Interro 2, 1h.

Les documents du cours, TD, TP de l'UE sont autorisés. Communications et recherche internet non autorisées.
Si un résultat du cours est utilisé, il faut le citer soit par son nom, soit par son numéro dans le pdf du cours.

La partie II peut être traitée sans avoir fait la partie I en utilisant simplement le cadre proposé en partie I.

Notations.
On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^d$ et $\| \cdot \|_d$ la norme associée.
On pourra utiliser sans démonstration que pour $\ell \in \mathbb{N}^*$ et une matrice symétrique $M \in M_\ell(\mathbb{R})$, pour tout $u \in \mathbb{R}^\ell$, $\langle Mu, u \rangle_\ell \geq \lambda_{min} \|u\|_\ell^2$, avec λ_{min} la plus petite valeur propre de M.

Partie I

On souhaite étudier la convergence d'un algorithme permettant d'approcher la solution d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique sous contraintes d'égalité affines.

Soit $(d, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, avec $m < d$. Le cadre général porte donc sur une fonctionnelle

$$\mathcal{J} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, u \mapsto \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle_d - \langle b, u \rangle_d + c,$$

avec $A \in M_d(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$, et un espace

$$\mathcal{Q} = \left\{ u \in \mathbb{R}^d,\, Du - e = 0 \right\},$$

avec $D \in M_{md}(\mathbb{R})$ de rang maximal, $e \in \mathbb{R}^m$.

1. *Étude du problème d'optimisation.*
   a. Étudier l'existence et l'unicité d'un point de minimum de $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{Q}$.

   b. Montrer que si $u^* \in \mathcal{Q}$ est un point de minimum de $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{Q}$ alors il existe $(\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*) \in \mathbb{R}^m$ tel que
$$\nabla \mathcal{J}(u^*) + {}^t D \lambda^* = 0,$$
avec $\lambda^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \vdots \\ \lambda_m^* \end{pmatrix}$.

2. *Étude d'un algorithme d'approximation du point de minimum.*

On considère l'algorithme suivant pour approcher le point de minimum de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{Q}$.

Trouver pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\lambda_k, u_k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$ suivant l'algorithme suivant :

Initialisation : λ_0, $\rho > 0$ donnés.

Itération : pour $k \in \mathbb{N}$,

- u_k est calculé comme étant le point de minimum sur $\mathbb{R}^d$ de la fonction $\varphi_k : u \mapsto \mathcal{J}(u) + \langle \lambda_k, (Du - e) \rangle_m$, i.e. on définit u_k par $\varphi_k(u_k) = \min_{u \in \mathbb{R}^d} \varphi_k(u)$.
- $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(Du_k - e)$.

a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Y a-t-il existence et unicité du point de minimum au problème de minimisation à résoudre à l'itération k i.e. du problème $\min_{u \in \mathbb{R}^d} \varphi_k(u)$.

On cherche maintenant à montrer que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(i) Écrire la condition nécessaire d'optimalité en u_k associée au problème de minimisation de φ_k sur $\mathbb{R}^d$ à chaque itération. En déduire, en utilisant la question 1.b., que ${}^tD(\lambda_k - \lambda^*) = -(\nabla \mathcal{J}(u_k) - \nabla \mathcal{J}(u^*))$.

(ii) Montrer que $\lambda_{k+1} - \lambda^* = \lambda_k - \lambda^* + \rho D(u_k - u^*)$.

(iii) Montrer que

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda^*\|_m^2 \leq \|\lambda_k - \lambda^*\|_m^2 - \rho(2\lambda_{min} - \rho |||D|||^2)\|u_k - u^*\|_d^2,$$

où $|||D||| = \sup_{u \in \mathbb{R}^d, u \neq 0} \frac{\|Du\|_m}{\|u\|_d}$ et λ_{min} est la plus petite valeur propre de A.

c. En déduire que si $0 < \rho < \frac{2\lambda_{min}}{|||D|||^2}$, la suite $(\|\lambda_k - \lambda^*\|_m^2)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

d. Déduire de b. et c. que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers u^*.

3. Proposer un code de calcul en Scilab ou python permettant de résoudre le problème de minimisation en utilisant cet algorithme.

Partie II

Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + 2z^2 + xy$$

et

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 2z = 3 \right\}.$$

On s'intéresse au problème de minimisation de f sur K.

1. La fonctionnelle f et l'ensemble K rentrent-ils dans le cadre général de la partie I ? On donnera soigneusement **toutes** les justifications.

2. Trouver la valeur du point de minimum de f sur K.