mercredi 25 octobre 2023 08:04

4. Mise sous forme matricielle : On cherche $A_h \in M_{J\times J}(\mathbb{R})$ et $B_h \in \mathbb{R}^J$ tel que $A_h U_h = B_h$ avec $U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_J \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^J$.

On a

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} \alpha_{1/2}+\alpha_{3/2} & -\alpha_{3/2} & & & \\ -\alpha_{3/2} & \ddots & -\alpha_{5/2} & & \\ & -\alpha_{i-1/2} & \alpha_{i+1/2}+\alpha_{i-1/2} & -\alpha_{i+1/2} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\alpha_{J-1/2} & \alpha_{J+1/2}+\alpha_{J-1/2} \end{pmatrix}, \quad B_h = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_i) \\ \vdots \\ g(x_J) \end{pmatrix} \begin{matrix} +\frac{\alpha_{1/2}}{h^2}\eta \\ \\ \leftarrow i\text{ème ligne} \\ \\ +\frac{\alpha_{J+1/2}\beta}{h^2} \end{matrix}$$

si $u_0 \neq 0$, $u_0 = \eta$; si $u_{J+1} = \beta$

Construction de la 1ière ligne de A_h avec l'équation en $i=1$:

$$-\frac{\alpha_{3/2}u_2 - (\alpha_{1/2}+\alpha_{3/2})u_1 + \alpha_{1/2}u_0}{h^2} = g(x_1)$$

$u_0 = 0$ grâce aux conditions de bords.

Construction de la ième ligne avec $\underline{\underline{i}}$

Autre cas vu en TD $u(0)=1$ et $u'(1)+u(1)=0$ discrétisé par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \frac{u_{J+1}-u_J}{h} + u_{J+1} = 0. \end{cases}$$

$A_h \in M_{J+1\times J+1}(\mathbb{R})$

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} \alpha_{1/2}+\alpha_{3/2} & -\alpha_{3/2} & & & & 0 \\ -\alpha_{3/2} & \ddots & -\alpha_{5/2} & & & \vdots \\ & -\alpha_{i-1/2} & \alpha_{i+1/2}+\alpha_{i-1/2} & -\alpha_{i+1/2} & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & -\alpha_{J-1/2} & \alpha_{J+1/2}+\alpha_{J-1/2} & -\alpha_{J+1/2} \\ & & & & -h & h+h^2 \end{pmatrix} \leftarrow J+1 \text{ ième ligne}$$

u_{J+1} est alors une inconnue du système, il y a une équation de plus au système linéaire.

$(J+1)$ième ligne déterminée par $-\frac{u_J}{h} + \left(1+\frac{1}{h}\right)u_{J+1} = 0.$

La dernière ligne correspond à l'équation :

$$-\frac{1}{h^2}u_J + \frac{1}{h^2}(1+h)u_{J+1} = 0$$

$B_h \in \mathbb{R}^{J+1}$ et $B_h = \begin{pmatrix} g(x_1) + \frac{\alpha_{1/2}}{h^2} \\ \vdots \\ g(x_J) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow u_0 = 1.$

---

4. On a $A_h U_h = B_h$

sur $[a,b]$, $h = \frac{b-a}{J+1}$

On sait que $-\frac{\alpha_{i+1/2}u_{i+1} - (\alpha_{i+1/2}+\alpha_{i-1/2})u_i + \alpha_{i-1/2}u_{i-1}}{h^2}$ pour $i \in \{2, \dots, J-1\}$ est la i-ème ligne du vecteur $\underline{A_h U_h}$

La ligne 1 de $A_h U_h$ est $-\frac{\alpha_{i+1/2}u_{i+1} - (\alpha_{i+1/2}+\alpha_{i-1/2})u_i}{h^2}$ avec $i=1$.

La ligne J de $A_h U_h$ est $-\frac{-(\alpha_{i+1/2}+\alpha_{i-1/2})u_i + \alpha_{i-1/2}u_{i-1}}{h^2}$ avec $i=J$.

Donc $\forall V \in \mathbb{R}^J$, $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_J \end{pmatrix}$ on connait le vecteur $A_h V$

$$A_h V = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_{3/2}V_2 - (\alpha_{1/2}+\alpha_{3/2})V_1 + \alpha_{1/2}V_0}{h^2} \\ \vdots \\ -\frac{\alpha_{i+1/2}V_{i+1} - (\alpha_{i+1/2}+\alpha_{i-1/2})V_i + \alpha_{i-1/2}V_{i-1}}{h^2} \\ \vdots \\ -\frac{-(\alpha_{J+1/2}+\alpha_{J-1/2})V_J + \alpha_{J-1/2}V_{J-1} + \alpha_{J+1/2}V_{J+1}}{h^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^J$$

si convention $V_0 = 0$ et $V_{J+1} = 0$

On ${}^tV A_h V = \langle A_h V, V \rangle = \langle V, A_h V \rangle$

$$= \sum_{i=1}^{J} (A_h V)_J V_J$$

En gardant la convention $V_0 = 0$ et $V_{J+1} = 0$, on trouve

$${}^tV A_h V = \sum_{i=1}^{J} -\left(\frac{\alpha_{i+1/2}V_{i+1} - (\alpha_{i+1/2}+\alpha_{i-1/2})V_i + \alpha_{i-1/2}V_{i-1}}{h^2}\right) V_i$$

$$= \sum_{i=1}^{J}\left(\frac{\alpha_{i+1/2}(V_i - V_{i+1})}{h^2}V_i + \frac{\alpha_{i-1/2}(V_i - V_{i-1})}{h^2}V_i\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{J}\frac{\alpha_{i+1/2}(V_i - V_{i+1})}{h^2}\cdot V_i}_{\text{changement d'indice}} + \sum_{i=1}^{J}\frac{\alpha_{i-1/2}(V_i - V_{i-1})}{h^2}V_i$$

