

Sciences de gestion

Synthèse  
de cours &  
exercices  
corrigés

# Finance

2<sup>e</sup> édition



- L'essentiel de la finance de marché et de la finance d'entreprise
- Un nouveau chapitre sur les produits liés au risque de crédit
- Les données des exercices et des outils de valorisation financière disponibles sur [www.pearson.fr](http://www.pearson.fr)

collection  
**Synthex**

**PEARSON**  
Education

**André FARBER, Marie-Paule LAURENT,  
Kim OOSTERLINCK, Hugues PIROTTE**

**Sciences de gestion**

Synthèse      &      Exercices  
de cours      corrigés

# Finance

## 2<sup>e</sup> édition

**André FARBER**

**Marie-Paule LAURENT**

**Kim OOSTERLINCK**

**Hugues PIROTTE**

**Direction de collection : Roland Gillet**  
**professeur à l'université Paris 1 Panthéon-Sorbonne**

Collection  
**synthex**



ISBN : 978-2-7440-4068-9

ISSN : 1768-7616

Copyright© 2009 Pearson Education France

Tous droits réservés

Composition L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X : Euklides

Aucune représentation ou reproduction, même partielle, autre que celles prévues à l'article L. 122-5 2° et 3° a) du code de la propriété intellectuelle ne peut être faite sans l'autorisation expresse de Pearson Education France ou, le cas échéant, sans le respect des modalités prévues à l'article L. 122-10 dudit code.

# Sommaire

<b>Les auteurs</b>	<b>IV</b>
<b>Introduction</b>	<b>V</b>
<b>Chapitre 1 • Fondements</b>	<b>1</b>
1. La valeur actuelle en avenir certain . . . . .	2
2. La valeur actuelle en avenir incertain . . . . .	8
Problèmes et exercices . . . . .	16
<b>Chapitre 2 • Relation risque – rentabilité attendue</b>	<b>35</b>
1. La distribution de probabilités – Les rentabilités . . . . .	36
2. La rentabilité et le risque d'un portefeuille de deux à $N$ actifs . . . . .	37
3. La réduction du risque par la diversification . . . . .	40
4. La mesure du risque d'un actif . . . . .	41
5. Le choix du portefeuille optimal . . . . .	43
6. Le Médaf . . . . .	44
7. Le modèle d'évaluation par arbitrage . . . . .	45
Problèmes et exercices . . . . .	48
<b>Chapitre 3 • Valorisation d'options</b>	<b>73</b>
1. Définition des options classiques . . . . .	73
2. Cash flows associés à une option . . . . .	73
3. Relation de parité put – call . . . . .	75
4. Bornes des options . . . . .	76
5. Valorisation des options : modèle binomial . . . . .	76
6. Formule de Black-Scholes . . . . .	80
7. Valeur d'option et volatilité . . . . .	83
Problèmes et exercices . . . . .	86
<b>Chapitre 4 • Évaluation d'entreprises non endettées</b>	<b>107</b>
1. Dividend Discount Model (DDM) et modèle de Gordon-Shapiro . . . . .	108

2.	Lien entre free cash flow et dividendes : le tableau de financement . . . . .	111
3.	Free cash flow model . . . . .	113
4.	Valeur actuelle des opportunités de croissance . . . . .	114
	Problèmes et exercices . . . . .	119
<b>Chapitre 5 • Valorisation de la dette sans risque et structure des taux d'intérêt</b>		<b>143</b>
1.	Évaluation d'obligation . . . . .	143
2.	Rendement à l'échéance . . . . .	145
3.	Risque de taux . . . . .	145
4.	Structure à terme des taux d'intérêt . . . . .	148
	Problèmes et exercices . . . . .	152
<b>Chapitre 6 • Valorisation de la dette risquée et des produits dérivés de crédit</b>		<b>163</b>
1.	Évaluation de dette risquée . . . . .	164
2.	Évaluation d'obligations convertibles . . . . .	168
3.	Probabilité de défaut et corrélation de défaut . . . . .	169
4.	Produits dérivés de crédit . . . . .	172
	Problèmes et exercices . . . . .	176
<b>Chapitre 7 • Structure financière et coût du capital</b>		<b>189</b>
1.	La valeur et la structure financière de la société dans un monde sans impôts . . . . .	189
2.	Fiscalité et endettement . . . . .	195
3.	La théorie du compromis . . . . .	200
	Problèmes et exercices . . . . .	205
<b>Chapitre 8 • Analyse de projets d'investissement</b>		<b>221</b>
1.	Critères de décision . . . . .	222
2.	Éléments à prendre en compte dans le calcul de la VAN . . . . .	225
3.	Analyse des déterminants de la valeur . . . . .	227
4.	Flexibilité de la décision . . . . .	230
5.	Financement des projets . . . . .	232
	Problèmes et exercices . . . . .	234
<b>Chapitre 9 • Gestion des risques</b>		<b>259</b>
1.	Pourquoi gérer les risques ? . . . . .	259
2.	Quels risques ? . . . . .	260
3.	La mesure du risque . . . . .	261
4.	Comment gère-t-on les risques ? . . . . .	268
	Problèmes et exercices . . . . .	284
<b>Index</b>		<b>307</b>

# Les auteurs

**André Farber** est professeur à la Solvay Business School de l'Université Libre de Bruxelles (ULB) où il a été doyen de la faculté des sciences sociales, politiques et économiques. Auteur de nombreux articles et ouvrages, il a cotraduit la 5<sup>e</sup> édition de *Principes de gestion financière* de R. Brealey et S. Myers. Parmi ses publications les plus récentes figure une série de développements en matière de coût du capital de l'entreprise, généralisant sa formulation.

Titulaire d'un doctorat en sciences de gestion de l'ULB, André Farber est ensuite professeur visiteur à la Cornell University de 1973 à 1974. Il est élu président de l'European Finance Association en 1975. Deux ans plus tard, l'université de Chicago l'accueille comme professeur visiteur. Il y rencontre plusieurs futurs prix Nobel (Franco Modigliani, Merton Miller, Robert Merton, Myron Scholes) et publie des articles en collaboration avec d'autres fondateurs de la théorie financière moderne tels que Eugène Fama ou Richard Roll. Curieux de nature, ses thèmes de recherche comprennent notamment la finance internationale, la théorie des options, le financement de l'innovation technologique ou encore les marchés financiers des pays émergents.

En plus de ses activités académiques, André Farber est administrateur du Crédit professionnel du Hainaut, de Fluxys, de la Fondation Bernheim, de la Fondation Hoover, membre du Comité Bel20 et du Comité Supérieur des Finances belge.

**Marie-Paule Laurent** est chercheuse au sein du Centre Emile Bernheim (CEB, ULB) et partenaire de Risk Dynamics.

Docteur en sciences de gestion (ULB), elle s'intéresse à la gestion des risques bancaires (crédit, marché, opérationnel, stratégique) tant d'un point de vue quantitatif (modèles de mesure de risque) que qualitatif (politiques de gestion de risque). Elle dispense actuellement divers cours de finance à la SBS. Elle est également partenaire de Risk Dynamics, société belge spécialisée dans le conseil en gestion de risque pour les groupes bancaires et d'assurance ayant des activités internationales.

**Kim Oosterlinck** est professeur à la Solvay Business School (ULB) après un doctorat de la même institution, et a publié plusieurs articles et ouvrages centrés sur les problématiques des dettes souveraines. Coresponsable académique du programme doctoral de la Solvay Business School, l'essentiel de ses recherches se base sur l'analyse de cas historiques extrêmes (répudiation des emprunts russes, fonctionnement boursier durant les guerres, etc.). Enfin, Kim Oosterlinck est président du master en gestion culturelle (faculté de philosophie et lettres, ULB) au sein duquel il dispense l'essentiel de ses enseignements.

**Hugues Pirotte** est professeur à la Solvay Business School (ULB).

Après des études secondaires au Vénézuela, Hugues Pirotte rejoint la verte campagne helvétique pour compléter sa formation en finance. Il y décroche un doctorat en finance à l'université de Lausanne sous la direction de Rajna Gibson, grâce à qui il rencontre notamment Robert Merton, Stephen Schaefer, Eduardo Schwartz et Suresh Sundaresan. Professeur à l'université de Lausanne dès 1999, Hugues Pirotte, fonde FinMetrics SA, une société suisse spécialisée dans le conseil stratégique en matière de gestion des risques et dans le développement d'un tableau de bord de gestion des risques utilisé aujourd'hui par des banques privées et des trésoreries de sociétés industrielles internationales. Passionné de ce sujet, il rédige avec Didier Cossin, professeur à l'IMD, un ouvrage intitulé *Advanced*

*Credit Risk Analysis*, paru chez Wiley et rapidement devenu une référence. En 2002, il rejoint la SBS. Hugues Pirotte est par ailleurs en charge du module Corporate Finance auprès de l'Académie suisse d'expertise comptable délivrant le diplôme fédéral d'expert-comptable. Il est l'auteur d'ouvrages et d'articles dans les domaines du risque de crédit et de la valorisation d'actifs financiers. Il intervient comme orateur dans différentes conférences sur les thèmes de la « finance structurée », et est également Academic Expert à la Luxembourg School of Finance.

Hugues Pirotte a fondé en 2008 le « Finance Club of Brussels ».

# Introduction

L'objectif de ce livre est d'aider à mettre en application les principes fondamentaux de la finance. Il est né du désir des auteurs de trouver dans un seul ouvrage, pas trop volumineux, à la fois les concepts théoriques de base et leurs applications. L'expérience montre, en effet, que le passage de la théorie à la pratique peut être épineux. Cet ouvrage s'adresse donc en premier lieu aux étudiants qui suivent un enseignement de finance. Il peut se révéler également utile aux professionnels confrontés à un problème pratique et désireux de rafraîchir ou compléter leurs connaissances. Les enseignants y trouveront non seulement des illustrations des matières enseignées traditionnellement dans les cours de finance mais également des exercices portant sur des théories récentes pour lesquelles les applications pratiques sont encore rarement abordées.

Nous avons choisi de nous limiter aux notions essentielles. La finance repose sur quelques principes fondamentaux que nous mettons d'abord en évidence dans les exposés théoriques avant d'en montrer l'application.

La résolution de problème occupe plus de la moitié du livre. C'est dire l'importance que nous y accordons. Ces problèmes permettront de vérifier la compréhension de la théorie. Tous les exercices étant corrigés, on pourra vérifier aisément les résultats.

## **Le fond et la forme**

Aucune loi ne décrète que la finance doive être triste. Les problèmes qui sont présentés vous feront découvrir, au fil des pages, quelques personnages incongrus dans un ouvrage de finance : Tante Agathe, Oncle Séraphin et autres Nicolas Pipette. Ils ont tous une caractéristique commune : se poser des questions pertinentes et ne se satisfaire que de réponses chiffrées.

Le ton parfois léger adopté ne signifie pas que les notions abordées soient élémentaires. La finance n'est sans doute pas, parmi les sciences de gestion, la matière la plus facile. Elle fait appel à plusieurs autres disciplines : l'économie, bien sûr, dont elle est issue mais aussi la comptabilité, les mathématiques, les statistiques. Nous avons choisi de limiter le niveau mathématique et statistique afin de rendre l'ouvrage accessible. Cependant nous ne transigeons pas sur le fonds. Les concepts que nous abordons constituent les pierres angulaires de la finance. Leurs applications réelles nécessitent parfois de faire appel à des outils plus sophistiqués que ceux utilisé dans ce livre. Mais la logique de base des modèles présentés dans ce livre subsiste.

Pendant longtemps, le calcul a été un obstacle majeur à l'application des concepts de finance. Ce n'est plus le cas actuellement. Excel est devenu l'un des compagnons indispensables du financier moderne. Nous vous encourageons à travailler les problèmes

en tirant parti de toute la puissance de calcul d'un tableur. En outre, l'ensemble des solutions se trouve dans des fichiers Excel disponibles sur le site qui accompagne l'ouvrage qui vous permettront peut-être de découvrir – outre la finance – quelques astuces utiles.

## Le contenu

Nous avons repris dans ce livre des problèmes relevant tant de la finance de marché que de la finance d'entreprise. Nous pensons, en effet, que ces deux branches forment un tout.

Le plan de l'ouvrage est le suivant. Les trois premiers chapitres présentent les fondements de l'évaluation : la valeur actuelle en certitude et en incertitude est abordée dans le chapitre 1 (Fondements). Le chapitre 2 développe la théorie des choix de portefeuille et des modèles d'évaluation d'actifs financiers. La valorisation d'options est présentée et illustrée dans le chapitre 3. Le chapitre 4 est consacré à l'évaluation d'une entreprise en l'absence d'endettement. Il constitue la charnière entre les fondements de l'évaluation abordés dans les premiers chapitres et les analyses des décisions financières d'entreprises développées par après. Les deux chapitres suivant traitent de l'endettement. Le chapitre 5 permet de l'évaluer tout d'abord en l'absence de risque de crédit. Le chapitre 6 comble tout de suite cette lacune en introduisant notamment des notions d'évaluation des dérivés de crédit. Il s'occupe également des obligations convertibles. Le chapitre 7 montre l'impact de l'endettement sur la valeur de l'entreprise (suite du chapitre 4). Les projets d'investissement sont analysés dans le chapitre 8. L'ouvrage se termine par le chapitre 9, consacré à la gestion des risques de marché.

L'équipe rédactionnelle, se fondant sur les initiales des auteurs, s'est intitulée FLOP. Ses membres enseignent la finance à l'université. Ils ont, ensemble, près d'un demi siècle d'expérience. Le choix de ce sigle est prétexte à toute sorte de jeux de mots que vous retrouverez plus loin. Peut-être aurions-nous pu intituler notre livre *Finance Légère à Orientation Pratique*? Nous espérons seulement que le choix de cet acronyme ne préfigure pas le sort réservé à notre travail.

Notre projet n'aurait jamais abouti sans le soutien et les encouragements de nombreuses personnes. Nous tenons à remercier Pearson Education France qui nous a fait confiance. Pascale Pernet a cru, dès le départ, dans le concept que nous proposions et nous a aidés à l'affiner. Roland Gillet, le directeur de cette collection, nous a donné des conseils judicieux sur l'organisation générale du livre. Antoine Chéret a suivi ligne par ligne – et même équation par équation – la rédaction de ce livre. Il nous a guidés avec gentillesse et efficacité et nous lui en sommes reconnaissants.

André Farber, professeur  
Marie-Paule Laurent, chercheur  
Kim Oosterlinck, professeur  
Hugues Pirotte, professeur  
*Solvay Business School*  
*Université libre de Bruxelles*

# Fondements

1. La valeur actuelle en avenir certain . . . . .	2
2. La valeur actuelle en avenir incertain . . . . .	8
<b>Problèmes et exercices</b>	
La valeur actuelle en certitude . . . . .	16
État de la nature, titres	
contingents, actifs financiers . . . . .	27
Actifs financiers . . . . .	29
Décision d'investissement, marché complet et choix de portefeuille . . . . .	31

**Avant d'aborder, dans la suite de l'ouvrage, l'analyse détaillée des décisions financières, nous commencerons par examiner les principes de base en nous plaçant dans un cadre d'hypothèses simplifiées à l'extrême.**

Le temps est limité à *une période* :

- Les décisions sont prises aujourd'hui (en  $t = 0$ ), leurs effets apparaissent dans un an (le futur  $t = 1$ ).

Le marché des capitaux est *parfait* :

- Tous les agents y ont accès aux mêmes conditions.
- Il n'existe ni frais de transaction ni impôts.

Le marché est à l'*équilibre* : l'offre et la demande de capitaux sont égales.

Nous identifierons ainsi les trois idées fondamentales qui sous-tendent la logique financière :

- **La règle de la valeur actuelle nette** : une décision financière aboutit à un accroissement de la valeur si la valeur actuelle nette est positive.
- **La loi du prix unique** : dans un marché parfait des capitaux, des actifs équivalents ont le même prix.
- **Le théorème de Modigliani-Miller** : dans un marché parfait des capitaux, en l'absence d'impôts, la valeur d'un projet ou d'une entreprise est indépendante de son financement.

# 1 La valeur actuelle en avenir certain

## 1.1 Définition des notions

Supposons initialement que l'avenir soit connu avec *certitude* : toutes les prévisions faites aujourd'hui concernant l'avenir se réaliseront. À l'équilibre du marché des capitaux, il existe un taux d'intérêt sans risque  $r_f$ .

L'existence d'un marché des capitaux permet l'échange de capitaux dans le temps. Un placement permet de transférer des fonds disponibles aujourd'hui dans le futur. Inversement, un emprunt rend disponible aujourd'hui des capitaux futurs. Ces transferts ne sont pas gratuits et donnent lieu à des intérêts. En conséquence, des montants disponibles à des dates différentes n'ont pas la même valeur : un euro aujourd'hui vaut plus qu'un euro dans un an. Deux méthodes tiennent compte de la dimension temporelle : la capitalisation et l'actualisation.

La **capitalisation** part de l'idée qu'un euro disponible aujourd'hui peut être placé et rapporter ainsi des intérêts. La **valeur future** en  $t = 1$  d'un montant  $C_0$  (disponible en  $t = 0$ ),  $VF(C_0)$ , est égale au montant initial auquel l'on rajoute les intérêts perçus au cours de la période si ce montant est placé sur le marché des capitaux.

$$VF(C_0) = C_0 + r_f C_0 = C_0(1 + r_f)$$

L'**actualisation** inverse le raisonnement. En d'autres termes, elle peut être vue comme une méthode permettant de calculer le montant qu'il faudrait placer au taux  $r_f$  en  $t = 0$  pour obtenir le montant  $C$  en  $t = 1$ . La valeur actuelle d'un montant  $C_1$  (disponible en  $t = 1$ ) est le montant correspondant en  $t = 0$  d'un montant futur  $C_1$  :

$$VA(C_1) = \frac{C_1}{1 + r_f}$$

Le taux qui apparaît au dénominateur est appelé **taux d'actualisation**. Dans notre modèle simple, il est égal au taux d'intérêt sans risque. Ce n'est pas toujours le cas. Dans un environnement incertain, le cash-flow futur est une valeur attendue (ou espérée). Or, un euro risqué vaut moins qu'un euro certain. En conséquence, le taux d'actualisation à utiliser pour calculer la valeur actuelle peut être différent du taux d'intérêt sans risque. Nous analyserons le choix du taux d'actualisation en incertitude plus en détail par la suite.

Remarquons que, si le taux d'actualisation  $r_f$  est positif, la valeur actuelle  $VA(C_1)$  est inférieure au cash-flow futur  $C_1$ . Il s'agit de la traduction mathématique de la règle : un euro demain vaut moins qu'un euro aujourd'hui.

## Complément

### Actualisation et zéro-coupon

On peut donner une autre interprétation de la formule de la valeur actuelle, plus révélatrice de sa nature profonde. En effet, la valeur actuelle de  $C_1$  peut s'écrire :

$$VA(C_1) = C_1 \times v_1$$

où

$$v_1 = \frac{1}{1 + r_f}$$

La valeur actuelle est ainsi obtenue en multipliant le montant futur par un **facteur d'actualisation** ( $v_1$ ). Ce facteur d'actualisation s'interprète comme le prix en  $t = 0$  d'une obligation. Le terme « obligation » est utilisé ici dans un sens très large pour désigner tout titre représentatif d'une dette quelconque. L'obligation la plus simple est un **zéro-coupon**. Comme son nom l'indique, il s'agit d'une obligation donnant droit au paiement d'un montant à l'échéance (ce montant est la valeur nominale ou valeur faciale du zéro-coupon) sans aucun paiement intermédiaire d'intérêts. Imaginons un zéro-coupon donnant lieu au paiement de 1 € à l'échéance. Nous appellerons cet instrument financier un **zéro-coupon unitaire**. Combien serions-nous disposés à payer aujourd'hui pour acheter un zéro-coupon unitaire venant à échéance dans un an ? La réponse à cette question est donnée par la valeur actuelle. Le taux d'intérêt en vigueur sur le marché étant  $r_f$ , un investisseur fixera le prix de manière à réaliser un intérêt sur son placement exactement égal au taux d'intérêt. Le prix qu'il sera disposé à payer sera donc :

$$VA(1) = \frac{1}{1 + r_f} = v_1$$

Nous constatons que le facteur d'actualisation est le prix de marché d'un zéro-coupon unitaire.

Nous avons fixé, dans notre modèle, l'horizon à un an. Mais la formule de calcul se généralise immédiatement à un horizon quelconque. La valeur actuelle d'un cash-flow  $C_t$  réalisable dans  $t$  années est :

$$VA(C_t) = C_t \times v_t$$

De manière similaire, la valeur actuelle d'un échéancier de cash-flows,  $C_1, C_2, \dots, C_T$ , est la somme des valeurs actuelles des cash-flows individuels.

$$VA = C_1 \times v_1 + C_2 \times v_2 + \dots + C_T \times v_T$$

## 1.2 Utilisation de la valeur actuelle

En dépit de la simplicité du modèle présenté ci-dessus, nous disposons maintenant d'un outil puissant afin d'analyser une décision d'investissement. Considérons un projet d'investissement caractérisé par une dépense immédiate  $I$  et un cash-flow futur  $C_1$ . Nous sommes confrontés à la question : « Investir ou ne pas investir ? » Si nous réalisons l'investissement, nous dépons un montant  $I$  et nous recevrons, dans un an,  $C_1$ . La **valeur actuelle nette** (VAN) est la différence entre le montant investi et la valeur actuelle du cash-flow futur :

$$VAN = -I + C_1 \times v_1$$

La valeur actuelle permet de comparer des cash-flows survenant à des dates différentes. Enfin, en tant que mesure du « profit » que nous obtenons en réalisant l'investissement,

la *VAN* conduit à la règle fondamentale : il faut entreprendre les projets ayant une valeur actuelle nette positive.

Nous pouvons aller un pas plus loin en analysant la rentabilité attendue notée  $R$ . Par définition, la **rentabilité attendue** d'un placement est égale au rapport entre le profit attendu et le montant investi :

$$R = \frac{\text{Profit attendu}}{\text{Investissement}}$$

En achetant un zéro-coupon unitaire (au prix  $v_1$ ), l'investisseur anticipe un profit sous forme d'un gain en capital résultant de la différence entre la valeur faciale du zéro-coupon (1 €) et le prix payé initialement ( $v_1$ ). La rentabilité attendue est donc :

$$R = \frac{1 - v_1}{v_1}$$

Or, en achetant le zéro-coupon, l'investisseur renonce à d'autres formes de placements. Il encourt alors un **coût d'opportunité**. Ce coût est, dans notre modèle simplifié, égal au taux d'intérêt qu'il aurait pu obtenir sur le marché des capitaux. En conséquence, tout investisseur rationnel fixera le prix du zéro-coupon unitaire de manière à aboutir à l'égalité entre la rentabilité attendue du placement et le taux d'intérêt :

$$R = r_f$$

ou encore

$$\frac{1 - v_1}{v_1} = r_f$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$v_1 = \frac{1}{1 + r_f}$$

### 1.3 La loi du prix unique et l'absence d'opportunité d'arbitrage

La formule de la valeur d'un zéro-coupon unitaire est un premier exemple d'un principe plus fondamental : la **loi du prix unique**. Ce principe affirme que, dans un marché concurrentiel à l'équilibre, deux titres ayant les mêmes valeurs futures ont les mêmes prix. Dans notre cadre simplifié d'hypothèses, un facteur d'actualisation différent de  $1 / (1 + r_f)$  permettrait à un investisseur astucieux de réaliser un **arbitrage** c'est-à-dire de réaliser un profit certain sans engager d'argent. Un tel profit est inconcevable dans un marché concurrentiel à l'équilibre. Le tableau 1.1 indique les stratégies à suivre en cas d'écart entre le prix de l'obligation et sa valeur théorique.

Tableau 1.1

**Illustration des opérations d'arbitrage**

Flux de trésorerie $t = 0$		Flux de trésorerie $t = 1$	
<b>Cas 1 : <math>v_1 &lt; 1/(1+r_f)</math></b>			
Emprunter	$+v_1$	Remboursement de l'emprunt	$-v_1(1+r_f)$
Acheter l'obligation	$-v_1$	Revenus tirés de l'obligation	+1
Total	0		$-v_1(1+r_f) + 1 > 0$
<b>Cas 2 : <math>v_1 &gt; 1/(1+r)</math></b>			
Vendre une obligation	$+v_1$	Payement du principal	-1
Placer	$-v_1$	Résultat du placement	$+v_1(1+r_f)$
Total	0		$+v_1(1+r_f) - 1 > 0$

**Exemple**

Supposons que le taux d'intérêt à une période soit de 5 % et que le prix d'un zéro-coupon unitaire à une période soit de 0,95. Le facteur d'actualisation vaut :  $1 / (1 + r) = 1 / 1,05 = 0,9524$ . Il est supérieur au prix du zéro-coupon ( $v_1 = 0,95$ ). Pour profiter de la situation, il faut réaliser la stratégie définie dans le cas 1.

En  $t = 0$ , nous achetons le zéro-coupon au prix du marché :  $v_1 = 0,95$ . Cet achat est financé par un emprunt du même montant. Par conséquent, le flux de trésorerie net est nul. En  $t = 1$ , le zéro-coupon arrive à échéance. Nous recevons alors un revenu de 1. Celui-ci nous permet de rembourser l'emprunt. Le montant du remboursement est de :  $v_1 (1 + r) = 0,95 (1 + 5\%) = 0,9975$ . Au total, il nous reste donc :  $1 - 0,9975 = +0,0025$ . Le flux de trésorerie en  $t = 1$  est bien positif.

## 1.4 Le théorème de Modigliani-Miller

Nous pouvons mettre en avant un troisième résultat : dans un marché parfait des capitaux, la valeur actuelle est indépendante du financement.

Supposons que, pour réaliser l'investissement, des actionnaires créent une entreprise. L'actif total de cette entreprise est égal au montant de l'investissement. Il est financé en partie par fonds propres et en partie par emprunt. Notons  $FP$  le montant des fonds propres apportés par les actionnaires et  $D$  le montant emprunté. Le bilan initial de l'entreprise s'établit comme suit dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2

**Bilan**

Actif		Passif	
Immobilisés	$I$	Fonds propres	$FP$
		Dettes	$D$

L'égalité entre le total de l'actif et le total du passif s'écrit :

$$I = FP + D$$

L'entreprise a, dans notre modèle simplifié, une durée de vie d'un an. À la fin de l'année, elle encaisse le flux de trésorerie généré par l'investissement. Elle paie les intérêts sur l'emprunt et rembourse le principal. Le solde est versé aux actionnaires sous forme de dividendes. Le compte de résultat pour la période, simplifié à l'extrême ici, est le suivant :

- Résultat d'exploitation  $C_1$

- . Charges financières  $r_f \times D$
- . Bénéfice  $C_1 - r_f \times D$
- . Affectation :
- . Remboursement de l'emprunt  $D$
- . Dividende  $DIV_1 = C_1 - D(1 + r_f)$

Comme montré précédemment, la valeur en  $t = 0$  d'un actif financier est égale à la valeur actuelle des flux financiers (cash-flows) futurs qu'il génère. Ce principe général d'évaluation nous permet de déterminer la valeur de marché des actions et de la dette. La valeur  $A$  des actions de la société est égale à la valeur actuelle des dividendes :

$$A = DIV_1 / (1 + r_f)$$

De même, la valeur de la dette est égale à la valeur actuelle du flux de trésorerie que recevront les créanciers :

$$D = D(1 + r_f) / (1 + r_f) = D$$

Remarquons que la valeur de la dette est égale au montant de l'emprunt. En effet, l'emprunt donne lieu au paiement d'intérêts dont le calcul est basé sur le taux d'intérêt sans risque en vigueur sur le marché au moment de l'emprunt et qui, ici, correspond au taux d'actualisation.

La valeur de l'entreprise est, par définition, égale à la somme de la valeur des actions et de la valeur de la dette :

$$V = A + D$$

## Anecdote

### **Proposition I de Modigliani-Miller et intuition**

La proposition I repose sur la logique suivante. Le choix du financement détermine la répartition du résultat d'exploitation entre les apporteurs de capitaux. Mais ce processus de répartition ne change en rien le montant total à répartir. Celui-ci dépend exclusivement du succès (ou de l'échec) économique du projet. En conséquence, comme le processus de répartition ne crée ni ne détruit rien, la valeur du cash-flow total doit être égale à la somme des valeurs des cash-flows revenant à chacun des groupes d'apporteurs de capitaux.

Merton Miller, devant expliquer son résultat en quelques secondes aux téléspectateurs américains, utilisa l'analogie suivante : supposons que vous ayez une pizza, le théorème de Modigliani-Miller dit que vous aurez toujours la même quantité de pizza que vous la coupez en deux, quatre ou huit ou tout autre nombre. L'analogie fut semble-t-il suffisamment frappante pour bien faire comprendre l'essence du théorème, mais laissa les téléspectateurs dans la confusion sur les motifs d'attribution d'un prix Nobel d'économie à l'un des auteurs.

Sous quelles conditions les actionnaires ont-ils intérêt à créer cette société ? La société vaut la peine d'être créée, c'est-à-dire que l'investissement est intéressant, si elle aboutit à un accroissement de la richesse des actionnaires. Ceci peut être érigé en règle : les décisions financières doivent créer de la valeur. Dans notre modèle simple, le principe de création de valeur sera satisfait si la valeur des actions est supérieure au montant des fonds propres, qui représente le montant des capitaux apportés par les actionnaires à la société :

$$\text{Condition de création de valeur : } A > FP$$

Or :

$$A = \frac{DIV_1}{1 + r_f} = \frac{C_1 - D(1 + r_f)}{1 + r_f} = \frac{C_1}{1 + r_f} - D = \frac{C_1}{1 + r_f} - (I - FP)$$

La condition de création de valeur s'écrit donc :

$$A > FP \Leftrightarrow -I + \frac{C_1}{1 + r_f} > 0 \Leftrightarrow VAN > 0$$

Il est intéressant de préciser plus avant la relation entre la valeur des actions et la valeur actuelle nette. En effet, la valeur des actions  $A$  peut s'écrire :

$$A = FP + \left(-I + \frac{C_1}{1 + r_f}\right) = FP + VAN$$

ce qui montre bien que l'accroissement de la richesse des actionnaires résulte d'une valeur actuelle positive.

## Complément

### La valeur actuelle nette et le taux de rentabilité interne

Nous pouvons formuler la réponse différemment. Nous avons précédemment donné une définition générale du taux de rentabilité attendu. Pour un projet d'investissement, on le désigne comme le **taux de rentabilité interne  $TRI$**  (ou **taux de rentabilité actuel**) du projet. Dans notre modèle simplifié, il peut être défini comme suit :

$$TRI = \frac{C_1 - I}{I}$$

Cette définition est spécifique aux projets d'une période. Mais une autre présentation de l'expression aboutit à une définition de portée plus générale. En effet, la définition peut également s'écrire :

$$-I + \frac{C_1}{1 + TRI} = 0$$

Le taux de rentabilité interne peut donc s'interpréter comme étant le taux d'actualisation qui annule la valeur actuelle nette.

En réalisant le projet, l'investisseur renonce à placer la somme sur le marché des capitaux. La condition pour qu'il réalise le projet est donc que le taux de rentabilité attendu du projet soit supérieur au coût d'opportunité du capital, en l'occurrence le taux d'intérêt dans notre modèle simplifié. Ceci nous amène à une seconde règle en matière de choix d'investissement : réaliser les projets d'investissement dont le taux de rentabilité interne est supérieur au coût d'opportunité du capital.

Nous avons ainsi identifié deux critères de décision :

1. *le critère de la VAN* : entreprendre les projets dont la *VAN* est positive ;
2. *le critère du  $TRI$*  : entreprendre les projets dont le  $TRI$  est supérieur au coût d'opportunité du capital.

Dans notre modèle simple, ces deux règles conduisent à la même décision pour les projets d'investissement. En effet :

$$VAN > 0 \Leftrightarrow -I + \frac{C_1}{1 + r_f} > 0 \Leftrightarrow \frac{C_1 - I}{I} > r_f \Leftrightarrow TRI > r_f$$

### (suite)

Nous généraliserons l'analyse au chapitre 8. Nous montrerons notamment que le critère de la *VAN* reste valable dans tous les cas, mais que le critère du *TRI* peut poser problème dans un contexte plus général.

Il est important de remarquer que, dans notre modèle, le critère de choix (la *VAN*) est indépendant du mode de financement du projet. En effet, en remplaçant  $A$  par son expression dans la valeur de l'entreprise, nous obtenons :

$$V = \frac{C_1}{1 + r_f}$$

Ceci montre que, en certitude et dans un marché parfait des capitaux, la valeur de l'entreprise est indépendante de la structure financière. Il s'agit d'un résultat fondamental. Nous verrons qu'il peut, dans certaines conditions, être généralisé au cas de l'incertitude : c'est le célèbre théorème de Modigliani et Miller (1958).

## 2 La valeur actuelle en avenir incertain

L'absence d'incertitude dans le raisonnement limite considérablement le champ de l'analyse. En particulier, la distinction entre actions et obligations, qui est au cœur de la logique financière, est artificielle. En effet, dans ce cas, ces modes de financement sont équivalents. Nous reprenons les analyses de la section précédente en y introduisant l'incertitude.

### 2.1 Les états de la nature

Dans cette section, l'incertitude sur l'avenir est introduite le plus simplement possible. Nous supposons qu'il en existe une seule source, appelée l'**état de la nature**. Pour rendre l'exposé moins abstrait, nous assimilerons l'état de la nature à la situation économique. Afin de ne pas alourdir la présentation, nous limiterons le nombre d'états à deux (la généralisation à un nombre quelconque d'états n'ajoute rien au niveau des concepts, mais alourdit les formules) : la « bonne conjoncture » ( $b$ ) et la « mauvaise conjoncture » ( $m$ ) [encore appelée dépression]. Une et une seule de ces deux situations se produira. La probabilité que la conjoncture soit bonne est notée  $p$ , la probabilité qu'elle soit mauvaise est notée  $(1 - p)$ . En un an (en  $t = 1$ ), les revenus des investisseurs et les cash-flows générés par les entreprises peuvent prendre deux valeurs distinctes en fonction de la situation économique.

### 2.2 Les actifs financiers

Les revenus futurs des titres financiers traités sur le marché des capitaux dépendent de l'état de l'économie. Supposons d'abord qu'il n'existe que deux types d'instruments : des zéro-coupons unitaires et les actions d'une société. Leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau 1.3.

Le zéro-coupon unitaire est un titre sans risque : il procure à son détenteur un revenu futur de 1 € quel que soit l'état de l'économie. La valeur de marché de ce zéro-coupon

Tableau 1.3

**Caractéristiques des zéro-coupons unitaires et des actions**

	Prix aujourd'hui	Cash flow en bonne conjoncture	Cash flow en mauvaise conjoncture
Zéro-coupon unitaire	$v_1$	1	1
Action	$A$	$a_{1b}$	$a_{1m}$

est liée au taux d'intérêt sans risque (noté  $r_f$ , « risk-free rate ») par la relation :

$$v_1 = \frac{1}{1 + r_f}$$

L'action est un titre risqué, son revenu futur dépendant de la conjoncture. Elle peut générer deux valeurs différentes de cash-flow :  $a_{1b}$  et  $a_{1m}$  (avec  $a_{1b} > a_{1m}$ ). Le cash-flow est une variable aléatoire. Les probabilités associées à ses deux valeurs possibles sont  $p$  et  $(1 - p)$  respectivement. Le cash-flow attendu  $a_1$  est, par définition, égal à l'espérance mathématique des cash-flows futurs :

$$a_1 = p \times a_{1b} + (1 - p) \times a_{1m}$$

La rentabilité attendue  $r$  de l'action est définie par la relation :

$$r = \frac{a_1 - a}{a}$$

On obtient :

$$a = \frac{a_1}{1 + r}$$

On obtient la valeur de l'action  $a$  en actualisant le cash-flow attendu en prenant la rentabilité prévue de l'action comme taux d'actualisation. Cette approche est la plus souvent utilisée en pratique.

## 2.3 Les titres contingents et les prix d'état

Souvent, sur les marchés financiers, les titres traités peuvent être assimilés à des paniers de flux monétaires futurs ayant des caractéristiques différentes. Considérons, par exemple, un fonds d'État (obligation émise par le Trésor, et donc considérée comme sans risque) venant à échéance dans trois ans, de valeur nominale égale à 100 € et versant un coupon de 6 %. Les cash-flows associés à cette obligation sont repris dans le tableau 1.4.

Tableau 1.4

**Cash-flows de l'obligation**

Échéance (années)	1	2	3
Cash-flow	6 €	6 €	106 €

Comme montré dans le tableau 1.5, cette obligation peut être vue comme une combinaison de trois zéro-coupons.

Tableau 1.5

**Décomposition de l'obligation en zéro-coupons**

Zéro-coupons	Échéance	Valeur nominale
1	1 an	6 €
2	2 ans	6 €
3	3 ans	106 €

De même que les physiciens décomposent les atomes en particules élémentaires, les financiers peuvent décomposer les titres financiers en **titres financiers élémentaires**. Dans notre exemple, il s'agit des zéro-coupons d'échéances différentes. Le prix payé pour l'obligation doit, en conséquence, être égal à la somme des prix des titres financiers élémentaires. Dans notre exemple, le prix du fonds d'État est de 103 €. Il doit correspondre à la somme des prix des titres financiers élémentaires :

$$103 = 6 \times v_1 + 6 \times v_2 + 106 \times v_3$$

où  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  sont les prix de zéro-coupons unitaires venant à échéance dans un an, deux ans et trois ans.

En avenir certain, les titres financiers génèrent des revenus à des dates différentes. Ils sont décomposés en titres financiers élémentaires, les zéro-coupons unitaires, qui rapportent 1 € à une date donnée et rien aux autres dates. Le nombre de titres financiers élémentaires est égal au nombre de dates de paiement des revenus.

En avenir incertain (et à une période), les titres financiers génèrent des revenus dans différents états de la nature (les états de l'économie). Nous les décomposons en autant de titres financiers élémentaires que d'états de la nature. Ces titres élémentaires sont appelés **titres contingents**. Chaque titre financier élémentaire rapporte 1 € dans un état de la nature et rien dans les autres états. Prenons, de nouveau, un exemple. Supposons que nous disposions des données du tableau 1.6.

Tableau 1.6

**Données**

	Prix aujourd'hui	Cash flow en bonne conjoncture	Cash flow en mauvaise conjoncture
Zéro-coupon unitaire	0,95 €	1 €	1 €
Action	1,45 €	2 €	1 €

Chacun de ces titres peut être décomposé en titres contingents, un actif financier qui procure un revenu si et seulement si un état de la nature se matérialise. Nous pouvons ici en identifier deux : un titre contingent « bonne conjoncture » (noté  $B$ ), qui donne droit à 1 € en cas de bonne conjoncture et 0 € en mauvaise conjoncture, et un titre contingent « mauvaise conjoncture » (noté  $M$ ), qui donne droit à 1 € en cas de mauvaise conjoncture et 0 € en bonne conjoncture. Le tableau 1.7 illustre la décomposition des deux titres financiers en titres contingents.

Les prix des titres contingents sont appelés **prix d'état**. Les prix payés reflètent les valeurs des flux monétaires dans les deux états de la nature.

$$0,95 = 1 \times v_{1b} + 1 \times v_{1m} \quad 1,45 = 2 \times v_{1b} + 1 \times v_{1m}$$

Tableau 1.7

**Décomposition en titres contingents**

	Nombre de titres contingents unitaires B	Nombre de titres contingents unitaires M
Zéro-coupon unitaire	1	1
Action	2	1

où le prix aujourd’hui de 1 € est  $v_{1b}$  en cas de bonne conjoncture et  $v_{1m}$  en cas de mauvaise conjoncture. Pour résoudre ce système de deux équations, nous procédons en deux étapes. Tout d’abord, nous soustrayons la seconde équation de la première et nous en extrayons  $v_{1b}$ . Ensuite, nous remplaçons  $v_{1b}$  par sa valeur dans l’une des deux équations pour trouver  $v_{1m}$ . Ainsi, il est possible de déterminer que :

$$v_{1b} = 0,50 \text{ et } v_{1m} = 0,45$$

Les titres contingents ont une interprétation financière assez naturelle. Il s’agit simplement de contrats d’assurance. Les prix  $v_{1b}$  et  $v_{1m}$  sont les primes à payer pour s’assurer contre les risques économiques.

La connaissance des prix d’état permet de généraliser aisément, dans le cas d’un avenir incertain, les principaux résultats que nous avions trouvés en avenir certain. Considérons d’abord la décision d’investissement. Pour rappel, dans le cas d’un projet de coût initial  $I$  générant un cash-flow futur certain  $C_1$ , la valeur actuelle nette vaut :

$$VAN = -I + C_1 \times v_1$$

Reprendons le projet de coût initial  $I$ . Supposons maintenant que les cash-flows générés par le projet soient  $C_{1b}$  et  $C_{1m}$  dans les deux états de la nature. La valeur actuelle nette du projet s’écrit :

$$VAN = -I + C_{1b} \times v_{1b} + C_{1m} \times v_{1m}$$

Il est intéressant de remarquer que, dès lors que les prix d’état sont connus, les probabilités associées aux cash-flows futurs n’interviennent pas dans le calcul.

Il est intéressant de remarquer que, dès lors que les prix d’état sont connus, les probabilités associées aux cash-flows futurs n’interviennent pas dans le calcul.

## 2.4 La loi du prix unique et l’absence d’opportunités d’arbitrage en incertitude

Les prix d’état permettent de calculer aisément la valeur actuelle de cash-flows incertains. Dès lors, la question de leur existence est au centre de la logique financière et les recherches récentes ont démontré l’existence de prix d’état en l’absence d’opportunité d’arbitrage.

Commençons par préciser la notion d’arbitrage dans notre contexte d’incertitude. Considérons un portefeuille comprenant des zéro-coupons unitaires et des actions. Notons  $n_Z$  le nombre

de zéro-coupons et  $n_a$  le nombre d'actions. Remarquons que ces nombres peuvent être positifs ou négatifs. Une valeur positive correspond à l'achat du titre (une **position longue**). Un nombre négatif signifie que l'investisseur prend une position à découvert sur le titre (qualifiée de **position courte**). En gros, cela signifie qu'il emprunte. Une position courte sur le zéro-coupon est un emprunt sans risque classique. Pour réaliser une position courte en actions, l'investisseur emprunte un certain nombre d'actions qu'il revend. Il s'engage, en fin de période, à les racheter au cours du moment. Cette stratégie correspond donc à une forme d'emprunt mais dont le montant futur est incertain.

La valeur du portefeuille ainsi constitué est :

$$V = n_z v_1 + n_a a$$

La valeur future du portefeuille est fonction de l'état de la conjoncture :

$$V_{1b} = n_z + n_a a_{1b} V_{1m} = n_z + n_a a_{1m}$$

Une opportunité d'arbitrage existe s'il est possible de se constituer un portefeuille de valeur nulle, dont la valeur future soit strictement positive dans un des états de la nature et non négative dans l'autre état. Considérons, par exemple, les données suivantes :

Tableau 1.8

**Illustration  
d'une  
opportunité  
d'arbitrage**

	Prix aujourd'hui	Cash flow en bonne conjoncture	Cash flow en mauvaise conjoncture
Zéro-coupon unitaire	0,95 €	1 €	1 €
Action	0,95 €	2 €	1 €

En achetant une action ( $n_a = 1$ ) et en vendant un zéro-coupon ( $n_z = -1$ ), un investisseur se constituerait un portefeuille de valeur nulle et de valeur future positive en cas de bonne conjoncture et nulle en cas de mauvaise conjoncture. Il recevrait, en quelque sorte, un repas gratuit. Or, de telles occasions n'existent pas dans un marché concurrentiel.

La conséquence de l'absence d'opportunité d'arbitrage est qu'il existe des prix d'état positifs, solution du système d'équations :

$$v_1 = v_{1b} + v_{1m} \quad a = v_{1b} a_{1b} + v_{1m} a_{1m}$$

La loi du prix unique affirme, dès lors, que, en l'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur actuelle de cash-flows futurs incertains est :

$$VA = v_{1b} C_{1b} + v_{1m} C_{1m}$$

Notons que, dans ce modèle simplifié, le nombre de titres sur le marché est égal au nombre d'états de la nature, ce qui correspond à la situation d'un marché financier dit complet.

## 2.5 Le théorème de Modigliani-Miller en avenir incertain

Considérons une entreprise qui génère des cash-flows incertains. Supposons que cette entreprise soit financée par fonds propres.

$$\text{Valeur de l'entreprise} = I + \text{VAN} = C_{1b} \times v_{1b} + C_{1m} \times v_{1m}$$

Vérifions que la valeur de l'entreprise est indépendante de la structure financière. Si l'entreprise réalise un emprunt, le montant dû au créancier dans un an sera  $F$  (la valeur faciale). La dette est sans risque si :  $C_{1b} > C_{1m} > F$  (le montant dû sera payé quelle que soit la situation économique) [voir tableau 1.9].

Tableau 1.9

**Décomposition de la valeur de l'entreprise**

	Cash-flow d'exploitation	Dette	Actions
Bonne conjoncture	$C_{1b}$	$F$	$C_{1b} - F$
Mauvaise conjoncture	$C_{1m}$	$F$	$C_{1m} - F$
Valeur de marché des actions	$A = (C_{1b} - F) \times v_{1b} + (C_{1m} - F) \times v_{1m}$		
Valeur de marché de la dette			$D = F \times v_{1b} + F \times v_{1m}$

$$\begin{aligned} \text{Valeur de l'entreprise endettée} &= A + D \\ &= C_{1b} \times v_{1b} + C_{1m} \times v_{1m} \\ &= \text{valeur de l'entreprise non endettée} \end{aligned}$$

Supposons que :

$$C_{1b} > F > C_{1m}$$

En cas de bonne conjoncture, les intérêts et le principal sont payés. En revanche, en cas de mauvaise conjoncture, le cash-flow est insuffisant : les obligataires obtiennent un remboursement partiel, les actionnaires ne reçoivent aucun dividende (voir le tableau 1.10).

Tableau 1.10

**Décomposition de la valeur de l'entreprise en tenant compte du risque de faillite**

	Cash-flow d'exploitation	Dette	Actions
Bonne conjoncture	$C_{1b}$	$F$	$C_{1b} - F$
Mauvaise conjoncture	$C_{1m}$	$C_{1m}$	0
Valeur de marché des actions	$A = (C_{1b} - F) \times v_{1b}$		
Valeur de marché de la dette			$D = F \times v_{1b} + C_{1m} \times v_{1m}$

$$\begin{aligned} \text{Valeur de l'entreprise endettée} &= V = A + D \\ &= C_{1b} \times v_{1b} + C_{1m} \times v_{1m} \\ &= \text{valeur de l'entreprise non endettée} \end{aligned}$$

## Résumé

Nous avons, dans ce chapitre d'introduction, mis en évidence plusieurs points importants qui seront développés plus longuement et généralisés dans la suite de l'ouvrage.

- Les décisions financières des entreprises (choix d'investissement et politique de financement) doivent viser à maximiser la valeur des actions.
- S'il existe un marché parfait des capitaux, la maximisation de la valeur des actions se traduit par une règle simple : réaliser des opérations ayant une valeur actuelle nette positive.
- Dans le modèle simple analysé (marché parfait des capitaux, une période, pas d'impôts), la valeur actuelle nette des opérations de financement est nulle et la valeur de l'entreprise est indépendante de sa structure de financement étant donné la politique d'investissement fixée.

## Références bibliographiques

- ARROW, K. J. « Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques », *Économétrie*, Colloque international CNRS, 1953, pp. 41-47, traduction « The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing », *Review of Economic Studies*, 31 (1964), pp. 91-96.
- COBAUT, R., *Théorie financière*, 3<sup>e</sup> édition, Economica, 1994.
- COCHRANE, J., *Asset Pricing*, Princeton University Press, 2001.
- COPELAND, T. et WESTON, F., *Financial Theory and Corporate Policy*, 3<sup>d</sup> edition, Addison-Wesley, 1988.
- DEMANGE, G. et ROCHET, J.-C., *Méthodes mathématiques de la finance*, Economica, 1992.
- FAMA, E. F. et MILLER, M. H., *The Theory of Finance*, Hold, Rinehart & Winston, 1971.
- FISHER, I., *The Theory of Interest*, Macmillan Co., 1930.
- HIRSHLEIFER, J. et RILEY, J., « The Analytics of Uncertainty and Information – An Expository Survey », *Journal of Economic Literature*, 42 (December 1979), pp. 1375-1421.
- HIRSHLEIFER, J., « On the Theory of Optimal Investment Decision », *Journal of Political Economy*, 66, 4 (August 1958), pp. 329-352.
- HIRSHLEIFER, J., *Investment, Interest and Capital*, Prentice Hall, 1970.
- QUINTART, A. et ZISSWILLER, R., *Théorie de la finance*, 2<sup>e</sup> édition, Presses universitaires de France, 1990.
- SHARPE, W. F., « Nuclear Financial Economics », Beaver, W. H. et G. Parker (editors), *Risk Management : Problems and Solutions*, McGraw-Hill, 1995.
- VARIAN, H., *Intermediate Microeconomics*, 4<sup>th</sup> edition, W. W. Norton & Company, 1996.
- VON NEUMAN, J. et MORGESTEIN, O., *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, 1944.

## Commentaires

Les notions développées dans ce chapitre sont abordées dans Vernimmen (2000), chapitre 21 ; Brealey Myers (2003), chapitre 2 ; et Ross Westerfield Jaffe (2002), chapitre 3. Le lecteur dont le bagage comprend des connaissances de microéconomie n'aura pas manqué de remarquer que le modèle simplifié développé dans ce chapitre trouve ses sources dans la théorie du choix intertemporel de consommation (voir, par exemple, Varian [1987], chapitre 10). Il trouve ses sources dans les travaux de l'économiste américain Irving Fisher (1930) à qui l'on doit le théorème de séparation des décisions d'investissement et de financement dans un marché parfait des capitaux. Hirshleifer (1958) contribua beaucoup à positionner le modèle comme l'un des fondements de la finance moderne. Deux ouvrages assez anciens restent les meilleures références en la matière : Hirshleifer (1970) et Fama Miller (1971). Pour une présentation du modèle en français, voir notamment Quintart et Zisswiller (1990) ou Cobbaut (1994).

Le modèle étudié dans ce chapitre a été développé initialement par Arrow (1953). Une présentation complète avec bibliographie est fournie par Hirshleifer et Riley (1979). Bien que constituant un modèle important en économie, cette approche ne se retrouve généralement pas dans les manuels de finance. Copeland et Weston (1988) constituent une exception. Le critère de l'espérance mathématique de l'utilité (ou espérance morale) a été initialement présenté par von Neuman et Morgenstein (1944).

C'est à William Sharpe que nous devons l'analogie entre les physiciens qui décomposent les atomes en particules élémentaires et les financiers qui décomposent les titres financiers en titres financiers élémentaires (aussi appelés titres contingents ou titres Arrow-Debreu du nom des auteurs qui ont introduit ce paradigme). Il propose de dénommer cette approche d'économie financière nucléaire dans Sharpe (1995).

# Problèmes et exercices

Les premiers exercices qui suivent ont pour objectif de tester la compréhension de la notion de valeur actuelle nette, de la loi du prix unique et du premier théorème de Modigliani-Miller. Dans ce cadre, les exercices présentent la manière de déterminer le facteur d'actualisation et la rentabilité attendue, la notion d'arbitrage ainsi que la valorisation d'actions dans un monde sans incertitude.

## La valeur actuelle en certitude

### Exercice 1 Prendre une décision sur la base de la valeur future

#### Énoncé

Supposons que le taux d'intérêt sans risque en vigueur sur le marché des capitaux soit de  $r_f = 5\%$ . Vous venez de trouver un pavillon dans la banlieue parisienne que vous pourriez acquérir pour 150 000 €. Une rapide analyse du marché immobilier vous apprend que vous pourriez le revendre dans un an pour un montant, après frais de rénovation, de 200 000 €.

En vous fondant sur la valeur future, quelle sera votre décision si :

- a** vous disposez d'une somme de 150 000 € sur votre compte en banque ?
- b** vous ne disposez pas de la somme nécessaire pour acheter et rénover le pavillon ?

#### Solution

- a** Commençons par analyser le problème de choix dans le cas où vous possédez la somme nécessaire pour l'achat du pavillon.

Si vous n'achetez pas le pavillon, vous placeriez votre argent pour un an. Étant donné le taux en vigueur sur le marché, la valeur future de ce placement serait :

$$VF = (150\,000) \times (1 + 5\%) = 157\,500 \text{ €}$$

Si par contre, vous achetez le pavillon, vous renonceriez au placement mais vous obtiendriez, dans un an, un cash-flow de 200 000 €.

La valeur future nette de l'achat (la différence entre le cash-flow futur de l'achat et celui d'un placement) est donc :

$$VFN = +200\,000 - 157\,500 = +42\,500 \text{ €}$$

Par conséquent, l'investissement est rentable. En achetant le pavillon, vous dégagerez un surplus de 42 500 € par rapport à un placement.

- b** Si vous ne possédez pas les capitaux nécessaires, la conclusion est la même. La somme de 157 500 € calculée précédemment correspond à la somme du remboursement de l'emprunt (150 000 €) et du paiement des intérêts (7 500 €). La *VFN* calculée précédemment correspond donc au solde disponible après revente et remboursement de l'emprunt.

## Exercice 2 Calculer la valeur actuelle nette d'un investissement

### Énoncé

- Reprenez les données de l'exercice 1.1.
- a** Sur la base des données de l'exercice 1.1, calculez la *VAN* du projet. Que décidez-vous ?
- b** Vérifiez que la *VAN* est égale à la valeur actuelle de la valeur future nette calculée dans l'exercice 1.1.
- c** Si vous ne disposez d'aucunes ressources, combien emprunteriez-vous pour pouvoir disposer immédiatement de la *VAN* du projet ?

### Solution

- a** La valeur actuelle nette de l'investissement est :

$$VAN = -150\,000 + \frac{200\,000}{1,05} = 40\,476 \text{ €}$$

La *VAN* est positive ; dès lors, sur la base de la règle de la *VAN*, le projet doit être réalisé.

- b** Notons que la *VAN* est la valeur actuelle de la *VFN* calculée précédemment :

$$VAN = \frac{VFN}{1+r} = \frac{42\,500}{1,05} = 40\,476 \text{ €}$$

- c** Supposons que vous ne possédiez pas les capitaux nécessaires et que vous souhaitez emprunter. Si le montant emprunté était égal au montant de l'investissement initial, vous devriez attendre la fin de l'année avant de disposer du profit de l'opération. Que faire si vous souhaitez en bénéficier immédiatement ? Il suffit d'emprunter la valeur actuelle du produit de la vente, c'est-à-dire :

$$VA(200\,000) = \frac{200\,000}{1,05} = 190\,476 \text{ €}$$

Vous consacrez 150 000 € à l'achat du pavillon. Il vous reste donc 40 476 €, c'est-à-dire le montant de la valeur actuelle nette calculée précédemment.

## Exercice 3 Trouver le facteur d'actualisation

### Énoncé

Supposons que le taux d'intérêt à un an soit de 3,50 %.

- a** Calculez la valeur du facteur d'actualisation.

- b** Quel prix seriez-vous prêt à payer pour recevoir 75 000 € dans un an ?

### Solution

- a** Le facteur d'actualisation est le prix de marché de 1 € disponible dans un an. Il est lié au taux d'intérêt par la relation :

$$v_1 = \frac{1}{1 + r_f}$$

Il est donc égal à :

$$v_1 = \frac{1}{1,035} = 0,96618$$

- b** Le prix à payer pour recevoir 75 000 € dans un an est égal à la valeur actuelle :

$$VA(75\ 000) = 75\ 000 \times 0,96618 = 72\ 463,77 \text{ €}$$

## Exercice 4 Déterminer la rentabilité attendue d'un bon du Trésor

### Énoncé

Un bon du Trésor est une forme de zéro-coupon. Comme toutes les obligations, la cotation est exprimée en pourcentage de la valeur nominale. Supposons que le prix coté soit de 93,45 et que l'échéance du zéro-coupon tombe dans exactement un an.

- a** Calculez la rentabilité attendue de ce zéro-coupon.  
**b** Si le marché est à l'équilibre, quel est le taux d'intérêt à un an ?

### Solution

- a** Le prix coté correspond à une valeur nominale de 100. En payant 93,45 aujourd'hui, nous réaliserons une plus-value au cours de l'année qui vient de  $100 - 93,45 = 6,55$ . La rentabilité attendue est donc :

$$R = \frac{\text{Profit attendu}}{\text{Investissement}} = \frac{6,55}{93,45} = 7 \%$$

- b** Si le marché est à l'équilibre, le taux d'intérêt est égal à la rentabilité attendue du bon du Trésor. Le taux d'intérêt à un an est donc égal à 7 %.

## Exercice 5 Réaliser des arbitrages sur bon du Trésor

### Énoncé

En parcourant *L'Écho des marchés*, votre quotidien financier, vous découvrez les informations suivantes :

- Taux d'intérêt un an = 4,50 %.
- Cours d'un bon du Trésor venant à échéance à un an (% du nominal) = 95.
- Ces données sont-elles cohérentes ? Si non, comment réaliser un profit ? Pour répondre à ces questions :

- a** Calculez le prix théorique d'un bon du Trésor de valeur nominale égale à 100 € étant donné le taux d'intérêt en vigueur sur le marché.
- b** Déterminez l'arbitrage à réaliser pour dégager un profit immédiat sur la base de la différence entre le prix de marché et le prix théorique calculé en **a**. Supposez que l'arbitrage porte sur des bons du Trésor pour une valeur nominale d'un million d'euros.
- c** Le lendemain, vous constatez que le taux d'intérêt à un an est inchangé. Le cours d'un bon du Trésor a brusquement augmenté et cote 96 € pour une valeur nominale de 100 €. Quel nouvel arbitrage devriez-vous initier ?

### Solution

- a** Si le taux d'intérêt est de 4,50 %, le facteur d'actualisation vaut :

$$\nu_1 = \frac{1}{1,045} = 0,9569$$

En conséquence, le prix de marché d'un bon du Trésor à un an de valeur faciale égale à 100 € devrait être :

$$\text{Prix théorique} = 100 \times \nu_1 = 95,694 \text{ €}$$

- b** Le prix de marché étant de 95, le bon du Trésor est clairement sous-évalué. Présenté différemment, il s'avère que la rentabilité attendue de l'achat d'un bon du Trésor au prix coté sur le marché est de :

$$R = \frac{100 - 95}{100} = 5 \%$$

Cette rentabilité attendue est supérieure au taux d'intérêt en vigueur.

Toutes les conditions sont remplies pour réaliser un arbitrage. Pour cela, il faudra emprunter au taux du marché et investir le produit de l'emprunt en bons du Trésor. Supposons que l'opération porte sur 1 000 000 €. Les cash-flows de l'opération d'arbitrage sont repris dans le tableau 1.11.

Tableau 1.11

**Cash-flows de l'arbitrage**

	Cash flow $t = 0$	Cash flow $t = 1$
Emprunt	+956 938 (= 1 000 000 × $\nu_1$ )	-1 000 000
Achat de bons du Trésor	-950 000	+1 000 000
Total	+6 938	0

- c** Si le prix de marché d'un bon du Trésor est de 96, une nouvelle occasion d'arbitrage se présente. Le prix de marché étant supérieur au prix théorique calculé ci-dessus, le bon du Trésor est surévalué. Il faut donc vendre à découvert le bon du Trésor et placer sur le marché la valeur actuelle du montant nominal. Les cash-flows de cette opération d'arbitrage sont donnés dans le tableau 1.12.

Que cet exercice ne vous fasse pas trop rêver. Les occasions de réaliser un profit sans risque grâce à une opération d'arbitrage sont très rares. Les marchés de capitaux sont très concurrentiels. Dès que l'occasion se présente, les arbitragistes agissent et les prix se modifient en conséquence pour éliminer tout profit d'arbitrage.

Tableau 1.12

**Cash-flows de l'arbitrage**

	Cash flow $t = 0$	Cash flow $t = 1$
Vente à découvert de bons du Trésor	+960 000	-1 000 000
Placement à un an $(= 1\ 000\ 000 \times v_1)$	-956 938	+1 000 000
Total	+3 062	0

**Exercice 6 Valoriser une entreprise non endettée****Énoncé**

Nicolas Pipette est chercheur au Laboratoire de biologie moléculaire de l’Institut européen de recherche biologique. Au cours de ses recherches, son équipe a mis au point un vaccin permettant d’éradiquer la maladie de Brotstyk-Galanguo, une maladie répandue dans les universités du monde entier et qui se traduit par un besoin aigu pour ceux qui sont touchés de participer à des réunions. Avant de publier le résultat de leurs recherches, Nicolas Pipette et son équipe ont pris la précaution de créer une société, Biopipette SA et de prendre un brevet au nom de la société.

Le montant à investir pour produire le vaccin s’élève à un million d’euros. Le cash-flow futur attendu de la vente du vaccin, un an plus tard, est de 1,25 million d’euros. Ces montants sont connus avec certitude. Après cela, la maladie sera éradiquée et la société sera dissoute. Le taux d’intérêt sans risque est de 5 %. La société Biopipette n’est pas soumise à l’impôt des sociétés.

M. Pipette est chercheur et les choses de la finance le dépassent. Il a donc contacté la banque Ducoin pour l’aider à prendre les bonnes décisions. Dans un courriel adressé à M. d’Argent, il a formulé les questions qu’il se pose :

De : Nicolas.Pipette@ierb.fr

À : Dargent@banqueducoin.com

Objet : Projet Biopipette

Supposons que le projet soit entièrement financé par capitaux propres. Quel serait :

- a** le bilan initial de Biopipette ?
- b** le compte de résultat prévisionnel ?
- c** la valeur de marché des actions ?
- d** la plus-value que réaliseraient les actionnaires grâce au projet ?

**Solution**

Financement par capitaux propres :

- a** Bilan initial de Biopipette

Bilan de Biopipette en $t = 0$			
Immobilisés nets	1 000 000 €	Capitaux propres	1 000 000 €

**b** Compte de résultat attendu

Résultat d'exploitation	1 250 000 €
Charges financières	–
Impôts	–
Bénéfice	1 250 000 €
Affectation du résultat	
Remboursement de la dette	–
Dividendes	1 250 000 €

**c** Valeur de marché des actions =  $VA(\text{Dividendes}) = 1 250 000 / 1,05 = 1 190 476 \text{ €}$ **d** Plus-value pour les actionnaires = Valeur de marché – Capitaux propres  
 $= 1 190 476 - 1 000 000$   
 $= 190 476 \text{ €}$ 

La plus-value pour les actionnaires est égale à la VAN du projet :

$$\text{VAN} = -I + C_1 / (1 + r) = -1 000 000 + 1 250 000 / 1,05 = 190 476 \text{ €}$$

**Exercice 7 Valoriser une entreprise endettée****Énoncé**

Supposons maintenant que Biopipette (voir exercice 1.6) emprunte 500 000 € (à la banque Ducoin, bien entendu) pour financer une partie du projet, le solde étant financé par capitaux propres.

**Cela modifierait-il les réponses fournies précédemment ?****Solution**

Financement par dette et capitaux propres

**Bilan initial de Biopipette**

Bilan de Biopipette en $t = 0$			
Immobilisés nets	1 000 000 €	Capitaux propres	500 000
		Dettes	500 000

**Compte de résultat attendu**

Résultat d'exploitation	1 250 000 €
Charges financières	25 000 (= 5 % × 500 000)
Impôts	–
Bénéfice	1 225 000 €
Affectation du résultat	
Remboursement de la dette	500 000 €
Dividendes	725 000 €

$$\text{Valeur de marché des actions} = \text{VA(Dividendes)} = 725\ 000 / 1,05 = 690\ 476 \text{ €}$$

$$\begin{aligned}\text{Plus-value pour les actionnaires} &= \text{Valeur de marché} - \text{Capitaux propres} \\ &= 690476 - 500000 \\ &= 190476\end{aligned}$$

La plus-value pour les actionnaires lorsque le projet est financé partiellement par dette est égale à la plus-value en cas de financement total par capitaux propres. Le mode de financement du projet n'affecte pas la valeur.

Gardez à l'esprit que Biopipette n'est pas soumise à l'impôt des sociétés. Nous examinerons l'incidence du mode de financement dans un contexte plus réaliste peu après.

## Exercice 8 Fixer le prix d'émission de nouvelles actions

### Énoncé

Suite aux éclaircissements fournis par M. d'Argent (voir exercices 1.6 et 1.7), Nicolas Pipette et son équipe ont décidé de réaliser le projet d'investissement. Les membres de l'équipe ont accepté de contribuer au financement du projet à concurrence de 100 000 €. La banque Ducoin a souhaité être associée au projet et a prêté 500 000 € à Biopipette. Il reste cependant 400 000 € à trouver pour boucler le financement. Cette somme sera levée *via* une augmentation de capital, c'est-à-dire l'émission d'actions nouvelles contre espèce.

De nombreuses discussions ont eu lieu pour déterminer le nombre d'actions nouvelles à émettre et le prix par action que devront payer les actionnaires externes à l'équipe. Nicolas Pipette envoie donc un nouveau courriel à M. d'Argent pour tenter de clarifier ce problème.

De : Nicolas.Pipette@ierb.fr

À : Dargent@banqueducoin.com

Objet : Projet Biopipette

Cher monsieur d'Argent,

Comme vous le savez, il nous reste à lever 400 000 € par une augmentation de capital pour finaliser le financement de notre projet. Les membres de mon équipe ont apporté à Biopipette 100 000 € en souscrivant 1 000 actions au prix de 100 € par action et votre banque nous a accordé un emprunt de 500 000 € (ce dont nous vous remercions une fois encore).

Nous nous interrogeons sur le nombre d'actions nouvelles à émettre en contrepartie des 400 000 € que nous devons encore lever.

- a** Nous avions initialement pensé émettre 4 000 actions supplémentaires à 100 € par action, le prix payé par les membres de mon équipe par action. Mais nous craignons de voir disparaître au profit des nouveaux actionnaires une bonne partie de la VAN de notre projet.

- b** Si le prix de 100 € par action est trop faible, quel est le prix maximum que nous pourrions exiger ?

**Solution**

Nous avons calculé, dans l'exercice 1.7, la capitalisation boursière de Biopipette si la société se finance par dette à concurrence de 500 000 € :

Capitalisation boursière (valeur de marché des actions)  $A = 690\,476$  € :

- a** En émettant 4 000 actions nouvelles à 100 € par action, Biopipette porterait le nombre total d'actions à 5 000 (1 000 actions détenues par les membres de l'équipe et 4 000 actions souscrites par les nouveaux actionnaires).

La capitalisation boursière est égale au nombre d'actions multiplié par le cours par action. En conséquence, le cours par action  $P$  serait :

$$P = 690\,476 / 5\,000 = 138,095 \text{ €}$$

Le tableau 1.13 reprend la répartition des plus-values réalisées par les actionnaires de Biopipette.

Tableau 1.13

**Répartition des plus-values par types d'actionnaires**

	Nombre d'actions	Plus-value par titre	Plus-value totale
Nicolas Pipette et son équipe	1 000	38,095 € (= 138,095 – 100)	38 095 €
Actionnaires externes	4 000	38,095 € (= 138,095 – 100)	152 381 €
Ensemble des actionnaires	5 000		190 476 €

À la lecture du tableau 1.13, nous pouvons effectivement constater que l'intuition de Nicolas Pipette et son équipe est correcte : en émettant les actions nouvelles à 100 € par action, l'équipe de Pipette céderait une partie importante de la VAN du projet aux nouveaux actionnaires.

- b** Quel est le prix maximum qui peut être demandé aux nouveaux actionnaires ? Notez bien que le montant total de l'émission est fixé. Il est égal au nombre d'actions nouvelles émises multiplié par le prix d'émission. En modifiant le prix d'émission, on modifie simultanément le nombre d'actions (un prix d'émission plus élevé conduit à émettre moins d'actions).

La plus-value par titre des actionnaires externes est égale à la différence entre le prix de marché et le prix d'émission des actions nouvelles. Elle disparaît si le prix d'émission est égal au prix de marché. Il suffit donc de calculer le prix de marché. Celui-ci est égal à la capitalisation boursière (que nous connaissons) divisée par le nombre de titres (que nous ne connaissons pas puisqu'il dépend du prix d'émission). Sommes-nous tombés dans une voie sans issue ? Heureusement non. Selon vos goûts et vos talents informatiques, deux solutions s'offrent à vous pour sortir de l'impasse.

Si l'algèbre vous rebute, utilisez Excel. Vous trouverez ci-dessous une illustration des calculs qui précèdent dans le format Excel. Notez que le prix d'émission des actions

nouvelles se trouve dans la cellule B8 dans cette illustration. Augmentez le prix d'émission (par exemple à 150 € par action, et observez ce qui se passe). Le prix maximum que Biopipette peut demander pour les actions nouvelles est celui qui élimine la plus-value pour les actionnaires externes. Vous pouvez procéder par essais successifs ou utiliser la commande Valeur cible (*Goal Seek*) qui se trouve dans le menu Outils (*Tools*). Le prix maximum que vous obtiendrez est de 290,48 €.

1	A	B	C
2	Nicolas Pipette et son équipe		
3	Nombre d'actions	1 000	Donnée
4	Prix d'émission	100 €	Donnée
5	Montant total investi	100 000 €	=B3*B4
6	Actionnaires externes		
7	Montant total apporté	400 000 €	Donnée
8	Prix d'émission	100 €	Donnée
9	Nombre d'actions émises	4 000	=B7/B8
10	Capitalisation boursière	690 476 €	Donnée
11	Nombre total d'actions	5 000	=B3+B9
12	Cours par action	138,095	=B10/B11
13	Plus-value des actionnaires		
14	Nicolas Pipette et son équipe	38 095 €	=B3*(B12-B4)
15	Actionnaires externes	152 381 €	=B9*(B12-B8)
16	Total	190 476 €	=B14+B15

Utilisation de Valeur cible (*Goal Seek*) dans Outils (*Tools*) : cette commande permet d'éviter de longs tâtonnements pour aboutir à la solution recherchée. Dans notre exemple, il faut demander à Excel de mettre la cellule B15 égale à 0 en modifiant la cellule B8.

La seconde solution pour sortir de l'impasse est d'utiliser un peu d'algèbre. Nous prendrons les notations suivantes :

$n$  le nombre d'actions souscrites par l'équipe Pipette (une donnée)

$P_1$  le prix d'émission des actions souscrites par l'équipe Pipette (une donnée)

$I$  le montant de l'investissement (une donnée)

$D$  le montant de la dette (une donnée)

$A$  la capitalisation boursière des actions (une donnée)

$m$  le nombre d'actions nouvelles souscrites par les actionnaires externes (inconnue)

$P_2$  le prix d'émission des actions souscrites par les actionnaires externes (inconnue)

$P$  le prix d'équilibre des actions (inconnue)

La première équation nous indique que l'investissement est financé par actions et par dette :

$$I = n \times P_1 + m \times P_2 + D$$

La seconde équation exprime l'égalité entre la capitalisation boursière et le nombre total d'actions multiplié par le cours d'équilibre par action :

$$A = (n + m) \times P$$

En soustrayant la seconde équation de la première et en regroupant les termes, il vient :

$$A + D - I = n \times (P - P_1) + m \times (P - P_2)$$

Cette expression nous donne la répartition de la valeur actuelle ( $A + D - I = VAN$ ) entre l'équipe Pipette et les actionnaires externes. On constate, comme expliqué plus haut, que les actionnaires externes ne réalisent aucune plus-value si le prix d'émission  $P_2 = P$ . En remplaçant  $P_2$  par  $P$  dans la première équation, on obtient le nombre d'actions nouvelles à émettre en fonction du prix d'équilibre :

$$m = (I - n \times P_1 - D) / P$$

Le prix d'équilibre est obtenu en remplaçant  $m$  par sa valeur dans la seconde équation et en extrayant  $m$  :

$$P = (A + n \times P_1 + D - I) / n$$

Dans notre exemple, le prix d'émission et le nombre d'actions à émettre sont donc :

$$\begin{aligned} P &= (690\,476 + 100\,000 + 500\,000 - 1\,000\,000) / (1\,000) = 290,48 \text{ €} \\ M &= (400\,000) / (290,48) = 1\,377 \end{aligned}$$

En dépit de la simplicité du contexte (une période, avenir certain), cet exercice a une portée générale : l'émission d'actions par une société en dessous du prix d'équilibre entraîne un transfert de richesse des anciens actionnaires (l'équipe Pipette dans cet exercice) vers les nouveaux actionnaires. Ce phénomène est connu sous le nom de **dilution**. Notez bien que la dilution des actionnaires anciens n'est pas due à l'augmentation du nombre d'actions, mais à un prix d'émission des actions nouvelles mal fixé.

## Exercice 9 Établir un budget d'investissement

### Énoncé

Nathalie vient d'être engagée comme adjointe de M. Olympe, directeur général de la société FLOP (Fabrique de logos olympiques parfumés), une société nouvellement créée pour produire et commercialiser un ensemble de produits à vendre aux spectateurs des Jeux olympiques qui auront lieu dans un an. Les idées fourmillent au sein de la société et de nombreux projets sont à l'étude. Le comité de direction, qui aura lieu demain, est chargé de les sélectionner. Au cours de l'entretien avec M. Olympe, Nathalie a recueilli quelques informations utiles :

1. La société a en caisse 30 000 € qu'elle destine au financement des projets.
2. Le taux d'intérêt en vigueur sur le marché est de 5 %.

3. Les caractéristiques des projets sont les suivantes :

Code Projet		Investissement initial	Cash-flow d'exploitation attendu
A	Casquettes au logo des jeux	15 000 €	17 500 €
B	Tee-shirts au logo des jeux	10 000 €	10 800 €
C	Parasols/Parapluies	12 000 €	13 450 €
D	Trompettes	13 000 €	13 250 €
	Total	50 000 €	55 000 €

Le problème, a expliqué M. Olympe, est simple. Il faut accepter l'ensemble des projets, ce qui nous donnera une rentabilité de 10 % sur les capitaux investis. Mais le redoutable M. Strictosensus – responsable des finances de la société – n'est pas d'accord. « Nous disposons de 30 000 € en caisse et il faut donc limiter nos investissements aux projets les plus rentables. »

Nathalie est chargée d'analyser le problème. En sirotant un café, elle résume les questions à aborder pour la réunion du lendemain :

- a** M. Olympe a-t-il effectivement raison de vouloir réaliser tous les projets ?
- b** M. Strictosensus a-t-il raison de limiter le budget d'investissement au montant des capitaux disponibles ?

### Solution

Ni M. Olympe, ni M. Strictosensus n'ont raison.

M. Olympe fonde son argumentation sur la rentabilité moyenne de l'ensemble des projets. Or, l'examen des projets individuels fait apparaître un projet non rentable. Le tableau 1.14 détaille ces derniers.

Tableau 1.14

### VAN et TRI des différents projets

Projet	VAN	TRI
A	1 667 €	16,67 %
B	286 €	8,00 %
C	-190 €	3,46 %
D	619 €	6,42 %

Il faut donc abandonner le C, ce qui aboutit à un budget de 38 000 €.

Reste à convaincre M. Strictosensus. Dans un marché parfait des capitaux, la décision d'investir est indépendante du financement. Le coût du capital de FLOP est de 5 %. Il est donc intéressant pour l'entreprise de lever des fonds extérieurs (en empruntant) pour les investir dans des projets qui rapportent plus que le coût du financement.

# État de la nature, titres contingents, actifs financiers

## Exercice 10 Calculer la rentabilité attendue

### Énoncé

Vous avez rassemblé les données suivantes concernant des titres cotés sur le marché (voir tableau 1.15).

Tableau 1.15

### Données

	Prix aujourd'hui	Cash-flow en bonne conjoncture	Cash-flow en mauvaise conjoncture
Bon d'État	95,50 €	100 €	100 €
Action Vénus	82 €	120 €	50 €

La probabilité de la bonne conjoncture est estimée à 60 %.

- a** Calculez le taux d'intérêt sans risque.
- b** Calculez le cash-flow attendu (revente et éventuel dividende) de l'action Vénus.
- c** Calculez la rentabilité attendue de l'action Vénus.

### Solution

- a** Le taux d'intérêt sans risque est calculé sur la base des données relatives au bon d'État (celui-ci est bien sûr sans risque vu qu'il vous garantit le même montant quel que soit l'état de la nature) :

$$r_f = \frac{100 - 95,50}{95,50} = 4,71 \%$$

- b** Le cash-flow attendu de l'action Vénus est égal à la moyenne des cash-flows futurs pondérée par les probabilités associées aux deux états de l'économie :

$$a_1 = 0,60 \times 120 + (1 - 0,60) \times 50 = 92 \text{ €}$$

- c** La rentabilité attendue de l'action Vénus est égale à la plus-value attendue (la différence entre le cash-flow attendu et le prix aujourd'hui) divisée par le prix aujourd'hui :

$$r = \frac{92 - 82}{82} = 12,20 \%$$

## Exercice 11 Calculer les prix d'actifs contingents

### Énoncé

Le tableau 1.16 reprend des données concernant les actions Alpha et Bêta.

- a** Calculez les prix des titres contingents unitaires.
- b** Calculez le taux d'intérêt sans risque.

### Solution

- a** Pour obtenir les prix des titres contingents unitaires, nous devons résoudre le système de deux équations à deux inconnues suivant :

Tableau 1.16

**Données**

	Prix aujourd’hui	Cash-flow en bonne conjoncture	Cash-flow en mauvaise conjoncture
Alpha	9 €	7 €	16 €
Bêta	12 €	10 €	20 €

$$9 = 7 v_{1b} + 16 v_{1m} \quad 12 = 10 v_{1b} + 20 v_{1m}$$

Divisons la première équation par 7 et la seconde par 10 (les coefficients de  $v_{1b}$ ) pour obtenir :

$$9 / 7 = v_{1b} + 16 / 7 v_{1m} \quad 12 / 10 = v_{1b} + 20 / 10 v_{1m}$$

Soustrayons maintenant la seconde équation de la première :

$$(9 / 7) - (12 / 10) = (16 / 7 - 20 / 10) v_{1m}$$

Nous en déduisons que :

$$v_{1m} = 0,30$$

En remplaçant  $v_{1m}$  dans l'une des équations, nous trouvons :

$$v_{1b} = 0,60$$

La solution de cet exercice peut également être trouvée en exprimant le problème sous forme matricielle :

$$\mathbf{P} = \mathbf{C} \mathbf{v}$$

où  $\mathbf{P}$  est le vecteur ( $2 \times 1$ ) des prix des actions,  $\mathbf{C}$  est la matrice ( $2 \times 2$ ) des cash-flows futurs dans les deux états de la nature et  $\mathbf{v}$  est le vecteur ( $2 \times 1$ ) des prix des titres contingents unitaires. On obtient :

$$\mathbf{v} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P}$$

Vous pouvez aisément réaliser ce calcul dans Excel en utilisant les fonctions MINVERSE et MMULT. Notez que la résolution basée sur le calcul matriciel est de portée plus générale que le cas particulier de deux états de la nature développé ici. Cette méthode peut être utilisée pour un nombre quelconque  $N$  d'états de la nature. Dans ce cas, la taille des vecteurs et des matrices est la suivante :

$$\mathbf{P} : (N \times 1), \mathbf{C} : (N \times N), \mathbf{v} : (N \times 1)$$

Notons enfin que, pour que le système d'équations ait une solution, la matrice  $\mathbf{C}$  doit avoir un inverse. Mais cela devient un peu trop technique et nous renvoyons le lecteur intéressé à un ouvrage plus avancé (par exemple, en français, Demanche et Rochet [1992]).

- b** En achetant les deux titres contingents unitaires, un investisseur réalise un placement sans risque (il touchera 1 quel que soit l'état de la nature). En conséquence :

$$\nu_{1b} + \nu_{1m} = \frac{1}{1 + r_f}$$

Le taux d'intérêt sans risque est donc :

$$r_f = \frac{1}{0,60 + 0,30} - 1 = 11,11 \%$$

## Actifs financiers

### Exercice 12 Valoriser des titres sur la base des prix de titres contingents

#### Énoncé

Supposons que les prix des titres traités soient fonction de la météo. Deux états sont possibles : soleil et pluie. La probabilité du soleil est 0,6. Vous avez repris dans le tableau 1.17 les données relatives à des contrats d'assurance des risques météo.

Vous êtes chargé d'analyser les titres financiers repris dans le tableau 1.18.

- a** Quels sont les prix de ces différents titres ?  
**b** Quelles sont leurs rentabilités attendues respectives ?

Tableau 1.17

Données relatives à des contrats d'assurance des risques météo

	Prix aujourd'hui	Cash-flow en cas de soleil	Cash-flow en cas de pluie
Assurance soleil	55 €	100 €	0 €
Assurance pluie	40 €	0 €	100 €

Tableau 1.18

Titres financiers

	Cash-flow en cas de soleil	Cash-flow en cas de pluie
Fonds d'État	100 €	100 €
Crémasol (un producteur de crème solaire)	20 €	5 €
Paraplus (un producteur de parapluies)	10 €	50 €

## Solution

- a Les contrats d'assurance permettent d'obtenir les prix des titres contingents unitaires ( $v_{1,soleil}$  et  $v_{1,pluie}$ ). En effet, les prix payés reflètent les valeurs des cash-flows dans les deux états de la nature.

$$55 = 100 \times v_{1,soleil} + 0 \times v_{1,pluie} \quad 40 = 0 \times v_{1,soleil} + 100 \times v_{1,pluie}$$

Nous obtenons :

$$v_{1,soleil} = 0,55 \quad v_{1,pluie} = 0,40$$

En conséquence, les valeurs de marché des trois titres financiers sont :

- Fonds d'État : Valeur de marché =  $100 \times 0,55 + 100 \times 0,40 = 95 \text{ €}$
- Crémasol : Valeur de marché =  $20 \times 0,55 + 5 \times 0,40 = 13 \text{ €}$
- Paraplus : Valeur de marché =  $10 \times 0,55 + 50 \times 0,40 = 25,50 \text{ €}$

- b La rentabilité attendue d'un titre est, selon nos hypothèses, donnée par la formule :

$$\text{Rentabilité attendue} = \frac{\text{Cash-flow attendu} - \text{Prix}}{\text{Prix}}$$

avec :

$$\text{Cash-flow attendu} = p \times \text{Cash-flow}_{\text{soleil}} + (1 - p) \times \text{Cash-flow}_{\text{pluie}}$$

Le tableau 1.19 donne un résumé de ces prix.

Tableau 1.19

Prix des différents titres financiers

	Prix	Cash-flow attendu	Rentabilité attendue
Fonds d'État	95 €	100 €	5,26 %
Crémasol (producteur de crème solaire)	13 €	14 €	7,69 %
Paraplus (producteur de parapluies)	25,50 €	26 €	1,96 %

Remarque : les probabilités du soleil et de la pluie n'interviennent pas dans le calcul des prix des titres financiers, mais dans la détermination des rentabilités attendues. Dans ce chapitre, nous calculons les rentabilités attendues sur la base des prix de marché des titres financiers. Dans la suite de l'ouvrage, nous suivrons la démarche inverse : nous déterminerons d'abord les rentabilités attendues pour ensuite en déduire les prix.

De plus, les rentabilités attendues des titres financiers ne sont pas toutes égales. Celle du fonds d'État correspond au taux d'intérêt sans risque. Celles de Crémasol et Paraplus sont différentes du taux d'intérêt sans risque. Nous analyserons plus loin la logique financière qui explique des différentes rentabilités attendues.

# Décision d'investissement, marché complet et choix de portefeuille

## Exercice 13 Réaliser un arbitrage

### Énoncé

L'action Saturne sera prochainement introduite en Bourse. En consultant *L'Écho des marchés*, vous découvrez le tableau 1.20 qui reprend les caractéristiques des titres actuellement traités sur le marché.

- a** Quel est le prix à payer pour recevoir 100 € en cas de bonne conjoncture et 0 € en cas de mauvaise conjoncture ? Que devrait valoir l'action Saturne aujourd'hui ?
- b** Quels seraient les cash-flows futurs de tante Agathe dans les deux états de la nature si elle investissait :
  - i) tout son argent (100 000 €) en fonds d'État ?
  - ii) tout son argent en actions Saturne ?
  - iii) la moitié de son argent en fonds d'État et l'autre moitié en actions Saturne ?
- c** De quel montant doit-elle réduire son revenu de mauvaise conjoncture pour accroître son revenu de bonne conjoncture de 100 € ?
- d** Supposons que tante Agathe souhaite percevoir un revenu de 160 000 € en cas de bonne conjoncture. Que doit-elle faire pour atteindre cet objectif ?
- e** Tante Agathe change d'avis. Elle souhaite maintenant percevoir un revenu de 130 000 € en cas de mauvaise conjoncture. Comment doit-elle composer son portefeuille dans ce cas ?

Tableau 1.20

### Titres financiers

	Prix aujourd'hui	Cash-flow en cas de bonne conjoncture	Cash-flow en cas de mauvaise conjoncture
Fonds d'État	90 €	100 €	100 €
Titre contingent $M$	30 €	0 €	100 €
Action Saturne	? €	80 €	20 €

### Solution

- a** Le titre contingent  $M$  nous permet de déterminer aisément que le prix d'un titre contingent unitaire  $M$  est  $v_{1m} = 0,30$ . Par ailleurs, le fonds d'État est un portefeuille de titres contingents unitaires et donc  $90 = 100 \times v_{1b} + 100 \times v_{1m}$ . En remplaçant  $v_{1m}$  par sa valeur et en résolvant, on obtient  $v_{1b} = 0,60$ .

L'action Saturne vaudra, en l'absence d'arbitrage, un prix  $P = 80 \times v_{1b} + 20 \times v_{1m}$ , soit  $P = 54$ .

- b** Le tableau 1.21 expose les caractéristiques des trois portefeuilles repris dans la question.

Tableau 1.21

**Caractéristiques  
des trois  
portefeuilles**

Portefeuille	Revenu bonne conjoncture	Revenu mauvaise conjoncture
I. Fonds d'État		
Nombre d'obligations		
$= 100\ 000 / 90 = 1\ 111$	$= 1\ 111 \times 100 = 111\ 111 \text{ €}$	$= 1\ 111 \times 100 = 111\ 111 \text{ €}$
II. Actions Saturne		
Nombre d'actions		
$= 100\ 000 / 54 = 1\ 852$	$= 1\ 852 \times 80 = 148\ 148 \text{ €}$	$= 1\ 852 \times 20 = 37\ 037 \text{ €}$
III. 50-50 obligations et Saturne		
N obligations		
$= 50\ 000 / 90 = 556$	$= 555,56 \times 100 = 55\ 556 \text{ €}$	$= 555,56 \times 100 = 55\ 556 \text{ €}$
N Saturne		
$= 50\ 000 / 54 = 926$	$= 926 \times 80 = 74\ 074 \text{ €}$	$= 926 \times 20 = 18\ 519 \text{ €}$
Total		
100 000 €	$= 55\ 556 + 74\ 074 = 129\ 630 \text{ €}$	$= 55\ 556 + 18\ 519 = 74\ 074 \text{ €}$

- c** Le passage d'un portefeuille « tout obligations » à un portefeuille « tout actions » permet d'accroître le revenu de bonne conjoncture de 37 037 € (148 148 € – 111 111 €) en contrepartie d'une diminution du revenu de mauvaise conjoncture de 74 074 € (111 111 € – 37 037 €). L'accroissement dans un cas induit une diminution dans l'autre cas avec un rapport de 1 à 2. En conséquence, un accroissement du revenu de bonne conjoncture de 100 € peut se faire en contrepartie d'une diminution du revenu de mauvaise conjoncture de 200 €.

Un échange de cash-flows futurs est appelé un **swap**. Plutôt que de modifier la composition de son portefeuille, tante Agathe aurait pu, par exemple, investir tout son argent en obligations et entrer simultanément dans un contrat de swap avec une tierce partie. Le contrat spéifierait que tante Agathe recevrait  $x$  € en cas de bonne conjoncture et s'engagerait à payer  $2x$  € en cas de mauvaise conjoncture.

- d** Les 160 000 € que souhaite recevoir tante Agathe en bonne conjoncture sont supérieurs au revenu du portefeuille « tout actions » que nous venons d'analyser. Les deux équations lui permettant de trouver la solution à son problème sont :

$$100\ 000 = q \times 90 + n \times 54 \text{ (la contrainte de budget)}$$

$$160\ 000 = q \times 100 + n \times 80 \text{ (le revenu souhaité en bonne conjoncture)}$$

Divisons la première équation par 90, la seconde par 100 et soustrayons-la de la première. On obtient  $1\ 600 - 1\ 111 = n \times (0,80 - 0,60)$ . On en déduit  $n = 2\ 444,44$  et donc  $q = -355,56$ .

Tante Agathe est perplexe. Que signifie cela ? La variable  $n$  donne le nombre d'actions à acheter, soit 2 444,44 actions. Le montant total du portefeuille d'actions sera :  $2\ 444,44 \times 54 = 132\ 000 \text{ €}$ . Tante Agathe a un montant à investir de 100 000 €. Elle doit donc emprunter 32 000 € (ce qui correspond à une vente à découvert de 355,56 obligations

d'une valeur nominale de 100 € par obligation). La valeur négative de  $q$  indique qu'il s'agit d'une position à découvert. Le montant à rembourser dans un an, quelle que soit la conjoncture, s'élèvera à 35 555 €. Vérifions que cela donnera le bon résultat dans un an :

- Revenu bonne conjoncture =  $2\,444,44 \times 80 - 35\,555,55 = 160\,000$  €
- Revenu mauvaise conjoncture =  $2\,444,44 \times 20 - 35\,555,55 = 13\,333,33$  €

**e**

Tante Agathe souhaite maintenant recevoir 130 000 € en mauvaise conjoncture. Les deux équations lui permettant de trouver la solution à son problème sont :

$$\begin{aligned}100\,000 &= q \times 90 + n \times 54 \text{ (la contrainte de budget)} \\130\,000 &= q \times 100 + n \times 20 \text{ (le revenu souhaité en mauvaise conjoncture)}\end{aligned}$$

On obtient  $q = 1\,394,44$  et  $n = -472,22$ . Le nombre d'actions  $n$  est négatif : tante Agathe prend donc une position à découvert sur 472,22 actions (elle emprunte ces actions et investit le produit de la vente en obligations) et achète 1 394,44 obligations. Le montant total du portefeuille d'obligations sera donc :  $1\,394,44 \times 90 = 125\,000$  €.

