

1. Résoudre graphiquement ce problème.
2. Le résoudre par la méthode de Kuhn-Tucker.

Exercice 60. Résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min & (xy - x^2 - y^2) \\ 5 - 2x - y \leq 0 & \\ 3 - y \leq 0 & \end{cases}$$

Exercice 61. Résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min & (-x^2 + y) \\ -x^2 - y^2 + 1 \leq 0 & \\ y - 1 \leq 0 & \end{cases}$$

Exercice 62. Résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min & (x^2+2y^2) \\ x^2+y^2-1 \leq 0 & \\ -x+2y-1 \leq 0 & \\ x+2y-1 \leq 0 & \end{cases}$$

Exercice 63. Résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \max & (x-2y) \\ x+y-1 \leq 0 & \\ x \geq 0 & \\ y \geq 0 & \end{cases}$$

7 Méthode de résolution

7.1 Résolution à l'aide des conditions nécessaires et suffisantes de Lagrange

Lorsque tout les points sont qualifiés et les ensembles convexes. Nous avons une condition suffisante : il suffit de résoudre le (S-L).

Mais même lorsqu'il n'y a pas équivalence, on peut utiliser le système de Lagrange (S-L) pour résoudre le problème initial (P).
avec (P) de la forme :

$$\min_{x \in K} f(x)$$

La démarche logique :

7.1.1 Etape 1 : Démontrer que (P) admet au moins une sol. x

Ceci est obligatoire car le résultat connu nous dit : "si x est sol de (P)" alors "x est sol de Lagrange ou x n'est pas qualifié", ceci nous dit rien sur l'existence de x !

L'argument le plus fréquemment utilisé pour montrer l'existence de x est le théorème de Weierstrass ou ses variantes.

7.1.2 Etape 2 : Etude de la qualification des points de K

On partitionne K en deux partie disjointes :

$$K_Q := \{x \in K, \ \ x \ \ est \ \ qualifie \ \}$$

$$K_{NQ} := \{x \in K, \ \ x \ \ n'est \ \ pas \ \ qualifie \ \}$$

En pratique, on recherche d'abord les points x qui ne sont pas qualifiés (en général il y en a un nombre très petit ou nul), d'où K_{NQ} ; puis K_Q est simplement formé de tous les autres points de K !

7.1.3 Etape 3 : Ecriture et résolution de (S-L)

On écrit et résoud le système de Lagrange (S-L) formé par les conditions de Lagrange et des contraintes. On trouve ainsi un certain nombre (en général fini) de couples solutions de (S-L).
On pose donc :

$$K_{S-L} = \{x, (x, \lambda) sol \ de \ (S-L)\}$$

Remarquer que ces x ne sont pas nécessairement qualifiés, il ne sert à rien de le vérifier ici !

7.1.4 Etape 4 : Minimiser f sur $K_{NQ} \bigcup K_{S-L}$

Comme on sait, d'aprés l'étape 1, que (P) a au moins une solution $\bar{x}$, cette solution doit :

- Soit être solution de (S-L).
- Soit être non qualifié.

Donc on est sur que $\bar{x}$ figure dans $K_{NQ} \bigcup K_{S-L}$; pour le ou les trouver, il suffit de repérer dans cet ensemble le ou les x qui rendent f minimum ; comme K_{NQ} et K_{S-L} contiennent en général en nombre fini et petit de points il suffit de faire une recherche exhaustive.

7.2 Dans le convexe :

On peut envisager les conditions suffisantes de Lagrange, ce qui évite d'avoir à montrer l'existence.