On pose $k = i+1$ ($i = k-1$)

$$= \sum_{k=2}^{J+1}\frac{\alpha_{k-1+1/2}(V_{k-1} - V_k)}{h^2}V_{k-1} + \sum_{i=1}^{J}\frac{\alpha_{i-1/2}(V_i - V_{i-1})}{h^2}V_i$$

$\alpha_{k-1+1/2} = \alpha_{k-1/2}$

$k \leftarrow i$

$$= \underbrace{\sum_{i=2}^{J}\frac{\alpha_{i-1/2}(V_i - V_{i-1})}{h^2}[V_i - V_{i-1}]}_{\substack{\text{on rassemble les deux sommes}\\ \text{pour les indices communs de 2 à J}\\ \text{(on refait } k=i\text{, indice muet dans}\\ \text{la 1ière somme)}}} + \underbrace{\alpha_{1-1/2}\frac{V_1 - V_0}{h^2}V_1}_{\substack{\text{terme } i=1 \text{ de}\\ \text{la 2ième somme}}} + \underbrace{\alpha_{J+1/2}\frac{(V_J - V_{J+1})V_J}{h^2}}_{\substack{\text{terme } k=J+1\\ \text{de la 1ière somme}}}$$

$$= \sum_{i=2}^{J}\frac{\alpha_{i-1/2}(V_i - V_{i-1})^2}{h^2} + \alpha_{1/2}\frac{V_1 - V_0}{h^2}(V_1 - V_0) + \alpha_{J+1/2}\frac{(V_J - V_{J+1})(V_J - V_{J+1})}{h^2}$$

Si on garde la convention $V_0 = 0$, $V_{J+1} = 0$.

$${}^tV A_h V = \sum_{i=1}^{J+1}\frac{\alpha_{i-1/2}(V_i - V_{i-1})^2}{h^2}$$

Remarque : analogue continu

$\int_0^1 \alpha (u')^2 \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{J+1} \alpha_{i-1/2}\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)^2$

IPP

changement d'indice

$\int_0^1 -(\alpha u')' u \rightsquigarrow \langle A_h U_h, U_h \rangle$

$A_h U_h$ représente $-(\alpha u')'$

Conséquences : puisque $\alpha > 0$, $\forall i \in \{1, \dots, J\}$, $\alpha_{i-1/2} > 0$ et donc $\forall V \in \mathbb{R}^J$, ${}^tV A_h V \geq 0$.

De plus si $V \in \mathbb{R}^J$ est tel que ${}^tV A_h V = 0$, alors $\sum_{i=1}^{J+1}\alpha_{i-1/2}\frac{(V_i - V_{i-1})^2}{h^2} = 0$. C'est une somme de termes positifs, comme cette somme est nulle, on en déduit que chaque terme est nul, i.e. $\forall i \in \{1, \dots, J+1\}$,

$$\alpha_{i-1/2}\left(\frac{V_i - V_{i-1}}{h}\right)^2 = 0.$$

et donc puisque $\alpha_{i-1/2} > 0$,
$$\begin{cases} \frac{V_1^2}{h^2} = 0 \\ \vdots \\ \left(\frac{V_i - V_{i-1}}{h}\right)^2 = 0 \\ \vdots \\ \frac{V_J^2}{h^2} = 0 \end{cases}$$

i.e. $V_1 = 0$, $V_J = 0$ et $\forall i \in \{2, \dots, J\}$, $V_i = V_{i-1}$

Donc $V_i = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, J\}$ i.e. $V = 0$.

Finalement A_h est symétrique définie positive donc inversible.

Pour le problème P_h, on en déduit que le système $A_h U_h = B_h$ admet une unique solution $U_h = A_h^{-1} B_h$.

6) On note j_0 le plus petit indice de $\{0, \dots, J+1\}$ où le minimum des u_j est atteint.

$\forall i < j_0$, $u_i > \min(u_k) = u_{j_0}$

$\forall i \geq j_0$, $u_i \geq u_{j_0}$.

On garde comme pour le cas $\alpha = 1$ (vu en TD) la structure :

$$i \in \{1, \dots, J\} \quad -\frac{\alpha_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i)}{h^2} + \frac{\alpha_{i-1/2}(u_i - u_{i-1})}{h^2} = (A_h U_h)_i \geq 0.$$

Si $j_0 \in \{1, \dots, J\}$, alors on utilise ↑ en $i = j_0$.

$$\underbrace{-\alpha_{j_0+1/2}\underbrace{\frac{(u_{j_0+1} - u_{j_0})}{h^2}}_{\substack{\geq 0 \\ \text{car } j_0+1 > j_0}} + \alpha_{j_0-1/2}\underbrace{\frac{(u_{j_0} - u_{j_0-1})}{h^2}}_{\substack{< 0 \\ \text{car } j_0-1 < j_0}}}_{< 0} \geq 0.$$

comme $\alpha > 0$

Donc $j_0 = 0$, $j_0 = J+1$

et donc $u_{j_0} = 0$, d'où $\min_k u_k = 0$ et donc $u_j \geq 0$, $\forall j \in \{1, \dots, J\}$