Tante Agathe a un montant à investir de 100 000 €. S'y ajoute le produit de la vente des actions (25 000 €), ce qui permet de financer la totalité du portefeuille d'obligations. Nous pouvons vérifier que son objectif est atteint :

- Revenu bonne conjoncture =  $1\,394,44 \times 100 - 472,22 \times 80 = 101\,667$  €
- Revenu mauvaise conjoncture =  $1\,394,44 \times 100 - 472,22 \times 20 = 130\,000$  €



# Relation risque – rentabilité attendue

1. La distribution de probabilités – Les rentabilités	36
2. La rentabilité et le risque d'un portefeuille de deux à $N$ actifs . . . . .	37
3. La réduction du risque par la diversification . . . . .	40
4. La mesure du risque d'un actif	41
5. Le choix du portefeuille optimal	43
6. Le Médaf . . . . .	44
7. Le modèle d'évaluation par arbitrage . . . . .	45
<b>Problèmes et exercices</b>	
La distribution de probabilités des rentabilités . . . . .	48
Rentabilité et risque d'un portefeuille de deux à $N$ actifs . . . . .	53
Choix de portefeuille optimal . . . . .	65
Médaf . . . . .	69

L'incertitude (voir chapitre 1) est au cœur de la logique financière. Nous avons montré que les investisseurs peuvent, par la composition de leurs portefeuilles, choisir le profil de risque qu'ils souhaitent. Nous généralisons l'analyse en nous fondant sur l'hypothèse que la distribution de rentabilité d'une action ou d'un portefeuille est donnée par une loi statistique : la loi normale. Celle-ci permet de déterminer les probabilités associées aux différentes rentabilités à partir de deux paramètres sur lesquels s'appuient les investisseurs : l'espérance mathématique et l'écart type.

La première partie du chapitre analyse la relation entre le risque et la rentabilité attendue d'un portefeuille. Nous mettons en évidence l'importance de la diversification et nous montrons qu'une partie du risque total d'un titre peut être éliminée. Nous identifions les portefeuilles risqués les plus intéressants, c'est-à-dire ceux qui procurent la rentabilité attendue la plus élevée pour un niveau de risque donné. S'il existe un titre sans risque, on peut définir un portefeuille risqué optimal dont la composition est indépendante des préférences de l'investisseur.

La seconde partie du chapitre examine le lien entre le risque et la rentabilité attendue dans des marchés à l'équilibre. Nous présentons l'équation d'équilibre du Médaf qui permet de déterminer la rentabilité attendue d'un actif quelconque en fonction de son risque.

# 1 La distribution de probabilités

## Les rentabilités

La rentabilité d'une action au cours d'une période est définie par l'égalité :

$$R = \frac{\text{Div}_1 + P_1 - P_0}{P_0}$$

Nous supposerons qu'il s'agit d'une variable aléatoire dont les valeurs sont distribuées selon la loi normale :

$$R \sim N(r, \sigma)$$

où  $r$  désigne l'espérance mathématique et  $\sigma$  l'écart type, lequel est une mesure du risque du portefeuille, également appelée volatilité.

Il est possible de définir un intervalle de confiance des rentabilités pour différents niveaux de probabilités sur la base de la fonction de répartition de la normale centrée réduite (de moyenne nulle et d'écart type égal à l'unité) qui donne le percentile de la distribution :

$$F(x) = \Pr \left[ \frac{R - r}{\sigma} \leq x \right]$$

Une table des percentiles peut aisément être générée sur un tableur. La fonction loi.normale.standard(X) peut être utilisée pour calculer un percentile dans Excel. Elle renvoie la distribution cumulée d'une normale centrée réduite. Remarquez que les probabilités et les percentiles donnés par le tableur sont toujours unilatéraux. Vous trouverez une table dans le fichier Excel accompagnant ce chapitre.

Les valeurs particulières pour une normale  $N(r, \sigma)$  sont :

- La probabilité que la rentabilité soit dans l'intervalle  $[r - 1 \times \sigma, r + 1 \times \sigma] = 67\%$ .
- La probabilité que la rentabilité soit dans l'intervalle  $[r - 1,96 \times \sigma, r + 1,96 \times \sigma] = 95\%$ .

La figure 2.1 , donne une représentation graphique de ces éléments.

La rentabilité peut être calculée pour une période de durée quelconque : un jour, un mois, un trimestre, un an. La volatilité est évidemment fonction de cette durée. Elle est souvent exprimée sur la base d'une période annuelle, ce qui permet d'avoir une unité de mesure commune. La volatilité  $\sigma_{\Delta t}$  pour une période de longueur  $\Delta t$  quelconque peut être calculée sur la base de la volatilité annuelle  $\sigma_{\text{annuel}}$  par la formule :

$$\sigma_{\Delta t} = \sigma_{\text{annuel}} \sqrt{\Delta t}$$

### Complément

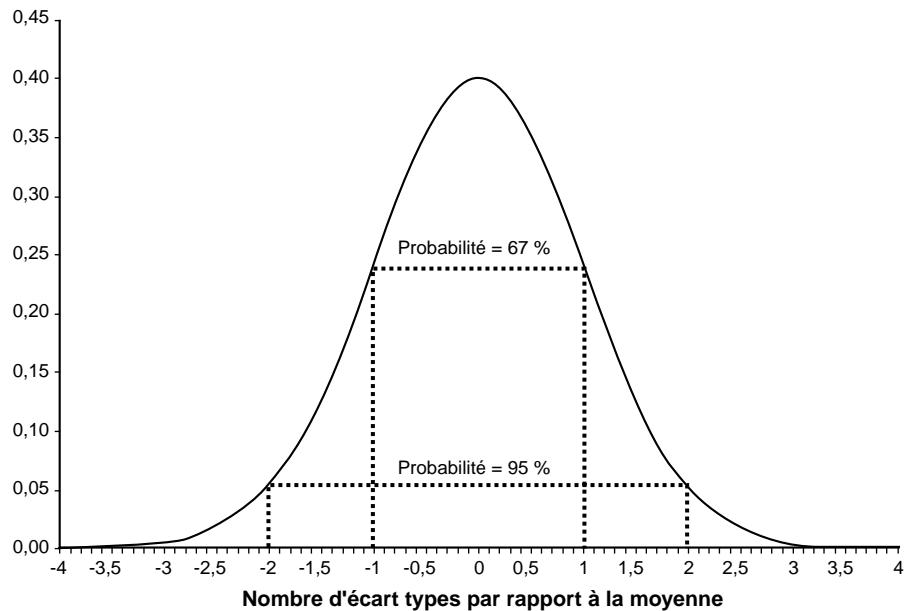
#### La loi normale est-elle vérifiée ?

L'hypothèse de normalité est une première approximation des distributions de probabilités observées. Celles-ci se caractérisent par deux types de déviations par rapport à la loi normale :

- une fréquence des valeurs proches de la moyenne plus élevée ;
- des valeurs extrêmes plus fréquentes.

Ces différences se reflètent dans les coefficients d'aplatissement (kurtosis) observés supérieurs à ceux de la loi normale (égaux à 3). On parle de phénomène de queues épaissees (« fat tail »).

Figure 2.1

**Loi normale.**

## 2 La rentabilité et le risque d'un portefeuille de deux à $N$ actifs

### 2.1 Rentabilité d'un portefeuille de deux actifs

Considérons un portefeuille  $P$  constitué de deux actifs. Les poids investis dans chacun des actifs sont  $x_1$  et  $x_2$  avec  $x_1 + x_2 = 1$ . Une valeur positive de  $x_i$  représente une position longue (« long ») : on a acheté l'actif  $i$ . Une valeur négative représente une position à découvert (« short ») : l'actif  $i$  a été emprunté.

La distribution de probabilité du portefeuille est une loi normale. Elle est identifiée par deux paramètres :

- la rentabilité attendue :

$$r_P = x_1 r_1 + x_2 r_2$$

- l'écart type qui mesure le risque du portefeuille :

$$\sigma_P = \sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2(x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12})}$$

## Complément

### Le coefficient de corrélation

Notez l'apparition du coefficient de corrélation  $\rho$  dans la formule de l'écart type du portefeuille. Les rentabilités des deux actifs peuvent être liées et la corrélation est une mesure de leur relation. Elle peut prendre des valeurs entre  $-1$  et  $+1$ . Une autre formulation de l'écart type du portefeuille fait apparaître la covariance entre les rentabilités, une autre manière de mesurer la variabilité conjointe des titres :

$$\sigma_P = \sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12}}$$

Nous commençons par analyser trois cas particuliers avant d'aborder le cas général.

### L'un des deux actifs est un actif sans risque

Cela correspond à la situation où l'on peut placer ou emprunter au taux d'intérêt sans risque  $r_f$ . L'actif étant non risqué, sa variance est nulle ( $\sigma_{rf} = 0$ ). Désignons par  $A$  l'actif risqué ( $A$  pour actions) et notons  $x$  la fraction du portefeuille investie en actions. Les formules générales deviennent :

$$r_P = (1 - x)r_f + xr_A = r_f + (r_A - r_f)x$$
$$\sigma_P = x\sigma_A$$

Il en résulte une relation linéaire entre la rentabilité attendue du portefeuille et son risque :

$$r_P = r_f + \frac{r_A - r_f}{\sigma_A} \sigma_P$$

## Complément

### Le ratio de Sharpe

La pente de la droite  $[(r_A - r_f)/\sigma_A]$  est le ratio de Sharpe (« Sharpe ratio ») de l'actif  $A$  : il donne la rentabilité attendue excédentaire de l'actif  $A$  ramenée à une unité de risque (écart type). Si un investisseur doit choisir entre plusieurs actifs risqués mutuellement exclusifs, il portera son choix sur l'actif ayant le ratio de Sharpe le plus élevé.

### Les deux actifs sont risqués et parfaitement corrélés positivement ( $\rho_{12} = +1$ )

Dans ce cas, la formule de la variance est un carré parfait : le risque du portefeuille est égal à la moyenne pondérée des écarts types de ses titres, ce qui se traduit par :

$$r_P = x_1 r_1 + x_2 r_2$$
$$\sigma_P = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2$$

Il en résulte une relation linéaire entre la rentabilité attendue et le risque du portefeuille :

$$r_P = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\sigma_2 - \sigma_1} (\sigma_P - \sigma_1)$$

## Complément

### Constitution d'un portefeuille sans risque à partir de deux actifs parfaitement corrélés positivement

Un portefeuille sans risque peut être constitué en combinant les deux titres. Les proportions à investir sont alors :

$$x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

Le portefeuille sans risque est obtenu en achetant le titre ayant la volatilité la plus faible et en vendant à découvert le titre ayant la volatilité la plus élevée. Si le marché est à l'équilibre, la rentabilité attendue de ce portefeuille doit être égale au taux d'intérêt sans risque. Si ce n'est pas le cas, un arbitrage peut être réalisé.

### Les deux actifs sont risqués et parfaitement corrélés négativement

$(\rho_{12} = -1)$

La formule de la variance est, de nouveau, un carré parfait mais deux racines distinctes doivent être identifiées :  $\sigma_P = -x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2$  et  $\sigma_P = x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2$ .

Ces formules font apparaître la possibilité de créer un portefeuille sans risque avec des fractions investies dans chacun des actifs :

$$x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

La relation entre le risque et la rentabilité attendue du portefeuille est donnée par deux segments de droites d'équation :

$$r_P = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\sigma_1 + \sigma_2}(\sigma_P - \sigma_1) \quad \text{pour } x_1 > \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

$$r_P = r_2 + \frac{r_1 - r_2}{\sigma_1 + \sigma_2}(\sigma_P - \sigma_2) \quad \text{pour } x_1 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

### Les deux actifs ne sont pas parfaitement corrélés

$(-1 < \rho_{12} < +1)$

Dans le cas général, la relation entre le risque du portefeuille et sa rentabilité attendue est non linéaire. Les quatre situations analysées sont illustrées par la figure 2.2 .

## 2.2 Généralisation pour un portefeuille composé de $N$ actifs

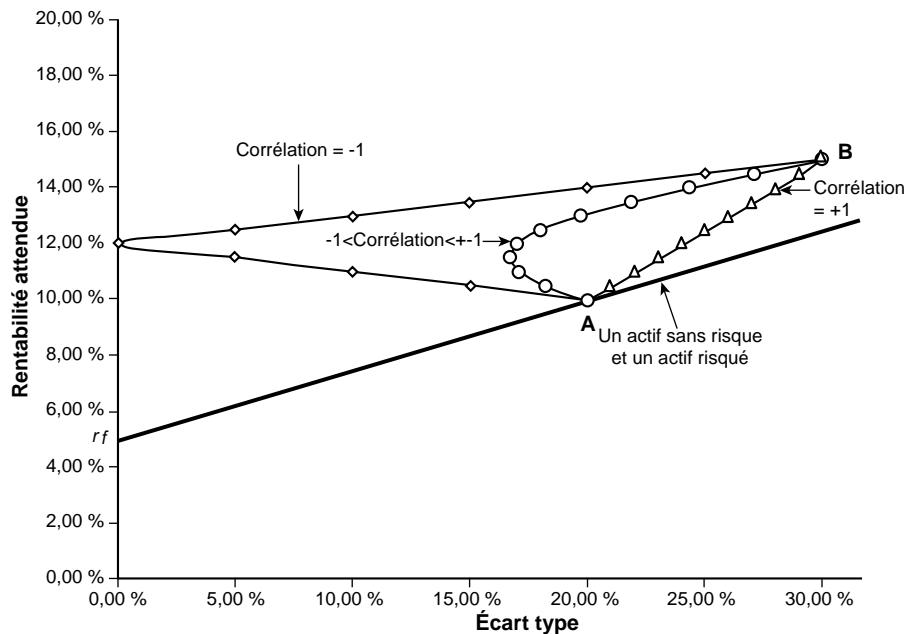
Si le nombre de titres en portefeuille est  $N$ , la rentabilité attendue et le risque du portefeuille s'écrivent :

$$r_P = \sum_{i=1}^N x_i r_i$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} = \sum_i x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} x_i x_j \sigma_{ij}$$

Figure 2.2

**Relation risque – rentabilité attendue pour un portefeuille de deux actifs.**



Les covariances entre les titres jouent un rôle prépondérant. Le calcul de la variance du portefeuille comprend  $N^2$  termes dont  $N$  termes sont des variances et  $N^2 - N$  termes des covariances.

### 3 La réduction du risque par la diversification

L'importance de la covariance peut être mise en évidence en considérant un ensemble de titres ayant tous les mêmes caractéristiques : même rentabilité attendue  $r$ , même volatilité  $\sigma$  et même coefficient de corrélation entre deux titres quelconques  $\rho$ . Considérons un portefeuille de pondération uniforme constitué de  $n$  titres. La fraction investie dans un titre quelconque  $i$  est  $x_i = 1/n$ . En appliquant les formules qui précèdent, les caractéristiques de ce portefeuille sont :

– rentabilité attendue :

$$r_P = r$$

– écart type :

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \rho\sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

Notons que le terme  $\rho\sigma^2$  est la covariance entre deux titres quelconques.

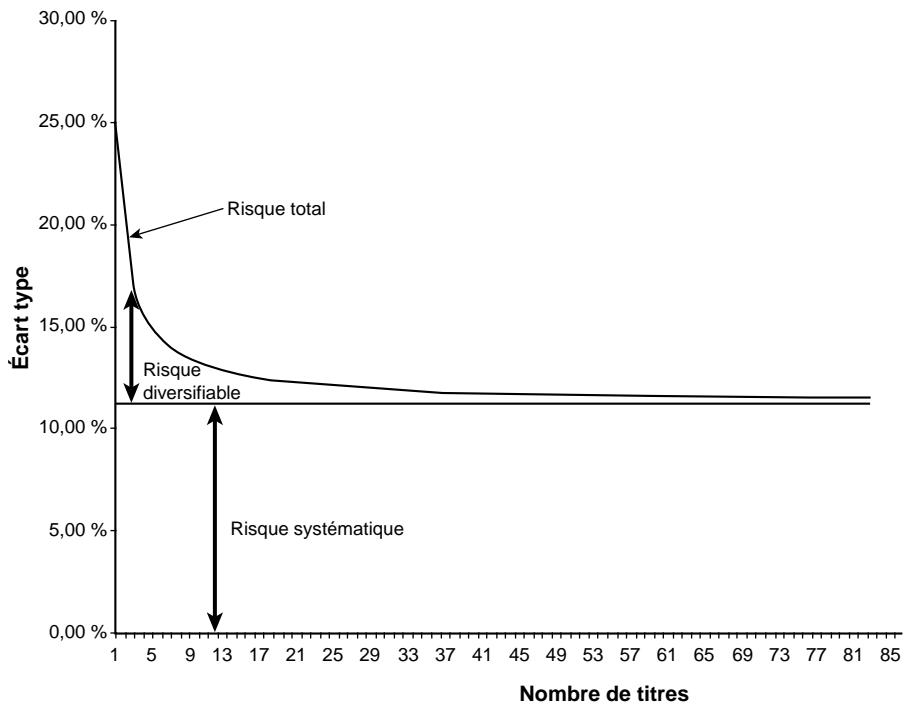
L'expression de l'écart type nous montre qu'en accroissant le nombre de titres dans le portefeuille, le risque diminue mais une limite inférieure apparaît où, pour  $n$  tendant vers l'infini (voir figure 2.3), on obtient :

$$n \rightarrow \infty$$

$$\sigma_P \rightarrow \sqrt{\rho}\sigma$$

Figure 2.3

### Réduction du risque par la diversification.



Quel que soit le nombre de titres en portefeuille, il existe un niveau de risque, déterminé par la covariance entre les titres, au-dessous duquel il n'est pas possible de descendre.

Nous devons donc établir une distinction entre :

- le risque total d'un titre donné par sa volatilité ;
- le risque systématique ne pouvant être éliminé par la diversification ;
- le risque diversifiable.

## 4 La mesure du risque d'un actif

Le risque d'un actif  $i$  est évalué par sa contribution au risque du portefeuille. Deux mesures, liées entre elles, peuvent en être données :

- une mesure absolue : la covariance  $\sigma_{iP}$  de l'actif avec le portefeuille ;
- une mesure relative : le bêta  $\beta_{iP}$  de l'actif dans le portefeuille.

La covariance d'un actif avec le portefeuille est la moyenne pondérée des covariances de l'actif avec tous les actifs en portefeuille.

$$\sigma_{iP} = \sum_j x_j \sigma_{ij}$$

La variance du portefeuille est égale à la moyenne pondérée des covariances des actifs avec le portefeuille.

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^N x_i \sigma_{iP}$$

En illustration, reprenons l'expression de la variance d'un portefeuille constitué de deux titres risqués :

$$\sigma_P^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2(x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12})$$

Nous pouvons écrire cette expression sous la forme :

$$\sigma_P^2 = x_1(x_1 \sigma_1^2 + x_2 \sigma_{12}) + x_2(x_1 \sigma_{12} + x_2 \sigma_2^2)$$

Les termes entre parenthèses sont les covariances de chacun des titres avec le portefeuille. Par exemple, dans le cas du titre 1 :

$$\begin{aligned} x_1 \sigma_1^2 + x_2 \sigma_{12} &= x_1 \text{Cov}(r_1, r_1) + x_2 \text{Cov}(r_1, r_2) \\ &= \text{Cov}(r_1, x_1 r_1) + \text{Cov}(r_1, x_2 r_2) \\ &= \text{Cov}(r_1, x_1 r_1 + x_2 r_2) \\ &= \text{Cov}(r_1, r_P) = \sigma_{1P} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\sigma_P^2 = x_1 \sigma_{1P} + x_2 \sigma_{2P}$$

La variance du portefeuille est égale à la moyenne pondérée de la covariance de chacun des titres en portefeuille avec le portefeuille global. Cette expression se généralise aisément au cas d'un portefeuille de  $N$  actifs :

- Le terme  $\sigma_{iP}$  nous donne la contribution du titre  $i$  au risque du portefeuille. Il constitue la mesure du risque du titre dans le portefeuille.
- Le bêta du titre  $i$  par rapport au portefeuille  $P$  est le rapport entre la covariance du titre  $i$  avec le portefeuille et la variance du portefeuille.

$$\beta_{iP} = \frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2}$$

Un bêta supérieur à l'unité signifie que le risque du titre  $j$  dans le portefeuille  $P$  est supérieur à la moyenne. La moyenne des bêtas est égale à l'unité :

$$\sum_{i=1}^N x_i \beta_{iP} = 1$$

Deux interprétations du bêta peuvent être avancées.

### 1. Bêta : impact marginal d'un titre sur le risque d'un portefeuille.

Supposons qu'on détienne un portefeuille  $P$  et qu'on envisage de modifier légèrement sa composition en y introduisant un actif  $i$ . Dans quelles conditions, cela modifiera-t-il son risque ?

Si une fraction  $x$  est investie dans  $i$  et le solde  $(1-x)$  dans  $P$ , le risque du portefeuille est :

$$\sigma^2 = (1-x)^2 \sigma_P^2 + x^2 \sigma_i^2 + 2x(1-x)\sigma_{iP}$$

En prenant la dérivée par rapport à  $x$  et en l'évaluant au point  $x=0$ , on obtient :

$$\left. \frac{d\sigma^2}{dx} \right|_{x=0} = 2(\sigma_{iP} - \sigma_P^2)$$

Cette relation montre que le risque du portefeuille augmente si et seulement si :  $\sigma_{iP} > \sigma_P^2$  ou encore, si et seulement si, le bêta du titre  $i$  par rapport au portefeuille  $P$  est supérieur à l'unité :  $\beta_{iP} > 1$ .

2. Bêta : pente d'une droite de régression.

Supposons qu'on estime les paramètres de la droite de régression :

$$r_j = \alpha + \beta r_P + \varepsilon$$

La pente de la droite de régression (au sens des moindres carrés) est :

$$\beta_{jP} = \frac{\sigma_{jP}}{\sigma_P^2}.$$

## 5 Le choix du portefeuille optimal

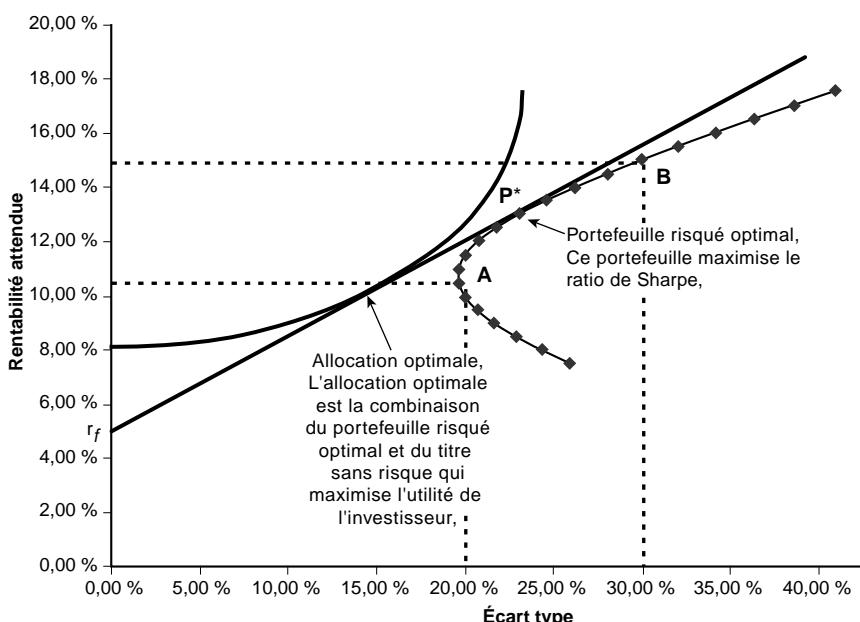
Un portefeuille est efficient s'il maximise la rentabilité attendue pour un niveau de risque donné. La frontière efficiente est l'ensemble des portefeuilles efficents.

**Règle** : Parmi tous les portefeuilles risqués possibles, seuls les portefeuilles efficents doivent être considérés.

S'il est possible d'emprunter ou de prêter au taux d'intérêt sans risque, il existe un portefeuille risqué optimal  $P^*$ , qui maximise le ratio de Sharpe et qui est indépendant des préférences de l'investisseur. Ce dernier choisira l'un des couples risque – rentabilité situés sur la droite  $r_f P^*$  de la figure 2.4 .

Figure 2.4

**Choix du portefeuille optimal.**



Le portefeuille risqué optimal est caractérisé par une condition nécessaire : la rentabilité excédentaire par unité de risque de chacun des titres est la même et est égale à la rentabilité excédentaire par unité de risque du portefeuille global :

$$\frac{r_j - r_f}{\sigma_{jP^*}} = \frac{r_{P^*} - r_f}{\sigma_{P^*}^2} \quad \forall j = 1, 2, \dots, N$$

L'allocation d'actif optimale (c'est-à-dire la répartition entre le titre sans risque et le portefeuille risqué optimal) nécessite de préciser les préférences de l'investisseur en matière de rentabilité attendue et de risque. Une représentation simple de ces préférences est donnée par la fonction d'utilité fondée sur la moyenne et la variance du portefeuille :

$$U(r_P, \sigma_P) = r_P - a\sigma_P^2$$

Le coefficient  $a$  est le coefficient d'aversion au risque de l'investisseur.

Un peu d'algèbre permet de montrer que, devant répartir son portefeuille entre un actif sans risque et un actif risqué  $A$ , l'investisseur placera une fraction  $x$  de son portefeuille dans l'actif risqué égale à :

$$x = \frac{1}{2a} \times \frac{r_A - r_f}{\sigma_A^2}$$

## 6 Le Médaf

Le Médaf (Modèle d'équilibre des actifs financiers) est un modèle qui analyse l'équilibre du marché des capitaux si tous les investisseurs choisissent leurs portefeuilles selon la logique présentée précédemment. Dans sa version la plus simple, il s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- marché parfait des capitaux ;
- prévisions homogènes (tous les investisseurs ont les mêmes anticipations de rentabilités, d'écart types et de corrélations).

Ce modèle énonce que le portefeuille optimal est le portefeuille de marché, qui comprend tous les titres existants en proportion de leur capitalisation boursière présentation correcte.

$$x_i = (\text{Capitalisation boursière de } i) / \text{Capitalisation boursière totale}$$

### Conséquence

Le portefeuille de marché est efficient et la condition suffisante d'optimalité s'applique à l'équilibre :

$$r_j - r_f = (r_m - r_f) \times \frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m^2}$$

ou encore :

$$r_j = r_f + (r_m - r_f) \times \beta_{jm}$$

où  $(r_m - r_f)$  est la prime de risque du marché et  $\beta_{jm}$  est le bêta de l'action, une mesure du risque systématique de l'action. Cette relation entre la rentabilité attendue d'un titre et son risque systématique est linéaire et est appelée droite de marché. La dernière équation présentée est celle du Médaf. Elle est couramment utilisée en pratique.

## 7 Le modèle d'évaluation par arbitrage

Le modèle d'évaluation par arbitrage part de l'hypothèse que la rentabilité d'une action est déterminée en partie par des facteurs qui reflètent des variables macroéconomiques ainsi que par des éléments spécifiques à l'action. Se fondant sur la condition d'absence d'arbitrage, le modèle fournit une relation linéaire entre la rentabilité attendue et les risques associés à chacun des facteurs. Supposons qu'il y ait un seul facteur. La rentabilité réalisée  $R_j$  de l'action  $j$  s'écrit :

$$R_j = r_j + \beta_j F + \varepsilon_j$$

où  $F$  représente le facteur (de moyenne nulle par construction) et  $\varepsilon_j$  un terme propre à l'action  $j$  de moyenne nulle et non corrélé avec le facteur ( $E[\varepsilon_j] = 0$  et  $E[F\varepsilon_j] = 0$ ). La constante  $r_j$  est la rentabilité attendue de l'action et  $\beta_j$  mesure la sensibilité de l'action par rapport au facteur. Si le nombre de titres est élevé, nous pouvons construire un portefeuille diversifié de titres de même bêta. Les résidus sont éliminés par diversification et le facteur commun est la seule source d'incertitude qui subsiste.

$$R_j = r_j + \beta_j F$$

Il est, dans ce cas, possible de construire un portefeuille sans risque. Considérons une combinaison de deux portefeuilles diversifiés,  $i$  et  $j$ . Sa rentabilité est :

$$R_P = x_i R_i + x_j R_j = (x_i r_i + x_j r_j) + (x_i \beta_i + x_j \beta_j) F$$

Pour éliminer le risque, les poids investis doivent satisfaire deux équations :

$$x_i + x_j = 1 \quad \text{et} \quad x_i \beta_i + x_j \beta_j = 0$$

ce qui induit la composition suivante du portefeuille :

$$x_i = \frac{-\beta_j}{\beta_i - \beta_j} \quad \text{et} \quad x_j = \frac{\beta_i}{\beta_i - \beta_j}$$

Celui-ci est sans risque. Pour éliminer les possibilités d'arbitrage, sa rentabilité attendue doit être égale au taux d'intérêt sans risque :

$$\frac{-\beta_j}{\beta_i - \beta_j} r_i + \frac{\beta_i}{\beta_i - \beta_j} r_j = r_f$$

Il en résulte une relation à l'équilibre :

$$\frac{r_i - r_f}{\beta_i} = \frac{r_j - r_f}{\beta_j} = \lambda$$

ou encore :

$$r_i - r_f = \lambda \beta_i$$

Cette relation nous apprend qu'en l'absence de possibilité d'arbitrage la rentabilité excédentaire par unité de bêta doit être la même pour tous les titres et tous les portefeuilles. Elle est égale à la prime de risque  $\lambda$  qui représente la rémunération du risque

lié au facteur  $F$ . La relation s'applique également au portefeuille de marché dont le bêta est égal à l'unité et donc :

$$r_m - r_f = \lambda$$

Nous retrouvons l'équation du Médaf :

$$r_i = r_f + (r_m - r_f)\beta_i$$

Un modèle plus général peut être élaboré qui suppose l'existence de plusieurs facteurs. La relation d'équilibre s'écrit alors :

$$r_i = r_f + \lambda_1\beta_{i1} + \lambda_2\beta_{i2} + \cdots + \lambda_n\beta_{in}$$

où  $\lambda_k$  est la prime de risque associée au  $k$ ème facteur et  $\beta_{ik}$  est la sensibilité de l'action  $i$  par rapport à ce facteur.

## Résumé

Cette section met en avant un ensemble d'éléments fondamentaux pour l'évaluation et le choix de portefeuille :

- Ce choix est fondé sur deux paramètres : la rentabilité attendue et le risque mesuré par l'écart type de sa rentabilité.
- La diversification permet de réduire le risque mais non de l'éliminer si les rentabilités des actions ne sont pas indépendantes. Le risque qui ne peut être éliminé par la diversification est appelé risque systématique.
- Le risque d'un titre dans un portefeuille est mesuré par la contribution de ce titre au risque du portefeuille. Il est mesuré par la covariance du titre avec le portefeuille ( $\sigma_{iP}$ ) ou par le bêta du titre dans le portefeuille ( $\beta_{iP}$ ).
- Dans le monde réel, il est possible de déterminer une frontière efficiente, constituée de l'ensemble des portefeuilles qui maximisent la rentabilité pour un risque donné. Si l'investisseur peut prêter/emprunter à un taux sans risque, il investira dans l'actif sans risque et un portefeuille risqué optimal appartenant à la frontière efficiente.
- Le portefeuille risqué optimal sera le même pour chaque investisseur. Les proportions respectives investies dans l'actif sans risque et le portefeuille seuls varieront en fonction de son aversion au risque.
- Dans le cadre du Médaf, la rentabilité attendue d'un actif  $j$  est donnée par  $r_j = r_f + (r_m - r_f) \times \beta_{jm}$ , avec  $r_m$  le portefeuille de marché,  $r_f$  le taux sans risque,  $(r_m - r_f)$  la prime de risque du marché et  $\beta_{jm}$  le bêta de l'action, une mesure du risque systématique de l'action. Par ailleurs,  $\beta_{jm}$  peut s'exprimer comme :  $\beta_{jm} = \frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m^2}$ .

## Références bibliographiques

- CAMPBELL J.Y., LO A.W. et MACKINLAY A.C., *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, 1997.
- DOR E., *Économétrie*, coll. Synthex, Pearson Education France, 2004.
- GRAHAM J.R. et HARVEY C.R., « The theory and Practice of Corporate Finance : Evidence from the Field », *Journal of Financial Economics*, 60 (2001), pp. 187–243.
- LINTNER J., « Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification », *Journal of Finance*, 20, 4 (Décembre 1965), pp. 587–615.
- MARKOWITZ H., Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7,1 (Mars 1952), pp. 77–91.
- ROGER P., *Probabilités, statistique et calcul stochastique*, coll. Synthex, Pearson Education France, 2004.
- RUBINSTEIN M., « Markowitz's Portfolio Selection : A Fifty-Year Retrospective », *Journal of Finance*, 57, 3 (Juin 2002), pp. 1042–1045.
- SHARPE W.F., « Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk », *Journal of Finance*, 19, 3 (Septembre 1964), pp. 425–442.

### Commentaires

La théorie du choix de portefeuille a été développée initialement par Harry Markowitz dans un article publié en 1952. Cet article a posé les fondements de la finance moderne. Son auteur s'est d'ailleurs vu attribué le prix Nobel d'économie en 1990 (pour un hommage récent, lire Rubinstein [2002]). Une dizaine d'année plus tard, Bill Sharpe et John Lintner publiaient (indépendamment l'un de l'autre) leurs articles présentant le Médaf. Bill Sharpe a également reçu le prix Nobel pour sa découverte, la même année que Harry Markowitz. En dépit de sa simplicité, ce modèle résiste remarquablement à l'usure du temps. Les vérifications empiriques du modèle font toujours l'objet de recherches et de discussion dans les milieux académiques (voir Campbell, Lo et MacKinlay [1997]) pour une synthèse de la littérature. Une enquête récente (Graham et Harvey 2001) a cependant révélé que le Médaf reste le modèle le plus couramment utilisé en pratique pour déterminer le coût du capital d'une entreprise.

# Problèmes et exercices

Les exercices suivants ont pour objet, en premier lieu, de vous familiariser avec le traitement de données financières. La pratique a en effet montré que, sortis d'un cadre théorique, il peut être difficile de calculer et d'analyser des rentabilités. L'accent est mis sur l'utilisation d'un tableau permettant de faciliter les calculs. Les exercices visent principalement à ancrer la relation existant entre le risque et la rentabilité attendue. Plusieurs approches sont développées notamment celle fondée sur les états du monde, celle reprenant deux puis  $N$  actifs et celle du Médaf. Le chapitre se conclut par des exercices testant la notion de choix de portefeuille optimal.

## La distribution de probabilités des rentabilités

### Exercice 1 Analyser les rentabilités passées

#### Énoncé

Vous avez rassemblé des données historiques sur les rentabilités annuelles réalisées au cours des dix dernières années (les données vont de l'année -10 à l'année -1) pour :

- le marché des actions dans son ensemble ;
- les actions A et B.

Ces données sont reprises dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1

Données historiques

	Année	Marché	Action A	Action B
	-10	8,43 %	23,45 %	37,24 %
	-9	23,46 %	87,17 %	56,32 %
	-8	16,28 %	45,22 %	-14,26 %
	-7	3,07 %	-19,47 %	-3,58 %
	-6	-6,12 %	-61,98 %	5,60 %
	-5	30,89 %	42,33 %	49,12 %
	-4	27,31 %	46,89 %	62,94 %
	-3	23,10 %	-22,36 %	40,39 %
	-2	-24,46 %	-52,21 %	-11,17 %
	-1	33,66 %	60,24 %	-10,49 %

- a** Calculez les moyennes et les écarts types des rentabilités réalisées.
- b** Calculez les coefficients de corrélation entre chacune des paires de variables (A,M), (B,M), (A,B).
- c** Calculez les covariances entre chacune des paires de variables (A,M), (B,M), (A,B).
- d** Déterminez les coefficients bêta de chacune des actions.

**Solution**

- a** Pour faciliter les calculs, il est plus simple d'entrer les données dans un tableur. En utilisant les fonctions Excel moyenne(X) et ecartypep(X), vous obtiendrez les résultats du tableau 2.2.

**Tableau 2.2****Moyennes et écarts types**

	Moyenne	Écart type
Marché	13,56 %	17,49 %
Action A	14,94 %	47,99 %
Action B	21,21 %	29,24 %

Souvenez-vous que ces données s'appuient sur dix observations seulement. Elles ne donnent donc que des estimations des paramètres.

Excel contient deux fonctions différentes pour la variance : varp() calcule la variance de la population et var() celle de l'échantillon. La première fonction divise la somme des carrés des écarts par rapport à la moyenne par  $N$ , le nombre d'observations alors que la seconde divise par  $N - 1$ . Deux fonctions en résultent pour l'écart type : ecartypep() et ecartype(). Nous utilisons ici la première version de ces fonctions.

- b** Pour calculer les coefficients de corrélation, utilisez la fonction coefficient.correlation (X,Y).

**Tableau 2.3****Coefficients de corrélation**

	Marché	Action A	Action B
Marché	1,00	0,79	0,50
Action A		1,00	0,41
Action B			1,00

- c** Les covariances peuvent être obtenues en utilisant la fonction covarp() (voir tableau 2.4). Souvenez-vous également que la covariance d'une variable avec elle-même est égale à la variance.

**Tableau 2.4****Covariances et variances**

	Marché	Action A	Action B
Marché	3,06 %	6,65 %	2,57 %
Action A		23,03 %	5,77 %
Action B			8,55 %

- d** Les bêtas des actions sont les pentes de droite de régression. La fonction pente() donne le résultat recherché (voir tableau 2.5).

Le bêta de l'action A est supérieur à l'unité. Cette action amplifie les mouvements du marché. L'action B, quant à elle, a un bêta inférieur à l'unité, d'où une rentabilité du marché atténuée.

Tableau 2.5

	Marché	Action A	Action B
Bêta	1,00	2,17	0,84

## Exercice 2    Calculer la rentabilité attendue et le risque dans un modèle à état du monde

### Énoncé

Récemment nommé analyste financier à la Banque Ducoin, vous êtes chargé de fournir aux membres du département Asset Management les données leur permettant de revoir la composition des portefeuilles qu'ils gèrent.

Vous estimatez que les valeurs futures, dans un an, des titres que vous suivez dépendront de la situation économique. Trois situations vous semblent possibles : croissance (C), stabilité (S) et dépression (D). Les probabilités associées à chacune d'elles sont respectivement 30 %, 50 % et 20 %. Vous avez résumé vos estimations dans le tableau 2.6.

- a** Déterminez les rentabilités du marché et des titres A et B pour chacune des trois situations économiques envisagées.
- b** Calculez leurs rentabilités attendues.
- c** Calculez les écarts de rentabilité par rapport aux valeurs attendues dans les trois situations économiques.
- d** Quels signes anticipez-vous pour les covariances de A et B avec le marché ?
- e** Calculez les variances et les covariances.
- f** Quelles sont les volatilités des différents titres ?
- g** Déterminez les coefficients bêta des actions.

Tableau 2.6

### Estimations

	Cours actuel	Valeurs futures en cas de :		
		Croissance	Stabilité	Dépression
Probabilité		30 %	50 %	20 %
Marché	100 €	140 €	112 €	70 €
Action A	25 €	50 €	20 €	17 €
Action B	40 €	10 €	35 €	50 €

### Solution

- a** Les rentabilités attendues dans les différents états de l'économie sont reprises dans le tableau 2.7.

Tableau 2.7

### Rentabilités attendues dans les différents états de l'économie

	Rentabilités en cas de :		
	Croissance	Stabilité	Dépression
Marché	$(140 - 100)/100 = 40\%$	$(112 - 100)/100 = 12\%$	$(70 - 100)/100 = -30\%$
Action A	$(50 - 25)/25 = 100\%$	$(20 - 25)/25 = -20\%$	$(17 - 25)/25 = -32\%$
Action B	$(10 - 40)/40 = -75\%$	$(35 - 40)/40 = -12,5\%$	$(50 - 40)/40 = 25\%$

- b** La rentabilité attendue d'un titre est obtenue en calculant la moyenne, pondérée par les probabilités, des rentabilités dans les différents états de l'économie. Par exemple, le calcul de la rentabilité attendue du marché est :

$$r_M = 0,30 \times 40\% + 0,50 \times 12\% + 0,20 \times (-30\%) = 12\%$$

Par un calcul similaire, on obtient :

$$r_A = 13,6\%$$

$$r_B = -23,75\%$$

- c** Le calcul des variances et des covariances est fondé sur les écarts entre les rentabilités et leurs espérances mathématiques. Il est utile de calculer d'abord les écarts par rapport à la moyenne pour les différents titres.

Tableau 2.8

**Écarts par rapport à la rentabilité attendue**

	Écart par rapport à la rentabilité attendue en cas de :		
	Croissance	Stabilité	Dépression
Marché	28 %	0 %	-42 %
Action A	86,40 %	-33,60 %	-45,60 %
Action B	-51,25 %	11,25 %	48 %

- d** L'examen du tableau 2.8 révèle que le marché et le titre A réalisent des écarts de rentabilité par rapport à leurs valeurs attendues respectives dans les mêmes situations économiques. La covariance de l'action A avec le marché devrait donc être positive. En revanche, le titre B obtient de bonnes performances en cas de baisse du marché. Sa covariance avec le marché devrait donc être négative.

- e** La formule générale de la covariance entre des titres  $i$  et  $j$  est :

$$\sigma_{ij} = \sum \pi_s (R_{is} - r_i)(R_{js} - r_j)$$

où  $\pi_s$  désigne la probabilité de l'état  $s$  et  $R_{is}$  la rentabilité du titre  $i$  si l'état  $s$  se réalise. Nous donnons le détail du calcul de la covariance entre le marché et le titre A.

$$\begin{aligned} \sigma_{MA} &= 0,30 \times (28\%) \times (86,40\%) + 0,50 \times (0\%) \times (-33,60\%) \\ &\quad + 0,20 \times (-42\%) \times (-45,60\%) = 11,09\% \end{aligned}$$

Des calculs similaires pour les autres paires de titres nous conduisent à la matrice variance-covariance reprise dans le tableau 2.9.

Tableau 2.9

**Matrice variance-covariance**

	Marché	Action A	Action B
Marché	5,88 %		
Action A	11,09 %	32,20 %	
Action B	-8,40 %	-19,62 %	13,27 %

Les covariances étant symétriques, nous omettons les termes au-dessus de la diagonale. Ceux situés dessous donnent les variances des différents titres. En examinant les

covariances, nous pouvons vérifier qu'effectivement la covariance de A et du marché est positive alors que le titre B a des covariances négatives avec le marché et avec A. L'examen (tableau 2.8) des écarts par rapport à la rentabilité attendue nous permet de comprendre ce résultat.

- f** Les volatilités, c'est-à-dire les écarts types des différents titres sont les racines carrées des variances :

$$\sigma_M = 24,25\%$$

$$\sigma_A = 56,74\%$$

$$\sigma_B = 36,42\%$$

- g** Le coefficient bêta d'une action est, par définition, le rapport entre la covariance de l'action et le marché, divisé par la variance de celui-ci :

$$\beta_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

On obtient :

$$\beta_{AM} = \frac{0,1109}{0,0588} = 1,89$$

$$\beta_{BM} = \frac{-0,0420}{0,0588} = -1,43\%$$

## Exercice 3 Déterminer des intervalles de confiance

### Énoncé

Tante Agathe envisage de placer son épargne (5 000 €) dans la sicav A++ de la Banque Ducoin. Pour bien comprendre les caractéristiques de cette forme de placement, elle a longuement interrogé M. d'Argent, qui lui a fourni des informations, en général non communiquées à la clientèle :

- rentabilité annuelle attendue de la sicav : 11,7 % ;
- volatilité annuelle : 19,04 %.

Tante Agathe, ne comprenant pas toute la signification de ces chiffres, a demandé à M. d'Argent des précisions sur le risque qu'elle prendrait en investissant dans A++.

- a** Quel est l'intervalle de confiance pour A++ à un niveau de 95 % ?
- b** Quelle est la perte maximale (avec une probabilité de 99 %) encourue dans un an si tout l'argent est investi dans A++ ?

### Solution

- a** Si on fait l'hypothèse que les rentabilités suivent une loi normale, on peut s'appuyer sur les résultats connus concernant la loi normale standard : si  $X \sim N(0, 1)$ , alors  $\Pr[-1,96 \leq X \leq 1,96] = 95\%$ . Sous l'hypothèse de normalité, la distribution de probabilité de la sicav A++ est normale :  $R \sim N(11,7\%, 19,04\%)$ .

Par conséquent :  $[(R - 11,7\%)/19,04\%] \sim N(0,1)$  et donc :

$$\Pr\{-1,96 \leq [(R - 11,7\%)/19,04\%] \leq 1,96\} = 95\%$$

$$\Pr\{11,7\% - 1,96 \times 19,04\% \leq R \leq 11,7\% + 1,96 \times 19,04\% \} = 95\%.$$

Les bornes de l'intervalle de confiance (avec une probabilité de 95 %) sont :

$$[11,7\% - 1,96 \times 19,04\% ; 11,7\% + 1,96 \times 19,04\%] = [-25,62\% / 49,02\%]$$

Il y a 95 % de chance que la rentabilité de A++ au cours de l'année prochaine se trouve entre -25,62 % et 49,02 %.

- b** Détérimons maintenant pour quelle valeur il existe une probabilité de 99 % que la rentabilité réalisée soit supérieure, ou encore que la probabilité que la rentabilité réalisée soit inférieure à cette valeur soit de 1 %.

Nous savons que si  $X \sim N(0, 1)$ , alors  $\Pr(-2,33 \leq X) = 99\%$ . Par conséquent :

$$\Pr[R \leq 11,7\% - 2,33 \times 19,04\%] = 1\%$$

Il y a donc 99 chances sur 100 que la rentabilité réalisée soit supérieure à  $11,7\% - 2,33 \times 19,04\% = -32,66\%$ . La perte maximale en un an (au seuil de 99 %) que tante Agathe pourrait réaliser sur son portefeuille est :

$$-32,66\% \times 5\,000 \text{ €} = -1\,633,16 \text{ €}.$$

Ce dernier montant est appelé la « Value at Risk » (VaR). Ce concept sera étudié dans le chapitre 9.

## Rentabilité et risque d'un portefeuille de deux à $N$ actifs

### Exercice 4 Déterminer les caractéristiques d'un portefeuille comprenant un actif risqué

#### Énoncé

Vous venez d'être nommé gestionnaire du Fonds général d'actions (Fegac), une sicav gérée par la Banque Ducoin. Votre première tâche est d'identifier les caractéristiques de risque et de rentabilité attendue du portefeuille actuel et de comprendre comment elles seraient modifiées selon plusieurs scénarios concernant la répartition des actifs. Le montant total investi dans le fonds est de 200 000 000 € répartis comme suit :

	Montant (en millions €)
Actions	140
Bons du Trésor à un an	60

Le niveau actuel du taux d'intérêt sans risque est de 6 %. Le portefeuille d'actions est diversifié et reproduit exactement le portefeuille de marché, dont la rentabilité attendue est de 14 % et la volatilité de 20 %.

- a** Calculez la rentabilité attendue et le risque du Fegac.
- b** Trouvez l'équation donnant la relation entre la rentabilité attendue du portefeuille et la proportion investie en action.
- c** Quelle devrait-être l'allocation des actifs pour aboutir à une rentabilité attendue de 10 % ?
- d** Quelle devrait être l'allocation des actifs pour aboutir à une rentabilité attendue de 20 % ?
- e** Déterminez l'équation donnant la relation entre la volatilité du portefeuille et la proportion investie en actions.
- f** Quel serait le risque du portefeuille trouvé à la question **d** ?
- g** Déterminez l'équation donnant la relation entre la rentabilité attendue du portefeuille et sa volatilité.

### Solution

- a** La proportion investie en actions est de 70 %. Les caractéristiques du portefeuille sont :
  - rentabilité attendue =  $(0,7) \times (14\%) + (0,3) \times (6\%) = 11,60\%$  ;
  - risque (écart type) =  $(0,7) \times (20\%) = 14\%$ .
- b** La relation entre la rentabilité attendue du portefeuille  $r_P$  et la proportion  $x$  investie en actions est :

$$r_P = r_f + (r_A - r_f)x = 0,06 + 0,08x$$

- c** Pour obtenir une rentabilité attendue de 10 %, la proportion  $x$  investie en actions doit être de :

$$x = \frac{r_P - r_f}{r_A - r_f} = \frac{0,04}{0,08} = 0,50$$

Vous devriez investir 50 % de la valeur du portefeuille en actions (soit 100 000 000 €) et le solde en bons du Trésor.

- d** Pour obtenir une rentabilité attendue de 20 % la proportion investie en actions doit être :

$$x = \frac{r_P - r_f}{r_A - r_f} = \frac{0,14}{0,08} = 1,75$$

La proportion à investir en actions est supérieure à l'unité : il faudrait investir 350 000 000 € en actions. La valeur totale du portefeuille étant de 200 000 000 €, il faut emprunter la différence soit 150 000 000 €.

- e** La relation entre l'écart type du portefeuille  $\sigma_P$  et la proportion  $x$  investie en actions est :

$$\sigma_P = \sigma_A x = 0,20x$$

Le bon du Trésor étant un placement sans risque, la volatilité du portefeuille est une fonction linéaire de la proportion investie en actions.

- f** Une rentabilité attendue de 20 % sur le portefeuille est réalisée en investissant 175 % de la valeur du portefeuille en actions. Le risque de ce portefeuille est :

$$\sigma_P = 0,20 \times 1,75 = 35\%$$

- g** Nous pouvons combiner les deux équations obtenues précédemment :

$$r_P = r_f + (r_A - r_f)x$$

$$x = \frac{\sigma_P}{\sigma_A}$$

Il est possible d'en déduire que :

$$r_P = r_f + \frac{r_A - r_f}{\sigma_A} \sigma_P = 0,06 + 0,70 \sigma_P$$

## Exercice 5 Éliminer le risque d'un portefeuille de deux titres parfaitement corrélés positivement

### Énoncé

La Banque Ducoin vient de créer un fonds destiné à sa clientèle fortunée. Son objectif est d'assurer une rentabilité supérieure aux taux d'intérêt en vigueur sur le marché tout en ne prenant que très peu de risques. Vous êtes chargé de réaliser les premiers investissements. Vous avez identifié deux actions, A et B, dont les rentabilités sont parfaitement corrélées positivement. Leurs caractéristiques sont les suivantes :

	Rentabilité attendue	Volatilité
Action A	8 %	10 %
Action B	10 %	20 %

Le taux d'intérêt sans risque en vigueur sur le marché est de 6 %.

- a** Établissez la relation entre la rentabilité attendue du portefeuille et son risque.
- b** Déterminez la composition du portefeuille qui annule le risque du portefeuille.
- c** Calculez la rentabilité attendue de ce portefeuille.
- d** Les résultats que vous obtenez sont-ils compatibles avec un équilibre de marché ?

### Solution

- a** La rentabilité attendue du portefeuille est :

$$r_P = x_A r_A + x_B r_B$$

Les deux actions étant parfaitement corrélées positivement, le risque d'un portefeuille constitué de ces deux actions est :

$$\sigma_P = x_A \sigma_A + x_B \sigma_B$$

En combinant ces deux relations (et en se rappelant que  $x_A = 1 - x_B$ ), on obtient :

$$r_P = r_A + \frac{r_B - r_A}{\sigma_B - \sigma_A} (\sigma_P - \sigma_A)$$

$$= 0,06 + 0,2 \sigma_P$$

Il s'agit d'une relation linéaire. L'ordonnée à l'origine de la droite (6 %) donne la rentabilité attendue d'un portefeuille sans risque, composé des actions A et B. La pente indique qu'un accroissement de volatilité de 1 % s'accompagne d'un accroissement de la rentabilité attendue de 0,2 % (20 points de base).

- b** La composition du portefeuille qui annule le risque est :

$$x_A = \frac{-\sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B} = \frac{-20\%}{10\% - 20\%} = 2$$

et

$$x_B = \frac{-\sigma_A}{\sigma_B - \sigma_A} = \frac{-10\%}{20\% - 10\%} = -1$$

Supposons que le montant à investir soit de 100. Les proportions que nous venons de calculer indiquent qu'il faut prendre une position à découvert sur B à concurrence de 100 (emprunter des actions B pour une valeur de 100 et les vendre) et investir 200 en actions A (les 100 de départ auxquels s'ajoute le produit de la vente des titres B empruntés).

- c** La rentabilité attendue du portefeuille sans risque est :

$$\begin{aligned} r_P &= x_A r_A + x_B r_B \\ &= 2 \times 8\% - 1 \times 10\% \\ &= 6\% \end{aligned}$$

Nous retrouvons la valeur de l'ordonnée à l'origine de la droite dont nous avons déterminé l'équation à la réponse de la question **a** (voir figure 2.5 ).

- d** Les réponses obtenues précédemment nous ont permis d'identifier un portefeuille sans risque composé des actions A et B. La rentabilité attendue de ce portefeuille doit être égale au taux d'intérêt sans risque. Si ce n'était pas le cas, il y aurait une possibilité de réaliser un arbitrage. Or, dans un marché à l'équilibre, il est impossible de réaliser un profit de cette manière.

## Exercice 6 Choisir parmi un ensemble de portefeuilles mutuellement exclusifs

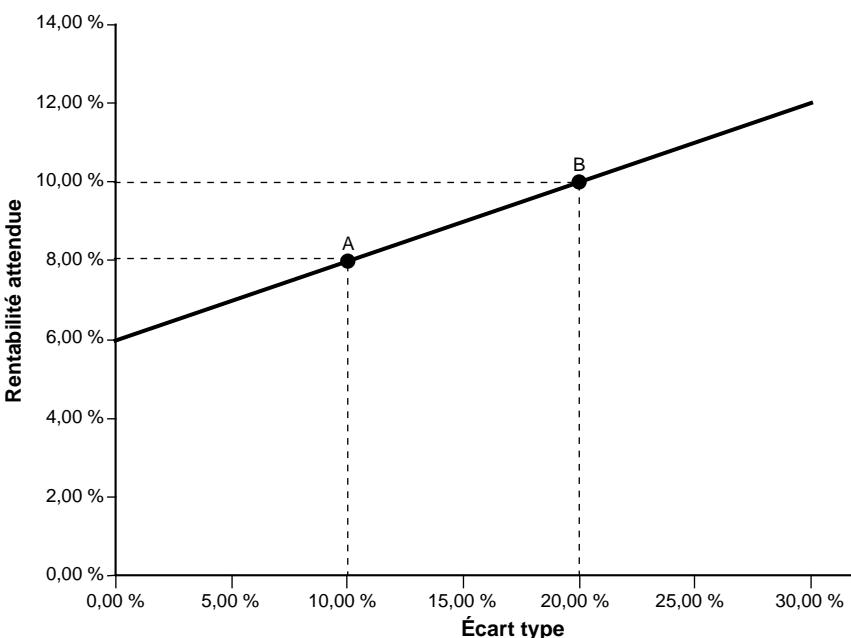
### Énoncé

Tante Agathe est confrontée à un choix cornélien : dans quelle sicav va-t-elle investir son épargne ? Elle a reçu de trois banques des offres (A, B et C) ayant des caractéristiques très différentes. Elles sont reprises dans le tableau 2.10.

Supposons d'abord que l'objectif de tante Agathe soit d'avoir une rentabilité attendue de 9 %.

- a** Quelle allocation d'actif devrait-elle réaliser selon la sicav choisie et quel serait le risque correspondant ?

Figure 2.5

**Solution de l'exercice 5.**

- b** Que devrait-elle choisir?

Supposons ensuite qu'elle soit prête à accepter que le risque de son portefeuille soit de 15 %.

- c** Quelle allocation d'actif devrait-elle réaliser selon la sicav choisie et quelle serait la rentabilité attendue correspondante ?
- d** Que devrait-elle choisir ?
- e** Le choix de la sicav dépend-il de son objectif ?

Tableau 2.10

**Données des sicav**

	Rentabilité attendue	Écart type
Taux d'intérêt sans risque	3 %	0 %
A	5 %	6 %
B	10 %	10 %
C	13 %	20 %

**Solution**

- a** Si tante Agathe exprime son objectif en termes de rentabilité attendue, la proportion de son épargne à investir dans la sicav choisie et le risque qui en résulte sont donnés par :

$$x = \frac{r_p - r_f}{r_i - r_f} \quad \text{et} \quad \sigma_p = x\sigma_i$$

Le tableau 2.11 résume ces résultats.

Tableau 2.11

**Proportions  
(sur la base  
d'une rentabilité  
attendue)**

	Proportion investie dans la sicav	Risque
A	300 %	18 %
B	86 %	8,57 %
C	60 %	12 %

Remarquez que si A est choisie, tante Agathe empruntera pour investir un montant supérieur à son épargne initiale.

- b** Tante Agathe choisira la solution qui minimise le risque c'est-à-dire la sicav B.
- c** Si tante Agathe exprime son objectif en termes de risque, la proportion à investir dans la sicav choisie et la rentabilité attendue qui en résulte sont exprimées par :

$$x = \frac{\sigma_P}{\sigma_i} \quad \text{et} \quad r_P = r_f + \frac{r_i - r_f}{\sigma_i} \sigma_P$$

ce qui nous conduit aux résultats repris dans le tableau 2.12.

Tableau 2.12

**Proportions  
(sur la base  
d'une limite de  
risque)**

	Proportion investie dans la sicav	Rentabilité attendue
A	250 %	8 %
B	150 %	13,50 %
C	75 %	10,50 %

- d** Tante Agathe choisira la solution qui lui donne la rentabilité attendue la plus élevée : la sicav B de nouveau.
- e** Cette question peut être résolue soit graphiquement, soit analytiquement. La figure 2.6 présente les rentabilités (et les écarts types correspondants) qu'il est possible d'atteindre en créant des portefeuilles constitués d'une sicav et de l'actif sans risque.

L'examen de la figure 2.6 nous apprend que le choix sera le même quel que soit l'objectif. Il dépend uniquement de la pente de la droite liant, pour chacune des sicav, la rentabilité attendue au risque. Graphiquement, la droite dont la pente est la plus élevée sera systématiquement préférée. Dans notre cas, il conviendra d'investir dans la sicav B et l'actif sans risque. Analytiquement, la pente de cette droite est égale au ratio de Sharpe :

$$\frac{r_i - r_f}{\sigma_i}$$

Ce ratio donne l'accroissement de rentabilité attendue par unité d'accroissement de la volatilité. Le choix portera sur la sicav B qui présente le ratio le plus élevé. Le tableau 2.13 reprend le ratio de Sharpe pour les trois sicav.

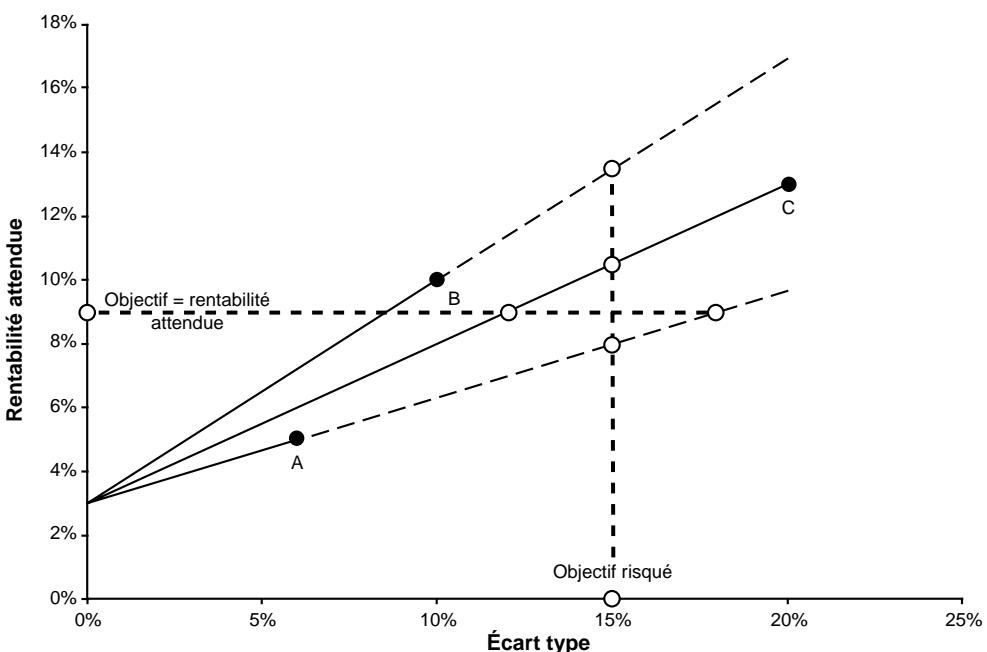
Tableau 2.13

**Ratio de Sharpe pour les trois sicav**

	Ratio de Sharpe
A	0,33
B	0,70
C	0,50

Figure 2.6

**Couples rentabilité – écart type pour chacun des portefeuilles constitués de l'actif sans risque et de l'une des sicav.**



## Exercice 7      Créez un portefeuille constitué d'obligations à long terme et d'actions

### Énoncé

Vous avez décidé de vous constituer un portefeuille constitué d'une sicav d'actions et d'une sicav obligataire. Vous avez rassemblé les données suivantes :

	Rentabilité attendue	Volatilité
Obligations	5 %	6 %
Actions	10 %	15 %

Le coefficient de corrélation entre actions et obligations est de 0,30. Le taux d'intérêt sans risque est de 3 %.

Vous envisagez d'investir 70 % en obligations et 30 % en actions.

**a**

Calculez la rentabilité attendue et le risque de ce portefeuille.

**b**

Calculez la covariance de chacun des titres avec le portefeuille puis la variance et l'écart type du portefeuille.

- c** Déterminez le bêta de chacun des titres de ce portefeuille.

### Solution

- a** La rentabilité attendue du portefeuille est la moyenne des rentabilités des titres, pondérée par les proportions de chacun d'eux :

$$r_P = (0,70) \times (5\%) + (0,30) \times (10\%) = 6,50\%$$

Il est possible de calculer le risque du portefeuille en appliquant directement la formule du risque d'un portefeuille constitué de deux actifs risqués :

$$\begin{aligned}\sigma_P &= \sqrt{(0,70)^2 \times (6\%)^2 + (0,30)^2 \times (15\%)^2 + 2 \times (0,70) \times (0,30) \times (6\%) \times (15\%) \times (0,30)} \\ &= 7,02\%\end{aligned}$$

- b** Afin de poser les repères pour les calculs plus complexes reprenant un nombre de titres plus élevés, nous suggérons de décomposer le calcul du risque du portefeuille en quatre temps :

1. Construction de la matrice des variances et des covariances.
2. Calcul des covariances de chacun des titres avec le portefeuille.
3. Calcul de la variance du portefeuille.
4. Calcul de l'écart type.

Reprendons ces étapes une à une.

- 1. Construction de la matrice des variances et des covariances.**

Il s'agit d'un tableau carré symétrique reprenant les variances dans la diagonale et les covariances dans les cases hors de la diagonale.

	Obligations	Actions
Obligations	0,36 %	0,27 %
Actions	0,27 %	2,25 %

- 2. Calcul des covariances de chacun des titres avec le portefeuille.**

La covariance d'un titre avec le portefeuille est la moyenne, pondérée par les proportions, des covariances de ce titre avec tous les titres en portefeuille (notez que ce calcul inclut la covariance du titre avec lui-même, c'est-à-dire sa variance).

$$\sigma_{OP} = (0,70)(0,36\%) + (0,30)(0,27\%) = 0,33\%$$

$$\sigma_{AP} = (0,70)(0,27\%) + (0,30)(2,25\%) = 0,86\%$$

- 3. Calcul de la variance du portefeuille.**

La variance du portefeuille est la moyenne pondérée des covariances de chacun des titres avec le portefeuille.

$$\sigma_P^2 = (0,70)(0,33\%) + (0,30)(0,86\%) = 0,49\%$$

Notons que les covariances des titres avec le portefeuille donnent la contribution de chacun des titres à la variance du portefeuille.

#### 4. Calcul de l'écart type.

$$\sigma_P = \sqrt{0,49\%} = 7,02\%$$

- c** Nous avons défini le bêta d'un titre dans un portefeuille comme la covariance de ce titre avec le portefeuille divisé par la variance du portefeuille.

$$\beta_O = \frac{0,33\%}{0,49\%} = 0,68 \quad \text{et} \quad \beta_A = \frac{0,86\%}{0,49\%} = 1,76$$

Au vu des résultats, la contribution des obligations au risque du portefeuille est inférieure au risque de l'ensemble du portefeuille (le bêta est inférieur à l'unité) alors que la contribution des actions au risque est supérieure à la moyenne (le bêta est supérieur à l'unité).

### Exercice 8 Calculer la rentabilité attendue et le risque d'un portefeuille de quatre actions

#### Énoncé

Considérez un portefeuille constitué de quatre actions. Vous disposez des informations reprises dans le tableau 2.14.

- a** Calculez la rentabilité attendue du portefeuille.
- b** Calculez la covariance de chacun des titres avec le portefeuille.
- c** Calculez la variance et l'écart type du portefeuille.
- d** Déterminez le bêta de chacun des titres dans ce portefeuille. Interprétez.

Tableau 2.14

#### Données

	Proportion	Rentabilité attendue	Matrice Variance – Covariance				
				A	B	C	D
A	10 %	8 %	A	9 %	5 %	0 %	-5 %
B	20 %	12 %	B	5 %	8 %	3 %	1 %
C	40 %	7 %	C	0 %	3 %	7 %	-2 %
D	30 %	10 %	D	-5 %	1 %	-2 %	12 %

#### Solution

- a** La rentabilité attendue du portefeuille est égale à la moyenne des rentabilités attendues de chacun des titres, pondérée par leurs poids :

$$\begin{aligned} r_P &= \sum_i x_i r_i = (10\%) \times (8\%) + (20\%) \times (12\%) + (40\%) \times (7\%) + (30\%) \times (10\%) \\ &= 9\% \end{aligned}$$

- b** La covariance d'un titre avec le portefeuille est égale à la moyenne des covariances de chacun des titres avec lui, pondérée par leurs proportions. Par exemple, pour l'action A :

$$\begin{aligned} \sigma_{AP} &= \sum_i x_i \sigma_{Ai} = (10\%) \times (9\%) + (20\%) \times (5\%) + (40\%) \times (0\%) + (30\%) \times (-5\%) \\ &= 0,40\% \end{aligned}$$

En répétant le calcul pour chacune des actions, on obtient :

$$\sigma_{AP} = 0,40\%, \sigma_{BP} = 3,60\%, \sigma_{CP} = 2,80\%, \sigma_{DP} = 2,50\%.$$

- c** La variance du portefeuille est la moyenne des covariances de chacun des titres avec le portefeuille, pondérée par leurs poids :

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= \sum_i x_i \sigma_{iP} \\ &= (10\%) \times (0,40\%) + (20\%) \times (3,10\%) + (40\%) \times (2,20\%) \\ &\quad + (30\%) \times (3,60\%) \\ &= 2,63\%\end{aligned}$$

L'écart type est la racine carrée de la variance :

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2} = 16,22\%$$

- d** Le bêta d'un titre dans le portefeuille est le rapport entre la covariance de ce titre avec le portefeuille et la variance du portefeuille :

$$\beta_{iP} = \frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2}$$

On obtient :

$$\beta_{AP} = 0,15, \beta_{BP} = 1,37, \beta_{CP} = 1,06, \beta_{DP} = 0,95$$

L'action A contribue très peu au risque du portefeuille. Cela s'explique par la covariance nulle de A avec C et la covariance négative de A avec D. La contribution des actions B et C est supérieure à la moyenne et leurs coefficients bêta sont donc supérieurs à l'unité. Le risque du titre D est légèrement inférieur à la moyenne : bien qu'ayant la variance la plus élevée, il est corrélé négativement avec A et C.

## Exercice 9 Déterminer le nombre de titres différents à détenir en portefeuille

### Énoncé

Oncle Séraphin, découragé par les frais de gestion que pratiquent les banques, a décidé de gérer lui-même son portefeuille. Il a compris les avantages de la diversification mais, vu ses ressources limitées, il doit limiter le nombre d'actions différentes qu'il détient.

La composition de son portefeuille est simple : toutes ses actions ont le même poids. Les recherches faites sur Internet lui ont appris que les actions traitées sur les marchés boursiers ont des caractéristiques identiques :

rentabilité attendue  $r = 9\%$

volatilité  $\sigma = 30\%$

coefficient de corrélation entre deux actions quelconques  $\rho = 0,50$ .

Muni de ces informations, il décide de répondre aux questions suivantes :

- a** S'il répartit son portefeuille entre  $N$  actions, quels en seront la rentabilité attendue et le risque ?
- b** Quels seront la rentabilité attendue et le risque de portefeuilles comprenant 1, 10, 20 et 30 actions.
- c** Pourrait-il éliminer totalement le risque de son portefeuille en détenant un très grand nombre d'actions ? Pourquoi ?

### Solution

- a** Les caractéristiques d'un portefeuille constitué d'une fraction  $1/N$  investie dans chaque action sont :

$$\begin{aligned} r_P &= N \times \frac{1}{N} \times r = 9\% \\ \sigma_P &= \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j} \\ &= \sqrt{N \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma^2 + N(N-1) \left(\frac{1}{N}\right) \left(\frac{1}{N}\right) \rho \sigma^2} = \sqrt{\frac{0,09}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right) 0,045} \end{aligned}$$

- b** En appliquant ces formules, on obtient les résultats du tableau 2.15.

Tableau 2.15

### Résultats

	Nombre d'actions en portefeuille	Rentabilité attendue	Écart type
1	9 %	30,00 %	
10	9 %	22,25 %	
20	9 %	21,74 %	
30	9 %	21,56 %	

Oncle Séraphin peut donc constater que :

1. La diversification lui permet de réduire le risque de son portefeuille.
2. La réduction du risque résultant d'un accroissement du nombre d'actions diminue lorsque le nombre d'actions augmente.
- c** Lorsque le nombre de titres devient très grand ( $N \rightarrow \infty$ ), le risque du portefeuille tend vers 21,21 %. Il n'est pas possible de descendre au-dessous de ce seuil. Cette limite inférieure est fixée par la covariance entre les actions, qui dépend du coefficient de corrélation entre les titres :

$$\sigma_P \rightarrow \sqrt{\rho \sigma^2}$$

Plus faible est la corrélation, plus faible est le risque systématique.

## Exercice 10 Analyser une modification de la composition d'un portefeuille sur son risque

### Énoncé

Tante Agathe détient un portefeuille diversifié d'actions européennes. La rentabilité attendue est de 10 % et la volatilité de 15 %. Son banquier, M. d'Argent, lui suggère d'investir 5 % de son portefeuille dans EmDucoin, la nouvelle sicav de la Banque Ducoin placée en actions de pays émergents. La rentabilité attendue est de 15 %. Mais, a rajouté M. d'Argent, son risque est élevé : la volatilité s'élève à 30 %.

- a** Calculez la rentabilité attendue de ce nouveau portefeuille.
- b** Calculez le risque du portefeuille en supposant que le coefficient de corrélation entre la sicav et les actions européennes est de 0 % ou 60 %.
- c** À partir de quelle valeur du coefficient de corrélation la sicav EmDucoin accroît-elle le risque du portefeuille ?

### Solution

- a** La rentabilité attendue du portefeuille est :

$$r_P = (95\%) \times (10\%) + (5\%) \times (15\%) = 10,25\%.$$

Investir dans la sicav EmDucoin permet d'accroître la rentabilité attendue du portefeuille.

- b** Le risque du portefeuille dépend du coefficient de corrélation :

$$\sigma_P = \sqrt{(95\%)^2 \times (15\%)^2 + (5\%)^2 \times (30\%)^2 + 2 \times (95\%) \times (5\%) \times (15\%) \times (30\%) \times \rho}$$

On obtient :

$$\rho = 0 : \sigma_P = 14,33\% \quad \text{et} \quad \rho = 0,6 : \sigma_P = 15,20\%.$$

Si la sicav n'est pas corrélée avec les actions européennes, le risque du portefeuille diminue. Tante Agathe aurait donc intérêt à investir dans cette sicav qui lui permettrait d'accroître la rentabilité attendue tout en diminuant le risque du portefeuille.

Si, en revanche, le coefficient de corrélation est égal à 0,60, le risque augmente et aucune recommandation claire ne peut être formulée.

- c** Le risque du portefeuille augmente lorsque tante Agathe investit une « petite » fraction dans la sicav si la covariance de celle-ci avec les actions européennes est supérieure à leur variance :

$$\rho \times (15\%) \times (30\%) > (15\%)^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \rho > 0,50.$$

# Choix de portefeuille optimal

## Exercice 11 Calculer la composition d'un portefeuille efficient

### Énoncé

Reprenez les données de l'exercice 2.8.

- a** Construisez une feuille de calcul qui détermine le risque et la rentabilité attendue d'un portefeuille de quatre actions.
- b** En vous servant de la commande Solveur, calculez la composition du portefeuille efficient d'écart type égal à 15 %.

### Solution

- a** La solution à cette question est donnée dans le fichier Excel lié à ce chapitre.
- b** Avec Solveur, vous obtiendrez la composition du portefeuille efficient en choisissant celle qui maximise la rentabilité attendue sous deux contraintes :
  1. La somme des poids est égale à l'unité.
  2. L'écart type est égal à l'objectif recherché (15 % dans cet exercice).

Cela donne le résultat suivant :

$$x_A = 28,54\%, x_B = 16,94\%, x_C = 18,76\%, x_D = 35,76\%.$$

## Exercice 12 Choisir un portefeuille risqué optimal

### Énoncé

Vous avez calculé les caractéristiques de plusieurs portefeuilles risqués efficients (voir tableau 2.16).

**Le taux d'intérêt sans risque est égal à 3 %. Quel portefeuille choisir ?**

Tableau 2.16

### Caractéristiques

	Rentabilité attendue	Écart type
A	6,00 %	5,66 %
B	7,00 %	7,00 %
C	8,00 %	9,31 %
D	9,00 %	12,06 %
E	10,00 %	15,00 %

### Solution

Le portefeuille optimal est celui qui maximise le ratio de Sharpe ( $S$ ), c'est-à-dire le rapport entre la rentabilité attendue excédentaire et l'écart type. Pour les cinq portefeuilles risqués efficients, nous trouvons :

$$S_A = 0,530 \quad S_B = 0,571 \quad S_C = 0,537 \quad S_D = 0,498 \quad S_E = 0,467.$$

Il faut donc choisir le portefeuille B.

## Exercice 13 Choisir une allocation d'actif qui reflète l'aversion au risque

### Énoncé

Récemment engagée comme agent de change, Nathalie doit gérer, pour compte d'un de ses clients, un portefeuille dont la composition est la suivante :

	Montant (en millions d'euros)
Actions	3
Bons du Trésor	2

Le portefeuille d'actions reproduit fidèlement le portefeuille de marché. Le taux sans risque en vigueur sur le marché est de 5 % et une étude récente a montré que la prime de risque unitaire du portefeuille de marché est de 6 % et l'écart type de la rentabilité (la volatilité) de 17 %.

Au cours d'une conversation récente, Nathalie a pu établir que le coefficient d'aversion au risque de son client est égal à 1,5 et que sa fonction d'utilité peut s'exprimer par  $U(r_P, \sigma_P) = r_P - a\sigma_P^2$ . Elle se demande si le portefeuille actuel correspond encore à ses désirs.

- a** En supposant le portefeuille d'actions bien diversifié, quels en sont la rentabilité attendue et le risque ?
- b** Le client préférerait-il tout investir en bons du Trésor ou en actions ?
- c** Compte tenu du coefficient d'aversion au risque du client, quelle serait la composition optimale du portefeuille ?

### Solution

- a** Le portefeuille actuel est investi à 60 % en actions et 40 % en bons du Trésor. La rentabilité attendue du portefeuille et son risque sont :

$$r_P = (0,4) \times (5\%) + (0,6) \times (5\% + 6\%) = 8,6\% \quad \text{et} \quad \sigma_P = (0,6) \times (17\%) = 10,2\%.$$

- b** L'utilité que retire le client de son portefeuille actuel est

$$U = (8,6\%) - (1,5) \times (10,2\%)^2 = 7,04\%.$$

Un investissement uniquement en bons du Trésor donnerait une utilité égale au taux d'intérêt sans risque (5 %) et donc inférieure. L'utilité d'un investissement uniquement en actions est :

$$U = (11\%) - (1,5) \times (17\%)^2 = 6,67\%.$$

Elle est également inférieure à l'utilité du portefeuille actuel.

- c** La proportion optimale à investir en actions est :

$$x = \frac{r_A - r_f}{2a\sigma_A^2} = \frac{0,11 - 0,05}{2 \times 1,5 \times 0,17^2} = 69,2\%$$

En investissant cette proportion en actions, le client aurait un portefeuille ayant les caractéristiques suivantes :

Rentabilité attendue = 9,15 %, risque = 11,76 %, utilité = 7,08 %.

## Exercice 14 Choisir des portefeuilles

### Énoncé

Oncle Séraphin vient de gagner le gros lot de 100 000 000 € à la loterie. Il vous demande de l'aider à définir sa politique de placement. Il sait que son coefficient d'aversion au risque est de 2. Plusieurs banques lui proposent de placer son argent dans les fonds de placement qu'elles commercialisent. La lecture des prospectus a permis de déterminer les rentabilités attendues et les risques des différents fonds proposés (voir tableau suivant).

Fonds	A	B	C	D	E
Rentabilité attendue %	15	14	20	21	25
Écart type %	10	12	15	25	30

Supposons d'abord que l'oncle Séraphin souhaite investir dans un seul de ces fonds.

- a** Donnez la définition d'un portefeuille efficient. Identifiez les fonds communs proposés qui ont cette propriété.

Supposons maintenant que le taux d'intérêt sans risque en vigueur sur le marché soit de 6 % et qu'oncle Séraphin souhaite prendre un risque de 12 % sur son portefeuille.

- b** Quel conseil devriez-vous lui donner ?

Envisageons maintenant le cas où oncle Séraphin déciderait de répartir son placement entre les fonds A et E dont il sait que les rentabilités ont une corrélation égale à 0.

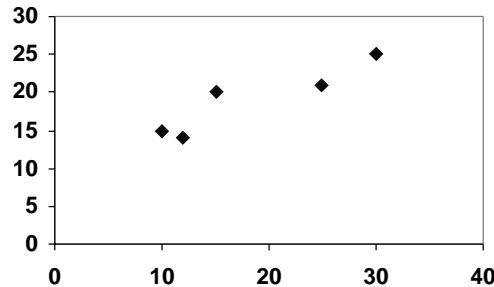
- c** Calculez la rentabilité attendue et le risque de son portefeuille pour les proportions investies dans le fonds A de 25 %, 50 % et 75 %.
- d** Compte tenu du taux d'intérêt de 6 %, quelle politique de placement suggéreriez-vous à votre oncle ?

### Solution

- a** Un portefeuille est efficient s'il n'est pas possible de trouver un autre portefeuille de rentabilité attendue plus élevée pour le même risque. Le portefeuille B est clairement non efficient puisque, comparé à A, il a à la fois un risque plus élevé et une rentabilité attendue moindre. Le portefeuille D n'est pas efficient non plus puisque ses caractéristiques le situent au-dessous de la droite CE dans le plan risque-rentabilité attendue. Or, cette droite représente l'ensemble des couples risque-rentabilité attendue si C et E sont parfaitement corrélés. Dans le cas où la corrélation serait imparfaite (inférieure à +1), les couples se situeraient au-dessus de la droite, ce qui renforce l'argument (voir figure 2.7).

- b** Si Séraphin opte pour un risque de 12 %, il procédera en deux temps :

Figure 2.7



- Choix du portefeuille optimal, celui qui maximise le ratio de Sharpe, le rapport entre la rentabilité attendue excédentaire et le risque du portefeuille  $(r_P - r_F)/\sigma_P$ .  
Dans notre cas :

Fonds	A	B	C	D	E
$(r_P - r_F)/\sigma_P$	0,90	0,67	0,93	0,60	0,63

Le portefeuille optimal est donc C, *indépendamment des préférences de Séraphin.*

- Choix de la proportion à investir dans C. Comme l'objectif est  $\sigma_P = 12\%$ , cette proportion est la solution de l'équation :  $12\% = x15\%$ . Il investira donc 80 % dans C et le solde dans le titre sans risque.
- Les données sont rassemblées dans le tableau 2.17.

Tableau 2.17

Rentabilités attendues et risques en fonction des proportions

Proportion A	100 %	75 %	50 %	25 %	0 %
Proportion E	0 %	25 %	50 %	75 %	100 %
Rentabilité attendue %	15,00	17,50	20,00	22,50	25,00
Risque %	10,00	10,61	15,81	22,64	30,00
Rent. excédentaire/unité de risque	0,90	1,08	0,89	0,73	0,63

- Parmi tous les portefeuilles considérés à la question c, l'optimal est celui investi à concurrence de 75 % dans A et 25 % dans E. Il maximise la rentabilité excédentaire par unité de risque (ratio de Sharpe). Compte tenu de sa fonction d'utilité, Séraphin devrait y investir une proportion X, donnée par la formule :

$$X = \frac{1}{2a} \frac{r_P - r_F}{\sigma_P^2} = \frac{1}{2 \times 2} \frac{0,175 - 0,06}{0,1061^2} = 2,56$$

Il doit donc emprunter 156 000 000 € à 6 % pour placer 256 000 000 € dans la combinaison optimale.

## Médaf

### Exercice 15 Utiliser la droite de marché

#### Énoncé

Vous avez rassemblé les données suivantes : – taux d'intérêt sans risque = 3 % ;

- prime de risque du marché = 5 %.
- Le tableau 2.18 reprend le bêta de sociétés françaises.

Sur la base du Médaf :

- a** Calculez la rentabilité attendue de chacune des actions.
- b** Construisez un graphe montrant la relation entre la rentabilité attendue et le bêta.
- c** Pourquoi un investisseur qui détient le portefeuille de marché n'augmente-t-il pas le poids de l'action Alcatel pour accroître la rentabilité attendue de son portefeuille ?

Tableau 2.18

**Bêta de sociétés françaises**

Action	Bêta
Alcatel	1,80
Bouygues	1,30
Saint-Gobain	1,00
L'Oréal	0,80
Pernod-Ricard	0,50

#### Solution

- a** Les rentabilités attendues sont calculées en appliquant la formule du Médaf (ou du modèle d'évaluation par arbitrage à un facteur) :

$$r = r_f + (r_m - r_f)\beta$$

Les résultats que l'on tire de cette relation sont repris dans le tableau 2.19.

Tableau 2.19

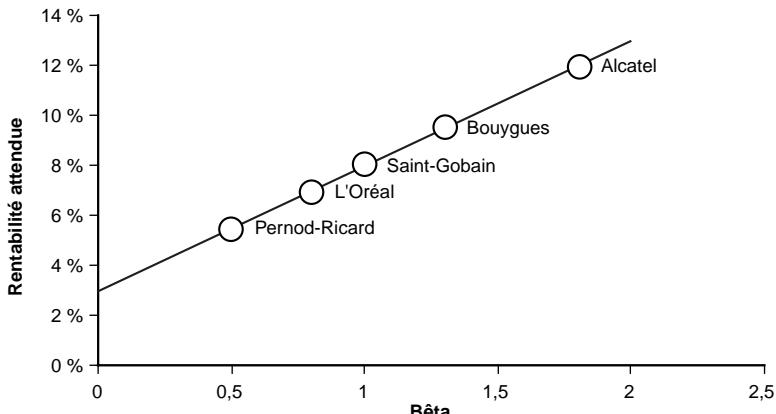
**Rentabilités attendues des sociétés**

Action	Bêta	Rentabilité attendue
Alcatel	1,80	= 3 % + (5 %)(1,80) = 12 %
Bouygues	1,30	9,50 %
Saint-Gobain	1,00	8 %
L'Oréal	0,80	7,00 %
Pernod-Ricard	0,50	5,50 %

- b** La figure 2.8 propose une représentation graphique de la droite de marché
- c** En détenant le portefeuille de marché, l'investisseur diversifie son risque de manière optimale. S'il décide d'investir plus dans une action donnée, il supportera un risque supplémentaire pour lequel il ne sera que partiellement rémunéré.

Figure 2.8

**Représentation graphique de la droite de marché.**



## Exercice 16 Utiliser le Médaf

### Énoncé

Désireuse d'être toujours à la pointe de l'innovation, la Banque Ducoin envisage de commercialiser les trois nouvelles sicav décrites dans le tableau 2.20.

Tableau 2.20

**Description des sicav**

Sicav	Description
B-demi	Portefeuille de variance minimum investi en actions ayant chacune un bêta de 0,50
B-un	Portefeuille de variance minimum investi en actions ayant chacune un bêta de 1
B-deux	Portefeuille de variance minimum investi en actions ayant chacune un bêta de 2

Le taux d'intérêt sans risque est de 3 % et la prime de risque du marché est de 8 %. La volatilité du portefeuille de marché est de 16 %. Supposez que les hypothèses du Médaf soient vérifiées.

- a** Calculez les rentabilités attendues de ces trois sicav.
- b** Quelle est la composition de la sicav B-un ?
- c** Un investisseur prudent souhaite détenir un portefeuille ayant un bêta de 0,50. Quelle sicav lui recommanderiez-vous ?
- d** Un investisseur agressif souhaite détenir un portefeuille ayant un bêta de 2. Quelle sicav lui recommanderiez-vous ?

### Solution

- a** Les rentabilités attendues des trois sicav sont :

$$\text{B-demi } r = 3\% + (8\%) \times (0,50) = 7\%$$

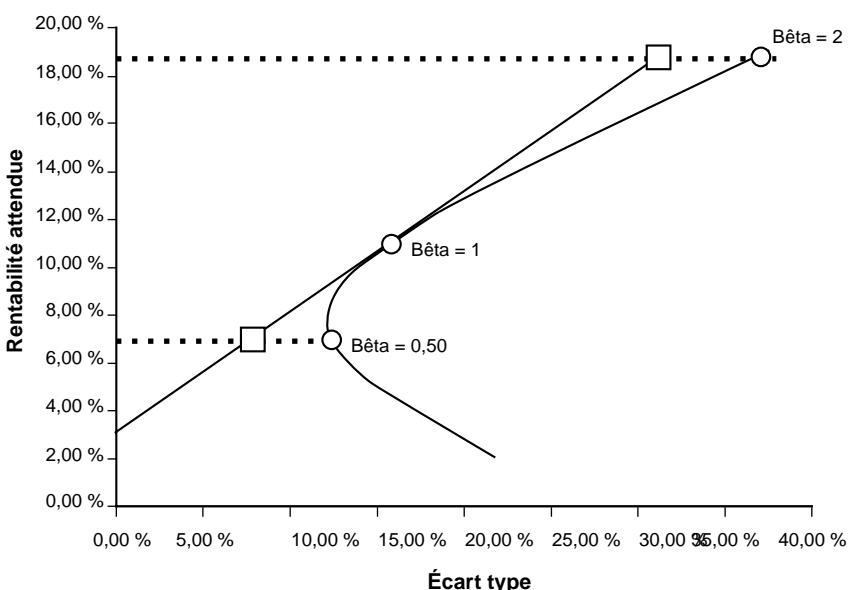
$$\text{B-un } r = 3\% + (8\%) \times (1,00) = 11\%$$

$$\text{B-deux } r = 3\% + (8\%) \times (2,00) = 19\%.$$

- b** Le bêta du portefeuille de marché est égal à l'unité. Il est efficient, c'est-à-dire qu'il minimise la variance pour un niveau fixé de la rentabilité attendue. La composition de la sicav B-un est identique à celle du portefeuille de marché.
- c** D'après la théorie du Médaf, la stratégie optimale de placement doit être fondée sur une combinaison du titre sans risque et du portefeuille de marché. Un investisseur qui souhaite détenir un portefeuille de bêta égal à 0,50 doit placer une moitié de son investissement dans le portefeuille de marché et l'autre dans le titre sans risque. Cette stratégie minimise le risque du portefeuille (son écart type). Investir dans la sicav B-demi conduit à un écart type supérieur.

Figure 2.9

**Stratégie optimale de placement dans le cadre du Médaf.**



- d** Un investisseur qui désire détenir un portefeuille de bêta égal à 2 doit emprunter pour investir dans le portefeuille de marché le double de sa mise de fonds initiale. La figure 2.9 , reprend cela et montre graphiquement la stratégie optimale de placement dans le cadre du Médaf.



# Valorisation d'options

1.	Définition des options classiques . . . . .	73
2.	Cash flows associés à une option . . . . .	73
3.	Relation de parité put – call . . . . .	75
4.	Bornes des options . . . . .	76
5.	Valorisation des options : modèle binomial . . . . .	76
6.	Formule de Black-Scholes . . . . .	80
7.	Valeur d'option et volatilité . . . . .	83
<b>Problèmes et exercices</b>		
<b>Valorisation des options :</b>		
modèle binomial . . . . .	86	
<b>Formule de Black-Scholes</b> . . . . .	103	

Nous avons, dans le chapitre précédent, calculé la valeur actuelle en actualisant les cash flows attendus à un taux ajusté pour le risque. Cette approche suppose que la réalisation de ces cash flows ne peut être modifiée par les décisions des investisseurs ou des entreprises. Or, dans de nombreuses situations, c'est l'inverse qui se produit et, en particulier, dans le cas des options. Ce chapitre introduit les méthodes de valorisation d'options classiques – options d'achat (call) et options de vente (put).

## 1 Définition des options classiques

Une option donne le droit de réaliser une transaction future à des conditions fixées à la conclusion du contrat. À la date fixée (ou aux dates fixées), le détenteur de l'option (l'acheteur) choisit de réaliser ou non l'opération. En revanche, l'émetteur (le vendeur) est soumis au choix de l'acheteur : à l'échéance, il a l'obligation de se porter contrepartie de la transaction si celle-ci a lieu. Les deux types d'options classiques sont :

**Le call :** le droit d'acheter un actif financier (le sous-jacent, dont la valeur est  $S$ ) à, ou jusqu'à, une date fixée (l'échéance) à un prix fixé (le prix d'exercice,  $X$ ).

**Le put :** le droit de vendre un actif financier à, ou jusqu'à, une date fixée à un prix fixé. L'option est dite *européenne* si elle peut être exercée uniquement à une date fixée, l'échéance  $T$ . Elle est *américaine* si elle peut être exercée à tout moment jusqu'à une date fixée.

## 2 Cash flows associés à une option

À la conclusion du contrat, l'acquéreur paie à sa contrepartie une prime reflétant la valeur de l'option (le prix d'achat est noté  $C$  pour un call et  $P$  pour un put). À l'échéance,

il choisit ou non d'exercer son option en fonction des conditions de marché (le prix du sous-jacent).

