

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 1 – PARTIE SUR MACHINE

Préliminaire. Durée : 1h. Documents autorisés. A la fin de l'examen, vous devez envoyer les codes que vous aurez écrits sous la forme d'un fichier `python` unique aux adresses suivantes : `francois.delarue@univ-cotedazur.fr`, `paul.maurer@inria.fr`.

Vous êtes encouragés à commenter vos codes pour en faciliter la lecture. Vous pouvez, si vous le souhaitez, donner des éléments par écrit sur les copies données à cet effet, mais cela n'est pas obligatoire.

Exercice. On désigne par f la densité

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On désigne par ailleurs par g la fonction

$$g(x) = 2x \exp(1 - x^2) \mathbf{1}_{[1, +\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (1) On admet que, pour U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$, la variable aléatoire $\sqrt{1 - \ln(U)}$ suit la loi de densité g

Ecrire une fonction `python` permettant de simuler, à partir du générateur de loi uniforme, n réalisations indépendantes de loi de densité g . Mettre en place une méthode de représentation graphique.

- (2) On admet que, pour U et X deux variables aléatoires indépendantes, U de loi uniforme sur $]0, 1[$ et X de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, la variable aléatoire

$$XU + (1 - X)\sqrt{1 - \ln(U)}$$

suit une loi de densité h , donnée par

$$h(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ g(x)/2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Ecrire une fonction `python` permettant de simuler, à partir du générateur de loi uniforme, n réalisations indépendantes de loi de densité h . Mettre en place une méthode de représentation graphique.

- (3) On admet que

$$f(x) \leq kh(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

avec $k = 4/\sqrt{\pi}$, et

$$\frac{f(x)}{kh(x)} = \exp(-x^2) \mathbf{1}_{[0, 1]}(x) + \frac{1}{2ex} \mathbf{1}_{[1, +\infty[}(x), \quad x \in [0, +\infty[.$$

Ecrire une fonction `python` permettant de simuler, à partir du générateur de loi uniforme, une réalisation de loi de densité f . Mettre en place une méthode de vérification graphique.