Tableau 3.1

**Valeur et profit à l'échéance d'un call européen**

	Acheteur		Vendeur	
À la conclusion du contrat	$-C$		$+C$	
À l'échéance	$S_T < X$	$S_T > X$	$S_T < X$	$S_T > X$
Décision	Ne pas exercer	Exercer	—	—
Valeur	0	$S_T - X$	0	$-(S_T - X)$
Profit	$-C$	$S_T - X - C$	$+C$	$+C - (S_T - X)$

La valeur du call à l'échéance peut s'écrire, de manière compacte :

$$C_T = \max(0, S_T - X)$$

Figure 3.1

**Valeur et profit à l'échéance pour un call européen (sur la base d'un prix d'exercice égal à 100 et d'une prime égale à 5).**

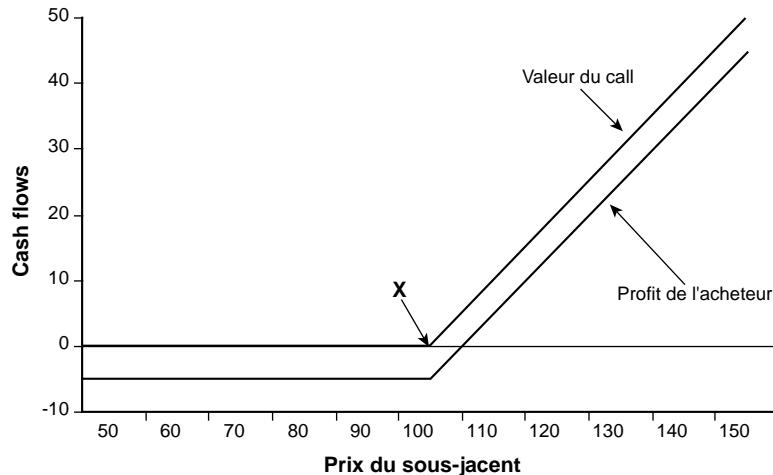


Tableau 3.2

**Valeur et profit à l'échéance d'un put européen**

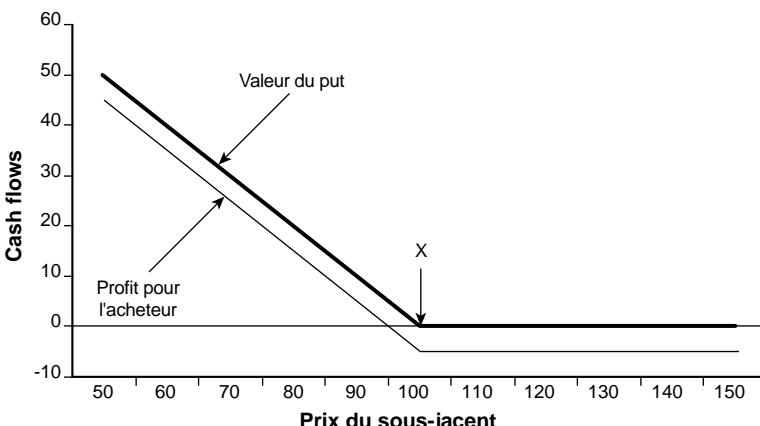
	Acheteur		Vendeur	
À la conclusion du contrat	$-P$		$+P$	
À l'échéance	$S_T < X$	$S_T > X$	$S_T < X$	$S_T > X$
Décision	Exercer	Ne pas exercer	—	—
Valeur	$X - S_T$	0	$-(X - S_T)$	0
Profit	$X - S_T - P$	$-P$	$+P - (X - S_T)$	$P$

La valeur du put à l'échéance peut s'écrire, de manière compacte :

$$P_T = \max(0, X - S_T)$$

Figure 3.2

**Valeur et profit à l'échéance pour un put européen (sur la base d'un prix d'exercice égal à 100 et d'une prime égale à 5).**



### 3 Relation de parité put – call

Un call et un put européens de même échéance et de même prix d'exercice ne sont pas des produits indépendants. Considérons d'abord un portefeuille constitué de l'actif sous-jacent et d'un put, et dont la valeur à l'échéance est :

$$S_T + (X - S_T) = X, \quad \text{si } S_T < X. \quad S_T + 0 = S_T, \quad \text{si } S_T > X.$$

Le propriétaire de l'actif sous-jacent est sûr que la valeur de son portefeuille ne descendra pas au-dessous du prix d'exercice du put. Ce dernier apparaît comme une forme de contrat d'assurance.

Il est possible d'aboutir au même résultat par une autre stratégie : acheter un call (de même échéance et de même prix d'exercice) et placer un montant égal à la valeur actuelle du prix d'exercice. La valeur de ce portefeuille à l'échéance est :

$$\begin{aligned} 0 + X &= X, \quad \text{si } S_T < X. \\ (S_T - X) + X &= S_T, \quad \text{si } S_T > X. \end{aligned}$$

La figure 3.3 illustre ces deux stratégies.

Les valeurs de ces deux stratégies sont identiques à l'échéance quelle que soit la valeur de l'actif sous-jacent. En conséquence, leurs valeurs initiales sont identiques sous peine de violation de la loi du prix unique :

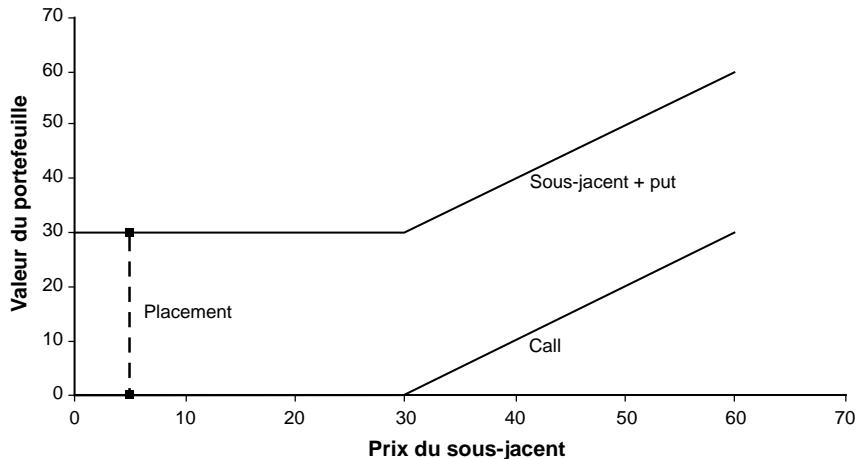
$$C + VA(X) = S + P$$

avec  $VA(X)$ , la valeur actuelle (actualisée au taux sans risque) du prix d'exercice. Cette égalité est appelée relation de parité put – call. Différentes présentations peuvent en être données. Pour avoir une interprétation, il suffit de se rappeler la règle suivante :

- Un signe + représente une position longue. En d'autres termes, on a acheté l'actif.
- Un signe – représente une position courte ou à découvert : on a emprunté puis vendu l'actif.

Figure 3.3

**La relation de parité put – call.**



Comme illustration, écrivons la relation de parité put – call sous la forme :

$$C = S + P - VA(X).$$

Cette formulation nous apprend qu'un call est équivalent à un portefeuille constitué, de l'actif sous-jacent, d'un put et d'un emprunt de valeur future égale au prix d'exercice.

## 4 Bornes des options

Par absence d'arbitrage, c'est-à-dire pour qu'il soit impossible de réaliser un profit certain sans engager d'argent, il faut qu'à tout instant :

- pour un call :  $\text{Max}(0, S - X) < C < S$ ;
- pour un put :  $\text{Max}(0, X - S) < P$ .

Notons que  $\text{Max}(0, S - X)$  est dénommé la valeur intrinsèque d'un call et  $\text{Max}(0, X - S)$  la valeur intrinsèque d'un put.

## 5 Valorisation des options : modèle binomial

Les options ne peuvent être évaluées en suivant la démarche classique d'actualisation de la valeur future attendue sur la base d'un taux d'actualisation qui reflète le risque. En effet, comme le montrent les figures 3.1 et 3.2, page 74, la relation entre la valeur d'une option et le prix du sous-jacent est non linéaire. Il en résulte que le risque de l'option varie au cours du temps et que la prime de risque est variable. L'évaluation des options nécessite donc une autre approche. Chaque méthode d'évaluation d'options repose sur un modèle de l'évolution du prix de l'actif sous-jacent. Pour les développements qui suivent, nous admettrons que l'actif sous-jacent est une action mais l'approche s'applique à d'autres types d'actifs sous-jacents. Le modèle le plus simple est le modèle binomial qui suppose qu'au cours d'une période (aussi nommée pas), la valeur de l'action ne peut évoluer que dans deux directions : hausse (« up ») ou baisse (« down »).

Notons la valeur de l'action  $S_u$  en cas de hausse et  $S_d$  en cas de baisse. Les rapports entre les deux valeurs de l'action en fin de période et la valeur en début de période sont notés  $u$  et  $d$  :

$$u = \frac{S_u}{S} \quad \text{et} \quad d = \frac{S_d}{S}$$

ou encore :

$$S_u = uS \quad \text{et} \quad S_d = dS.$$

Les rentabilités réalisées par l'action en cas de hausse et de baisse sont  $(u - 1)$  et  $(d - 1)$ . Les valeurs des variables  $u$  et  $d$  sont liées à la volatilité  $\sigma$  de l'action par les formules :

$$u = e^{\sigma\Delta t} \quad \text{et} \quad d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\Delta t}.$$

Le taux d'intérêt sans risque est  $r_f$ . De manière à établir un lien entre le facteur d'actualisation et la longueur de la période, nous utiliserons un taux continu. Le facteur d'actualisation permettant de calculer la valeur actuelle, en début de période, de 1 € disponible en fin de période est :

$$v = e^{-r_f\Delta t}$$

Pour éliminer toute forme d'arbitrage, nous supposerons l'inégalité suivante vérifiée :

$$u > e^{r_f\Delta t} > d$$

Considérons une option, un call ou un put, et notons sa valeur  $V_u$  en cas de hausse,  $V_d$  en cas de baisse et  $V$  en début de période. Si l'option vient à échéance en fin de période,  $V_u$  et  $V_d$  peuvent être calculées pour chaque valeur possible de l'action :

$$V_u = \text{Max}[0, \theta(S_u - X)] \quad \text{et} \quad V_d = \text{Max}[0, \theta(S_d - X)]$$

où  $\theta$  est une variable prenant la valeur +1 si l'option est un call et la valeur -1 si l'option est un put. L'évaluation de l'option s'appuie sur le principe de l'absence d'opportunité d'arbitrage. Nous en donnons deux formulations équivalentes : l'évaluation sur la base des prix des titres contingents et celle fondée sur la réPLICATION de l'option.

## 5.1 Évaluation sur la base des prix des titres contingents

Les deux valeurs de l'action en fin de période définissent deux états de la nature (voir chapitre 1). La connaissance des prix de l'action et d'un zéro-coupon unitaire permet de calculer les prix de deux titres contingents : l'un qui rapporte 1 € en cas de hausse et 0 € en cas de baisse, l'autre qui rapporte 0 € en cas de hausse et 1 € en cas de baisse. Soient  $v_u$  et  $v_d$  les prix de marché de ces titres contingents. En vertu de la loi du prix unique, nous avons :

$$v = v_u + v_d$$

$$S = v_u S_u + v_d S_d$$

En résolvant ce système de deux équations à deux inconnues, nous obtenons :

$$v_u = \frac{S - vS_d}{S_u - S_d} = \frac{1 - vd}{u - d}$$

$$v_d = \frac{vS_u - S}{S_u - S_d} = \frac{vu - 1}{u - d}$$

Nous pouvons ainsi calculer la valeur de l'option :

$$V = v_u V_u + v_d V_d$$

## 5.2 RéPLICATION DES CASH FLOWS

Une autre présentation de l'évaluation part du constat qu'il est possible de créer un portefeuille qui réplique exactement le comportement de l'option en combinant l'actif sans risque et l'action. Ce portefeuille comprend  $\delta$  actions et un montant  $M$  investi dans l'actif sans risque. Le nombre d'actions et le montant de la position dans l'actif sans risque sont choisis de telle manière que la valeur de ce portefeuille en fin de période soit égale à celle de l'option :

$$\delta \times S_u + M e^{r_f \Delta t} = V_u \quad \text{et} \quad \delta \times S_d + M e^{r_f \Delta t} = V_d$$

Nous pouvons en déduire que :

$$\delta = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} = \frac{V_u - V_d}{uS - dS} \quad \text{et} \quad M = v \frac{S_u V_d - S_d V_u}{S_u - S_d} = v \frac{uV_d - dV_u}{(u - d)}$$

Le nombre d'actions dans le portefeuille qui permet de répliquer l'option est appelé le « delta » de l'option. Il peut s'interpréter comme la sensibilité de la valeur de l'option par rapport à l'évolution du cours du sous-jacent. On peut vérifier que le delta d'un call est positif (il faut acheter des actions pour répliquer un call) et que le delta d'un put est négatif (il faut vendre les actions à découvert pour répliquer un put). En revanche, la position dans l'actif sans risque  $M$  est négative pour un call (un emprunt) et positive pour un put (un placement) :

- call :  $\delta > 0$  et  $M < 0$ ;
- put :  $\delta < 0$  et  $M > 0$ .

Sous la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur de l'option doit être égale à celle du portefeuille qui le réplique. Par conséquent, nous avons :

$$V = \delta \times S + M$$

Cette égalité peut également s'écrire :

$$\delta \times S - V = -M$$

La combinaison de  $\delta$  actions et de la vente d'une option est équivalente à une position sans risque.

## 5.3 Probabilité neutre au risque

Nous pouvons établir une relation entre les deux formules d'évaluation que nous avons obtenues. En effet, en remplaçant  $\delta$  et  $M$  par leurs valeurs respectives dans l'expression de  $V$ , nous obtenons :

$$V = \frac{p \times V_u + (1-p) \times V_d}{e^{r_f \Delta t}} = v [p V_u + (1-p) V_d]$$

avec :

$$p = \frac{\frac{1}{v} - d}{u - d} = \frac{e^{r_f \Delta t} - d}{u - d}$$

La variable  $p$  ainsi définie est un nombre compris entre 0 et 1. Elle s'interprète comme la probabilité d'une hausse de l'action dans un monde hypothétique caractérisé par la neutralité au risque. Elle est appelée « probabilité risque neutre ». La valeur de l'option s'obtient en actualisant, au taux sans risque, l'espérance neutre au risque des valeurs futures. En comparant les expressions donnant la valeur du titre contingent  $v_u$  et la valeur de la probabilité risque neutre, on obtient :

$$v_u = vp \quad \text{et} \quad v_d = v(1-p)$$

ce qui démontre l'équivalence des deux formulations que nous avons présentées.

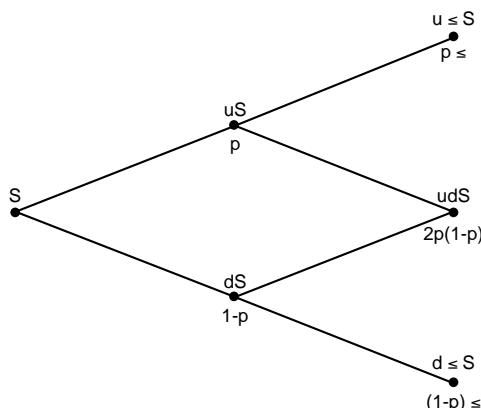
## 5.4 Extension à plusieurs périodes

Le modèle binomial peut également être étendu à  $n$  périodes. La figure 3.4 en donne une illustration pour  $n = 2$ . Remarquons que :

- L'arbre binomial se recombine : une hausse suivie d'une baisse conduit à la même valeur qu'une baisse suivie d'une hausse ( $ud = du$ ).
- L'évolution du cours pendant une période est indépendante de son évolution lors des périodes précédentes : la probabilité risque neutre de deux hausses successives est, par exemple,  $p^2$ .

Figure 3.4

**Arbre binomial  
2 périodes  
avec les  
probabilités  
risque neutre  
associées à  
chaque nœud.**



L'approche reste identique. Il faut tout d'abord construire l'arbre binomial des valeurs possibles du sous-jacent. À l'échéance ( $T = n$ ), les différentes valeurs finales de l'option sont calculées en fonction des valeurs du sous-jacent. Dans le cas où  $n = 2$ , nous obtenons trois valeurs :  $V_{uu}$ ,  $V_{ud}$  et  $V_{dd}$ . La suite du calcul dépend du type d'option.

### Option européenne

Pour une option européenne, c'est-à-dire qui ne peut être exercée avant l'échéance, la valeur de l'option peut être calculée de deux manières :

1. En actualisant l'espérance risque neutre au taux d'intérêt sans risque :

$$V = \nu^2 [p^2 V_{uu} + 2p(1-p)V_{ud} + (1-p)^2 V_{dd}]$$

2. En « remontant » d'une période ( $t = n - 1$ ) et en analysant chaque nœud de l'arbre de la même manière que pour le cas à une seule période. La procédure est itérée jusqu'au retour à la période  $t = 0$ .

Par exemple, pour  $n = 2$ , cela conduit aux calculs suivants :

$$\begin{aligned} V_u &= \nu [pV_{uu} + (1-p)V_{ud}] \\ V_d &= \nu [pV_{ud} + (1-p)V_{dd}] \\ V &= \nu [pV_u + (1-p)V_d] \end{aligned}$$

### Option américaine

Pour une option américaine, seule l'approche itérative peut être appliquée avec une complication supplémentaire : il faut, à chaque nœud, vérifier si l'option doit être exercée. Pour cela, la valeur de l'option non exercée est comparée à sa valeur intrinsèque. La valeur de l'option est donnée par le maximum de ces deux valeurs. Formellement, la valeur de l'option au nœud  $j$  (lorsque le cours de l'action est  $S_j$ ) est :

$$V_j = \text{Max}\{\text{Max}(0, \theta(S_j - X)), \nu(pV_{ju} + (1-p)V_{jd})\}$$

où  $\text{Max}(0, \theta(S_j - X))$  est la valeur intrinsèque et  $\nu(pV_{ju} + (1-p)V_{jd})$  est la valeur de l'option en l'absence d'exercice.

## 6 Formule de Black-Scholes

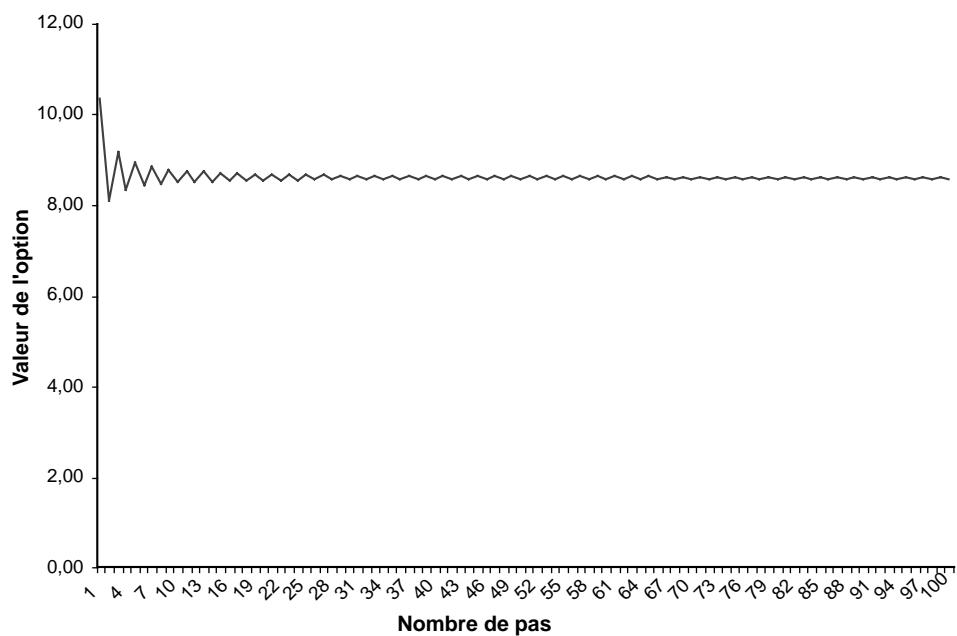
La formule de Black-Scholes (BS) donne la valeur d'une option européenne ne payant pas de dividendes et dont la volatilité est constante. Ce modèle est une extension du modèle binomial dans lequel l'horizon est découpé en périodes de longueur  $\Delta t$  que l'on fait tendre vers zéro. En effet, comme l'illustre la figure 3.5, la valeur de l'option résultant de l'application du modèle binomial converge lorsque le nombre de pas augmente. La formule de Black-Scholes donne la valeur de l'option lorsque le nombre de pas est infini.

Pour un call européen, la formule de Black-Scholes s'écrit :

$$C = SN(d_1) - Xe^{-r_f T} N(d_2)$$

Figure 3.5

**Valeur d'une option en fonction du nombre de pas utilisés dans le modèle binomial.**



où  $N(x)$  est la fonction de répartition de la loi normale (une table donnant la fonction de répartition de la loi normale est donnée en annexe) et :

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{e^{-r_F T} X}\right)}{\sigma \sqrt{T}} + 0,5\sigma \sqrt{T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Dans cette formule,  $N(d_1)$  est le delta de l'option c'est-à-dire :

- la dérivée partielle de la valeur de l'option par rapport au prix du sous-jacent
- $N(d_1) = \delta = \frac{\partial C}{\partial S}$  ;
- le nombre d'actions à acheter pour créer un portefeuille de réPLICATION.

Le terme  $N(d_2)$  est égal à la probabilité risque neutre d'exercer l'option. L'application de la formule nécessite cinq données :

- $S$  le prix de l'actif sous-jacent;
- $X$  le prix d'exercice;
- $t$  l'échéance;
- $r$  le taux d'intérêt (continu);
- $\sigma$  la volatilité de l'actif sous-jacent.

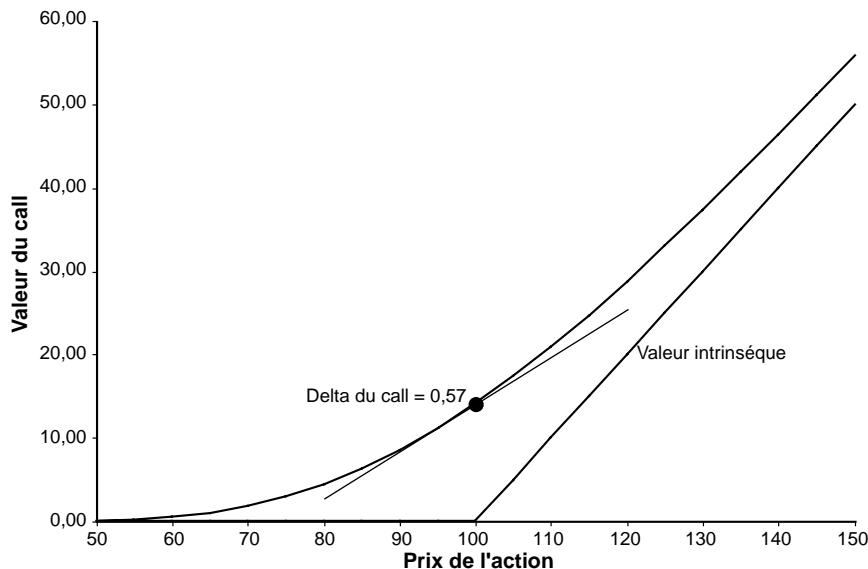
Notons que la formule peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \text{Valeur d'un call } C &= \text{Prix de l'actif sous-jacent} \times \text{Delta} - \text{Emprunt} \\ &= S \times \text{Delta} - M \end{aligned}$$

Cette formule générale est identique à celle que nous avons trouvée précédemment dans le cadre du modèle binomial. La figure 3.6 illustre la relation entre la valeur du call et le prix de l'actif sous-jacent.

Figure 3.6

**Relation entre la valeur d'un call et le prix de l'actif sous-jacent pour  $X = 100$ ,  $T = 1$ ,  $r_f = 5\%$  et  $\sigma = 30\%$ .**



Nous pouvons remarquer que la relation entre la valeur du call et le prix de l'action est convexe : la pente de la relation (le delta de l'option) augmente lorsque le prix de l'action augmente. La convexité de la relation est mesurée par la variation du delta (plus précisément, la dérivée du delta par rapport au prix de l'action). Elle est appelée gamma ( $\Gamma$ ). Formellement :

$$\Gamma = \frac{\partial \delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

Il est important de remarquer que la valeur du call (lorsque le titre sous-jacent ne paie pas de dividendes) est toujours supérieure à la valeur intrinsèque. Cela montre qu'un call américain ne sera jamais exercé avant l'échéance. La valeur d'un put européen peut être obtenue en utilisant la relation de parité put – call :

$$P = C - S + VA(X)$$

ou encore, en remplaçant  $C$  par sa valeur :

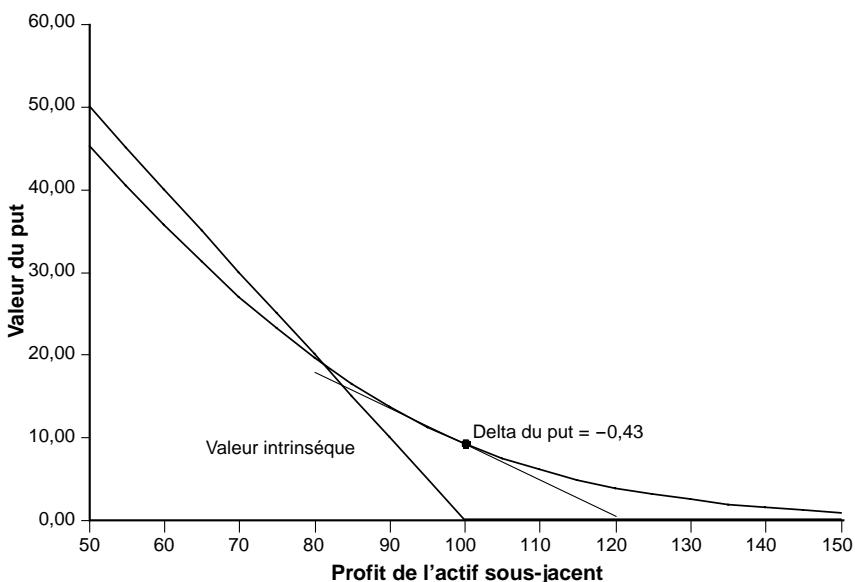
$$P = S [N(d_1) - 1] + X e^{-r_f T} [1 - N(d_2)]$$

Le delta d'un put est égal à  $N(d_1) - 1$  et est donc négatif. Rappelons que le delta mesure la pente de la relation entre la valeur de l'option et le prix de l'actif sous-jacent. Un delta négatif signifie donc que la valeur du put diminue lorsque le cours de l'action augmente. La figure 3.7 illustre ce point.

Il est intéressant de noter que la valeur d'une option européenne peut être inférieure à la valeur intrinsèque. Cela se produit lorsque le cours de l'action est largement inférieur au prix d'exercice. Dans ce cas, la probabilité d'exercice de l'option à l'échéance est élevée. Mais, l'option étant européenne, son détenteur doit attendre avant de pouvoir vendre l'action. Il encourt donc un coût d'opportunité puisqu'il ne recevra le produit de la vente qu'à l'échéance. Il en résulte que, contrairement au cas du call, la formule

Figure 3.7

**Relation entre la valeur d'un put et le prix de l'actif sous-jacent pour  $X = 100$ ,  $T = 1$ ,  $r_f = 5\%$  et  $\sigma = 30\%$ .**



de Black-Scholes ne peut pas être utilisée pour évaluer un put américain. En réalité, il n'existe pas de formule pour cela. Mais le modèle binomial peut être utilisé.

## 7 Valeur d'option et volatilité

Parmi les cinq variables nécessaires pour déterminer la valeur d'une option ( $S$ ,  $X$ ,  $T$ ,  $r_f$  et  $\sigma$ ), seule la volatilité n'est pas connue et doit donc être estimée. Cette estimation est généralement fondée sur la volatilité historique qui est égale à l'écart type des rentabilités passées de l'action. Mais la volatilité peut varier dans le temps. Des procédures statistiques plus sophistiquées doivent souvent être mises en œuvre. Cela dépasse le cadre de cet ouvrage.

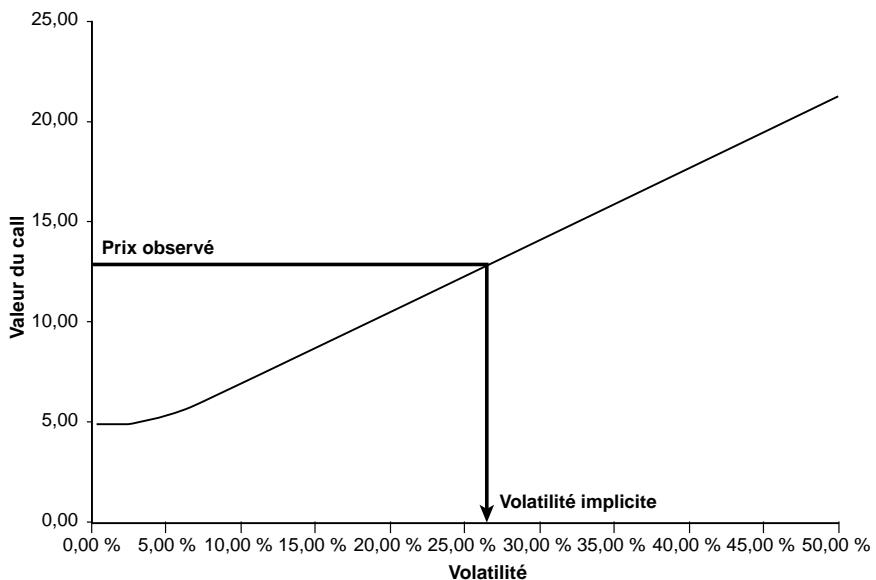
La valeur d'une option (call ou put) est une fonction croissante de la volatilité. On appelle « Vega » la sensibilité de la valeur de l'option par rapport à la volatilité :

$$Vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

Lorsque la valeur de l'option est donnée (par exemple, lorsque l'option est cotée), une volatilité implicite peut être calculée. Celle-ci est obtenue en modifiant la volatilité dans la formule de Black-Scholes de manière que la valeur calculée soit égale à la valeur observée. La figure 3.8 illustre ce point.

Figure 3.8

**Relation entre la valeur d'un call et la volatilité du titre sous-jacent.**



### Résumé

Les options ont des caractéristiques bien spécifiques dues à la liberté d'exercice dont jouit son détenteur. En pratique, ceci se traduit par les éléments suivants :

- Le détenteur de l'option a le choix de l'exercer ou non et la personne qui l'a vendue doit forcément suivre ce choix.
- L'acheteur doit payer, à la contrepartie, une prime correspondant à la valeur de l'option.
- Pour un modèle binomial à plusieurs périodes, la procédure d'évaluation pour une option est la suivante :
  - déterminer l'évolution du cours du sous-jacent ;
  - déterminer la valeur du call à l'échéance ;
  - remonter dans le temps en appliquant la formule binomiale à chaque nœud.

## Références bibliographiques

- BLACK F. et SCHOLES M., « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, 81 (mai–juin 1973), pp. 637–654.
- COX J.C., ROSS S.A. et RUBINSTEIN M., « Option Pricing : A Simplified Approach », *Journal of Financial Economics*, 7 (septembre 1979), pp. 145–166.
- HULL, *Options, futures, et autres dérivés*, 6<sup>e</sup> éd., Pearson Education France, 2007.
- MERTON R.C., « Theory of Rational Option Pricing », *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (printemps 1973), pp. 141–183.
- SHARPE W.F., *Investments*, Prentice Hall, 1978.

### Commentaires

La théorie des options est devenue l'une des pierres angulaires de la finance moderne. Elle fournit la clé permettant d'analyser les décisions d'investissement (les options réelles) ainsi que les conditions de financement, comme nous le découvrirons dans le chapitre 6. L'approche de base est due à Black, Scholes et Merton (1973). Scholes et Merton ont reçu le prix Nobel en 1997. L'intuition du modèle binomial est attribuée à Bill Sharpe (1978) qui devait enseigner le modèle de Black et Scholes à des étudiants de MBA peu formés en mathématiques. Il fut développé par Cox et Rubinstein en 1979 qui démontrèrent la relation entre l'approche binomiale et la formule de Black et Scholes. L'ouvrage de Hull (2004) est la référence standard pour étudier de manière plus approfondie la problématique de l'évaluation des différents types d'options.

# Problèmes et exercices

Les exercices suivants abordent la valorisation des options de manière progressive. Le modèle binomial est d'abord présenté pour une seule période avant d'être appliqué à plusieurs. Ensuite, les relations théoriques présentées précédemment sont analysées sur la base du principe d'absence d'arbitrage. Enfin, cette section s'achève avec l'étude du modèle de Black-Scholes.

## Valorisation des options : modèle binomial

Les notations des options à évaluer  $V$ ,  $V_u$  et  $V_d$  sont dans les exercices qui suivent remplacés par  $C$ ,  $C_u$ ,  $C_d$  pour les calls et  $P$ ,  $P_u$  et  $P_d$  pour les puts.

### Exercice 1 Évaluer un call sur base d'un modèle binomial à une période

#### Énoncé

Tante Agathe a décidé d'investir dans des produits financiers moins traditionnels : les actifs dérivés. Son banquier lui propose un call européen sur l'action FLOP avec une échéance d'un an et un prix d'exercice de 190 €. Actuellement, cette action vaut 200 €. L'année prochaine, le prix de l'action peut soit doubler (avec une probabilité de 70 %) soit diminuer de moitié (avec une probabilité de 30 %). Le taux (linéaire) sans risque est de 4 %.

- a** À quel prix, sur la base d'un modèle binomial avec pas d'un an, tante Agathe peut-elle acheter le call à l'échéance ?
- b** Quel portefeuille pourrait-on créer pour répliquer le comportement du call ?

#### Solution

- a** D'après l'énoncé, nous savons que :  $S = 200$ ,  $X = 190$ ,  $r_f = 4\%$ ,  $u = 2$  (le prix de l'action double) et  $d = \frac{1}{2}$ . Déterminons tout d'abord l'évolution possible de la valeur de l'action.

$T = 0$	$T = 1$
	$S_u = 400$
$S = 200$	$S_d = 100$

Le call est un droit d'achat. Par conséquent, dans un an, tante Agathe aura le droit (mais non l'obligation) d'acheter l'action pour 190 €. En cas de hausse du cours, tante Agathe exercera son option. En effet, elle peut acheter l'action à 190 € et la revendre immédiatement à sa valeur de marché (400 €). Dans ce cas, elle réalise un gain de

$400 - 190 = 210 \text{ €}$ . En revanche, en cas de baisse, tante Agathe n'exercera pas son option car, sinon, elle achèterait 190 € une action valant seulement 100 €.

La formule générale pour définir la valeur d'un call est  $C = \text{Max}(S - X, 0)$ . Celle-ci indique que le call est exercé uniquement si le cours du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice.

Dans notre cas, la valeur du call à l'échéance est de :

$T = 0$	$T = 1$
$C_u = 210$	
$C_d = 0$	

- b** Il est possible de répliquer le call en empruntant un montant  $B$  et en l'investissant dans  $\delta$  actions du titre sous-jacent. Souvenez-vous qu'un emprunt se caractérise au moment de sa conclusion par un cash flow positif (on commence par toucher le montant emprunté). Nous savons que :

$$\delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{210 - 0}{400 - 100} = 0,7$$

et que

$$M = \frac{d \times C_u - u \times C_d}{(u - d) \times (1 + r_f)} = \frac{0,5 \times 210 - 2 \times 0}{(2 - 0,5) \times 1,04} = 67,31$$

La valeur de ce portefeuille est :  $M - \delta \times S = 67,31 - 0,7 \times 200 = -72,69 \text{ €}$ . Le montant emprunté ne couvre pas entièrement le montant déboursé pour l'achat des actions d'où un signe négatif, ce dernier s'accorde avec l'idée d'achat d'un call.

À l'échéance, le portefeuille vaut :  $\delta \times S_T - M \times (1 + r_f)$ . Cette formulation s'interprète comme la revente des actions à leur cours du moment et le remboursement de l'emprunt sans risque (avec paiement des intérêts). Par conséquent :

- Si le cours augmente, le portefeuille vaudra :

$$0,7 \times 400 - 67,31 \times (1 + 4\%) = 210 \text{ €}.$$

- Si le cours diminue, le portefeuille vaudra :

$$0,7 \times 100 - 67,31 \times (1 + 4\%) = 0 \text{ €}.$$

Le portefeuille et le call ayant des cash flows identiques à l'échéance, leur valeur aujourd'hui doit être la même. Dans le cas contraire, il serait possible de réaliser un arbitrage (un profit certain sans prendre de risque). Par conséquent, la valeur du call est de 72,69 €.

Il est également possible d'appliquer la formule de l'actualisation dans un monde neutre au risque. Pour ce faire, il faut tout d'abord calculer les probabilités adéquates, les probabilités neutres au risque, et non utiliser les probabilités réelles.

Soit  $p_u$  la probabilité neutre au risque de hausse et  $p_d$  la probabilité neutre au risque de baisse :

$$p_u = \frac{1 + r_f - d}{u - d} = \frac{1 + 4\% - 0,5}{2 - 0,5} = 36\% \quad \text{et} \quad p_d = 1 - p_u = 1 - 36\% = 64\%$$

Le prix d'achat du call est trouvé par :

$$C = \frac{p \times C_u + (1 - p) \times C_d}{(1 + r_f)} = \frac{36\% \times 210 + 64\% \times 0}{1,04} = 72,69 \text{ €}$$

## Exercice 2 Évaluer un put sur base d'un modèle binomial à une période

### Énoncé

Tante Agathe pourrait également acheter un put européen (même sous-jacent, même échéance et même prix d'exercice).

- a** Sur la base d'un modèle binomial avec pas d'un an, quel serait le prix du put ?
- b** Vérifiez ce résultat en recourant à un calcul fondé sur l'actualisation dans un monde neutre au risque.
- c** Vérifiez ce résultat en recourant à la parité put – call.

### Solution

- a** Nous pouvons à nouveau utiliser l'arbre binomial de l'exercice précédent. Le put est un droit de vente. Par conséquent, dans un an, tante Agathe aura le droit (mais non l'obligation) de vendre l'action pour 190 €. En cas de baisse du cours, tante Agathe exercera son option. En effet, elle peut acheter l'action à sa valeur de marché (100 €) et la revendre immédiatement à 190 €. Dans ce cas, elle réalise un gain de  $190 - 100 = 90$  €. En revanche, en cas de hausse, tante Agathe n'exercera pas son option car, sinon, elle revendrait à 190 € une action en valant 400 €.

La formule générale pour définir la valeur d'un put est  $P = \text{Max}(X - S, 0)$ . Celle-ci indique que le put est exercé uniquement si le cours du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice.

$T = 0$	$T = 1$
$S_u = 400$	
$P_u = 0$	
$S = 200$	
$P = ?$	
	$S_d = 100$
	$P_d = 90$

Il est possible de répliquer le put par  $\delta$  actions du titre sous-jacent et  $B$  de titre sans risque. Nous savons que :

$$\delta = \frac{P_u - P_d}{S_u - S_d} = \frac{0 - 90}{400 - 100} = -0,3$$

et que

$$B = \frac{d \times P_u - u \times P_d}{(u - d) \times (1 + r_f)} = \frac{0,5 \times 0 - 2 \times 90}{(2 - 0,5) \times 1,04} = -115,38$$

Le signe négatif de  $\delta$  indique qu'il faut vendre à découvert les actions FLOP. De plus, le signe négatif de  $B$  implique que l'argent est placé dans un titre sans risque. La valeur de ce portefeuille est :  $B - \delta x S = -115,38 - (-0,3) \times 200 = -55,38$  €. À l'échéance, le portefeuille vaut :  $\delta \times S_T - Bx(1 + r_f)$ . Par conséquent :

- Si le cours augmente, le portefeuille vaudra :  $-0,3 \times 400 - (-115,38) \times (1 + 4\%) = 0$  €.
  - Si le cours diminue, le portefeuille vaudra :  $-0,3 \times 100 - (-115,38) \times (1 + 4\%) = 90$  €.
- Sous la condition d'absence d'arbitrage, la valeur du put est donc de 55,38 €.

**b**

De même, nous pouvons appliquer la formule de l'actualisation dans un monde neutre au risque. Les probabilités neutres au risque sont identiques à celles de l'exercice précédent puisque le calcul s'appuie uniquement sur l'évolution du sous-jacent et non le type d'option à valoriser :  $p_u = 36\%$  et  $p_d = 64\%$ . Par conséquent, le prix d'achat du put est trouvé par :

$$P = \frac{p_u \times P_u + p_d \times P_d}{(1 + r_f)} = \frac{36\% \times 0 + 64\% \times 90}{1,04} = 55,38 \text{ €}$$

**c**

Une dernière méthode plus rapide consiste à utiliser la parité put – call. En effet, nous connaissons le prix du call qui possède les mêmes caractéristiques que le put à valoriser (exercice 3.1). Nous avons :

$$C_0 + VA_0(X) = S_0 + P_0.$$

Ce qui nous donne :

$$P_0 = C_0 + VA_0(X) - S_0 = 72,69 + 190/(1 + 4\%) - 200 = 55,38 \text{ €}.$$

### Exercice 3 Réaliser un arbitrage sur base d'un modèle binomial à une période

#### Énoncé

Le banquier d'oncle Séraphin voudrait lui vendre un call européen sur l'action FLOP. L'échéance est d'un an avec un prix d'exercice égal à son prix actuel (1 000 €). L'année prochaine, le cours de l'action peut soit augmenter de 25 %, soit diminuer de 20 %. Le taux (linéaire) sans risque est de 5 %.

**a**

Quelle est la valeur de cette option ?

**b**

Le banquier veut vendre le call à 125 €. Que conseillez-vous à oncle Séraphin ?

## Solution

- a** Nous pouvons valoriser ce call en utilisant un arbre binomial avec un pas d'un an. Nous avons les données suivantes :  $S = 1\ 000$ ,  $X = 1\ 000$ ,  $r_f = 5\%$ ,  $u = 1,25$  et  $d = 0,8$ .

$T = 0$	$T = 1$
$S = 5000$	$S_{uu} = 72000$ $C_{uu} = 2700$
$C = ?$	$S_{ud} = 5000$ $C_{ud} = 500$
	$S_{dd} = 3472,22$ $C_{dd} = 0$
$S_d = 4166,61$	
$C_d = ?$	

Nous pouvons calculer les probabilités neutres au risque :

$$p_u = \frac{1 + 5\% - 0,8}{1,25 - 0,8} = 55,56\% \quad \text{et} \quad p_d = 1 - 55,56\% = 44,44\%$$

Par conséquent, nous trouvons :

$$C = \frac{55,56\% \times 250 + 44,44\% \times 0}{1,05} = 132,28 \text{ €}$$

- b** Le prix proposé par le banquier (125 €) étant inférieur à la valeur de l'option (132,28 €), oncle Séraphin a intérêt à acheter le call. Il peut même réaliser un arbitrage ! Pour cela, il doit acheter le call au banquier (au prix de 125 €) et en « compenser » les cash flows futurs.

Dans un premier temps, répliquons les cash flows liés au call en empruntant un montant  $M$  et en l'investissant dans  $\delta$  actions du titre sous-jacent. Nous savons que :

$$\delta = \frac{250 - 0}{1250 - 800} = 0,5556 \quad \text{et que} \quad M = \frac{0,8 \times 250 - 1,25 \times 0}{(1,25 - 0,8) \times 1,05} = 423,28$$

Pour réaliser l'arbitrage, il faut faire les opérations inverses de la réPLICATION. Le tableau 3.3, présente les cash flows d'oncle Séraphin aux différentes périodes et pour les différentes réalisations de prix du sous-jacent.

En faisant cette opération, oncle Séraphin réalise un profit immédiat de 7,28 € sans prendre de risque puisque les cash flows futurs liés au call acheté sont exactement compensés par l'inverse de la réPLICATION.

Tableau 3.3

**Arbitrage et cash flows aux différentes périodes**

	$T = 0$	$T = 1$	
		$S_T > X$	$S_T < X$
Inverse de la réPLICATION			
Prêt (puis remboursement) de $M$	-423,28	+444,44 (= 423,28 × 1,05)	+444,44
Vente (puis rachat) de $\delta$ actions	+555,6 (= 0,5556 × 1 000)	-694,44 (= -0,5556 × 1 250)	-444,44 (= -0,5556 × 800)
Cash flow de cette opération (1)	+132,28	-250	0
Achat du call au banquier (puis cash flows liés) (2)	-125	+250	0
Total (1) + (2)	+7,28	0	0

## Exercice 4 Évaluer un call sur base d'un modèle binomial à deux périodes

**Énoncé**

Oncle Séraphin a entendu parler d'une société d'élevage de pieuvres (French Limited Octopuss & Partners), spécialisée dans l'extraction de l'encre de pieuvre en vue de sa revente. Le capital de la société est représenté par 1 000 actions valant chacune 5 000 €. En un an, leur prix peut soit augmenter de 20 % (avec une probabilité de 85 %), soit diminuer de 16,7 % (avec une probabilité de 15 %). Le taux sans risque est de 7 %. La société ne verse pas de dividendes.

- a** Que vaut un call européen à échéance de deux ans, de prix d'exercice 4 500 €, sur cette action ? Employez un modèle binomial avec pas d'un an.
- b** Comment oncle Séraphin peut-il répliquer cette option ?

**Solution**

- a** L'énoncé fournit directement les valeurs de  $u$  et  $d$ . Si l'action peut augmenter de 20 %, alors  $u = 100\% + 20\% = 1,2$ . Si elle peut baisser de 16,7 %, alors  $d = 100\% - 16,7\% = 0,833$ . (Remarquons que  $u = 1/d$ .) Puisque  $r_f = 7\%$ , nous trouvons :  $p_u = 64,55\%$ .

$T = 0$	$T = 1$
$S = 5000$	$S_{uu} = 7200$
$C = ?$	$C_{uu} = 2700$
$S_d = 4166,61$	$S_{ud} = 5000$
$C_d = ?$	$C_{ud} = 500$
	$S_{dd} = 3472,22$
	$C_{dd} = 0$

En travaillant « à reculons », nous trouvons les valeurs intermédiaires et la valeur actuelle du call :  $C_u = 1794,39 \text{ €}$ ,  $C_d = 301,61 \text{ €}$  et  $C = 1182,37 \text{ €}$ .

- b** Pour répliquer cette option, il faut procéder de même. Commençons par  $C_u$  qui représente la valeur en  $T = 1$  (cas où  $S = 6000 \text{ €}$ ) d'un call à une période. Nous savons que :

$$\delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{2700 - 500}{7200 - 5000} = 1$$

et que

$$M = \frac{d \times C_u - u \times C_d}{(u - d) \times (1 + r_f)} = \frac{0,833 \times 2700 - 1,2 \times 500}{(1,2 - 0,833) \times 1,07} = 4205,61 \text{ €}$$

En considérant que  $\delta$  représente la sensibilité de la valeur de l'option par rapport au cours du sous-jacent, le résultat  $\delta = 1$  confirme que, quelle que soit l'évolution du cours du sous-jacent, l'option sera exercée. La valeur du call à ce nœud de l'arbre binomial est :

$$C_u = 1 \times 6000 - 4205,61 = 1794,39 \text{ €}.$$

Passons ensuite à  $C_d$  qui représente la valeur en  $T = 1$  (cas où  $S = 4166,67 \text{ €}$ ) d'un call à une période. Nous trouvons que :

$$\delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{500 - 0}{5000 - 3472,22} = 0,327$$

et que :

$$M = \frac{d \times C_u - u \times C_d}{(u - d) \times (1 + r_f)} = \frac{0,833 \times 500 - 1,2 \times 0}{(1,2 - 0,833) \times 1,07} = 1062,02 \text{ €}$$

La valeur du call à ce nœud de l'arbre binomial est :

$$C_d = 0,327 \times 4166,67 - 1062,02 = 301,61 \text{ €}.$$

Enfin, nous pouvons calculer la valeur de  $C$  sur la base des valeurs de  $C_u$  et de  $C_d$ . Nous avons :

$$\delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{1794,4 - 301,6}{6000 - 4166,7} = 0,814$$

et

$$M = \frac{d \times C_u - u \times C_d}{(u - d) \times (1 + r_f)} = \frac{0,833 \times 1794,4 - 1,2 \times 301,6}{(1,2 - 0,833) \times 1,07} = 2888,85 \text{ €}$$

La valeur du call à ce nœud de l'arbre binomial est :

$$C = 0,814 \times 5000 - 2888,85 = 1182,37 \text{ €}.$$

Notons que la composition du portefeuille se modifie à chaque nœud mais que cela n'engendre pas de cash flows supplémentaires. Prenons le cas de la hausse du cours en  $T = 1$  ( $S_u = 6000 \text{ €}$ ). Nous avions 0,814 action et un emprunt de 2 888,85 € et nous devons passer à 1 action et à un emprunt de 4 205,61 €. Il faut donc :

- 1.** Acheter un complément en actions ( $1 - 0,814 = 0,186$ ) au cours du moment. Cela donne un cash flow de :

$$-0,186 \times 6000 = -1114,54 \text{ €}.$$

- 2.** Rembourser les intérêts de l'emprunt en cours. Cela donne un cash flow de :

$$-(7\% \times 2888,85) = -202,22 \text{ €}.$$

- 3.** Augmenter l'emprunt. Cela donne un cash flow de :

$$4205,61 - 2888,85 = +1316,76 \text{ €}.$$

Le total de tous ces cash flows est nul :  $-1114,54 - 202,22 + 1316,76 = 0$ .

La situation est semblable en cas de chute du cours en  $T = 1$  ( $S_u = 4166,66 \text{ €}$ ). En effet, nous avions 0,814 action et un emprunt de 2888,85 € et nous devons passer à 0,327 action et à un emprunt de 1062,02 €. Il faut donc :

- 1.** Vendre une partie des actions ( $0,814 - 0,327 = 0,487$ ) au cours du moment. Cela donne un cash flow de :

$$0,487 \times 4166,66 = +2029,04 \text{ €}.$$

- 2.** Rembourser les intérêts de l'emprunt en cours. Cela donne un cash flow de :

$$-(7\% \times 2888,85) = -202,22 \text{ €}.$$

- 3.** Rembourser une partie de l'emprunt. Cela donne un cash flow de :

$$1062,02 - 2888,85 = -1826,82 \text{ €}.$$

Le total de tous ces cash flows est bien nul. Il n'y a donc pas de flux d'argent aux nœuds intermédiaires.

## Exercice 5 Vérifier si les bornes des options sont respectées

### Énoncé

Oncle Séraphin semble perplexe. Il a lu dans son quotidien financier que l'action FLOP vaut 56 € et qu'un call européen à six mois sur cette action, de prix d'exercice égal à 40 €, vaut 14 €. Oncle Séraphin se doute qu'il est possible de gagner de l'argent puisque la relation définissant les bornes d'un call n'est pas vérifiée.

- a** Comment doit-il s'y prendre ?
- b** Que devrait-il faire si le prix du call était de 58 € ?

### Solution

En théorie, l'inégalité  $\text{Max}(0, S - X) < C < S$  doit être respectée. Intuitivement, la seconde partie de l'inégalité s'explique par le fait que si le call vaut plus que l'action, alors

il est toujours intéressant d'acheter l'action et de vendre le call. Ainsi, on gagne la différence et les exigences de la vente du call seront couvertes par l'action détenue (arbitrage). La première partie de l'inégalité se comprend comme suit : d'une part, le call ne peut avoir une valeur négative (au pire des cas, il n'est pas exercé et vaut donc zéro) et d'autre part, il ne peut coûter moins que  $(S - X)$ , sinon il y aurait possibilité d'arbitrage. C'est ce que nous allons montrer maintenant puisque  $\text{Max}(0, S - X) = 16 \text{ €}$  et  $C = 14 \text{ €}$ .

- a** L'arbitrage se construit comme suit : achat de l'élément sous-évalué (ou vente de l'élément surévalué) et compensation des cash flows qui découlent de l'opération. Dans notre cas, puisque  $C$  est plus petit que sa borne inférieure, il faut acheter le call. La compensation des cash flows se fait par la vente d'une action et le placement au taux sans risque d'un montant correspondant à la valeur actuelle du prix d'exercice (à l'échéance, le remboursement de l'emprunt sera égal au prix d'exercice). Le tableau 3.4, résume les opérations.

Tableau 3.4

**Arbitrage.  
Évolution des  
cash flows**

	$T = 0$	$T = \text{six mois}$	
		$S_T > X$	$S_T < X$
Achat du call (puis cash flows liés) (1)	$-14$ $(-C)$	$S_T - X$ Exercer	$0$ Ne pas exercer
Compensation			
Placement (puis remboursement)	$-VA(40)$ $(VA[X] < X)$	$+X$	$+X$
Vente à découvert (puis rachat) d'une action	$+56$ $(+S)$	$-S_T$	$-S_T$
Cash flow de cette opération (2)	$56 - VA(40)$ $(> S - K)$	$X - S_T$	$X - S_T$
Total (1) + (2)	$56 - VA(40) - 14$ $(> 0)^*$	$0$	$> 0$

\* En effet, le total  $S - VA(K) - C$  est toujours supérieur à  $S - K - C$ . De plus, dans cet exercice  $S - K - C$  est supérieur à 0. Par conséquent, par cette opération, oncle Séraphin reçoit un profit certain aujourd'hui et recevra dans le futur soit un profit, soit rien. C'est sans risque. Il s'agit donc bien d'un arbitrage.

- b** Dans ce cas, le prix du call étant plus élevé que sa limite supérieure, il faut le vendre. La compensation se fait par l'achat d'une action. Le tableau 3.5 résume les opérations.

Dans ce cas, oncle Séraphin reçoit un profit certain aujourd'hui et recevra, dans le futur, un profit dont le montant n'est pas encore déterminé mais de toute façon positif. C'est une opération sans risque. Il s'agit donc bien d'un arbitrage.

Tableau 3.5

**Arbitrage.  
Évolution des  
cash flows**

	$T = 0$	$T = \text{six mois}$	
		$S_T > X$	$S_T < X$
Vente du call (puis cash flows liés) (1)	+58 (+C)	-( $S_T - X$ ) Le call est exercé	Le call n'est pas exercé
Compensation			
Achat (puis vente) d'une action	-56 (-S)	+ $S_T$	+ $S_T$
Total (1) + (2)	58 - 56 = 2 ( $C - S > 0$ )	$X$ (> 0)	$S_T$ (> 0)

## Exercice 6 Vérifier la relation de parité put – call

### Énoncé

Dans la rubrique Options et Futures de son quotidien financier (24 mai), tante Agathe trouve les données reprises dans le tableau 3.6.

Il s'agit d'options européennes. Le taux sans risque en capitalisation continue vaut 6 %. Par rapport à la date du journal, l'échéance de juin aura lieu dans trente-sept jours, celle de juillet dans soixante-huit jours et celle de septembre dans cent vingt-neuf jours (par convention, pour les calculs, l'année compte trois cent soixante-cinq jours).

**Comment tante Agathe peut-elle réaliser un arbitrage sur les marchés sur la base de ces seules informations ?**

Tableau 3.6

**Options sur les Fermes de Lorraine occidentale productives (Cours du jour du sous-jacent : 2 792,86 €)**

Type	Mois	Prix d'exercice	Cours du jour de l'option
Call	JUN	2 760	42
Call	JUN	2 880	6
Put	JUN	2 680	31,28
Put	JUN	2 760	59
Put	JUN	2 800	80
Put	JUI	2 680	47
Put	SEP	2 800	125

### Solution

Deux possibilités s'offrent à tante Agathe : regarder les bornes des options ou utiliser la parité put – call. D'une part, il est assez aisément de voir que les bornes des options sont respectées. D'autre part, il faut se souvenir que la parité put – call ne vaut que pour des options européennes de mêmes sous-jacent, prix d'exercice et échéance. Par conséquent, les puts échéant en juillet (JUI) et septembre (SEP) ne seront pas utilisés puisqu'il n'y aura pas de calls de même échéance. De plus, pour les options restantes, il n'existe qu'une seule paire put – call de même prix d'exercice ( $X = 2 760$  €). Voyons si la parité est respectée.

Nous avons :  $VA(X) = X \times e^{-rt} = 2 760 \times e^{-(37/365) \times 6\%} = 2 743,26$  €. Dès lors,  $P + S = 59 + 2 792,86 = 2 851,86$  € et  $C + VA(K) = 42 + 2 743,26 = 2 785,26$  €. L'égalité n'est pas

respectée. Un arbitrage est donc possible. Il se construit de la manière suivante : acheter ce qui est sous-évalué et vendre ce qui est surévalué. Dans notre cas, nous vendons un put et une action, plaçons la valeur actuelle du prix d'exercice,  $VA(X)$ , et achetons le call. Le tableau 3.7 résume ces éléments.

Tableau 3.7

**Arbitrage sur la base de la relation de parité put – call**

	$T = \text{mai}$	$T = \text{juin}$	
		$S_T > 2760$	$S_T < 2760$
Vente du put (puis cash flows liés)	+59	0	$-(2760 - S_T)$
Vente à découvert (puis rachat) d'une action	+2 792,86	$-S_T$	$-S_T$
Placement (puis remboursement)	-2 743,26	+2 760	+2 760
Achat du call (puis cash flows liés)	-42	$S_T - 2760$	0
Total	66,60	0	0

Il y a bien un arbitrage puisqu'il est possible de gagner de l'argent aujourd'hui sans prendre de risque.

## Exercice 7 Évaluer un put américain sur base d'un modèle binomial

**Énoncé**

L'action FLOP peut chaque mois soit augmenter de 10 %, soit baisser de 9,1 %. Elle ne paye pas de dividendes et vaut actuellement 100 €. Le taux d'intérêt en capitalisation continue est de 0,5 % par mois. Oncle Séraphin a lu qu'une option américaine pouvait être exercée à n'importe quel moment avant l'échéance.

**Existe-t-il une différence entre la prime d'un put européen et celle d'un put américain (sur l'action FLOP, avec un prix d'exercice 100 € et d'échéance de trois mois) ? Nous supposerons que l'action ne varie qu'après un pas et que la décision d'exercer ou non l'option américaine est prise à chaque pas.**

**Solution**

La figure 3.9 donne l'évolution, dans le cas d'une option européenne, de la valeur sous-jacent et de la valeur finale de l'option.

Celui-ci se construit en déterminant tout d'abord l'arbre des cours futurs du sous-jacent. Le cours initial ( $S$ ) est fixé à 100 €, les facteurs de croissance sont  $u = 1,1$  et  $d = 0,909$ . Ensuite, la valeur du put à l'échéance est calculée par :  $\text{Max}(0, X - S)$  où  $X$  est fixé à 100 €. Puis les probabilités neutres au risque sont calculées (notons que le taux sans risque est continu).

$$p_u = \frac{e^{rt} - 0,909}{1,1 - 0,909} = 50,24\%$$

Enfin, la valeur du put est déterminée « à reculons » à chaque nœud (cf. exercice 3.4). À titre d'exemple :

$$\begin{aligned} P_{dd} &= (p_u \times P_{udd} + p_d \times P_{ddd}) \times e^{-rt} \\ &= (50,24\% \times 9,09 + 49,76\% \times 24,87) \times e^{-0,005} = 16,86 \text{ €} \end{aligned}$$

Figure 3.9

$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$
$S = 100$ $P = 6,35$	$S_u = 110$ $P_u = 2,22$	$S_{uu} = 121$ $P_{uu} = 0$	$S_{uuu} = 133,1$ $P_{uuu} = 0$
		$S_{ud} = 100$ $P_{ud} = 4,50$	$S_{uud} = 110$ $P_{uud} = 0$
	$S_d = 90,91$ $P_d = 10,60$		$S_{udd} = 90,91$ $P_{udd} = 9,09$
		$S_{dd} = 82,64$ $P_{dd} = 16,86$	$S_{ddd} = 75,13$ $P_{ddd} = 24,87$

La valeur du put européen est donc de 6,35 €.

Dans le cas du put américain, il est possible d'exercer avant l'échéance. Cette décision est prise si l'exercice immédiat ( $X - S$ ) rapporte plus que la valeur du put à ce moment-là. Notons la valeur du put  $*P_{xx}$  s'il n'est pas exercé et  $P_{xx}$  une fois que le choix d'exercer ou non a été réalisé. Pour valoriser le put américain, il faut partir de la dernière période qui reste inchangée (le fait de pouvoir exercer de manière précoce n'altère en rien les résultats finaux).

Ensuite, la période précédente ( $T = 2$ ) est analysée. À chaque nœud de l'arbre binomial, il faut choisir entre conserver l'option (dont la valeur est déterminée comme pour une option européenne) et exercer l'option (qui rapporte  $X - S$ ). Dans les deux premiers cas ( $S = 121$  et  $S = 100$ ), exercer n'est pas intéressant car le prix du sous-jacent n'est pas inférieur au prix d'exercice. En revanche, dans le troisième cas ( $S = 82,64$ ), l'exercice immédiat rapporte  $X - S_{dd} = 100 - 82,64 = 17,36$  € alors que l'option vaut 16,86 €. Il est donc plus intéressant d'exercer l'option. L'arbre s'en trouve modifié pour les périodes 1 et 0. En effet, dans ce cas :

$$\begin{aligned} P_d &= (p_u \times P_{ud} + p_d \times P_{dd}) \times e^{-rt} \\ &= (50,24\% \times 4,5 + 49,76\% \times 17,36) \times e^{-0,005} \\ &= 10,84 \text{ €} \end{aligned}$$

Le même exercice est réalisé pour chaque nœud de l'arbre correspondant à la période 1. Dans aucun cas, un exercice précoce de l'option n'est intéressant. La valeur du put américain se calcule donc par :

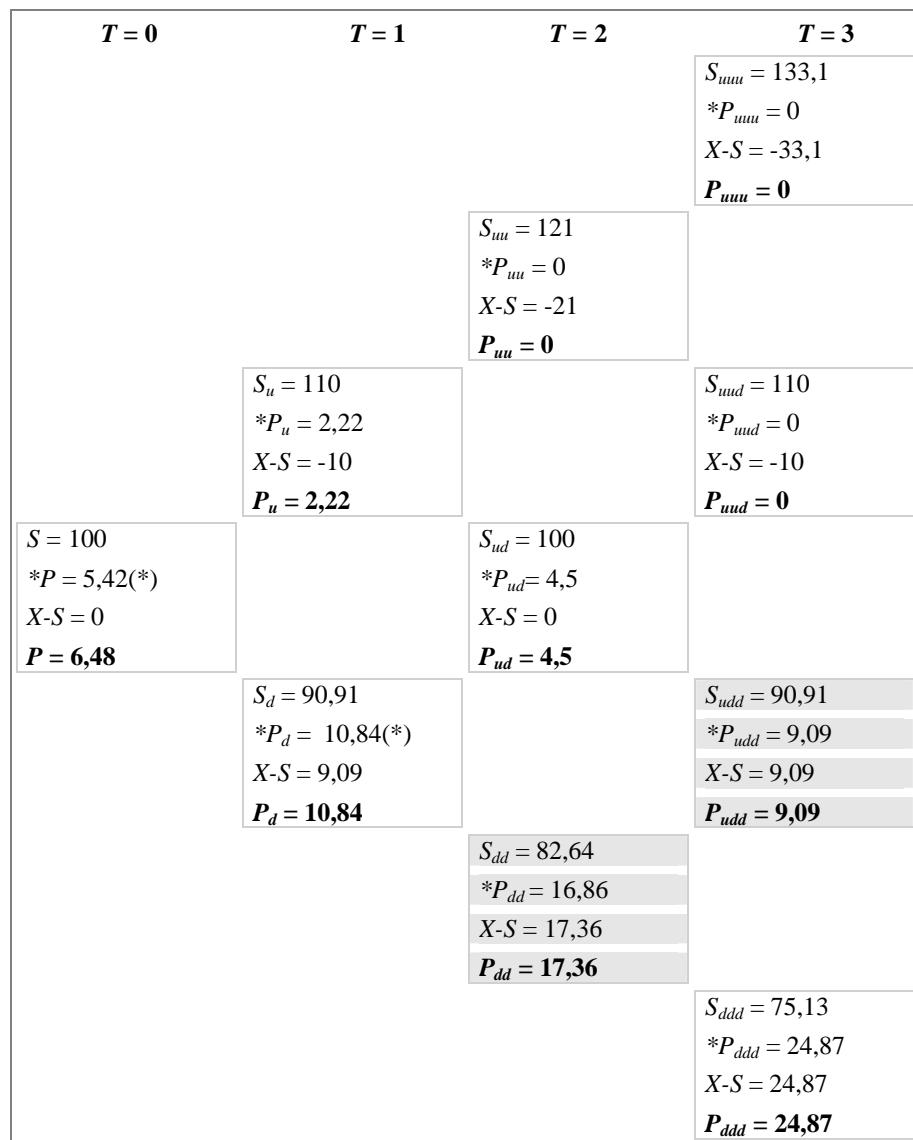
$$\begin{aligned} P &= (p_u \times P_u + p_d \times P_d) \times e^{-rt} \\ &= (50,24\% \times 22,2 + 49,76\% \times 10,84) \times e^{-0,005} = 6,48 \text{ €} \end{aligned}$$

L'arbre binomial est représenté dans la figure 3.10 . Les cases claires indiquent qu'il y a exercice de l'option.

La valeur du put américain (6,48 €) est supérieure à celle du put européen (6,35 €). Cela s'explique par le fait qu'il offre plus de droits : il peut être exercé à tout moment. Ce supplément de droits a bien évidemment une valeur ( $6,48 - 6,35 = 0,13$  €).

**Figure 3.10**

**Arbre binomial du put américain.**  
**Les cases claires indiquent qu'il y a exercice de l'option.**  
**(\*) indique que la valeur du put doit être recalculée.**



## Exercice 8 Évaluer un call américain sur base d'un modèle binomial

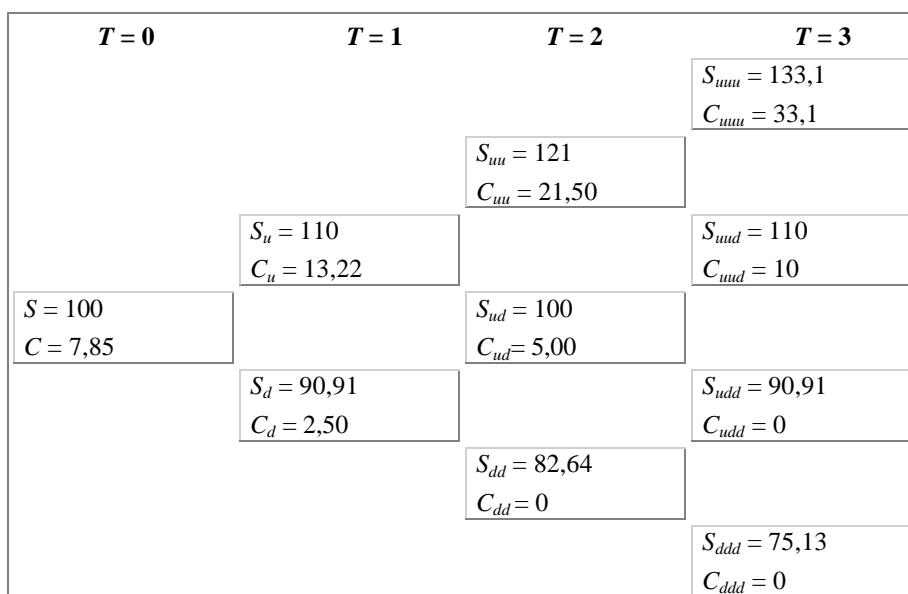
### Énoncé

Oncle Séraphin se demande si la flexibilité de l'option américaine joue également un rôle pour les calls. Il cherche donc à valoriser un call sur l'action FLOP (voir exercice 3.7) avec un prix d'exercice 100 € et une échéance de trois mois. Nous supposerons de nouveau que l'action ne varie qu'après un pas et dès lors que la décision d'exercer ou non l'option américaine est prise à chaque pas. Le taux d'intérêt en capitalisation continue est de 0,5 % par mois.

### Solution

La figure 3.11 reprend l'évolution de la valeur du sous-jacent et de la valeur finale de l'option.

Figure 3.11



La méthode de construction (« à reculons ») de l'arbre binomial est semblable à celle expliquée dans l'exercice précédent.

La valeur du call américain est de 7,85 €. La décision d'exercer avant l'échéance est prise si l'exercice immédiat ( $S - X$ ) rapporte plus que la valeur du call à ce moment-là. Notons la valeur du call  $*C_{xx}$  s'il n'est pas exercé et  $C_{xx}$  une fois que le choix d'exercer ou non a été réalisé. Pour les calculs, il faut partir de la dernière période qui reste inchangée.

Ensuite, la période précédente ( $T = 2$ ) est analysée. À chaque nœud de l'arbre binomial, il faut choisir entre conserver l'option (dont la valeur est déterminée comme pour une option européenne) et exercer l'option (qui rapporte  $S - X$ ). Dans tous les cas, exercer n'est pas intéressant car la valeur de l'option est toujours supérieure au cash flow qui pourrait être obtenu par un exercice précoce. Il est aisément de voir qu'il en est de même pour toutes les périodes. L'arbre binomial est représenté dans la figure 3.12. Les cases claires indiquent qu'il y a exercice de l'option.

Figure 3.12

$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$
			$S_{uuu} = 133,1$ $*C_{uuu} = 33,1$ $S-X = 33,1$ $C_{uuu} = 33,1$
	$S_{uu} = 121$ $*C_{uu} = 21,50$ $S-X = 21$ $C_{uu} = 21,50$		
$S_u = 110$ $*C_u = 13,22$ $S-X = 10$ $C_u = 13,22$			$S_{uud} = 110$ $*C_{uud} = 10$ $S-X = 10$ $C_{uud} = 10$
$S = 100$ $*C = 7,85$ $S-X = 0$ $C = 7,85$		$S_{ud} = 100$ $*C_{ud} = 5,00$ $S-X = 0$ $C_{ud} = 5,00$	$S_{udd} = 90,91$ $*C_{udd} = 0$ $S-X = -9,09$ $C_{udd} = 0$
	$S_d = 90,91$ $*C_d = 2,50$ $S-X = -9,09$ $C_d = 2,50$		$S_{dd} = 82,64$ $*C_{dd} = 0$ $S-X = -17,36$ $C_{dd} = 0$
			$S_{ddd} = 75,13$ $*C_{ddd} = 0$ $S-X = -24,87$ $C_{ddd} = 0$

Il n'y a pas d'intérêt à exercer un call américain avant l'échéance. Par conséquent, sa valeur est égale à celle d'un call européen. Attention, cette remarque vaut uniquement pour les options sur un sous-jacent ne payant pas de dividendes. Dans le cas contraire, il peut être intéressant d'exercer le call juste avant le paiement du dividende auquel on a droit puisqu'on détient l'option. Il existe souvent des clauses dans les contrats d'options qui protègent ces dernières contre l'effet de certaines opérations sur le capital telles que les augmentations de capital ou les divisions d'action.

## Exercice 9 Valoriser un montage financier

### Énoncé

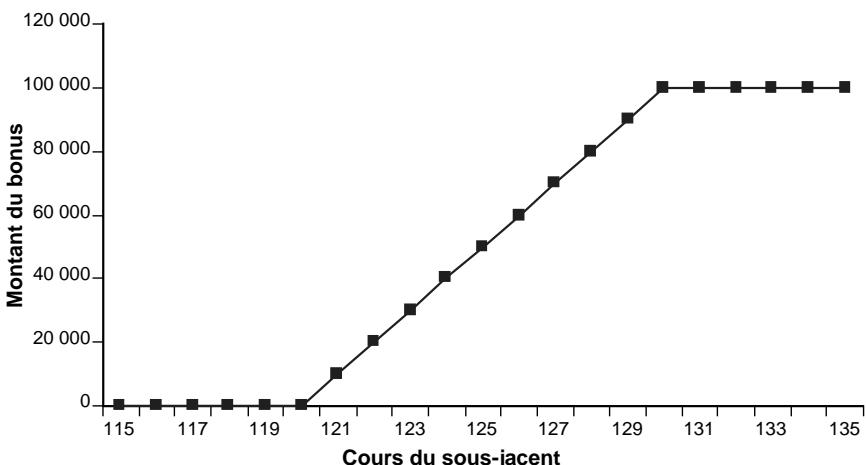
Le patron des Fabriques de luminaires et d'optiques plastiques (FLOP) a reçu l'offre suivante : soit il perçoit aujourd'hui un montant de 20 000 €, soit il percevra un bonus en fin d'année (dans deux mois). Ce bonus est calculé sur la base de l'évolution du cours de FLOP. Il s'élève à 10 000 € pour chaque euro supplémentaire par rapport au prix courant des actions (120 € actuellement), avec une limite maximale fixée à 100 000 €. Si le cours de FLOP diminue, le bonus est nul.

- a** Dessinez le graphique présentant le montant du bonus en fonction du cours de FLOP. Quelle est la combinaison d'options qui donnerait exactement le même graphique ?
- b** Sachant que l'action FLOP ne verse pas de dividendes et que chaque mois elle peut soit augmenter de 25 %, soit baisser de 20 %, que devrait choisir le patron entre le bonus et le montant fixe ? Le taux d'intérêt mensuel en capitalisation continue est de 0,4 %.

### Solution

- a** Le bonus présente trois caractéristiques :
  1. Une limite inférieure à 0.
  2. Une limite supérieure à 100 000 €.
  3. Entre les deux, il suit l'évolution du cours (à un facteur 10 000 près).

Figure 3.13



La première partie du graphique (figure 3.13 ,  $S < 130$ ) a l'allure d'un call de prix d'exercice égal à 120 €. Dans la seconde partie du graphique ( $S > 130$ ), le bonus est constant. Il faut par conséquent trouver un produit financier qui « annule » l'effet du premier call. C'est le cas d'un call vendu avec un prix d'exercice de 130 €. Le graphique suivant (figure 3.14 ) présente les deux options séparées : achat d'un call avec  $X = 120$  et vente d'un call avec  $X = 130$ .

Leur combinaison donne bien la courbe du bonus (à un facteur 10 000 près). Par conséquent, la structure de cash flow du bonus peut être répliquée en achetant 10 000 calls de prix d'exercice 120 et en vendant 10 000 calls de prix d'exercice 130. Nous pouvons vérifier cela dans le tableau 3.8, montrant les cash flows en fin d'année.

Figure 3.14

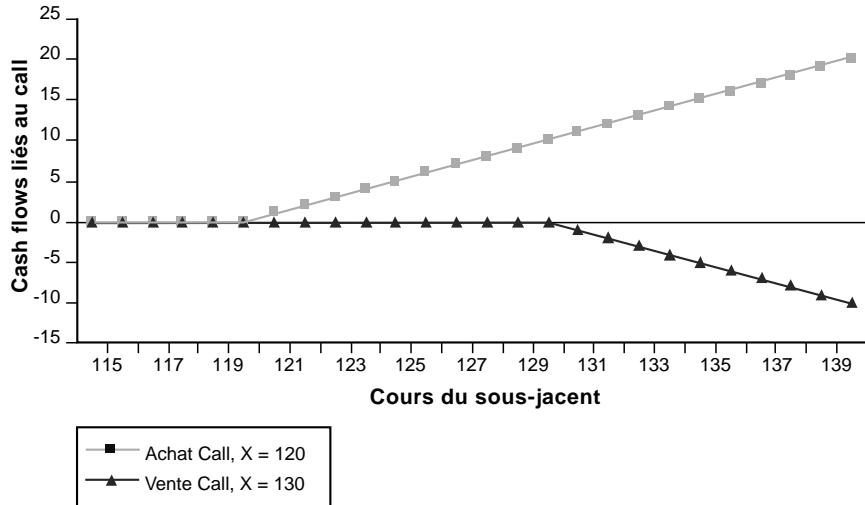


Tableau 3.8

**Cash flows en fin d'année**

Cours de FLOP	$S < 120$	$120 < S < 130$	$S > 130$
Bonus	0	$10\ 000 \times (S - 120)$	$100\ 000$
<b>Montage</b>			
Achat de 10 000 calls avec $X = 120$	0	$10\ 000 \times (S - 120)$	$10\ 000 \times (S - 120)$
Vente de 10 000 calls avec $X = 130$	0	0	$10\ 000 \times -(S - 130)$
Total du montage	0	$10\ 000 \times (S - 120)$	$100\ 000$ $= 10\ 000 \times (130 - 120)$

b

Il y a deux possibilités pour valoriser le bonus en utilisant un arbre binomial : soit directement, soit en calculant la valeur des deux options et en déduisant celle de leur combinaison. En effet, puisque le bonus procure des cash flows identiques à la combinaison des deux calls, sa valeur doit être égale à la valeur du portefeuille d'options.

Soit  $C_{120}$  le call à prix d'exercice 120 et  $C_{130}$  le call à prix d'exercice 130 et  $Bon$  la valeur du bonus. L'arbre binomial se construit sur la base de l'évolution possible du prix du sous-jacent. Nous en déduisons les probabilités neutres au risque :

$$p_u = \frac{e^{rt} - d}{u - d} = \frac{e^{0,004} - 0,8}{1,25 - 0,8} = 45,33\%$$

La suite de la valorisation se fait de manière traditionnelle en actualisant l'espérance de valeurs futures dans un monde neutre au risque (figure 3.15).

Le bonus vaut donc  $10\ 000 \times 2,04 = 20\ 400$  € ce qui correspond par ailleurs à la valeur du portefeuille :  $10\ 000 \times (C_{120} - C_{130}) = 10\ 000 \times (13,76 - 11,72) = 20\ 400$  €. Il vaut donc mieux choisir le montage financier (20 400 €) que le montant cash (20 000 €).

Figure 3.15

$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$
		$S_{uu} = 187,5$ $C_{120,uu} = 67,5$ $C_{130,uu} = 57,5$ $Bon = 10$
	$S_u = 150$ $C_{120,u} = 30,48$ $C_{130,uu} = 25,96$ $Bon = 4,56$	
$S = 120$ $C_{120} = 13,76$ $C_{130} = 11,72$ $Bon = 2,04$		$S_{ud} = 120$ $C_{120,ud} = 0$ $C_{130,ud} = 0$ $Bon = 0$
	$S_d = 96$ $C_{120,d} = 0$ $C_{130,d} = 0$ $Bon = 0$	$S_{dd} = 76,8$ $C_{120,dd} = 0$ $C_{130,dd} = 0$ $Bon = 0$

## Formule de Black-Scholes

### Exercice 10 Valoriser des options sur la base de la formule de Black Scholes

#### Énoncé

Installé dans le train, vous devez déterminer pour votre client la valeur d'une option européenne sur l'action AluFrance. Les caractéristiques de l'option sont :

- prix du sous-jacent : 100 ;
- prix d'exercice : 100 ;
- échéance : un an ;
- taux d'intérêt : 5 % (capitalisation continue) ;
- volatilité : 40 %.

En fait, vous ne vous souvenez pas du type d'option à évaluer mais vous pouvez utiliser une feuille Excel qui vous donnera les valeurs d'un call et d'un put. Vous avez entré les données dans votre ordinateur mais, sans imprimante, vous avez écrit manuellement les résultats sans avoir le temps de tout noter avant que la batterie de votre portable ne se soit épuisée... Vous avez pu mettre sur papier les éléments suivants :

- delta du call = 0,627 ;
- probabilité d'exercice du call (dans un monde neutre au risque) = 0,47.

**Que vaut le call ? Que vaut le put ? De plus, vous réalisez que le cours de l'action Alu-France repris dans l'énoncé est celui de la clôture de la veille. Votre client souhaitera sans doute connaître la valeur des options sur la base du cours du jour qui pourrait se situer entre 97 et 103. Vous voulez être prêt à répondre à ses questions.**

### Solution

Faute d'ordinateur, nous supposerons que vous avez une calculatrice (il faut toujours avoir une solution de sauvegarde). La valeur de l'option call est obtenue en appliquant directement la formule :

$$C = SN(d_1) - PV(K)N(d_2).$$

La valeur du call est donc :

$$C = 100 \times 0,627 - (100e^{-0,05}) \times 0,47 = 17,99 \text{ €}$$

Pour trouver la valeur du put, utilisons la relation de parité put – call :

$$\begin{aligned} P &= C - S + PV(K) \\ &= 17,99 - 100 + 95,12 = 13,11 \text{ €} \end{aligned}$$

Ces prix correspondent à un cours de l'action de 100. Comme le delta de l'option est égal à la dérivée première du cours par rapport au prix du sous-jacent, nous pouvons calculer une valeur approximative du call sur la base du cours du jour en ajustant les prix trouvés précédemment :

$$\Delta C = \text{Delta} \times \Delta S = 0,627 \times (S_{\text{jour}} - 100)$$

Ainsi, pour les valeurs extrêmes envisagées, on aurait :

$$\begin{aligned} S_{\text{jour}} = 97 \quad C &= 17,99 + 0,627(97 - 100) = 16,11 \text{ €}. \\ S_{\text{jour}} = 103 \quad C &= 17,99 + 0,627(103 - 100) = 19,87 \text{ €}. \end{aligned}$$

Remarquez que la variation relative de la valeur du call est beaucoup plus importante que celle de l'actif sous-jacent. Une variation du prix de l'action de  $\pm 3\%$  entraîne une variation du prix du call de  $\pm 10,5\%$  ! Pour calculer l'impact de la variation de prix de l'action sur la valeur du put, reprenons la relation de parité put – call qui, en variation, s'écrit :

$$\Delta P = \Delta C - \Delta S \text{ (la valeur actuelle du prix d'exercice est inchangée)} = (\text{Delta} - 1)\Delta S.$$

Le delta d'un put européen est égal à celui du call européen moins l'unité. Dans notre cas, il est égal à  $-0,373 (= 0,627 - 1)$ . Les valeurs du put sur la base du cours du jour sont donc :

$$\begin{aligned} S_{\text{jour}} = 97 \quad P &= 13,11 + (-0,373)(97 - 100) = 14,23 \text{ €}. \\ S_{\text{jour}} = 103 \quad P &= 13,11 + (-0,373)(103 - 100) = 11,99 \text{ €}. \end{aligned}$$

## Exercice 11 Mesurer la sensibilité d'options par rapport au prix du sous-jacent

### Énoncé

Arrivé à Paris, vous apprenez que le cours de l'action AluFrance a brusquement grimpé ce matin suite à l'annonce d'un résultat annuel largement supérieur aux prévisions faites par les analystes financiers. Elle cote actuellement 120 €. Vous réalisez alors que l'approximation linéaire que vous aviez envisagée dans le train manque de précision. Vous ne vous souvenez pas précisément du sens de l'erreur.

Vous décidez de profiter de la demi-heure de transport pour aller à votre rendez-vous pour recalculer la valeur des options. Vous avez, heureusement, dans votre serviette une table donnant les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale.

### Que valent maintenant les options ?

### Solution

Étape 1 : calculons  $d_1$  et  $d_2$

$$S = 120.$$

$$PV(K) = 95,12 \quad (\text{voir Ex. 3.10}).$$

$$\sigma\sqrt{t} = 0,40.$$

$$d_1 = \ln(120/95,12)/(0,40) + 0,50 \times 0,40 = 0,7808.$$

$$d_2 = 0,7808 - 0,40 = 0,3808.$$

Étape 2 : trouvons  $N(d_1)$  et  $N(d_2)$

$$N(0,7808) = 0,7823.$$

$$\text{et } N(0,3808) = 0,6480.$$

Étape 3 : calculons  $C$  et  $P$

$$C = 120 \times 0,7823 - 95,12 \times 0,6480 = 32,24 \text{ €}.$$

$$P = 32,24 - 120 + 95,12 = 7,36 \text{ €}.$$

Qu'aurait donné l'approximation fondée sur le delta ?

$$S_{\text{jour}} = 120 \quad C = 17,99 + 0,627(120 - 100) = 30,53 \text{ €}.$$

$$S_{\text{jour}} = 120 \quad P = 13,11 + (-0,373)(120 - 100) = 5,65 \text{ €}.$$

Les approximations des valeurs des options fondées sur les deltas sous-estiment ces valeurs. Cela est dû à la convexité de la relation entre la valeur de l'option et celle du cours. L'approximation fondée sur le delta est linéaire, sous-estime la hausse et surestime la baisse de la valeur de l'option.



# Évaluation d'entreprises non endettées

1.	Dividend Discount Model (DDM) et modèle de Gordon-Shapiro . . . . .	108
2.	Lien entre free cash flow et dividendes : le tableau de financement . . . . .	111
3.	Free cash flow model . . . . .	113
4.	Valeur actuelle des opportunités de croissance . . . . .	114

## Problèmes et exercices

Dividend Discount Model et modèle de Gordon-Shapiro	119
Lien entre free cash flow et dividendes : le tableau de financement . . . . .	128
Free cash flow model . . . . .	132
Valeur actuelle des opportunités de croissance . . . . .	136

L'application du principe de création de valeur repose sur l'utilisation de modèles d'évaluation de l'entreprise (dans ce chapitre, financée par capitaux propres). En effet, la valeur actuelle nette est une mesure de la variation de la valeur de l'entreprise qui résulte d'une décision d'investissement ou de financement.

Le point de départ de ces modèles est la détermination de la valeur d'une action. Nous développons, dans la première section, le **Dividend Discount Model** (DDM) qui montre que la valeur d'une action est égale à la valeur actuelle des dividendes futurs que peut attendre l'actionnaire.

La provenance des fonds nécessaires pour le paiement des dividendes est développée dans la deuxième section. Nous y présentons le tableau de financement qui établit la relation entre les différents cash flows d'une entreprise au cours d'une période : opérationnels, d'investissement et de financement. Leur somme doit toujours être égale à la variation des montants dont dispose la société (le **disponible**).

Nous appuyant sur le tableau de financement, nous montrons dans la troisième section que la valeur de l'entreprise, c'est-à-dire la valeur de l'ensemble des actions, n'est pas déterminée par les dividendes versés mais est égale à la valeur actuelle des **free cash flows**.

# 1 Dividend Discount Model (DDM) et modèle de Gordon-Shapiro

Nous commençons par développer le modèle de base permettant d'évaluer une action individuelle. Il se fonde sur les dividendes futurs anticipés.

## 1.1 Le modèle général et les méthodes d'estimation des dividendes futurs

Une action s'évalue en actualisant les cash flows futurs que sa possession va générer. Dans le cas simple d'un investissement avec horizon d'un an, les cash flows futurs sont le dividende versé par action,  $DPA_1$ , et le prix de la revente de l'action (valeur attendue),  $P_1$ .

$$P_0 = \frac{DPA_1 + P_1}{1 + r}$$

Le taux d'actualisation,  $r$ , est la somme du taux d'intérêt (pour tenir compte de la « valeur du temps ») et de la prime de risque (pour tenir compte de l'incertitude propre à l'action). Il correspond à la rentabilité exigée par les actionnaires, laquelle peut être décomposée en deux parties :

- le rendement ( $DPA_1/P_0$ ) ;
- la plus-value ( $(P_1 - P_0)/P_0$ ).

Il en résulte que :

$$r = \frac{DPA_1 + P_1 - P_0}{P_0}$$

La valeur attendue de l'action  $P_1$  dépend du dividende et du prix attendu de l'action l'année suivante. En appliquant la formule de  $P_0$  à  $P_1$ , on obtient :

$$P_0 = \frac{DPA_1}{1 + r} + \frac{DPA_2 + P_2}{(1 + r)^2}$$

La généralisation de la formule de  $P_0$  avec un horizon de revente de l'action en  $T$  donne la formule :

$$P_0 = \frac{DPA_1}{1 + r} + \frac{DPA_2}{(1 + r)^2} + \dots + \frac{DPA_T + P_T}{(1 + r)^T}$$

Si l'horizon de prévision est infini, la valeur actuelle du prix de revente, quand  $T$  approche de l'infini, tend vers 0. La valeur de l'action peut donc être estimée par la valeur actuelle de tous les dividendes futurs :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{DPA_t}{(1 + r)^t}$$

Il est difficile de prévoir les dividendes futurs sur une longue période. L'évolution des actions peut être évaluée grâce à l'utilisation d'hypothèses simplificatrices. Nous commencerons par présenter les formules permettant de calculer plus aisément les valeurs actuelles dans quelques cas particuliers.

## Formules simplificatrices de calcul de la valeur actuelle

Nous considérons que toutes les séries de flux mentionnées dans les points ci-dessous débutent à la période 1 et la valeur actuelle est calculée au temps 0.

- Valeur actuelle d'une rente (« perpétuité ») constante, c'est-à-dire une suite infinie de cash flows constants :  $C_1 = C_2 = \dots = C_t = \dots = C$  :

$$VA = \frac{C}{r}$$

- Valeur actuelle d'une rente (« perpétuité ») croissant au taux  $g$ , c'est-à-dire une suite infinie de cash flows croissants :

$$C_1, C_2 = C_1(1+g), \dots, C_t = C_{t-1}(1+g) = C_1(1+g)^{t-1}, \dots$$

$$VA = \frac{C_1}{r-g}$$

NB :  $g < r$ , sinon la suite ne converge pas et  $VA$  tendrait vers l'infini.

- Valeur actuelle d'une annuité constante, c'est-à-dire une suite finie de cash flows constants :  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = C$  :

$$VA = C \times \underbrace{\left( \frac{1}{r} \right)}_{\text{Facteur d'annuité}} \left[ 1 - \underbrace{\frac{1}{(1+r)^n}}_{\text{Facteur d'annuité}} \right]$$

où  $VA = C \times \underbrace{\left[ \frac{1-v^n}{r} \right]}_{\text{Facteur d'annuité}}$  et le facteur d'annuité  $= v_1 + v_2 + \dots + v_n$ .

- Valeur actuelle d'une annuité croissante, c'est-à-dire une suite finie de cash flows croissants au taux  $g$  :  $C_1, C_2 = C_1(1+g), \dots, C_t = C_1(1+g)^{t-1}$  :

$$VA = \left( \frac{C}{r-g} \right) \left[ 1 - \left( \frac{1+g}{1+r} \right)^t \right]$$

## Les dividendes sont constants dans le temps

Le prochain dividende est d'abord estimé puis l'ensemble des dividendes est actualisé.

Période	0	1	2	...	$T$	$T+1$	...
Dividende		$DPA_1$	$DPA_1$	...	$DPA_1$	$DPA_1$	...

Mathématiquement, dans ce cas :

$$P_0 = \frac{DPA_1}{r}$$

## Les dividendes croissent à un taux $g$ constant

Le prochain dividende est d'abord estimé puis la formule d'actualisation de cash flows croissants à un taux constant est utilisée. Attention, il est impératif que  $g < r$ .

Période	0	1	2	...	T	T + 1	...
Dividende		$DPA_1$	$DPA_1 * (1 + g)$	...	$DPA_1 \times (1 + g)^T$	$DPA_1 * (1 + g)^{T+1}$	...

$$P_0 = \frac{DPA_1}{r - g}$$

### Combinaison : prévision possible des $T$ prochains dividendes

Les  $T$  prochains dividendes sont d'abord estimés et le taux de croissance du dividende après  $T$  est évalué avant de procéder à l'actualisation.

Période	0	1	2	...	T	T + 1	...
Dividende		$DPA_1$	$DPA_2$	...	$DPA_T$	$DPA_T \times (1 + g)$	...

$$P_0 = \frac{DPA_1}{1 + r} + \frac{DPA_2}{(1 + r)^2} + \cdots + \frac{DPA_{T-1}}{(1 + r)^{T-1}} + \frac{\frac{DPA_T}{r - g}}{(1 + r)^{T-1}}$$

## 1.2 Le modèle de Gordon-Shapiro

Comment déterminer le taux de croissance  $g$  du dividende ? D'après le modèle de Gordon-Shapiro, pour une entreprise non endettée (dont les investissements sont autofinancés), il est égal au produit du taux de réinvestissement par le taux de rentabilité des investissements nouveaux :

$$g = \text{Taux de réinvestissement} \times \text{Taux de rentabilité des investissements nouveaux}$$

Considérons une entreprise non endettée qui distribue une fraction  $d$  de son bénéfice. Le taux de réinvestissement vaut donc  $1-d$ . Tous les investissements sont autofinancés, ils sont égaux au bénéfice ( $BEN$ ) multiplié par le taux de réinvestissement  $(1-d)$ . Le dividende étant proportionnel au bénéfice, le taux de croissance  $g$  du dividende est égal au taux de croissance du bénéfice :  $g = \Delta BEN / BEN = \Delta INV / INV$ .

La croissance des bénéfices dépend du montant des investissements ( $INV$ ) et de la rentabilité des nouveaux investissements ( $RNI$ ) :  $\Delta BEN = INV \times RNI = BEN \times (1-d) \times RNI$ . Le taux de croissance du bénéfice, égal à celui du dividende, vaut :  $g = (\Delta BEN / BEN) = (1-d) \times RNI$ . Si le taux de distribution  $d$  et le taux de rentabilité des investissements nouveaux sont constants, le taux de croissance du dividende le sera aussi. La valeur de l'action est alors :

$$P_0 = \frac{d \times BPA_1}{r - (1-d)RNI}$$

Si une entreprise réalise des investissements dont la rentabilité est égale au coût du capital, c'est-à-dire si  $RNI = r$ , alors le prix de l'action devient

$$P_0 = \frac{BPA_1}{r}$$

Ce prix est également celui d'une entreprise qui produirait un bénéfice par action attendu constant et qui distribuerait la totalité de son bénéfice ( $d = 1$ ). Dès lors, le réinvestissement d'une partie des bénéfices ne conduit à un accroissement de la valeur des actions qu'à la condition que la rentabilité des investissements nouveaux soit supérieure à celle exigée par les actionnaires ce qui implique que l'entreprise a un avantage concurrentiel :

$$\frac{d \times BPA_1}{r - (1 - d)RNI} > \frac{BPA_1}{r} \Leftrightarrow RNI > r$$

À taux de distribution  $d$  donné, l'hypothèse d'un taux de croissance  $g$  constant suppose que l'entreprise soit à même de préserver son avantage concurrentiel année après année jusqu'à l'infini. Cela est tout à fait irréaliste. La théorie économique nous enseigne que, dans un marché concurrentiel à l'équilibre, le profit est nul. Transposé à notre cas, ce résultat signifie que dans un tel marché, la rentabilité des investissements nouveaux est égale à celle du marché ( $RNI = r$ ).

## 2 Lien entre free cash flow et dividendes : le tableau de financement

Nous avons, dans la section précédente, montré que la valeur d'une action est égale à la valeur actuelle des dividendes par action futurs attendus. Il est tentant d'appliquer le même raisonnement à l'ensemble des actions. La valeur de l'entreprise (égale, dans notre cas, à celle des actions puisque, par hypothèse, l'entreprise n'est pas endettée) serait alors égale à la valeur actuelle de l'ensemble des dividendes futurs. Cette généralisation n'est valable que dans le cas particulier d'une entreprise qui ne ferait jamais appel à des capitaux extérieurs. Pour aboutir à une formulation générale de la valeur d'une entreprise, nous utilisons le tableau de financement qui fournit la relation entre les différents types de cash flows d'une entreprise et la variation des encaisses (disponibles).

### 2.1 Les cash flow

Le tableau de financement indique que la variation du disponible ( $\Delta DISP$ ) est la somme des trois grands types de cash flows que réalise l'entreprise au cours d'une période :

- le cash flow d'exploitation  $CF_{exp}$  ;
- le cash flow d'investissement  $CF_{inv}$  ;
- le cash flow de financement  $CF_{fin}$ .

$$\Delta DISP = CF_{exp} + CF_{inv} + CF_{fin}$$

Le *cash flow d'exploitation* est le flux de trésorerie, c'est-à-dire la différence entre les recettes et les dépenses, produit au cours d'une période par les activités d'exploitation de l'entreprise. Il peut être calculé à partir de données comptables en partant du bénéfice auquel on rajoute les dotations aux amortissements ( $DAM$ ), somme à laquelle on soustrait la variation du besoin en fonds de roulement ( $\Delta BFR$ ) :  $CF_{exp} = BEN + DAM - \Delta BFR$ .

## Complément

### Comment passer d'un résultat comptable à un cash flow ?

Il est important de se souvenir que le bénéfice d'une entreprise résulte de règles comptables. Or, la comptabilité n'enregistre pas uniquement les encaissements et les décaissements pour aboutir au bénéfice. Pour connaître le cash flow correspondant à un résultat comptable, il faut procéder à des redressements, qui sont essentiellement de deux ordres :

1. Rajouter au bénéfice les charges comptables non décaissées, c'est-à-dire des dotations aux amortissements (et, plus généralement les variations de provisions).
2. Soustraire du bénéfice la variation du besoin en fonds de roulement. Celui-ci est défini comme la somme des stocks ( $S$ ) et des créances à court terme d'exploitation ( $CCT_{exp}$ ), dont sont déduites les dettes à court terme d'exploitation ( $DCT_{exp}$ ) :  $BFR = S + CCT_{exp} - DCT_{exp}$ .

Pour comprendre la logique qui sous-tend la déduction de la variation du besoin en fonds de roulement, considérons une vente réalisée par l'entreprise au cours de la période. Cette vente est reprise dans le chiffre d'affaires et affecte le bénéfice. Mais si la facture n'est pas payée en fin de période, aucun encaissement n'est réalisé. Cela conduit à un accroissement des comptes clients et donc des créances à court terme d'exploitation. En soustrayant du bénéfice la variation de ce poste, on aboutit à une mesure plus précise du montant des encaissements. Un raisonnement similaire peut être mené pour un achat non payé en fin de période. Cela diminue le bénéfice et conduit à un accroissement des dettes à court terme d'exploitation, qu'il faut rajouter au bénéfice.

Quant à la variation du stock, elle intervient dans la détermination du prix de revient des ventes (en déduction des achats) mais ne correspond à aucun cash flow. Elle doit être déduite du bénéfice.

Dans ces conditions :  $CF_{exp} = BEN + DAM - \Delta S - \Delta CCT_{exp} + \Delta DCT_{exp} = BEN + DAM - \Delta BFR$ .

Le *cash flow d'investissement* est égal à la variation (changée de signe) des actifs immobilisés bruts de l'entreprise :  $CF_{inv} = -\Delta IMB$ .

Le *cash flow de financement* d'une entreprise non endettée est la différence entre les capitaux obtenus par augmentation de capital ( $\Delta K$ ) et le montant des dividendes versés aux actionnaires :  $CF_{fin} = \Delta K - DIV$ .

## 2.2 Le tableau de financement

L'expression du tableau de financement résulte de l'égalité entre l'actif et le passif. Le bilan résumé d'une entreprise non endettée peut être présenté sous la forme :  $IMN + BFR + DISP = FP$  où  $IMN$  représente le montant des immobilisés nets et  $FP$  le montant des fonds propres. La variation des postes d'actif est égale à celle des postes de passif :  $\Delta IMN + \Delta BFR + \Delta DISP = \Delta FP$ . Mais la variation des immobilisés nets est la différence entre la variation des immobilisés bruts et les dotations aux amortissements :  $\Delta IMN = \Delta IMB - DAM$ . D'autre part, la variation des fonds propres est la somme des bénéfices mis en réserve ( $BEN - DIV$ ) et du produit des augmentations de capital ( $\Delta K$ ) :  $\Delta FP = BEN - DIV + \Delta K$ .

En remplaçant les termes, il en résulte que :  $\Delta IMB - DAM + \Delta BFR + \Delta DISP = BEN - DIV + \Delta K$ . Cette expression peut s'écrire :  $(BEN + DAM - \Delta BFR) + (-\Delta IMB) + (\Delta K - DIV) = \Delta DISP$ . La première parenthèse représente le cash flow d'exploitation, la deuxième équivaut au cash flow d'investissement et la troisième le cash flow de financement. Nous aboutissons donc à l'expression du tableau de financement :  $CF_{exp} + CF_{inv} + CF_{fin} = \Delta DISP$ .

## 2.3 Le free cash flow

Le free cash flow est, par définition, égal à la somme des cash flows d'exploitation et d'investissement :  $FCF = CF_{exp} + CF_{inv}$ . Un free cash flow positif signifie que le montant net encaissé par l'entreprise est supérieur au montant des investissements qu'elle a réalisés. Le tableau de financement d'une entreprise entièrement financée par actions peut alors s'écrire :  $FCF = DIV - \Delta K + \Delta DISP$ .

## 3 Free cash flow model

Examinons maintenant la détermination, en  $t = 0$ , de la valeur  $V$  d'une entreprise non endettée. En l'absence de dettes, elle est égale à sa capitalisation boursière, c'est-à-dire à la valeur  $A$  de toutes les actions :

$$V_0 = A_0 = n_0 \times P_0 = \frac{[n_0 \times DPA_1 + n_0 \times P_1]}{(1 + r)}$$

Ici,  $n_0$  représente le nombre d'actions émises en  $t = 0$ . Or, les dividendes d'une année ne sont payés qu'aux actionnaires de l'année précédente :  $DIV_1 = n_0 \times DPA_1$ . D'autre part, la valeur de l'entreprise en  $t = 1$ , ( $V_1 = n_1 \times P_1$ ), peut être décomposée ainsi :

- la valeur des actions anciennes ( $n_0 \times P_1$ ) ;
- la valeur des actions nouvellement émises  $(n_1 - n_0) \times P_1$ , c'est-à-dire le produit d'une éventuelle augmentation de capital.

$$\Delta K_1 = (n_1 - n_0) \times P_1$$

Donc :

$$V_0 = \frac{DIV_1 - \Delta K_1 + V_1}{1 + r}$$

Mais le tableau de financement nous apprend que, à disponible constant :  $DIV_1 - \Delta K_1 = FCF_1$ . La valeur de l'entreprise est :  $V_0 = \frac{FCF_1 + V_1}{1 + r}$ . Puisque, de manière générale :  $V_t = \frac{FCF_{t+1} + V_{t+1}}{1 + r}$  la valeur de l'entreprise apparaît comme la valeur actuelle des free cash flows attendus :  $V_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{FCF_t}{(1 + r)^t}$ .

Les free cash flows sont déterminés par les activités d'exploitation de l'entreprise et par sa politique d'investissement mais nullement par sa politique de dividende. Nous aboutissons donc à la conclusion que la valeur de l'entreprise est indépendante de la politique de dividende. Ce résultat, démontré pour la première fois par Modigliani et Miller en 1961, indique que la valeur d'une entreprise est fondamentalement déterminée par ses activités d'exploitation et d'investissement. Le financement n'a pas d'influence comme cela est démontré par la relation, issue du tableau de financement, entre les free cash flows, les dividendes et les augmentations de capital :  $DIV_t - \Delta K_t = FCF_t$ .

Cette égalité doit toujours être vérifiée puisqu'elle découle de celle entre actif et passif. En conséquence, à free cash flow donné, toute variation du dividende d'une année doit s'accompagner d'une modification de même niveau des augmentations de capital.

Cette affirmation est toujours vraie seulement si les augmentations de capital sont la seule source de financement externe possible pour l'entreprise, parce qu'elle ne veut pas ou ne peut pas s'endetter.

Une augmentation de capital aboutit nécessairement à un accroissement du nombre d'actionnaires auxquels une partie des dividendes futurs reviendra. Dès lors, pour les actionnaires actuels, la baisse de dividendes résultant de ce changement doit être compensée.

Pour illustrer cela, supposons que l'entreprise réalise une seule augmentation de capital d'un montant  $\Delta K_1$  l'année 1. Soient  $n_0$  le nombre initial d'actions et  $\Delta n_1$  le nombre d'actions émises l'année 1. À la fin de l'année 1, la valeur  $V_1$  de l'entreprise est égale à la valeur actuelle des free cash flows qu'elle produit à partir de l'année 2. Si aucune augmentation de capital n'est prévue ultérieurement, cette valeur est également égale à la valeur actuelle des dividendes.

La valeur de l'entreprise  $V_1$  peut être décomposée en :

- valeur des actions nouvellement émises  $\Delta K_1$  ;
- valeur des actions anciennes (les actions en circulation l'année précédente) =  $V_1 - \Delta K_1$ .

Le nombre d'actions anciennes ( $n_0$ ) est connu. En conséquence, le prix par action en  $t = 1$  peut être calculé en divisant la valeur des actions anciennes par leur nombre :  $P_1 = \frac{V_1 - \Delta K_1}{n_0}$ . Notons que si un dividende est payé en  $t = 1$ , le prix  $P_1$  est un prix « ex dividende », c'est-à-dire le montant à payer pour avoir droit aux dividendes versés à partir de l'année 2.

Connaissant le prix par action, le nombre d'actions nouvelles émises en  $t = 1$  peut être calculé :  $\Delta n_1 = \frac{\Delta K_1}{P_1}$ . Le nombre total d'actions à la fin de l'année 1 est  $n_1 = n_0 + \Delta n_1$  et les dividendes par action versés sont :  $DPA_t = DIV_t / n_{t-1}$ .

Dans notre exemple, le nombre d'actions reste constant à partir de l'année 1. On peut vérifier que la valeur  $V_0$  des actions est égale à la valeur actuelle des dividendes versés aux actionnaires initiaux :  $V_0 = \sum_t \frac{n_0 DPA_t}{(1+r)^t}$ .

## 4 Valeur actuelle des opportunités de croissance

La valeur d'une entreprise reflète non seulement la valeur actuelle des cash flows générés par son activité mais également la valeur actuelle des investissements futurs. Il est possible de la décomposer en deux parties :

- la valeur de l'entreprise sans croissance ( $BEN_1/r$ ) ;
- la valeur actuelle de sa croissance ( $VAOC_0$ ).

Cette dernière correspond à la somme actualisée des valeurs actuelles nettes des investissements futurs :

$$VAOC_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{VAN(t)}{(1+r)^t}$$

## 4.1 La valeur de l'entreprise sans croissance

Considérons une entreprise qui génère un bénéfice constant ( $BEN$ ). Supposons, en outre, que le montant des investissements de remplacement soit égal aux dotations aux amortissements et qu'il n'y ait pas de variation du besoin en fonds de roulement. Le tableau de financement pour cette entreprise se présenterait comme suit :  $CF_{exp} = BEN + DAM$  et  $CF_{inv} = -DAM$ . Le free cash flow est :  $FCF = (BEN + DAM) + (-DAM) = BEN$ . L'actualisation des free cash flows conduit à la valeur  $V = BEN/r$ .

## 4.2 La valeur actuelle des opportunités de croissance

Imaginons une entreprise n'ayant qu'un seul actif : un brevet qui lui permettra de réaliser un investissement dans trois ans. Elle n'a pas d'autre activité et, en l'absence de ce brevet, sa valeur serait nulle. Que vaut-elle aujourd'hui ?

Soit  $VAN_3$  la valeur actuelle nette, dans trois ans, qui résulterait de la réalisation de l'investissement. Supposons qu'elle soit positive. Quel prix serions-nous prêt à payer pour acquérir cette entreprise ? Un prix égal à la valeur actuelle de la valeur actuelle nette. Ce prix reflète la possibilité de réaliser à l'avenir un investissement rentable. La valeur de l'entreprise serait donc égale à la valeur des opportunités de croissance :  $V = VAN_3/(1+r)^3$ .

Notre exemple est simplifié à l'extrême. Les entreprises sont susceptibles de pouvoir réaliser des investissements rentables pendant plusieurs années. Dans ce cas, la valeur actuelle des opportunités de croissance est la somme des valeurs actuelles nettes des différents investissements futurs :  $VAOC = VAN_1/(1+r) + VAN_2/(1+r)^2 + \dots + VAN_t/(1+r)^t + \dots$

## 4.3 Relation entre valeur actuelle des opportunités de croissance et avantage concurrentiel

Réaliser un investissement à valeur actuelle nette positive représente, au sens économique du terme, une forme de profit car le prix payé, le montant de l'investissement, est inférieur à la valeur actuelle des cash flows qu'il produit. Or, la concurrence tend à éliminer les profits. Une VAOC positive suppose que l'entreprise ait un avantage concurrentiel qui justifie les valeurs actuelles positives des investissements qu'elle réalise. L'élimination des profits par la concurrence suggère l'adoption d'une attitude de méfiance envers les formules d'évaluation qui, explicitement ou implicitement, se fondent sur des hypothèses trop fortes en matière d'avantage concurrentiel.

Nous pouvons illustrer notre propos en reprenant la formule d'évaluation de Gordon-Shapiro établie sur un taux de croissance constant. Cette formule peut s'écrire :

$$V = \frac{BEN_1 \times d}{r-g} = \frac{BEN_1}{r} + \frac{BEN_1 \times (1-d) \times (RNI-r)}{r(r-g)}$$

en se rappelant que :  $g = RNI \times (1-d)$ . Le premier terme correspond à la valeur de l'entreprise sans croissance et le second à la valeur de la croissance. Dans ce modèle, un investissement a une valeur actuelle positive si  $RNI > r$ . Un taux de croissance

constant jusqu'à l'infini, pour un taux de distribution  $d$  fixé, signifie que l'on fait implicitement l'hypothèse que l'entreprise a la capacité de conserver à perpétuité son avantage concurrentiel. Cela est contraire à ce que l'on observe. Au fil du temps, l'avantage concurrentiel des entreprises s'érode et la rentabilité des nouveaux investissements  $RNI$  tend progressivement vers le coût du capital  $r$ .

Lorsque  $RNI = r$ , l'avantage concurrentiel d'une entreprise disparaît et sa valeur est celle d'une entreprise sans croissance, quel que soit son taux de distribution. Si, par exemple, l'avantage concurrentiel disparaît après  $T$  années, la valeur des opportunités de croissance devient :

$$VAOC = \frac{BEN_1 \times (1 - d) \times (RNI - r)}{r \times (r - g)} \times \left[ 1 - \frac{(1 + g)^T}{(1 + r)^T} \right]$$

## Complément

### La valeur des opportunités de croissance dans le modèle de Gordon-Shapiro

Dans le modèle de Gordon-Shapiro, le montant des investissements est égal au bénéfice non distribué. Ainsi, la première année, le montant des investissements  $INV_1$  est égal à :  $INV_1 = BEN_1 \times (1 - d)$ . Les cash flows annuels produits par l'investissement sont obtenus en multipliant le montant de celui-ci par la rentabilité des nouveaux investissements. Il s'agit de perpétuité. La valeur actuelle de l'investissement réalisé la première année s'écrit :

$$VAN_1 = -BEN_1 \times (1 - d) + \frac{BEN_1 \times (1 - d) \times RNI}{r} = \frac{BEN_1 \times (1 - d) \times (RNI - r)}{r}$$

Comme les investissements sont proportionnels aux bénéfices, le taux de croissance de la VAN des investissements nouveaux est égal à  $g$ . La valeur actuelle des valeurs actuelles nettes lorsque la croissance est infinie est, par conséquent :

$$VAOC = \frac{VAN_1}{r - g} = \frac{BEN_1 \times (1 - d) \times (RNI - r)}{r(r - g)}$$

Lorsque la croissance est limitée à un nombre fini  $T$  d'année, on obtient :

$$VAOC = \frac{VAN_1}{r - g} \left[ 1 - \frac{(1 + g)^T}{(1 + r)^T} \right] = \frac{BEN_1 \times (1 - d) \times (RNI - r)}{r(r - g)} \left[ 1 - \frac{(1 + g)^T}{(1 + r)^T} \right]$$

Rappelons que, dans ce chapitre, l'hypothèse est que les sociétés ne sont jamais endettées, donc que la valeur de l'entreprise est la même que celle de ses actions. De même, la rentabilité attendue des actifs est identique à celle des actions et correspond au taux d'actualisation.

## 4.4 Le Price Earnings Ratio et l'avantage concurrentiel

Le *Price Earnings Ratio*, ou *PER*, est le rapport entre le cours d'une action et le bénéfice par action, ou, ce qui revient au même, le rapport entre la capitalisation boursière et le bénéfice total :

$$PER = \frac{P_0}{BPA_1} = \frac{A_0}{BEN_1}$$

Ce chiffre est très largement utilisé en pratique pour apprécier le niveau du cours car il donne une mesure du prix de marché par unité monétaire de bénéfice attendu. Les actions ayant un *PER* élevé sont parfois considérées chères. Ce n'est pas nécessairement le cas. En effet, les développements qui précèdent nous montrent que le *PER* d'une entreprise non endettée peut s'écrire :

$$PER = \frac{\frac{BEN_1}{r} + VAOC}{BEN_1} = \frac{1}{r} + \frac{VAOC}{BEN_1}$$

Deux principales conclusions ressortent de cette formulation :

- Le *PER* diminue lorsque la rentabilité exigée par le marché augmente : une action plus risquée aura, toutes choses étant égales par ailleurs, un *PER* plus faible.
- Le *PER* est plus important pour les entreprises ayant des *VAOC* positives. Un *PER* élevé peut alors indiquer, qu'aux yeux du marché, l'entreprise possède un avantage concurrentiel et qu'elle pourra à l'avenir réaliser des investissements ayant une valeur actuelle nette positive.

## Résumé

Plusieurs modèles ont été proposés pour déterminer la valeur des actions. Ceux présentés dans cette section se basent tous sur le même principe : l'actualisation des flux financiers espérés par la détention de l'action. Leur présentation peut cependant prendre les formes suivantes :

- Le Dividend Discount Model (DDM) montre que la valeur d'une action individuelle est égale à la valeur actuelle des dividendes futurs et de la valeur de l'action à l'horizon de prévision.

$$P_0 = \frac{DPA_1}{(1+r)} + \frac{DPA_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{DPA_T}{(1+r)^T} + \frac{P_T}{(1+r)^T}$$

- Si la société présente une croissance à long terme égale à  $g < r$ , alors :  $P_0 = \frac{DPA_1}{r-g}$ . Le taux de croissance du dividende peut être obtenu par le modèle de Gordon-Shapiro :  $g = RNI \times (1-d)$ . La valeur de l'ensemble des actions découle, quant à elle, des free cash flows, définis comme la somme du cash flow d'exploitation et du cash flow d'investissement. Le tableau de financement fournit, en effet, la source des dividendes versés par une entreprise non endettée :  $DIV = FCF + \Delta K$ .
- La valeur de l'entreprise est fournie par l'expression du free cash flow model (FCFM) :

$$V_0 = A_0 = \sum_t \frac{FCF_t}{(1+r)^t}$$

- La valeur d'une entreprise peut se décomposer en deux parties : la valeur de l'entreprise sans croissance ( $BEN_1/r$ ) et la valeur actuelle des opportunités de croissance ( $VAOC_0$ ) qui correspond à la somme actualisée des valeurs actuelles nettes des investissements futurs. Celle-ci reflète l'avantage

concurrentiel de l'entreprise, c'est-à-dire sa capacité à réaliser, à l'avenir, des investissements ayant une valeur actuelle nette positive.

## Références bibliographiques

- COPELAND T., KOLLER T. et MURRIN J., *Valuation Measuring and Managing the Value of Companies*, 3<sup>rd</sup> ed., John Wiley & Sons, 2000.
- DIXIT A. et PINDYCK R.S., *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.
- GILLET R., JOBARD J.-P., NAVATTE P. et RAIMBOURG P., *Finance*, 2<sup>e</sup> édition, Dalloz, 2003.
- GORDON M.J. et SHAPIRO E., « Capital Equipment Analysis : The Required Rate of Profit », *Management Science*, 3 (octobre 1956), pp. 17–35.
- MILLER M. et MODIGLIANI M., « Dividend Policy, Growth and the Valuation of Shares », *Journal of Business*, 34 (octobre 1961), pp. 411–433.
- PORAIT R. et NOUBEL P., *Les Décisions financières dans l'entreprise*, 5<sup>e</sup> édition, Presses universitaires de France, 1998.
- WILLIAMS J.B., *The Theory of Investment*, Harvard University Press, 1938.

### Commentaires

Le « Dividend Discount Model » (curieusement, il ne semble pas exister d'expression française pour désigner ce modèle) remonte aux travaux précurseurs de Williams (1938) ainsi qu'à Gordon et Shapiro (1956). Le rôle des free cash flows a été mis en lumière pour la première fois par Miller et Modigliani (1961). Nous pensons qu'il est important d'insister sur le fait que le DDM et le FCFM constituent deux présentations différentes du même modèle. Ce point n'apparaît pas toujours clairement dans les manuels et est source d'erreurs en pratique. Notre présentation du tableau de financement s'est limitée à l'essentiel. Une présentation plus complète peut être trouvée dans Portait et Noubel (1998). Différentes présentations du tableau sont possibles ainsi que le montrent Gillet, Jobard, Navatte et Raimbourg (2003). L'ouvrage de Copeland *et al.* (2000) est la référence la plus complète pour l'application pratique de ces modèles. Nous avons calculé la valeur actuelle des opportunités de croissance en supposant la politique future d'investissement connue. La réalité est évidemment plus complexe. Les opportunités d'investissement sont, en réalité, des options. La théorie des options réelles développe cette approche comme le montrent, par exemple, Dixit et Pindyck (1994).

# Problèmes et exercices

Nous commençons par aborder différents problèmes d'évaluation d'action fondés sur l'actualisation des dividendes. Nous explorons ensuite les liens entre les différents cash flows d'une entreprise à travers la construction et l'interprétation de tableau de financement. L'évaluation d'entreprises par l'actualisation des free cash flows est ensuite illustrée. Nous terminons cette série d'exercices par un examen de l'impact de l'avantage concurrentiel sur la valeur d'une entreprise.

## Dividend Discount Model et modèle de Gordon-Shapiro

### Le modèle général et les méthodes d'estimation des dividendes futurs

#### Exercice 1 Calculer la valeur d'une action

##### Énoncé

Tante Agathe veut acheter une action Séraphin & Co. Elle estime qu'elle pourra revendre l'action dans trois ans au prix de 4 500 €. Au cours des années à venir, la société devrait verser un dividende de 20 € par an. La rentabilité exigée compte tenu du risque est de 10 %.

**Quel est le prix de l'action si le taux d'actualisation a été évalué à 10 % ?**

##### Solution

Le calcul direct du prix d'une action consiste à additionner les cash flows (dividendes et revente) actualisés :

$$P_0 = \frac{DPA_1}{(1+r)} + \frac{DPA_2}{(1+r)^2} + \frac{DPA_3}{(1+r)^3} + \frac{P_3}{(1+r)^3}$$

$$P_0 = \frac{20}{1,10} + \frac{20}{(1,10)^2} + \frac{20}{(1,10)^3} + \frac{4500}{(1,10)^3} = 3430,65 \text{ €}$$

Dans le cas présenté, l'horizon de revente est assez proche ( $T = 3$ ) et le calcul simple. Cependant, si le délai est plus long, cela peut devenir fastidieux. Dans ce cas, un calcul à reculons est préférable et peut facilement être appliqué dans un tableur. Cette méthode utilise la formule :

$$P_{t-1} = \frac{DPA_t + P_t}{1+r}$$

Elle est d'abord appliquée pour déterminer la valeur de l'action un an avant l'horizon de revente puis successivement aux périodes précédentes. Dans le cas présenté, l'hor-

zon de revente est  $t = 3$  et nous calculons :

$$P_2 = \frac{DPA_3 + P_3}{1+r} = \frac{20 + 4500}{1,10} = 4109,09.$$

Nous répétons le même calcul pour  $P_1$  et  $P_0$  :

$$P_1 = \frac{20 + 4109,09}{1,10} = 3753,72 \text{ €}$$

$$P_0 = \frac{20 + 3753,72}{1,10} = 3430,65 \text{ €}$$

Dans un tableur (voir tableau 4.1), les calculs à reculons sont réalisés par des formules répétitives. Les deux méthodes donnent évidemment les mêmes résultats.

Tableau 4.1

**Illustration du calcul à reculons du prix d'une action**

	A	B	C	D	E
1		$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
2	$DPA$		20	20	20
3	Prix	3 430,65	3 753,72	4 109,09	4 500
4		$B_3 = \frac{(C_2 + C_3)}{(1,10)}$	$C_3 = \frac{(D_2 + D_3)}{(1,10)}$	$D_3 = \frac{(E_2 + E_3)}{(1,10)}$	$E_3 = 4 500$

## Exercice 2 Décomposer la rentabilité attendue en plus-value et rendement

### Énoncé

Oncle Séraphin veut acheter une action Agatha & Co. Il estime qu'il pourra la revendre dans trois ans au prix de 1 250 €. Durant cette période, la société devrait lui verser 50 € par an. Le taux d'actualisation a été évalué à 10 %.

- a** Quel est le prix de l'action aujourd'hui ? Que vaudrait-elle, aux yeux d'oncle Séraphin, s'il considère que la rentabilité attendue devrait être de 15 % en fonction du risque ?
- b** En reprenant le taux de 10 %, que valent l'action, la rentabilité attendue, le rendement et la plus-value aux différentes périodes ?
- c** Quels seraient la valeur de l'action, sa rentabilité attendue, son rendement et sa plus-value au cours des différentes périodes si les dividendes versés s'élevaient à 150 € au lieu de 50 € ?
- d** Quel doit être le dividende versé pour que le prix de l'action reste constant ?

### Solution

- a** La valeur de l'action est :  $P_0 = \frac{50}{1,10} + \frac{50}{(1,10)^2} + \frac{50}{(1,10)^3} + \frac{1250}{(1,10)^3} = 1063,49$ . Si oncle Séraphin exige une rentabilité attendue de 15 %, il doit actualiser les cash flows futurs à ce taux. Dans ce cas :

$$P_0 = \frac{50}{1,15} + \frac{50}{(1,15)^2} + \frac{50}{(1,15)^3} + \frac{1250}{(1,15)^3} = 936,06 \text{ €.}$$

**b**

Le calcul de la rentabilité attendue, du rendement et de la plus-value, est facilité par l'utilisation du tableur (voir tableau 4.2). Il suffit de développer le tableau 4.1. La méthode de calcul à reculons permet de déterminer facilement le prix de l'action aux différentes périodes. Les formules utilisées sont les suivantes :

- pour la rentabilité :  $C4 = (C2 + C3 - B3)/B3$  ;
- pour la plus-value :  $C5 = (C3 - B3)/B3$  ;
- pour le rendement :  $C6 = C2/B3$ .

Tableau 4.2

**Calcul du prix et décomposition de la rentabilité de l'action**  
Agatha & Co

	A	B	C	D	E
1		$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$
2	<i>DPA</i>		50	50	50
3	Prix	1 063,49	1 119,83	1 181,82	1 250
4	Rentabilité		10 %	10 %	10 %
5	Plus-value		5,30 %	5,54 %	5,77 %
6	Rendement		4,70 %	4,46 %	4,23 %

La rentabilité attendue est toujours égale à 10 %, tout comme le taux d'actualisation. En revanche, la décomposition de cette rentabilité en plus-value et rendement varie dans le temps. La plus-value est positive et croissante. Le rendement diminue dans le temps puisque le dividende reste constant mais que le prix de l'action augmente.

**c**

En modifiant le montant des dividendes versés, le tableau construit pour la question précédente donne directement les résultats suivants :

	A	B	C	D	E
1		$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$
2	<i>DPA</i>		150	150	150
3	Prix	1 312,17	1 293,39	1 272,73	1 250
4	Rentabilité		10 %	10 %	10 %
5	Plus-value		-1,43 %	-1,60 %	-1,79 %
6	Rendement		11,43 %	11,60 %	11,79 %

Le prix diminue dans le temps, ce qui s'explique par l'importance du dividende payé. En effet, il est de 150 € soit 12 % du prix de l'action qui ne vaut que 1 250 €. Le rendement de l'action est supérieur à la rentabilité espérée. Par conséquent, le prix doit diminuer afin de garder la rentabilité à son niveau de 10 %.

**d**

Si le prix de l'action reste constant, la plus-value sera nulle. Cela implique que la rentabilité attendue sera entièrement réalisée par le rendement de l'action. Dans ce cas, le rendement =  $DPA_t/P_{t-1} = 10\%$ , et le dividende doit s'élever à 10 % du prix final, soit 125 €. Ce qu'on peut vérifier en modifiant le tableau :

	A	B	C	D	E
1		$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$
2	<i>DPA</i>		125	125	125
3	Prix	1 250	1 250	1 250	1 250

## Exercice 3 Évaluer une action dont le dividende croît à un taux constant

### Énoncé

Tante Agathe voudrait revendre quelques actions qu'elle possède dans Agatha Int'l. La société est en croissance : les dividendes devraient croître indéfiniment de 2 %. Le prochain dividende s'élève à 100 € et doit être payé demain. Tante Agathe se demande à quel prix elle peut revendre ses actions. Étant donné le risque de la société, le taux d'actualisation est évalué à 8 %. Par ailleurs, les dividendes ne sont pas imposés dans le pays où vit tante Agathe.

- a** Quel est le prix des actions si tante Agathe les revend demain (après distribution du dividende) ?
- b** Quel est le prix des actions si tante Agathe les revend aujourd'hui (avant distribution du dividende) ?
- c** Quelle est la meilleure date de revente pour tante Agathe ?
- d** Dans le premier cas, déterminez la rentabilité, la plus-value et le rendement de l'action pendant les cinq premières périodes (de  $T = 1$  à  $T = 5$ ).

### Solution

- a** Les cash flows liés à l'action sont présentés dans le tableau 4.3 :

Tableau 4.3

Évolution des dividendes de Agatha Int'l

	0	1	2	3	4
$DPA$		$100 \times (1 + 2\%)$	$100 \times (1 + 2\%)^2$	$100 \times (1 + 2\%)^3$	...
$DPA$		= 102,00	= 104,04	= 106,12	...

L'action distribue un dividende croissant, mais dont le taux de croissance est inférieur au taux d'actualisation. La formule à retenir est, dès lors :

$$P_0 = \frac{DPA_1}{r - g} = \frac{102}{8\% - 2\%} = 1\,700 \text{ €}$$

- b** Le prix de l'action aujourd'hui est appelé « cum dividende ». Le paiement du dividende fait chuter le prix de ce dernier pour aboutir au prix « ex dividende » calculé ci-dessus. Le montant est donc :  $P_0 = 100 + 102/(r - g) = 100 + 1\,700 = 1\,800 \text{ €}$ .
- c** Le prix varie selon que la transaction a lieu avant ou après le versement du dividende. Toutefois, pour tante Agathe, il n'y a pas de différence. En effet, si elle revend aujourd'hui, elle touchera 1 800 € par action. Si elle revend demain, elle touchera 1 700 € par action plus les dividendes (100 € par action). Sa situation financière est donc indépendante du moment de la vente.
- d** Il est possible d'établir un tableau de calcul « à reculons » du prix de l'action (voir tableau 4.4). Il faut d'abord calculer le dividende versé jusqu'à la période  $t = 6$  puis évaluer le prix de l'action en  $t = 5$ . Pour ce faire, la formule  $P_t = DPA_{t+1}/(r - g)$  peut être utilisée. En effet, le dividende continue de croître régulièrement de 2 % jusqu'à l'infini. Il faut cependant remarquer que l'estimation du dividende en  $t = 6$  est nécessaire pour évaluer le prix de l'action l'année précédente (en  $t = 5$ ).

Tableau 4.4

**Décomposition de la rentabilité d'Agatha Int'l**

	0	1	2	3	4	5	6
DPA		102,00	104,04	106,12	108,24	110,41	112,62
Prix	1 700,00	1 734,00	1 768,68	1 804,05	1 840,13	1 876,94	
Rentabilité		8 %	8 %	8 %	8 %	8 %	
Plus-value		2 %	2 %	2 %	2 %	2 %	
Rendement		6 %	6 %	6 %	6 %	6 %	

Le prix de l'action augmente régulièrement. Sa croissance est égale à celle du dividende ( $g$ ), c'est-à-dire 2 %. Le rendement est également constant puisque le prix et le dividende augmentent à la même vitesse.

## Exercice 4 Évaluer une action au taux de croissance du dividende variable

**Énoncé**

La société BLU projette de distribuer un dividende de 100 € dans un an. Jusqu'en  $t = 5$ , le dividende devrait croître de 15 % par an. Ensuite, la croissance devrait s'élever à 2 % par an. La rentabilité attendue des actions de cette société est estimée à 10 %.

- a** Que vaut une action BLU ?
- b** Quelle est l'importance des cinq premiers dividendes (de  $t = 1$  à  $t = 5$ ) dans la valeur de l'action ?

**Solution**

- a** Pour déterminer le prix actuel de l'action, il faut tout d'abord établir le montant des dividendes versés au cours des cinq prochaines années. Il est possible de calculer le prix en fin d'année 4 en appliquant la formule d'évaluation d'une action dont le dividende croît à un taux constant. Pour bien comprendre le choix de l'année 4, rappelez-vous que la formule donne le prix de l'action un an avant le versement du dividende dont la croissance débute un an plus tard. On obtient donc :

$$P_4 = \frac{100 \times (1,15)^4}{10\% - 2\%} = \frac{174,90}{8\%} = 2186,26 \text{ €.}$$

Ce montant correspond à la valeur terminale. La valeur en  $t = 0$  est obtenue par calcul « à reculons » (voir tableau 4.5).

Tableau 4.5

**Calcul du prix de BLU**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
DPA		100	$100 \times (1 + 15\%)$	$115 \times (1 + 15\%)$	$132,25 \times (1 + 15\%)$	$100 \times (1 + 15\%)^4 = 100 \times (1 + 15\%)^4$	$174,9 \times (1 + 2\%)$	$174,9 \times (1 + 2\%)^2$	...
DPA		100	115	132,25	152,09	174,90	178,40	181,97	...
Prix	1 882,4	1 970,7	2 052,74	2 125,77	2 186,26				

Le même résultat peut être obtenu directement en utilisant les formules d'annuités croissantes pour décrire les quatre premières années,  $g_1$  étant le premier taux de croissance (15 %), et de perpétuité pour les années suivantes avec  $g_2 = 2\%$  :

$$P_0 = \frac{DPA_1}{r - g_1} \left( 1 - \left( \frac{1 + g_1}{1 + r} \right)^4 \right) + \frac{\frac{DPA_1(1 + g_1)^4}{r - g_2}}{(1 + r)^4}$$

$$P_0 = 389,19 + 1\,493,24 = 1\,882,43 \text{ €}$$

- b** La valeur des cinq premiers dividendes donne leur poids dans la valeur totale de l'action. Elle correspond à la valeur actuelle des dividendes payés de  $t = 1$  à  $t = 5$  :  $100/1,1 + 115/1,1^2 + 132,25/1,1^3 + 152,08/1,1^4 + 174,9/1,1^5 = 497,79$  €. Ils représentent 26 % ( $= 497,79/1\,882,43$ ) du prix de l'action.

## Exercice 5 Estimer la sensibilité du prix aux taux d'actualisation et de croissance

### Énoncé

Les formules d'évaluation d'actions se fondent sur une projection à l'infini des dividendes. Une faible variation du taux d'actualisation ou du taux de croissance peut avoir des conséquences spectaculaires sur le prix.

Considérons une action qui versera l'année prochaine un dividende de 10 €. Supposons d'abord ce dividende constant et la rentabilité exigée par le marché de 10 %.

- a** Calculez le prix de l'action.  
**b** Calculez la variation de prix (exprimée en pourcentage du prix initial) si la rentabilité exigée augmente ou diminue de 1 % (elle devient 11 % ou 9 %).  
 Supposons maintenant que le taux de croissance  $g$  du dividende soit de 5 %.  
**c** Répondez aux questions **a** et **b** sous cette nouvelle hypothèse.

Tante Agathe veut évaluer deux actions qu'elle détient. Pour l'action A, elle sait que le prochain dividende sera payé dans un an. Il devrait s'élever à 10 € et la société devrait présenter une forte croissance dans le futur. Pour l'action B, le prochain dividende sera également payé dans un an et devrait aussi s'élever à 10 €. En revanche, la société devrait connaître une croissance plus faible. Malheureusement, tante Agathe ne possède qu'une approximation du taux de croissance des deux sociétés. Elle est prête à faire une étude approfondie pour déterminer au plus juste le taux de croissance attendu mais elle ne pourra le faire que pour l'un des deux titres.

- d** Quel titre doit-elle choisir sachant que les deux présentent un risque semblable ?

### Solution

- a** Le prix initial de l'action est  $P_0 = 10/10\% = 100$  €.

- b** Si le taux d'actualisation se modifie à la hausse (11 %) ou à la baisse (9 %), on obtient :

$$\begin{aligned} r = 11\% \quad P_0 &= 90,91 \text{ €} \quad \Delta P = -9,09\%; \\ r = 9\% \quad P_0 &= 111,11 \text{ €} \quad \Delta P = +11,11\%. \end{aligned}$$

On peut facilement montrer, en prenant la différentielle du prix, que :  $\frac{dP}{P} = -\frac{1}{r} dr$ . La variation du prix (en pourcentage) est d'autant plus grande que le taux d'actualisation est faible.

- c** Le prix initial de l'action est maintenant  $P_0 = 10/(10\% - 5\%) = 200 \text{ €}$ .

- d** Si le taux d'actualisation se modifie à la hausse (11 %) ou à la baisse (9 %), on obtient :

$$\begin{aligned} r = 11\% \quad P_0 &= 166,67 \text{ €} \quad \Delta P = -16,67\%; \\ r = 9\% \quad P_0 &= 250,00 \text{ €} \quad \Delta P = +25,00\%. \end{aligned}$$

Nous constatons qu'un taux de croissance positif a pour effet de rendre le prix de l'action beaucoup plus sensible aux variations de taux. Mathématiquement, on peut vérifier que :  $\frac{dP}{P} = -\frac{1}{r-g} dr$  et  $\frac{dP}{P} = \frac{1}{r-g} dg$ . Une hausse du taux a le même effet qu'une baisse du taux de croissance de même ampleur. L'action est d'autant plus sensible aux variations de  $r$  ou  $g$  que ces deux valeurs sont proches.

## Gordon-Shapiro

### Exercice 6 Analyser une introduction en Bourse

#### Énoncé

Tante Agathe vous demande votre avis sur Choc, une société qui sera prochainement introduite en Bourse. La société devrait verser un dividende de 10 € l'année prochaine. Cela représente 60 % du bénéfice par action. La banque d'affaires chargée de l'opération estime que, par la suite, le dividende devrait croître perpétuellement à un taux de 8 % par an.

- a** Quel est le prix de Choc aujourd'hui si la rentabilité attendue est de 12 % ?
- b** Calculez la rentabilité attendue de cette action pour l'année prochaine et l'année suivante. Décomposez-la en rendement et plus-value.
- c** Si Choc distribue 60 % de ses bénéfices à partir de l'année prochaine, quel doit être le RNI pour atteindre une croissance des dividendes de 8 %. Ce taux de croissance des dividendes est-il réaliste ?

#### Solution

- a** Les dividendes augmentent à un taux constant :  $P_0 = DPA_1 / (r - g) = 10 / (12\% - 8\%) = 250 \text{ €}$ .
- b** Le prix aux différentes périodes peut être déterminé directement via la formule utilisée à la question précédente. Pour ce faire, il est nécessaire de calculer le montant du dividende au cours de la période suivante. Par exemple, pour calculer le prix en  $t = 3$ , il faut

d'abord déterminer le dividende en  $t = 4$  :  $DPA_4 = DPA_1 \times (1 + g)^3 = 10 \times 1,08^3 = 12,6 \text{ €}$ . Le prix est de :  $P_3 = DPA_4 / (r - g) = 12,6 / (12\% - 8\%) = 314,93 \text{ €}$ . Il est également possible d'établir un tableau sur la base du calcul « à reculons » (voir tableau 4.6).

Tableau 4.6

**Calcul du prix de Choc et décomposition de la rentabilité**

	0	1	2	3	4
<i>Dividende</i>		10,00	10,80	11,66	12,60
<i>Prix</i>	250,00	270,00	291,60	314,93	
<i>Rentabilité</i>		12 %	12 %	12 %	
<i>Plus-value</i>		8 %	8 %	8 %	
<i>Rendement</i>		4 %	4 %	4 %	

- c** Comme  $g = RNI \times (1 - d)$ ,  $RNI = g / (1 - d) = 8\% / (1 - 60\%) = 20\%$ . L'hypothèse d'une croissance de 8 % des dividendes implique que la rentabilité des nouveaux investissements doit s'élever à 20 %. Ce taux, largement supérieur au taux d'actualisation (12 %), n'est pas réaliste car il suppose que l'entreprise a un avantage compétitif à l'infini.

## Exercice 7 Analyser la politique d'investissement d'une entreprise dans un marché concurrentiel à l'équilibre

**Énoncé**

La société Shopira versera l'année prochaine un dividende de 105 € qui correspond à 70 % du bénéfice par action de la société. Le solde de 30 % sera réinvesti. La rentabilité attendue sur le marché est de 10 %. Dans le futur, Shopira ne devrait pas développer un avantage compétitif et gardera sa politique de distribution et d'investissement inchangée.

- a** Quelle est la rentabilité que Shopira peut attendre de ses nouveaux investissements ?  
**b** Quel sera le taux de croissance de ses dividendes ?  
**c** Quel est le prix de l'action Shopira ?  
**d** Quel serait le prix de l'action si Shopira décidait d'investir une plus grande partie de son bénéfice (50 %) ?

**Solution**

- a** Si Shopira ne développe pas un avantage concurrentiel, la rentabilité de ses investissements sera égale à la rentabilité attendue sur le marché pour un même risque. Par conséquent, il est raisonnable d'estimer que  $RNI = r = 10\%$ .

Si la  $RNI$  était supérieur à  $r$ , Shopira investirait dans des projets dont la rentabilité serait supérieure à celle évaluée par le marché. Cette situation ne peut arriver que si la société a un avantage par rapport à ses concurrents. Remarquons qu'il est également possible d'avoir une  $RNI < r$  indiquant que la société a investi dans des projets qui ne rapportent pas autant que ce que le marché avait espéré pour le risque encouru.

- b** Le taux de croissance du dividende et du bénéfice est égal au taux de réinvestissement multiplié par le taux de rentabilité des investissements nouveaux :  $g = (1 - 70\%) \times 10\% = 3\%$ .

- c** Le prix de l'action est aisément calculé par la formule suivante (dividendes croissants) :  $P_0 = DPA_1 / (r - g) = 105 / (10\% - 3\%) = 1500 \text{ €}$ .
- d** Si le taux de distribution  $d$  passe à 50 %, la croissance des dividendes sera différente :  $g = 50\% \times 10\% = 5\%$ . De plus, le premier dividende s'élèvera à 50 % du bénéfice si, comme précédemment, il vaut :  $105 = 70\% \times BPA$ . On en déduit que  $BPA = 150 \text{ €}$  et que  $DPA : 50\% \times 150 = 75 \text{ €}$ .

Le prix de l'action est  $P_0 = 75 / (10\% - 5\%) = 1500 \text{ €}$ . Il est indépendant de la politique de dividende car la rentabilité des nouveaux investissements ( $RNI$ ) est égale à la rentabilité attendue des actions ( $r$ ). Par conséquent, pour les actionnaires, cela revient au même de laisser la société investir, qui obtient ainsi une rentabilité égale à la  $RNI$ , que de recevoir un dividende et de l'investir au même taux sur le marché ( $r$ ).

## Exercice 8 Mener une analyse de sensibilité du prix donné par la formule de Gordon-Shapiro

### Énoncé

La société European Virtual Company (EVCO) devrait payer des dividendes au cours des trois prochaines années (voir tableau 4.7).

Par la suite, les dividendes devraient croître à un taux constant de 5 % par an. EVCO devrait réinvestir 40 % de ses bénéfices à partir de  $T = 2$ . La rentabilité attendue pour ses actions s'élève à 15 %.

- a** Calculez le prix attendu à la fin  $T = 2$ .
- b** Si EVCO garde 40 % de ses bénéfices pour les réinvestir, quelle doit être la rentabilité des nouveaux investissements pour atteindre une croissance de 5 % des dividendes ?
- c** Quel est le prix de l'action aujourd'hui ?
- d** Si EVCO change sa politique de dividendes et décide de distribuer tous ces bénéfices comme dividendes à partir de  $T = 3$ . Quel serait l'impact sur le prix de l'action ?

Tableau 4.7

Dividendes par action de EVCO

Période	1	2	3
DPA	15 €	20 €	24 €

### Solution

- a** Le prix attendu à la fin  $T = 2$  est égal à  $DPA_3 / (r - g) = 24 / (15\% - 5\%) = 240 \text{ €}$ .
- b** La RNI est égale à  $g / (1 - d) = 5\% / 40\% = 12,5\%$ . En effet, si EVCO obtient une rentabilité de 12,5 % sur ses nouveaux investissements, son bénéfice devrait augmenter du même taux. Sachant que 40 % des bénéfices sont réinvestis, et toutes choses étant égales par ailleurs, le bénéfice d'EVCO devrait augmenter chaque année de  $40\% \times 12,5\% = 5\%$ . Puisque les dividendes sont proportionnels aux bénéfices à taux de distribution constant, ils devraient également croître à la même allure.
- c**  $P_0 = DPA_1 / (1 + r) + DPA_2 / (1 + r)^2 + P_2 / (1 + r)^2 = 15 / 1,15 + (20 + 240) / 1,15^2 = 209,64 \text{ €}$ .

- d** Les dividendes seront constants dans le futur puisqu'il n'y aura pas de nouveaux investissements. De plus, le dividende en  $t = 3$  vaut le bénéfice en  $t = 3$  :  $DPA_3 = BPA_3 = \text{ancien } DPA_3/d = 24/60\% = 40 \text{ €}$ . Donc, le prix en  $t = 2$  est calculé comme l'actualisation des dividendes futurs constants :  $P_2 = DPA_3/r = 40/15\% = 266,67 \text{ €}$ . Par conséquent, le prix aujourd'hui s'élève à :  $P_0 = 15/1,15 + (20 + 266,67)/1,15^2 = 229,80 \text{ €}$ .

Le prix de l'action est plus élevé si tout le bénéfice est distribué. En effet, la partie réinvestie des bénéfices ne procure qu'une rentabilité de 12,5 % inférieure à la rentabilité attendue (15 %). Par conséquent, les actionnaires d'EVCO ont intérêt à recevoir l'entièreté des bénéfices sous forme de dividendes. Ils pourront espérer une rentabilité de 15 % s'ils réinvestissent dans un projet de même risque ailleurs.

## Lien entre free cash flow et dividendes : le tableau de financement

### Exercice 9 Identifier les cash flows réalisés

#### Énoncé

Vous venez de recevoir le bilan (voir tableau 4.8) et le compte de résultats (voir tableau 4.9) pour l'exercice écoulé de Beloved Mirza Company (Bemirco), une société spécialisée dans les articles pour chiens de compagnie.

- a** Calculez le cash flow d'exploitation.
- b** Calculez le cash flow d'investissement.
- c** Calculez le free cash flow et interprétez le résultat obtenu.
- d** Bemirco a réalisé en 2001 une augmentation de capital. Pourquoi et quel en a été le montant ?
- e** Pourquoi les fonds propres de l'entreprise ont-ils augmenté ?
- f** Calculez le cash flow de financement.
- g** Contrôlez que la relation du tableau de financement est vérifiée.

Tableau 4.8

Bilan de  
Bemirco  
(milliers  
d'euros)

	ACTIF	Fin 2001	Fin 2000	Différence
Immobilisés nets	320	250	+70	
Besoin en fonds de roulement	140	100	+40	
Disponible	10	50	-40	
Total	470	400	+70	
PASSIF				
Fonds propres	470	400	+70	
Total				

Tableau 4.9

**Compte de résultats de Bemirco pour l'année 2001 (milliers d'euros)**

Chiffre d'affaires	500
Charges d'exploitation	350
Dotations aux amortissements	50
Résultat d'exploitation	100
Impôts	40
Bénéfice	60
Dividendes	50

### Solution

- a** Le cash flow d'exploitation de Bemirco pour l'année 2001 est égale à  $BEN + DAM - \Delta BFR = 60 + 50 - 40 = 70$  milliers €.
- b** Pour calculer le cash flow d'investissement, notons que la variation des immobilisés nets ( $\Delta IMN$ ) est égale à  $= 320 - 250 = 70$  milliers €. Cette variation résulte d'une part des investissements réalisés par l'entreprise ( $\Delta IMB$ ) et d'autre part des dotations aux amortissements :  $\Delta IMN = \Delta IMB - DAM$ .  
On obtient donc :  $\Delta IMB = \Delta IMN + DAM = 70 + 50 = 120$  milliers €. Le cash flow d'investissement est :  $CF_{inv} = -120$  milliers €
- c** Le free cash flow ( $FCF$ ) est la somme du cash flow d'exploitation et du cash flow d'investissement :  $70 + (-120) = -50$  milliers €. On obtient un free cash flow négatif. Le montant des investissements réalisés a été supérieur au cash flow d'exploitation. L'entreprise présente de ce fait un solde financier négatif.
- d** En outre, Bemirco a versé un dividende de 50 milliers €. Elle a donc dû trouver des ressources à concurrence de  $50 + 50 = 100$  milliers €. Une partie a été trouvée dans le disponible qui est passé de  $+50$  à  $+10$  soit une diminution de 40 milliers €. Le solde provient d'une augmentation de capital.
- e** L'accroissement des fonds propres de Bemirco est la somme des bénéfices non distribués et de l'augmentation de capital :

$$\Delta FP = BEN - DIV + \Delta K = 60 - 50 + 60 = 70 \text{ milliers €}$$

- f** Le cash flow de financement vaut :  $CF_{fin} = \Delta K - DIV = 60 - (-50) = +10$  milliers €.
- g** La relation du tableau de financement est vérifiée car la somme des trois cash flows est bien égale à la variation du disponible :  $CF_{exp} + CF_{inv} + CF_{fin} = (+70) + (-120) + (+10) = -40 = \Delta DISP$ .

## Exercice 10 Analyser l'impact d'un projet sur la politique de distribution et de financement

### Énoncé

La Société gazière (Sogaz) est une entreprise non endettée de transport du gaz. Les capitaux investis dans l'entreprise s'élèvent à 40 milliards d'euros et son capital est représenté par 100 000 000 actions. Le bénéfice attendu pour l'année prochaine s'élève

à 3 milliards d'euros. En l'absence d'investissements nouveaux (hormis les investissements de remplacement, égaux au montant des dotations annuelles aux amortissements), le bénéfice futur attendu restera à ce niveau.

L'entreprise a décidé de construire de nouveaux gazoducs qui devraient lui permettre de doubler son bénéfice en quelques années. Un plan financier montre l'évolution des bénéfices et le montant des nouveaux investissements à réaliser (voir tableau 4.10).

À partir de l'année 5, le bénéfice restera constant au niveau de celui de l'année 4, au-delà de laquelle aucun investissement nouveau n'est prévu. Sogaz n'a pas de besoins en fonds de roulement. Elle distribue traditionnellement la totalité de son bénéfice sous forme de dividendes. Mais le projet pourrait compromettre cette politique de distribution. La question doit être abordée lors de la prochaine réunion du conseil d'administration.

**Déterminez pour les quatre prochaines années :**

- a** les cash flows d'exploitation ;
- b** les cash flows d'investissement ;
- c** les free cash flows de l'entreprise.
- d** Que vaudront les dividendes payés par Sogaz si le projet est autofinancé ?
- e** Si Sogaz continue à distribuer la totalité du bénéfice, quel est le montant à trouver par augmentation de capital ?

Tableau 4.10

**Évolution des bénéfices et nouveaux investissements**

Situation de l'entreprise sans le projet (milliards d'euros)				
Année	1	2	3	4
Bénéfice	3	3	3	3
Dotations aux amortissements	1	1	1	1
Investissements de remplacement	1	1	1	1
Caractéristiques du projet				
Année	1	2	3	4
Accroissement de bénéfice	0	1	2	3
Accroissement des dotations aux amortissements		0,50	0,75	1
Montant des investissements (hors investissements de remplacement)	3	4	4	0
Situation de l'entreprise avec le projet				
Année	1	2	3	4
Bénéfice	3	4	5	6
Dotations aux amortissements	1	1,50	1,75	2
Investissements de remplacement	1	1,50	1,75	2
Nouveaux investissements	3	4	4	0

**Solution**

- a b et c** Le tableau 4.11 détaille l'évolution des cash flows d'exploitation, d'investissement et des free cash flows. En l'absence de besoin en fonds de roulement, le cash

flow d'exploitation est égal à la somme du bénéfice et des amortissements. Par ailleurs, les investissements réalisés par l'entreprise sont égaux à la somme des investissements d'expansion et des investissements de remplacement. Ces derniers sont, par hypothèse, égaux aux dotations aux amortissements. Enfin, le free cash flow est la somme du cash flow d'exploitation et du cash flow d'investissement.

Tableau 4.11

**Évolution du cash flow d'exploitation, du cash flow d'investissement et des free cash flows de Sogaz (milliards d'euros)**

Année	1	2	3	4
Bénéfice	3	4	5	6
+ Dotations aux amortissements	1	1,50	1,75	2
= Cash flow d'exploitation ( $CF_{exp}$ )	<b>4</b>	<b>5,50</b>	<b>6,75</b>	<b>8</b>
Investissement d'expansion	3	4	4	0
+ Investissements de remplacement	1	1,50	1,75	2
= Cash flow d'investissement $CF_{inv}$	<b>- 4</b>	<b>- 5,50</b>	<b>- 5,75</b>	<b>- 2</b>
$CF_{exp} + CF_{inv} = \text{Free cash flow}$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>6</b>

Il est intéressant de souligner les conséquences de l'hypothèse d'égalité entre les investissements de remplacement et les dotations aux amortissements. Il en résulte que le montant de ces dernières ne modifie pas le free cash flow qui peut être calculé directement en soustrayant du bénéfice le montant des nouveaux investissements.

**d**

Si le projet est autofinancé, le montant des dividendes sera égal au free cash flow (voir tableau 4.12). En effet, en l'absence d'augmentation de capital ( $\Delta K = 0$ ) et d'utilisation du disponible ( $\Delta DISP = 0$ ), l'équation du tableau de financement s'écrit :  $FCF = DIV$ .

Tableau 4.12

**Calcul du dividende de Sogaz en cas d'autofinance-ment (milliards d'euros)**

Année	1	2	3	4
Free cash flow	0	0	1	6
= Dividende	0	0	1	6

**e**

Si Sogaz décide de continuer à distribuer tout ou partie du bénéfice sous forme de dividendes, le montant des augmentations de capital à réaliser sera :  $\Delta K = DIV - FCF$ . Pour une politique de distribution de la totalité des bénéfices, on aurait donc les augmentations de capital détaillées tableau 4.13 :

Tableau 4.13

**Calcul des augmentations à réaliser par Sogaz en cas de distribution du bénéfice**

Année	1	2	3	4
Free cash flow	0	0	1	6
= Dividende	3	4	5	6
- Augmentation de capital	3	4	4	0

# Free cash flow model

## Exercice 11 Choisir une politique de dividende

### Énoncé

Le directeur financier de Sogaz (voir exercice 4.10) vous a chargé d'analyser différentes politiques de financement du projet d'expansion. Il a résumé les possibilités (voir tableau 4.14).

La rentabilité exigée par le marché est de 15 %. Le nombre d'actions en circulation est actuellement de 1 milliard.

- a** Calculez la valeur de l'entreprise si le plan A est adopté.
- b** Quelle sera la valeur de l'entreprise si le plan B est adopté ?
- c** Décomposez la valeur de l'entreprise à chaque date, en valeur des actions nouvellement émises et valeur des actions anciennes.
- d** Combien d'actions seront émises et à quel prix ?
- e** Calculez le dividende par action dans les deux politiques de financement.
- f** Vérifiez que la valeur de l'action en  $t = 0$  est égale à la valeur actuelle des dividendes par action dans les deux plans envisagés ?

Tableau 4.14

### Politiques de financement et projet d'expansion

Plan A : Autofinancement (milliards d'euros)				
Année	1	2	3	$4 - \infty$
Free cash flow	0	0	1	6
Dividende	0	0	1	6
Augmentation de capital	0	0	0	0

Plan B : Distribution des bénéfices et augmentation de capital (milliards d'euros)				
Année	1	2	3	$4 - \infty$
Free cash flow	0	0	1	6
Dividende	3	4	5	6
Augmentation de capital	3	4	4	0

### Solution

- a** Si le plan A est adopté, aucune augmentation de capital n'aura lieu. Le nombre d'actions restera constant et leur valeur sera égale à la valeur actuelle des dividendes. La technique de l'évaluation « à reculons » conduit aux résultats du tableau 4.15.
- b** Si le plan B est adopté, la valeur des actions est obtenue en actualisant non plus les dividendes mais les free cash flows, qui sont égaux aux dividendes du plan A. Nous retrouvons donc la même valeur (voir tableau 4.16).

Il est cependant important de souligner que la valeur des actions aux différentes dates représente la valeur de toutes les actions, y compris celles nouvellement émises. La différence essentielle entre ces deux situations est que le nombre d'actions change et

Tableau 4.15

**Calcul du prix de l'action dans le cas d'un autofinancement des projets**

Année	0	1	2	3	4 - ∞
Dividende		0	0	1	6
Valeur des actions (milliards d'euros)	26,96	31,00	35,65	40,00	
Cours par action	26,96	31,00	35,65	40,00	

Tableau 4.16

**Évaluation des actions par actualisation des free cash flows**

Année	0	1	2	3	4 - ∞
Free cash flow		0	0	1	6
Valeur des actions (milliards d'euros)	26,96	31,00	35,65	40,00	

que le dividende qui est distribué à partir de l'année 3 revient en partie aux actionnaires ayant souscrit aux augmentations de capital les années précédentes.

**c**

La valeur des actions anciennes est obtenue en soustrayant le montant de l'augmentation de capital de la valeur de l'entreprise :  $V_t - \Delta K_t$  (voir tableau 4.17).

Tableau 4.17

**Décomposition de la valeur de Sogaz en actions anciennes et nouvelles**

Année	0	1	2	3	4 - ∞
Valeur des actions (milliards d'euros)	26,96	31,00	35,65	40,00	
Valeur des actions nouvellement émises		3	4	4	0
Valeurs des actions anciennes		28,00	31,65	36,00	

**d**

Commençons par l'augmentation de capital de l'année 1. La valeur des actions anciennes en  $t = 1$  est égale à 28 milliards d'euros et le nombre d'actions  $n_0$  est de 1 milliard. En conséquence, le prix par action est :  $P_1 = 28,00/1 = 28,00$  €. Le montant de l'augmentation de capital est de 3 milliards d'euros et les actions nouvelles sont émises au prix du marché. Leur nombre sera alors :  $\Delta n_1 = \frac{3 \times 10^9}{28} = 107\,135\,624$ . Le nombre total d'actions en circulation à la fin de l'année 1 sera donc  $n_1 = 1\,107\,135\,624$ . Des calculs similaires pour les années 2 et 3 aboutissent aux résultats figurés dans le tableau 4.18.

**e**

Les dividendes par action sont calculés en divisant le montant total payé chaque année par le nombre total d'actions en circulation à la fin de l'année précédente (voir tableau 4.19).

En choisissant la politique d'autofinancement, les actionnaires acceptent un dividende moindre les trois premières années en contrepartie d'un dividende plus élevé à partir de la 4<sup>e</sup>.

Tableau 4.18

**Calcul de l'évolution du prix de l'action Sogaz et du nombre total d'actions**

Année	0	1	2	3	4 - ∞
Prix par action $P_t$	26,96	28,00	28,59	28,87	
Nombre d'actions nouvellement émises $\Delta K_t$		107 135 624	139 912 744	138 560 930	
Nombre total d'actions $n_t$	1 000 000 000	1 107 135 624	1 247 048 368	1 385 609 298	

Tableau 4.19

**Comparaison des dividendes par action de Sogaz selon l'hypothèse de financement**

Année	0	1	2	3	4 - ∞
Plan A : Autofinancement		0,00	0	1,00	6,00
Plan B : Augmentation de capital		3,00	3,61	4,01	4,33
Déférence A - B		-3,00	-3,61	-3,01	+1,67

**f**

Quel que soit le plan, la valeur de l'action est égale à la valeur actuelle des dividendes par action.

$$\text{Plan A : } P_0 = \frac{0,00}{1,15} + \frac{0,00}{(1,15)^2} + \frac{1,00}{(1,15)^3} + \frac{1}{(1,15)^3} \times \frac{6,00}{0,15} = 26,96 \text{ €}$$

$$\text{Plan B : } P_0 = \frac{3,00}{1,15} + \frac{3,61}{(1,15)^2} + \frac{4,01}{(1,15)^3} + \frac{1}{(1,15)^3} \times \frac{4,33}{0,15} = 26,96 \text{ €}$$

Les actionnaires devraient donc être indifférents. Une autre manière de voir les choses est de constater que la valeur actuelle nette de la différence entre les dividendes par action des deux plans est nulle :

$$VAN = \frac{-3,00}{1,15} + \frac{-3,61}{(1,15)^2} + \frac{-3,01}{(1,15)^3} + \frac{1}{(1,15)^3} \times \frac{1,67}{0,15} = 0$$

## Exercice 12 Analyser le financement d'un projet par augmentation de capital

### Énoncé

La société BelAir génère un bénéfice annuel de 100 millions € par an, entièrement distribué aux actionnaires. Les investissements de remplacement sont égaux aux dotations aux amortissements (50 millions € par an). Les fonds propres sont représentés par 100 millions d'actions. Le taux d'actualisation de la société est de 10 %. La société envisage la réalisation du projet caractérisé par les données suivantes (voir tableau 4.20).

Une partie des investissements du projet correspond à des investissements de remplacements et vaut les dotations aux amortissements liés à ce projet.

**a**

Calculez la valeur de l'entreprise et le prix de ses actions avant la prise en compte du projet.

- b** Calculez les free cash flows de la société en prenant en compte le projet. Calculez, aux différentes périodes, la valeur de l'entreprise et de ses actions si le projet est autofinancé.
- c** Calculez les dividendes futurs si BelAir fait une augmentation de capital pour financer tout le projet. Calculez, aux différentes périodes, la valeur de l'entreprise et de ses actions.

Tableau 4.20

**Plan d'investissement de BelAir (en millions d'euros)**

Année	1	2	3 - ...
Investissements	100	110	20
Δ Bénéfice net		50	100
Δ Amortissements		10	20

### Solution

- a** La valeur initiale de la société est :  $V_0 = A_0 = BEN_1 / r = 100 / 0,1 = 1000$  millions €. Le prix d'une action est donc :  $P_0 = A_0 / n_0 = 1000$  millions € / 100 millions = 10 €.
- b** Les *FCF* représentent la somme des *CF* d'exploitation et des *CF* d'investissements. Puisqu'une partie des investissements induits par le projet correspond à des investissements de remplacement égaux aux *DAM*, il faut retirer ces derniers pour calculer les investissements nouveaux. Par exemple, dans le cas de l'année 2, l'investissement est de 110 millions € mais 10 millions € correspondent au  $\Delta DAM$  provenant de l'investissement de l'année 1. Par conséquent, l'investissement nouveau est de  $110 - 10 = 100$  millions € et l'investissement de remplacement de  $10 + 50 = 60$  millions € ( $= \Delta DAM + DAM$  actuelle). Le calcul des free cash flows si l'entreprise réalise le projet est repris dans le tableau 4.21.

Tableau 4.21

**Calcul des free cash flows de BelAir (en millions d'euros)**

Année	0	1	2	3 - ...
Bénéfice net		100	150	200
DAM		50	60	70
$CF_{expl}$		150	210	270
INV remplacement		50	60	70
INV nouveaux		100	100	0
$CF_{inv}$		-150	-160	-70
$FCF$		0	50	200

L'actualisation des free cash flows donne la valeur de l'entreprise et permet de calculer le prix d'une action.

$$A_0 = 0 / 1,1 + 50 / 1,1^2 + (200 / 0,1) / 1,1^2 = 1694,21 \text{ millions d'€}$$

Si le projet est autofinancé, le nombre d'actions reste constant, et la valeur de BelAir aux différentes périodes sera la suivante (voir tableau 4.22).

Les dividendes sont égaux aux *FCF*. De plus, il n'y a pas d'augmentation de capital. La valeur de l'entreprise est identique à celle calculée à la question précédente.

Tableau 4.22

**Valeur de BelAir en cas d'autofinancement**

Année	0	1	2	3 - ...
$A$ (en millions d' €)	1 694,21	1 863,64	2 000	2 000
$P$ (en €)	16,94	18,64	20	20

- c** Si tous les investissements sont financés par augmentation de capital, le dividende distribué évoluera comme dans le tableau 4.23.

Tableau 4.23

**Calcul de la valeur des actions de BelAir en cas d'augmentation de capital**

Année	0	1	2	3 - ...
Bénéfice net		100	150	200
INV nouveaux		100	100	0
$DIV$		100	150	200
Augmentation de capital		100	100	0
Valeur des actions	1 694,21	1 863,64	2 000	2 000
Nombre d'actions (millions)	100	105,67	111,23	111,23
Prix par action (€)	16,94	17,64	17,98	17,98

## Valeur actuelle des opportunités de croissance

### Exercice 13 Interpréter le *Price Earnings Ratio*

#### Énoncé

Alufrance, un groupe industriel français, a décidé de revendre sa division Plastique de manière à se recentrer sur ses métiers de base. Le bénéfice anticipé de la division pour l'année prochaine est de 210 millions €. M. Ratio, analyste financier, se demande à quel prix cette division sera vendue. Il constate que :

- Les actions d'autres sociétés cotées du secteur ont actuellement un *PER* de 14. Ces sociétés distribuent 40 % de leur bénéfice en dividendes, et elles ne sont pas endettées.
- La rentabilité attendue des actions du secteur plastique est égale à 12,2 %.

M. Ratio a noté les questions suivantes :

- a** Quelle serait la valeur de la division Plastique d'Alufrance si cette dernière distribuait 40 % de son bénéfice tout en n'ayant aucun avantage concurrentiel lui permettant de réaliser des investissements à VAN positive ?
- b** À quel *PER* aurait lieu la transaction ? Comment expliquez-vous la différence avec celui observé sur le marché ?
- c** Si 40 % du bénéfice est distribué, quelle devrait être la rentabilité des capitaux réinvestis par la division Plastique pour que la vente se fasse au *Price Earnings Ratio* du marché ?

**Solution**

- a** Si la division Plastique d'Alufrance n'a aucun avantage concurrentiel, la valeur de l'entreprise est égale à la valeur en l'absence de croissance :

$$V_0 = Ben/r = 210/0,122 = 1\,721 \text{ millions } €$$

Le même résultat peut être obtenu sachant que, en l'absence d'avantage concurrentiel, le *RNI* est égal au coût du capital soit 12,2 %. Le taux de croissance anticipé du dividende est  $g = 12,2\%(1 - 40\%) = 7,32\%$ . En conséquence, la valeur de l'entreprise, en appliquant le *DDM*, est :  $V_0 = DIV_1/(r - g) = BEN_1 \times d/(r - g) = 210 \times 0,40/(12,2\% - 7,32\%) = 1\,721 \text{ millions } €$ .

- b** En l'absence d'avantage concurrentiel, la revente de la division Plastique d'Alufrance aurait lieu à un *PER* de  $210/1721 = 8,2$ , donc inférieur à celui du marché.
- c** Le *PER* du marché vaut 14. Sur cette base, la division Plastique serait évaluée à :  $V_0 = PER \times BEN = 14 \times 210 = 2\,940 \text{ millions } €$ . Nous pouvons calculer, sur la base du *DDM*, le taux de croissance qui justifierait ce prix :  $2\,940 = (210 \times 0,40)/(12,2\% - g)$  et donc :  $g = 9,34\%$ . Comme  $g = RNI \times (1 - d)$ , nous pouvons en déduire la rentabilité sur les nouveaux investissements qui justifierait cette valeur :  $RNI = 9,34\%/(1 - 0,40) = 15,57\%$ .

## Exercice 14 Calculer la valeur actuelle de la croissance

**Énoncé**

La société Séraphin Int'l (SI) possède des actifs générant un bénéfice annuel de 60 millions €. Ce bénéfice devrait rester constant si les investissements de la société se limitent aux investissements de remplacement (que nous supposerons égaux au montant des dotations aux amortissements). La société a identifié trois nouveaux projets à réaliser au cours des trois prochaines années (de  $t = 1$  à  $t = 3$ ). Chacun d'eux entraînera un accroissement permanent du bénéfice. Les cash flows (en millions d'euros) relatifs à ces projets sont résumés dans le tableau 4.24.

La société distribue l'entièreté de son bénéfice. Le taux d'actualisation pour ce type d'action est de 10 %.

- a** Calculez la valeur de SI sans investissements nouveaux (uniquement avec les investissements de remplacement).
- b** Calculez la valeur de SI avec les investissements en faisant l'hypothèse que la société veut autofinancer ses investissements (pas d'augmentation de capital, pas de dettes).
- c** Que vaut la valeur actuelle de la croissance ?

Tableau 4.24

**Projets de développement de Séraphin Int'l**

Année	1	2	3	4	5 - ...
Projet 1	-20	+4	+4	+4	+4
Projet 2		-20	+3	+3	+3
Projet 3			-20	+2	+2

## Solution

- a** Séraphin Int'l, en l'absence d'investissement, est une société en situation stationnaire. Par conséquent :  $A_0 = BEN_1 / r = 60 / 0,1 = 600 \text{ €}$ .
- b** Commençons par calculer le free cash flow de l'entreprise si les projets sont autofinancés (voir tableau 4.25).

Tableau 4.25

**Calcul des free cash flows et de la valeur de Séraphin Int'l**

Année	0	1	2	3	4	5 – ...
BEN		60	60	60	60	60
INV		-20	-20	-20		
$\Delta BEN_1$			4	4	4	4
$\Delta BEN_2$				3	3	3
$\Delta BEN_3$					2	2
$FCF = DIV$		40	44	47	69	69
Valeur A	626,45	649,09	670,00	690,00		

Les dividendes varient les trois premières années, puis restent à un niveau constant. Les actions valent :  $40/1,1 + 44/1,1^2 + 47/1,1^3 + (69/0,1)/1,1^3 = 626,45 \text{ millions } \text{€}$ .

- c** La valeur actuelle de la croissance correspond à la partie de la valeur totale de la société qui provient des investissements nouveaux entrepris. Cela correspond à la différence entre la valeur de l'entreprise si celle-ci réalise les investissements et sa valeur si elle ne les réalise pas :  $VAOC = 626,45 - 600 = 26,45 \text{ millions } \text{€}$ . Cette valeur correspond à la somme des valeurs actuelles des VAN des projets d'investissements (voir tableau 4.26).

Tableau 4.26

**Calcul de la valeur actuelle des opportunités de croissance de Séraphin Int'l**

Projet	$VAN_t$	$VA(VAN_t)$
Projet 1	$VAN_1 = -20 + 4/0,10 = +20$	$VA(VAN_1) = 20/1,10 = 18,18 \text{ millions } \text{€}$
Projet 2	$VAN_2 = -20 + 3/0,10 = +10$	$VA(VAN_2) = 10/1,10^2 = 8,26 \text{ millions } \text{€}$
Projet 3	$VAN_3 = -20 + 2/0,10 = +00$	$VA(VAN_3) = 0/1,10 = 0 \text{ million } \text{€}$
Total		$VA(VAN_1) + VA(VAN_2) + VA(VAN_3) = 26,45 \text{ millions } \text{€}$

## Exercice 15 Analyser la sensibilité du modèle de Gordon-Shapiro aux hypothèses sur la durée de l'avantage concurrentiel

### Énoncé

Vous êtes chargé de préparer une analyse financière pour la Banque Ducoin concernant la Fabrique lyonnaise d'ordinateurs performants (FLOP). La société a pris une avance importante sur ses concurrents en produisant des ordinateurs souples basés sur les derniers développements en matière de nanotechnologie. Le bénéfice attendu l'année prochaine s'élève à 10 € par action. La société n'a pas de dettes, distribue 40 % de son bénéfice sous forme de dividendes et ne prévoit pas de modifier ce taux de distribution. Elle n'a, par ailleurs, aucune intention de réaliser des augmentations de capital et fonde

son développement sur l'autofinancement. La rentabilité exigée par le marché pour ces actions est de 10 %.

La banque Ducoin établit habituellement ses analyses sur le modèle de Gordon-Shapiro. Vous estimatez que les nouveaux investissements réalisés par l'entreprise dégageront une rentabilité de 14 %.

Supposons d'abord que FLOP ait la capacité de maintenir son avantage concurrentiel de manière permanente et réinvestisse dans des nouveaux projets ayant une rentabilité constante à 14 %.

**a** Calculez la valeur de l'action ? Quelle est la part de cette valeur attribuable à l'avantage concurrentiel de FLOP ?

**b** Comparez les *PER* de FLOP avec et sans avantage concurrentiel. L'avantage concurrentiel rend-il l'action plus chère ?

Vous êtes quelque peu sceptique sur la capacité de FLOP à préserver son avantage concurrentiel indéfiniment et décidez donc de mener une analyse de sensibilité pour mesurer l'impact de sa durée sur la valeur de l'action. Supposons que la durée de la croissance soit de dix ans, c'est-à-dire que FLOP soit capable, durant cette période, d'investir dans des projets ayant une *RNI* de 14 %.

**c** Calculez la valeur de l'action sous cette nouvelle hypothèse. Comment expliquez-vous la différence avec le résultat obtenu précédemment ?

**d** Réalisez une analyse de sensibilité pour montrer la relation entre la valeur de la croissance et la durée de l'avantage concurrentiel.

Intrigué par les résultats que vous avez obtenus (et avide de tirer parti à la fois de vos connaissances financières et de la puissance d'Excel), vous voulez mesurer la valeur actuelle des opportunités de croissance à partir d'hypothèses plus réalistes concernant l'évolution de la rentabilité des nouveaux investissements. Vous venez de lire un article (E. Fama et K. French, « Forecasting profitability and earnings », *Journal of Business*, 73 [2000] 161–175) montrant que la rentabilité sur les nouveaux investissements tend à revenir vers une valeur moyenne. Vous imaginez donc de représenter l'évolution du *RNI* de FLOP par l'équation :

$$RNI_t = RNI_{t-1} + a(r - RNI_{t-1}).$$

Cette expression indique que la variation de *RNI* ( $\Delta RNI_t = RNI_t - RNI_{t-1}$ ) est proportionnelle à l'écart entre le coût du capital et la rentabilité des nouveaux investissements. Le coefficient *a* mesure la force de rappel vers la valeur attendue à long terme (Fama et French trouvent une valeur *a* = 0,40).

**e** Construisez un modèle dans une feuille de calcul qui permette de calculer la valeur actuelle des investissements futurs de FLOP pendant les cinquante prochaines années si le *RNI* de la première année est de 14 % et si la force de rappel *a* = 0,40.

## Solution

**a** Étant donné le taux de distribution (*d* = 40 %), une rentabilité de 14 % sur les nouveaux investissements devrait conduire à un taux de croissance des bénéfices et des dividendes de :  $g = 14\% \times (1 - 40\%) = 8,4\%$ . Si ce taux de croissance est constant à

perpétuité, l'action FLOP vaut :  $P = \frac{10 \times 0,40}{10\% - 8,40\%} = 250 \text{ €}$ . En l'absence d'avantage concurrentiel, la rentabilité des nouveaux investissements serait égale à celle exigée par le marché. Le taux de croissance du dividende serait :  $g = 10\% \times (1 - 40\%) = 6\%$ . Le prix de l'action serait alors :  $P = \frac{10 \times 0,40}{10\% - 6\%} = 100 \text{ €}$ .

Notons que cette valeur est identique à celle qu'aurait FLOP si la totalité des bénéfices était distribuée.

Le prix de l'action (250 €) se décompose ainsi :

- valeur de l'action sans croissance : 100 € (40 % de la valeur totale) ;
- valeur actuelle de la croissance : 150 € (60 % de la valeur totale).

**b** Le *PER* de FLOP selon l'hypothèse faite en matière de croissance est :

- sans avantage concurrentiel :  $100/10 = 10$  ;
- avec avantage concurrentiel :  $250/10 = 25$ .

Un *PER* plus élevé lorsqu'il existe un avantage concurrentiel signifie simplement que l'acheteur d'une action FLOP paie non seulement le niveau de bénéfice actuel de l'entreprise mais également la valeur actuelle des VAN futures. Il est important de souligner que la rentabilité attendue de l'action est identique dans les deux cas.

**c** Si FLOP est à même de réinvestir les bénéfices non distribués des dix prochaines années dans des projets ayant un *RNI* de 14 %, la société connaîtra un taux de croissance de 8,40 % pendant dix ans. Le bénéfice par action de la 11<sup>e</sup> année sera donc égal à  $BPA_{11} = BPA_1(1+g)^{10} = 10 \times 1,084^{11} = 22,40 \text{ €}$ . L'avantage concurrentiel ayant disparu par la suite, le taux de croissance sera de 6 % ensuite (voir tableau 4.27).

**Tableau 4.27**

**Évolution du bénéfice par action et du dividende par action de la société FLOP**

Année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<i>BPA</i>	10,00	10,84	11,75	12,74	13,81	14,97	16,22	17,59	19,06	20,67	22,40
<i>DPA</i>	4,00	4,34	4,70	5,10	5,52	5,99	6,49	7,04	7,63	8,27	8,96
<i>g</i>	8,4 %	8,4 %	8,4 %	8,4 %	8,4 %	8,4 %	8,4 %	8,4 %	8,4 %	8,4 %	6,0 %

La valeur de l'action FLOP serait dans ce cas :

$$P = \frac{4}{(10\% - 8,4\%)} \left[ 1 - \frac{(1,084)^{10}}{(1,10)^{10}} \right] + \frac{8,96}{(10\% - 6\%)} \times \frac{1}{(1,10)^{10}} = 120,44 \text{ €}$$

Le premier terme de cette expression représente la valeur des dividendes des dix premières années (une annuité croissante), le second est la valeur actuelle de la valeur terminale. Nous pouvons aboutir au même résultat en calculant la somme de la valeur de l'action sans croissance et de la valeur actuelle de la croissance :

$$\begin{aligned} P &= \frac{BPA_1}{r} + \frac{BPA_1(RNI - r)}{r(r-g)} \left[ 1 - \frac{(1+g)^T}{(1+r)^T} \right] \\ &= \frac{10}{0,10} + \frac{10 \times (14\% - 10\%) \times (1 - 0,40)}{0,10 \times (0,10 - 0,084)} \left[ 1 - \frac{(1,084)^{10}}{(1,10)^{10}} \right] \\ &= 100 + 20,44 = 120,44 \text{ €} \end{aligned}$$

Nous constatons que l'hypothèse sur la durée de l'avantage concurrentiel a un impact important sur la valeur actuelle de la croissance, qui passe de 150 € à 20,44 € !

- d** En introduisant les formules dans une feuille de calcul Excel, vous obtiendrez les résultats du tableau 4.28.

Tableau 4.28

**Relation entre la durée de l'avantage concurrentiel et la valeur actuelle des opportunités de croissance**

Durée de l'avantage concurrentiel (années)	Prix par action en l'absence de croissance	Valeur actuelle des opportunités de croissance par action	Valeur par action	PER
1	100	2,18	102,18	10,22
2	100	4,33	104,33	10,43
3	100	6,45	106,45	10,65
4	100	8,54	108,54	10,85
5	100	10,60	110,60	11,06
6	100	12,62	112,62	11,26
7	100	14,62	114,62	11,46
8	100	16,59	116,59	11,66
9	100	18,53	118,53	11,85
10	100	20,44	120,44	12,04
11	100	22,33	122,33	12,23
12	100	24,19	124,19	12,42
13	100	26,02	126,02	12,60
14	100	27,82	127,82	12,78
15	100	29,60	129,60	12,96
16	100	31,35	131,35	13,13
17	100	33,07	133,07	13,31
18	100	34,77	134,77	13,48
19	100	36,45	136,45	13,65
20	100	38,10	138,10	13,81

- e** Votre modèle s'appuiera sur les relations suivantes :
- l'hypothèse faite concernant l'évolution du RNI au fil du temps :  $RNI_t = RNI_{t-1} + a(r - RNI_{t-1})$  ;
  - l'évolution du bénéfice chaque année :  $BEN_t = BEN_{t-1} + RNI_{t-1} \times INV_{t-1}$  ;
  - le montant des investissements réalisés chaque année :  $INV_t = BEN_t \times (1 - d)$  ;
  - la valeur actuelle des investissements réalisés :  $VAN_t = INV_t \times (RNI_t - r) / r$ .

Le tableau 4.29 illustre le résultat pour les dix premières années. La VAOC s'obtient en additionnant les valeurs actuelles des valeurs actuelles nettes ainsi calculées. On obtient 5,28 €. L'écart avec la valeur de 150 € trouvée en appliquant naïvement le modèle de Gordon-Shapiro est substantiel !

Tableau 4.29

**Modèle de calcul de la VAOC lorsque la rentabilité des nouveaux investissements suit un processus de retour à la moyenne**

Année	RNI	BPA	INV	VAN	VA(VAN)
1	14,00 %	10,00 €	6,00 €	2,40 €	2,18 €
2	12,40 %	10,84 €	6,50 €	1,56 €	1,29 €
3	11,44 %	11,65 €	6,99 €	1,01 €	0,76 €
4	10,86 %	12,45 €	7,47 €	0,65 €	0,44 €
5	10,52 %	13,26 €	7,95 €	0,41 €	0,26 €
6	10,31 %	14,09 €	8,46 €	0,26 €	0,15 €
7	10,19 %	14,97 €	8,98 €	0,17 €	0,09 €
8	10,11 %	15,88 €	9,53 €	0,11 €	0,05 €
9	10,07 %	16,84 €	10,11 €	0,07 €	0,03 €
10	10,04 %	17,86 €	10,72 €	0,04 €	0,02 €

# Valorisation de la dette sans risque et structure des taux d'intérêt

1. Évaluation d'obligation . . . . .	143
2. Rendement à l'échéance . . . . .	145
3. Risque de taux . . . . .	145
4. Structure à terme des taux d'intérêt . . . . .	148

## Problèmes et exercices

Évaluation d'obligation et rendement à l'échéance . . . . .	152
Risque de taux . . . . .	155
Structure à terme des taux d'intérêt . . . . .	158

**Nous venons d'étudier la valorisation des entreprises financées uniquement par fonds propres. La dette est un mode de financement alternatif : son impact sur la valorisation des entreprises est analysé dans le chapitre précédent ; nous allons ici nous intéresser à la valorisation des obligations.**

Il s'agit d'un produit financier émis par une entreprise (ou par l'État) auprès des marchés financiers. Plusieurs facteurs influencent sa valeur : les taux d'intérêt, le risque de faillite de l'emprunteur et les clauses optionnelles attachées au produit.

Dans ce chapitre-ci, la valorisation des obligations d'État classiques est d'abord présentée et une mesure du risque de taux (la duration) est étudiée. Le jonglage avec la structure à terme des taux d'intérêt et l'expression des taux à terme liés à cette structure sont examinés. Le présent chapitre reste dans un contexte hors risque de défaut. Le chapitre 7 abordera cette composante supplémentaire à part entière.

## 1 Évaluation d'obligation

Une obligation classique donne lieu au paiement périodique d'intérêts, appelés coupons, et au remboursement du principal à l'échéance. Les coupons sont payés une fois par an en Europe, deux fois par an aux États-Unis. Le coupon annuel est calculé en multipliant la valeur nominale (ou faciale, ou encore face value) par le taux de l'obligation.

Les prix cotés des obligations sont exprimés sur la base d'une valeur nominale égale à 100 et après déduction du prorata d'intérêts depuis le dernier paiement de coupon. Ces prix sont qualifiés de « clean prices ». Le prix d'achat (ou de vente) est obtenu en rajoutant au prix coté (clean price) les intérêts courus (depuis le dernier coupon versé) pour obtenir un prix cash ou dirty.

Considérons une obligation venant à échéance dans exactement  $n$  années. Les flux de trésorerie qui lui sont associés sont les  $n$  coupons  $C$  payables dans  $1, 2, \dots, n$  années

et la valeur faciale  $F$  payable à l'échéance. La valeur de marché  $P$  de cette obligation est obtenue en actualisant chacun des flux de trésorerie, c'est-à-dire en multipliant chacun d'eux par le facteur d'actualisation ( $v_t$ ) correspondant à son échéance.

$$P = C \times v_1 + C \times v_2 + \cdots + (C + F) \times v_n$$

ou encore :

$$P = \frac{C}{1 + r_1} + \frac{C}{(1 + r_2)^2} + \cdots + \frac{C + F}{(1 + r_n)^n}$$

où  $r_t$  est le taux d'intérêt comptant pour l'échéance  $t$ .

Remarquons qu'une obligation peut être décomposée en :

- une annuité (les  $n$  coupons) et un zéro-coupon (la valeur faciale) ;
- $n$  zéro-coupons (un par échéance) ;
- $n + 1$  zéro-coupons (les  $n$  coupons et le principal) – c'est cette décomposition qui est à la base du développement du marché des strips.

En regroupant différemment les termes entre eux, on a effectivement :

$$P = \sum_{t=1}^n v_t C + v_n F = C \sum_{t=1}^n v_t + v_n F$$

Quand l'obligation est considérée comme un portefeuille de  $n$  zéro-coupons, la fraction du portefeuille investie dans le zéro-coupon d'échéance  $t$  est mesurée par le rapport entre la valeur actuelle du flux monétaire en  $t$  et le prix de l'obligation :  $(v_t C) / P$ . En faisant l'hypothèse d'une structure des taux plate (c'est-à-dire qu'il y a un seul taux d'intérêt quelle que soit l'échéance), il est possible de réécrire le prix d'une obligation en utilisant le facteur d'annuité ( $FA_{n,r\%}$ ) :  $P = C FA_{n,r\%} + v_n F$ . Cette formulation met en évidence la relation inverse entre le prix d'une obligation et le taux d'intérêt : plus le taux d'intérêt est bas, plus le portefeuille obligataire aura une valeur actuelle importante.

## Démonstration

### Raccourcis actuariels

De manière générale, le taux d'intérêt varie en fonction de l'échéance. Dans ce cas, le facteur d'actualisation de la période  $t$  est  $v_t = \frac{1}{(1 + r_t)^t}$  et le facteur d'annuité correspond à  $FA_{n,r\%} = \sum_{t=1}^n v_t$

Si la structure des taux est plate ( $r_t = r$  pour tout  $t$ ), un seul taux ( $r$ ) permet d'actualiser pour toutes les périodes. La formule précédente se simplifie :  $v_t = v^t = \frac{1}{(1 + r)^t}$  où  $v = \frac{1}{1 + r}$

De plus, le facteur d'annuité se simplifie également :

$$FA_{n,r\%} = \sum_{t=1}^n v_t = \sum_{t=1}^n v^t = \frac{1}{r} (1 - v^t)$$

## 2 Rendement à l'échéance

Le rendement à échéance de l'obligation,  $y$ , (ou taux de rendement actuel, yield to maturity) est le taux d'actualisation qui réalise l'égalité entre le prix de marché de l'obligation et la valeur actuelle des flux de trésorerie. Il peut s'interpréter comme le taux de rentabilité interne ( $TRI$ ) associé à l'achat d'une obligation au prix du marché. Remarquons qu'il est une manière indirecte d'exprimer le prix de marché d'une obligation.

$$y = r_t, \quad t = 1 \dots n \rightarrow P = \sum_{t=1}^n v^t C + v^n F, \quad v = \frac{1}{1+y}$$

Le calcul du rendement à échéance n'est pas évident sauf pour les obligations de type zéro-coupon. Le mieux est d'utiliser la fonction Excel IRR().

On dit qu'une obligation cote au pair si son prix est égal à sa valeur faciale ( $P = F$ ). Si la structure par termes des taux est plate, l'obligation cote au pair si et seulement si le taux de coupon [ $c = C/F$ ] est égal au taux d'intérêt. Pour une structure par termes des taux quelconque, l'obligation cote au pair si et seulement si le taux de coupon est égal au taux de rendement actuel  $y$ . L'obligation cote au-dessus (au-dessous) du pair si le taux de coupon est supérieur (inférieur) au taux de rendement actuel.

En termes de risque, un placement obligataire peut être examiné sous deux angles différents :

- 1. Le risque de prix.** Le prix d'une obligation est inversement relié au taux d'intérêt. Donc, plus la structure des taux est basse, plus l'obligation aura une valeur actuelle importante.
- 2. Le risque de réinvestissements des coupons.** En tant que placement dont on calcule un rendement à l'échéance (dans le sens le plus strict), une obligation classique procure des coupons qui seront forcément réinvestis mais à un taux inconnu *ex ante*. Et ce n'est que si ce taux de réinvestissement des coupons équivaut au rendement à l'échéance estimé *ex ante* que nous aurons un rendement équivalent *in fine*.

## 3 Risque de taux

### 3.1 Duration

Il existe une relation inverse entre la valeur d'une obligation et le niveau des taux d'intérêt. Une hausse des taux d'intérêt provoque une baisse du prix d'une obligation et inversement. La sensibilité d'une obligation (la variation relative du prix,  $\Delta P/P$ ) à une variation donnée  $\Delta r$  de l'ensemble des taux d'intérêt (c'est-à-dire à un déplacement de la courbe des taux parallèlement à elle-même) est fournie par sa duration.

Supposons, pour simplifier la présentation, que la structure par termes des taux soit plate. Considérons d'abord un zéro-coupon. Son prix est :

$$P = \frac{F}{(1+r)^t}$$

En différentiant par rapport à  $r$ , on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = - \left[ \frac{t}{(1+r)} \right] P$$

La variation relative du prix est ainsi proportionnelle à l'échéance :  $\frac{\partial P}{P} = - \left[ \frac{t}{(1+r)} \right] \partial r$ .  $t$  est ici appelé la « duration (de Macaulay) » de l'obligation et  $\left[ \frac{t}{(1+r)} \right]$  la « duration modifiée ». En effet, il ne reste plus qu'à la multiplier par la variation de taux examinée pour trouver le nouveau prix de l'obligation. Donc, pour une obligation zéro-coupon, la duration équivaut également à la maturité de celle-ci.

Dans le cas d'une obligation classique (portant des coupons), la dérivée ne peut pas être aussi simple. Une manière intuitive et élégante de l'obtenir est de se rendre compte qu'elle est caractérisée par des flux de trésorerie  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , et qu'elle peut être considérée comme un portefeuille de zéro-coupons de différentes maturités :

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n \quad \text{avec } P_t = \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \partial P &= \partial P_1 + \partial P_2 + \dots + \partial P_n \\ &= -\frac{1}{(1+r)} P_1 \partial r - \frac{2}{(1+r)} P_2 \partial r - \dots - \frac{n}{(1+r)} P_n \partial r \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{\partial P}{P} = -\frac{1 \times \frac{P_1}{P} + 2 \times \frac{P_2}{P} + \dots + n \times \frac{P_n}{P}}{(1+r)} \partial r$$

La duration d'une obligation est la moyenne des échéances des zéro-coupons constitutifs de l'obligation pondérée par leurs poids.

$$\text{duration} = x_1 \times 1 + x_2 \times 2 + \dots + x_t \times t + \dots + x_n \times n,$$

où  $x_t$  est le rapport entre la valeur actuelle du flux de trésorerie de l'année  $t$  et le prix de l'obligation  $x_t = \frac{P_t}{P}$

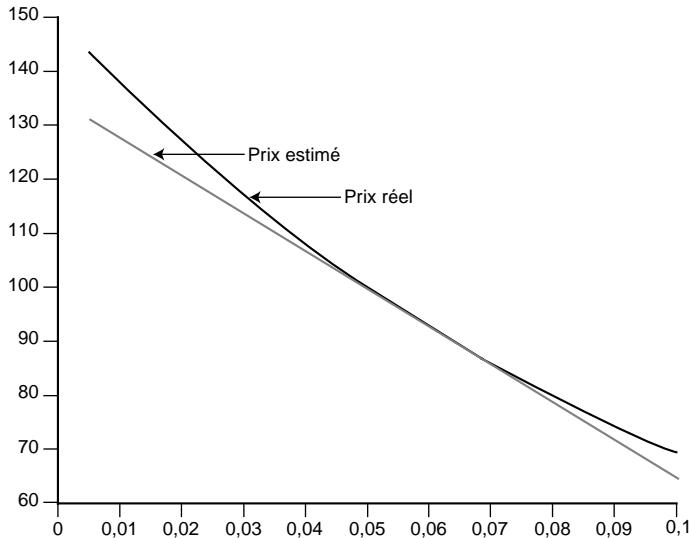
Nous retrouvons la formule développée dans le cas des zéro-coupons :

$$\frac{\partial P}{P} = -\frac{\text{duration}}{(1+r)} \partial r$$

Celle-ci permet de calculer, par approximation linéaire, la variation de prix d'une obligation lorsque le taux varie. La figure 5.1 , présente le prix d'une obligation (prix réel) pour différentes valeurs du taux d'intérêt en supposant une structure plate des taux. Ce prix est comparé à la droite de prix obtenue en utilisant l'approximation venant de la duration (prix estimé).

Figure 5.1

**Prix réel et estimé d'une obligation d'échéance dix ans, de coupon 5 à un taux de 6 %.**



## 3.2 Convexité

Il existe d'ailleurs une sensibilité de second ordre (dérivée seconde) appelée couramment « convexité » qui permet de corriger ces estimations. La figure 5.1 montre que la duration ne tient pas compte de la convexité de la fonction du prix de l'obligation par rapport aux taux d'intérêt. Dans la pratique, cependant, on se borne souvent à l'utilisation d'une seule sensibilité, celle de premier ordre. En prenant les deux premiers termes d'une expansion de Taylor, nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta P &\approx \frac{\partial P}{\partial r} \Delta r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} (\Delta r)^2 \\ &\approx -\frac{\text{duration}}{(1+r)} P(\Delta r) + \frac{1}{2} \text{convexité} (\Delta r)^2\end{aligned}$$

La convexité pour un zéro-coupon est :  $\text{convexité}_{\text{zero-coupon}} = convz_n = \frac{n(n+1)}{(1+r)^2}$

La convexité d'une obligation portant coupon est dès lors donnée par :

$$\text{convexité} = x_1 \times convz_1 + x_2 \times convz_2 + \dots + x_t \times convz_t + \dots + x_n \times convz_n$$

Il faut cependant remarquer que le calcul et l'utilisation de la duration reposent sur deux hypothèses : une structure plate des taux d'intérêt et des déplacements parallèles de celle-ci. Néanmoins, puisqu'il est possible de définir la duration en fonction des prix des zéro-coupons constitutifs de l'obligation ( $P_t$ ), rien n'empêche d'utiliser la structure réelle (et donc non plate) des taux d'intérêt, un taux différent pouvant être utilisé pour chaque prix  $P_t$ . Cela contrevient bien sûr à l'idée que la dérivée ne peut être calculée que par rapport à une seule variable à la fois, d'où le fait que l'on définisse la duration plutôt par rapport au rendement à l'échéance  $y$  de l'obligation (équivalent par définition au fait d'actualiser les flux aux taux par terme). Dès lors, bien que nous puissions

ne pas tenir compte de la première hypothèse, nous sommes toujours sujets à l'hypothèse de changements parallèles de la courbe des taux, sans quoi nous ne pourrions analyser le prix d'une obligation ou d'un portefeuille obligataire par rapport à un  $\Delta r$  unique.

### Complément

#### Immunisation de portefeuille et gestion actifs-passifs

La duration offre une facilité d'utilisation dans la mesure où celle d'un portefeuille est égale à la moyenne pondérée des durations des positions individuelles. De plus, si deux portefeuilles obligataires ont des durations semblables, cela suggère que la sensibilité de leurs valeurs au risque de taux d'intérêt est semblable. Dès lors, il est possible d'allouer les parts aux différentes positions de manière à recréer un portefeuille de la sensibilité souhaitée. Par ailleurs, puisque la duration représente une sensibilité mais aussi une durée effective de placement, cette allocation correspondra aussi à l'horizon-temps souhaité par l'investisseur.

L'utilisation de la duration dans la pratique peut se résumer aux deux exemples suivants :

- 1. Immunisation de portefeuille.** Le seul moyen de garantir véritablement un certain rendement à l'échéance pour un horizon-temps donné à un client est de constituer un portefeuille avec une duration correspondant à cette échéance.
- 2. Gestion actifs-passifs.** Traditionnellement, une banque accepte des dépôts de durée plus ou moins longue pour ensuite prêter des montants à court terme (des prêts commerciaux) ou à long terme (des prêts hypothécaires). L'institution touche une certaine marge d'intérêt entre le taux emprunteur et le taux prêteur mais qui est soumise aux aléas planant sur l'évolution de la courbe des taux. Au vu de ce qui précède, une manière simple pour la banque de garder une marge stable est de réussir à équilibrer la duration de son passif et de son actif. Dans la réalité, des changements d'allocation sont difficilement opérables sur les positions elles-mêmes puisqu'elles proviennent de l'activité propre à la banque. Dès lors, ces changements d'exposition sont réalisés au travers de produits dérivés tels que les contrats à terme et les swaps.

## 4 Structure à terme des taux d'intérêt

### 4.1 Caractéristiques des taux d'intérêt

Jusqu'à présent, les taux d'intérêt utilisés sont des taux annuels. Ainsi, la valeur future de 1 € dans  $T$  années est  $1 \times (1 + r)^T$ . Les taux peuvent également avoir une périodicité différente (semestrielle, trimestrielle, mensuelle...). Dans ce cas, les intérêts sont réinvestis plusieurs fois par an. Si  $r_n$  est le taux annuel nominal et  $n$  le nombre de réinvestissement d'intérêts par an, alors la valeur future de 1 € dans  $T$  années est  $1 \times \left(1 + \frac{r_n}{n}\right)^{n \times T}$ .

Lorsque la périodicité est infinie, on parle de taux continu  $r_c$  et la valeur future de 1 € dans  $T$  années devient  $1 \times \exp(r_c \times T)$ .

Le taux d'intérêt annuel équivalent ( $r_{ae}$ ) est lié au taux annuel nominal par la formule :  $1 + r_{ae} = \left(1 + \frac{r_n}{n}\right)^n = \exp(r_c)$ .

Le principe de composition des taux veut ainsi qu'un investisseur plaçant de l'argent à un taux d'intérêt annuel équivalent  $r_{ae}$  pendant deux ans touche  $(1 + r_{ae})^2$  après deux ans.

## 4.2 Taux à terme

Dans la réalité, à chaque échéance correspond un taux d'un niveau différent appelé taux au comptant (ou spot) car applicable à tout prêt entrepris aujourd'hui. Cela donne une courbe des taux, c'est-à-dire une structure des taux d'intérêt, en fonction de leur terme. Remarquons que dans la plupart des exercices, nous faisons l'hypothèse simplificatrice que la courbe des taux est plate (un seul taux quelle que soit l'échéance).

Cette courbe offre différentes possibilités pour un investisseur : placer son argent directement à deux ans au taux annuel effectif  $r_{0,2}$  (les indices expriment le fait que le taux annuel est celui applicable à un prêt démarrant aujourd'hui et arrivant à échéance dans deux ans) ou bien le placer à un an au taux  $r_{0,1}$  et, l'année suivante, regarder à quel taux il peut le replacer pour un an. Avec la première option, l'investisseur ne prend aucun risque ; il connaît le taux applicable pendant deux ans. Avec la seconde, il ne connaît pas le taux au moment du renouvellement. Est-ce vrai ? Oui, mais il peut se fonder sur les taux à un an et à deux ans, et utiliser ses notions de composition de taux pour en inférer le taux implicite que le marché intègre dans le taux à deux ans, tel que :  $(1 + r_{0,1})^1 (1 + ?_{1,2})^1 = (1 + r_{0,2})^2$

Pratiquement, cela revient à s'interroger sur le taux de réserve du taux à deux ans par rapport à celui à un an. On ne peut connaître le taux offert à l'investisseur dans un an, mais l'anticiper puisqu'un taux à deux ans est proposé et que la règle objective de composition des taux doit être vérifiée. Autrement, il existerait une possibilité d'arbitrage si une des deux stratégies se révélait systématiquement plus intéressante, d'après l'information publique disponible à  $T = 0$ .

Ce taux, qui n'est pas au comptant mais sur ce que le marché anticipe, s'appelle un taux à terme ou « forward ». Ce type de taux est inféré comme implicite entre deux échéances, en utilisant le principe de la composition des taux. Ainsi, pour deux taux d'échéances  $t_1$  et  $t_2$  ( $t_1 \leq t_2$ ) données :  $(1 + r_{0,t_1})^{t_1} (1 + f_{t_1,t_2})^{t_2-t_1} = (1 + r_{0,t_2})^{t_2}$ , où  $r_{0,t_1}$  et  $r_{0,t_2}$  sont les spots respectifs et  $f_{t_1,t_2}$  est le forward entre les deux dates à terme  $t_1$  et  $t_2$ .

Cette relation s'appuie sur un principe de non-arbitrage des taux. Nous allons montrer comment s'articule cet arbitrage dans un cas simple à deux périodes. Sur le marché, nous observons la courbe des taux au comptant ( $r_{0,1}$  et  $r_{0,2}$ ) ainsi que le forward ( $f_{1,2}$ ). Si nous voulons emprunter un certain montant dans un an et pendant un an, c'est-à-dire de  $t_1 = 1$  à  $t_2 = 2$  à un taux fixé aujourd'hui, deux méthodes s'offrent à nous :

1. Emprunter au taux à terme. Le taux de l'emprunt s'élève alors à  $f_{1,2}$ .
2. Emprunter à deux ans (au taux  $r_{0,2}$ ) et prêter le montant à un an (au taux  $r_{0,2}$ ). Le taux de l'emprunt s'élève alors à  $\frac{(1 + r_{0,2})^2}{1 + r_{0,1}} - 1$ .

Pour qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage, il faut

$$1 + f_{1,2} = \frac{(1 + r_{0,2})^2}{1 + r_{0,1}}$$

$$\text{ou } (1 + r_{0,1})(1 + f_{1,2}) = (1 + r_{0,2})^2$$

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
Prêt entre 1 et 2 au taux à terme – remboursement de 1 en $t = 2$		$\frac{-1}{1 + f_{1,2}}$	+1
Emprunt entre 0 et 2 au taux au comptant – remboursement de 1 en $t = 2$	$\frac{+1}{(1 + r_{0,2})^2}$		-1
Prêt entre 0 et 1 au taux au comptant – montant prêté en $t = 1$ de $1/(1 + r_{0,2})^2$	$\frac{-1}{(1 + r_{0,2})^2}$	$\frac{+(1 + r_{0,1})}{(1 + r_{0,2})^2}$	
Total	0	$\frac{(1 + r_{0,1})}{(1 + r_{0,2})^2} - \frac{1}{1 + f_{1,2}}$	0

En effet, supposons que  $1 + f_{1,2} > \frac{(1 + r_{0,2})^2}{1 + r_{0,1}}$ . Nous pouvons construire l'arbitrage du tableau 4.2.

Au total, le montage permet de recevoir avec certitude un montant positif en  $t = 1$  :

$$\frac{(1 + r_{0,1})}{(1 + r_{0,2})^2} - \frac{1}{1 + f_{1,2}} > 0.$$

Dans le cas où  $1 + f_{1,2} < \frac{(1 + r_{0,2})^2}{1 + r_{0,1}}$ , il suffit d'inverser le raisonnement.

## Résumé

Cette section met en avant les caractéristiques des obligations. Parmi celles-ci, les éléments suivants méritent d'être soulignés :

- Une obligation classique d'échéance  $T$ , de valeur faciale  $F$  et payant un coupon  $C$  vaut  $P = \sum_{t=1}^T v_t C + v_T F$ . Elle peut être vue comme la somme d'un ensemble de zéro-coupons.
- Une première source de risque des obligations est la variation des taux d'intérêt. Celle-ci est mesurée par la duration.
- Grâce à la duration, il est relativement facile d'examiner la sensibilité d'une institution financière face à l'évolution des taux d'intérêt, communément appelée « gestion actifs-passifs ».
- Les taux à terme permettent de fixer aujourd'hui un taux prévalent pour un emprunt dans le futur. Bien sûr, ils découlent de la structure à terme des taux actuels.

## Références bibliographiques

- FABBOZZI F, *Fixed Income Mathematics : Analytical and Statistical Techniques*, 3<sup>rd</sup> edition, McGraw-Hill Trade, 1996.
- FABBOZZI F, *Advances in Fixed Income Valuation Modeling and Risk Management*, John Wiley & Sons, 1997.
- HULL J., *Options, futures et autres actifs dérivés*, 6<sup>e</sup> édition, Pearson Education, 2007.
- INGERSOLL J.E. J<sup>r</sup>, *Theory of Financial Decision Making, Studies in Financial Economics*, Rowman & Littlefield Publishers Inc., 1987.
- GARBADE K.D., *Fixed Income Analytics*, MIT Press, 1998.
- SUNDARESAN S., *Fixed Income Markets and Their Derivatives*, 2<sup>nd</sup> edition, South-Western College Pub, 2001.
- TUCKMAN B., *Fixed Income Securities : Tools for Today's Markets*, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons, 2002.
- VAN DEVENTER R. et IMAI K., *Financial Risk Analytics*, Irwin, 1997.

## Commentaires

La duration fut introduite en 1938 par Frederick Macaulay. Il fallut attendre la fin des années 1970, (Vasicek en 1977 et Cox, Ingersoll et Ross en 1981), et l'application de la finance en temps continu au problème de l'évolution de la structure des taux d'intérêt pour voir apparaître des approches basées sur des bases théoriques cohérentes. Tuckman (2002) ou Sundaresan (2001) sont de bonnes références pour s'initier à cette littérature. Enfin, une présentation complète des méthodes de « bootstrapping » peut être trouvée dans Garbade (1998), Tuckman (1995) et Van Deventer et Imai (1997).

# Problèmes et exercices

La première partie des exercices s'intéresse à la valorisation d'obligations classiques, tandis que la deuxième traite du risque que représente l'influence des taux d'intérêt sur des portefeuilles obligataires. La troisième partie est consacrée plus précisément à la structure des taux d'intérêt.

## Évaluation d'obligation et rendement l'échéance

### Exercice 1 Évaluer une obligation d'État

#### Énoncé

Dans votre quotidien financier, vous trouvez les facteurs d'actualisation en vigueur sur le marché :

Échéance	1	2	3
Facteur d'actualisation	0,9615	0,9105	0,8565

#### Énoncé

Calculez le prix des obligations d'État suivantes (toutes de valeur nominale égale à 100 €) :

- a** un zéro-coupon venant à échéance dans trois ans.
- b** une obligation venant à échéance dans un an et versant un coupon de 8 %.
- c** une obligation venant à échéance dans trois ans et versant un coupon de 4 %.

Supposons que l'État émette un nouvel emprunt de valeur faciale 100 et venant à échéance dans trois ans. L'emprunt sera émis au pair.

- d** À quel taux sera émis l'emprunt ?

#### Solution

- a** Le prix du zéro-coupon d'échéance trois ans est  $P = CF_3 \times v_3 = 100 \times 0,8565 = 85,65 \text{ €}$ .
- b** L'obligation à un an à 8 % versera dans un an un coupon  $C = 100 \times 8\% = 8$  et remboursera la valeur faciale de l'obligation  $F = 100$ . Son prix est donc  $P = CF_1 \times v_1 = 108 \times 0,9615 = 103,84 \text{ €}$ .
- c** Les flux monétaires de l'obligation à trois ans à 4 % viennent du paiement des coupons à la fin de chaque année  $C = 100 \times 4\% = 4$  et du remboursement de la valeur faciale ( $F = 100$ ) de l'obligation à l'échéance (trois ans). Ainsi le prix est :  $P = CF_1 \times v_1 + CF_2 \times v_2 + CF_3 \times v_3 = 4 \times 0,9615 + 4 \times 0,9105 + 104 \times 0,8565 = 96,56 \text{ €}$
- d** Si un emprunt est émis au pair, son prix initial est égal à sa valeur faciale. Ici,  $P = 100$ . L'inconnue est le taux de l'emprunt  $c$  et donc indirectement le montant du coupon

puisque  $C = c \times 100$ . Ce coupon doit satisfaire l'égalité entre le prix et la valeur actualisée des flux futurs :

$$100 = C \times 0,9615 + C \times 0,9105 + (100 + C) \times 0,8565$$

$$\text{On en déduit : } C = \frac{(100 - 85,65)}{(0,9615 + 0,9105 + 0,8565)} = \frac{14,35}{2,7285} = 5,26 \text{ €.}$$

Par conséquent, le taux auquel l'emprunt est émis est de 5,26 %.

Remarquons que le taux du coupon d'une obligation est indépendant de sa valeur faciale. En effet, si nous ne connaissons pas la valeur faciale de l'obligation, l'équation d'égalité entre le prix et la valeur actualisée des flux futurs s'écrit de la manière suivante :  $P = c \times F \times 0,9615 + c \times F \times 0,9105 + (F + c \times F) \times 0,8565$ . Comme nous savons que l'obligation est émise au pair, nous avons :  $P = F$ . L'équation d'égalité devient donc  $F = c \times F \times 0,9615 + c \times F \times 0,9105 + (F + c \times F) \times 0,8565$ . Elle peut être simplifiée  $1 = c \times 0,9615 + c \times 0,9105 + (1 + c) \times 0,8565$

$$\text{Nous obtenons donc : } c = \frac{1 - 0,8565}{0,9615 + 0,9105 + 0,8565} = 5,26 \text{ %.}$$

## Exercice 2 Rendement d'une obligation d'État

### Énoncé

Nous sommes le 1<sup>e</sup>r avril 2004. Considérons l'obligation d'État B282 émise par le royaume de Belgique de valeur nominale égale à 100, venant à échéance le 28 mars 2017 et donnant droit à un coupon annuel de 8 % de la valeur nominale. Supposons que le taux d'intérêt en vigueur sur le marché soit de 5 %.

- a** Calculez la valeur de l'obligation en la décomposant en la valeur d'une annuité (les coupons) et la valeur actuelle du principal.
- b** Déterminez l'évolution de la valeur de l'obligation au cours des deux prochaines années.
- c** Sur la base des réponses obtenues en b., calculez la rentabilité qu'obtiendrait chaque année un investisseur qui détiendrait cette obligation.

### Solution

- a** Au 1<sup>e</sup>r avril 2004, l'échéance de l'obligation B282 est de treize ans. La structure des flux monétaires liés à l'obligation est la suivante :

	2004	2005	2006	...	2016	2017
Paiement du coupon		8	8		8	8
Remboursement du principal						100

Le prix de l'obligation étant la valeur actualisée des flux futurs, il peut être décomposé en la valeur actuelle des paiements de coupons (qui correspond à une annuité sur treize années) et la valeur actuelle du remboursement du principal. Le taux d'intérêt en vigueur sur le marché étant de 5 %, le facteur d'annuité donnant la valeur de 1 € par an

pendant treize ans est :

$$FA_{13,5\%} = \frac{1}{r} (1 - v_{13}) = \frac{1}{5\%} \left(1 - \frac{1}{(1 + 5\%)^{13}}\right) = 9,3936$$

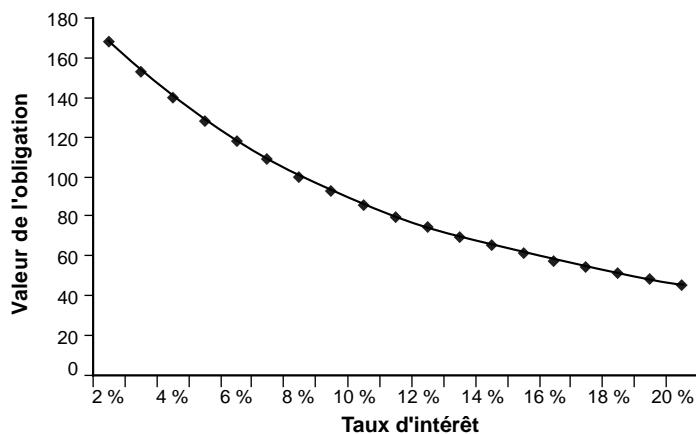
La valeur actuelle des coupons est donc égale à :  $8 \times 9,3936 = 75,15 \text{ €}$ .

La valeur actuelle de la valeur nominale est :  $100 \times \frac{1}{(1 + 5\%)^{13}} = 100 \times 0,5303 = 53,03 \text{ €}$ .

La valeur de l'obligation aujourd'hui est donc :  $P_{2004} = 75,15 + 53,03 = 128,18 \text{ €}$ . Puisque la valeur de l'obligation est supérieure à sa valeur nominale, on dit que l'obligation cote au-dessus du pair. La figure 5.2 montre la valeur de l'obligation B282 en fonction du taux d'actualisation.

**Figure 5.2**

**Prix de l'obligation B282 en fonction du taux d'actualisation.**



On constate que la valeur de l'obligation diminue lorsque le taux d'actualisation augmente. Quand le taux d'actualisation égale 8 % (qui est le taux du coupon), le prix de l'obligation correspond à sa valeur faciale (100). Lorsque le taux d'actualisation est supérieur à 8 %, la valeur de l'obligation est inférieure à 100 : l'obligation cote au-dessous du pair.

- b** Les valeurs de marché de l'obligation dans un an et dans deux ans sont obtenues en reprenant les calculs précédents mais en modifiant l'échéance qui sera de douze ans dans un an et de onze ans dans deux ans. Il vient :

$$P_{2005} = 70,91 + 55,68 = 126,59 \text{ €}.$$

$$P_{2006} = 66,45 + 58,47 = 124,92 \text{ €}.$$

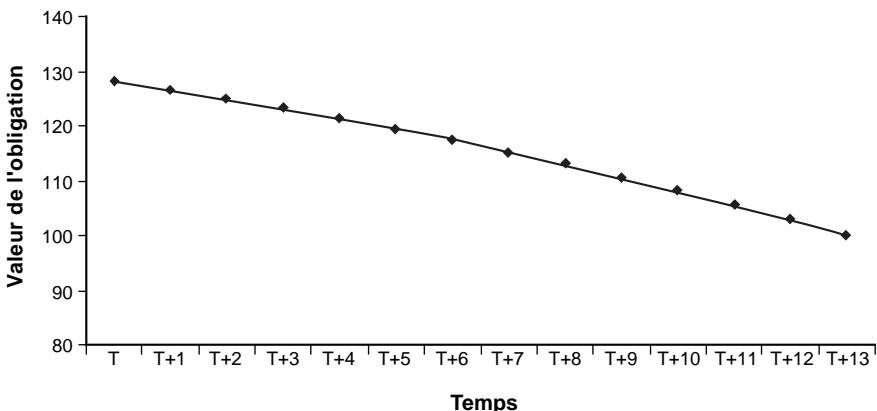
Le prix de marché de l'obligation diminue à mesure que l'on se rapproche de son terme. À l'échéance finale, il est égal à la valeur nominale. La figure 5.3, illustre cette évolution du prix de l'obligation dans le temps.

- c** La rentabilité attendue de l'obligation est toujours égale au taux d'actualisation. En effet, le prix de l'obligation classique à une date  $t$  est égal à :

$$P_t = \sum_{t=1}^T \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{F}{(1+r)^T}$$

Figure 5.3

**Évolution du prix de l'obligation B282 avec le temps.**



$$\text{ou encore } P_t = \frac{C + P_{t+1}}{1 + r}$$

D'autre part, la rentabilité attendue d'une obligation est donnée par la formule :

$$R = \frac{C + (P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}}$$

Celle-ci se décompose en rendement de l'obligation,  $\frac{C}{P_{t-1}}$ , et en plus- ou moins-value en capital,  $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ . Pour les deux années qui suivent, on obtient ainsi les résultats suivants pour l'obligation B282 :

Année	Rendement	Plus-value attendue	Rentabilité attendue
2005	6,24 %	-1,24 %	5 %
2006	6,32 %	-1,32 %	5 %

Notons qu'à mesure que l'on se rapproche de l'échéance, le rendement de l'obligation augmente (le coupon est fixe et le prix diminue) et la plus-value attendue diminue.

## Risque de taux

### Exercice 3 Duration d'un zéro-coupon

#### Énoncé

Considérons un zéro-coupon venant à échéance dans dix ans et de valeur faciale égale à 100. Supposons que le taux d'intérêt en vigueur sur le marché soit de 5 %.

- a** Calculez le prix du zéro-coupon.
- b** Quelle est la duration de ce zéro-coupon ?

Supposons que le taux d'intérêt diminue de 60 points de base (0,60 %).

- c** Sur la base de la duration calculée précédemment, quelle variation du prix du zéro-coupon attendriez-vous ?
- d** Vérifiez la précision de l'approximation fondée sur la duration en calculant le prix du zéro-coupon si le taux d'intérêt est de 4,40 %. Quelle est la source de l'erreur ?

### Solution

- a** Un zéro-coupon est une obligation ne payant pas de coupon, il n'existe donc qu'un seul flux financier : le remboursement à l'échéance. Si le taux d'intérêt est 5 %, le prix du zéro-coupon venant à échéance dans dix ans est :

$$P = 100/(1,05)^{10} = 61,39 \text{ €}$$

- b** La duration d'un zéro-coupon est égale à son échéance, soit dix ans.
- c** La variation du prix du zéro-coupon est, en première approximation, donnée par :

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -\frac{\text{Duration}}{1+r} \Delta r$$

Une variation du taux d'intérêt de  $-0,60\%$  conduit à une variation du prix de l'obligation de :

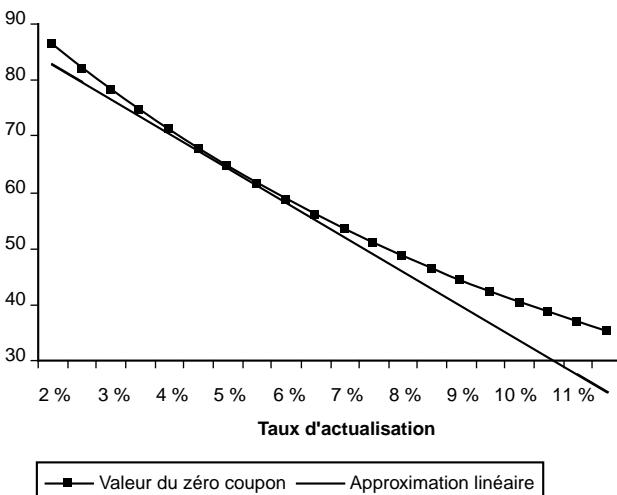
$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{-10}{1+5\%} (-0,60\%) = 5,71\%$$

Le prix du zéro-coupon passe donc de 61,39 € à  $P = 61,39 \times (1 + 5,71\%) = 64,90 \text{ €}$ .

- d** Si le taux d'intérêt est 4,40 %, le prix du zéro-coupon venant à échéance dans dix ans est :  $P = 100/(1,044)^{10} = 65,01 \text{ €}$ .

Figure 5.4

**Prix de l'obligation en fonction du taux d'intérêt.**



On constate donc un écart de 0,11 € entre le prix exact et le prix calculé sur la base de la duration. Cet écart s'explique d'une part par la convexité de la relation entre le prix d'un zéro-coupon et le taux d'intérêt et d'autre part par la linéarité de l'approximation basée sur la duration. L'approximation linéaire aboutit à une sous-estimation (surestimation) de la variation du prix suite à une baisse (hausse) du taux d'intérêt. Cela est illustré dans

la figure figure 5.4 qui présente la valeur du zéro-coupon (à dix ans) et l'approximation linéaire à partir du taux d'actualisation actuel (5 %) en se fondant sur la duration.

Mathématiquement, la convexité de la courbe de la valeur du zéro-coupon apparaît clairement en prenant la dérivée seconde de la relation entre le prix et le taux d'intérêt :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{t}{(1+r)} P < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2P}{dr^2} = \frac{t(t+1)}{(1+r)^2} P > 0$$

## Exercice 4 Duration d'une obligation classique

### Énoncé

Nous sommes le 16 mai 2004. Considérons l'obligation de valeur nominale égale à 100, venant à échéance le 15 mai 2008 et donnant droit à un coupon annuel de 7 % de la valeur nominale. Supposons que le taux d'intérêt en vigueur sur le marché soit de 4 %.

- a** Calculez la valeur de l'obligation en la décomposant en zéro-coupons.
- b** Calculez les proportions investies dans chacun des zéro-coupons.
- c** Calculez la duration de cette obligation.
- d** Supposons que le taux d'intérêt augmente de 50 points de base (0,50 %). Sur la base de la duration calculée précédemment, quelle variation du prix de l'obligation attendriez-vous ?
- e** Vérifiez la précision de l'approximation fondée sur la duration en calculant le prix de l'obligation si le taux d'intérêt est de 4,50 %. Quelle est la source de l'erreur ?

### Solution

- a** L'obligation vient à échéance dans quatre ans. Elle peut être décomposée en quatre zéro-coupons. La valeur de l'obligation est la somme des valeurs de ces zéro-coupons.

Année	2005	2006	2007	2008
Échéance	1	2	3	4
Valeur nominale du zéro-coupon	7	7	7	107
Facteur d'actualisation	0,9615	0,9246	0,8890	0,8548
Valeur actuelle	6,73	6,47	6,22	91,46

Le prix de l'obligation est donc :  $P = 6,73 + 6,47 + 6,22 + 91,46 = 110,89 \text{ €}$ .

- b** Les proportions investies dans chacun des zéro-coupons sont les rapports entre leurs valeurs actuelles et le prix de l'obligation.

Année	2005	2006	2007	2008
Échéance	1	2	3	4
Proportion	6,07 %	5,84 %	5,61 %	82,48 %

- c** La duration de l'obligation est la moyenne des échéances des zéro-coupons pondérée par les proportions investies :  $1 \times 6,07\% + 2 \times 5,84\% + 3 \times 5,61\% + 4 \times 82,48\% = 3,65$ . L'échéance moyenne pondérée des flux de trésorerie de cette obligation est donc de

3,65 années. Notons que la duration est inférieure à l'échéance de l'obligation (quatre ans). Cela s'explique par l'existence de flux de trésorerie avant l'échéance.

- d** La variation du prix de l'obligation est, en première approximation, donnée par :

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -\frac{\text{Duration}}{1+r} \Delta r$$

Une variation du taux d'intérêt de +0,50% conduit donc à une variation du prix de l'obligation de :  $\Delta P/P = -(3,65/1,04) \times (+0,50\%) = -1,75\%$ .

L'approximation donne un prix de :  $P = 110,89 \times (1 - 1,75\%) = 108,95 \text{ €}$ .

- e** Si le taux d'intérêt est  $r = 4,50\%$ , le facteur d'actualisation change.

Année	2005	2006	2007	2008
Échéance	1	2	3	4
CF	7	7	7	107
DF	0,9569	0,9157	0,8763	0,8386
PV	6,70	6,41	6,13	89,73

Le prix de l'obligation s'élève à  $P = 108,97 \text{ €}$ . On constate une petite différence entre le prix calculé sur la base de la duration (108,95 €) et le prix exact. Elle est due à la convexité de la relation entre le prix de l'obligation et le taux d'intérêt. Le calcul fondé sur la duration s'appuie sur une approximation linéaire de la relation. En conséquence, il surestime la baisse du prix de l'obligation si le taux d'intérêt augmente et il sous-estime la hausse du prix de l'obligation si le taux d'intérêt diminue.

## Structure à terme des taux d'intérêt

### Exercice 5 Extraire la courbe zéro-coupon à partir d'obligations d'État

#### Énoncé

Vous observez les prix suivants pour des obligations d'État :

Échéance	Coupon	Prix
1	8,00 %	104,85
2	6,00 %	102,89
3	6,50 %	102,96
4	4,00 %	93,96

Quels sont les facteurs d'actualisation sous-jacents ? Quels sont les taux d'intérêt comprimants ?

**Solution**

De manière générale, le prix d'une obligation se calcule de la manière suivante :

$$P_0 = C \times v_1 + C \times v_2 + \cdots + (C + F) \times v_T = \frac{C}{(1 + r_1)} + \frac{C}{(1 + r_2)^2} + \cdots + \frac{C + F}{(1 + r_T)^T}$$

où  $r_1, r_2 \dots$  sont les taux au comptant d'échéance 1, 2, ... Par conséquent, afin de retrouver la courbe des taux au comptant, nous allons extraire les taux du prix des obligations progressivement en commençant par l'obligation d'échéance un an pour terminer par celle d'échéance quatre ans.

**Obligation à un an.** Nous avons l'équation suivante :  $104,85 = 108 \times v_1$ . Il en résulte :

$$v_1 = 0,9708 \text{ et comme } v_1 = \frac{1}{(1 + r_1)}, \text{ nous obtenons : } r_1 = \frac{1}{v_1} - 1 = 3\%$$

**Obligation à deux ans.** Sa valeur est donnée par :  $102,89 = 6 \times v_1 + 106 \times v_2$ . En utilisant le facteur d'actualisation à un an qui a été calculé précédemment, nous obtenons :

$$v_2 = (102,89 - 6 \times 0,9708) / 106 = 0,9157$$

Le taux d'intérêt comptant correspondant (le taux à deux ans) est la solution de :  $v_2 = \frac{1}{(1 + r_2)^2}$ . Nous en déduisons  $r_2 = (1/v_2)^{(1/2)} - 1 = 4,50\%$ .

**Obligation à trois ans.**

$$v_3 = (102,96 - 6,50 \times 0,9708 - 6,50 \times 0,9157) / 106,50 = 0,8516$$

$$r_3 = (1/v_3)^{(1/3)} - 1 = 5,50\%.$$

**Obligation à quatre ans.**

$$v_4 = (93,96 - 4 \times 0,9708 - 4 \times 0,9157 - 4 \times 0,8516) / 104 = 0,7918$$

$$r_4 = (1/v_4)^{(1/4)} - 1 = 5,80\%.$$

La technique présentée illustre une approche plus générale connue sur le nom de « bootstrap method ». La présentation qui en est donnée est simplifiée à plusieurs égards. Premièrement, nous supposons que les quatre obligations verseront leur prochain coupon dans exactement une année (l'intervalle de temps qui sépare les flux de trésorerie est exactement d'un an). Dans la réalité, les choses sont évidemment plus complexes, l'échéance du prochain coupon pouvant varier d'une obligation à l'autre. Deuxièmement, nous supposons que nous disposons de prix de quatre obligations pour calculer les quatre facteurs d'actualisation. De nouveau, les choses sont moins simples en réalité. Le nombre de facteurs peut être supérieur ou inférieur au nombre d'obligations disponibles.

## Exercice 6 Calculer des taux à terme implicites

### Énoncé

Vous êtes consultant pour la société TrésoConsult. Celle-ci a été créée dans le but d'apporter une certaine expertise aux responsables de trésorerie de PME. Votre rôle est d'accompagner ces responsables de trésorerie lors de leurs négociations avec leurs banquiers.

Un de vos clients sait qu'il devra faire face à un investissement assez important dans un an pour un projet d'une durée de deux ans, à la fin duquel il devrait être parfaitement en mesure de couvrir l'investissement de départ et même dégager une bonne marge, suite à un calcul relativement objectif de VAN. L'idée de cette société est de financer cet investissement par un emprunt. Mais avant d'accepter ce projet, votre client veut absolument s'assurer du taux de cet emprunt pour pouvoir dès aujourd'hui avoir une vision ferme du projet en son ensemble. Après s'être renseigné auprès des banquiers, votre client vous informe qu'*a priori*, le meilleur taux qu'on lui offre pour cet emprunt démarrant dans un an est de 10 %. Bien que la courbe actuelle des taux soit orientée à la hausse, votre client est assez surpris d'un taux si élevé. Voici la structure des taux au comptant observable sur les marchés aujourd'hui.

Échéance	Taux
1 an	6,50 %
2 ans	7,30 %
3 ans	8,20 %
4 ans	8,60 %

- a** Quelle stratégie vous permettrait d'obtenir le même résultat qu'un emprunt direct à un an auprès du banquier ? Quel est le taux obtenu pour cette proposition-là ? Que suggérez-vous ?

- b** Quelles hypothèses faites-vous en comparant directement ces deux possibilités ?

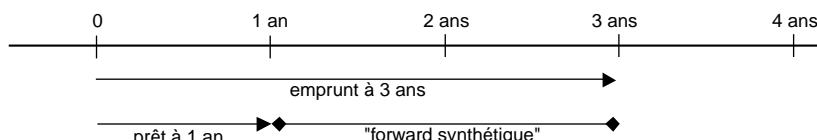
Votre client examine aussi la possibilité d'un financement récurrent. Plus précisément, il a besoin de financement sur le long terme. Malheureusement, il n'a à disposition que des possibilités d'emprunts à un, deux, trois et quatre ans (aux conditions préalablement présentées), ce qui veut dire qu'au mieux, il doit tout de même faire face, après quatre ans, à l'évolution des taux sur le marché quand il reprendra un emprunt à quatre ans. Dès lors, il se demande s'il a un avantage réel à prendre des financements à quatre ans plutôt qu'à trois ans. Il perd effectivement un an de taux fixe supplémentaire mais le taux à quatre ans lui semble relativement plus élevé que celui à trois ans. Son banquier lui dit tout de même que pour 0,40 % supplémentaire seulement (voir courbe des taux précédente), il s'assure d'un taux fixé sur un horizon-temps qui est 33 % plus long !

- c** Qu'en pensez-vous ?

### Solution

- a** Une stratégie équivalente à l'emprunt au taux de 10 % consiste à emprunter pendant trois ans le montant désiré et ensuite de replacer ce montant pendant un an au taux du marché pour qu'il soit disponible un an plus tard, sans que l'emprunteur n'ait à payer d'intérêts pendant cette année d'attente. Schématiquement :

Figure 5.5



En empruntant 1 € pendant trois ans, la trésorerie va devoir payer  $(1 \times r_0,3)^3 = (1 + 8,20\%)^3 = 1,2667$  €, c'est-à-dire 26,67 % d'intérêt au total sur les trois ans. Elle peut cependant prêter le montant emprunté (1 €) pendant la première année. À l'échéance dans un an, elle recevra 1,065 €, c'est-à-dire 6,5 % d'intérêts qui vont compenser les paiements d'intérêts sur l'emprunt à trois ans. Cela peut se résumer comme un emprunt de 1,065 € qui nécessite un remboursement de 1,2667 € après deux ans. Dans son ensemble, l'opération dégagera *in fine* un intérêt total (payé) de :

$$\frac{1,2667 - 1,065}{1,065} = \frac{(1 + 8,20\%)^3}{(1 + 6,50\%)^1} - 1 = 18,94\%,$$

ce qui fait un intérêt annuel de  $(1 + 18,94\%)^{1/2} = 9,06\%$ . Nous avons répliqué un emprunt à terme par deux positions contraires et de maturités différentes, ce qui correspond à la formule de composition des taux d'intérêt présentée dans la partie théorique. Le taux proposé par la banque est de 1 % plus élevé que celui dans un an pour deux ans « contenu » dans la courbe des taux actuelle. Par conséquent, il est plus intéressant de réaliser le montage à partir de la courbe de taux spot plutôt que de contracter directement avec la banque.

- b** Si les marchés sont efficents et plus particulièrement parfaits, sans frictions, et où les taux d'intérêt prêteur et emprunteur sont identiques, alors, oui, l'utilisation d'une courbe de taux permet de rapidement dégager le taux forward que l'on pourrait bloquer par une simple stratégie. Cependant, ce n'est pas le cas dans la réalité. Il existe des courbes de taux différentes par catégorie de rating d'emprunteur et des écarts de taux vendeur-acheteur qui font que le calcul réalisé pour la stratégie de réplique devrait intégrer des données supplémentaires et en faisant correspondre les taux acheteur et vendeur aux signes des positions prises.
- c** Le raisonnement du banquier n'est pas tout à fait faux, à ceci près qu'il omet de dire que les 0,40 % supplémentaires sont à cumuler sur quatre ans ! En somme, vous allez payer 0,40 % de plus sur les trois premières années pour avoir droit à un taux fixé aujourd'hui pour la quatrième année... Regardons de plus près le coût réel de la quatrième année. Si nous nous fondons sur le taux à trois ans pendant trois ans, le taux à terme implicite pour atteindre un taux global de 8,60 % sur quatre ans est de :

$$(1 + 8,20\%)^3 (1 + f_{3,4})^1 = (1 + 8,60\%)^4$$

$$\Rightarrow f_{3,4} = \frac{(1 + 8,60\%)^4}{(1 + 8,20\%)^3} - 1 = 9,81\%$$

Ce qui veut dire que fixer la quatrième année équivaut aujourd'hui à bloquer un taux de reconduction du prêt pendant un an de 9,81 %, ce qui semble assez cher ! Ce taux résulte directement pourtant de la courbe des taux déterminée par le marché. D'après la théorie des anticipations rationnelles, il représente la meilleure espérance de marché pour le taux à un an dans trois ans. Donc, même s'il paraît élevé, c'est la juste valeur (fair value) ! Cela voudrait dire que si votre client décide tout de même de se limiter à un emprunt de trois ans parce qu'il ne pense pas que le taux à un an atteindra réellement un niveau aussi élevé dans trois ans, il s'agit alors d'un choix spéculatif, ce commentaire devant être pondéré par le risque réel qu'il représente pour votre client, surtout à la vue du fait de devoir de toute façon renouveler le prêt ensuite, que ce soit après trois ou quatre ans.



# Valorisation de la dette risquée et des produits dérivés de crédit

1. Évaluation de dette risquée . . . . .	164
2. Évaluation d'obligations convertibles . . . . .	168
3. Probabilité de défaut et corrélation de défaut . . . . .	169
4. Produits dérivés de crédit . . . . .	172
<b>Problèmes et exercices</b>	
Risque de crédit . . . . .	176
Évaluation d'obligations convertibles . . . . .	180
Produits dérivés de crédit . . . . .	183

**Le chapitre précédent nous a permis de jongler avec la mécanique de la structure des taux d'intérêt. Cette problématique est au centre de la fonction de base de tout système financier, qui est celui de la transformation d'échéances. Mais dans cette activité traditionnelle des banques, le risque de taux d'intérêt se retrouve intimement lié à un autre risque, celui du risque de crédit, c'est-à-dire celui qui est dû au fait que la contrepartie puisse faire défaut, d'ici à l'échéance.**

Le présent chapitre se concentre sur la notion de risque de crédit, tout d'abord en examinant sa signification au sein d'une obligation qui n'est plus cette fois-ci une obligation d'État, c'est-à-dire sans risque de défaut d'après une catégorisation un peu simpliste<sup>1</sup>, mais une obligation d'entreprise. Nous revoyons ainsi deux techniques des chapitres précédents, appliquées cette fois-ci au problème du risque de crédit :

1. les arbres binomiaux, qui permettent de visualiser très concrètement les cash-flows finaux atteints dans un prêt à risque, et
2. le modèle d'évaluation des options de Black, Scholes et Merton, que Merton appliquera à toute une série de cas autres que celui simplement des options financières, en particulier celui du risque de crédit.

La présence de risque de crédit rend la présentation des obligations convertibles beaucoup plus intéressante. Elles présentent ici trois « sorties » différentes à l'investisseur : une conversion en actions si la société a du succès, un remboursement de la valeur nominale si ce n'est pas vraiment le cas, et un remboursement partiel en valeur de liquidation des actifs de la société si elle vient à faire défaut.

Bien que complexe et créant une discontinuité dans la survie de la contrepartie, le risque de crédit est aujourd'hui transférable synthétiquement grâce à des dérivés de crédit. Nous nous permettrons également d'introduire ce sujet.

1. Bien qu'en théorie une obligation d'État soit perçue comme la représentante d'un emprunt hors risque de défaut, il existe bien sûr de nombreux cas de défauts souverains...

# 1 Évaluation de dette risquée

## 1.1 Cadre de base

Nous avons vu que la valeur de la dette varie avec les taux d'intérêt. Une autre source de risque vient de l'emprunteur qui peut faire faillite et qui n'est alors plus en mesure de rembourser tout ou partie des flux (intérêts ou principal) afférents à son emprunt. C'est ce qu'on appelle le risque de crédit. La valeur de la dette est donc également liée à la qualité de l'emprunteur.

La qualité de l'emprunteur est souvent qualifiée dans la pratique par un rating, tel que ceux qui sont délivrés par les principales agences de rating ou de notation, les plus connues étant : Moody's, Standard & Poor's ou Fitch Ratings (voir tableau 6.1).

Ces ratings sont estimés grâce à un set de données quantitatives et qualitatives et sont souvent le résultat d'un modèle expert mélangeant ces deux types de données, des estimations statistiques ainsi qu'un certain jugement praticien.

On peut très bien voir ces ratings comme étant des expressions de « scores » que l'on attribuerait aux sociétés d'après une composition plus ou moins savante de ces critères quantitatifs et qualitatifs. Parmi les critères quantitatifs les plus évidents, nous trouvons :

1. le levier financier « dettes sur actions » (D/A), qui est associé à la solvabilité structuelle de la société, et
2. le ratio de couverture des intérêts (EBIT/intérêts), associé à la solvabilité liée à la liquidité de la société.

Si l'on se borne à utiliser des critères quantitatifs comme ceux-là, alors on peut appliquer des méthodes de scoring, c'est-à-dire des estimations statistiques reliant *grosso modo* la probabilité de défaut à certaines variables observées. Les méthodes les plus connues sont :

1. Les Z-scores d'Edward Altman, méthode développée en 1968 et proposant des coefficients (calibrés statistiquement) qui, une fois appliqués aux valeurs connues de certaines variables, donnent un « score » qui doit être ensuite comparé à une échelle publiée par E. Altman. La formule originellement proposée pour des sociétés manufacturières est (avec une brève explication des raisons de chaque membre de l'équation) :

$$Z = 1,2 X_1 + 1,4 X_2 + 3,3 X_3 + 0,6 X_4 + 0,999 X_5 \text{ où}$$

$X_1$  = fonds de roulement/actifs totaux : mesure la proportion d'actifs liquides.

$X_2$  = bénéfices retenus/actifs totaux : mesure la profitabilité cumulée en fonction de l'âge et de la capacité à générer des bénéfices.

$X_3$  = EBIT/actifs totaux : mesure une certaine efficience opérationnelle.

$X_4$  = valeur de marché du capital-actions/valeur nominale de la dette : ceci ajoute une composante « marché » au levier financier purement comptable.

$X_5$  = ventes ou revenus/actifs totaux : c'est une mesure traditionnelle du « turnover ».

Tableau 6.1

**Échelle de ratings des principales agences de notation**

Standard	Poor's Moody's	Fitch IBCA
AAA	Aaa	AAA
AA+	Aa1	AA+
AA	Aa2	AA
AA-	Aa3	AA-
A+	A1	A+
A	A2	A
A-	A3	A-
BBB+	Baa1	BBB+
BBB	Baa2	BBB
BBB-	Baa3	BBB-
BB+	Ba1	BB+
BB	Ba2	BB
BB-	Ba3	BB-
B+	B1	B+
B	B2	B
B-	B3	B-
CCC+	Caa1	CCC+
CCC	Caa2	CCC
CCC-	Caa3	CCC-
CC	Ca	CC
C	C	C
D		D

Le score ainsi trouvé doit être comparé à la table suivante pour estimer la vraisemblance de faillite :

Probabilité très élevée d'insolvabilité	Moins de 1,81
Probabilité élevée d'insolvabilité	Entre 1,81 et 2,7
Possibilité d'insolvabilité	Entre 2,7 et 3
Insolvabilité peu probable	Plus de 3

Différentes versions ont été ensuite publiées avec des coefficients revus pour des sociétés non cotées en Bourse ou non manufacturières.

2. Des méthodes de régression statistique particulières comme les méthodes « logit » et « probit » qui permettent de calibrer une fonction de type :

$\gamma = f(a + bx_1 + cx_2 + dx_3 + \dots + \varepsilon)$  où  $\gamma$  ne peut prendre des valeurs qu'entre 0 et 1, c'est-à-dire les valeurs associées à une mesure de probabilité. Au moment où la régression est calculée, les « x » sont remplacés par les valeurs des ratios des sociétés examinées et «  $\gamma$  » est remplacé par un 0 ou un 1, selon que la société est toujours « vivante » l'année suivante ou pas. Une fois les coefficients trouvés avec un ensemble de sociétés de contrôle, ces derniers peuvent être réappliqués aux valeurs d'une nouvelle société pour obtenir son «  $\gamma$  », qui sera compris entre 0 et 1.

## 1.2 La prime de risque de crédit

Soit  $D$  le prix d'une obligation zéro-coupon,  $F$  la valeur faciale,  $r$  le taux d'intérêt requis hors risque de défaut,  $T$  l'échéance du prêt,  $P$  la probabilité de défaut,  $R$  la valeur espérée du recouvrement en cas de défaut et  $L$  son complémentaire, c'est-à-dire la valeur espérée de la perte en cas de défaut, alors la valeur espérée de l'obligation en fin de vie est de :

$$E[D_T] = F(1 - P) + PR = F(1 - P) + P(F - L) = F - PL$$

Si l'on accepte que  $P$  et  $L$  soient des valeurs telles que cette espérance ait un équivalent certain (voir chapitre 1), alors on peut actualiser cette espérance au taux hors risque pour trouver sa valeur au temps 0 :

$$D_0 = (F - PL)e^{-r_f T}$$

ce qui peut être réécrit plutôt comme une actualisation à un taux risqué d'un flux es- péré risqué  $F$  :

$$D_0 = Fe^{-yT}$$

ce qui donne un rendement à l'échéance risqué  $y$  de :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{T} \ln \left( \frac{D_0}{F} \right) = -\frac{1}{T} \ln \left( \frac{(F-PL)e^{-r_f T}}{F} \right) = -\frac{1}{T} \left[ \ln \left( \frac{(F-PL)}{F} \right) - r_f T \right] = -\frac{1}{T} \left[ \ln \left( \frac{(F-PL)}{F} \right) \right] + r_f \\ cs &= y - r_f = -\frac{1}{T} \left[ \ln \left( \frac{(F-PL)}{F} \right) \right] = -\frac{1}{T} [\ln (1 - PL\%)] \end{aligned}$$

où  $cs$  est le spread de crédit, et  $L\%$  est le taux de perte étant donné le défaut.

## 1.3 L'approche structurelle de Merton

Jusqu'ici, notre raisonnement est très « réduit » et peut avoir un côté un peu « obscur ». Nous n'avons pas proposé d'explication ou d'intuition derrière les variables  $P$  et  $L$ . En 1973, Merton, non content d'avoir aidé Black et Scholes pour leur formule d'évaluation de l'option, ira encore plus loin en imaginant toute une série d'applications du concept. En ce qui nous concerne ici, Merton apportera l'« approche structurelle » au risque de crédit, en partant d'une simple émission obligataire de type zéro-coupon. Dans ce contexte, les actionnaires et créanciers sont tous vus comme des ayants-droit (claim-holders) sur le total des actifs de la société. Si la société n'est financée que par les deux instruments traditionnels de base, c'est-à-dire le capital-actions ( $A$ ) et la dette sous la forme d'obligations ( $D$ )<sup>1</sup>, alors nous savons que la valeur de la société ( $V$ )<sup>2</sup> équivaut en tout temps à  $V_t = A_t + D_t$ . À l'échéance, la société doit rembourser la valeur faciale de l'emprunt. Étant donné la responsabilité limitée des actionnaires et le droit de priorité absolue des créanciers dans le remboursement de leur prêt, les profils de valeur des bailleurs de fonds dépendent de la valeur finale de la société (voir tableau 6.2).

1. On imagine tout d'abord ici qu'il s'agit d'une dette unique et simple comme dans la section précédente, c'est-à-dire avec un montant unique  $F$  remboursable à une seule échéance  $T$ .

2. Ici, on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas lieu de différencier la valeur des actifs de la valeur au sens large de la société et que l'on respecte la loi de préservation de la valeur dans son ensemble, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de paiements de dividendes, etc., qui viennent impacter l'évolution de  $V$ .  $V$  est une variable parfaitement exogène.

Tableau 6.2

**Profil de valeur des bailleurs de fonds à l'échéance de l'obligation zéro-coupon de valeur faciale F**

À l'échéance	$V_T < F$	$V_T > F$
Créanciers ( $D$ )	$V_T$	$F$
Actionnaires ( $A$ )	0	$V_T - F$

Cela suppose que :

1. La dette ne soit constituée que d'une obligation zéro-coupon ou d'un groupe d'entre elles qui feraient défaut simultanément en cas de détresse financière. Cela implique que l'on ne s'intéresse qu'à la solvabilité structurelle de la société, la solvabilité courante (cash-flow solvency) n'étant pas étudiée puisque aucun intérêt n'est dû avant l'échéance.
2. Le défaut ne puisse intervenir qu'à l'échéance  $T$  de la dette. Cela veut dire que la situation de crédit de la société ne peut être « monitorée » que de manière très discrète dans le temps. (En réalité, il n'y a ni contrôle continu ni laisser-aller sans vérification jusqu'à l'échéance, etc.)

Ces profils tronqués des actions et de la dette rappellent ceux des produits dérivés optionnels. En effet, les actionnaires n'ont droit à la valeur que si  $V_T > F$ , tandis que les créanciers ont au maximum droit à  $F$  et ne gardent sinon que la valeur résiduelle de la société. Autrement dit :

$$A_T = \max(0, V_T - F)$$

$$D_T = \min(V_T, F) = F - \max(0, F - V_T)$$

Cela signifie que l'action équivaut à un call sur la valeur de l'entreprise et que la dette risquée équivaut à une dette sans risque mais accorde un put aux actionnaires leur laissant le droit de faire faillite. En espérances et valeurs actuelles, cela revient à dire qu'au temps  $t = 0$ , c'est-à-dire au moment où l'on évalue les contrats :

$$A_0 = e^{-rT} \mathbb{E}[\max(0, V_T - F)] = \text{call}$$

$$D_0 = Fe^{-rT} - e^{-rT} \mathbb{E}[\max(0, F - V_T)] = D_0^{\text{hors risque}} - \text{put}$$

L'utilisation du modèle de valorisation des options a été suggérée par Merton à la suite de ses travaux avec Black et Scholes. Sous les hypothèses traditionnelles liées à ce modèle (voir chapitre 4), nous avons la valeur de la dette risquée et le spread de crédit suivants :

$$D = Fe^{-rT} - [Fe^{-rT} N(-d_2) - VN(-d_1)] \quad \text{avec } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V}{e^{-r_f T} F}\right)}{\sigma_V \sqrt{T}} + 0,5\sigma_V \sqrt{T} \quad \text{et}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T}$$

## Complément

### Probabilité de défaut et recouvrement

Le modèle de Merton peut être réaménagé algébriquement pour faire apparaître les deux paramètres essentiels dans l'étude du risque de crédit : la probabilité de défaut et la valeur espérée de recouvrement (ou son complémentaire : la valeur espérée de la perte). Ainsi, la dette risquée est égale à la différence entre la dette sans risque et la valeur espérée de la perte multipliée par la probabilité de défaut.

$$D_0 = \underbrace{Fe^{-rT}}_{\text{Valeur de la dette sans risque}} - \underbrace{N(-d_2)}_{\text{Probabilité de défaut}} \cdot \left[ Fe^{-rT} - \underbrace{\frac{V}{N(-d_2)}}_{\text{Valeur actuelle espérée du recouvrement}} \right] \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Valeur actuelle espérée de la perte}}$$

Ce modèle est donc plus complexe qu'il n'y paraît car la valeur espérée de recouvrement y est implicite, ce qui implique que le taux de recouvrement effectif est stochastique.

$$cs = -\frac{1}{T} [\ln(1 - PL\%)] = -\frac{1}{T} \left[ \ln \left( 1 - N(-d_2) \left[ e^{-rT} - \frac{V}{F} \frac{N(-d_1)}{N(-d_2)} \right] \right) \right]$$

Ce modèle et surtout les concepts qu'il cache seront source d'intuitions. Le modèle en lui-même fait appel à certaines hypothèses et développements mathématiques requérant certaines conditions. Mais le simple fait d'imaginer le capital-actions comme un call sur les actifs de la société est en soi particulièrement novateur. Ainsi, on sait que la volatilité est d'autant plus importante pour une option call que l'on s'approche du prix d'exercice, c'est-à-dire au point d'inflexion du profil de l'option. Or c'est justement à ce moment-là que les actionnaires, proches du défaut, auront tendance à miser sur des projets très risqués, pour maximiser la valeur de la volatilité étant donné leur responsabilité limitée !

## 2 Évaluation d'obligations convertibles

Les obligations convertibles sont des obligations qui donnent à leur détenteur le droit de convertir le montant du remboursement ( $F$ ) en actions de la société émettrice, à l'échéance de l'obligation ou pendant un certain laps de temps. Le droit de conversion est défini soit en prix par action, soit en nombre d'actions pour le montant nominal à rembourser (ratio de conversion). Ainsi, une obligation avec une valeur faciale de 100 € et un ratio de conversion de 4 : 1 signifie que le détenteur peut demander à recevoir quatre actions pour la valeur de 100 €, ce qui veut dire que le prix d'exercice de son option est de 25 € par action. Cet instrument permet à l'émetteur de payer un taux de coupon moins élevé (ce qui fait croire à un yield moins élevé) en échange de cette option implicite qui revêt une certaine valeur.

Le financement par obligations convertibles est un financement hybride, appelé d'ailleurs « mezzanine financing », car, suivant l'évolution de la valeur des actions de l'entreprise émettrice, cet instrument peut se comporter comme une obligation ou comme une action. En effet, si la période de conversion coïncide avec l'échéance de l'obligation, trois états du monde peuvent se présenter à son détenteur (voir tableau 6.3).

Tableau 6.3

**Profil de valeur d'une obligation convertible à l'échéance**

Valeur de la société	Valeur de l'obligation convertible	
$V_T \geq F/\gamma$	$\gamma V_T$	Conversion
$F/\gamma > V_T \geq F$	$F$	Pas de conversion
$V_T < F$	$V_T$	Faillite de la société

Le détenteur d'une obligation convertible choisit de la convertir ou non selon le niveau de la valeur de la société  $V_T$ , par rapport au montant du remboursement  $F$ , compte tenu du ratio de conversion  $\gamma$ . Si la conversion donne droit à  $n$  nouvelles actions et s'il y a actuellement  $N$  actions en circulation, alors  $\gamma \equiv n/(n + N)$ . Dans le cas où la société fait faillite à l'échéance (dernier cas du tableau), l'obligataire reçoit la valeur résiduelle de la société. Dans le cas inverse, l'obligataire choisit de convertir son titre uniquement si la valeur des actions qu'il reçoit en échange est supérieure à celle du remboursement de l'obligation, c'est-à-dire si  $\gamma V_T \geq F$ . La valeur de l'obligation correspond alors à celle des actions reçues en échange. Ce raisonnement suppose qu'il n'y a pas d'autre émission de dette dans la société, faute de quoi il faudrait répartir préalablement la valeur  $V_T$  entre ses ayants-droit avant de l'intégrer dans les calculs.

Il est possible de résumer le profil de pertes/gains du convertible à l'échéance du droit de conversion :

$$\begin{aligned} Conv_T &= \max(\gamma V_T, \min(V_T, F)) \\ &= \min(V_T, F) + \max(\gamma V_T - F, 0) \end{aligned}$$

Avant l'échéance, la valeur de l'obligation convertible correspond à la somme de la valeur de l'obligation classique risquée et de la valeur de l'option de conversion, appelée « warrant ». Cette option est un call sur le sous-jacent  $\gamma V$ , avec un prix d'exercice  $F$  et une maturité  $T$ .

$$\begin{aligned} Conv &= D + call(\gamma V, F, T) \\ &= dette \text{ risquée} + warrant \end{aligned}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'option de remboursement anticipé qui puisse être exercée par l'emprunteur, on peut démontrer qu'il est irrationnel d'exercer avant l'échéance. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi la date de l'échéance pour mesurer le profil de pertes/gains.

### 3 Probabilité de défaut et corrélation de défaut

Lorsqu'on se retrouve en présence d'un portefeuille de crédits, on a tendance à se demander quelle est l'exposition globale de notre portefeuille au risque de crédit. Dans un portefeuille d'actions, nous avons vu clairement que la diversification joue un rôle, et ceci est mesuré par un paramètre, la corrélation entre les actions composant ce portefeuille.

Dans le cas du risque de crédit, on peut se demander également si l'on retrouve ce type de concept. En fait, certains auteurs ont montré que oui, pour autant que l'on accepte

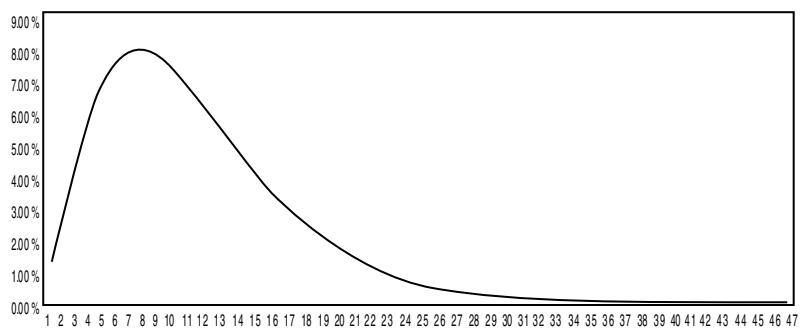
un certain... cadre. Car il est impensable d'imaginer que l'on puisse appliquer une hypothèse de loi normale aux... défauts. Or, la corrélation linéaire telle qu'on l'utilise en a besoin. Pour résumer :

Tout d'abord, imaginons que l'on exprime la propension à faire défaut comme étant une espérance du temps  $T_i$  que la société  $i$  met à faire défaut. Ainsi, une société avec un rating AAA devrait avoir un  $T_i$  très lointain, tandis qu'une société avec un rating bien plus mauvais, C par exemple, devrait avoir un  $T_i$  très rapproché. Bien sûr, au vu de l'incertitude planant autour de ce  $T_i$ , on peut considérer qu'il existe une distribution du temps avant de faire défaut, c'est-à-dire une dispersion autour de cette valeur.

Quelle serait la forme de cette distribution ? Peut-être quelque chose comme ce qui est illustré à la figure 6.1.

**Figure 6.1**

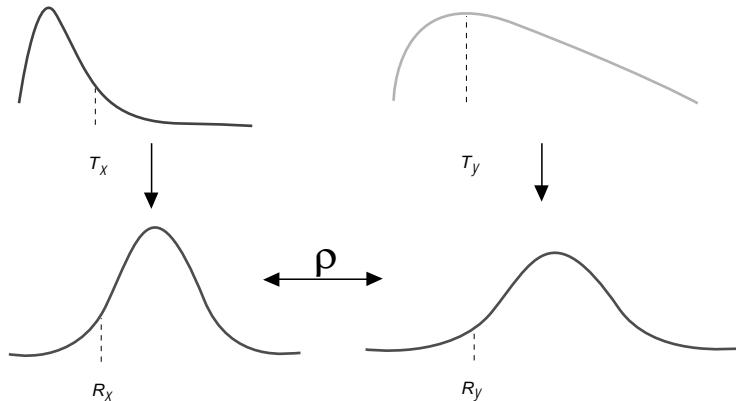
**Forme de la distribution.**



Prenons maintenant deux contreparties : elles peuvent avoir clairement une distribution différente de ce « temps à faire défaut ». Certains auteurs ont imaginé que, quelle que soit la distribution de ce temps au défaut, on pouvait « mapper » (faire coïncider ou calquer) celle-ci sur une distribution de probabilité normale, et ce pour chaque contrepartie. Ensuite, on pourrait toujours utiliser un paramètre de corrélation ( $\rho$ ) entre les distributions ainsi mappées (voir figure 6.2).

**Figure 6.2**

**En haut :**  
**distributions**  
**originales (Q(.)).**  
**En bas :**  
**distribution**  
**normale (N(.)).**



Chaque distribution de probabilité normale est apparentée à sa distribution originale en ce sens qu'elles sont équivalentes en quantiles exprimés. Ainsi, la probabilité exprimée par une valeur de  $T_x$  dans le premier cas est équivalente à celle qui est représentée

par une valeur de  $R_x$  dans le deuxième cas :

$$\begin{aligned} Q_1(T_x) &= N(R_x) \rightarrow R_x = N^{-1}(Q_1(T_x)) \\ Q_2(T_y) &= N(R_y) \rightarrow R_y = N^{-1}(Q_2(T_y)) \end{aligned}$$

Ceci veut dire qu'on transforme notre désir de savoir si le  $T_i$  d'une société  $i$  est plus grand ou plus petit que  $T$  (l'échéance finie de sa dette ou une maturité donnée, par exemple un an), en quelque chose d'autre qui équivaut à se demander si  $R_i$  est plus grand ou plus petit que  $R_T$  :

$$\Pr(T^* < T) = \Pr(R^* < R_T)$$

Ce concept de « mapping » est nommé « copula », et le fait d'utiliser une loi normale comme distribution finale fait que l'on appelle ceci une « gaussian copula »<sup>1</sup>.

Maintenant, imaginons que chacune des variables  $R$  puisse être représentée par un modèle à un facteur, c'est-à-dire que chaque série  $R$  possède un lien commun plus ou moins fort avec une variable commune et que le reste est une composante idiosyncrasique :

$$R_i = \underbrace{a_i F}_{\text{lien à la variable commune}} + \underbrace{\sqrt{1 - a_i^2} Z_i}_{\text{lien à la variable idiosyncratique}}, F, Z_i \sim N(0, 1)$$

Le gros avantage est que :

1. On peut voir parfaitement ceci comme une analogie au modèle de marché : chaque série de rendement est liée à un facteur commun qui est le facteur de marché. Ici, il s'agit de dire qu'il existe un facteur de type « économie » qui rend les sociétés éventuellement plus faibles ou plus fortes dans leur ensemble (ceci définit la part de risque systématique). Le reste est un facteur  $Z_i$  propre à chaque titre et qui le rend propre.
2. On connaît parfaitement les propriétés de cette formulation, à savoir que la corrélation n'est alors simplement que  $\rho_{1,2} = a_1 a_2$  entre deux sociétés.

Fort de ceci, et sans vraiment s'intéresser à la loi des variables  $T_i$  (nous ne sommes intéressés que par la probabilité qu'elles représentent), on applique une série de développements des probabilités et de l'algèbre... et comme avant, on commence par l'équivalence de probabilité dans les deux univers...

$$\Pr(R_i < R_T | F) = \Pr(T_i < T | F) \rightarrow N \left[ \frac{R_T - a_i F}{\sqrt{1 - a_i^2}} \right] = N \left[ \frac{N^{-1}(Q_i(T)) - a_i F}{\sqrt{1 - a_i^2}} \right]$$

Pour simplifier au maximum, on va imaginer que les sociétés partagent le même  $a$ , donc la même corrélation et la même distribution  $Q$ , alors :

$$\Pr(T_i < T | F) = N \left[ \frac{N^{-1}(Q(T)) - \sqrt{\rho} F}{\sqrt{1 - \rho}} \right] = Q(T | F)$$

1. Vu que tout calcul statistique de moyenne et d'écart-type sur des données empiriques est *de facto* une manière de « mapper » nos données vers une distribution normale, sachez que la tentation est grande pour certains auteurs de remplacer le mot « corrélation linéaire » par « gaussian copula ». Ce discours plus qu'imperméable est néanmoins très « in ».

Pour finir, ce qui nous inquiète c'est que  $F$  soit plus petit qu'une certaine valeur, car cela augmenterait notre probabilité de défaut. Une alternative est de chercher à déterminer la probabilité que représente  $F$  d'avoir des cas encore pires. Si l'on veut prendre une valeur de  $F$  telle que l'on est sûr à  $X\%$  qu'il n'y aura pas de cas de  $F$  plus défavorable encore, alors il faut remplacer  $F$  par  $-N^{-1}(X)$ , c'est-à-dire  $Pr(F < N^{-1}(X)) = X$ , donc  $Pr(F > N^{-1}(X)) = 1 - X$  ou  $Pr(F < -N^{-1}(X)) = X$ . On obtient finalement que la « plus mauvaise probabilité » (worst-case probability) à  $X\%$  de confiance est de :

$$WPr_{X\%} (T_i < T | F) = N \left[ \frac{N^{-1}(Q(T)) + \sqrt{\rho} N^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}} \right]$$

Ce résultat est celui de Vasicek (1987), repris en 2002 dans un article de *Risk Magazine* consacré au développement de la méthode KMV, de la société portant le même nom. Cette méthode représente l'une des approches les plus rapides pour obtenir une « valeur à risque de crédit », comme le montrera un exercice ci-dessous. L'accord de Bâle 2 reprendra lui-même cette définition, d'où son importance pratique. Hull (2007) présente cette démarche de manière très pédagogique.

## 4 Produits dérivés de crédit

Deux produits dérivés de crédit méritent d'être mentionnés dans ce recueil : les *Credit Default Swaps* (CDS) et les *Collateralized Debt Obligations* (CDO).

Les premiers sont de pures assurances contre le défaut d'une tierce contrepartie. Une contrepartie A paie un certain taux à une contrepartie B qui, le cas échéant, dédommagera A si une contrepartie C fait défaut. Dans un marché parfait, le taux payé devrait être équivalent au *credit spread* (*cs*) montré plus haut.

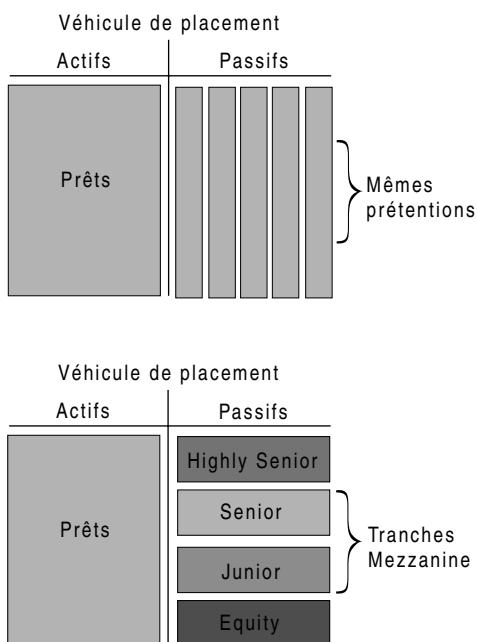
Les CDO résultent d'une opération de titrisation un peu spéciale. Des prêts ou des CDS sont groupés et mis dans un véhicule de placement qui sera redécoupé en titres. Normalement, la titrisation consiste à découper des titres aux prétentions égales. Le CDO, lui, fait un découpage en tranches inégales, d'après le « pari » de défaut que fait l'investisseur. Cela revient à créer une structure avec des tranches de responsabilité différente. Lorsque des prêts font défaut dans le portefeuille, la tranche la plus basse souffrira de cette perte en premier. Et ainsi de suite en allant vers les tranches supérieures. Bien sûr, vu le risque, les tranches inférieures ont un meilleur « coupon » que les tranches supérieures. C'est un peu comme si au moment de couper un gâteau l'on faisait des tranches horizontales au lieu de tranches verticales(voir figure 6.3). Quelqu'un prendrait les cerises, un autre la crème au milieu et celui du bas prendrait la croûte.

Les CDS peuvent être évalués simplement comme le démontrera un exercice ci-dessous, bien que l'évaluation soit plus fine en pratique.

L'évaluation d'une tranche de CDO dépend en fait de sa « hauteur » dans le panier, et donc du nombre de contreparties qui peuvent faire défaut à l'actif avant de toucher cette tranche. Une évaluation de tranche CDO est d'ailleurs équivalente à l'évaluation de ce que l'on appelle le « *nième CDS à faire défaut* » (*nth-to-default CDS*). Il s'agit donc de connaître la probabilité marginale d'un défaut de plus dans le portefeuille.

Figure 6.3

## Les CDO.



Hull et White (2004) proposent de réutiliser l'idée de Vasicek présentée plus haut pour évaluer la probabilité de défaut. Tout d'abord nous nous rappelons que la probabilité de défaut, c'est-à-dire que le temps du défaut soit atteint en  $T$ , conditionnelle à la valeur du facteur commun  $F$ , est de :

$$Q(T|F) = N \left[ \frac{N^{-1}(Q(T)) + \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right]$$

Conditionnellement à  $F$ , ces défauts sont indépendants, et comme la probabilité qu'une tranche soit atteinte dépend du nombre de défauts, on sait que la probabilité binomiale de  $n$  défauts enregistrés au temps  $T$  dans un portefeuille de  $N$  contreparties sera de :

$$\Pr(\# \text{défauts} = n | F) = \frac{N!}{(N-n)!n!} Q(T|F)^n [1 - Q(T|F)]^{N-n}$$

On peut jouer avec les deux dernières expressions pour calculer l'espérance de cash-flows à recevoir pour un produit dépendant de ces probabilités. Étant donné qu'il s'agit de probabilités conditionnelles, ces espérances devraient être calculées pour un  $F$  donné et ensuite intégrées sur tous les  $F$  possibles. Ou alors, on se fixe sur un  $F$  donné correspondant à un « plus mauvais scénario », comme ci-dessus.

## Résumé

Ce chapitre met en évidence certains développements en matière de risque de crédit. Parmi ceux-ci, les éléments suivants méritent d'être soulignés :

- Le risque de crédit peut être vu comme étant l'option que donnent les créanciers d'une société aux actionnaires de faire défaut :  $D_0 = Fe^{-\gamma T} - \text{put}$

$$D_0 = \frac{\underbrace{Fe^{-rT}}_{\text{Valeur de la dette sans risque}} - \underbrace{N(-d_2)}_{\text{Probabilité de défaut}}}{\underbrace{\left[ Fe^{-rT} - V \frac{N(-d_1)}{\underbrace{N(-d_2)}_{\text{Valeur actuelle espérée du recouvrement}}} \right]}_{\text{Valeur actuelle espérée de la perte}}}.$$

- Les obligations convertibles permettent à leur détenteur de les convertir en actions à l'échéance. Cette option de conversion, le warrant, s'évalue comme un call et la valeur de l'obligation convertible vaut :

$$D + \text{call}(\gamma V, F, T) = \text{dette risquée} + \text{warrant}$$

- L'expression suivante donne une réponse au besoin de calculer la probabilité de défaut qui ne sera pas dépassée dans X% des cas :

$$\text{WPr}_{X\%}(T_i < T | F) = N\left[\frac{N^{-1}(Q(T)) + \sqrt{\rho}N^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

où  $Q(T)$  représente la probabilité attendue inconditionnelle d'un défaut avant  $T$  et  $\rho$  la corrélation moyenne de défaut existant dans le portefeuille global.

- La probabilité conditionnelle à l'état de l'économie de  $n$  défauts dans un portefeuille de  $N$  contreparties est de :

$$\Pr(\#\text{défauts} = n | F) = \frac{N!}{(N-n)!n!} Q(T|F)^n [1 - Q(T|F)]^{N-n}$$

## Références bibliographiques

- BRIYS E. et DE VARENNE F., « Valuing Fixed Rate Debt : An Extension », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 32, 2, Juin 1997, pp. 239-249.
- DUFFIE D. et SINGLETON J., « Modeling the term structures of defaultable bonds », *Review of Financial Studies*, 12, 1999, pp. 687-720.
- HULL J., *Options, futures et autres actifs dérivés*, 6<sup>e</sup> éd., Pearson Education, 2007.
- HULL J., *Gestion des risques et institutions financières*, Pearson Education, 2007.
- JARROW R. et TURNBULL S., « Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk », *Journal of Finance*, 50, 1995, pp. 53-86.
- JARROW R., LANDO D. et TURNBULL S., « A Markov model for the term structure of credit risk spreads », *Review of Financial Studies*, 10, 1997, pp. 481-523.
- LELAND H., « Corporate debt value, bond covenants and optimal capital structure », *Journal of Finance*, 49, 1994, pp. 1213-252.

LELAND H. et TOFT K., « Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads », *Journal of Finance*, 51, 1996, pp. 987-1019.

LELAND H., « Agency costs, risk management and capital structure », *Journal of Finance*, 53, 1998, pp. 1213-1243.

LONGSTAFF F. et SCHWARTZ E., « Valuing risky debt : A new approach », *Journal of Finance*, 50, 1995, pp. 789-820.

MERTON R., « On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates », *Journal of Finance*, 29, 1974, pp. 449-470.

PIROTTE H., « A structural model of the term structure of credit spreads with stochastic recovery and contractual design », *Working Papers*, HEC Lausanne, 1999.

VAN DEVENTER D.R. et IMAI K., *Financial Risk Analytics*, Irwin, 1997.

### Commentaires

Le traitement plus structurel du risque de crédit a démarré en 1973-74 quand Merton a proposé d'appliquer le cadre de l'évaluation d'options financières à ce problème. À la fin des années 1990, alors que la recherche a permis une certaine maîtrise des risques de marché, la nécessité d'étendre l'évolution du domaine de la gestion des risques au risque de crédit et les discussions pour élaborer un nouveau cadre réglementaire, connu sous le nom de Bâle II, génèrent un engouement sans précédents. Les partisans des modèles « à forme réduite », c'est-à-dire des modèles probabilistes sans recherche de variables sous-jacentes, affrontent les défenseurs des modèles de type « structurel », c'est-à-dire des modèles où le défaut est économiquement expliqué comme le fait que la valeur des actifs tombe en dessous de la valeur de la dette au passif. Parmi les premiers, on trouvera : Jarrow (1978, 1997), Jarrow et Turnbull (1995), Jarrow, Lando et Turnbull (1997), Duffie et Singleton (1999). Parmi les seconds, on peut citer : Merton (1974), Leland (1994, 1998), Leland et Toft (1996), Longstaff et Schwartz (1995), Briys et de Varenne (1997), Pirotte (1999).

# Problèmes et exercices

La première partie des exercices s'intéresse à la valorisation d'obligations classiques et à l'influence des taux d'intérêt sur le prix. La structure des taux d'intérêt et la problématique du risque de crédit sont ensuite analysées. Enfin, les derniers exercices sont consacrés à l'évaluation des obligations convertibles.

## Risque de crédit

### Exercice 1 Évaluer une dette risquée à l'aide d'un modèle binomial

#### Énoncé

HauteTek SA est une entreprise active dans le domaine nouveau de la nanotechnologie. La société a récemment été introduite en Bourse et le cours de l'action est actuellement de 10 €. Le nombre d'actions en circulation est de 250 000. La société n'a pas de dettes. Ayant des pertes reportées importantes, elle ne devra payer aucun impôt dans le futur prévisible. Le projet de construction d'une nouvelle usine de production de tissus autonettoyants vient d'être approuvé. La presse financière s'est largement fait l'écho de cette décision et le cours de l'action a réagi positivement à cette nouvelle. Le montant de l'investissement s'élève à 2 millions d'euros. Reste à trouver les fonds nécessaires à la réalisation du projet.

M. Flopper, le directeur financier, se demande si la société ne pourrait pas emprunter le montant nécessaire. Des contacts avec une banque d'affaires lui ont permis d'apprendre qu'il pourrait envisager l'émission d'un zéro-coupon venant à échéance dans deux ans et de valeur nominale égale à 3 millions d'euros. La banque serait prête à souscrire à ce zéro-coupon pour un montant de 2 millions d'euros, ce qui correspond à un taux d'emprunt de 22,47 % par an. M. Flopper se demande si ce n'est pas excessif étant donné le taux d'intérêt sans risque de 2 %. Il sait cependant que l'avenir de la société est fort incertain : au cours d'une année, sa valeur peut doubler ou diminuer de moitié. Il vous propose d'analyser le problème sur la base d'un modèle binomial avec un pas temporel d'un an.

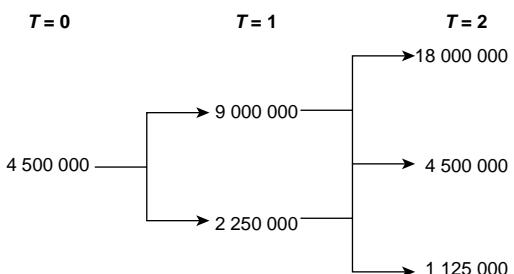
- a** Construisez un arbre binomial montrant l'évolution de la valeur de la société au cours des deux prochaines années.
- b** Calculez la valeur des actions à l'échéance (dans deux ans).
- c** Sur la base du modèle binomial d'évaluation d'options, calculez la valeur des actions aujourd'hui si la société emprunte les 2 millions aux conditions proposées par la banque d'affaires.
- d** Quelle est la valeur de la dette ? Expliquez la différence avec la valeur d'une dette sans risque.

**Solution**

- a** La valeur initiale de la société est égale à 2,5 millions d'euros (250 000 actions à 10 €). La réalisation du projet nécessite un apport de fonds à concurrence de 2 millions d'euros, ce qui porte la valeur à 4,5 millions d'euros. Les paramètres de l'arbre binomial (voir chapitre 4) sont  $u = 2$  et  $d = 0,50$ . Ainsi, dans un an, la valeur de la société peut valoir soit  $2 \times 4,5 = 9$  millions d'euros, soit  $0,5 \times 4,5 = 2,25$  millions d'euros. L'arbre binomial donnant l'évolution de la valeur de la société (en €) est montré à la figure 6.4.

**Figure 6.4**

**Arbre binomial donnant l'évolution de la valeur de la société (en €).**



- b** La société fait faillite à l'échéance si la valeur de l'entreprise est inférieure à la valeur nominale de la dette (3 millions d'euros). La valeur des actions est donc égale à :
- $V_T - 3\ 000\ 000$  en l'absence de faillite ;
  - 0 en cas de faillite.

Nous obtenons les valeurs suivantes pour les actions à l'échéance :

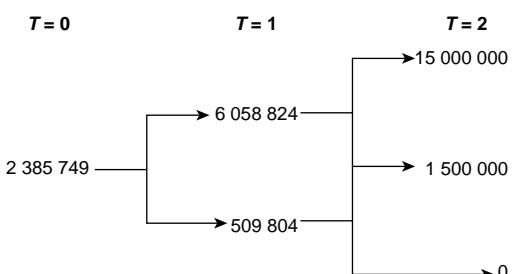
- $A = 15\ 000\ 000$  € si  $V_T = 18\ 000\ 000$  € ;
- $A = 1\ 500\ 000$  € si  $V_T = 4\ 500\ 000$  € ;
- $A = 0$  si  $V_T = 1\ 125\ 000$  €.

- c** La valeur des actions (voir figure 6.5) est obtenue en les assimilant à un call européen sur l'entreprise venant à échéance dans deux ans et de prix d'exercice égal à la valeur nominale du zéro-coupon (3 millions d'euros). La probabilité de hausse dans un monde neutre au risque est :  $p = \frac{1+r_f-d}{u-d} = \frac{1,02-0,50}{2-1,50} = 0,3467$ .

La valeur en  $t=0$  est calculée en appliquant la procédure d'évaluation à reculons que nous avons développée au chapitre 3.

**Figure 6.5**

**Valeur des actions.**



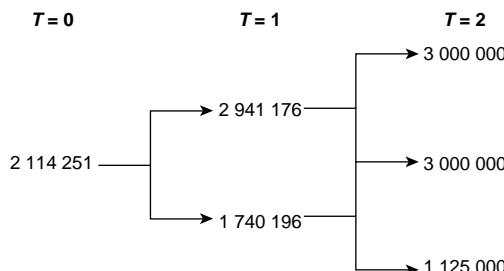
La valeur des actions  $A = 2,386$  millions d'euros. Notons qu'elle est inférieure à la valeur initiale (2,5 millions d'euros). Cela signifie que les conditions de l'emprunt sont défavorables aux actionnaires. En effet, nous allons voir que le montant emprunté (2 millions

d'euros) est inférieur à la valeur de marché de la dette, ce qui entraîne une perte pour les actionnaires.

- d** La valeur de marché de la dette peut être calculée directement en utilisant le modèle binomial (voir figure 6.6).

Figure 6.6

Valeur de marché de la dette.



La valeur de marché (2,114 millions d'euros) est supérieure au montant emprunté (2 millions d'euros) : le taux exigé par la banque d'affaires entraîne une baisse de la valeur des actions égale à la différence entre les deux montants (0,114 million d'euros).

En l'absence de risque, la valeur de la dette serait obtenue en actualisant la valeur nominale au taux d'intérêt sans risque :

$$\text{Valeur de la dette non risquée} = 3/(1,02)^2 = 2,883 \text{ millions d'euros}$$

La différence entre les valeurs de la dette risquée et de la dette sans risque est la valeur d'un put. Ce put traduit l'option qu'ont les actionnaires de déclarer la faillite de l'entreprise à l'échéance, ce qui leur garantit que la valeur de leurs actions ne sera jamais négative.

Le constat d'une valeur de marché supérieure au montant emprunté a pour corollaire que le taux d'emprunt proposé par la banque d'affaires est trop élevé. Le montant emprunté étant fixé, la banque devrait accepter une diminution de la valeur nominale du zéro-coupon. Vous pouvez vérifier (en utilisant la fonction Valeur cible dans Excel) que la valeur nominale du zéro-coupon qui réalise l'égalité entre la valeur de marché de la dette et le montant emprunté est égale à 2,793 millions d'euros. Cela correspond à un taux d'emprunt de 18,17 % par an.

## Exercice 2 Évaluer une dette risquée à l'aide d'un modèle de Merton

### Énoncé

M. Flopper sait que le modèle binomial, bien que très utile pour se rendre compte de la réalité du profil de pertes/gains à l'échéance, est réducteur puisqu'il ne considère pas une infinité d'étapes entre  $t = 0$  et  $t = 2$ . Sachant que sous certaines conditions le modèle binomial converge vers la formule de Black-Scholes, M. Flopper vous demande de recalculer les résultats du problème précédent selon cette formule et de comparer les résultats.

- a** Calculez la valeur de la dette et des actions aujourd’hui selon la formule de Black-Scholes si la société emprunte les 2 millions aux conditions proposées par la banque d’affaires. Que valent la probabilité de défaut et le taux de recouvrement implicites ?
- b** Calculez le rendement à l’échéance tel qu’il est donné par le modèle et comparez-le au rendement contractuel.

**Solution**

- a** Cox, Ross et Rubinstein (1979) ont trouvé que le modèle binomial convergeait vers la formule de Black-Scholes lorsque  $u = e^{\sigma\sqrt{T/n}}$ ,  $d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , où  $n$  est le nombre d’étapes considérées pour le modèle binomial. Dans le cas présent, nous avons deux années et deux étapes, ce qui donne  $\sigma = \ln(u) = \ln(2) = 69,31\%$ . De même, nous avons besoin de l’équivalent « continu » du taux sans risque, c’est-à-dire  $\ln(1 + 2\%) = 1,98\%$ . Par conséquent, nous pouvons calculer la valeur de la dette à partir des équations suivantes :

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{V}{e^{-r_f} F})}{\sigma_V \sqrt{T}} + 0,5\sigma_V \sqrt{T} = \frac{\ln(\frac{4,5}{e^{-1,98\% \times 2} 3})}{69,31\% \times \sqrt{2}} + 0,5 \times 69,31\% \times \sqrt{2} = 0,9442$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T} = 0,9442 - 69,31\% \times \sqrt{2} = -0,0361$$

$$D = Fe^{-rT} - \underbrace{N(-d_2)}_{\text{Probabilité de défaut}} \left[ Fe^{-rT} - \underbrace{V \frac{N(-d_1)}{N(-d_2)}}_{\text{Valeur actuelle espérée du recouvrement}} \right]$$

$$= 3e^{-1,98\% \times 2} - N(0,0361) \left[ 3e^{-1,98\% \times 2} - 4,5 \frac{N(-0,9442)}{N(0,0361)} \right] = 2,884 - 0,5144 \times 1,374 = 2,177$$

Cela donne une probabilité de défaut de 51,44 %. Le taux de recouvrement est mesuré soit en valeur actuelle, soit en valeur finale (il faut toujours comparer les valeurs à la même date). Le résultat est évidemment identique.

$$1 - \frac{\text{VA(perte)}}{\text{VA(valeur faciale)}} = 1 - \frac{1,374}{3e^{-1,98\% \times 2}} = 1 - \frac{\text{VF(perte)}}{\text{VF(valeur faciale)}}$$

$$= 1 - \frac{1,374e^{1,98\% \times 2}}{3} = 52,35\%$$

La valeur des actions peut être obtenue en calculant explicitement celle du call qu’elles représentent ou, dans le cas des hypothèses de Merton (une dette zéro-coupon, pas d’impôts ni de taxes, pas de dividende ou autres flux versés aux actionnaires d’ici à  $T$ , etc.), elle peut être déduite de la valeur de l’entreprise moins la valeur calculée de la dette :

$$A = V - D = 4,5 - 2,177 = 2,323 \text{ millions d'euros}$$

De nouveau, on se rend compte du transfert de valeur implicite des actionnaires vers les créanciers que ce contrat suppose.

- b** Le rendement à l'échéance risqué est alors de :  $y_c = -\frac{1}{T} \ln \left[ \frac{D}{F} \right] = -\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{2,177}{3} \right] = 16,04\%$ . Cela équivaut en rendement nominal annuel à  $e^{16,04\%} - 1 = 17,40\%$ . L'écart avec le taux sans risque est de  $16,04\% - 1,98\%$  (ou  $17,40\% - 2\% = 15,40\%$  en nominal). Cette différence vient du fait que la société peut faire faillite. Il s'agit donc de la prime de risque. Le rendement à l'échéance est inférieur à  $22,47\%$  (le taux de l'emprunt) puisque la valeur de la dette est supérieure aux 2 millions réellement investis.

## Évaluation d'obligations convertibles

### Exercice 3 Évaluer la prime liée au droit de conversion

#### Énoncé

La société Floppi désire emprunter 1 000 millions d'euros pour financer un nouveau projet dont les flux financiers lui permettront de rembourser l'emprunt dans cinq ans. Une première possibilité est d'émettre une obligation classique à cinq ans avec un coupon de 5,5 %. Le rendement à l'échéance demandé pour cet émetteur (dû à son rating et à l'échéance de cinq ans) est de 9 %. La seconde possibilité est d'émettre une obligation convertible. Le banquier de la société estime que les caractéristiques de celle-ci (sans clause call) sont un taux de coupon de 3,25 % avec un ratio de conversion de 4 : 1. Une action de cette société cote actuellement à 180 €. Les options cotées en Bourse sur ces actions traitent une volatilité annuelle de l'ordre de 20 %. Le taux sans risque est de 3 %.

- a** Quelle est la prime implicite liée à l'option de conversion ?  
**b** Calculez la prime explicite liée au warrant. Qu'en pensez-vous ?

#### Solution

- a** Pour valoriser l'obligation classique, il faut actualiser ses flux financiers au taux de 9 % :

$$P = C FA_{n,y\%} + v_n F = 55 FA_{5,9\%} + v_5 1\ 000 = 863,86 \text{ millions d'euros}$$

La partie obligataire de l'obligation convertible vaut quant à elle :

$$P^{conv} = C FA_{n,y\%} + v_n F = 32,5 FA_{5,9\%} + v_5 1\ 000 = 776,35 \text{ millions d'euros}$$

La différence entre ces deux valeurs, 87,51 millions d'euros, représente la valeur de l'option de conversion (le warrant).

- b** Nous pouvons utiliser la formule de Black-Scholes pour évaluer l'option explicitement, grâce aux paramètres présentés auparavant. Nous trouvons la valeur d'un droit de conversion :

$$Call = 180 \cdot N(-0,1755) + \frac{1\ 000}{4} e^{-\ln(1+3\%) \times 5} N(-0,6228) = 20,07 \text{ millions d'euros}$$

Cependant, une obligation convertible donne droit à quatre actions. Par conséquent, la prime totale s'élève à  $4 \times 20,07 = 80,27$  millions d'euros. L'obligation convertible est

donc relativement chère puisqu'elle demande un prix trop élevé pour le warrant. Cela vient du fait que le taux de coupon est trop bas. Avec l'outil Valeur cible d'Excel, on trouve qu'un coupon de 3,44 % donnerait une valeur de 80,27 millions d'euros pour la prime implicite.

La différence de prix du call peut également être partiellement expliquée par la micro-structure. En effet, nous ne savons pas quel est le nombre actuel d'actions dans la société, ni combien d'actions devront être émises pour répondre à toutes les demandes de conversion potentielles. Notre évaluation se fonde sur un impact marginal d'une conversion individuelle. Nous évaluons l'option de l'obligation convertible comme s'il s'agissait d'une option standard. Or, si l'on reçoit réellement des actions (livraison physique et pas cash settlement), il y aura certainement une dilution de la valeur des actions actuelles si nous ne sommes pas les seuls à convertir, d'où le fait qu'un discount plus important doive être appliqué par rapport à l'obligation standard.

## Exercice 4 Émettre une obligation convertible

### Énoncé

Après avoir discuté avec son banquier, M. Flopper, directeur financier de HauteTek, se demande si l'émission d'une obligation convertible ne constituerait pas une meilleure solution pour financer l'usine de produits autonettoyants (voir exercice 6.6). Le montant des capitaux que doit lever la société s'élève à 2 millions d'euros. La société n'a pas de dettes et ne paie pas d'impôts. M. Flopper a noté les informations nécessaires pour l'analyse de la décision sur la base d'un modèle binomial avec pas d'un an :

- nombre d'actions en circulation : 250 000 ;
- cours de l'action : 10 € ;
- rentabilité de l'action en cas de hausse : + 100 % ;
- rentabilité de l'action en cas de baisse : - 50 % ;
- taux d'intérêt sans risque : 2 %.

Supposons que HauteTek émette 125 000 obligations convertibles, chacune étant un zéro-coupon de valeur faciale égale à 24 € et convertible en une action.

- a** Dans quelle condition les détenteurs d'obligations convertibles décideront-ils de convertir ?
- b** Calculez la valeur de l'ensemble des obligations convertibles dans deux ans en utilisant un arbre binomial avec pas d'un an.
- c** Calculez la valeur des actions et la valeur des obligations convertibles à l'émission.

### Solution

- a** En cas de conversion, les détenteurs des obligations convertibles recevront 125 000 actions nouvelles. Le nombre d'actions initial étant de 250 000, le nombre total d'actions après conversion sera de 375 000. Les nouveaux actionnaires détiendraient donc 1/3 de l'entreprise. Dans le cas contraire et en l'absence de faillite, les obligataires recevront la valeur nominale de la dette. La condition de conversion en l'absence de faillite est :  $(1/3) \times V_3 > 3\ 000\ 000 \text{ €} \times V_3 > 9\ 000\ 000 \text{ €}$ .

- b** L'arbre binomial représentant la valeur de l'entreprise est identique à celui qui est présenté dans l'exercice 6.1. Notons que la valeur de l'entreprise pourrait devenir inférieure à la valeur faciale de la dette. Dans ce cas, les actionnaires ont intérêt à invoquer la clause de responsabilité limitée et à déclarer la faillite, ce qui leur évite de devoir recapitaliser l'entreprise pour permettre le remboursement de la dette. Dès lors, la valeur des obligations convertibles correspond à la valeur résiduelle de la société. En l'absence de faillite, il n'y a conversion que dans le cas où l'entreprise vaut 18 millions. L'ensemble des obligations converties correspond alors à 1/3 de l'entreprise : 6 millions d'euros.

$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$		
Valeur de l'entreprise			Décision	Valeur des obligations convertibles
		18 000 000	Convertir	6 000 000
	9 000 000			
4 500 000		4 500 000	Ne pas convertir	3 000 000
	2 250 000			
		1 125 000	Ne pas convertir (faillite)	1 125 000

- c** Connaissant la valeur des obligations convertibles à l'échéance, nous pouvons aisément calculer la valeur de marché à l'émission en appliquant la technique d'évaluation neutre au risque. Nous obtenons :

$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
		6 000 000
	3 960 784	
2 460 784		3 000 000
	1 740 196	
		1 125 000

La valeur initiale des obligations convertibles est donc supérieure au montant de l'émission. La valeur des actions est calculée par différence entre les valeurs de l'entreprise et de l'obligation convertible,  $A = 4 500 000 - 2 460 786 = 2 039 216 \text{ €}$ . L'émission de cette obligation convertible étant surévaluée, cela entraînera une chute de la valeur des actions.

# Produits dérivés de crédit

## Exercice 5 Valoriser un CDS de manière discrète et en « forme réduite »

### Énoncé

Après consultation de son banquier, M. Flopper apprend que l'on évalue la probabilité de défaut annuelle (conditionnelle au non-défaillant préalable) de sa société à 8 % (probabilité risque-neutre). Fort de cette information, M. Flopper se dit qu'il pourrait donc connaître assez facilement le coût supplémentaire pour le banquier d'un prêt à cinq ans envers sa société par rapport à un prêt hors risque. Ceci lui permettrait ensuite de juger le taux offert par cette banque, en comparaison avec son calcul théorique. La banque étant soumise aux règles de Bâle 2, M. Flopper estime *grosso modo* que le taux de recouvrement en cas de faillite qui doit être appliqué dans son cas est de 40 %.

Puisqu'il connaît déjà la probabilité et ce taux de recouvrement, M. Flopper n'a pas besoin de se reposer sur le genre de calcul des exercices 6.1 et 6.2 pour dériver ces valeurs.

Le taux hors risque dans le marché étant de 4 %, M. Flopper se pose les questions suivantes :

- a** S'il existe un marché qui traite le risque de crédit, comment déterminer rapidement ce coût supplémentaire pour le banquier ?
- b** Calculez vous-même la valeur de ce coût supplémentaire pour le banquier, et donc le coût qui devrait vous être imputé.

### Solution

- a** Le *Credit Default Swap* (CDS) est un produit couramment traité dans les marchés financiers aujourd'hui, qui permet à une contrepartie de s'assurer auprès d'un agent contre le risque de défaut d'une tierce contrepartie. Le coût de ce produit est donc une prime d'assurance contre le défaut. Si la combinaison d'un prêt risqué et d'une assurance contre le défaut potentiel de ce prêt constitue synthétiquement un prêt hors risque, alors, selon le principe d'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA), le coût de cette assurance n'est rien d'autre que le spread de crédit qui devrait être demandé pour le prêt risqué ! Effectivement, le fait que ces « assurances » soient traitées et puissent devenir des instruments liquides permettrait d'avoir une excellente source de renseignement sur le spread de crédit, autrement meilleur que celui que l'on obtient en regardant le prix d'obligations que l'on sait très peu liquides.
- b** Le CDS, bien qu'il corresponde plutôt à une assurance et donc à une option (on paie une prime pour pouvoir exercer cette assurance en cas de défaut), est appelé un « swap » en ce sens qu'il suppose l'échange d'une prime régulièrement payée contre l'indemnisation en cas de défaut d'une contrepartie. Il y a donc si l'on veut deux « jambes » à la transaction :
  1. une jambe correspondant à une suite de paiements de primes tant que le défaut n'a pas lieu ;
  2. une jambe correspondant à une indemnité sur le montant perdu si le défaut a lieu.

Le calcul, comme le prouve Hull dans une simple démonstration, peut se faire en trois parties.

- Dans un premier temps, il convient de calculer la probabilité de défaut inconditionnelle pour chaque année pour se rendre compte de ce que cela signifie. Ainsi une probabilité de défaut de 8 % suppose un taux de survie de 92 % pour la deuxième année. Le taux de 8 % de la deuxième année s'applique donc seulement aux 92 % de cas où l'on existe encore au début de l'année 2, et ainsi de suite. Les taux de défaut inconditionnels et donc les différents taux de survie, année après année, sont :

Année	PD inconditionnelle	Probabilité de survie
1	8,00 %	92,00 %
2	$7,36 \% = 92 \% \times 8 \%$	84,64 %
3	$6,77 \% = 84,64 \% \times 8 \%$	77,87 %
4	$6,23 \% = 77,87 \% \times 8 \%$	71,64 %
5	$5,73 \% = 71,64 \% \times 8 \%$	65,91 %

**Partie 1** Imaginons pour l'instant que la prime annuelle est de 1 € ; cela veut dire que l'assuré va payer un flux de 1 € tant que la tierce contrepartie sur laquelle l'assurance est prise est toujours vivante, c'est-à-dire dans les cas décrits dans la troisième colonne du tableau précédent. Ainsi, on a :

Année	Psurvie	$E(\text{paiement}) = P_{\text{survie}} \times \text{paientement de } 1 \text{ €}$	Facteur d'actualisation à 4 % $= 1/(1+r)^{\text{année}}$	$VA(E(\text{paiement})) = E(\text{paiement}) \times \text{facteur d'actualisation}$
1	92,00 %	0,920000	0,9615	0,8846
2	84,64 %	0,846400	0,9246	0,7825
3	77,87 %	0,778688	0,8890	0,6923
4	71,64 %	0,716393	0,8548	0,6124
5	65,91 %	0,659082	0,8219	0,5417
				Somme = 3,5135

**Partie 2** Imaginons maintenant, pour ajouter un petit peu de complexité ou de complétude, que le défaut intervient systématiquement au milieu de l'année (c'est ici qu'une bonne part de discrétilisation entre en jeu). Cela veut dire que l'assureur paiera les 60 % (étant donné le taux de recouvrement de 40 %) du montant dans chaque cas de défaut. Pour pouvoir ajouter des cas à notre espérance, il nous faut les probabilités inconditionnelles calculées plus haut :

Année	PD inconditionnelle	Perte espérée = 1 - 40 %	E(indemnité) = PD × perte espérée	Facteur d'actualisation à 4 % = 1/(1 + r)^année	VA(E(indemnité)) = E(indemnité) × facteur d'actualisation
0,5	8,00 %	60 %	4,800 %	0,9806	0,0471
1,5	7,36 %	60 %	4,416 %	0,9429	0,0416
2,5	6,77 %	60 %	4,063 %	0,9066	0,0368
3,5	6,23 %	60 %	3,738 %	0,8717	0,0326
4,5	5,73 %	60 %	3,439 %	0,8382	0,0288
					Somme = 0,1869

**Partie 3** Puisque le défaut peut intervenir au milieu de l'année, cela veut dire que dans chaque cas (chaque ligne de notre tableau) l'assureur peut tout de même demander à l'assuré de payer la fraction d'année échue. En effet, dans notre premier tableau, nous avons supposé qu'on ne payait que si on survivait à la fin de l'année. Qu'en est-il si le défaut a déjà lieu pendant la première année ? Nous devons toujours la moitié de la prime alors... Voici ce petit raffinement, c'est-à-dire la valeur actuelle de l'espérance de « prime accrue » :

Année	PD inconditionnelle	E(prime accrue) = 0,5 € (pour 6 mois) × PD	Facteur d'actualisation à 4 % = 1/(1 + r)^année	VA(E(prime accrue)) = E(prime) × facteur d'actualisation
0,5	8,00 %	0,0400	0,9806	0,0392
1,5	7,36 %	0,0368	0,9429	0,0347
2,5	6,77 %	0,0339	0,9066	0,0307
3,5	6,23 %	0,0311	0,8717	0,0272
4,5	5,73 %	0,0287	0,8382	0,0240
				Somme = 0,1558

Au total, la somme des paiements 1+3 doit équivaloir à l'espérance d'indemnisation calculée sous 2, comme dans un swap standard.

Pour ce faire, il suffit de revenir sur notre hypothèse de 1 € de prime et de calculer combien devrait être cette prime telle que ces deux jambes [(1+3) et 2] s'annulent réciprocement.

Ainsi nous avons que :

- La jambe de l'assuré vaut :  $3,5135 + 0,1558 = 3,6693$  pour 1 € de prime.
- La jambe de l'assureur vaut : 0,1869.

Vu que la prime est un « coupon » qui peut être factorisé à travers tout le calcul, nous avons :

$$0,1869 = \text{prime} \times 3,6693 \rightarrow \text{prime} = 0,1869 / 3,6693 = 0,050948 \text{ ou } 5,0948 \%$$

Donc, le banquier devrait exiger  $4\% + 5,0948\% = 9,0948\%$  de rendement à l'échéance sur mon prêt.

## Exercice 6 Valoriser un nth-to-default CDS (ou une tranche CDO)

### Énoncé

Un jour, dans le train, M. Flopper rencontre un ancien ami. Il lui demande ce qu'il développe actuellement. Celui-ci lui répond qu'il est très excité par la mise sur le marché d'un nouveau produit qui permet à sa banque d'éliminer le risque de crédit, ou en tout cas de le revendre à d'autres agents sur le marché. Il s'agit de contrats CDO. Il continue en expliquant que « par le truchement de la corrélation de défaut qui n'est pas parfaite dans un portefeuille de crédits, on peut facilement grouper des prêts et ensuite revendre des tranches représentant des niveaux de défaut différents à des investisseurs différents ».

De retour au travail le lendemain, et après une nuit passée à rêver de découpage de tranches de gâteau, M. Flopper se dit que tout compte fait il en coûterait peut-être moins à sa banque de se défaire d'un risque de crédit, si celle-ci connaît cette possibilité de grouper donc de diversifier ces expositions, que dans le cadre de l'exercice précédent. Et puis, comme ce produit est plus complexe, la banque peut certainement intéresser certains investisseurs qui ne se rendront pas compte qu'ils lui permettent éventuellement de faire coup double : être dans un nouveau marché et acheter son assurance à des conditions très favorables. Mais encore faut-il comprendre comment cela marche et dans quel cas cette comparaison est faisable.

Dans le train le soir suivant, M. Flopper s'informe auprès de son ami qu'il a retrouvé :

- Les banques utilisent le modèle de Vasicek ainsi que le modèle binomial pour compter le nombre de défauts potentiels dans un portefeuille.
- Les banques constituent en général (valeur imaginaire) des portefeuilles d'un minimum de 100 contreparties, dont la probabilité de défaut moyenne à un an est de 4 %.
- La corrélation actuelle de défaut dans le marché est de 10 %.
- Les banquiers évaluent leur portefeuille de crédits dans différents « environnements » : une situation économique moyenne (50 % dans la distribution des situations économiques), une situation économique pénible (25 % dans la distribution), une situation économique épouvantable (1 % dans la distribution).

- a** Calculez les valeurs espérées de la probabilité de défaut après un an sur ce genre de portefeuille dans les différentes situations économiques décrites de manière abstraite.
- b** Sachant que la banque peut s'amuser à garder certaines tranches et à en revendre d'autres, M. Flopper a envie de connaître l'effet de la corrélation sur ce portefeuille et sur les tranches. En utilisant une corrélation variable de 0 % à 100 %, comment se comporte l'évaluation des tranches suivantes : la tranche « premier à faire défaut » *vs* la tranche « 40<sup>e</sup> à faire défaut » ?

### Solution

- a** Pour cette première partie, on peut utiliser de manière stricte la formule suivante présentée auparavant, avec les différentes valeurs de « situation économique » :  
Cela revient à dire dans notre cas que  $\rho = 10\%$ ,  $Q(T = 1 \text{ an}) = 4\%$  et que l'on choisit un  $X$  dont les valeurs sont respectivement : 50 %, 25 %, 1 %. Les résultats de probabilité

conditionnelle à l'état «  $F$  » de la nature (ici, supposé représenter la situation économique) sont les suivants :

$$N \left[ \frac{N^{-1}(4\%) + \sqrt{0,10}N^{-1}(50\%)}{\sqrt{1-0,1}} \right] = 3,25\%$$

$$N \left[ \frac{N^{-1}(4\%) + \sqrt{0,10}N^{-1}(25\%)}{\sqrt{1-0,1}} \right] = 5,26\%$$

$$N \left[ \frac{N^{-1}(4\%) + \sqrt{0,10}N^{-1}(1\%)}{\sqrt{1-0,1}} \right] = 14,23\%$$

Si la corrélation venait à tomber à 0, cela donnerait la solution triviale  $Q(T|F) = Q(T)$ . En d'autres termes, la probabilité de défaut sur un portefeuille de contreparties indépendantes est simplement égale à la probabilité moyenne de faire défaut de ces individus.

Mais quand la corrélation s'approche de 1, on a un comportement assez spécial de notre « copula gaussienne » : pour des valeurs de  $X$  (la probabilité représentée par l'état de l'économie, c'est-à-dire du facteur  $F$ ) supérieures à 9 %, la probabilité de défaut conditionnelle sur le portefeuille tombe à 0. Par contre, lorsqu'on descend vers des valeurs de  $X$  de 1 %, très rapidement cette probabilité grimpe à 100 %. Ceci montre très clairement la sensibilité que ce genre de modèle réserve à l'estimation de la corrélation.

- b** Pour valoriser la tranche « premier à faire défaut », nous devons calculer la probabilité d'avoir un ou plus de défauts dans le portefeuille. La valeur de cette tranche sera directement liée à la probabilité obtenue bien sûr. De même, la tranche « 40<sup>e</sup> à faire défaut » suppose que celle-ci est concernée seulement s'il y a plus de 39 défauts dans notre portefeuille de 100 contreparties.

Comme nous l'avons présenté plus haut, nous pouvons utiliser le modèle binomial pour calculer cette probabilité :

$$\Pr(\#\text{défauts} \geq n | F) = \sum_{k=n}^N \frac{N!}{(N-k)!k!} Q(T|F)^k [1 - Q(T|F)]^{N-k}$$

Cette probabilité peut être calculée dans Excel grâce à la fonction : 1-BINOMDIST(n,N,Q(T|F),TRUE).

Ainsi, avec  $X = 25\%$  et une corrélation de 10 %, on obtient 99,07 % de chances d'avoir un défaut ou plus. Avec une corrélation de 80 %, cette probabilité tombe à 13,62 %. Mais si l'on utilise un cas où  $X = 1\%$  et la tranche « 40 ou plus », on obtient les valeurs suivantes :

- avec une corrélation de 25 % : 2,8386 % de probabilité conditionnelle de défaut ;
- avec une corrélation de 80 % : 76,98 % de probabilité conditionnelle de défaut.

Suivant la tranche que l'on examine, on a donc un effet de la corrélation tout à fait inverse. Encore une fois, en jonglant avec ces valeurs, vous pourrez vous apercevoir assez rapidement de la sensibilité et des différences importantes de comportement.



# Structure financière et coût du capital

1. La valeur et la structure financière de la société dans un monde sans impôts . . . . .	189
2. Fiscalité et endettement . . . . .	195
3. La théorie du compromis . . . . .	200
<b>Problèmes et exercices</b>	
La valeur et la structure financière de la société dans un monde sans impôts . . . . .	205
Fiscalité et endettement . . . . .	212
La théorie du compromis . . . . .	218

Nous avons, jusqu'à présent, analysé les décisions financières en considérant que la valeur d'une entreprise (ou la *VAN* d'un projet) est indépendante de la structure financière. La justification théorique de cette approche est donnée par le théorème de Modigliani-Miller : dans un marché parfait des capitaux, en l'absence d'impôts, la politique d'une entreprise, à programme d'investissement donné, est indépendante de la structure financière.

La première partie de ce chapitre revisite le théorème dans le cadre du Médaf. Nous y analysons les conséquences du niveau d'endettement d'une entreprise sur le risque et la rentabilité attendue des actions ainsi que sur le coût moyen pondéré du capital.

Nous introduisons ensuite l'impôt sur les sociétés. Les charges d'intérêt étant déductibles, le recours à l'emprunt permet à l'entreprise de réaliser des économies fiscales. Ces économies ont pour effet d'accroître la valeur de l'entreprise endettée et de diminuer le coût moyen pondéré du capital.

Nous clôturerons par la théorie du compromis. Un endettement élevé peut conduire l'entreprise à des difficultés financières, voire à la faillite. La valeur actuelle des coûts pouvant résulter de cette situation constitue un frein à l'endettement. La théorie du compromis montre que le niveau d'endettement optimal est atteint lorsque, à la marge, l'avantage fiscal de l'endettement est égal à la valeur actuelle des coûts de détresse financière.

## 1 La valeur et la structure financière de la société dans un monde sans impôts

L'article publié en 1958 par Modigliani et Miller (MM) constitue le point de départ de l'analyse de la structure financière de l'entreprise. Cet article examine les conséquences du choix d'une structure financière dans le cadre des hypothèses suivantes :

- H1. Marchés parfaits des capitaux (notamment pas d'asymétrie d'information).
- H2. Absence de frais de transactions.
- H3. Pas d'impôts.
- H4. Politique d'investissement de l'entreprise fixée.

## 1.1 Proposition I : indépendance de la valeur et de la structure financière

La valeur d'une entreprise ( $V$ ) est la somme de la valeur de marché des actions ( $A$ ) et de la valeur de marché de la dette ( $D$ ) :

$$V = A + D$$

La valeur des actions (la capitalisation boursière) est obtenue en multipliant le nombre d'actions en circulation par le cours par action. La valeur de la dette est la valeur actuelle des intérêts et des remboursements futurs.

Soit  $V_U$  la valeur de l'entreprise en l'absence de dette ( $U$  pour « unlevered »). La proposition I de Modigliani-Miller s'énonce ainsi : sous les hypothèses H1 à H4, nous avons  $V = A + D = V_U$ .

## 1.2 Proposition II : rentabilité et structure financière

La proposition II de Modigliani-Miller précise les conséquences de l'endettement sur la rentabilité attendue des actions et sur le coût moyen pondéré du capital.

Soit :

- $r_{Actifs}$  la rentabilité attendue des actions en l'absence d'endettement ;
- $r_{Actions}$  la rentabilité attendue des actions de l'entreprise endettée ;
- $r_{Dette}$  le coût de la dette.

Le coût moyen pondéré du capital (CMPC) est la moyenne du coût des actions et du coût de la dette, pondérée par les parts de ces deux formes de financement dans la valeur de marché de l'entreprise. Il permet aisément de déterminer le coût du financement de la société mais surtout, sous certaines hypothèses, d'évaluer sa valeur rapidement.

$$CMPC = r_{Actions} \frac{A}{V} + r_{Dette} \frac{D}{V}$$

D'après la proposition II :

- La rentabilité attendue des actions est une fonction linéaire croissante du coefficient d'endettement :

$$r_{Actions} = r_{Actifs} + (r_{Actifs} - r_{Dette}) \frac{D}{A}$$

- Le coût moyen pondéré du capital est indépendant de la structure financière :

$$CMPC = r_{Actions} \times \frac{A}{V} + r_{Dette} \times \frac{D}{V} = r_{Actifs}$$

### Démonstration

Imaginons un investisseur qui détiendrait la totalité des actions et de la dette de l'entreprise. Il possède un portefeuille de valeur égale à  $V$  (en vertu de la proposition I,  $V$  est indépendant de la structure financière). La composition de ce portefeuille comprend une fraction  $A/V$  investie en actions et une fraction  $D/V$  investie dans la dette. La rentabilité attendue du portefeuille est :

$$r_{\text{Portefeuille}} = r_{\text{Actions}} \frac{A}{V} + r_{\text{Dette}} \frac{D}{V}$$

Elle n'est autre que le coût moyen pondéré du capital. De plus, en détenant la totalité des titres émis par l'entreprise, l'investisseur se trouve exactement dans la même situation que celle qu'il connaîtrait s'il détenait la totalité des actions de la même entreprise non endettée. Or, dans ce cas, sa rentabilité attendue serait  $r_{\text{Actifs}}$ . En conséquence :  $CMPC = r_{\text{Actifs}}$ .

## 1.3 Modigliani-Miller et le Médaf

Si nous supposons que les hypothèses du Médaf sont vérifiées, la proposition II donne en outre les conséquences de l'endettement sur le risque systématique (bêta) des actions et de la dette. Pour rappel, la moyenne pondérée du coût des fonds propres et du coût de la dette est égale à la rentabilité attendue des actions de l'entreprise non endettée. De même, la moyenne pondérée du bêta des actions et du bêta de la dette doit être égale au bêta des actions de l'entreprise non endettée :

$$\beta_{\text{Actifs}} = \beta_{\text{Actions}} \frac{A}{V} + \beta_{\text{Dette}} \frac{D}{V}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\beta_{\text{Actions}} = \beta_{\text{Actifs}} + (\beta_{\text{Actifs}} - \beta_{\text{Dette}}) \frac{D}{A}$$

## 1.4 Dette sans risque

Si nous supposons la dette sans risque,  $\beta_{\text{Dette}} = 0$  et  $r_{\text{Dette}} = r_f$ . La formule du bêta des actions se simplifie en  $\beta_{\text{Actions}} = \beta_{\text{Actifs}} \left(1 + \frac{D}{A}\right)$ , et  $r_{\text{Dette}}$  étant une constante, la rentabilité attendue des actions est une fonction linéaire du coefficient d'endettement. Le risque des actions de l'entreprise endettée traduit deux types de risques :

- le risque économique lié à l'activité de l'entreprise  $\beta_{\text{Actifs}}$
- le risque financier résultant de son endettement  $\beta_{\text{Actifs}} D/A$ .

Le risque financier peut être éliminé par un actionnaire à titre individuel. En combinant l'action de l'entreprise endettée à un placement au taux sans risque, il peut aboutir, comme l'illustre la figure 7.1, au même niveau de risque et donc de rentabilité attendue qu'en l'absence d'endettement.

La partie droite de la figure illustre la relation entre le coefficient d'endettement et le risque des actions. La partie gauche reprend, après rotation de  $90^\circ$ , la relation entre le bêta et la rentabilité attendue : il s'agit du graphique de la droite de marché présenté précédemment.

Figure 7.1

Risque et rentabilité attendue des actions – dette sans risque.

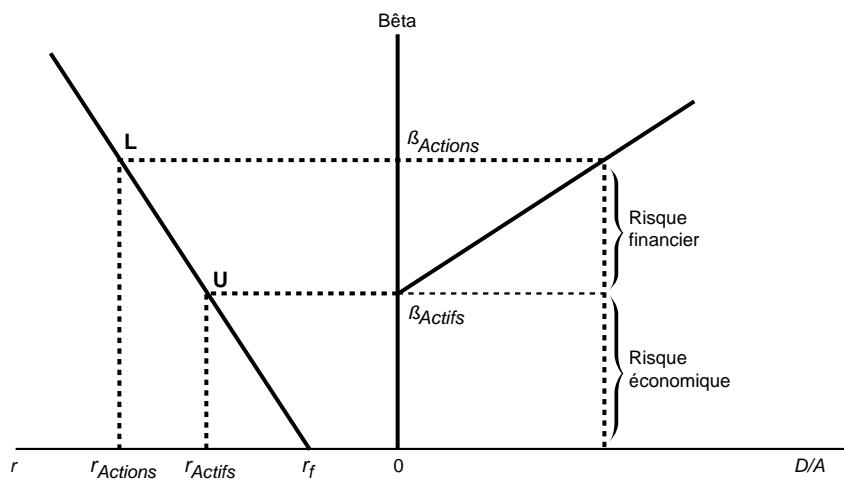
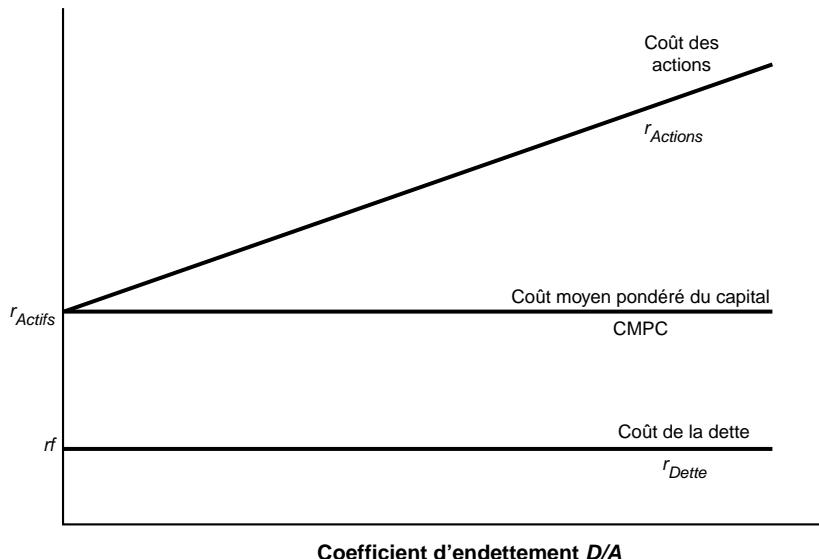


Figure 7.2

Rentabilité attendue des actions, coût de la dette et coût moyen pondéré du capital – dette sans risque.



En s'endettant, l'entreprise a recours à un mode de financement moins onéreux que le financement par capitaux propres ( $r_f < r_{Actifs}$ ). Mais l'utilisation de la dette augmente le risque des actions de la société. La proposition II de Modigliani-Miller montre que l'économie réalisée d'un côté par le recours à l'emprunt est exactement compensée par l'accroissement de coût des capitaux propres dû au risque financier. Le coût moyen pondéré du capital est inchangé (voir figure 7.2).

## 1.5 Dette risquée

La responsabilité limitée réduit le risque des actions puisque, à la manière d'un call, les actionnaires n'ont pas l'obligation de recapitaliser la société pour lui permettre de faire face à ses engagements vis-à-vis des créanciers. Le modèle de Merton permet d'analyser l'impact de la responsabilité limitée sur la rentabilité attendue des actions et sur leur risque.

Nous commencerons par analyser le risque et la rentabilité attendue des actions d'une entreprise endettée. L'intuition fondamentale de la formule d'évaluation de Black-Scholes est la suivante : un call peut être assimilé à un portefeuille constitué de *delta* unités de l'actif sous-jacent et d'un emprunt. Dans le modèle de Merton, les actions sont un call sur l'entreprise. La valeur de marché des actions peut donc s'exprimer sous la forme suivante :  $A = Delta_{Actions} \times V - B$ . Or, le bêta d'un portefeuille est égal à la moyenne pondérée des bêtas des titres dans le portefeuille. En conséquence :

$$\beta_{Actions} = Delta_{Actions} \beta_{Actifs} \left( 1 + \frac{D}{A} \right)$$

Cette expression est très proche de celle trouvée dans le cas de la dette sans risque puisque la seule différence réside dans l'apparition du terme *Delta<sub>Actions</sub>*. Le delta d'un call étant inférieur à l'unité, le risque des actions est donc moindre si la dette est risquée. La relation entre le coefficient d'endettement et le risque des actions n'est plus linéaire : un accroissement du coefficient d'endettement s'accompagne d'une diminution du delta des actions. À mesure que le coefficient d'endettement augmente, une partie du risque est transférée vers les créanciers. La rentabilité attendue des actions, obtenue par la formule du Médaf, est mise en perspective avec le risque à la figure 7.3.

Examinons maintenant le risque de la dette. La valeur de la dette risquée est égale à la valeur de la dette sans risque moins la valeur d'un put. Ce dernier reflète le prix que doivent payer les actionnaires pour avoir la possibilité de faire défaut. Selon la formule de Black-Scholes, le put est un portefeuille constitué de delta unités de l'actif sous-jacent et d'un placement (pour rappel, le delta d'un put est négatif). On a donc :

$$D = D_{sans risque} - Delta_{Put} \times V - M$$

Et le bêta de ce portefeuille vaut dans ce cas :

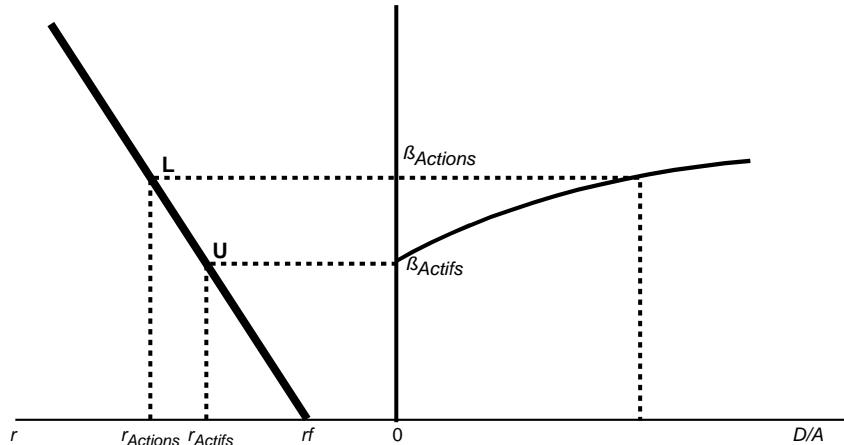
$$\beta_{Dette} = -Delta_{Put} \beta_{Actifs} \left( 1 + \frac{A}{D} \right)$$

Enfin, le delta du put étant négatif, le bêta de la dette est positif. La formule du Médaf permet de déterminer le coût de la dette :

$$r_{Dette} = r_f + (r_M - r_f) \beta_{Dette}$$

Figure 7.3

Risque et rentabilité attendue des actions – dette risquée.



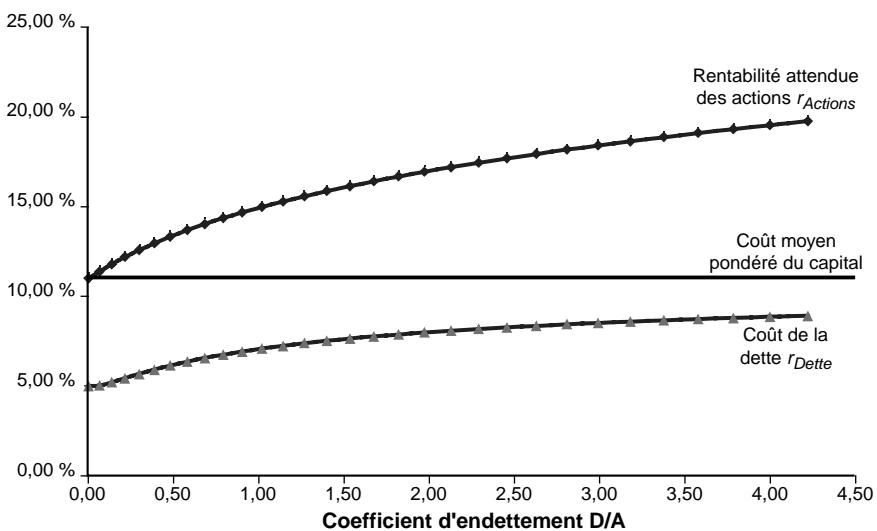
La proposition II de Modigliani-Miller est vérifiée. En effet :

$$r_{Actions} \frac{A}{V} + r_{Dette} \frac{D}{V} = r_f + (r_M - r_f)(\Delta_{Actions} - \Delta_{Put}) \beta_{Actifs} = r_{Actifs}$$

La figure 7.4 montre que le CMP reste constant alors que la rentabilité des actions et de la dette augmentent avec le levier d'endettement. Pour aboutir au résultat, rappelons-nous la relation de parité put-call :  $\Delta_{Actions} - \Delta_{Put} = 1$ .

Figure 7.4

Rentabilité attendue des actions, coût de la dette et coût moyen pondéré du capital – dette risquée.



## 1.6 Modigliani-Miller et le CMPC

Le coût moyen pondéré du capital a été défini comme la moyenne pondérée des coûts des différentes formes de financement. Une version plus générale permet d'approfondir le lien entre les propositions I et II. Supposons, pour simplifier la présentation, que

tous les flux monétaires soient des perpétuités. La valeur de l'entreprise endettée peut être calculée en actualisant, au coût moyen pondéré du capital, le résultat attendu avant charges financières et impôts (=  $REXP$ ) que réaliseraient l'entreprise en l'absence d'endettement :

$$V = \frac{REXP}{CMPC}$$

### Démonstration

La valeur des actions d'une entreprise endettée est égale à la valeur actuelle des dividendes futurs :

$$A = \frac{REXP - r_{Dette}D}{r_{Actions}}$$

On en déduit :  $REXP = r_{Actions}A + r_{Dette}D$ . En divisant par  $V$ , on obtient :

$$\frac{REXP}{V} = r_{Actions}\frac{A}{V} + r_{Dette}\frac{D}{V} = CMPC$$

Cela peut s'écrire :  $V = \frac{REXP}{CMPC}$ .

Dans cette approche, l'impact éventuel de la structure financière sur la valeur de l'entreprise est incorporé dans le coût moyen pondéré du capital. Une forme de dualité entre la valeur de l'entreprise et le coût moyen pondéré du capital apparaît : si la structure financière modifie la valeur d'une entreprise, elle modifie du même coup le coût moyen pondéré du capital.

## 2 Fiscalité et endettement

Dans l'environnement idéalisé défini par Modigliani-Miller en 1958, l'absence d'impôts constitue, sans nul doute, l'hypothèse la moins facile à accepter. Dans cette section, nous examinons les conséquences de différentes formes d'impositions. Nous montrons que :

- Si l'impôt sur les sociétés est la seule forme d'imposition, l'endettement diminue la charge fiscale d'une entreprise. En conséquence, la valeur d'une entreprise endettée est supérieure à celle qu'elle aurait en l'absence d'endettement.
- À coefficient d'endettement  $D/A$  donné, l'impact de l'endettement sur la rentabilité attendue des actions est moindre lorsque les charges d'intérêt sont déductibles du bénéfice taxable et le risque des actions de l'entreprise endettée augmente avec l'endettement.
- En corollaire, le coût moyen pondéré du capital décroît lorsque l'endettement augmente.
- Si, outre l'impôt sur les sociétés, nous prenons en compte dans l'analyse l'impôt des personnes physiques, l'avantage fiscal de l'endettement s'atténue, voire disparaît ou peut devenir un désavantage.

## 2.1 L'avantage fiscal de l'endettement

Dans tous les pays, les charges financières, notamment les intérêts dus sur dettes, sont déductibles du résultat d'exploitation pour le calcul de l'impôt dû par une entreprise. Cette économie fiscale lui permet d'accroître le montant payé, au total, aux apporteurs de capitaux. Sa valeur s'accroît d'un montant égal à la valeur actuelle des économies fiscales futures ou encore comme la valeur de l'avantage fiscal de l'endettement (*VAFE*).

La logique du calcul apparaît dans le cas le plus simple fondé sur les hypothèses suivantes :

- résultat avant charges financières et impôts attendu constant (= *REXP*) ;
- dette constante et perpétuelle ;
- dette sans risque.

L'avantage fiscal de l'endettement (*AFE*), pour une année donnée, est égal au produit du taux d'imposition et de la charge d'intérêt ; cette dernière équivaut au taux d'intérêt multiplié par le montant de la dette :  $AFE = T_{Isoc} \times r_{Dette} \times D$ .

La valeur actuelle de l'ensemble des revenus distribués aux apporteurs de capitaux en cas d'endettement est égale à la valeur actuelle des revenus sans endettement à laquelle s'ajoute la valeur actuelle des économies fiscales. Formellement :  $V = V_U + VAFFE$ , où  $V$  désigne la valeur des revenus totaux en cas d'endettement,  $V_U$  la valeur sans endettement et *VAFFE* la valeur de l'avantage fiscal de l'endettement.

Si l'économie fiscale est certaine, la valeur actuelle des économies fiscales dues à l'endettement est obtenue en actualisant au taux d'intérêt sans risque les économies fiscales annuelles. Comme nous traitons des perpétuités :

$$VAFFE = \frac{T_{Isoc} \times r_{Dette} \times D}{r_{Dette}} = T_{Isoc}D \quad \text{et donc : } V = V_U + T_{Isoc}D$$

Lorsque la dette n'est pas une perpétuité, le calcul de la *VAFFE* est un peu plus complexe. Si la dette de l'entreprise donne lieu à des charges d'intérêt  $Cfin_1, Cfin_2 \dots Cfin_T$  au cours des  $T$  prochaines années, la valeur actuelle des économies fiscales sera de :

$$VAFFE = \sum_t \frac{T_{Isoc}Cfin_t}{(1 + r_{Dette})^t}$$

## 2.2 Rentabilité attendue et risque des actions en présence d'impôts

Que devient la proposition II de Modigliani-Miller en présence d'impôts ? Les expressions trouvées précédemment deviennent :

$$r_{Actions} = r_{Actifs} + (r_{Actifs} - r_{Dette})(1 - T_{Isoc})\frac{D}{A}$$

et

$$\beta_{Actions} = \beta_{Actifs} + (\beta_{Actifs} - \beta_{Dette})(1 - T_{Isoc})\frac{D}{A}$$

Pour voir cela, plaçons-nous dans un contexte de perpétuités. Considérons, comme précédemment, un investisseur qui détiendrait la totalité des actions et de la dette d'une entreprise endettée. La rentabilité attendue du portefeuille est la moyenne pondérée des rentabilités attendues des titres en portefeuille :

$$r_{Portefeuille} = r_{Actions} \times \frac{A}{V} + r_{Dette} \times \frac{D}{V}$$

La valeur de l'entreprise est égale à la somme de la valeur de l'entreprise non endettée et de la valeur actuelle des économies fiscales :  $V = V_U + T_{Isoc}D$ . La rentabilité attendue de l'entreprise non endettée sera égale à  $r_{Actifs}$  (le taux d'actualisation utilisé pour calculer  $V_U$ ). La rentabilité attendue de l'économie fiscale vaudra  $r_{Dette}$  (le taux d'actualisation utilisé pour calculer la VAFFE sous l'hypothèse d'une dette constante). Cela induit la rentabilité attendue du portefeuille :

$$r_{Portefeuille} = r_{Actifs} \times \frac{V_U}{V} + r_{Dette} \times \frac{T_{Isoc}D}{V} = r_{Actifs} \times \frac{V - T_{Isoc}D}{V} + r_{Dette} \times \frac{T_{Isoc}D}{V}$$

Les deux expressions de la rentabilité attendue du portefeuille conduisent au même résultat. En conséquence :

$$r_{Portefeuille} = r_{Actions} \times \frac{A}{V} + r_{Dette} \times \frac{D}{V} = r_{Actifs} \times \frac{V - T_{Isoc}D}{V} + r_{Dette} \times \frac{T_{Isoc}D}{V}$$

En simplifiant et en déplaçant les termes, l'équation peut s'écrire :

$$r_{Actions} = r_{Actifs} + (r_{Actifs} - r_{Dette})(1 - T_{Isoc})\frac{D}{A}$$

Cette expression est très proche de celle trouvée en l'absence d'impôts. De plus, à coefficient d'endettement  $D/A$  donné, l'impact de l'endettement sur la rentabilité attendue des actions est moindre lorsque les charges d'intérêt sont déductibles du bénéfice taxable.

Nous pouvons, par un raisonnement similaire, préciser l'impact de l'endettement sur le risque des actions :

$$\beta_{Actions} = \beta_{Actifs} + (\beta_{Actifs} - \beta_{Dette})(1 - T_{Isoc})\frac{D}{A}$$

Si la dette est sans risque :

$$\beta_{Actions} = \beta_{Actifs} \left( 1 + (1 - T_{Isoc})\frac{D}{A} \right)$$

Nous retrouvons un résultat comparable à celui trouvé en l'absence d'impôts : le risque des actions de l'entreprise endettée augmente avec l'endettement. La déductibilité des charges d'intérêt du bénéfice taxable a pour conséquence de diminuer le risque financier des actions.

## 2.3 Le coût moyen pondéré du capital

Une autre approche permet de tenir compte de la déductibilité des charges d'intérêt : celle du **coût moyen pondéré du capital** (ou **coût du capital ajusté**) qui reflète le coût net d'impôts des différentes formes de financement. Ce coût du capital ajusté est alors pris comme le taux d'actualisation à appliquer aux cash flows nets d'impôts calculés en l'absence d'endettement pour aboutir à la valeur actuelle des cash flows futurs, étant donné la politique de financement réellement mise en œuvre. Formellement, le coût moyen pondéré du capital est le taux d'actualisation *CMPC* tel que :

$$V = \sum_t \frac{REXP_t(1 - T_{Isoc})}{(1 + CMPC)^t}$$

Le numérateur représente le bénéfice de l'entreprise non endettée. L'effet de l'endettement sur la valeur est obtenu en ajustant le taux d'actualisation. Cette approche est très largement utilisée en pratique et selon la politique d'endettement de l'entreprise, différentes formules seront utilisées.

### La formule classique

$$CMPC = r_{Actions} \times \frac{A}{V} + r_{Dette} \times (1 - T_{Isoc}) \times \frac{D}{V}$$

Il s'agit d'une généralisation de la formule présentée précédemment en l'absence d'impôts. La formule du coût moyen pondéré du capital peut aisément être retrouvée dans le cas de perpétuités.

### Complément

#### CMPC : Formule classique

La rentabilité attendue des actions est le rapport entre le bénéfice (distribué aux actionnaires sous formes de dividendes) et la valeur de marché des actions (souvenez-vous de l'hypothèse de perpétuité) :  
 $r_{Actions} = \frac{(REXP - r_{Dette})(1 - T_{Isoc})}{A}$ , ce qui peut s'écrire :  $REXP(1 - T_{Isoc}) = r_{Actions} \times A + r_{Dette} \times (1 - T_{Isoc}) \times D$ .

Mais :

$$V = \frac{REXP(1 - T_{Isoc})}{CMPC}$$

et donc  $V \times CMPC = r_{Actions} \times A + r_{Dette} \times D$ . En divisant les deux termes par  $V$ , on trouve l'expression du coût moyen pondéré du capital en présence d'impôts :

$$CMPC = r_{Actions} \times \frac{A}{V} + r_{Dette} \times (1 - T_{Isoc}) \times \frac{D}{V}$$

Cette formule suppose que l'on connaît le coût des actions ( $r_{Actions}$ ). Il est obtenu en se rapportant à des sociétés de référence et, s'il s'agit d'évaluer une entreprise, il sera calculé à partir de données d'autres entreprises du même secteur. Pour un projet d'investissement, il sera généralement établi à partir des données de l'entreprise qui réalise le projet.

Deux hypothèses importantes doivent être satisfaites dans ce cas :

- Le risque d'exploitation des entreprises de référence doit être identique au risque de l'entité (entreprise ou projet) qui est l'objet de l'évaluation.
- La structure de financement de l'entité à évaluer est la même que celle de l'entreprise de référence.

### La formule d'ajustement de Modigliani-Miller

Miller et Modigliani ont établi une formule qui donne directement le coût moyen pondéré du capital lorsque l'endettement est permanent :  $CMPC = r_{Actifs}(1 - T_{Isoc}L)$  avec  $L = D/V$ .

#### Démonstration

##### Formule d'ajustement de Modigliani-Miller

Considérons une entreprise qui génère un résultat d'exploitation annuel  $REXP$ . Le montant emprunté pour financer un projet est égal, compte tenu de la définition du coefficient d'endettement, à  $D = LV$ . En conséquence, la valeur actuelle des cash flows, en désignant par  $r_{Actifs}$  le taux d'actualisation qui reflète le risque économique du projet, peut s'écrire :

$$V = \frac{REXP(1 - T_{Isoc})}{r_{Actifs}} + T_{Isoc}D.$$

$$\text{Si } L = \frac{D}{V}, \text{ alors } V = \frac{REXP(1 - T_{Isoc})}{r_{Actifs}} + T_{Isoc}(LV). \text{ On en déduit : } V = \frac{REXP(1 - T_{Isoc})}{r_{Actifs}(1 - T_{Isoc}L)}.$$

La valeur de l'entreprise est obtenue en actualisant le cash flow après impôt (en l'absence d'endettement) au taux ajusté  $r_{Actifs}(1 - T_{Isoc}L)$  : ce taux d'actualisation est le coût du capital ajusté de Modigliani-Miller. Il est égal au coût moyen pondéré du capital :

$$CMPC = r_{Actifs}(1 - T_{Isoc}L)$$

Dans cette formule, le point de départ est le coût du capital en l'absence d'endettement  $r_{Actifs}$ . Il reflète uniquement le risque économique propre au projet. Ce taux est ensuite ajusté pour tenir compte des retombées fiscales de l'endettement. Si le taux d'imposition est nul, on retrouve l'égalité entre  $CMPC$  et  $r_{Actifs}$  et donc un coût du capital indépendant de la structure financière. En revanche, le coût du capital ajusté diminue avec l'endettement si le taux d'imposition est positif.

Cette dernière formule fait apparaître clairement les deux éléments importants de l'analyse : le risque économique et l'avantage fiscal de l'endettement. Elle a l'inconvénient, comme pour la formule du coût moyen pondéré d'ailleurs, de supposer que la contribution du projet à la capacité d'endettement de l'entreprise est permanente avec, pour conséquence, une surévaluation de l'avantage fiscal de l'endettement.

### Coût du capital ajusté lorsque la dette n'est pas une perpétuité

Les formules du coût moyen pondéré du capital développées précédemment ne sont applicables que lorsque le niveau de la dette est constant ( $D = \text{constante}$ ). Une formule permet de traiter le cas d'un coefficient d'endettement,  $L = D/V$ , constant. Cette formule du coût moyen pondéré du capital, due à Miles et Ezzel, peut également être utilisée lorsque les cash flows ne sont pas des perpétuités :

$$CMPC = r_{Actifs} - T_{Isoc}Lr_{Dette} \frac{1 + r_{Actifs}}{1 + r_{Dette}}$$

## Démonstration

### Formule de Miles-Ezzel

Supposons que le dernier cash flow ait lieu l'année  $T$ . La valeur de l'entreprise endettée est égale à la valeur de la même entreprise non endettée à laquelle s'ajoute la valeur actuelle de l'économie fiscale :

$$V_{T-1} = \frac{REXP_T(1 - T_{Isoc})}{1 + r_{Actifs}} + \frac{T_{Isoc}r_{Dette}(LV_{T-1})}{1 + r_{Dette}}$$

$$\text{Ou reformulé : } V_{T-1} = \frac{REXP_T(1 - T_{Isoc})}{1 + r_{Actifs} - T_{Isoc}r_{Dette}(1 + r_{Actifs}) / (1 + r_{Dette})}$$

Le dénominateur de cette formule donne l'expression du coût moyen pondéré du capital à utiliser un an avant l'échéance finale. La formule met aussi en avant la proportionnalité existant entre la valeur de l'entreprise endettée et la valeur de la même entreprise non endettée. Il en résulte que leurs risques sont identiques.

Calculons maintenant la valeur de l'entreprise en  $T = 2$  :

$$V_{T-2} = \frac{REXP_{T-1}(1 - T_{Isoc})}{1 + r_{Actifs}} + \frac{T_{Isoc}r_{Dette}(LV_{T-2})}{1 + r_{Dette}} + \frac{V_{T-1}}{1 + r_{Actifs}}$$

Le coefficient d'actualisation utilisé pour le terme  $V_{T-1}$  découle de la proportionnalité entre  $V_{T-1}$  et  $V_{U,T-1}$  démontrée précédemment.

$$\text{En isolant } V_{T-2}, \text{ l'expression devient : } V_{T-2} = \frac{REXP_{T-1}(1 - T_{Isoc}) + V_{T-1}}{1 + r_{Actifs} - T_{Isoc}r_{Dette}\frac{1 + r_{Actifs}}{1 + r_{Dette}}}$$

$$\text{Et de manière générale : } V_0 = \sum_t \frac{REXP_t(1 - T_{Isoc})}{(1 + CMPC)^t}$$

$$\text{avec : } CMPC = r_{Actifs} - T_{Isoc}Lr_{Dette}\frac{1 + r_{Actifs}}{1 + r_{Dette}}.$$

## 2.4 Prise en compte de l'impôt des personnes physiques

L'impôt sur les sociétés n'est pas la seule forme d'imposition qui affecte les investisseurs. Il faut également prendre en considération l'impôt des personnes physiques. Dans la plupart des pays, les revenus d'actions bénéficient d'un traitement fiscal favorable (en France et en Belgique, les plus-values du capital ne sont pas taxées) : le taux de taxation à l'impôt des personnes physique des actions ( $T_{IPP,Actions}$ ) est inférieur à celui des intérêts ( $T_{IPP,Dette}$ ). En conséquence, l'avantage fiscal de l'endettement pour l'impôt sur les sociétés constitue un désavantage au niveau de l'impôt des personnes physiques. Le taux d'avantage global est alors donné par :  $T^* = 1 - \frac{(1 - T_{Isoc})(1 - T_{IPP,Actions})}{(1 - T_{IPP,Dette})}$ .

## 3 La théorie du compromis

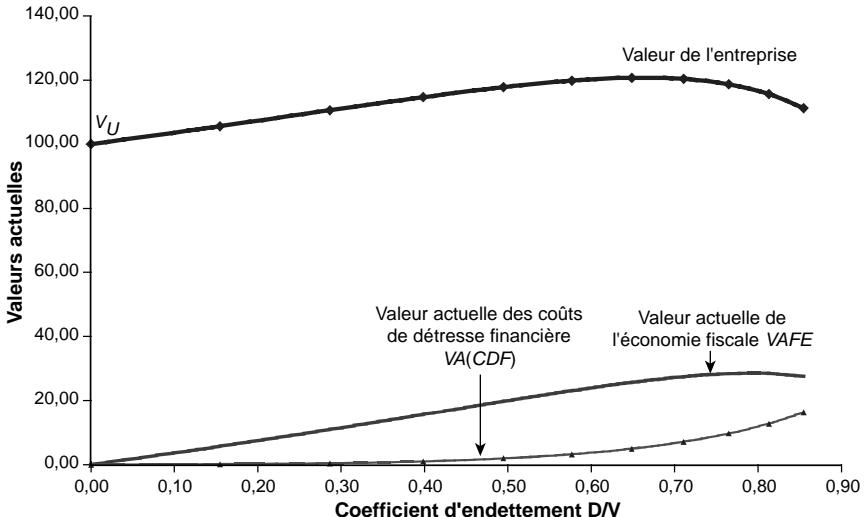
S'il existe un avantage fiscal à l'endettement, les entreprises devraient toutes en tirer profit en choisissant les taux d'endettement les plus élevés possibles. Empiriquement, cela n'est pas observé. Le risque le plus évident pour une entreprise fortement endettée est l'impossibilité, à un moment donné, de remplir ses engagements vis-à-vis de ses créanciers. La situation extrême est la faillite. L'impact des difficultés financières potentielles sur la valeur de l'entreprise est lié aux coûts associés à cette situation : coûts

directs (avocats, banquiers, frais de liquidations d'actifs, etc.) et indirects (résultant de la difficulté de gérer normalement l'entreprise dans ce type de situation).

D'après la théorie du compromis, la valeur de l'entreprise endettée est la somme de la valeur de l'entreprise non endettée à laquelle il faut rajouter la valeur actuelle des économies fiscales et soustraire la valeur actuelle des coûts de difficultés financières :  $V = V_U + VAFFE - VA(CDF)$ .

Figure 7.5

**Théorie du compromis : structure financière optimale.**



Le niveau optimum d'endettement est atteint lorsque l'avantage marginal de l'endettement est égal à la valeur actuelle des coûts de détresse financière. La figure 7.5 illustre cette situation. La valeur de l'entreprise croît tant que l'avantage fiscal résultant d'une augmentation de l'endettement compense celle des coûts de détresse financière qu'elle produit.

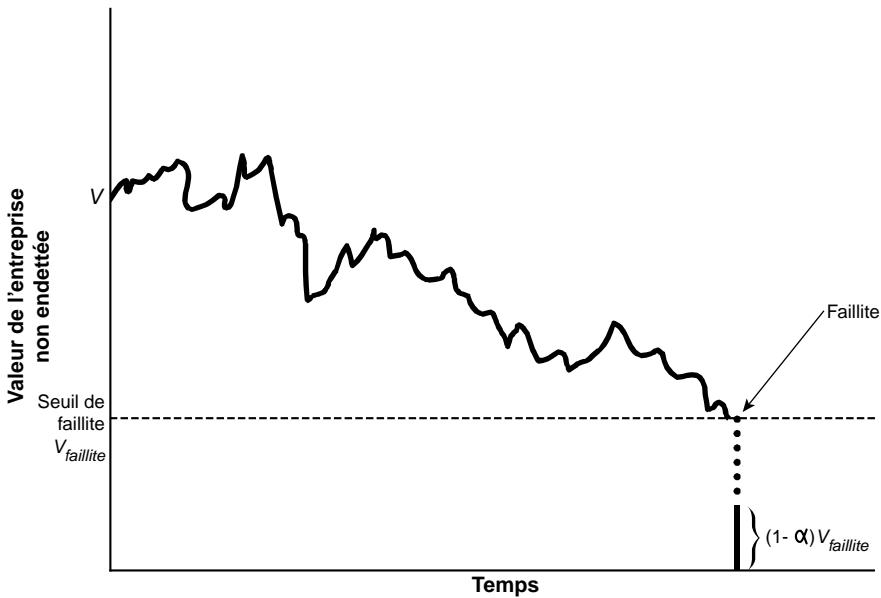
Un modèle récent, développé par Leland (1994), permet d'illustrer la théorie du compromis. Il est construit dans l'esprit du modèle de Merton pour l'analyse de la dette risquée et incorpore de manière simple les deux éléments majeurs de la théorie du compromis : la valeur actuelle des économies fiscales et les coûts de détresse financière.

La valeur de l'entreprise non endettée,  $V_U$ , est connue au départ et évolue de manière aléatoire selon un processus stochastique identique à celui utilisé par Black-Scholes (caractérisé par une volatilité  $\sigma$  qui mesure la volatilité des actifs en l'absence d'endettement). Le taux d'intérêt sans risque  $r_f$  est constant. L'entreprise s'endette en émettant un emprunt perpétuel donnant lieu au paiement d'un intérêt annuel (le coupon)  $C$ . L'entreprise fait faillite si, à un moment donné, la valeur des actions devient nulle. Cette faillite se produit si la  $V_U$  tombe au-dessous d'un seuil (que nous noterons  $V_{faillite}$ ) que permet de déterminer le modèle. Dans ce cas, une fraction  $\alpha$  de la valeur est perdue (cette perte est une mesure des coûts de difficultés financières). La figure 7.6 illustre le modèle.

Remarquons que la date de faillite n'est pas connue *a priori*.

Figure 7.6

**Condition de faillite dans le modèle de Leland.**



Deux résultats préliminaires jouent un rôle essentiel dans le modèle.

- Le seuil de faillite endogène est donné par :  $V_{faillite} = \frac{C(1 - T_{Isoc})}{(r_f + 0,5\sigma^2)}$ .

L'entreprise fait faillite si la valeur de ses actifs atteint un niveau égal à la valeur actuelle des intérêts futurs nets d'impôts. En certitude, celle-ci serait égale à  $C(1 - T_{Isoc})/r_f$ . Ici, l'évolution aléatoire de la valeur des actifs a pour effet de diminuer le seuil de faillite. Même si, à un moment donné, la valeur des actifs chute au-dessous de  $C(1 - T_{Isoc})/r_f$ , il existe une possibilité qu'elle remonte au-dessus. Le seuil de faillite en incertitude se situe donc au-dessous du seuil de faillite en certitude.

- Le modèle détermine la valeur actuelle de 1 € en cas de faillite :  $v_{faillite} = \left(\frac{V_{faillite}}{V_U}\right)^{\frac{2r_f}{\sigma^2}}$ .

Ce prix a la nature d'un prix d'actif contingent tel que nous l'avons présenté dans le chapitre 1. Il a les propriétés suivantes :

- Il est inférieur à l'unité et d'autant plus faible que la valeur des actifs est importante par rapport au seuil de faillite.
- Il est une fonction décroissante du taux d'intérêt sans risque (ce qui est assez normal pour un taux d'actualisation).
- Il est une fonction croissante de la volatilité des actifs (si la volatilité est élevée, la date probable de la faillite est plus rapprochée).

La valeur de l'entreprise endettée est :  $V = V_U + VAFFE - VA(CDF)$ , avec :

$$VAFFE = (1 - v_{faillite}) \frac{T_{Isoc}C}{r_f} = \frac{T_{Isoc}C}{r_f} - v_{faillite} \frac{T_{Isoc}C}{r_f} \quad \text{et : } VA(CDF) = v_{faillite} \alpha V_{faillite}$$

La valeur de l'économie fiscale de l'endettement est égale à la différence entre la valeur de l'économie fiscale en l'absence de faillite (telle que calculée précédemment dans le cadre d'une économie fiscale sans risque) et la valeur actuelle de l'économie fiscale qui est perdue en cas de faillite.

Les coûts de détresse financière en cas de faillite sont égaux à  $\alpha V_{faillite}$ . Leur valeur actuelle est obtenue en multipliant ce montant par le prix de marché de 1 € en cas de faillite. Il nous reste à déterminer la valeur des actions et la valeur de la dette.

La valeur de la dette est donnée par :  $D = (1 - \nu_{faillite}) \frac{C}{r_f} + \nu_{faillite}(1 - \alpha) V_{faillite}$ .

Le premier terme reprend la valeur de la dette sans risque multipliée par la valeur de 1 € en l'absence de faillite. Le second indique le montant que touchent les créanciers lors d'une faillite multiplié par la valeur de 1 € en cas de faillite.

La valeur des actions est obtenue par différence entre la valeur de l'entreprise et la valeur de la dette :

$$A = V_U + (1 - \nu_{faillite}) \frac{T_{Isoc} C}{r_f} - \nu_{faillite} \alpha V_{faillite} - (1 - \nu_{faillite}) \frac{C}{r_f} - \nu_{faillite}(1 - \alpha) V_{faillite}$$

ce qui donne :

$$A = V_U - (1 - \nu_{faillite})(1 - T_C) \frac{C}{r_f} - \nu_{faillite} V_{faillite}$$

## Résumé

La valorisation d'entreprises endettées ainsi que la détermination d'une structure financière du capital optimale demeurent des sujets de recherche et d'interrogations. Les éléments suivants font néanmoins l'objet d'un consensus :

- Dans un monde présentant un marché parfait des capitaux caractérisé, de plus, par l'absence de frais de transactions et d'imposition, si une entreprise a une politique d'investissement fixée, alors sa valeur et son coût moyen pondéré du capital sont indépendants de son mode de financement. Dès lors, la rentabilité attendue des actions est une fonction linéaire croissante du coefficient d'endettement.
- La présence de l'impôt modifie la proposition précédente. Les charges d'intérêt étant fiscalement déductibles, l'endettement augmente, toutes choses étant égales par ailleurs, la valeur de la société. Cela amène une baisse du coût moyen pondéré du capital et une hausse du risque des actions lorsque l'endettement augmente.
- Si, outre l'impôt sur les sociétés, l'impôt des personnes physiques est pris en compte, l'avantage fiscal de l'endettement s'atténue, disparaît ou devient un désavantage.
- Ce coût moyen pondéré du capital, reflet du coût net d'impôt des différentes formes de financement, permet, s'il est pris comme taux pour actualiser les cash flows nets d'impôt en l'absence d'endettement, de déterminer la valeur de l'entreprise.
- La théorie du compromis considère que la société doit faire un arbitrage entre l'accroissement de l'avantage fiscal et des coûts de détresse financière résultant d'une augmentation de la dette.

## Références bibliographiques

- BAXTER N.D., « Leverage, Risk of Ruin and the Cost of Capital », *Journal of Finance*, 22, 3 (September 1967), pp. 395–403.
- FARBER A., GILLET R. et SZARFARZ A., « A general formula for the WACC », *International Journal of Business*, 11, 2, 2000.
- MILES J. et EZZELL J.R., « The Weighted Average Cost of Capital, Perfect Capital Market and Project Life : A Clarification », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, 3 (septembre 1980), pp. 719–730.
- LELAND H.E., « Corporate Debt Value, Bond Covenants and Optimal Capital Structure », *Journal of Finance*, 49, 4 (septembre 1994), pp. 1213–1252.
- MILES J. et EZZELL J.R., « Reformulating Tax Shield Valuation : A Note », *Journal of Finance* 40, 5 (décembre 1985), pp. 1485–1492.
- MODIGLIANI M. et MILLER M.H., « Corporate Income Taxes and the Cost of Capital : A Correction », *The American Economic Review*, 53, 3 (juin 1963), pp. 433–443.
- RUBINSTEIN M.E., « A Mean-Variance Synthesis of Corporate Financial Theory », *Journal of Finance*, 28, 1 (mars 1973), pp. 167–181.
- TAGGART R.A., « Consistent Valuation and Cost of Capital Expressions With Corporate and Personal Taxes », *Financial Management* (automne 1991), pp. 8–20.

### Commentaires

La synthèse du Médaf et des théorèmes de Modigliani et Miller fut réalisée à la fin des années 60. Elle est magnifiquement exposée dans Rubinstein (1973). La première analyse de l'avantage fiscal de l'endettement se trouve dans Modigliani et Miller (1963). Elle aboutira quelques années plus tard à la théorie du compromis (Baxter, 1967). Cette théorie restera longtemps au stade d'arguments qualitatifs. Il fallu attendre 20 ans pour voir apparaître un modèle plus réaliste (Leland, 1994) permettant de mesurer avec plus de précision les composantes de la valeur d'une entreprise endettée. La recherche dans ce domaine est toujours très active.

En pratique, l'utilisation du coût moyen pondéré du capital reste la norme. Les limitations de la formule classique ont conduit à plusieurs autres formules dont celle publiée par Miles et Ezzell (1980, 1985). Une excellente synthèse de cette littérature est donnée par Taggart (1991).

# Problèmes et exercices

**La première partie des exercices illustre la loi de la conservation de la valeur démontrée par Modigliani-Miller en 1958 dans leur proposition I. Ces exercices supposent qu'il n'y a pas d'impôts. Les exercices qui suivent analysent différents aspects du choix d'une structure financière en présence d'impôts. Enfin, le dernier exercice traite de la problématique de la théorie du compromis.**

## La valeur et la structure financière de la société dans un monde sans impôts

### Exercice 1 Emprunter pour payer un dividende ou racheter des actions

#### Énoncé

La société Alpha n'a aucune dette, n'est pas soumise à l'impôt sur les sociétés, et son capital est représenté par 10 000 actions. Actuellement, une action est cotée 30 €. La société envisage d'emprunter 60 000 € soit pour payer un dividende extraordinaire, soit pour racheter en Bourse une partie de ses actions.

- a** Calculez la valeur initiale de l'entreprise.
- b** Quelle sera la valeur des actions si le produit de l'emprunt sert à payer un dividende aux actionnaires ?
- c** Calculez la valeur de l'entreprise après le paiement du dividende.
- d** Le résultat serait-il différent si la société rachetait une partie de ses actions ?

#### Solution

- a** La valeur initiale de la société est égale au nombre d'actions multiplié par le cours. Cette valeur représente la valeur de l'entreprise en l'absence d'endettement ( $V_U$ ) :  $10\,000 \times 30 = 300\,000$  €.
- b** Si la société utilise le produit de l'emprunt pour distribuer un dividende, chaque action rapportera 6 €. Le cours chutera du montant du dividende au moment du paiement. Le nombre d'actions restera inchangé et la valeur des actions  $A$  après l'opération sera de :  $10\,000 \times (30 - 6) = 240\,000$  €.
- c** La valeur de l'entreprise endettée ( $V$ ) est égale à la somme de la valeur des actions ( $A$ ) et de celle de la dette ( $D$ ) :  $240\,000$  € +  $60\,000$  € =  $300\,000$  €. Nous retrouvons donc bien le résultat de la proposition I.
- d** Le résultat ne différerait pas si la société rachetait une partie de ses actions. Dans ce cas, le nombre d'actions pouvant être rachetées est égal à  $60\,000 / 30 = 2\,000$ , chaque action étant rachetée au cours de bourse. Le nombre d'actions en circulation après l'opération

serait alors de 8 000 et l'ensemble des actions après l'opération vaudrait donc :  $8\ 000 \times 30 = 240\ 000$  €. Nous retrouvons exactement la même valeur que précédemment.

## Exercice 2 Émettre des actions nouvelles pour réduire l'endettement

### Énoncé

M. Legrain, directeur financier de la société Grand Moulin, veut convaincre le conseil d'administration qu'il faudrait réaliser une augmentation de capital pour diminuer l'endettement de l'entreprise de moitié. Il a noté les informations suivantes :

- nombre d'actions en circulation : 200 000 ;
- cours par action : 40 € ;
- dettes totales de la société : 4 000 000 €.

Nous supposerons que le prix d'émission des actions nouvelles est égal au prix du marché. La société n'est pas soumise à l'impôt sur les sociétés.

- a** Quelle est la valeur initiale de l'entreprise ?
- b** Combien faut-il émettre d'actions pour diminuer l'endettement de moitié ?
- c** Quelles seront la valeur des actions et celle de l'entreprise à l'issue de l'opération ?

### Solution

- a** La valeur initiale de la société se calcule comme suit :
  - valeur des actions  $A = 200\ 000 \times 40 = 8\ 000\ 000$  € ;
  - valeur de la dette  $D = 4\ 000\ 000$  € ;
  - valeur de la société  $V = A + D = 12\ 000\ 000$  €.
- b** Pour rembourser la moitié de la dette, le nombre d'actions à émettre est de :  
 $n = 2\ 000\ 000 / 40 = 50\ 000$ .  
Le nombre d'actions après l'opération sera de 250 000.
- c** À l'issue de l'opération, la valeur de la société s'établira ainsi :
  - valeur des actions  $A = 250\ 000 \times 40 = 10\ 000\ 000$  € ;
  - valeur de la dette  $D = 2\ 000\ 000$  € ;
  - valeur de la société  $V = 12\ 000\ 000$  €.

## Exercice 3 Calculer le coût moyen pondéré du capital

### Énoncé

Vous avez rassemblé les informations suivantes concernant Pipeline, une société de transport de gaz.

- nombre d'actions : 100 millions ;
- cours par action : 20 € ;
- bêta de l'action : 0,70 ;
- valeur de marché de la dette, considérée comme sans risque, de la société : 500 millions € ;
- $r_f$  : 4 % ;
- prime de risque du marché : 5 %

**a** Calculez la valeur de l'entreprise.

**b** Quel est le coût des actions de Pipeline ?

**c** Déterminez le coût moyen pondéré du capital.

**d** Calculez le bêta des actifs de la société.

Supposons que la société emprunte 500 millions € et distribue le produit de l'emprunt pour verser un dividende aux actionnaires.

**e** Quelles seront les valeurs des actions, de la dette et de l'entreprise à l'issue de cette opération ?

**f** Quelle sera la rentabilité attendue des actions à l'issue de cette opération ?

**g** Que devient le bêta des actions ? Pourquoi cette évolution ?

### Solution

**a** La valeur de l'entreprise correspond à la somme de la valeur des actions et de la valeur de la dette :  $V = A + D = (100 \times 20) + 500 = 2000 + 500 = 2500$  millions €.

**b** Le coût des actions est égal à la rentabilité attendue des actions. Il peut être calculé en appliquant la formule du Médaf :  $r_{Actions} = 4\% + 5\% \times 0,70 = 7,50\%$ .

**c** Le coût moyen pondéré du capital vaut alors :  $CMPC = 7,50\% \frac{2000}{2500} + 4\% \frac{500}{2500} = 6,80\%$ .

**d** La dette étant sans risque, le bêta des actifs de Pipeline est calculé en utilisant la relation :  $\beta_{Actions} = \beta_{Actifs} \left(1 + \frac{D}{A}\right) = 0,70 = \beta_{Actifs} \left(1 + \frac{500}{2000}\right)$  et donc :  $\beta_{Actifs} = 0,56$ .

La différence entre le bêta des actions (0,70) et le bêta des actifs (0,56) reflète le risque financier.

**e** Si la société emprunte 500 millions € et distribue ce montant, sa valeur ensuite sera de :

- valeur des actions  $A = 2000 - 500 = 1500$  millions €;
- valeur de la dette  $D = 500 + 500 = 1000$  millions €;
- valeur de l'entreprise  $V = A + D = 2500$  millions €.

**f** L'opération ne modifie pas le coût moyen pondéré du capital de Pipeline. Nous pouvons calculer la rentabilité attendue des actions à l'issue de l'opération en résolvant l'équation :

$$r_{Actions} \frac{1500}{2500} + 4\% \frac{1000}{2500} = 6,80\%$$

d'où :  $r_{Actions} = 8,67\%$ . Le même résultat peut être obtenu comme suit :

$$r_{Actions} = r_{Actifs} + (r_{Actifs} - r_{Dette}) \frac{D}{A} = 6,80\% + (6,80\% - 4\%) \frac{1000}{1500} = 8,67\%$$

**g** Le bêta des actions de Pipeline devient :

$$\beta_{Actions} = 0,56 \left(1 + \frac{1000}{1500}\right) = 0,93.$$

L'accroissement de l'endettement de l'entreprise conduit à une augmentation du risque des actions (le bêta passe de 0,70 à 0,93). Ce risque accru explique l'augmentation de la

rentabilité attendue des actions (8,67 % contre 7,50 % précédemment). En revanche, le coût moyen pondéré du capital reste inchangé.

## Exercice 4 Calculer la *VAN* d'un projet financé par emprunt

### Énoncé

La société Gamma est entièrement financée par fonds propres. La rentabilité attendue des actions est de 10 %. L'action cote actuellement 15 €. Le nombre d'actions en circulation s'élève à 1 000 000. Les bénéfices sont entièrement distribués sous forme de dividendes. Il n'y a pas d'impôt sur les sociétés.

La société compte investir 5 000 000 € dans un nouveau projet à durée infinie qui ne modifiera pas son risque économique, mais qui devrait accroître le résultat annuel avant charges financières et impôts (*REXP*) de 750 000 €, et ce jusqu'à l'infini. Le projet sera financé par un emprunt au taux d'intérêt actuellement en vigueur sur le marché de 5 %.

- a** Calculez la valeur des actions et la valeur de l'entreprise si la société réalise le projet.
- b** Le financement du projet par emprunt a-t-il un impact sur la valeur de l'entreprise ?
- c** Quel sera l'impact de cette décision sur la rentabilité attendue des actions ?

### Solution

- a** La valeur de l'entreprise est, au départ, égale à la valeur des actions soit :  $V = A = 1000000 \times 15 = 15000000$  €. La valeur actuelle nette du projet est :  $-5000000 + 750000 / 10\% = 2500000$  €. Si ce projet n'est pas anticipé par le marché, son annonce provoquera un accroissement de la valeur des actions d'un montant égal à la *VAN* :  $15000000 + 2500000 = 17500000$  €. La société finance le projet par un emprunt d'échéance infinie. Après emprunt et investissement, la valeur de l'entreprise devient :  $V = A + D = 17500000 + 5000000 = 22500000$  €.
- b** Commençons par calculer le résultat d'exploitation attendu de l'entreprise en l'absence du projet. Nous connaissons la valeur des actions (15 000 000 €) et la rentabilité exigée par les actionnaires (10 %). En conséquence, le résultat d'exploitation attendu est :  $(15000000) \times (10\%) = 1500000$  €. Si l'entreprise réalise le projet, le résultat d'exploitation devient :  $1500000 + 750000 = 2250000$  €.

Le risque de l'entreprise est inchangé. La valeur de l'entreprise avec le projet s'il est financé par actions serait donc :  $V = REXP / r_{Actifs} = 2250000 / 10\% = 22500000$  €. Il s'agit bien de la même valeur que celle calculée précédemment.

- c** Si l'entreprise réalise le projet et le finance par emprunt, la rentabilité attendue des actions sera :

$$r_{Actions} = 10\% + (10\% - 5\%) \frac{5000000}{17500000} = 11,43\%$$

Le même résultat peut être retrouvé différemment. Le compte de résultat prévisionnel devient :

- résultat avant charges financières et impôts : 2 250 000 €;
- charges financières : 250 000 € ;
- bénéfice : 2 000 000 €.

La société distribue l'entièreté du bénéfice et la valeur des actions est égale à la valeur actuelle des dividendes futurs :  $A = Div / r_{Actions}$ . Nous avons donc :  $r_{Actions} = Div / A = 2000\,000 / 17\,500\,000 = 11,43\%$ .

Qu'en est-il du coût moyen pondéré du capital ? D'après Modigliani-Miller, il est inchangé (voir leur proposition II). La situation de l'entreprise se présente comme suit (voir tableau 7.1).

Tableau 7.1

	Valeur de marché	Proportions	Coût
Actions	17 500 000	77,78 %	11,43 %
Dette	5 000 000	22,22 %	5,00 %
Entreprise	22 500 000	100,00 %	

Le coût moyen pondéré du capital est :  $(11,43\%) \times (77,78\%) + (5,00\%) \times (22,22\%) = 10\%$ . Nous retrouvons bien la rentabilité attendue des actions en l'absence d'endettement !

Deux remarques pour conclure cet exercice.

- L'accroissement de la rentabilité attendue ne peut refléter qu'une seule chose : l'accroissement du risque des actions.
- Les actionnaires ont la possibilité de modifier à compte propre la décision prise par l'entreprise de financer le projet par dette.

## Exercice 5 Gérer une assemblée générale houleuse

### Énoncé

Nous sommes à l'assemblée générale des actionnaires de la société Gamma (voir exercice 7.4). M. Pignon, directeur financier, termine l'exposé au cours duquel il fait un rapport aux actionnaires sur la politique d'investissement et de financement de l'entreprise. Le cours de l'action ayant augmenté grâce aux décisions prises, il ne s'attend pas à devoir subir des critiques.

Le temps des questions est venu. Un actionnaire se lève pour exprimer son mécontentement. « Monsieur », dit-il, « les décisions que vous avez prises ont conduit à un accroissement du risque des actions que je détiens. Plutôt que de financer le dernier investissement par dette, il eût mieux valu le financer par fonds propres. Une augmentation de capital aurait abouti à une même plus-value mais avec, en plus, un risque de nos actions inchangé. » La remarque suscite de nombreuses réactions dans l'assemblée.

Plusieurs actionnaires expriment leur désaccord profond avec la remarque qui vient d'être faite. « Une augmentation de capital », dit l'un d'eux, « entraînerait évidemment une augmentation du nombre d'actions et donc une dilution des bénéfices futurs. Mieux vaut un risque additionnel que la dilution ». Certains actionnaires vont même plus loin. La société est, selon eux, trop conservatrice en matière d'endettement. Chacun sait, déclarent-ils, que l'endettement permet d'accroître la rentabilité des actions. L'emprunt qui a été contracté va donc dans le bon sens. Ils souhaitent que la société aille plus loin dans cette voie et augmente son endettement.

M. Pignon est bien embarrassé et se penche vers vous pour obtenir de l'aide. Que répondre à ces points de vue apparemment contradictoires ?

- a** Quel serait le risque bêta des actions en l'absence d'endettement ?
- b** Quel est le risque des actions suite à la décision d'emprunter ?
- c** Que faut-il conseiller à l'actionnaire qui souhaite que la société n'ait pas de dettes ?
- d** Que dire à un actionnaire qui souhaiterait que l'endettement représente la moitié de la valeur de la société ?
- e** L'emprunt a-t-il permis d'éviter la dilution des bénéfices qui résulterait d'une augmentation de capital ?

### Solution

- a** L'intuition qui sous-tend les deux propositions de Modigliani-Miller est primordiale ici. Les décisions des entreprises en matière de financement peuvent être modifiées sans coût par les actionnaires au niveau de leurs portefeuilles. Considérons d'abord le cas de l'actionnaire qui regrette l'accroissement de risque de ses actions. Pour rappel, la rentabilité attendue des actions en l'absence d'endettement était de 10 %. Quel était le risque correspondant ? Le taux d'intérêt sans risque est de 5 % et la prime de risque du marché également de 5 %. D'après le Médaf, le bêta des actions en l'absence d'endettement valait donc :  $10\% = 5\% + 5\% \times \beta_{Actifs}$  et :  $\beta_{Actifs} = 1$ .
- b** Quel est le risque actuellement ? En suivant la même démarche, nous trouvons :  $11,43\% = 5\% + 5\% \times \beta_{Actions}$  et, dès lors :  $\beta_{Actions} = 1,286$ . Ou encore, en appliquant directement la formule :  $\beta_{Actions} = \beta_{Actifs}(1 + D/A) = 1 \times (1 + 5/17,5) = 1,286$ .
- c** Notre actionnaire mécontent pourrait modifier la composition de son portefeuille en plaçant une partie de sa fortune en titres sans risque. Pour aboutir à un bêta de 1, la proportion à investir en titres Gamma devrait être telle que :  $(1 - X) \times 0 + X \times \beta_{Actions} = \beta_{Actifs}$  soit :  $X = \beta_{Actifs}/\beta_{Actions} = 1/1,286 = 78\%$  (Pour rappel, le bêta d'un portefeuille est égal à la moyenne pondérée des titres qui le composent. Par ailleurs, par hypothèse, la dette est sans risque et son bêta est donc nul). En d'autres termes, la solution consiste à vendre 12 % des actions et à placer le produit de la vente au taux d'intérêt sans risque. La réponse à donner aux actionnaires qui regrettent que la société ne soit pas suffisamment endettée sera du même ordre : « Endettez-vous personnellement. »
- d** Rappelons que nous sommes dans un monde dans lequel les individus peuvent emprunter aux mêmes conditions que les sociétés. Imaginons qu'un actionnaire considère que le niveau d'endettement que devrait atteindre l'entreprise est  $D/A = 1$ . Si c'était le cas, le bêta des actions serait :  $1 \times (1 + D/A) = 1 \times (1 + 1) = 2$ . Or, le bêta est actuellement de 1,286. Notre actionnaire devrait donc modifier la composition de son portefeuille et investir dans l'action Gamma une fraction  $X$  de son investissement initial qui soit :  $(1 - X) \times 0 + X \times 1,286 = 2$ . Après calcul :  $X = 1,55$  et  $(1 - X) = -0,55$ . Sachant qu'une fraction négative correspond à une position à découvert (un emprunt), l'actionnaire doit donc emprunter 55 € par 100 € investis actuellement dans l'action Gamma et utiliser le produit de l'emprunt pour acheter des actions Gamma additionnelles.
- e** Il reste à M. Pignon à répondre à la question concernant la dilution. Il est exact qu'en empruntant, la société a évité d'émettre des actions nouvelles et donc de diluer les bénéfices futurs. Mais qu'aurait dû faire l'actionnaire si, plutôt que d'emprunter, la société Gamma avait procédé à une augmentation de capital pour financer le projet ?

Le montant de l'investissement à financer étant de 5 000 000 € et le cours par action de 175 € (après annonce du projet, c'est-à-dire compte tenu de la VAN du projet), le nombre d'actions nouvelles à émettre eût été de  $5\ 000\ 000 / 175 = 285\ 714$ . Le nombre total d'actions après l'augmentation de capital aurait donc été de 1 285 714. En l'absence d'endettement, le bénéfice de l'entreprise est de 2 250 000 €, et celui de l'action de 1,75 € (contre 2 € dans le cas d'un financement par dette). Le bêta des actions serait, dans ce cas, de 1.

Mais le point essentiel ici réside dans le fait que le bénéfice par action attendu en cas d'endettement provient du risque plus important dû à la dette. Si la société avait procédé à une augmentation de capital plutôt qu'à l'emprunt, notre actionnaire aurait pu modifier – comme dans le cas précédent – le niveau du bénéfice attendu en empruntant à compte propre. Pour aboutir au bêta de 1,286, il lui aurait suffi d'emprunter 28,6 € par 100 € investis dans l'action Gamma.

## Exercice 6 Déterminer la rentabilité attendue et le risque des actions (modèle de Merton)

### Énoncé

M. Flopper doit prochainement rencontrer M. d'Argent, le banquier, qui lui propose d'émettre un zéro-coupon venant à échéance pour financer l'investissement que la société HautTek a décidé de réaliser. M. Flopper, grâce à un modèle binomial, a compris la problématique de l'évaluation d'une dette risquée. Mais il souhaite négocier sur la base d'un modèle plus sophistiqué. Une recherche sur Internet lui a permis de trouver une feuille de calcul qui donne les résultats du modèle de Merton. Il y a introduit les données relatives à sa société et a obtenu les résultats montrés dans le tableau 7.2.

M. Flopper a, en outre, recueilli les données suivantes :

- prime de risque du marché = 5 % ;
- bêta des actions de l'entreprise non endettée = 1,50.

Il a noté les questions suivantes :

- a** Quel est le risque (bêta) des actions de l'entreprise endettée ?
- b** Quelle est la rentabilité attendue des actions de l'entreprise endettée ?
- c** Quel est le risque (bêta) de la dette ?
- d** Quelle est la rentabilité attendue de la dette ?
- e** Quel est le coût moyen pondéré du capital de l'entreprise endettée ?

### Solution

- a** Le risque des actions de l'entreprise endettée est :

$$\beta_{Actions} = Delta_{Actions} \beta_{Actifs} \left( 1 + \frac{D}{A} \right) = 0,83 \times 1,50 \times \left( 1 + \frac{2\ 176\ 752}{2323\ 248} \right) = 2,412$$

- b** La rentabilité attendue des actions est calculée en appliquant la formule du Médaf :

$$r_{Actions} = r_f + (r_M - r_f) \beta_{Actions} = 2 \% + 5 \% \times 2,412 = 14,06 \%$$

Tableau 7.2

Données	
Valeur de la société	4 500 000 millions €
Valeur nominale de la dette	3 000 000 millions €
Échéance (année)	2
Taux d'intérêt sans risque (capitalisation annuelle)	2 %
Volatilité de l'entreprise	69,31 %
Résultats	
Valeur des actions	2 323 248 €
Delta des actions	0,83
Valeur de la dette	2 176 752 €

- c** Le bêta de la dette est donné par la formule :

$$\beta_{Dette} = -\text{Delta}_{Put} \beta_{Actifs} \left(1 + \frac{A}{D}\right)$$

Pour calculer le  $\text{Delta}_{Put}$ , nous utilisons la relation de parité put-call :

$$\text{Delta}_{Actions} - 1 = 0,83 - 1 = -0,17$$

Le bêta de la dette est donc :

$$\beta_{Dette} = -(-0,17) \times 1,50 \times \left(1 + \frac{2176752}{2323248}\right) = 0,53$$

- d** En appliquant la formule du Médaf, nous trouvons la rentabilité attendue de la dette suivante :

$$r_{Dette} = r_f + (r_M - r_f) \beta_{Dette} = 2 \% + 5 \% \times 0,53 = 4,63 \%$$

- e** Le coût moyen pondéré du capital est :  $CMPC = (14,06\%) \times (51,63\%) + (4,63\%) \times (48,37\%) = 9,50\%$ . En l'absence d'endettement, le coût moyen pondéré du capital est égal au coût des fonds propres et le bêta des actions serait égal au bêta des actifs :  $r_{Actions} = r_f + (r_M - r_f) \beta_{Actions} = 2 \% + 5 \% \times 1,50 = 9,50\%$ .

## Fiscalité et endettement

### Exercice 7 Calculer la valeur d'une entreprise endettée en présence d'impôts

#### Énoncé

La Société électrique française (SEF) va prochainement être introduite en Bourse. Vous êtes chargé de déterminer le prix auquel les actions seront vendues. Vous avez rassemblé les données suivantes :

- résultat d'exploitation attendu : 30 millions € (une perpétuité) ;
- dette : 60 millions € (une perpétuité) ;
- taux d'impôt sur les sociétés : 40 % ;
- rentabilité exigée en l'absence d'endettement : 10 % ;
- taux d'intérêt sans risque : 4 %.

- a** Calculez la valeur de l'entreprise non endettée.
- b** Déterminez l'économie fiscale annuelle résultant de l'endettement.
- c** Quelles sont les valeurs de l'entreprise et des actions ?
- d** Quelle est la rentabilité attendue des actions ?
- e** Calculez le coût moyen pondéré du capital.

### Solution

- a** La valeur de l'entreprise non endettée est :

$$V_U = \frac{REXP(1 - T_{Isoc})}{r_{Actifs}} = \frac{30(1 - 0,40)}{10\%} = 180 \text{ millions } e$$

- b** Les charges d'intérêt annuelles de la société représentent :  $Cfin = rDette \times D = 4\% \times 60 = 2,4$  millions €. Elles sont déductibles du bénéfice taxable. L'économie fiscale réalisée est de :  $T_{Isoc} \times Cfin = 40\% \times 2,4 = 0,96$  million €. La dette étant, par hypothèse, constante, la valeur actuelle des économies fiscales est égale à :  $\frac{0,96}{4\%} = 24$  millions €. Remarquons que cette valeur peut être obtenue en multipliant le montant de la dette par le taux d'impôt sur les sociétés :  $T_{Isoc} \times D = 40\% \times 60 = 24$  millions €.

- c** La valeur  $V$  de l'entreprise est égale à la somme de sa valeur sans endettement et de la valeur actuelle des économies fiscales :  $180 + 24 = 204$  millions €. La valeur  $A$  des actions est obtenue par différence entre la valeur de l'entreprise et la valeur de la dette :  $204 - 60 = 144$  millions €.

- d** Nous pouvons calculer la rentabilité attendue des actions de deux manières.

1. Nous connaissons la valeur des actions ( $A = 144$  millions €). Nous pouvons, d'autre part, calculer le bénéfice futur attendu :  $(30 - 2,4) \times (1 - 0,40) = 16,56$  millions €. Ce bénéfice sera distribué aux actionnaires sous forme de dividendes. La rentabilité attendue de l'action est donc :  $16,56/144 = 11,50\%$ .
2. Nous pouvons retrouver ce résultat en appliquant la formule :

$$r_{Actions} = r_{Actifs} + (r_{Actifs} - r_{Dette})(1 - T_{Isoc}) \frac{D}{A}$$

Nous obtenons alors :

$$r_{Actions} = 10\% + (10\% - 4\%)(1 - 0,40) \frac{60}{144} = 11,50\%$$

- e** Le coût moyen pondéré du capital est :  $CMPC = 11,50\% \times \frac{144}{204} + 4\% \times (1 - 0,40) \times \frac{60}{204} = 8,82\%$ .

Nous pouvons ainsi vérifier que l'endettement conduit à une diminution du coût moyen pondéré du capital, qui est le reflet de l'accroissement de la valeur de l'entreprise résultant des économies fiscales.

## Exercice 8 Calculer la valeur d'une entreprise endettée sur la base du coût moyen pondéré

### Énoncé

Vous venez de recevoir de nouvelles informations concernant la Société d'électricité (SE) dont vous aimerez déterminer la valeur.

- résultatat d'exploitation attendu : 30 millions € (une perpétuité) ;
- taux d'impôt sur les sociétés : 40 % ;
- rentabilité exigée en l'absence d'endettement : 10 % ;
- taux d'intérêt sans risque : 4 %.

Le conseil d'administration vient de déterminer le coefficient d'endettement à long terme de l'entreprise. L'objectif est d'aboutir à un niveau égal à 25 % de la valeur de l'entreprise.

- a** Calculez le coût moyen pondéré du capital
- b** Déterminez la valeur de l'entreprise
- c** Quelles sont les valeurs de la dette et des actions ?
- d** Quelle est la valeur de l'économie fiscale ?

### Solution

- a** Deux approches permettent d'aboutir au coût moyen pondéré du capital.
  1. La formule de Modigliani-Miller :  $r_{Actifs} \times (1 - T_{Isoc} \times L)$  avec  $L = D/V = 25\%$ .  
L'application de cette formule conduit au résultat suivant :

$$CMPC = 10\% \times (1 - 0,40 \times 25\%) = 9\%$$

2. La formule classique.

Il faut d'abord calculer la rentabilité attendue des actions :

$$r_{Actions} = r_{Actifs} + (r_{Actifs} - r_{Dette})(1 - T_{Isoc}) \frac{D}{A}$$

Pour rappel :  $D/V = L \rightarrow A/V = 1 - L \rightarrow D/A = L/(1 - L)$ .

$$\text{Il en résulte : } r_{Actions} = 10\% + (10\% - 4\%)(1 - 0,40) \frac{0,25}{0,75} = 11,20\%.$$

La formule classique peut donc être appliquée sachant que  $A/V = 1 - L$  et  $D/V = L$ .

$$CMPC = 11,20\% \times 0,75 + 4\% \times (1 - 0,40) \times 0,25 = 9\%$$

- b** La valeur de l'entreprise est calculée en actualisant le bénéfice de l'entreprise non endettée au coût moyen pondéré du capital :

$$V = \frac{REXP(1 - T_{Isoc})}{CMPC} = \frac{30(1 - 0,40)}{9\%} = 200 \text{ millions €}$$

- c** La valeur de la dette est :  $D = L \times V = 25\% \times 200 = 50$  millions €. La valeur des actions est :  $A = V - D = 200 - 50 = 150$  millions €.
- d** La valeur de l'avantage fiscal de l'endettement est égale à la différence entre la valeur de l'entreprise endettée et la valeur de l'entreprise non endettée. Comme  $V_U = \frac{REXP(1 - T_{Isoc})}{r_{Actifs}} = \frac{30(1 - 0,40)}{10\%} = 180$  millions €, la valeur de l'avantage fiscal de l'endettement s'élève à :  $VAFE = V - V_U = 200 - 180 = 20$  millions €. La valeur obtenue est égale au montant de la dette multiplié par le taux d'impôt sur les sociétés.

Les deux exercices précédents appellent un commentaire : ils illustrent les deux approches permettant de déterminer la valeur d'une entreprise endettée lorsqu'il existe un avantage fiscal à l'endettement. Dans les deux cas, le niveau de la dette est constant. La première approche consiste à rajouter la valeur de l'avantage fiscal de l'endettement à celle de l'entreprise non endettée pour aboutir à la valeur de l'entreprise endettée. Il est recommandé de l'utiliser lorsque le montant de la dette est connu. La seconde approche détermine la valeur de l'entreprise endettée en se fondant sur le calcul du coût moyen pondéré du capital. Elle s'applique lorsque le coefficient d'endettement est fixé.

## Exercice 9 Analyser les conséquences d'un rachat de société financé par emprunt

### Énoncé

La Compagnie alsacienne de mécanique (CAM) a décidé de racheter les Ateliers de bobinage méridionaux (ABM) afin de renforcer sa position dans l'un de ses pôles de croissance. Le résultat d'exploitation de CAM, avant charges financières et impôts, pour les années futures est de 20 millions d'euros par an. CAM distribue traditionnellement l'entièreté de son bénéfice. La société n'est pas endettée et son capital est représenté par 100 000 actions. Le prix de rachat des actions d'ABM a été fixé à 20 millions d'euros. Cette acquisition augmentera le résultat d'exploitation annuel de CAM de 5 millions (jusqu'à l'infini). Tous les cash flows ont lieu le 31 décembre de chaque année. Le taux d'imposition des sociétés est de 40 %. Les dividendes versés par les entreprises échappent à toute forme d'imposition. La rentabilité attendue d'actions de même risque opérationnel que CAM et ABM est fixée par le marché à 12 %. Les dirigeants de CAM estiment donc que l'opération de rachat est rentable.

Supposons que CAM emprunte le montant nécessaire à l'acquisition au taux du marché de 5 %. Considérez que l'emprunt est sans risque. Supposons que l'emprunt soit permanent.

- a** Déterminez la valeur des actions de CAM avant l'opération de rachat (en supposant que cette opération ne soit pas anticipée).
- b** Calculez la VAN du projet de rachat et la valeur de CAM après annonce mais avant que le mode de financement du rachat n'ait été décidé.
- c** CAM annonce que l'opération sera financée par emprunt. Quel est l'impact de cette information sur la valeur des actions ?
- d** Calculez la rentabilité attendue de l'action CAM sur la base du résultat prévisionnel.

Contrôlez que le résultat que vous obtenez vérifie la relation théorique entre la rentabilité attendue d'une action pour une entreprise endettée et son niveau d'endettement.

### Solution

- a** Valeur de marché de CAM avant rachat :  $20(1 - 0,40)/12\% = 12/12\% = 100$  millions €.
- b** La *VAN* du rachat de ABM par CAM est calculée comme suit :  $-20 + 5 \times (1 - 0,40)/12\% = 5$  millions €. Si l'opération n'est pas anticipée, la valeur de marché des actions de CAM augmentera d'un montant égal à la *VAN* de l'opération :  $100 + 5 = 105$  millions €.
- c** À l'annonce du mode de financement de l'opération, les actions réagiront à la hausse pour refléter l'économie fiscale. CAM emprunte 20 millions € au taux de 5 %. L'économie fiscale annuelle s'élève à :  $20 \times 5\% \times 40\% = 0,40$  million €. La valeur de l'avantage fiscal de l'endettement correspond à :  $0,40/5\% = 40\% \times 20 = 8$  millions €. La valeur *A* des actions devient donc :  $105 + 8 = 113$  millions €.
- d** Calculons le bénéfice attendu de CAM (en millions €) après le rachat et l'emprunt :
  - résultat d'exploitation : 25,00 ;
  - charges financières : 1,00 ;
  - impôts : 9,60 ;
  - bénéfice : 14,40.

Il s'agit d'une perpétuité. La rentabilité attendue de l'action est :

$$r_{Actions} = \frac{14,40}{113} = 12,74\%$$

Nous pouvons vérifier que ce résultat satisfait la relation théorique :

$$\begin{aligned} r_{Actions} &= r_{Actifs} + (r_{Actifs} - r_{Dette})(1 - T_{Isoc}) \frac{D}{A} \\ &= 12\% + (12\% - 5\%)(1 - 40\%) \frac{20}{113} = 12,74\% \end{aligned}$$

## Exercice 10 Emprunt non permanent

### Énoncé

Dans trois ans auront lieu les Jeux olympiques et votre nouvelle société, la Firme légendaire olympique provisoire (FLOP) produira des articles (tee-shirts, casquettes et trompettes) destinés aux nombreux supporters de cet évènement sportif. Le montant de l'investissement initial s'élève à 6,5 millions d'euros. Malheureusement, il n'existe pas d'amortissements dans le pays où la société est établie. Une partie de l'investissement (2 millions d'euros) sera financée par capitaux propres, le reste par un emprunt bancaire à rembourser par tranche de 1,5 million en trois ans au taux de 8 %. Cet emprunt sera contracté à la fin de  $T = 0$  et le premier paiement d'intérêt aura lieu à la fin de  $T = 1$ . Le coût du capital d'entreprises similaires non endettées est de 10 %. La politique de la société vise à reverser, sous forme de dividendes, l'argent disponible après remboursement de la dette.

Le taux d'imposition sur les sociétés est de 40 % et le résultat d'exploitation attendu, après impôts, au cours des trois prochaines années est le suivant (en milliers d'euros) :

(Chiffres en milliers d'euros)	0	1	2	3
Résultat d'exploitation après impôts	0	1 800	2 400	9 000

En fonction de ces données :

- a** Que vaudrait l'entreprise si elle n'était pas endettée ?
- b** Que vaut l'avantage fiscal de l'endettement ? Et que vaudra alors l'entreprise ?
- c** Comment cette valeur et celle des actions évoluent-elles dans le temps ?
- d** Comment évolue le coût moyen pondéré du capital ?

### Solution

- a** En l'absence d'endettement, la valeur de l'entreprise peut être déterminée en actualisant, au coût du capital, son résultat d'exploitation après impôts. Donc la société vaudra, en  $T = 0$ ,  $V = 1800000/1,1 + 2400000/1,1^2 + 9000000/1,1^3 = 10382000 \text{ €}$ . Le même procédé permet de déterminer sa valeur pour les autres années.

(Chiffres en milliers d'euros)	0	1	2	3
Résultat d'exploitation avant impôts (milliers d'euros)		3 000	4 000	15 000
Résultat d'exploitation après impôts (milliers d'euros)		1 800	2 400	9 000
$V_u$ (milliers d'euros)	10 382	9 620	8 182	0

On peut retrouver cette valeur en procédant à un calcul à reculons. Il est intéressant de constater que la valeur de la société décroît au fil des ans, ce qui s'explique par le fait que le projet cesse en  $T = 3$  et que l'on s'en rapproche progressivement.

- b** et **c** Le remboursement de la dette s'effectue au fur et à mesure et l'avantage fiscal dû à l'endettement décroît d'une année à l'autre. Le tableau suivant, exprimé en milliers d'euros, en résume l'évolution.

(Chiffres en milliers d'euros)	0	1	2	3
Montant de la dette	4 500	3 000	1 500	
Charges financières ( $C_{fin} = Tc \times D$ )		360	240	120
Avantage fiscal ( $Tc \times rd \times D$ )		144	96	48
VAFE	254	130	44	
Valeur de la société endettée $= Vu + VAFE$	$10382 + 254$ $= 10635$	$9620 + 130$ $= 9750$	$8182 + 44$ $= 8226$	0
$D$	4 500	3 000	1 500	
$A$	6 135	6 750	6 726	

Plusieurs éléments méritent d'être signalés. D'une part, l'avantage fiscal de l'endettement est très largement inférieur au résultat obtenu en prenant la formule  $VAFE = T_c \times D$ .

Pour rappel, cette dernière ne s'applique que pour les perpétuités ! Par ailleurs, le remboursement progressif de l'emprunt entraîne un ensemble de baisses successives de la VAFFE. Enfin, il convient de noter le changement important, en proportion, de la valeur des actions par rapport à celle de la société. Il correspond bien entendu au remboursement progressif de la dette, ce qui a un impact certain sur la méthode d'évaluation de la société comme nous le verrons ci-après.

- d** Pour pouvoir déterminer le coût moyen pondéré du capital, il faut d'abord calculer le taux de rentabilité exigé par les actionnaires. L'évolution du montant de la dette entraîne avec lui un changement dans la valeur de l'avantage fiscal de l'endettement et une variation du risque supporté par les actionnaires. La rentabilité exigée varie donc avec le temps. Elle est calculée ici sur la base des dividendes escomptés par les actionnaires :  $r_{actions2} = (A_3 - A_2 + DIV_3) / A_2$ .

	0	1	2	3
Bénéfice = ( $REXP$ avant impôts – $Cfin$ nettes) (milliers d'euros)		1 584	2 256	8 928
Remboursement de la dette (milliers d'euros)		1 500	1 500	1 500
Dividendes (milliers d'euros)		84	756	7 428
$r_{actions}$	11,38 %	10,85 %	10,43 %	
$A/V$	57,69 %	69,23 %	81,77 %	
Coût moyen pondéré du capital	8,60 %	8,99 %	9,41 %	

Le coût moyen pondéré du capital varie donc suite aux remboursements successifs. Sa croissance s'explique par celle, proportionnelle, des actions par rapport à la dette. En fait, son évolution résulte d'un double mouvement : une baisse due à la réduction de la rentabilité exigée par les actionnaires (consécutive à la baisse de risque provenant de la diminution de l'endettement) et une hausse qui reflète la part croissante des actions dans la société (pour rappel  $r_{actions} > r_d$ ). Dans ces conditions, l'actualisation de l'ensemble des cash flows au coût moyen pondéré du capital déterminé pour l'année 1 conduirait à un résultat erroné. L'abus du coût moyen pondéré du capital peut donc gravement nuire à la santé financière de l'entreprise.

## La théorie du compromis

### Exercice 11 Calculer une structure financière optimale (modèle de Leland)

#### Énoncé

Pablo Gonzales est analyste chez Merry Launch, la banque d'affaire londonienne. Il met la dernière main à la présentation qu'il doit faire le lendemain devant le conseil d'administration de Fixphone, l'opérateur de téléphonie fixe. Fixphone est une entreprise publique qui sera prochainement privatisée. La banque chargée de mener l'opération sera prochainement désignée. La concurrence est vive pour décrocher ce mandat et

Pablo est désireux de se différencier de ses concurrents. Il pense y parvenir en proposant une approche originale concernant la structure financière de la société. Fixphone est actuellement entièrement financée par actions. Sa valeur de marché est estimée à 480 millions €. Les données qui sous-tendent cette estimation sont les suivantes :

- résultat d'exploitation : 80 millions € (une perpétuité) ;
- impôts (au taux de 40 %) : 32 millions € ;
- bénéfice : 48 millions € ;
- rentabilité exigée par le marché : 10 %.

Pablo se demande si Fixphone ne pourrait pas accroître le revenu de cette opération pour l'État en empruntant et en rachetant une partie des actions. L'emprunt permettrait à l'entreprise de réaliser une économie d'impôt. Pour clarifier le problème, Pablo décide d'utiliser le modèle de Leland avec les paramètres suivants :

- taux d'intérêt sans risque : 5 % ;
- volatilité des actifs de l'entreprise : 30 % ;
- coût de faillite : 50 % de la valeur de l'entreprise.

Supposons que Fixphone réalise un emprunt donnant lieu au paiement d'une charge d'intérêt annuelle de 10 millions € à perpétuité.

- a** À quel niveau de la valeur de l'entreprise non endettée la faillite aurait-elle lieu ?
- b** Quel serait le prix aujourd'hui de 1 € en cas de faillite ?
- c** Quelles seraient la valeur de la dette et la valeur actuelle des économies fiscales en l'absence de risque de faillite ?
- d** Quelle serait la valeur actuelle des économies fiscales compte tenu du risque de faillite ?
- e** Quels sont les coûts engendrés par la faillite ? Quelle en est la valeur actuelle ?
- f** Quelle serait la valeur de Fixphone ?
- g** Quelle serait la valeur de marché de la dette ?
- h** À quel taux la société Fixphone pourrait-elle emprunter ?
- i** Quelle serait la valeur de marché des actions ? (L'analyse qui précède a permis de comprendre les différents éléments qui interviennent dans la détermination de la valeur d'une entreprise endettée)

### Solution

- a** La faillite a lieu lorsque la valeur de l'entreprise non endettée atteint le niveau suivant :

$$V_{faillite} = \frac{C(1 - T_{Isoc})}{(r_f + 0,5\sigma^2)} = \frac{10(1 - 0,40)}{(5\% + 0,5 \times (30\%)^2)} = \frac{6}{9,5\%} = 63,16 \text{ millions €}$$

À ce moment-là, la valeur des actions devient nulle. Notons que le seuil de faillite diminue lorsque la volatilité de l'entreprise non endettée augmente.

- b** Le prix de marché de 1 € en cas de faillite est :

$$v_{faillite} = \left( \frac{V_{faillite}}{V_U} \right)^{\frac{2r_f}{\sigma^2}} = \left( \frac{63,16}{480} \right)^{\frac{2 \times 5\%}{0,30^2}} = 0,1050 \text{ €}$$

Ce prix reflète à la fois la probabilité de risque neutre de faillite et l'actualisation qui tient compte de la date attendue de la faillite.

- c** La valeur actuelle des économies fiscales en l'absence de risque de faillite serait égale à la valeur actuelle des économies fiscales annuelles :  $\frac{10 \times 0,40}{5 \%} = 80 \text{ millions } \text{€}$

Nous retrouvons un résultat analysé précédemment. En effet, l'absence de risque de faillite implique que la dette  $D$  est sans risque. Sa valeur de marché serait donc calculée en actualisant les intérêts au taux d'intérêt sans risque :  $\frac{10}{5 \%} = 200 \text{ millions } \text{€}$ . La valeur de l'avantage fiscal de l'endettement serait donc :  $T_{Isoc} \times D = 0,40 \times 200 = 80 \text{ millions } \text{€}$ .

- d** La possibilité de faillite diminue la valeur de l'avantage fiscal de l'endettement, qui est alors perdu. La valeur de l'avantage fiscal de l'endettement, compte tenu du risque de faillite, est égale à la différence entre la valeur de l'avantage fiscal de l'endettement en l'absence de risque de faillite et la valeur actuelle de l'avantage fiscal perdu en cas de faillite :  $80 - 0,1050 \times 80 = 71,60 \text{ millions } \text{€}$ .

- e** La faillite a pour conséquence de détruire 50 % de la valeur de l'entreprise. La faillite ayant lieu si  $V_U = 63,16 \text{ millions } \text{€}$ , ses coûts (coûts de détresse financière,  $CDF$ ) s'élèvent à :  $\alpha V_{faillite} = 50 \% \times 63,16 = 31,58 \text{ millions } \text{€}$ .

La valeur actuelle des coûts de faillite est obtenue en multipliant le coût de faillite par la valeur actuelle de 1 € en cas de faillite :  $v_{faillite} \times CDF = 0,1050 \times 31,58 = 3,32 \text{ millions } \text{€}$ .

- f** La valeur de l'entreprise est égale à la somme de sa valeur, non endettée, et de la valeur de l'avantage fiscal de l'endettement, à laquelle on soustrait la valeur actuelle des coûts de détresse financière :  $V_U + VA(�) - VA(CDF) = 480 + 71,60 - 3,32 = 548,28 \text{ millions } \text{€}$ .

- g** La valeur de marché de la dette est donnée par la formule :

$$D = (1 - v_{faillite}) \frac{C}{r_f} + v_{faillite}(1 - \alpha) V_{faillite}$$

$$= D = (1 - 0,1050) \times 200 + 0,1050 \times (1 - 0,50) \times 63,16 = 182,31 \text{ millions } \text{€}$$

Nous constatons que la valeur de marché de la dette (182,31 millions €) est inférieure à la valeur de la dette en l'absence de risque de défaut (200 millions €).

- h** Cette dette donne lieu au paiement d'un intérêt annuel de 10 millions € à perpétuité. Le taux d'emprunt est de :  $r_{Dette} = \frac{10}{182,31} = 5,49\%$ , soit un écart (spread) de 0,49 % par rapport au taux d'intérêt sans risque.

- i** La différence entre la valeur de l'entreprise et la valeur de la dette conduit à la valeur des actions :  $548,28 - 182,31 = 365,97 \text{ millions } \text{€}$ .

# Analyse de projets d'investissement

1. Critères de décision . . . . .	222
2. Éléments à prendre en compte dans le calcul de la VAN . . . . .	225
3. Analyse des déterminants de la valeur . . . . .	227
4. Flexibilité de la décision . . . . .	230
5. Financement des projets . . . . .	232
<b>Problèmes et exercices</b>	
Critères de décision . . . . .	234
Calcul de la VAN . . . . .	237
Projets d'investissement récapitulatifs . . . . .	247
Analyse de point mort . . . . .	252
Flexibilité de la décision . . . . .	254
Financement des projets . . . . .	257

**Nous avons étudié précédemment les problèmes de détermination des flux financiers, de leur actualisation à un taux reflétant les risques de marché et de crédit de l'émetteur, tout en considérant le comportement des acteurs dans ce financement. De plus, nous avons vu que la valeur d'une société peut être définie par l'actualisation des free cash flows qu'elle générera dans le futur.**

Nous verrons dans ce chapitre que l'évaluation concrète de projets est proche de celle d'une société dans son ensemble car le critère à retenir est celui de la valeur actuelle nette (VAN) fondé sur l'actualisation de flux financiers futurs : les projets doivent être entrepris s'ils enrichissent la société.

Un projet d'investissement demande une mise de fonds, l'investissement, qui affecte les cash flows futurs. Elle peut être unique ou multiple et son influence sur les cash flows due à l'augmentation du chiffre d'affaires (ex : nouveau produit), à la diminution des coûts (ex : nouvelle technique de production), etc.

De manière générale, l'évaluation d'un projet commence par la détermination des flux futurs qui découlent de cet investissement, suivie du calcul de sa valeur actuelle. Le choix du taux d'actualisation est important : il doit refléter le risque inhérent au projet. Par ailleurs, la prise en compte de la flexibilité spécifique à certaines décisions amène une application concrète des notions de la théorie d'évaluation des options. Enfin, ce chapitre s'intéresse également aux déterminants de la valeur dans l'évaluation finale (analyse de sensibilité, de point mort ou de scénarios).

# 1 Critères de décision

Diverses méthodes sont utilisées pour évaluer les projets d'investissement, qui se fondent toutes sur le montant de l'investissement, la valeur des cash flows futurs et le taux d'actualisation.

Les principales sont celles du payback, du payback actualisé, du taux de rentabilité interne et de la valeur actuelle nette. De manière générale, c'est cette dernière qui permet de trancher correctement. Les autres méthodes sont néanmoins exposées puisqu'elles sont parfois utilisées dans la pratique.

Nous prendrons pour exemple un projet nécessitant un investissement  $I$  cette année (en  $t = 0$ ) et rapportant au cours des années 1 à  $T$  un cash flow  $C_t$  pour chaque année  $t$ .

## 1.1 Le payback

Le payback mesure le nombre d'années nécessaire avant que le projet ne permette de rembourser l'investissement, grâce aux cash flows attendus. Il est égal à l'année  $n$  pour laquelle la somme des cash flows attendus est supérieure à l'investissement initial :

$$\sum_{t=1}^n C_t \geq I$$

Le critère de décision recommande de choisir le projet présentant le payback le plus faible, ce qui revient à considérer que l'essentiel est de récupérer sa mise de départ au plus vite. Cette mesure présente cependant de nombreux inconvénients. Tout d'abord, il n'est pas possible de dire si un projet unique est intéressant. Ensuite, la méthode ne tient pas compte des cash flows arrivant après la date du payback. Enfin, l'influence du temps sur les cash flows n'est pas prise en compte.

## 1.2 Le payback actualisé

Le payback actualisé correspond également au nombre d'années nécessaire avant que le projet ne permette de rembourser l'investissement initial mais en utilisant les cash flows actualisés. Il est égal à l'année  $n$  pour laquelle la somme actualisée des cash flows attendus est supérieure à l'investissement initial :

$$\sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r)^t} \geq I$$

La mesure du payback actualisé répond à l'un des problèmes du payback. Cependant, les autres critiques restent valides.

## 1.3 La valeur actuelle nette

La valeur actuelle nette (VAN) du projet correspond à la valeur actualisée des cash flows futurs. Le taux d'actualisation doit refléter le risque du projet :

$$VAN = -I + \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

La *VAN* mesure la valeur du projet. Ce critère de décision recommande de réaliser le projet s'il augmente la valeur de l'entreprise, c'est-à-dire si la *VAN* est supérieure à 0. L'un de ses avantages principaux réside dans le fait que le résultat obtenu est exprimé en €. C'est donc possible de chiffrer ce que le projet rapportera et, ainsi, décider s'il faut ou non l'entreprendre. Le critère de la *VAN* permet toujours de choisir entre différents projets. Celui dont la *VAN* est la plus grande est le plus intéressant car c'est celui qui augmente le plus la valeur de l'entreprise. De plus, si la *VAN* de deux projets est identique, cela indique que les deux projets sont aussi intéressants l'un que l'autre (ce qui n'est pas le cas de deux projets avec le même payback).

Le critère de la *VAN* peut également être vu comme le choix entre deux projets : ne rien faire (*VAN* nulle) ou réaliser le projet (*VAN* > 0).

## 1.4 Le taux de rentabilité interne

Le taux de rentabilité interne (*TRI*) représente le taux de rentabilité du projet. Il annule la valeur actuelle nette et vérifie l'équation suivante :

$$-I + \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1 + TRI)^t} = 0$$

De manière générale, si le critère de décision se fonde sur le *TRI*, la recommandation d'investir dans un projet est valable lorsque  $TRI > r$ . Ce critère indique qu'un projet est intéressant si la rentabilité de ce projet est supérieure au taux du financement de ce projet (le taux d'actualisation :  $r$ ).

Le critère du *TRI* s'énonce comme suit : « Si le *TRI* est supérieur au taux  $r$  exigé par les investisseurs pour un projet de risque similaire, alors il faut l'entreprendre. » L'investisseur peut décider de s'engager soit dans le projet (qui lui rapportera le *TRI*) soit dans des actions d'une entreprise de même risque (qui lui rapportent  $r$ ). Si, pour un même risque, l'investisseur peut obtenir une rentabilité plus élevée, c'est que le projet crée de la valeur et est intéressant.

Le critère du *TRI* doit cependant être utilisé avec précaution. En effet, il compte certains inconvénients :

1. Il ne tient pas compte de l'échelle des montants mis en jeu.

Un projet dont l'investissement initial est de 1 € et qui rapporterait 1,5 € dans un an ( $TRI = 50\%$ ) serait considéré comme meilleur qu'un projet dont l'investissement serait de 1 000 000 € et rapporterait 1 250 000 € dans un an ( $TRI = 25\%$ ). L'actionnaire ne voit pas les choses de la même manière. En effet, si on ne tient pas compte de l'actualisation, dans le premier cas il gagne 0,5 €, dans l'autre 250 000 € !

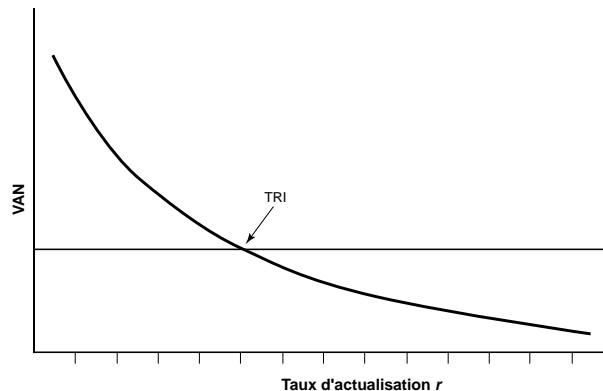
2. Il ne permet pas de choisir entre plusieurs projets.

La figure 8.1 montre que le choix entre deux projets A et B mutuellement exclusifs dépend du taux d'actualisation. Tant que  $r$  est inférieur à un certain seuil, le projet B est préférable (car  $VAN_B > VAN_A$ ), au-delà de ce seuil, la situation s'inverse. Le *TRI* est pour sa part fixe, il privilégiera inconditionnellement le projet A. En revanche, le critère de la *VAN* reste vérifié indépendamment du taux d'actualisation.

## Complément

### Le lien entre VAN et TRI

Dans un graphe représentant la *VAN* en fonction du taux d'actualisation, le *TRI* correspond au taux pour lequel la fonction coupe l'axe des abscisses.

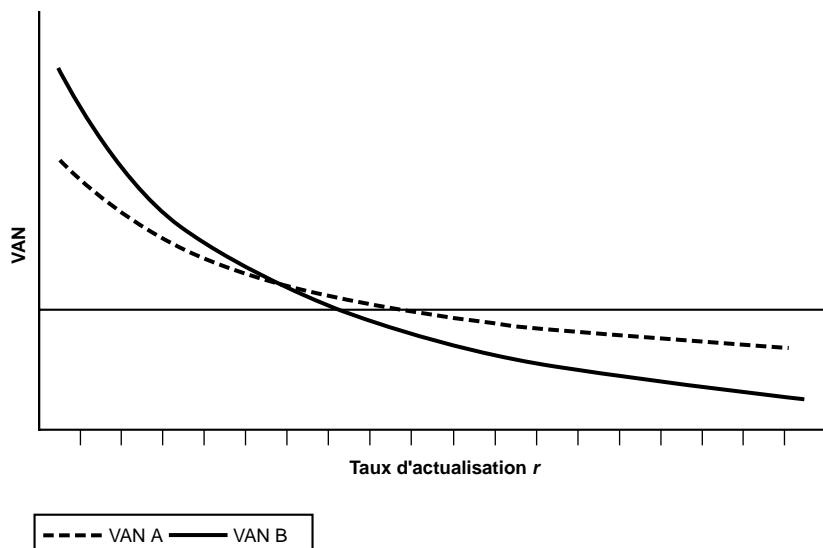


**Valeur actuelle nette en fonction du taux d'actualisation**

La *VAN* est donc liée au *TRI*. Pour les projets caractérisés par des flux de trésorerie négatifs suivis de flux positifs, nous observons la relation suivante :  $VAN > 0 \Leftrightarrow TRI > r$ .

Figure 8.1

**TRI pour des projets mutuellement exclusifs.**



3. Dans certains cas, il n'est pas possible de trouver une solution unique à l'équation définissant le *TRI*. En effet, lorsqu'il y a alternance de cash flows positifs et négatifs, il peut exister plusieurs *TRI*. Il n'est alors pas possible de savoir lequel utiliser pour le comparer au taux d'actualisation.
4. Dans le cas d'un projet prêteur (cash flows positifs puis négatifs), la règle du *TRI* doit être inversée. Ce critère ne peut donc pas être utilisé aveuglément.

## 2 Éléments à prendre en compte dans le calcul de la VAN

De manière générale, le calcul de la *VAN* est réalisé en actualisant des **cash flows différentiels nominaux, après l'impôt sur les sociétés, à un taux qui reflète le risque du projet.**

### 2.1 Détermination des cash flows

L'évaluation des cash flows que produira un projet n'est pas aisée. Si le projet ressemble à une activité déjà en place au sein de la société, l'estimation est possible par comparaison. Dans le cas contraire, il convient de procéder à des études de marché, des projections... L'incertitude qui existe quant à la bonne évaluation des cash flows futurs fait partie du risque inhérent au projet ; il en est tenu compte *via* le taux d'actualisation. Indépendamment de la justesse des estimations, il convient de ne tenir compte que des cash flows. Pour rappel, et de manière schématique, il faut rajouter au résultat, après impôt projeté, les charges non décaissées et soustraire l'accroissement de BFR et les investissements.

### 2.2 Analyse différentielle

Afin que l'analyse soit valide, il faut impérativement considérer toutes les implications du projet. Une première méthode consiste à établir deux séries de cash flows : l'une avec projet et l'autre sans. Une fois établies, les *VAN* des deux sont comparées ; l'option qui maximise la *VAN* est alors retenue. Une seconde méthode ne tient compte que des différences de cash flows, ce qui équivaut à soustraire des cash flows avec projet les cash flows sans projet. Dans ces conditions, si la *VAN* de cette différence est positive, alors le projet doit être entrepris.

#### Complément

##### Réduction de coûts

Certains investissements ont pour objectif de faire baisser les coûts. Dans ce cas, seule la partie « charges » du compte de résultats est affectée. Pour simplifier, il n'est pas nécessaire de réintégrer tout le compte de résultats mais uniquement les variations affectant les charges. Il est néanmoins important de savoir si la société est bénéficiaire ou non. Si elle l'est, chaque réduction de charge rapporte moins que son montant nominal. En effet, les charges étant déductibles, leur réduction entraîne, toutes choses étant égales par ailleurs, une augmentation de la base imposable.

### 2.3 Valeurs nominales

Les taux peuvent être exprimés de manière réelle ou de manière nominale. Les valeurs couramment observées sont notées de manière nominale et tiennent compte de l'inflation. Le traitement dans les projets d'investissement doit être cohérent : données en valeur nominale, actualisation à un taux nominal, données en valeurs réelles, actualisation à un taux réel.

## Complément

### Inflation et amortissements

Pour la plupart des montants, l'inflation est répercutée sur les prix, elle n'a donc aucune influence. Il existe cependant certains éléments qui ne peuvent s'adapter à l'inflation, par exemple les amortissements pour lesquels les montants sont déterminés sur la base du coût historique. Dès lors, pour ceux-ci, seul le facteur d'actualisation tient compte de l'inflation, les montants amortis restant fixes. Les économies fiscales réalisées *via* les amortissements ont dès lors une valeur actuelle moindre.

## 2.4 Pertinence du taux d'actualisation

Le taux d'intérêt retenu pour effectuer l'actualisation doit refléter le risque du projet. Le plus simple est d'évaluer ce dernier comme s'il s'agissait du seul projet d'une société entièrement financée par fonds propres. Dans ce cas, le taux d'actualisation de la société est celui à utiliser. En pratique, une société peut avoir une activité extrêmement diversifiée. Prendre le taux de la société dans son ensemble serait alors une erreur, car il ne refléterait que la moyenne des risques de celle-ci. En effet, un projet spécifique est susceptible d'avoir un niveau de risque très différent de cette moyenne. Dans ce cas, le taux est déterminé sur la base de celui utilisé pour une société ayant comme seule activité celle de notre projet. Enfin, les sociétés sont très souvent endettées. Afin de tenir compte de cet état de fait, les praticiens se servent du coût moyen pondéré du capital pour évaluer leurs projets.

## 2.5 Cas particuliers

### Coûts irrécupérables

Certains éléments doivent être exclus de l'évaluation chiffrée. C'est le cas des coûts irrécupérables. Également appelés « sunk costs », ce sont des engagements financiers qui ont déjà été pris dans le cadre du projet. Que celui-ci soit mis en œuvre ou non, ces engagements devront être tenus. Dès lors, ils ne doivent pas intervenir dans le processus de prise de décision.

Supposons qu'avant de lancer le projet, vous ayez fait faire une étude de marché pour cerner au mieux les désirs des consommateurs. Il faudra de toute façon la payer, que le projet soit entrepris ou non. Il ne faut donc pas en tenir compte. En revanche, si l'étude n'a pas encore été réalisée et dépend de la mise en place du projet, alors elle doit être comptée. La question de la pertinence des frais encourus pour un projet avant d'avoir décidé de l'entreprendre n'est donc pas triviale. Afin de l'aborder correctement, il faut se demander si notre décision a une influence sur cet élément : si oui il faut l'intégrer, sinon il s'agit d'un coût irrécupérable.

### Coûts d'opportunité

Certains éléments qui ne semblent pas être réellement des flux monétaires doivent parfois être pris en compte. Les coûts d'opportunité en sont un exemple. Ils reflètent des coûts indirects induits par le lancement du projet et rendant très souvent compte de la moindre liberté dont dispose désormais la société.

Par exemple, si le projet nécessite l'utilisation d'un terrain inemployé pour l'instant et appartenant à la société, ce terrain devra être intégré dans la valorisation. En effet, peut-être que la société a un objectif le concernant, malgré sa non-utilisation actuelle. Dans ce cas, le fait de l'attribuer au projet forcera la société à en acquérir un nouveau. Si la société n'avait rien prévu pour ce terrain, elle aurait pu le revendre et toucher sa valeur en cash. Par conséquent, il faut de toute façon tenir compte de ce coût dans l'évaluation du projet.

Quand ce type de question se pose, il faut se fonder sur une méthode « avec » ou « sans » le projet. Dans notre exemple, le fait d'entreprendre le projet nous empêche de réaliser la vente du terrain, ou son exploitation à d'autres fins, cette limitation de liberté est un coût d'opportunité qui doit être intégré.

### **Coûts annuels équivalents**

Les cas présentés jusqu'ici considèrent toujours des projets avec un même horizon d'investissement, ce qui n'est pas forcément la réalité. Par exemple, s'il faut remplacer une machine et qu'il faille choisir entre une machine bas de gamme avec un faible prix et une durée de vie réduite et une machine haut de gamme plus chère mais avec une espérance de vie plus élevée. L'entreprise peut être amenée à envisager le problème sur une échéance plus longue que celle de la durée de vie de l'une ou l'autre des machines. Dans ce cas, une analyse établie uniquement sur la *VAN* serait erronée puisqu'elle négligerait le « réinvestissement » à terme dans une nouvelle machine.

Afin de résoudre ce problème, la notion de coûts annuels équivalents (*CAE*) a été développée. Elle débute par un calcul classique de *VAN* pour chaque possibilité. Celle-ci est normalement négative, s'il s'agit d'un achat. Afin de tenir compte du facteur temps, on détermine un coût constant annuel qui correspond à la *VAN* calculée.

Ce coût constant annuel est calculé en appliquant la formule suivante :

$$VAN = CAE \times \left[ \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right) \right]$$

Le second terme correspond au facteur d'annuité pour  $n$  années au taux d'actualisation  $r$ .

Ainsi, les coûts sont « redistribués » sur la durée de vie de la machine. Il est alors possible de comparer les projets puisqu'ils ont maintenant une base commune.

## **3 Analyse des déterminants de la valeur**

Les flux de trésorerie qui sont à la base du calcul d'une valeur actuelle nette sont le fruit d'hypothèses portant, parfois, sur un grand nombre de variables. Avant de s'engager, une entreprise voudra connaître l'impact des modifications d'une ou de plusieurs d'entre elles sur la rentabilité du projet. Elle voudra aussi anticiper les décisions futures qu'elle pourrait être amenée à prendre en fonction de l'évolution du projet.

## 3.1 Analyse de sensibilité

Dans une analyse de sensibilité, la *VAN* d'un projet est recalculée en modifiant les valeurs des principales variables du projet soit séparément, soit de manière groupée. Traditionnellement, trois sont utilisées : une valeur optimiste, une valeur pessimiste et une valeur centrale. Le nom de « *BOP analysis* », sigle de Best, Optimistic, Pessimistic, est parfois utilisé pour ce type d'étude.

## 3.2 Analyse de point mort

L'analyse de point mort, appelée également « *break-even analysis* », vise à mesurer le niveau minimum que doivent atteindre les ventes pour qu'un projet soit rentable. Le *point mort comptable* est le niveau des ventes minimum nécessaire pour réaliser un bénéfice. Le *point mort financier* est le niveau minimum des ventes pour que la valeur actuelle nette du projet soit positive.

La différence entre les points morts comptable et financier est mise en évidence dans le modèle simple suivant. Considérons un projet d'une durée de  $n$  années. L'investissement initial est  $I$  et les différentes variables sont des annuités constantes :  $Q$  est la quantité,  $m$  est la marge unitaire,  $Cf$  sont les charges fixes,  $DAM$  sont les amortissements,  $T_c$  est le taux de l'impôt et  $FA$  est le facteur d'actualisation pour les  $n$  années au taux d'actualisation donnée.

$$\begin{aligned} \text{bénéfice brut : } & BENB = Q \times m - Cf - DAM \\ \text{bénéfice net : } & BENN = (Q \times m - Cf - DAM) \times (1 - T_c) \\ \text{cash flow : } & CF = (Q \times m - Cf) \times (1 \times T_c) + T_c \times DAM \\ & VAN = -I + CF \times FA. \end{aligned}$$

Le coût annuel équivalent de l'investissement est  $CAE = \frac{I}{FA}$ .

Il est alors possible de déterminer le point mort comptable :  $PMc = \frac{Cf + DAM}{m}$  et le point mort financier :

$$PMf = \frac{[CAE + Cf \times (1 - T_c) + DAM \times T_c]}{m \times (1 - T_c)}$$

Un peu d'algèbre conduit à :

$$PMf = PMc + \frac{[CAE + DAM]}{m \times (1 - T_c)}$$

Comme le facteur d'annuité est inférieur à la durée de vie, si l'amortissement est linéaire ( $DAM = I/n$ ), nous avons :  $DAM < CAE$ . Par conséquent, le point mort financier sera supérieur au point mort comptable.

### 3.3 Analyse de scénarios

L'analyse de scénarios part du constat que les variables d'un projet ne sont pas indépendantes. La modification de la valeur de l'une (par exemple, un prix) peut avoir des répercussions sur une autre (par exemple, les ventes). Un scénario est une combinaison cohérente de valeurs des variables.

La simulation de Monte-Carlo est une technique permettant de modéliser directement les différentes sources d'incertitude d'un projet. Elle comprend cinq étapes :

1. construire un modèle liant les différentes variables du projet ;
2. spécifier les distributions de probabilités des variables aléatoires ;
3. générer un grand nombre de réalisations des variables ;
4. calculer les flux de trésorerie annuels ;
5. actualiser.

Reprendons le projet utilisé dans la présentation du point mort. Supposons que les frais fixes soient constants mais que les quantités vendues et la marge unitaire soient des variables aléatoires. Les cash flows peuvent être modélisés comme suit.

1. Construire un modèle liant les différentes variables du projet :

$$CF_t = (Q_t \times m_t - C_f - DAM) \times (1 - T_c) + DAM$$

2. Spécifier les distributions de probabilité des variables aléatoires :

- a.  $Q_t = Q_{t-1} + u_t$ , avec  $u_t \sim N(0, \sigma_Q)$ .

La quantité vendue une année est égale à la quantité vendue l'année précédente plus une variation aléatoire ayant une distribution de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma_Q$ .

- b.  $m_t = m + v_t$ , avec  $v_t \sim N(0, \sigma_m)$ .

La marge unitaire de l'année  $t$  est égale à la marge moyenne  $m$  plus un aléa distribué selon une normale de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma_m$ .

- c.  $CORR(u_t, v_t) = \rho$ .

La marge unitaire est liée à la quantité vendue.

3. Générer un grand nombre (*NUM*) de réalisations des variables aléatoires :

Pour créer une valeur d'une variable aléatoire, on part de la réalisation d'un nombre aléatoire. Un nombre aléatoire « a » est une variable aléatoire de distribution uniforme sur l'intervalle [0,1]. La fonction Rand() dans Excel produit un nombre aléatoire.

On obtient ensuite une variable  $N(0, 1)$  en utilisant l'inverse de la fonction répartition de la normale centrée réduite (utiliser la fonction *normsinv(Cell)* dans Excel). Excel produit une nouvelle variable à chaque nouveau calcul de la feuille de calcul. Un nombre important de réalisations peut être obtenu en utilisant une table représentant les différents flux monétaires via les commandes *Data|Table* et en prenant une constante comme valeur de base du calcul.

#### 4. Calculer les flux de trésorerie annuels :

L'étape précédente fournit pour chaque période  $t$  deux séries comprenant  $NUM$  données :  $Q_t^i$  et  $m_t^i$ . Nous calculons pour chaque réalisation de la simulation et pour chaque période le flux de trésorerie  $CF_t^i$  en utilisant l'équation définie à l'étape 1. Nous obtenons ainsi pour chaque période  $t$  une série de  $NUM$  données.

#### 5. Actualiser les flux de trésorerie :

Les flux de trésorerie correspondant à une réalisation de la simulation ( $i$ ) sont alors actualisés au taux reflétant le risque de l'activité étudiée :  $VA^i = \sum_{t=1}^T \frac{CF_t^i}{(1+r)^t}$ .

Ainsi, une série de  $NUM$  données de valeur actualisée  $VA^i$  est créée. La moyenne de cette dernière est mesurée par :  $VA = \frac{1}{NUM} \sum_{i=1}^{NUM} VA^i$ .

## 4 Flexibilité de la décision

Les méthodes qui précèdent n'incorporent aucune possibilité de pilotage du projet, aucun élément de flexibilité. Les arbres de décision et les options réelles sont des techniques permettant d'intégrer dans l'analyse des décisions pouvant être prises durant la vie du projet.

### 4.1 Options réelles

Les options qui permettent de modifier le cours d'évolution d'un projet sont appelées « options réelles ». Les principales sont :

- l'option d'expansion : augmenter la taille du projet si l'évolution des flux de trésorerie est favorable ;
- l'option d'abandon : mettre fin prématurément au projet si son évolution est défavorable ;
- l'option de « mise au frigo » : suspendre l'activité de production qui est en cours en attendant une meilleure conjoncture plutôt que d'encourir des pertes ;
- l'option d'attente : reporter le lancement d'un projet à une date future ;
- l'option de flexibilité de production : changer de technique de production en fonction de l'évolution des coûts des facteurs de production.

Une approche simple de l'évaluation des options réelles est donnée par les arbres de décision. Un arbre de décision est une représentation de l'évolution du projet qui combine :

- les points de décisions ;
- les aléas donnant l'évolution possible du projet.

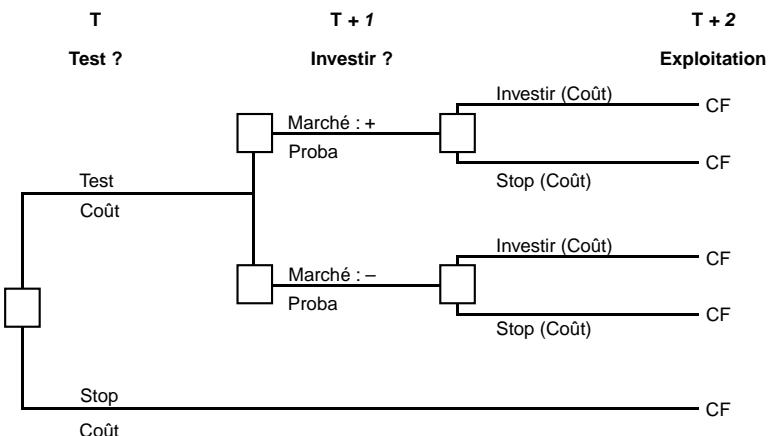
#### Utilisation d'un arbre de décision

Une entreprise envisage de construire un prototype et de mener une étude de marché concernant un nouveau produit. L'issue de ce test permettra d'estimer avec plus de précision la valeur actuelle des cash flows résultant du lancement du produit.

Dans cet exemple, deux décisions doivent être prises : en  $T$ , réaliser ou non le test ; en  $T + 1$ , investir ou ne pas investir. Les cash flows en découlant sont donnés en  $T + 2$ .

Figure 8.2

**Un arbre de décision.**



L'arbre de décision est représenté ainsi : chaque carré représente une décision, chaque séparation indique une réalisation (assortie d'une probabilité de réalisation).

Un arbre de décision s'analyse en commençant par la fin et en remontant dans le temps. En  $T + 1$  : investir ou non. On commence par l'analyse de la décision d'investissement en  $T + 1$  en se fondant sur les cash flows futurs dans cette branche de l'arbre. Ainsi, une décision optimale est fixée dans les deux cas possibles de l'issue du test de prototype. L'arbre est simplifié puisque les branches non choisies sont éliminées.

En  $T$  : réaliser ou non le test. La décision s'appuie sur la valeur actuelle des cash flows dans les branches de l'arbre simplifié.

## 4.2 Cas particulier : Durée des investissements

La durée des investissements représente un cas particulier d'option réelle. Pour certains projets, la durée de l'exploitation joue un rôle déterminant sur la valeur des flux monétaires. C'est le cas des produits agricoles dont la valeur peut fortement varier selon la date de leur récolte ou de revente.

Prenons le cas du vin. D'ordinaire, la valeur de revente d'une bouteille croît avec son âge, d'abord très fortement puis de manière moindre. Cette croissance n'est pas uniforme. Après quelques années, elle ne provient plus de l'accroissement de qualité du produit mais de l'apparition d'une qualité d'objet de collection. Pour la personne ayant acquis du vin à titre d'investissement, il n'est pas facile de déterminer le moment optimal pour le revendre. En effet, une approche naïve consiste à croire qu'il faut attendre le plus longtemps possible, car le prix de revente croît en fonction du temps. Cependant, même si ce dernier élément est correct, cette approche néglige le fait que la revente se fera plus tardivement et donc que le facteur d'actualisation sera lui aussi plus élevé.

En réalité, le temps a un double impact sur la VAN : positif *via* l'augmentation du prix de revente, et négatif *via* l'augmentation du facteur d'actualisation. L'investisseur doit donc évaluer l'arbitrage entre le gain dû à l'attente et la perte due au facteur d'actualisation.

Un autre élément doit être pris en compte, la nature de l'investisseur : s'il n'envisage de procéder qu'à un investissement unique, sa décision différera probablement de celle

d'un professionnel qui réitère l'opération plusieurs fois. En effet, lorsque le projet est répété plusieurs fois (par exemple, la vente de bouteilles pour pouvoir en acquérir de nouvelles), l'investisseur doit tenir compte du nombre de fois qu'il pourra renouveler l'opération sur une période donnée. Dans son cas, l'analyse doit faire appel à une notion proche de celle vue précédemment lors de l'analyse des coûts annuels équivalents. Il faut déterminer le gain annuel équivalent correspondant à chaque durée d'attente et choisir le plus élevé. De manière intuitive, il doit déterminer une durée telle que le coût d'opportunité généré par une vente plus précoce soit plus que compensé par la multiplication de l'opération. L'investisseur ponctuel n'est pas confronté à ce problème et il aura donc tendance à attendre plus longtemps avant de clôturer son opération.

## 5 Financement des projets

De même que dans un monde sans impôt la structure financière de l'entreprise n'a aucun impact sur sa valeur (Modigliani-Miller, voir chapitre 5), le mode de financement d'un projet ne devrait en rien modifier sa *VAN*. Comme pour la valorisation des entreprises, la présence d'impôts modifie cet état de fait. En effet, si le projet est en partie ou en totalité financé par des dettes, l'apparition de nouvelles charges financières vient diminuer la base imposable et donc les impôts. Par ailleurs, les modes de financement génèrent des charges différentes (frais d'émissions, coûts de détresse financière, possibilité d'obtenir une dette subsidiée, etc.). Une première approche, celle de la valeur actuelle nette ajustée *VANA*, consiste à calculer la *VAN* comme si l'entièreté du financement se faisait par autofinancement (c'est-à-dire avec les fonds propres de l'entreprise) et d'y ajouter ensuite l'impact du financement (pour la dette par exemple, il faut ajouter l'avantage fiscal).

Si un projet est financé par une dette perpétuelle sans risque  $D$  et que le taux à payer sur cette dette, le taux sans risque et le taux de taxation soient respectivement dénommés  $r_d$ ,  $r_f$  et  $T_c$  alors :  $VANA = VAN + T_c \times D \times \frac{r_d}{r_f}$ .

Cette méthode n'est pas la seule envisageable. En pratique, le coût moyen pondéré du capital est souvent utilisé. Si le projet ne modifie pas le risque moyen et si son financement reflète celui de la société, alors le coût moyen pondéré du capital peut être directement utilisé. Ce taux représente un « raccourci » permettant de prendre en compte simplement l'impact du mode de financement. La valeur du projet est alors obtenue en actualisant au coût moyen pondéré du capital les free cash flows calculés comme si le projet était 100 % financé par actions.

Le coût moyen pondéré du capital peut aussi être utilisé sous une forme modifiée sous certaines conditions. Il s'agit des formules de Modigliani-Miller et Miles-Ezzel qui ont été présentées dans le chapitre 7.

Une dernière approche est celle du flux aux actionnaires ou « flow to equity ». Ici, l'idée est d'actualiser, à un taux reflétant les attentes des actionnaires, les flux financiers que ces derniers recevront et de soustraire, à ce montant, l'investissement qu'ils auront consenti (donc l'investissement initial du projet moins le montant emprunté).

## Résumé

L'évaluation de projets d'investissement constitue sans conteste une tâche importante pour les gestionnaires. La capacité à retenir le projet valable représente un atout indéniable. Différentes propositions ont émergé avec le temps. D'une manière générale, il convient de garder à l'esprit les éléments suivants :

- La *VAN* est le meilleur critère pour évaluer et choisir un projet d'investissement. Celle-ci est calculée en actualisant les cash flows différentiels nominaux après l'impôt sur les sociétés à un taux qui reflète le risque du projet.
- Les options réelles permettent d'inclure en plus la flexibilité dans la valorisation du projet.
- Les analyses de sensibilité mettent en avant le potentiel des projets et l'importance de certaines estimations.

## Références bibliographiques

- BENNINGA S., *Financial Modeling*, 2<sup>d</sup> ed., MIT Press, 2000.
- BIERMAN H. et SMIDT S., *The Capital Budgeting Decision. Economic Analysis of Investment projects*, 7<sup>th</sup> ed., Macmillan Publishing Company, 1988.
- CHRISOS J. et GILLET R., *Décision d'investissement*, Pearson Education, 2003.
- COPELAND T. et ANTIKAROV V., *Real Options : A Practitioner's Guide*, Texere, 2001.
- DIXIT A.K. et PINDYCK R.S., *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.
- GOFFIN R., *Principes de finance moderne*, 3<sup>e</sup> éd., Economica, 2001.
- HULL J., *Options, futures, et autres actifs dérivés*, 6<sup>e</sup> éd., Pearson Education France, 2007.
- JACKSON M. et STAUNTON M., *Advanced Modeling in Finance using Excel and VBA*, Wiley, 2001.
- WILMOTT P., *Derivatives*, Wiley, 1998.

## Commentaires

Le critère de la valeur actuelle nette est maintenant le plus utilisé pour l'évaluation de projets d'investissement. Alors qu'en 1959, une enquête révélait que seulement 19 % des entreprises interrogées utilisait l'actualisation, le pourcentage atteignait 75 % à la fin des années 1990. L'explosion de la puissance de calcul grâce aux ordinateurs et l'apparition de tableurs au début des années 1980 explique cette évolution. L'ouvrage classique de référence est celui de Bierman et Smidt (1988). Chrisos et Gillet (2003) fournissent une approche claire et pratique de l'ensemble de la démarche. Benninga (2000) et Jackson et Stauton (2001) sont deux excellentes références sur les applications d'Excel en finance. Pour une analyse approfondie des options réelles, l'ouvrage de référence est celui de Dixit et Pindyck (1994). Pour un guide plus pratique, voir Copeland et Antikarov (2001). Goffin (2001) présente les grands principes et les fondements de la décision d'investissement, ainsi que l'utilisation des options réelles.

# Problèmes et exercices

Les exercices suivants mettent en premier lieu l'accent sur le critère de la VAN pour effectuer le classement de plusieurs projets. Ensuite, l'impact de certains cas particuliers (coûts d'opportunité, sunk costs...) est détaillé. Par ailleurs, les exercices permettent de distinguer point mort financier et point mort comptable. Enfin, de nombreux exercices récapitulatifs offrent l'opportunité d'étudier des cas plus proches de la réalité.

## Critères de décision

### Exercice 1 Utiliser la VAN ou le payback (actualisé) pour évaluer un projet

#### Énoncé

En tant que directeur financier de la société Deschamps, vous devez juger trois projets d'investissement concernant l'achat d'une nouvelle traveuse électrique. Votre adjoint vient de vous remettre un rapport qui donne chaque année les cash flows liés aux projets (le signe négatif représentant l'investissement initial) :

Année	0	1	2	3
Traveuse A	-500 €	200 €	350 €	50 €
Traveuse B	-750 €	300 €	300 €	10 000 €
Traveuse C	-750 €	300 €	300 €	1 000 000 €

#### Énoncé

- a** Calculez le payback des trois projets. Quel serait alors le meilleur projet ?
- b** Calculez le payback actualisé des projets en utilisant les facteurs d'actualisation suivants :

Année	0	1	2	3
$V_t$	1	0,95	0,90	0,87

- c** Calculez la VAN des trois projets. Quel serait alors le meilleur projet ?

#### Solution

- a** La méthode du payback nécessite de déterminer à quelle date l'investissement initial est récupéré.

Pour la traveuse A, l'investissement s'élève à 500 €. Le projet a généré un cash flow de 200 € après un an et de 550 € après deux ans. Ce montant étant supérieur ou égal à

	Payback
Trayeuse A	2 ans
Trayeuse B	3 ans
Trayeuse C	3 ans

l'investissement initial, le payback a lieu cette année-là. Dans le cas des trayeuses B et C, il faut attendre l'année 3 pour que l'investissement initial soit récupéré.

La méthode du payback favorise le projet dont le payback est le plus bas et retient donc le projet A.

- b** Dans le cas du payback actualisé, il s'agit d'effectuer un payback sur la base des cash flows actualisés ( $VA[C_t] = C_t \times v_t$ ) :

Année	0	1	2	3
Trayeuse A	-500 €	190 €	315 €	43,5 €
Trayeuse B	-750 €	285 €	270 €	8 700 €
Trayeuse C	-750 €	285 €	270 €	870 000 €

Pour le projet A, le montant récupéré après deux ans s'élève à  $190 + 315 = 505$  ( $> 500$ ). Le payback actualisé est toujours de deux ans. Pour les projets B et C, le payback actualisé reste également de trois ans. Les résultats ne diffèrent guère de ceux obtenus précédemment. En effet, le critère du payback actualisé ne résout que l'un des défauts du payback et doit donc aussi être proscrit.

- c** Pour déterminer la *VAN*, il convient de calculer la somme actualisée des cash flows liés au projet :

$$VAN_A = -500 + 200 \times 0,95 + 350 \times 0,9 + 50 \times 0,87 = 48,5 \text{ €}.$$

$$VAN_B = -750 + 300 \times 0,95 + 300 \times 0,9 + 10 000 \times 0,87 = 8 505 \text{ €}.$$

$$VAN_C = -750 + 300 \times 0,95 + 300 \times 0,9 + 1 000 000 \times 0,87 = 869 805 \text{ €}.$$

En prenant le critère de la maximisation de la *VAN*, le projet C est préféré. Il rapporte plus de 800 000 € de plus que les autres ! Les montants de cet exercice sont délibérément très différents entre les projets pour montrer à quel point les critères « payback » sont mauvais.

## Exercice 2 Utiliser la *VAN* ou le *TRI* pour l'évaluation d'un projet

### Énoncé

Oncle Séraphin, directeur financier de la société Au Bon Clou, envisage deux projets d'investissement visant à moderniser la ligne de production des vis. Ces deux projets sont mutuellement exclusifs puisque si oncle Séraphin opte pour un projet l'autre ne sera pas réalisé. La rentabilité attendue des actifs de la société ( $r_a$ ) est de 10 %. Les cash flows liés aux projets sont les suivants (en milliers d'euros).

Année	0	1
Projet A	-1 000	1 150
Projet B	-1 400	1 600

- a** Calculez le *TRI* de chacun des projets. Lequel faut-il choisir ?
- b** Calculez la *VAN* pour chacun des projets. Quel projet faut-il choisir ?
- c** Comment explique-t-on les différences de résultats entre les deux méthodes. Laquelle doit-on retenir ?

### Solution

- a** Le *TRI* est le taux d'actualisation qui annule la *VAN*. Pour le projet A, il faut résoudre l'équation  $-1 000 + \frac{1 150}{1 + TRI_A} = 0$ . D'où,  $TRI_A = 15\%$ .  
Pour le projet B, ce sera :  $-1 400 + \frac{1 600}{1 + TRI_B} = 0$ . D'où,  $TRI_B = 14,29\%$ .  
Dans les deux cas, le  $TRI > r_a$ , ce qui indique que les deux projets accroissent la valeur de la société. En effet, leur taux de rentabilité est supérieur à la rentabilité attendue. Sur la base du *TRI*, le projet A qui offre la plus grande rentabilité devrait être retenu.
- b** La *VAN* des deux projets est de :

$$VAN_A = -1 000 + \frac{1 150}{1 + 10\%} = 45,45 \text{ €} \quad \text{et} \quad VAN_B = -1 400 + \frac{1 600}{1 + 10\%} = 54,55 \text{ €}$$

Dans ce cas particulier, le projet B qui a la plus grande *VAN* est préférable.

- c** La différence entre le critère de la *VAN* et celui du *TRI* s'explique par le fait qu'en comparant des projets mutuellement exclusifs, le critère du *TRI* ne parvient pas à tenir compte de l'échelle des montants mis en jeu. Une présentation graphique du problème permet de mieux l'appréhender.

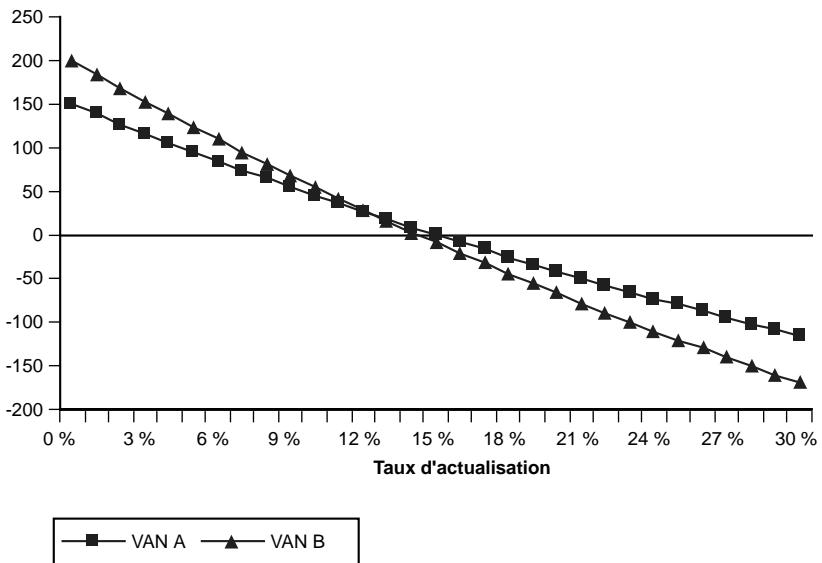
Comme la *VAN* est une fonction du taux d'actualisation, il est possible de représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$$VAN_A(r) = -1 000 + \frac{1 150}{1 + r} \quad \text{et} \quad VAN_B(r) = -1 400 + \frac{1 600}{1 + r}$$

Par définition, le *TRI* est le taux qui annule la *VAN* et dont la fonction coupe l'axe des abscisses. La figure 8.3 met en avant le fait que le choix entre les deux projets dépend du taux d'actualisation. Tant que  $r$  est inférieur à un certain seuil, le projet B est préférable (car  $VAN_B > VAN_A$ ), au-delà, la situation s'inverse. Le *TRI* étant fixe, il privilégiera inconditionnellement le projet A.

Dans ce cas-ci, il est aisément de déterminer à partir de quelle valeur de  $r$  le projet A devient le plus intéressant. En effet, les deux courbes ne se coupent qu'à un seul endroit ( $VAN_A = VAN_B$ ) pour lequel  $r = 12,5\%$ . Au-dessous de cette valeur, le projet B est le plus intéressant, au-dessus c'est le projet A.

Figure 8.3



## Calcul de la VAN

### Exercice 3    Calculer la VAN

#### Énoncé

Oncle Séraphin vient de recevoir une nouvelle proposition d'investissement pour sa société. Il s'agit d'une nouvelle machine de 20 000 € amortissable de manière linéaire en cinq ans. Elle permettrait d'augmenter le chiffre d'affaires de sa société de 10 % par an pendant cinq ans et ce dès l'an prochain. Les ventes passeraient à 110 000 €, leur montant annuel actuel étant de 100 000 €.

Oncle Séraphin s'interroge sur le bien-fondé de cet investissement et décide de faire appel à vos lumières. Vous savez que le  $r_a$  de la société est de 10 %, son taux de taxation marginal est de 40 % et le  $BFR$  représente 25 % du montant du chiffre d'affaires. Quelle que soit l'option retenue, les activités de la société cesseront dans cinq ans.

**Calculez la VAN du projet.**

#### Solution

Il faut comparer les deux hypothèses : investir ou non.

Dans notre cas, en l'absence du projet la valeur de la société resterait inchangée. Il reste donc à déterminer quelles modifications sa mise en œuvre entraînera. Dans un premier temps, il convient de séparer les éléments affectant le compte de résultats (*CR*) des autres. En effet, Au Bon Clou étant soumise à l'impôt sur les sociétés, les variations du compte de résultats ont une incidence fiscale. Le projet le modifiera *via* deux éléments : le montant des ventes et l'apparition de nouveaux amortissements. Nous faisons l'hypothèse que la méthode de comptabilisation des stocks reste constante et n'influence donc pas le compte de résultats. Le montant incrémental (supplémentaire) du chiffre d'affaires ( $\Delta CA$ ) sera le suivant.

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$	$T = 5$
CA si projet	100 000	110 000	121 000	133 100	146 410	161 051
CA sans projet	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000	100 000
$\Delta CA$	0	10 000	21 000	33 100	46 410	61 051

Les amortissements supplémentaires seront de 4 000 € par an (20 000 € répartis linéairement sur cinq ans). L'influence sur le bénéfice ( $BEN$ ) peut se résumer comme suit :

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$	$T = 5$
$\Delta CA$	0	10 000	21 000	33 100	46 410	61 051
$\Delta DAM$	0	4 000	4 000	4 000	4 000	4 000
$\Delta BEN$ avant impôts		17 000	29 100	42 410	57 051	
$\Delta$ impôts		2 400	6 800	11 640	16 964	22 820
$\Delta BEN$ après impôts		3 600	10 200	17 460	25 446	34 231

En s'arrêtant ici, seul l'aspect comptable aurait été traité. Or, ce qu'il faut actualiser, ce sont des free cash flows. Le passage par l'influence sur le compte de résultats est néanmoins obligé pour pouvoir déterminer l'impact fiscal. Dans un second temps, il faut traiter les éléments qui entraînent des flux financiers mais ne se retrouvent pas dans le compte de résultats et ceux qui ont été utilisés pour calculer le bénéfice mais ne correspondent pas à des décaissements réels.

Repartons du bénéfice additionnel après impôts. Il faut y ajouter les amortissements (charges non décaissées), tenir compte de l'investissement à effectuer pour acquérir la machine (les investissements n'affectent le compte de résultats que via les amortissements mais l'achat de la machine correspond bien à un décaissement) et déduire les variations du  $BFR$  dues à l'arrivée du nouveau projet. Remarquons que  $\Delta BFR$  doit être calculé sur base du montant incrémental des ventes. Celui-ci a eu l'évolution suivante :

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$	$T = 5$	$T = 6$
$BFR$ suppl.	0	2 500	5 250	8 275	11 603	15 263	
$\Delta BFR$		2 500	2 750	3 025	3 328	3 660	-15 263

Remarque : ce sont les montants des variations de  $BFR$  qui sont calculés. On ne doit tenir compte que des immobilisations financières supplémentaires apparaissant chaque année. L'année suivant la fin du projet, on observe un  $\Delta BFR$  négatif. Le projet étant achevé, on récupère toutes les sommes qui avaient dû être immobilisées pour l'exploitation (tous les stocks sont vendus, les fournisseurs payés et nos créanciers nous ont remboursés).

Le tableau des cash flows prend alors la forme suivante :

Il ne reste plus qu'à actualiser :

$$VAN = -20\ 000 + \frac{5\ 100}{1,1} + \frac{11\ 450}{1,1^2} + \frac{18\ 435}{1,1^3} + \frac{26\ 119}{1,1^4} + \frac{34\ 570}{1,1^5} + \frac{15\ 263}{1,1^6} = 55\ 870,11 \text{ €.}$$

La  $VAN$  est largement positive et oncle Séraphin a donc intérêt à réaliser le projet !

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$	$T = 5$	$T = 6$
$\Delta BEN$ après impôts	3 600	10 200	17 460	25 446	34 231		
$DAM(+)$		4 000	4 000	4 000	4 000	4 000	
$INV(-)$	20 000						
$\Delta BFR(-)$		2 500	2 750	3 025	3 328	3 660	-15 263
FCF	-20 000	5 100	11 450	18 435	26 119	34 570	15 263

## Exercice 4 Analyser un projet de réduction des coûts

### Énoncé

Oncle Séraphin est bien embêté. Il a perdu le compte de résultats de sa société alors qu'il doit justement procéder à l'évaluation d'un projet visant à réduire les coûts de production de son entreprise. Cela le gène considérablement car il se souvient qu'avant toute évaluation de projet d'investissement, il faut d'abord dresser un compte de résultats pour voir l'impact fiscal... Et il n'a aucune idée du montant de ses ventes. Il sait cependant qu'il a vendu 1 000 000 de paquets de vis cette année et que le secteur ne croîtra pas dans les années à venir. Il sait aussi que sa société est en bénéfice, qu'elle est non endettée, soumise à l'impôt sur les sociétés (taux de taxation marginal 40 %) et que son  $r_a$  est de 10 %. Enfin oncle Séraphin envisage de continuer la production de vis encore deux ans après la fin de cette année.

Dans une heure, il rencontrera les représentants de Super Machine. Il a sous les yeux le prospectus de la machine qu'ils se proposent de lui vendre. Son prix est de 120 000 € (amortissables en trois ans), et elle permettrait de remplacer une vieille machine (achetée il y a deux ans pour 150 000 € et amortie linéairement sur cinq ans). Ses capacités sont évidemment supérieures à celle de l'ancienne, un analyste a montré que grâce à elle les coûts variables de production des vis baissaient de 0,05 € par paquet de vis. Son installation nécessiterait en revanche l'amélioration du système d'empaquetage (coût 50 000 € pris en charge immédiatement). L'ancienne machine pourrait être revendue pour 20 000 €. Cela semble assez négatif à oncle Séraphin car ce montant est inférieur à sa valeur comptable (de 90 000 €).

### Quel est votre avis sur ce projet ?

### Solution

Heureusement pour Oncle Séraphin, il y a moyen de déterminer l'impact fiscal en établissant un compte de résultat tronqué. Si le projet est entrepris, certains éléments auront un impact fiscal sur le CR :

- les amortissements de la nouvelle machine (impact négatif) ;
- la moins-value comptable à enregistrer à la revente de l'ancienne machine (impact négatif) ;
- l'arrêt des amortissements sur l'ancienne machine (impact positif, car c'est une charge qui disparaît) ;
- les coûts liés à l'amélioration du système d'empaquetage (impact négatif) ;
- la réduction des coûts par unité produite (impact positif).

Comme la société est en bénéfice, toute nouvelle charge amènera une baisse du montant imposable. Déterminer ce montant n'est pas indispensable. Ce qui nous intéresse, c'est l'augmentation d'impôts, ou au contraire la diminution, que le projet va amener.

<i>CR</i> tronqué (en €)	<i>T</i> = 0	<i>T</i> = 1	<i>T</i> = 2
<i>DAM</i> ancienne machine	30 000	30 000	30 000
<i>DAM</i> nouvelles machines	-40 000	-40 000	-40 000
Moins-value sur réalisation de la machine	-70 000		
Amélioration empaquetage	-50 000		
Baisse des coûts variables	50 000	50 000	50 000
$\Delta BEN$ avant impôts	-80 000	40 000	40 000
Impôts	-(-32 000)	-16 000	-16 000
$\Delta BEN$ après impôts	-48 000	24 000	24 000

Passons maintenant à l'élaboration du tableau des cash flows. Comme vu précédemment, il convient de rajouter les montants des charges non décaissées (ici, *DAM*). La moins-value a été enregistrée de manière comptable, elle permet de diminuer la pression fiscale. La vente n'est pas un élément négatif (même si elle apparaît comme telle d'un point de vue comptable). Au contraire, elle permet de toucher un montant de 20 000 € et la moins-value comptable réduit le montant imposable.

Année	<i>T</i> = 0	<i>T</i> = 1	<i>T</i> = 2
$\Delta BEN$ après impôts	-48 000	24 000	24 000
<i>DAM</i> ancienne machine	-30 000	-30 000	-30 000
<i>DAM</i> nouvelles machines	40 000	40 000	40 000
Moins-value sur réalisation de la machine	70 000		
Vente de l'ancienne machine	20 000		
Achat de la nouvelle machine	-120 000		
FCF	-68 000	34 000	34 000

La *VAN* est négative :  $-68000 + 34\ 000/1,1 + 34\ 000/1,1^2 = -8991,74$  €. Il vaut donc mieux continuer avec l'ancienne machine.

## Exercice 5 Analyser un projet de réduction des coûts (suite et fin)

### Énoncé

MM. Pingouin et Sagwin, les dirigeants de Super Machine, ont été fortement impressionnés par le tableau de *FCF* d'oncle Séraphin. Ils se demandent quel est le prix maximum que celui-ci serait prêt à accepter. D'après M. Sagwin, la réponse est simple : il suffit de baisser le prix de 8 991,74 € (le résultat de la *VAN* calculée précédemment) et oncle Séraphin aura un projet à *VAN* nulle. Si on baisse davantage le prix, il ne pourra qu'accepter. Pour M. Sagwin, le prix maximum est donc de 111 008,26 €. M. Pingouin est dubitatif, à son avis cette analyse néglige un peu la fiscalité...

**Qu'en pensez-vous ?**

**Solution**

Une première solution serait de tout recalculer avec ce nouveau prix. Il est cependant plus simple de se servir de l'additivité des *VAN* pour cela. Dans ce cas, il suffit de retirer les éléments liés au prix de la machine (*INV* et variations d'impôts dues aux *DAM*) et de les remplacer par leur valeur en fonction de l'inconnue (*P*) représentant le prix de la machine. La valeur de *P* est trouvée en annulant la *VAN*.

Donc, les *FCF* se présenteraient comme suit :

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$
Anciens <i>FCF</i>	-68 000	34 000	34 000
Élimination des <i>FCF</i> liés à l'ancien prix			
Économie fiscale (liée à la <i>DAM</i> )	-16 000 <sup>(*)</sup>	-16 000	-16 000
Achat de la nouvelle machine	120 000		
Ajout des <i>FCF</i> liés au nouveau prix			
Économie fiscale (liée à la <i>DAM</i> )	$0,4 \times 1/3 \times P^{(**)}$	$0,4 \times 1/3 \times P$	$0,4 \times 1/3 \times P$
Investissement	$-P$		
<i>FCF</i> nouveau prix	$36 000 - 0,86P$	$18 000 + 0,13P$	$18 000 + 0,13P$

(\*) Le montant économisé grâce aux amortissements vaudra :  $T_c \times DAM = 0,4 \times 40 000 = 16 000 \text{ €}$ .

(\*\*) Les nouvelles économies fiscales vaudront 40 % ( $T_c$ ) du montant amorti. L'amortissement se faisant sur trois ans,  $DAM = 1/3 \times P$ .

Le prix maximum sera obtenu en annulant la *VAN* :

$$36 000 - 0,86 \times P + \frac{18 000 + 0,13 \times P}{1,1} + \frac{18 000 + 0,13 \times P}{1,1^2} = 0$$

Et,  $P = 105 845,62 \text{ €}$ . La différence entre le prix proposé par M. Sagwin (111 008,26 €) et celui proposé par M. Pingouin (105 845,62 €) s'explique par le fait que l'option de M. Sagwin vise à diminuer le prix du montant de la *VAN* calculée précédemment. Ce faisant, il diminue le montant des économies fiscales et au total n'arrive pas à combler l'entièreté du montant négatif observé précédemment !

## Exercice 6 Évaluer un projet en tenant compte de l'inflation

**Énoncé**

Moyennant un investissement de 60 000 € dans une nouvelle machine amortissable en trois ans, oncle Séraphin pourrait augmenter ses ventes de 5 % pendant trois ans. Cette augmentation représenterait 30 000 € l'an prochain. La société paye 40 % d'impôts, l'inflation est nulle et le taux  $r_a$  réel est de 10 %.

- a** Faut-il réaliser le projet ?
- b** Que se passerait-il si l'inflation, au lieu d'être à 0 % s'élevait à 7 % ?

## Solution

a

Compte de résultats	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$
CA		30 000	31 500	33 075
DAM	-20 000	-20 000	-20 000	
$\Delta BEN$ avant impôts	-20 000	10 000	11 500	33 075
Impôts	8 000	-4 000	-4 600	-13 230
$\Delta BEN$ après impôts	-12 000	<b>6 000</b>	<b>6 900</b>	<b>19 845</b>

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$
$\Delta BEN$ après impôts	-12 000	6 000	6 900	19 845
DAM	20 000	20 000	20 000	
INV	-60 000			
FCF	-52 000	26 000	26 900	19 845
$v_t$	1	0,91 <sup>(*)</sup>	0,83 <sup>(**)</sup>	0,75 <sup>(***)</sup>
FCF actualisés	-52 000	23 636	22 231	14 910

$$(*) v_1 = 1/1,1 = 0,91 ; (**) v_2 = 1/(1,1)^2 = 0,83 ; (***) v_3 = 1/(1,1)^3 = 0,75.$$

La VAN est positive et correspond à :  $-52 000 + 23 636 + 22 231 + 14 910 = 8 778 \text{ €}$ .

b

Tout dépend de la rapidité avec laquelle les prix de vente s'ajustent à l'inflation. Si nous faisons l'hypothèse qu'ils s'adaptent immédiatement, les ventes vont augmenter de  $30000 \times (1 + r_{inflation})$  la première année, représentant l'augmentation due au nouvel investissement (30 000 €) qui se traduira, en raison de l'inflation, en un montant nominal plus élevé de  $30000 \times 1,07 = 32100$ . La croissance se fera ensuite au rythme nominal de  $(1 + r_{inflation}) \times (1 + g) = 1,07 \times 1,05 = 1,1235$  soit 12,35 %.

L'investissement n'est pas affecté par l'inflation car nous le faisons aujourd'hui. Par ailleurs, les montants amortis restent les mêmes car ils sont également basés sur la valeur d'acquisition. L'analyse se transforme ainsi :

Compte de résultats	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$
CA		32 100	36 064	40 518
DAM	-20 000	-20 000	-20 000	
$\Delta BEN$ avant impôts	-20 000	12 100	16 064	40 518
Impôts	8 000	-4 840	-6 426	-16 207
$\Delta BEN$ après impôts	-12 000	<b>7 260</b>	<b>9 639</b>	<b>24 311</b>

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$
$\Delta BEN$ après impôts	-12 000	7 260	9 639	24 311
DAM	20 000	20 000	20 000	
INV	-60 000			
FCF	-52 000	27 260	29 639	24 311

Il faut actualiser les  $FCF$  à un taux qui tient compte de l'inflation : le taux nominal. Le taux  $r_a = 10\%$  correspond au taux d'actualisation pour une inflation nulle. Il s'agit du taux réel. Le taux nominal est trouvé via l'équation :  $(1 + r_{nominal}) = (1 + r_{réel}) \times (1 + r_{inflation})$ .

Dès lors,  $r_{nominal} = (1 + r_{réel}) \times (1 + r_{inflation}) - 1 = 1,1 \times 1,7 - 1 = 17,7\%$ . Ce taux est logiquement plus élevé que le taux réel, les montants touchés dans le futur vaudront donc, en valeur actuelle, moins que dans l'exemple précédent.

Année	0	1	2	3
FCF	-52 000	27 260	29 639	24 311
Facteur d'actualisation	1	$1/(1,177) = 0,85$	$1/(1,177)^2 = 0,72$	$1/(1,177)^3 = 0,61$
FCF actualisés	-52 000	23 161	21 395	14 910

La  $VAN$  s'élève alors à :

$$-52 000 + \frac{27 260}{1,177} + \frac{29 639}{1,177^2} + \frac{24 311}{1,177^3} = 7465 \text{ €}.$$

## Exercice 7 Prendre en compte des coûts irrécupérables

### Énoncé

Les affaires d'oncle Séraphin ne vont pas bien. Il y a deux ans, il a développé une gamme de vis révolutionnaires mais, malheureusement, les cash flows n'ont pas suivi ses attentes. À la fin de l'année 2, un jeune analyste lui propose un projet de développement lié au projet en cours : en investissant aujourd'hui 1 000 €, il y aurait moyen d'augmenter les cash flows l'an prochain de 1 200 €. Le  $r_a$  de la société est de 10 %.

Ces derniers sont présentés comme suit : Au vu des pertes déjà imputables à ce projet,

Année	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$
Nouvelles vis	-10 000 €	200 €	350 €	100 €
Extension			-1 000 €	1 200 €
Total	-10 000 €	200 €	-650 €	1 300 €

oncle Séraphin refuse d'en entendre parler. En effet, la  $VAN$  est à l'heure actuelle de -9 528,93 € ( $-10 000 + 200/1,1 + 350/[1,1]^2$ ). Y investir davantage d'argent n'a donc à ses yeux pas de sens.

**Le raisonnement d'oncle Séraphin vous semble-t-il correct ?**

## Solution

Avant toutes choses, il convient de bien distinguer deux problèmes : la rentabilité finale du projet et la décision d'investissement. Concernant le premier point, on analyse l'ensemble des cash flows qui ont eu lieu pour savoir s'il s'agit d'une bonne ou d'une mauvaise affaire (on répond à la question : « Ai-je bien fait d'investir ? »). À propos du second, notre décision aujourd'hui va déterminer nos cash flows futurs (on tente de répondre à la question : « Que dois-je faire ? »).

Ici, il s'agit d'un problème de décision. Si oncle Séraphin avait disposé des données de cash flows en  $T = 0$ , il n'aurait probablement pas procédé à l'investissement puisque le projet a une *VAN* négative ( $-9453,79 \text{ €}$ ). Malheureusement pour lui, il a fallu lancer le projet pour obtenir ces valeurs.

Aujourd'hui, en  $T = 2$ , oncle Séraphin a le choix entre :

- cesser l'activité et ne rien toucher en  $T = 3$  ;
- ne pas développer l'activité et toucher  $100 \text{ €}$  en  $T = 3$  ;
- développer et investir  $1\,000 \text{ €}$  en  $T = 2$  pour en récupérer  $1\,200 \text{ €}$  en  $T = 3$ .

Quelle que soit la décision retenue, les cash flows du projet « nouvelle vis » resteront les mêmes pour les années 0, 1 et 2. Le fait d'arrêter l'activité ne modifiera pas les  $10\,000 \text{ €}$  investis autrefois, pas plus que le fait de continuer ou d'investir dans l'extension. Tous les coûts sur lesquels il n'y a plus moyen de revenir et qui seront à supporter quelle que soit l'option retenue ne doivent pas intervenir dans notre décision. Il s'agit de coûts irrécupérables.

Cela facilite le problème puisqu'il ne faut plus tenir compte que des cash flows effectivement générés par chaque solution :

Possibilités	Projet	$T = 2$	$T = 3$
Continuer	Nouvelle vis		$100$
Arrêter net			$0$
Procéder à l'extension	Nouvelle vis		$100$
	Extension	$-1\,000$	$1\,200$

Le calcul des *VAN* donne :

- $\text{VAN} (\text{continuer}) : 100/1,1 = 90,91 \text{ €}$  ;
- $\text{VAN} (\text{stopper}) : 0 \text{ €}$  ;
- $\text{VAN} (\text{étendre}) : -1\,000 + 100/1,1 + 1\,200/1,1 = 181,82 \text{ €}$ .

Il faut procéder à l'extension. La date de paiement des coûts irrécupérables ne doit pas non plus influencer le choix d'investissement. En effet, il convient de regarder les différences en termes de cash flows qu'une solution amènerait par rapport à une autre. Un principe simple de réflexion est : si quelle que soit la décision (investir ou non), le cash flow a lieu, alors il ne faut pas tenir compte de celui-ci.

## Exercice 8 Tenir compte des coûts d'opportunité

### Énoncé

Oncle Séraphin vient de se décider à lancer le projet « Jolie vis », visant à produire des vis esthétiques qui permettraient, par exemple, de rendre plus « design » divers éléments électroménagers. Comme il s'agit d'un élément lié à la mode, le projet finira dans trois

ans. Le coût du capital de la société est de 10 %. Les cash flows liés à ce projet sont les suivants :

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$
Cash flows	-10 000 €	5 000 €	7 500 €	9 000 €

- a** Sur la base de ces informations, calculez la *VAN* du projet.

Avant de se lancer, oncle Séraphin fait appel à l'un de ses collègues, M. Vislavis, auquel il signale que ces nouvelles vis seront stockées dans un entrepôt d'une valeur de 100 000 €, inoccupé pour l'instant et appartenant à la compagnie. Cet entrepôt n'est pas pris en compte dans son évaluation du fait qu'il appartient à la société, laquelle ne devra rien débourser pour sa construction. D'après M. Vislavis, il faut absolument l'inclure car si le projet n'était pas entrepris on pourrait le revendre. Il propose de revoir l'évaluation des cash flows comme suit.

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$
Jolie vis	-10 000 €	5 000 €	7 500 €	9 000 €
Entrepôt	-100 000 €			
Total projet Jolie vis	-110 000 €	5 000 €	7 500 €	9 000 €

- b** Que vaut, à partir de ces nouvelles informations, la *VAN* du projet ?  
**c** Que pensez-vous des positions respectives de M. Vislavis et d'oncle Séraphin ?

### Solution

- a**  $VAN = -10\ 000 + \frac{5\ 000}{1,1} + \frac{7\ 500}{1,1^2} + \frac{9\ 000}{1,1^3} = 7\ 505,63$  €. Pour oncle Séraphin, il faut réaliser le projet.
- b**  $VAN = -110\ 000 + \frac{5\ 000}{1,1} + \frac{7\ 500}{1,1^2} + \frac{9\ 000}{1,1^3} = -92\ 494,37$  €. Pour M. Vislavis, il ne le faut pas.
- c** Abordons d'abord la vision d'oncle Séraphin. Indirectement, il considère qu'en l'absence de cash flows, l'entrepôt ne devrait pas être comptabilisé : l'entrepôt était là avant le projet, il y sera toujours après. Il ne doit donc en rien influencer notre décision. En fait, oncle Séraphin est confronté à un problème de coût d'opportunité, l'un des rares éléments non liés à un cash flow mais dont il faut tenir compte pour prendre une décision. L'analyse du projet ne doit pas se faire « avant » *versus* « après » mais « avec » *versus* « sans ». Si le projet n'était pas entrepris, la société pourrait disposer de l'entrepôt à sa guise. Il y aurait alors deux possibilités : soit elle le conserve pour stocker d'autres éléments (auquel cas le nouveau projet nécessitera bien la construction d'un nouvel entrepôt) ; soit elle le revend. Le fait de lancer le projet empêche ces deux utilisations de l'entrepôt. Il faut donc en tenir compte dans l'évaluation des cash flows.

M. Vislavis a bien compris cela. Supposons donc que la société garde l'entrepôt pour y stocker d'autres éléments. Si on regarde la proposition de M. Vislavis, l'entièreté de la construction de l'entrepôt est à charge du projet. Est-ce vraiment correct ?

À la fin du projet, la société possédera toujours l'entrepôt qu'elle pourra revendre après l'année  $T = 3$  (vendre un entrepôt peut prendre du temps. Nous considérerons donc qu'il est vendu en année 4). Il faut donc en tenir compte également. Si le prix de l'entrepôt n'a pas varié entre-temps, les cash flows pourraient être les suivants :

Année	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
Jolie vis	-10 000 €	5 000 €	7 500 €	9 000 €	0 €
Entrepôt	-100 000 €				+100 000 €
Total projet Jolie vis	-110 000 €	5 000 €	7 500 €	9 000 €	100 000 €

Dans ce cas, le coût de l'entrepôt pour le projet n'est donc pas égal à 100 000 € mais bien à :  $-31698,65 = -100 000 + 100 000 / (1,1)^4$ . Cette somme peut être vue comme le prix (en valeur actuelle) de la location de l'entrepôt pendant quatre années.

Finalement, on trouve :

$$\begin{aligned} VAN &= -110 000 + \frac{5 000}{1,1} + \frac{7 500}{1,1^2} + \frac{9 000}{1,1^3} + \frac{100 000}{1,1^4} \\ &= 7 505,63 - 31 698,65 \\ &= -24 193,02 €. \end{aligned}$$

## Exercice 9 Calculer les coûts annuels équivalents

### Énoncé

Oncle Séraphin est de nouveau confronté à un projet d'investissement. Ses deux ouvriers menacent de faire grève s'il ne remplace pas la machine à café qui a rendu l'âme il y a deux semaines. Une étude de marché préliminaire l'a convaincu que seules deux machines devraient être considérées. La première, nommée CafCaf, coûte 130 €, sa durée de vie estimée est de trois ans. Le café à utiliser pour cette machine est spécial et coûte 0,50 € par tasse. La seconde, Quickcoff, ne coûte que 115 € mais a une durée de vie estimée à deux ans. En revanche, elle fonctionne avec un café moins cher, coûtant 0,48 € la tasse. La législation en cours au pays d'oncle Séraphin impose d'amortir les machines à café en deux ans. L'impôt sur les sociétés y est de 40 % et le taux d'actualisation de la société d'oncle Séraphin est de 8 %.

**Sachant qu'à l'heure actuelle les ouvriers consomment 600 tasses de café par an, quelle machine oncle Séraphin devrait-il se procurer ?**

### Solution

Afin de répondre à cette question, il faut calculer les coûts annuels équivalents et donc commencer par déterminer les deux  $VAN$ . Par ailleurs, l'hypothèse est faite que chaque machine pourra être remplacée par une machine identique lorsqu'elle cessera de fonctionner.

Pour la machine CafCaf, les amortissements s'élèveront à  $130/2$  soit 65 € en années 0 et 1, les consommables vaudront  $600 \times 0,5 = 300$  € (voir tableau 8.1).

$$VAN = -284 - 154/1,08 - 180/(1,08)^2 = -580,91 €.$$

$$\text{Facteur d'annuité} = 1 + (1/0,08 - 1/[0,08 \times 1,08^2]) = 2,78.$$

$$CAE = -580,91/2,78 = -208,72 €.$$

Tableau 8.1

 $\Delta FCF$  CafCaf

	0	1	2
$\Delta DAM$	-65	-65	
Coûts consommables	-300	-300	-300
$\Delta BEN$ avant impôts	-365	-365	-300
Impôts	$0,4 \times$ -365	$0,4 \times$ -365	$0,4 \times$ -300
$\Delta BEN$ après impôts	-219	-219	-180
-Achat	-130		
+ $\Delta DAM$	65	65	
$\Delta FCF$	-284	-154	-180

Tableau 8.2

 $\Delta FCF$  Quickcoff

	0	1
$\Delta DAM$	-57,5	-57,5
Coûts consommables	-288	-288
$\Delta BEN$ avant impôts	-345,5	-345,5
Impôts	$0,4 \times -345,5$	$0,4 \times -345,5$
$\Delta BEN$ après impôts	-207,3	-207,3
-Achat	-115	
+ $\Delta DAM$	57,5	57,5
$\Delta FCF$	-264,8	-149,8

Donc l'achat de la machine CafCaf équivaut à la dépense d'une annuité de 208,72 €. Pour la machine Quickcoff, l'analyse se fait de manière identique, mais les amortissements valent 57,5 € et le coût des consommables 288 € (tableau 8.2).

$$VAN = -264,8 - 149,8 / 1,08 = -403,5 \text{ €}.$$

$$\text{Facteur d'annuité} = 1 + 1 / 1,08 = 1,93.$$

$$CAE = -403,5 / 1,93 = -209,51 \text{ €}.$$

En se fondant sur le critère de la *VAN*, la machine à retenir serait Quickcoff. Néanmoins, en agissant ainsi, on négligerait le fait que dans deux ans seulement, il faudra racheter une machine, ce qui n'arrivera qu'un an plus tard avec CafCaf. L'analyse, *via* les coûts annuels équivalents, permet de tenir compte de cette différence temporelle et montre que la machine CafCaf est la plus avantageuse !

## Projets d'investissement récapitulatifs

### Exercice 10 Évaluer un projet d'investissement

#### Énoncé

Nous sommes le 31 décembre de l'année  $T = 0$ . Le patron de la société des Bouchoniers Réunis envisage de lancer un nouveau type de bouchon sur le marché. Ce dernier

permettrait de conserver à l'infini les vins les plus rares. Le procédé industriel à la base du projet est protégé légalement pour une durée de quatre ans. Le projet prendra donc fin en  $T = 4$ . Ce projet nécessite un investissement de 70 000 € en machines (amorties linéairement sur cinq ans). La société ne produira plus en  $T = 5$  et compte revendre les machines pour un montant de 5 000 €. Si le projet est concrétisé, l'achat des machines se fera immédiatement, pour que les amortissements puissent encore être actés pour l'exercice  $T = 0$ . Un spécialiste, payé 36 000 € par an et ayant travaillé un mois sur ce projet lors de l'année  $T = 0$ , a fourni les éléments suivants à votre appréciation :

- La société est bénéficiaire à l'heure actuelle.
- Le segment est porteur. Les ventes de la société sur ce segment (non exploité à l'heure actuelle) seraient de 200 000 € dès la première année.
- La croissance espérée est de 6 % par an de  $T = 2$  à  $T = 4$  inclus.
- Afin de mener à bien ce projet, la société devra acheter des terrains en Espagne propices à la culture des arbres produisant la matière première de ce nouveau produit. Leur valeur sur le marché est de 200 000 € ; si le projet est entrepris l'achat aura lieu en  $T = 0$  (rappel de comptabilité : les terrains ne s'amortissent pas). Le marché immobilier devrait rester stable dans ce pays au cours des cinq prochaines années et l'entreprise entend revendre les terrains pour 200 000 € en  $T = 5$ .
- Les coûts variables et associés à la production seraient de 55 %.
- Une campagne marketing devrait être lancée, ses charges seraient encourues et payées en  $T = 1$  et s'élèveraient à 10 000 €.
- Le besoin en financement à court terme représente 30 % du chiffre d'affaires.
- Il n'y a pas d'inflation.
- Le taux sans risque est de 8 %.
- Le coût du capital nominal est de 12 %.
- Le taux d'imposition de la société est à l'heure actuelle de 40 %.
- Si le projet est lancé, le spécialiste engagé ci-dessus devra encore travailler deux mois sur ce projet (soit trois mois au total).

**a** Calculez les free cash flows et la *VAN* du projet. Faut-il réaliser l'investissement ?

**b** Plutôt que d'acheter les terrains pour les revendre après cinq ans, le dirigeant envisage d'avoir recours à la location (dans ce cas il les louerait de  $T = 1$  à  $T = 4$ ). Il est en pleine négociation avec un paysan espagnol. Quel est le loyer annuel en dessous duquel il devient intéressant d'avoir recours à la location ?

## Solution

**a** Afin de déterminer les *FCF*, il faut établir le compte de résultats propre à ce projet. Tous les éléments « traditionnels » (*CA*, coûts variables [*CV*], *DAM* et plus-value de réalisation) doivent évidemment être pris en compte. La campagne de marketing sera lancée uniquement si le projet est entrepris : son coût doit être inclus. Le cas du spécialiste est plus délicat. Il a déjà travaillé un mois et en travaillera encore deux si le projet est entrepris. Que le projet soit lancé ou non, il faudra payer son salaire de  $T = 0$ , dont il ne faut donc pas tenir compte (c'est un coût irrécupérable). En revanche, la seconde partie ne sera payée que si le projet se réalise. Elle doit donc être comptabilisée.

L'impact de la plus-value de réalisation sur l'impôt peut directement être incorporé au niveau du tableau de financement (voir exercice précédent). Dans cet exercice, nous avons choisi de l'introduire au niveau du compte de résultats. L'impact fiscal y est alors

Tableau 8.3

## Compte de résultats

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$	$T = 5$
<i>CA</i>		200 000	212 000	224 720	238 203	
<i>CV(–)</i>		–110 000	–116 600	–123 596	–131 012	
Marketing (–)		–10 000				
<i>DAM(–)</i>	–14 000	–14 000	–14 000	–14 000	–14 000	
Spécialiste (–)		–6 000				
PV de réalisation						5 000
<b>BEN avant impôts</b>	<b>–14 000</b>	<b>60 000</b>	<b>81 400</b>	<b>87 124</b>	<b>93 191</b>	<b>5 000</b>
Impôts	–5 600	24 000	32 560	34 850	37 277	2 000
<b>BEN après impôts</b>	<b>–8 400</b>	<b>36 000</b>	<b>48 840</b>	<b>52 274</b>	<b>55 915</b>	<b>3 000</b>

calculé. La valeur comptable des machines est nulle en  $T = 5$  car elles sont déjà entièrement amorties. La plus-value correspond donc à la valeur de revente de ces machines. La société est en bénéfice, les pertes comptables de l'année  $T = 0$  permettent de diminuer le bénéfice imposable. Il faut donc bien soustraire la valeur négative (!) des impôts pour cette année (tableau 8.4).

Tableau 8.4

## Tableau de financement

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$	$T = 5$
<i>BEN après impôts</i>	–8 400	36 000	48 840	52 274	55 915	3 000
<i>DAM (+)</i>	14 000	14 000	14 000	14 000	14 000	
$\Delta BFR (–)$		–60 000	–3 600	–3 816	–4 045	71 461
<i>INV terrains (–)</i>	–200 000					200 000
<i>INV machines (–)</i>	–70 000					
<i>FCF</i>	–264 400	–10 000	59 240	62 458	65 870	274 461

La *VAN* est calculée en actualisant les *FCF* au taux de 12 % (coût du capital nominal). Elle représente 15 952 €. Il faut donc réaliser le projet.

**b**

Le coût du terrain pour la société ne représente que l'impossibilité de vendre le terrain entre  $T = 1$  et  $T = 5$ . Il peut être évalué en soustrayant la valeur actuelle de la revente en  $T = 5$  à la valeur du terrain aujourd'hui :  $200 000 – 200 000 / (1,12)^5 = 86 515$  €.

Pour que la location soit avantageuse, il faut que son coût actualisé soit inférieur au coût de l'achat (et revente). Les loyers sont déductibles fiscalement puisqu'ils entrent dans le calcul du bénéfice. Si un loyer ( $L$ ) constant est payé chaque année, le compte de résultats sera affecté comme suit :

	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
Loyer	$-L$	$-L$	$-L$	$-L$
Impôts	$-0,4 \times L$	$-0,4 \times L$	$-0,4 \times L$	$-0,4 \times L$
$\Delta BEN$ après impôts	$-0,6 \times L$	$-0,6 \times L$	$-0,6 \times L$	$-0,6 \times L$

En tenant compte de l'actualisation, il faut trouver  $L$  tel que :

$$\frac{-0,6 \times L}{1,12} + \frac{-0,6 \times L}{1,12^2} + \frac{-0,6 \times L}{1,12^3} + \frac{-0,6 \times L}{1,12^4} = -86 515 \text{ €}$$

où  $0,6 \times L \times \text{Facteur d'annuité} = 86515 \text{ €}$ . Cela donne un loyer maximum de 47 473 € par an.

## Exercice 11 Analyser un projet d'investissement

### Énoncé

Nous sommes le 31 décembre de l'année  $T = 0$ . La société Bow&Tie envisage de lancer une nouvelle gamme de nœuds papillons : PAP-Laurent. Une étude de marché a été réalisée au cours du second semestre  $T = 0$ . La facture s'élève à 500 €, payable en deux fois : 250 € fin décembre  $T = 0$  et 250 € fin décembre  $T = 1$ .

Les conclusions de cette étude sont que :

- L'introduction de la gamme PAP-Laurent augmenterait les ventes de Bow&Tie de 900 €.
- La croissance annuelle des ventes serait de 5 %.
- La nouvelle gamme serait en concurrence avec PAP-Schmit, une ancienne gamme à succès de la société, dont les ventes baisseraient de 200 € au cours des deux premières années ( $T = 1$  et  $T = 2$ ).

Le projet a une durée de vie de trois ans et demande un investissement de 1 000 € en nouvelles machines (amorties sur dix ans). La société compte revendre les machines dans quatre ans pour un montant de 750 €.

Les informations suivantes sont également disponibles : les coûts variables associés à la production seraient de 360 € pour l'année  $T = 1$  ; les coûts de start-up s'élèveraient à 100 € ; le besoin en financement à court terme (*BFR*) s'élève à 10 % du *CA* ; il n'y a pas d'inflation ; le taux sans risque est de 4 % ; le coût du capital réel est de 10 %.

- a** Calculez les *FCF* et la *VAN* du projet dans le cas où Bow&Tie n'est pas soumis à l'impôt. Faut-il réaliser l'investissement ?
- b** Calculez l'impact sur la *VAN* d'un impôt de 40 % ? Quelle serait la nouvelle *VAN* du projet ?

### Solution

- a** Dans cet exercice, deux données méritent une explication spécifique. D'une part, les coûts de start-up qui correspondent aux charges rencontrées uniquement la première année et liées à la mise en place du projet. Ils doivent être inclus dans le calcul des *FCF*. D'autre part, la baisse des ventes de la gamme PAP-Schmit. Ce phénomène est appelé « cannibalisme ». Le nouveau projet « mange » en effet une partie des ressources d'une autre branche de la société. Comme cet impact sur les ventes découle de la mise en place du projet, il faut en tenir compte dans le calcul des *FCF*.

Les coûts variables (*CV*) s'élèvent à 360 € la première année (soit 40 % du *CA*) et suivent évidemment l'évolution du *CA*.

La plus-value de revente est déterminée par la différence entre la valeur de revente et la valeur comptable :  $750 - (1\ 000 - 4 \times [1\ 000 / 10]) = 150 \text{ €}$ .

La plus-value (*PV*) de réalisation correspond à la différence entre la valeur de revente et la valeur comptable :  $750 - (1\ 000 - 3 \times [1\ 000 / 10]) = 50 \text{ €}$  (voir tableau 8.6).

$VAN = -1\ 000 + 136 + 300 + 444 + 580 = 460 \text{ €}$ . Il faut donc réaliser le projet.

Tableau 8.5

**Compte de résultats différentiel**

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
<i>CA</i>		900	945	992,25	
<i>CV (-)</i>		360	378	396,9	
<i>DAM (-)</i>	100	100	100	100	
PV de réalisation (+)					150
Coûts de start-up (-)		100			
« Cannibalisme » (-)		200	200		
<b>BEN</b>	-100	<b>140</b>	<b>267</b>	<b>495,35</b>	<b>150</b>

Tableau 8.6

**Free cash flows**

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
<b>BEN</b>	-100	140	267	495,35	150
<i>DAM (+)</i>	100	100	100	100	
PV de réalisation (-)					150
<i>INV (-)</i>	1 000				-750 <sup>(*)</sup>
$\Delta BFR (-)$		90	4,5	4,725	-99,225
<b>FCF</b>	-1 000	<b>150</b>	<b>362,5</b>	<b>590,625</b>	<b>849,225</b>
$V_t$ (à 10 %)	1	0,91	0,83	0,75	0,68
<b>FCF actualisés</b>	-1 000	<b>136</b>	<b>300</b>	<b>444</b>	<b>580</b>

(\*) Il s'agit de la revente de la machine.

**b**

Pour déterminer l'impact de l'impôt, nous pourrions reprendre tout le problème depuis le début. Heureusement, il y a moyen d'aller plus vite. Les *VAN* étant additives, nous savons que : *VAN avec impôts* = *VAN sans impôts* - *VAN des impôts*.

Il faut, par conséquent, commencer par calculer les impôts sur la base du bénéfice (avant impôts) trouvé précédemment et actualiser ces valeurs. Ainsi, nous obtenons la *VAN* des impôts (voir tableau 8.7).

Tableau 8.7

**VAN des impôts**

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
<i>BEN avant impôts</i>	-100	140	267	495,35	150
Impôts	-40	56	106,8	198,14	60
$V_t$ (à 10 %)	1	0,91	0,83	0,75	0,68
Impôts actualisés	-40	50,9	88,3	148,9	41

La *VAN* des impôts est de :  $-40 + 50,9 + 88,3 + 148,9 + 41 = 289 \text{ €}$ .

La *VAN* avec impôts est de :  $460 - 289 = 171 \text{ €}$ . Même avec un impôt, le projet demeure intéressant !

# Analyse de point mort

## Exercice 12 Faire une analyse de point mort

### Énoncé

EuroCorp envisage de produire des enregistreurs de DVD. Le montant à investir à la fin de l'année s'élève à 800 000 €. Cet investissement sera amorti linéairement sur quatre ans, de  $T = 1$  à  $T = 4$ . La durée du projet est de quatre ans et la valeur de revente des équipements à cette date sera nulle. Le projet nécessitera également un accroissement du besoin en fonds de roulement de 200 000 € au début du projet.

EuroCorp prévoit de produire 10 000 enregistreurs DVD par an. Le prix de vente sera de 100 € et le coût de production unitaire est de 60 €. L'entreprise est taxée au taux de 40 %. Le coût du capital est 10 % et le taux d'intérêt sans risque est de 3 %. Le taux d'inflation anticipé est nul.

- a** Calculez les flux de trésorerie additionnels pour le projet.
- b** Calculez la valeur actuelle nette du projet et le taux de rentabilité interne. Quelle décision devrait prendre EuroCorp ?
- c** Calculez le point mort comptable et le point mort financier.

### Solution

- a** Le compte de résultat prévisionnel pour les années 1 à 4 est le suivant (en €) :

<i>CA</i>	$1000000 = 10000 \text{ enregistreurs} \times 100 \text{ €}$
Prix de revient des ventes	$600000 = 10000 \text{ enregistreurs} \times 60 \text{ €}$
<i>DAM</i> (-)	$200000 = 800000/4$
<i>BEN avant impôts</i>	200 000
<i>IMP</i> (-)	80 000
<i>BEN après impôts</i>	120 000

Le tableau de financement pour les quatre prochaines années (en €) est le suivant :

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
<i>BEN ap. IMP</i>		120 000	120 000	120 000	120 000
<i>DAM</i> (+)		200 000	200 000	200 000	200 000
$\Delta BFR$ (-)	200 000				-200 000
<i>INV</i> (-)	800 000				
<i>FCF</i>	-1 000 000	320 000	320 000	320 000	520 000

- b** La valeur actuelle nette est calculée en actualisant les *FCF* au taux de 10 %.

$$\begin{aligned}VAN &= -1000000 + \frac{320000}{(1+10\%)} + \frac{320000}{(1+10\%)^2} + \frac{320000}{(1+10\%)^3} + \frac{520000}{(1+10\%)^4} \\&= 150960 \text{ €}.\end{aligned}$$

Le taux de rentabilité interne est trouvé en résolvant l'équation suivante :

$$-1\ 000\ 000 + \frac{320\ 000}{(1+r)} + \frac{320\ 000}{(1+r)^2} + \frac{320\ 000}{(1+r)^3} + \frac{520\ 000}{(1+r)^4} = 0.$$

Par facilité, il est possible d'utiliser la fonction *IRR* dans le tableur Excel pour résoudre l'équation permettant de trouver, dans ce cas, que le *TRI* = 16,27 %. Le projet est rentable. En effet, la *VAN* est positive et le *TRI* est supérieur au coût du capital (10 %).

- c** Le point mort comptable est obtenu en calculant le nombre d'enregistreurs DVD que devrait vendre EuroCorp pour réaliser un bénéfice nul. Notons  $n$  le nombre d'enregistreurs. Le bénéfice annuel est donné par la relation :

$$BEN = (n \times [100 - 60] - 200\ 000) \times (1 - 0,40).$$

Par conséquent, le bénéfice est nul si  $n = 200\ 000 / (100 - 60) = 5\ 000$  unités. Notons que le projet ne modifie pas les frais fixes de l'entreprise. Le point mort comptable est obtenu en divisant les dotations annuelles aux amortissements par la marge brute unitaire. De manière plus générale, le point mort comptable est égal à la somme des frais fixes et des amortissements divisée par la marge brute unitaire.

Le point mort financier est le nombre d'enregistreurs DVD que devrait vendre EuroCorp chaque année pour que la *VAN* du projet soit nulle. Le flux de trésorerie disponible annuel, si on ignore la variation du besoin en fonds de roulement (nous y reviendrons dans un instant), s'écrit :  $FCF(\text{sans } BFR) = BEN + DAM = (n \times [100 - 60] - 200\ 000) \times (1 - 0,40) + 200\ 000 = n \times 24 + 80\ 000$ . Ce flux de trésorerie peut être interprété comme le nombre d'enregistreurs multiplié par la marge unitaire nette ( $40 \times [1 - 0,40]$ ) auquel on rajoute l'économie fiscale liée aux amortissements ( $200\ 000 \times 0,40$ ). Comme ce flux de trésorerie est constant pendant quatre ans, sa valeur actuelle est égale au flux de trésorerie annuel multiplié par le facteur d'annuité pour une période de quatre ans (au taux de 10 %). Celui-ci vaut 3,16910.

Le calcul de la *VAN* du projet s'écrit :

$$\begin{aligned} -800\ 000 - 200\ 000 + (n \times 24 + 80\ 000) \times 3,1699 + 200\ 000 / (1,10)^4 = \\ -863\ 397 + (n \times 24 + 80\ 000) \times 3,1699 \end{aligned}$$

Le montant de 863 397 € est la valeur actuelle de l'investissement à réaliser dans le projet : les immobilisations corporelles (800 000) et le besoin en fonds de roulement qui est récupéré à la fin du projet ( $200\ 000 - 200\ 000 / [1,10]^4$ ). Le nombre d'enregistreurs à vendre pour aboutir à une valeur actuelle nette nulle est :  $0 = -863\ 397 + (n \times 24 + 80\ 000) \times 3,1699$ . Par conséquent,  $n = 8\ 016$  unités.

# Flexibilité de la décision

## Exercice 13 Évaluer un projet en tenant compte des options réelles

### Énoncé

Vous êtes chargé de réaliser une étude de rentabilité pour le lancement d'un nouvel appareil photographique digital par Nika. Une étude de marché a montré que Nika pourrait vendre 15 000 unités par an pendant dix ans. Le cash flow net d'impôt par unité vendue serait de 50 €. Le cash flow anticipé est de 750 000 € par an. Le montant à investir serait de 5 millions €.

Les responsables financiers de Nika n'ont qu'une confiance très limitée dans les prévisions fournies par le service de marketing. Ils pensent que la première année fournira une bonne information sur les ventes de ce nouvel appareil. Deux cas équiprobables sont envisagés : aucun appareil n'est vendu ou les ventes s'élèvent à 30 000 unités par an, ce qui conduirait à un cash flow annuel de 1,5 million €. En cas d'abandon du projet après un an, les investissements pourraient être revendus pour 2 millions €.

Le coût du capital de Nika est de 10 %.

- a** Calculez la valeur actuelle nette « de base » du projet, en ne tenant pas compte de l'option d'abandon.
- b** Calculez la valeur actuelle nette du projet, compte tenu de l'option d'abandon. Quelle est la valeur de l'option d'abandon ?

### Solution

- a** La valeur actuelle nette « de base » du projet est calculée en actualisant les cash flows attendus du projet et en soustrayant l'investissement initial. La valeur actuelle des cash flows attendus peut être calculée comme la valeur d'une annuité de 750 000 € constante sur dix ans. Le facteur d'actualisation à dix ans au taux de 10 % est de 6,1446.

$$VAN = -5\,000\,000 + 750\,000 \times 6,1446 = -391\,575 \text{ €}.$$

Dans ce cas, la décision optimale est de ne pas investir dans la production.

- b** Pour tenir compte de l'option d'abandon, utilisons un arbre de décision (voir la figure 8.4). Un arbre de décision s'analyse en commençant par la fin et en remontant dans le temps.

#### En $T = 1$ : Continuer ou arrêter ?

On commence par l'analyse de la décision en  $T = 1$ , compte tenu du niveau de vente de l'année.

Si le niveau de vente s'élève à 30 000 unités :

La valeur actuelle (en  $T = 1$ ) si on continue est :  $VA = VA(CF[2\dots10]) = 1\,500\,000 \times 5,759 = 8\,638\,536 \text{ €}$ .

La valeur actuelle (en  $T = 1$ ) si on arrête est :  $VA = \text{Revente} = 2\,000\,000 \text{ €}$ .

La décision optimale est de continuer. Cela conduit alors à une *VAN* en  $T = 1$  de  $1500\,000 + 8\,638\,536 = 10\,138\,536 \text{ €}$ .

Si les ventes sont nulles :

La valeur actuelle (en  $T = 1$ ) si on continue est :  $VA = 0 \text{ €}$ .

La valeur actuelle (en  $T = 1$ ) si on arrête est :  $VA = \text{Revente} = 2\,000\,000 \text{ €}$ .

La décision optimale est d'arrêter. Cela conduit à une *VA* en  $T = 1$  de  $2\,000\,000 \text{ €}$ .

#### **En $T = 0$ : Investir ou non ?**

Si on investit :

En  $T = 1$ , la valeur actuelle de l'investissement est de :

$$0,5 \times 10\,138\,536 + 0,5 \times 2\,000\,000 = 6\,069\,268 \text{ €}.$$

En  $T = 0$ , la valeur actuelle nette en cas d'attente est de :

$$-5\,000\,000 + 6\,069\,268 / 1,1 = 517\,516 \text{ €}.$$

Si on n'investit pas :

La valeur actuelle du projet est de 0.

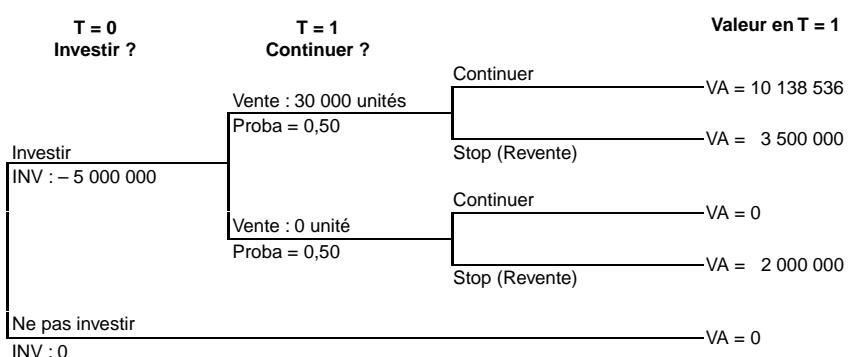
La décision optimale est de lancer le projet et de le réévaluer après un an.

La valeur de l'option d'abandon est la différence entre la valeur actuelle compte tenu de l'option et la valeur actuelle nette de base (sans option) :

$$517\,516 - (-391\,575) = 909\,091 \text{ €}.$$

Figure 8.4

#### **Arbre de décision.**



### **Exercice 14 Déterminer l'impact de la durée d'un projet**

#### **Énoncé**

M. Lechaine exploite 100 hectares de terrains communaux sur lesquels il envisage de planter du peuplier *tricocarpa X deltoïde*, un clone récemment mis sur le marché et dont les propriétés sont prometteuses pour le marché de la construction. Il estime pouvoir planter 150 arbres par hectare, chaque arbre devant lui fournir un flux monétaire à la revente qui sera fonction de la date d'abattage. Une étude récente lui a permis d'estimer les flux monétaires nets d'impôts suivant en fonction de la date d'abattage (voir tableau 8.8).

Tableau 8.8

Date d'abattage	Flux monétaire (<math>\text{€}/\text{ha}</math>)	Date d'abattage	Flux monétaire (<math>\text{€}/\text{ha}</math>)
0	122	11	1 128
1	238	12	1 195
2	348	13	1 259
3	453	14	1 319
4	553	15	1 377
5	648	16	1 431
6	738	17	1 484
7	824	18	1 533
8	906	19	1 580
9	984	20	1 625
10	1 058	21	1 668

Le montant de l'investissement à réaliser s'élève à 400 € par hectare. M. Lechaine se demande dans combien d'années il devrait revendre ces peupliers. La rentabilité exigée pour ce type d'investissement est de 8 % par an. Supposons d'abord que M. Lechaine envisage d'abattre les peupliers après sept ans.

- a** Calculez la valeur actuelle nette de l'investissement.
  - b** A-t-il intérêt à attendre une année de plus ? Décomposez la variation de la *VAN* en ses composantes et interprétez.
  - c** Déterminez la durée optimale de l'investissement. Cette durée est-elle fonction du niveau de l'investissement initial ? Expliquez.
- Supposons maintenant que M. Lechaine puisse racheter le terrain à la commune et créer une entreprise d'exploitation forestière.
- d** Le rythme d'exploitation sera-t-il le même que celui trouvé à la question **c** ? Expliquez sans calculs.

### Solution

- a** Si l'abattage a lieu après sept ans, la valeur actuelle nette de l'investissement sera :  $\text{VAN}(7) = -400 + 824 / 1,08^7 = 80,796 \text{ €}$ .
- b** S'il attend un an de plus, la valeur actuelle de l'investissement deviendra :  $\text{VAN}(8) = -400 + 906 / 1,08^8 = 89,484 \text{ €}$ . Par rapport à la situation où M. Lechaine revend ses arbres, année 7, la *VAN* augmente de 8,69 €. Cet accroissement de *VAN* résulte :
  1. de l'accroissement du cash flow terminal en  $T = 8$  :  $906 - 824 = 82 \text{ €}$ .
  2. du coût d'opportunité, c'est-à-dire de l'intérêt qu'on aurait obtenu sur le placement du produit de la vente en  $T = 7$  :  $-8\% \times 824 = -65,92 \text{ €}$ .
 Au total, en  $T = 8$ , le gain serait de  $82 \text{ €} - 65,92 \text{ €} = 16,08 \text{ €}$ . Actualisé en  $T = 0$ , ce gain nous donne l'accroissement de *VAN* :  $16,08 / 1,08^8 = 8,69 \text{ €}$ .
- c** La durée de l'investissement doit être augmentée tant que l'accroissement de cash flow est supérieur au coût d'opportunité. Il faut donc attendre tant que :  $C_t - C_{t-1} > 8\% \times C_{t-1}$ . Par conséquent, il faudrait abattre les peupliers après neuf ans.

En effet :

$$\begin{aligned} \text{après huit ans, } & 82 = C_8 - C_7 > 8\% \times C_7 = 65,92 \text{ €} \\ \text{après neuf ans, } & 78 = C_9 - C_8 > 8\% \times C_8 = 72,48 \text{ €} \\ \text{après dix ans, } & 74 = C_{10} - C_9 < 8\% \times C_9 = 78,72 \text{ €}. \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter que la durée optimale d'investissement est indépendante du coût de l'investissement.

- d** Si M. Lechaine crée une entreprise, le rythme d'exploitation sera déterminé pour maximiser la valeur de l'entreprise dans son ensemble. Dans ce cas, il faut considérer le fait que l'entreprise recommence une nouvelle exploitation juste après l'abattage. Pour trouver la valeur de l'entreprise pour un rythme d'exploitation de  $t$  années, il faut :

1. calculer le revenu annuel équivalent :  $R(t) = NPV(t)/\text{Facteur d'annuité}$ ;
2. valoriser l'entreprise :  $V(t) = R(t)/r$ .

Dans notre cas, nous obtenons les résultats du tableau suivant.

$T$	$NPV(t)$	Facteur d'annuité	$R(t)$	$V(t)$
6	65,07	4,623	14,07	175,93
7	80,80	5,206	15,52	193,98
8	89,48	5,747	15,57	194,64
9	92,24	6,247	14,77	184,58

M. Lechaine devrait abattre tous les huit ans pour maximiser la valeur de son entreprise.

## Financement des projets

### Exercice 15 Analyser le financement d'un projet

#### Énoncé

La société « Le Moineau à casquette », spécialiste de la vente de couvre-chefs fantaisie est une société stationnaire, dont tous les cash flows sont payés en fin de période. Elle exploite son produit principal dans un pays caractérisé par un marché parfait des capitaux, une inflation anticipée nulle, un taux d'imposition de 40 %, un taux sans risque de 5 % et une prime de risque de 7 %. La société est pour l'instant non endettée mais peut emprunter sur le marché des capitaux au taux sans risque. Le  $\beta$  des activités de sociétés de type similaire non endettées est de 1,2. La société distribue comme dividende l'entièreté du bénéfice qui s'élève à l'heure actuelle à 450 000 €. Elle aimerait développer un nouveau produit pour les chasseurs : la casquette qui caquette (casquette qui servirait d'appeau). Ce projet nécessiterait un investissement initial de 500 000 € de mise en œuvre. Il permettrait d'augmenter à perpétuité le résultat d'exploitation avant charges financières et impôts de 120 000 €. Cette augmentation commencerait dès  $T = 1$ . Le projet est de même risque que celui de la société.

- a** Quelle est la valeur actuelle du projet s'il est autofinancé ?
- b** Même question si le financement se fait par une perpétuité non risquée ?

### Solution

- a** Pour déterminer la valeur du projet en cas d'autofinancement, il faut calculer sa *VAN*. Sachant que le taux d'actualisation sera celui utilisé pour des sociétés similaires non endettées, soit :  $r_a = r_f + \beta_a \times \text{prime de risque} = 5\% + 1,2 \times 7\% = 13,40\%$ , la *VAN* vaudra :  $(1 - 40\%) \times 120\,000 / 13,40\% - 500\,000 = 37\,313,43 \text{ €}$ .
- b** Si le projet est financé par une perpétuité, il faut ajouter à la *VAN* l'avantage fiscal procuré par cet endettement, ce qui implique de calculer la *VANA*. Elle vaut ici, puisque la dette est sans risque :  $\text{VANA} = \text{VAN} + Tc \times D = 37\,313,43 + 40\% \times 500\,000 = 237\,313,43 \text{ €}$ .

# Gestion des risques

1. Pourquoi gérer les risques ? . . . . .	259
2. Quels risques ? . . . . .	260
3. La mesure du risque . . . . .	261
4. Comment gère-t-on les risques ? . . . . .	268
<b>Problèmes et exercices</b>	
La mesure des risques . . . . .	284
Comment gère-t-on les risques ?	290

**Nous avons, dans les chapitres précédents, présenté les principes fondamentaux régissant la création de valeur dans le temps et en présence d'incertitude. Nous avons appris à évaluer la valeur des opportunités futures et à naviguer dans cet univers d'incertitude en identifiant le couple rendement-risque souhaitable et mis à l'épreuve par le marché dans chaque contexte.**

Nous analysons, dans ce chapitre, la gestion des risques. Dans les deux premières sections, nous détaillons les besoins d'une telle gestion et les sources de risques auxquelles nous sommes confrontés. Les sections suivantes présentent les principaux outils de mesure des risques et les différentes stratégies de couverture qui peuvent être employées.

## 1 Pourquoi gérer les risques ?

Deux grands principes ont été identifiés dans les chapitres précédents.

- Dans un contexte à la Modigliani-Miller classique, la valeur de l'entreprise est indépendante de la structure de son financement.
- Le Médaf nous enseigne d'autre part qu'il n'y a pas *a priori* de valeur ajoutée à la gestion des risques puisque les actionnaires peuvent très bien diversifier leur propre portefeuille.

Alors, pourquoi des sociétés gèrent-elles leurs risques ? Plusieurs raisons sont invoquées :

- Valoriser l'entreprise. Si les difficultés financières sont coûteuses pour l'entreprise (voir chapitre 7), une diminution de ce risque a un impact positif sur la valeur de l'entreprise.
- Préserver la capacité de l'entreprise de réaliser des investissements à valeur actuelle positive.
- Diminuer la valeur actuelle de la charge fiscale.
- Limiter les risques des partenaires de l'entreprise qui ne peuvent pas diversifier (actionnaires majoritaires, dirigeants, personnel...).

Et quels risques la société entend-elle gérer ? Les sociétés font une différence entre les risques opérationnels et les risques financiers. Elles estiment que les risques découlant directement de leurs activités et de leur capacité à générer du volume (de vente ou de production), sur lesquels l'actionnaire a investi, leurs sont inhérents. En revanche, la volatilité des composantes financières (taux de change, prix des matières premières, taux d'intérêt, etc.) peut affecter les cash flows et, de là, menacer la chaîne des produits ou des services réels. 262

Mais jusqu'où convient-il de se couvrir, de se protéger ? Si l'on dépasse le seuil de couverture des 100 % de l'exposition de base, on finit par être exposé de manière inverse au risque du sous-jacent. D'autre part, couvrir tout juste 100 % d'une exposition est assez difficile à maintenir pour différentes raisons : le montant à couvrir n'est peut-être pas constant, les effets du produit de couverture ne sont peut-être pas parfaits, il y a des coûts de transaction qui rendent onéreux de trop fréquents réaménagements de couverture, etc.

Précédemment, il a été question de diversification (de portefeuille) et d'immunisation (de stratégie obligataire). Ici nous parlerons de couverture et de protection. *Couvrir* signifie réduire voire annuler, le risque de perte, en choisissant une stratégie qui génère ou générera un profil de différences de cash flows exactement inverse à tout ou partie de celui qui est subit sur un sous-jacent donné. *Protéger*, c'est adopter une stratégie d'assurance qui produira un certain cash flow uniquement lors de la survenance d'un événement qui serait défavorable.

### Remarque

#### La couverture (le hedging)

La notion de couverture, appelée communément hedging, est plus largement utilisée pour recouvrir toute stratégie financière destinée à la modification ou à la réduction d'une exposition à une source de risque déterminée. Dans ce sens, le hedging recouvre aussi bien la couverture que la protection (ou assurance).

## 2 Quels risques ?

On distingue en général quatre catégories majeures de risques :

1. **Les risques de marché**, qui regroupent :
  - a. l'incertitude liée à la structure des taux d'intérêt ;
  - b. l'incertitude liée au taux de change ;
  - c. l'incertitude liée au marché des actions ;
  - d. l'incertitude liée au prix des matières premières.
2. **Le risque de crédit**, souvent représenté par le risque de faillite ou de détresse financière. Mais ce dernier correspond au stade ultime de l'évolution défavorable du standing de crédit d'une contrepartie financière. Pour certains, le risque de revue à la baisse du rating (downgrade) d'une société constitue déjà en soi un risque de crédit.

3. **Les risques opérationnels**, qui reprennent tous les risques liés à l'activité et qui ne sont pas recouverts par les deux catégories précédentes.
4. Enfin, on peut faire un aparté sur **le risque de modèle** qui peut être dû à un excès de confiance lié à l'utilisation trop « myope » de quelques modèles de calculs de risques. Certains calculs peuvent effectivement ne pas refléter l'ensemble de la réalité d'un problème pour des raisons diverses :
  - a. L'imbrication des sources de risques peut être complexe.
  - b. Les modèles appréhendent très mal les impacts néfastes des problèmes de liquidité et autres absences d'hypothèses fréquemment faites en finance (voir chapitres précédents).
  - c. La plupart des modèles ne s'adressent qu'à la représentation de conditions normales de marché et sous-estiment la fréquence et l'amplitude d'événements rares.

Les biais, absences ou erreurs de ces modèles/systèmes sont d'autant plus dangereux qu'ils sont utilisés simultanément pour le contrôle et la gestion.

Dans les sections qui suivent, nous aborderons essentiellement les risques de marché.

### 3 La mesure du risque

La mesure du risque repose sur le couple moyenne-variance utilisé par Markowitz dans les années 1950 pour analyser la gestion de portefeuille. Cette approche repose sur l'hypothèse que les rentabilités des actifs financiers et les variations des taux d'intérêt ou des taux de change suivent une loi normale. Cette hypothèse résulte du théorème de tendance normale de Laplace (*Central Limit Theorem*) qui dit que la somme (ou la moyenne) de  $n$  réalisations indépendantes d'un même processus, pour autant que la variance soit finie, approche une distribution gaussienne quand  $n$  devient infiniment grand. On voit déjà à ce stade pourquoi l'utilisation de cette distribution pour la plupart des mesures de risque peut se révéler très approximative : en situation de marchés très problématiques par exemple, on ne peut faire l'hypothèse qu'on est face à des tirages « indépendants ».

La distribution de probabilité d'une distribution normale est caractérisée par ses deux premiers moments : la moyenne et la variance. Ces paramètres et leurs estimateurs respectifs sont donnés par les équations suivantes :

$$\text{Moyenne} = \mu = E[X] \leftarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Obs_i$$

où  $\hat{\mu}$  est l'estimateur de  $\mu$ ,  $n$  est le nombre d'observations prises en compte et  $Obs_i$  est une réalisation de  $X$ .

$$\text{Variance} = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] \leftarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Obs_i - \mu)^2$$

où  $\hat{\sigma}$  est l'estimateur de  $\sigma$ .

Les variables aléatoires considérées dans ce chapitre sont des variations au cours d'un intervalle de temps. Nous ferons l'hypothèse que l'unité de temps est l'année. À titre d'exemple, le taux de rentabilité pour la période allant de  $t - 1$  à  $t$  est donné par la formule :

$$R_t = \ln(P_t/P_{t-1})$$

Une modification de la longueur de l'intervalle de temps modifie les paramètres de la distribution. Considérons, par exemple, une période de longueur  $T$ . La moyenne et l'écart type pour cette période s'obtiendront par les règles suivantes :

$$\mu_T = \mu T \quad \text{et} \quad \sigma_T = \sigma \sqrt{T}$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  sont la moyenne et l'écart type sur base annuelle. Ces relations traduisent le fait que la moyenne et la variance sont proportionnelles à la longueur de la période. L'écart type pour une période est donc calculé en multipliant l'écart type annuel par la racine de la longueur de la période.

Les quantiles d'une variable normale centrée réduite  $Z$  (de moyenne 0 et d'écart type 1) sont connus. Un quantile est la valeur  $z_c$  de la variable normale réduite telles que la probabilité de réalisations inférieures à  $z_c$  soit égale à un pourcentage désiré  $\alpha$  :

$$\Pr[Z \leq z_c] = \alpha, \quad \text{si } Z \sim N(0, 1)$$

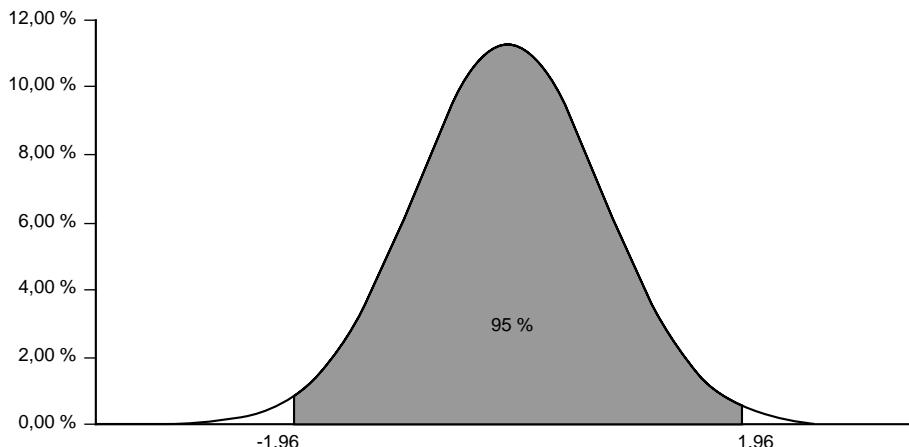
Notons que la loi normale étant symétrique, il s'en suit que :

$$\Pr[-z_c \leq Z] = 1 - \alpha$$

Le tableau 9.1 donne quelques valeurs de  $z_c$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

**Figure 9.1**

**Loi normale et intervalle de confiance d'une variable centrée réduite.**



Toute variable aléatoire distribuée normalement, de moyenne  $\mu_T$  et d'écart type  $\sigma_T$ , peut être exprimée comme fonction linéaire d'une variable centrée réduite  $Z$  :

$$X = \mu_T + Z\sigma_T$$

Tableau 9.1

**Valeurs de  $z_c$  pour différentes valeurs de  $\alpha$**

$z_c$	$\alpha$
1,2816	90,0 %
1,6449	95,0 %
1,9599	97,5 %
2,3263	99,0 %

### Démonstration

En sachant que  $E[a + bY] = a + bE[Y]$  et que  $Var[a + bY] = b^2Var[Y]$ , on trouve facilement que  $E[X] = E[Z]\sigma + \mu = \mu$  et que  $Var[X] = \sigma^2Var[Z] = \sigma^2$ .

Pour toute variable  $X \sim N(\mu_T, \sigma_T)$ , le quantile s'écrit :

$$\Pr[X \leq \mu_T + z_c\sigma_T] = \alpha,$$

Notons que, dans la réalité, il arrive que les distributions observées ne soient pas tout à fait normales, avec une asymétrie vers la gauche ou vers la droite (skewness) et un aplatissement anormal (kurtosis) qui produit des queues de distribution épaisses. Il est alors difficile de caractériser la notion de risque uniquement grâce à l'écart type puisque celui-ci ne fait aucune différence entre les écarts à la hausse et les écarts à la baisse par rapport à la moyenne.

## 3.1 Le principe de la « Value-at-Risk » (VaR)

La Value-at-Risk ou valeur à risque, introduite dans les années 1990, donne une estimation de la perte potentielle (downside risk), exprimée en euros, d'un portefeuille soumis à des risques de marché. Elle est définie comme « la perte maximale sur un horizon de temps cible telle que la probabilité de pertes effectives plus élevées soit égale à un seuil  $\alpha$  ».

Considérons, par exemple, un portefeuille de valeur initiale  $W_0$ . Soit  $R_T$  son taux de rentabilité sur un horizon de temps donné  $T$ . La valeur future en  $t = T$  est dès lors  $W_T = W_0(1 + R_T)$ . Notons  $W_c$  la valeur la plus basse que ce portefeuille puisse atteindre avec un certain degré de confiance  $c$  donné. Ce degré de confiance est égal à la probabilité que la valeur future du portefeuille soit supérieure à cette valeur la plus basse. La probabilité que la valeur future du portefeuille soit inférieure à cette valeur la plus basse est égale à  $\alpha = 1 - c$ .

$$\Pr[W_T > W_c] = c \quad \text{ou} \quad \Pr[W_T \leq W_c] = \alpha = 1 - c$$

Deux définitions de la VaR sont possibles selon que l'on mesure la perte par rapport à la valeur initiale du portefeuille ou par rapport à sa valeur attendue.

La VaR absolue exprime la perte par rapport à la valeur d'aujourd'hui,  $W_0$  :

$$\text{VaR}_{abs} = W_0 - W_c = W_0 - W_0(1 + R_c) = -W_0R_c$$

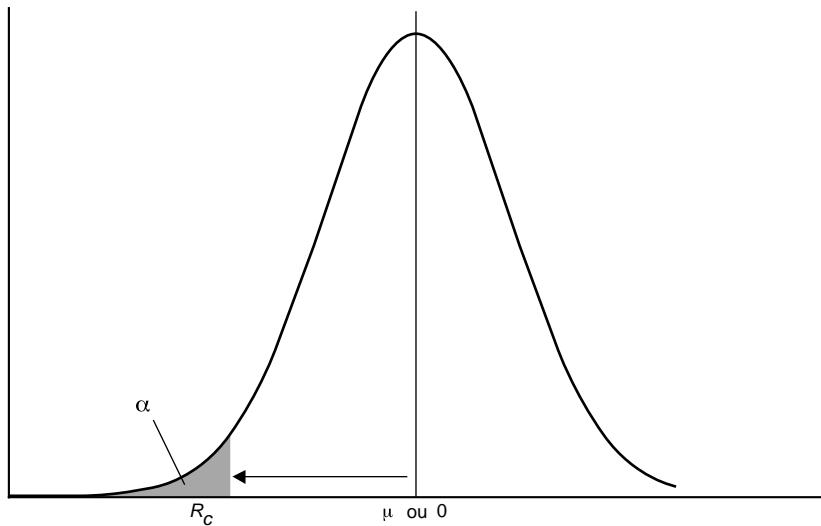
La VaR relative calcule la perte maximale par rapport à la moyenne attendue de  $W_T$  :

$$\text{VaR}_{rel} = E[W_T] - W_c = W_0(1 + \mu_T) - W_0(1 + R_c) = -W_0(R_c - \mu_T)$$

La figure 9.2 montre graphiquement la signification des expressions précédentes. De manière générale, celles-ci permettent de comprendre comment obtenir une VaR en prenant la variabilité des rentabilités comme source de risque à la base. Cela est important car l'hypothèse de normalité est en général faite sur eux, pas sur les prix directement.

Figure 9.2

**Écart de rentabilité et VaR.**



Les principaux avantages de la VaR sont les suivants :

1. **C'est une mesure statistique simple à expliquer et exprimée dans une unité aisée à comprendre.** La VaR donne en effet une estimation directement en euros de la perte potentielle, et ce quel que soit l'instrument.
2. **C'est une solution pour la mesure du risque de certains dérivés.** Certains produits n'exigent aucun investissement de départ, tels que les contrats à terme (voir ci-après). Un rendement sur contrat à terme est donc par définition infini, d'où le besoin de travailler avec des pertes en valeur et non pas en %.
3. **Elle mesure le risque total d'un portefeuille.** Il suffit d'ajouter les expositions de chaque position, pour autant que les corrélations entre sources de risques aient été correctement prises en compte (voir ci-après). Le simple ajout de ces positions va tenir compte du degré de diversification régnant au sein du portefeuille.
4. **Elle peut être facilement complétée par une analyse de sensibilité.**

La VaR est donc un concept qui, à travers la disponibilité de différentes méthodes, permet de remplir plus ou moins son rôle : une mesure correcte pour tout type d'instrument, sur laquelle on puisse se fonder pour le futur et qui permette d'agrégier les risques d'un portefeuille. Le calcul de la VaR d'un portefeuille se base sur une estimation de l'écart type de sa rentabilité. En effet, pour un degré de confiance donné  $c$  :

$$\Pr[W_T \leq W_c] = \Pr[R_T \leq R_c] = 1 - c = \alpha$$

Or, par hypothèse, la rentabilité est une variable normale. Il en résulte donc :

$$\Pr[R_T \leq R_c] = \Pr[R_T \leq \mu_T - z_c \sigma_T]$$

La VaR absolue d'un portefeuille s'écrit donc :

$$\text{VaR}_{abs} = W_0(z_c \sigma \sqrt{T} - \mu T)$$

De même, la VaR relative s'exprime de la manière suivante :

$$\text{VaR}_{rel} = -W_0(R_c - \mu_T) = W_0 z_c \sigma \sqrt{T}$$

Ces formules sont aisées à utiliser pour un portefeuille comprenant un seul actif de volatilité connue. Pour un portefeuille comprenant plusieurs actifs, le calcul est plus complexe car il faut déterminer la valeur de l'écart type de la rentabilité du portefeuille en fonction de sa composition et des caractéristiques des titres qui le compose.

On retiendra trois méthodes principales pour produire une VaR : la méthode « var-covar », la simulation historique et la simulation de Monte-Carlo.

## 3.2 Évaluation statistique ou méthode var-covar

Pour présenter la méthode var-covar, considérons un portefeuille composé de  $n$  actifs. Nous avons, au chapitre 2, montré que la variance de ce portefeuille est donnée par la formule :

$$\sigma_P^2 = \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij}$$

où  $x_i$  est le poids de l'actif  $i$  dans le portefeuille et  $\sigma_{ij}$  est la covariance entre l'actif  $i$  et l'actif  $j$ . La VaR relative de ce portefeuille, pour un niveau de confiance  $c$  donné et un horizon  $T$  fixé, s'écrit :

$$\text{VaR}_{rel} = W_0 z_c \sigma_P \sqrt{T}$$

Il est parfois intéressant d'identifier les sources de risques pouvant modifier la valeur du portefeuille. Considérons, par exemple, un portefeuille investi en actions américaines et en obligations libellées en euros. La valeur initiale du portefeuille, calculée en euros, s'écrit :

$$W_0 = W_{A\$} \times S_{\mathbb{E}\$} + M$$

où  $W_{A\$}$  est le montant (en dollar) investis en actions américaines,  $S_{\mathbb{E}\$}$  est le taux de change (nombre d'euros par dollar) et  $M$  est le montant investi en obligations libellées en euros. Ce portefeuille a trois sources de risques : le risque des actions américaines, le risque de change et le risque de modification du taux d'intérêt euro. La variation de la valeur du portefeuille s'écrit :

$$W_0 R_P = W_{A\$} R_{A\$} + W_{A\$} R_{\mathbb{E}\$} + M R_{\mathbb{E}}$$

où  $R_{A\$}$  est la rentabilité (en dollar) des actions américaines,  $R_{\mathbb{E}\$}$  est la rentabilité du dollar par rapport à l'euro et  $R_{\mathbb{E}}$  est la rentabilité des obligations libellées en euros. La variation attendue s'écrit alors :

$$W_0 \mu_P = W_{A\$} \mu_{A\$} + W_{A\$} \mu_{\mathbb{E}\$} + M \mu_{\mathbb{E}}$$

La variance de la variation de valeur du portefeuille est donnée par l'équation :

$$\begin{aligned}\text{Var}(W_0 R_P) &= W_0^2 \sigma_P^2 \\ &= W_{A\$}^2 \sigma_{A\$}^2 + W_{\mathbb{E}\$}^2 \sigma_{\mathbb{E}\$}^2 + M^2 \sigma_{\mathbb{E}}^2 + 2W_{A\$} W_{A\$} \sigma_{A\$, \mathbb{E}\$} + 2W_{A\$} M \sigma_{A\$, \mathbb{E}} + 2W_{A\$} M \sigma_{\mathbb{E}\$, \mathbb{E}}\end{aligned}$$

Ces deux expressions de l'espérance et de la variance peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}W_0 \mu_P &= W' \mu \\ \text{Var}(W_0 R_P) &= W' \Sigma W\end{aligned}$$

où  $W$  est le vecteur  $3 \times 1$  des montants exposés aux différents risques,  $\mu$  est le vecteur  $3 \times 1$  des rentabilités attendues et  $\Sigma$  est la matrice  $3 \times 3$  des variances covariances des rentabilités.

La généralisation à un portefeuille de  $n$  actifs  $i$  et  $m$  sources de risques  $j$  est facilement réalisée en considérant que, dans le cadre d'un portefeuille, on peut concevoir l'exposition de chaque actif à chaque source de risque. Ainsi, on peut définir une matrice d'exposition de dimensions  $n \times m$  qui contienne les montants notionnels de chaque actif exposés à chaque source de risque :

$$W_{n \times m} = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,m} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ w_{n,1} & & & w_{n,m} \end{bmatrix}$$

En faisant le total de chaque colonne, nous récupérons la transposée du vecteur  $W$  (de dimension  $m \times 1$ ) des montants totaux exposés à chaque risque. Le calcul de l'espérance mathématique et de la variance peut alors être réalisé comme précédemment.

Tous les actifs  $i$  ne possèdent pas forcément une sensibilité de 1 avec la source de risque  $j$ . Nous pouvons ainsi distinguer quatre cas typiques :

- Les actions qui ne sont pas traitées individuellement mais par rapport à un indice. Si la source de risque ultime est un indice, alors le poids de l'action dans la colonne de cette source-là ( $w_{i,j}$ ) vaut

$$w_{i,j} = \text{Montant} \times \beta_{i,j}.$$

- Les options sur un sous-jacent repris dans les sources. Le principe est le même que pour les actions. Par exemple, si l'on se limite au delta de l'option en tant que paramètre de sensibilité aux variations du sous-jacent, alors le poids de l'option dans la colonne de la source du sous-jacent ( $w_{i,j}$ ) vaut :

$$w_{i,j} = \text{Montant} \times \Delta_{i,j}.$$

- Les options (position  $i_1$ ) sur un sous-jacent (position  $i_2$ ) lui-même relié à un indice (source de risque  $j$ ). En appliquant les deux principes précédents, le montant à inscrire dans la matrice  $W$  aux coordonnées  $i_{1,j}$  vaut

$$w_{i_1,j} = \text{Montant} \times \Delta_{i_1,i_2} \times \beta_{i_2,j}.$$

- Les obligations. Trois raisonnements différents peuvent être appliqués :

L'approche par la duration. En tant que première dérivée par rapport aux changements du rendement à l'échéance de l'obligation, la duration modifiée équivaut au delta de l'obligation.

Dans le cas où l'on préférerait utiliser comme variables sous-jacentes une série de points de la structure des taux d'intérêt, on peut décomposer l'obligation principale en zéro-coupons d'après chaque coupon ainsi que le principal. Chaque poids  $w$  résultera d'un paiement de l'obligation multiplié par sa duration modifiée.

Étant donné qu'aucun paiement ne correspond vraiment à une échéance précise en termes de taux dans la réalité, RiskMetrics™ propose une méthodologie qui consiste à recalculer pour chaque paiement (après une décomposition comme précédemment) des poids à attribuer aux taux applicables juste avant et juste après cette échéance, calculés de manière que la variabilité de chaque paiement soit respectée.

### 3.3 Simulation historique et réévaluation totale

La méthode précédente est très contestée dans le cas de produits à profil de flux tronqué, c'est-à-dire les produits dont la valeur n'est pas forcément linéaire par rapport aux changements de valeur de variables sous-jacentes, telles que les options. En effet, si une option est proche de sa maturité, ou at-the-money, son delta devient très instable et, sa VaR sera totalement différente si l'option est achetée ou vendue. Alors, bien que les méthodes fondées sur des sensibilités soient très rapides à implémenter, la solution la plus radicale consiste à évaluer chaque position ou produit du portefeuille d'après des séries de valeurs potentielles des variables sous-jacentes.

Pour ce faire, la méthode dite de « simulation historique » s'appuie sur l'utilisation directe de la distribution effective des rendements passés des variables sous-jacentes en lieu et place de la distribution théorique caractérisée par les moments calculés sur la distribution effective. Une fonction de répartition est le cumul des probabilités des observations de la plus basse jusqu'à la plus haute. Ainsi, si  $f(x)$  est la fonction de densité de probabilité pour une valeur de  $x$ , alors  $F_X(x_c)$  est la fonction de répartition de  $X$  jusqu'à  $x_c$  en ce sens que :

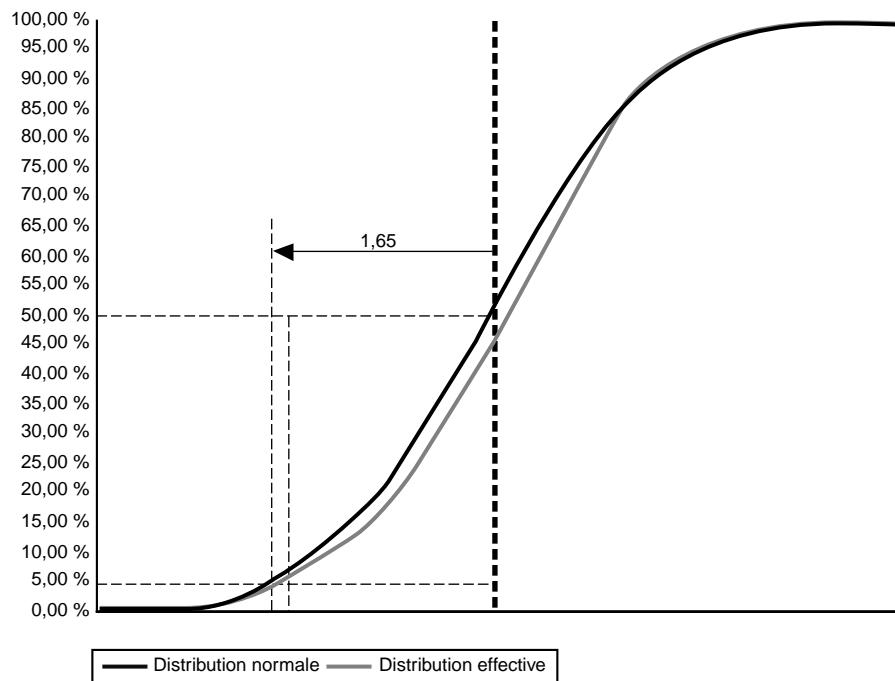
$$\Pr[X \leq x_c] = \int_{-\infty}^{x_c} f(x) dx = F_X(x_c) = \alpha = 1 - c$$

Cela veut simplement dire que l'on peut très bien prendre la distribution effective de rendements en ordre ascendant et choisir la valeur qui laisse  $\alpha$  % des observations plus basses (en termes statistiques, c'est le percentile  $\alpha$ ) comme la valeur la plus basse à un certain niveau de confiance  $c$  (voir figure 9.3).

Cette méthode ainsi que celle des simulations de Monte-Carlo fait partie des méthodes dites d'évaluation intégrale car tous les produits du portefeuille sont purement et simplement réévalués à l'aide de leur formule complète, sur tous les points de la distribution effective de rendements de toutes les sources de risques sous-jacentes. Ensuite, il suffit de prendre l'observation correspondant au  $\alpha$  % de la distribution (préalablement triée par ordre ascendant) des valeurs de la position pour trouver la VaR de la position.

Figure 9.3

**Fonctions de répartition de la distribution théorique et de la distribution effective.**



### 3.4 Simulations de Monte-Carlo

À la différence de la méthode précédente, cette méthode de réévaluation intégrale fait appel aux moments des séries historiques de rendements de chaque variable sous-jacente représentant une source de risque, dans le but de simuler des valeurs théoriques d'après le modèle de variation accepté pour chacune de ces variables (rendements d'actions ou d'indices, taux de change, taux d'intérêt). Ensuite, il suffit de réévaluer toutes les positions non plus d'après les points réels mais d'après ceux qui sont feints. L'avantage est ici de pouvoir simuler des points en plus grand nombre que l'historique dont on dispose.

## 4 Comment gère-t-on les risques ?

Les stratégies dites « optionnelles » ayant déjà été abordées longuement dans les chapitres précédents, nous nous attacherons principalement à l'utilisation de positions de couverture. Nous nous placerons dans le rôle d'un hedger, c'est-à-dire un investisseur recherchant une position de couverture ou de protection. La gestion des risques ne signifiant pas forcément réduction des risques, nous aurions pu nous intéresser aussi aux spéculateurs et aux arbitragistes (quoiqu'on parlera d'arbitrage lors de l'évaluation des contrats à terme).

### 4.1 Les stratégies de couverture naturelle

Dans la pratique, le recours aux produits dérivés pour se couvrir n'est pas toujours né-

cessaire. Imaginons par exemple une société holding AAA dont le siège est à Paris, avec une filiale aux USA et une autre à Montpellier. Si la filiale de Montpellier reçoit des revenus en dollars américains et que la filiale américaine est demandeuse de cette même monnaie pour des investissements, cela permet à la holding d'éviter de devoir acheter des dollars, voire de devoir conclure un contrat pour fixer ce taux de change en interne. Il existe différentes manières de couvrir naturellement des situations qui, à la base, sont risquées. Parmi celles-ci :

1. Avoir une politique d'achats dans le même pays que celui d'où proviennent la majorité des revenus.
2. Utiliser les prêts intersociétés (dits « intercompany loans » ou prêts « interco »).

En matière de taux d'intérêt, on peut ranger dans cette catégorie aussi l'immunisation qui consiste à avoir une structure obligataire ou de prêt à l'actif dont la duration correspond à celle des engagements pris au passif. C'est le fondement même de la gestion actif-passif des sociétés soumises au risque de taux d'intérêt (ALM, *Asset-Liability Management*).

## 4.2 Les stratégies de protection (ou d'assurance) avec les options

### Le principe et l'évaluation des options

Nous ne nous étendrons pas ici sur les options, introduites au chapitre 3, dans lequel il est fait notamment référence aux paramètres de sensibilité du prix d'une option aux changements de :

- la valeur du sous-jacent ( $S$ ) : delta (première dérivée), gamma (convexité) ;
- la volatilité ( $\sigma$ ) de ses rendements : vega (première dérivée).

### L'utilisation des options

Il existe trois sortes de stratégies types :

1. Les stratégies nues ou naked positions : achat ou vente de l'option sans détenir le sous-jacent.
2. Les stratégies simples de protection ou d'assurance, à proprement parler : achat de call ou de put dans le but de couvrir l'achat ou la vente future du sous-jacent détenu (voir tableaux 3.1 et tableau 3.2).
3. Les stratégies à caractère directionnel et plus ou moins spéculatives : dites « bullish » (gagner en marché haussier) ou « bearish » (gagner en marché baissier).
  - a. Les spreads : achat et vente simultanée d'options identiques sauf pour leur prix d'exercice.
  - b. Les straddles : achat (ou vente) d'un call et d'un put identiques.
  - c. Les strips : achat (ou vente) de deux puts et d'un call identiques.
  - d. Les strangles : achat (ou vente) d'un put et d'un call, tous les deux out-of-the-money de prix d'exercice donc différents.

## Complément

### La préférence pour les options

Dans bon nombre de cas, il apparaît que les gestionnaires préfèrent payer une prime en échange d'un certain sentiment de confiance du fait de pouvoir refuser le downside ou flux à la baisse.

Mais, on peut démontrer que si le but est de minimiser la volatilité budgétaire de l'entreprise, alors les contrats à terme sont un moyen aussi efficace et moins coûteux, et ce, même dans le cas où l'entreprise ne connaît pas totalement la valeur des montants futurs à encaisser ou à décaisser. Une option peut d'ailleurs être répliquée par une stratégie de réaménagement continue de contrats à terme. Les praticiens vendant des options rétorqueront que cela implique des coûts de transaction ainsi que le suivi par une personne avertie. La prime de l'option serait ainsi en partie aussi la rétribution d'un service.

## 4.3 Les stratégies de couverture à l'aide de contrats à terme ou forwards

### Définition

Un contrat à terme permet à deux parties de fixer le prix d'une transaction portant sur un certain sous-jacent mais devant se réaliser à une date future. On dira que la partie acheteuse achète un contrat à terme (elle prend une position longue sur le contrat) et que la partie vendeuse vend le contrat (elle prend une position courte sur le contrat). Contrairement aux options, les deux parties sont obligées de réaliser la transaction. Le prix auquel la transaction aura lieu est appelé « prix à terme ». Il n'y a aucun paiement au moment de la conclusion du contrat car le prix à terme est fixé de manière à ce que la valeur initiale du contrat soit nulle. Quand le prix pour une transaction au comptant traite au-dessus du prix à terme, on parle de backwardation alors que, dans le cas contraire, on parle de contango. Il est important de remarquer que les deux parties ne sauront qu'à l'échéance si les termes du contrat sont respectés, c'est-à-dire si l'acheteur paie et le vendeur délivre le sous-jacent. Elles sont donc soumises à un risque important de contrepartie. De plus, les contrats à terme ne sont pas liquides. La seule manière de dénouer une position avant l'échéance est de conclure un nouveau contrat de sens contraire au contrat initial (vendre à terme si l'on était acheteur, acheter à terme si l'on était vendeur).

### Exemple

Deux sociétés multinationales (dont les sièges sont en Europe) opérant dans un pays dont le taux de change est relativement contrôlé (ou la devise est simplement illiquide), peuvent établir entre elles un contrat à terme fixant le taux de change auquel elles vont s'échanger des devises étrangères contre leur devise de domicile. Il se peut par exemple que l'une soit investisseur net dans le pays étranger (elle a besoin d'acheter des devises) tandis que l'autre est implantée là-bas depuis très longtemps et cherche plutôt à rapatrier des devises.

## Marché

Les futures sont des contrats à termes traités sur des marchés organisés. Acheter un futures et acheter un contrat à terme sont presque équivalents. Les futures présentent plusieurs avantages par rapport aux contrats à terme :

- Liquidité : il est possible de modifier la position à tout moment.
- Élimination du risque de contrepartie : une chambre de compensation garantit l'exécution du contrat vis-à-vis de toutes les contreparties.

Ces avantages sont acquis au prix d'une souplesse moindre dans la définition des termes du contrat puisque les futures sont des contrats standardisés tant en terme des échéances que du montant de la transaction (la taille du contrat) alors que les contrats à terme peuvent être taillés sur mesure. Les différences de mode opérationnel des futures et des contrats à terme sont énumérées dans le tableau 9.2.

Tableau 9.2

### Forwards contre futures

	Forward	Futures
Disponibilité	De gré à gré (OTC), contrat privé entre deux parties.	Sur un marché organisé avec une chambre de compensation.
Diversité de sous-jacents, échéances	Illimitée.	Limitée aux produits échangés sur les Bourses existantes.
Montants	Indéfinis.	La valeur d'un contrat est définie. Il est impossible de négocier des fractions de contrat.
Exigences	Pas d'exigence générale. Un compte de marge générale est toutefois couramment requis.	Établissement d'un compte de marges (margin account) avec une marge initiale (initial margin) et des appels de marge (margin calls) en fonction de l'évolution du sous-jacent.

La répartition dans le temps des cash flows pour un futures est différente de celle d'un contrat à terme. Dans un contrat à terme, tout se passe à la date d'échéance. Le cash flow pour l'acheteur (d'un contrat portant sur une unité du sous-jacent) est égal à la différence entre le prix spot à la date d'échéance ( $S_T$ ) et le prix à terme fixé initialement en  $t = 0$  ( $F_0$ ) :

$$S_T - F_0 \text{ à la l'échéance } T$$

Dans le cas d'un futures, les gains et les pertes sont réglés quotidiennement. Ce contrat donne donc lieu à des cash flows quotidiens égaux à la variation du prix du futures. La séquence des cash flows pour l'acheteur est donc :

$$F_t - F_{t-1} \text{ pour } t = 1, 2, \dots, T$$

Le prix du futures converge vers le prix comptant à l'échéance ( $F_T = S_T$ ) et donc, la somme des cash flows est identiques pour les deux types de contrats :

$$(F_1 - F_0) + (F_2 - F_1) + \cdots + (F_T - F_{T-1}) = F_T - F_0 = S_T - F_0$$

On peut montrer, qu'en l'absence d'incertitude sur les taux d'intérêts, les prix de ces deux formes de contrats sont identiques.

### L'évaluation des contrats à terme

L'évaluation d'un contrat à terme se fonde sur le principe d'absence d'arbitrage. Considérons d'abord un contrat portant sur un actif qui ne verse aucun dividende ou intérêt et qui peut être stocké sans coût (de l'or, par exemple). Les données nécessaires pour évaluer ce contrat à terme sont les suivantes :

- le prix unitaire de l'actif sous-jacent ( $S$ ) ;
- le prix de livraison ( $X$ ) à l'échéance ;
- la taille du contrat (égale à l'unité pour les besoins de la présentation) ;
- l'échéance du contrat ( $T$  années) ;
- le taux d'intérêt  $r$  en vigueur sur le marché (nous supposerons qu'il s'agit d'un taux continu).

La valeur de marché  $f$  du contrat est alors donnée par la formule :

$$f = S - Xe^{-rT}$$

Cette expression nous indique que la valeur d'un contrat à terme est égale à la différence entre la valeur actuelle (calculée sur la base du prix spot) du montant à livrer ( $S$ ) dont on soustrait la valeur actuelle du paiement ( $Xe^{-rT}$ ). Cette formule nous indique également qu'il est possible de créer un achat à terme synthétique (c'est-à-dire une position qui se comporte comme un contrat à terme) en achetant au comptant le sous-jacent et en empruntant la valeur actuelle du prix de livraison. Il est de même possible de créer une vente à terme synthétique en vendant à découvert le sous-jacent (c'est-à-dire en l'empruntant et en le vendant) et en plaçant un montant égal à la valeur actuelle du prix de livraison.

Le prix à terme est le prix qui annule la valeur du contrat. En conséquence, en fixant  $f = 0$ , on obtient :

$$F = Se^{rT}$$

Le prix à terme est donc égal à la valeur future du prix spot. Si cette relation n'est pas vérifiée, c'est-à-dire s'il est possible d'acheter ou de vendre à terme à un prix de livraison  $X$  différent de  $F$ , deux types d'arbitrages sont possibles :

- Si  $X > F$  : l'arbitrage est appelé cash and carry. Il consiste à emprunter  $S$ , acheter au comptant et vendre simultanément à terme au prix  $X$ . Cette stratégie ne nécessite aucune mise de fonds. Le profit qui en résulte à l'échéance est :

$$\text{Profit} = +X - Se^{rT} > 0$$

- Si  $X < F$ , l'arbitrage est du type reverse cash and carry. Il consiste à vendre à découvert le sous-jacent, à placer le produit de la vente et à acheter à terme au prix  $X$ . Le profit qui en résulte à l'échéance est :

$$\text{Profit} = Se^{rT} - X > 0$$

La formule d'évaluation peut être utilisée, moyennant une légère adaptation, pour des contrats dont le sous-jacent verse des montants (dividendes ou intérêts) à leurs détenteurs au cours de la période précédent l'échéance du contrat ou dont le stockage (ou le portage) génère des coûts. Il convient, dans ce cas, de remplacer le prix spot  $S$  par :

$$\begin{aligned} S &= \text{Prix spot} - \text{Valeur actuelles des dividendes ou intérêts} \\ &\quad + \text{Valeur actuelle des coûts de stockage} \end{aligned}$$

Si le rendement du sous-jacent ( $q$ ) et le coût de stockage ( $k$ ) sont proportionnels au prix spot, on obtient les expressions suivantes de la valeur du contrat et du prix à terme :

$$\begin{aligned} f &= Se^{(-q+k)T} - Xe^{-rT} \\ F &= Se^{(r-q+k)T} \end{aligned}$$

Ces formules très générales nous permettront de présenter quatre des types de contrats à terme les plus couramment utilisés :

- Les contrats à terme sur devise, qui permettent de gérer les risques de change.
- Les futures sur indices boursiers, utilisés pour la gestion des risques liés à l'évolution des marchés d'actions.
- Les futures sur obligations notionnelles, qui sont les instruments de base de gestion des risques associés aux taux d'intérêts à long terme.
- Les futures sur taux d'intérêt, qui peuvent servir à la gestion des risques de taux d'intérêt à court terme.

### **Contrat à terme sur devise**

Le prix à terme d'une devise peut être calculé en utilisant la formule générale moyennant l'interprétation suivante des variables :

- $S$ , le taux de change
- $r$ , taux d'intérêt domestique
- $q$ , taux d'intérêt étranger
- $k = 0$

Nous pouvons ainsi constater que le prix à terme d'une devise est supérieur au prix spot si le taux d'intérêt domestique ( $r$ ) est supérieur au taux d'intérêt de la devise ( $q$ ).

### **Futures sur indices boursiers**

La formule générale peut être utilisée pour comprendre les futures sur indices boursiers. Il s'agit de contrats à terme permettant d'acheter à terme un portefeuille dont la composition est identique à la composition de l'indice. La taille du contrat est égale au niveau de l'indice multiplié par une valeur monétaire par point d'indice. À titre d'exemple, la taille d'un futures sur l'indice CAC40 est égale à  $10 \text{ €} \times \text{indice}$ . Le règlement, à l'échéance, est réalisé en espèce. Il n'y a donc pas de livraison physique des titres mais un règlement de la différence entre la valeur du portefeuille à l'échéance et la valeur du portefeuille fixée initialement. Le prix à terme d'un futures sur indice peut être calculé en utilisant la formule générale avec l'interprétation suivante des variables :

- $S$ , niveau de l'indice.

- $r$ , taux d'intérêt.
- $q$ , rendement en dividendes de l'indice.
- $k = 0$ .

## Futures sur obligations

Ces contrats permettent d'acheter ou de vendre à terme des obligations d'État (sans risque de défaut). Le sous-jacent est une obligation notionnelle c'est-à-dire une obligation aux caractéristiques hypothétiques et qui sert de référence au contrat. Par exemple, le contrat BUND traité sur la Deutsche Börse porte sur une obligation versant un coupon de 6 %, venant à échéance dans environ 10 ans et ayant une valeur nominale de 100 000 €. Le prix coté est exprimé en pourcentage du nominal. Un prix de 95,60 pour un contrat venant à échéance dans 6 mois signifie, par exemple, que l'on paiera, dans 6 mois, 956 000 euros pour cette obligation. Suivant la convention en vigueur pour les prix obligataires, les intérêts courus ne sont pas inclus.

Le calcul des gains et des pertes peut aisément être réalisé connaissant le tick du contrat. Le tick est la valeur d'une variation de 1 point de base, c'est-à-dire 0,01 %. La valeur du tick pour un futures sur obligation ayant une valeur nominale de 100 000 euros est égale à 10 € ( $100\,000 \times 0,01/100$ ). Pour illustrer l'utilisation du tick, supposons que nous ayons acheté un futures à 95,60. Quelques jours plus tard, le futures cote 95,70 soit une variation de prix de 10 points de base. Le gain réalisé s'élèverait dans ce cas à  $10 \text{ pb} \times 10 \text{ €} = 100 \text{ €}$ .

Le sous-jacent est une obligation notionnelle : en cas de livraison à l'échéance, le vendeur pourra choisir l'obligation physique qu'il livrera parmi un liste d'obligations disponibles (le gisement). Il choisira, bien entendu, l'obligation la moins chère. Le montant qu'il recevra sera ajusté par un coefficient appelé facteur de conversion pour tenir compte des différences de caractéristiques entre l'obligation physique et l'obligation notionnelle. Ces facteurs de conversion sont calculés par les Bourses pour toutes les obligations du gisement.

Il est possible de montrer que les prix des futures sur obligations notionnelles sont déterminés par les équations générales présentées ci-dessus mais cela nécessite des développements qui dépassent le cadre de cet ouvrage. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'une des références reprises dans la bibliographie en fin de ce chapitre.

## Futures sur taux d'intérêt

Les futures sur taux d'intérêt permettent de gérer les risques liés à l'évolution des taux d'intérêt à court terme. Ils sont l'équivalent sur les marchés organisés des opérations d'emprunt ou de placement à terme sur les marchés de gré à gré. Comme nous l'avons montré au chapitre 5, le taux d'intérêt (appelé taux à terme) d'un emprunt ou d'un placement à terme est fixé aujourd'hui pour une opération devant se réaliser à une date future. Il est possible d'analyser ce type d'opération en l'assimilant à une opération à terme sur zéro-coupon. Pour illustrer cela, considérons l'achat à terme à l'échéance  $T$  d'un zéro-coupon venant à échéance en  $T^*$  ( $T^* > T$ ) et de valeur faciale  $A$ . Soit  $r_{0,T}$  le taux d'intérêt (spot) aujourd'hui pour l'échéance  $T$  et  $r_{0,T}^*$  le taux d'intérêt pour l'échéance  $T^*$  (ce deux taux sont des taux continus). La valeur actuelle de ce zéro-

coupon est calculée en actualisant sa valeur faciale :

$$S = Ae^{-r_{0,T^*} T^*}$$

Comme cela a été démontré précédemment, le prix à terme est égal à la valeur future du prix spot. Ce prix détermine, comme nous l'avons vu au chapitre 6, le taux d'intérêt à terme (que nous notons  $R$ )

$$F = Se^{r_{0,T} T} = Ae^{-R(T^* - T)}$$

Comme pour tout contrat à terme, le résultat sur cette opération à l'échéance est la différence entre le prix spot du sous-jacent et le prix à terme. Or, le prix spot du sous-jacent est calculé ici en actualisant la valeur faciale sur base du taux spot prévalent à l'échéance du contrat  $r_{T,T^*}$ . Nous avons donc :

$$Ae^{-r_{T,T^*}(T^* - T)} - Ae^{-R(T^* - T)}$$

Cela peut s'écrire, en première approximation (en se rappelant que  $e^x \approx 1 + x$ )

$$A(R - r_{T,T^*})(T - T^*)$$

Très logiquement, un placement à terme dégage un profit si le taux à terme est supérieur au taux spot à l'échéance du contrat. Notez que cette expression est celle d'un swap élémentaire : l'acheteur à terme d'un zéro-coupon reçoit un taux fixé d'avance et paie le taux de marché.

Un IRF (Interest Rate Futures) permet de réaliser cette opération sur un marché organisé. Prenons, par exemple, un contrat traité sur EURONEXT-LIFFE. Ses caractéristiques sont :

- Taille du contrat  $A = 1\,000\,000 \text{ €}$ ;
- Taux d'intérêt spot sous-jacent  $r = \text{EURIBOR}$  ;
- Durée de calcul des intérêts  $T^* - T = 3 \text{ mois}$ .

La cotation est la différence entre 100 et le taux d'intérêt. Par exemple, un cours de 96,50 correspond à un taux d'intérêt à terme de  $100 - 96,50 = 3,50\%$ . Le cours, à l'échéance du contrat, est calculé comme la différence entre 100 et le taux EURIBOR 3 mois prévalent à cette date. Considérons, par exemple, un trésorier qui achèterait un IRF d'échéance 6 mois à  $F_0 = 96,50$ . Supposons, qu'à l'échéance du contrat le taux à 3 mois soit de 4 %. La cotation de l'IRF à l'échéance serait donc  $F_T = 100 - 4 = 96$ . Le résultat est :

$$1\,000\,000 \times \frac{96 - 96,50}{100} \times \frac{3}{12} = 1\,000\,000 \times (3,50\% - 4\%) \times \frac{3}{12} = -1\,250 \text{ €}$$

Nous pouvons aboutir au même résultat plus rapidement en utilisant le tick du contrat c'est-à-dire, la valeur en euros d'un point de base (0,01 %). Pour l'IRF traité sur EURONEXT-LIFFE, le tick vaut 25 € ( $1\,000\,000 \times 1/100 \times 3/12$ ). Une variation du prix du futures de -50 pb entraîne un résultat de  $-50 \text{ pb} \times 25 \text{ €} = -1\,250 \text{ €}$

## Futures sur marchandises

Les contrats à terme ou les futures sur marchandises présentent deux caractéristiques propres. La première est l'importance des coûts de stockage qui peuvent, pour certaines d'entre elles, être substantiels. Comme les formules précédentes le montrent, ces coûts ont pour effet d'accroître la valeur d'un contrat à terme et le prix à terme. La seconde caractéristique est liée à la difficulté, voire l'impossibilité, de prendre des positions à découvert sur certaines marchandises. Rappelons que les formules auxquelles nous avons abouti sont fondées sur l'impossibilité de pouvoir réaliser les deux types d'arbitrage, cash and carry et reverse cash and carry. Or, ce second type d'arbitrage se fonde sur une position à découvert sur le sous-jacent. Encore faut-il qu'il existe des agents économiques qui détiennent ce sous-jacent et qui soient prêts à le prêter. Or, pour beaucoup de marchandises, le sous-jacent est destiné à la consommation plutôt qu'au stockage. Il en résulte qu'un écart peut apparaître entre le prix du futures et la valeur qu'il aurait si les arbitrages reverse cash and carry étaient réalisables. Cet écart apparaît dans les formules d'évaluation sous la forme d'un convenience yield. Le prix à terme s'écrit alors :

$$F = S e^{(r+k-y)T}$$

Dans cette expression,  $k$  est le coût de stockage et  $y$  est le convenience yield.

### Le risque de base

La base est définie comme la différence existant entre le cours du sous-jacent et le prix à terme, à une date donnée  $t$  :

$$B_t = F_t - S_t$$

Cette différence est connue *ex ante*. La base théorique devrait être égale aux coûts de portage nets et c'est l'existence d'activités d'arbitrage qui la force à refléter cette valeur. Cette base peut d'ailleurs être positive, négative ou nulle suivant la nature et l'évolution des coûts de portage. Quelle qu'en soit la valeur, elle est nulle à l'échéance du contrat à terme puisque le prix terme converge vers le prix spot.

La figure 9.4 , montre l'évolution de la base au fur et à mesure que le temps s'écoule jusqu'à l'échéance.

### L'utilisation des contrats à terme

Le tableau 9.3, montre les profils de pertes et profits (payoff profile) pour un acheteur ou un vendeur du sous-jacent désirant se couvrir ou se protéger. Le résultat intègre le coût initial de l'instrument qui est nul dans les contrats à terme.

$X$  note ici le prix du contrat à terme qui a été fixé au début du contrat ( $X = F_{0,T}$ ), pour ne pas reprendre  $F_{t,T}$  qui est, lui, réévalué à chaque temps  $t$ .

### Détermination du ratio de couverture

Supposons la couverture par futures. La valeur de la position à couvrir est égale à la taille de la position  $Q$  multipliée par le prix unitaire  $S$ . Soit  $n$  le nombre de contrats futures. Notons  $N$  la taille d'un contrat et  $F$  le prix du futures. La variation de la valeur de la position s'écrit :

$$\Delta V = Q \Delta S + n \times N \times \Delta F$$

Figure 9.4

**Exemple d'évolution du prix du sous-jacent et de celui du futures au fur et à mesure du passage du temps.**

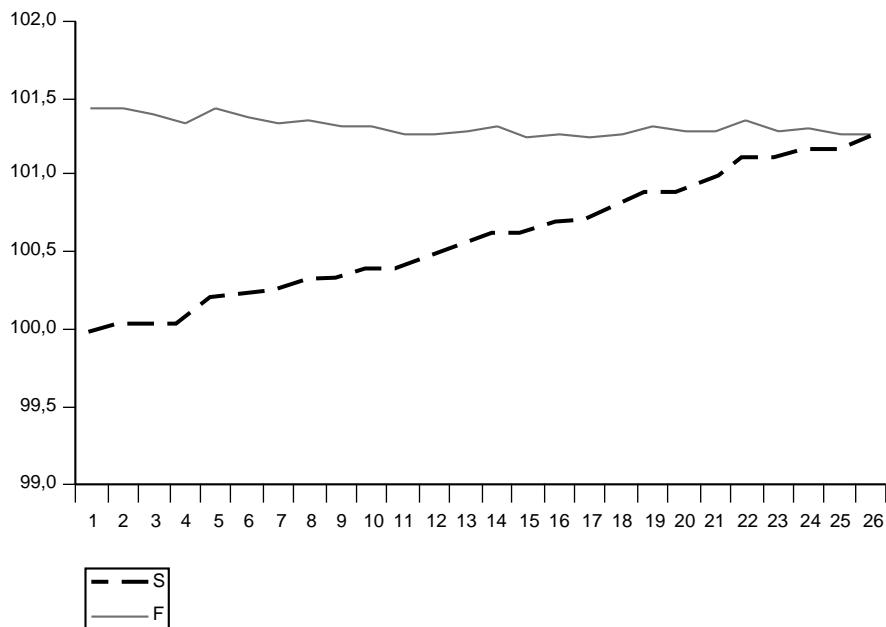


Tableau 9.3

**Flux à l'échéance dans le cadre d'une stratégie de couverture avec des contrats à terme**

	Acheteur du sous-jacent		Vendeur du sous-jacent	
À l'échéance	$S_T < X$	$S_T > X$	$S_T < X$	$S_T > X$
Flux lié au sous-jacent	$-S_T$	$-S_T$	$S_T$	$S_T$
Contrat à terme	Achat		Vente	
Flux du dérivé ( $f$ )	$S_T - X$	$S_T - X$	$-(S_T - X)$	$-(S_T - X)$
Résultat	$-X$	$-X$	$X$	$X$

Le premier terme reflète la variation de la valeur de la position à couvrir et le second le résultat sur la position prise en futures. Une couverture est parfaite quand elle élimine véritablement le risque sur le sous-jacent, imparfaite quand elle ne fait que le réduire. Pour mettre en place une couverture parfaite, le nombre de contrats futures est choisi de manière à ce que le gain ou la perte sur la position à couvrir soit exactement compensé par une perte ou un gain sur les futures. La variation de la valeur de la position est donc, pour une couverture parfaite :  $\Delta V = 0$ . Le nombre de contrats est :

$$n = -\frac{Q}{N} \times \frac{\Delta S}{\Delta F}$$

Le ratio de couverture  $h$  est le rapport entre la position prise en futures (le nombre de contrats multiplié par la taille d'un contrat,  $n \times N$ ) et la position à couvrir.

$$h = \frac{n \times N}{Q}$$

En combinant ces deux relations, nous aboutissons à la conclusion qu'une couverture parfaite est réalisée si :

$$h = -\frac{\Delta S}{\Delta F}$$

Ce résultat appelle deux commentaires.

- Le signe « - » qui apparaît dans la formule nous indique que position en futures doit être l'inverse de la position à couvrir. Si la position à couvrir est une position longue (un actif), il faut vendre des futures. Si, par contre, la position à couvrir est une position courte (un passif), il faut acheter des futures.
- Le ratio de couverture est la pente de la relation entre  $\Delta S$  et  $\Delta F$ . Si ces variations sont strictement proportionnelles ( $\Delta S = \beta \Delta F$ ), le ratio de couverture est  $h = -\beta$ .

En pratique, la couverture peut s'avérer imparfaite pour plusieurs raisons. Des différences de qualité peuvent exister, par exemple, dans la position à couvrir et le sous-jacent du contrat futures. Dans ce cas, le risque ne peut être totalement éliminé et la ratio de couverture est choisi pour minimiser la variance de la position à couvrir.

$$h = \frac{\text{Cov}(\Delta S, \Delta F)}{\text{Var}(\Delta F)}$$

Nous trouvons une formule similaire à celle présentée pour le bêta d'une action. Le ratio de couverture est la pente de la droite de régression  $\Delta S = \beta \Delta F + \varepsilon$ .

## 4.4 Les swaps

### Définition

Les swaps sont de loin les produits dérivés les plus traités au monde en regard aux montants notionnels qui sont traités à travers eux. Ces contrats permettent d'échanger des flux de nature différente entre deux parties. Les deux formes de swap les plus simples (plain vanilla swaps) et les plus courantes sont les swaps de taux d'intérêt (IRS, *interest-rate swaps*) et les swaps de taux de change (CS, *currency swaps*). Les swaps sont essentiellement traités de gré à gré (marchés OTC, *over-the-counter*) et les contreparties ou intermédiaires s'exposent donc à un risque de crédit.

## Le principe et l'évaluation des swaps de taux d'intérêt

Les swaps de taux d'intérêt permettent à deux parties d'échanger pendant une certaine durée un flux d'intérêts dits flottants (dont le niveau est revu fréquemment) contre un flux d'intérêts dits fixes (dont le niveau est défini une fois pour toutes sur la durée du contrat). Chacune des parties peut ainsi modifier une exposition existante en taux fixes vers des taux flottants et *vice versa*. Les contreparties n'échangent pas les montants principaux sur lesquels les intérêts sont calculés puisqu'ils sont équivalents. On parle alors de montant notionnel qui servent uniquement de référence au calcul du paiement d'intérêts. Par convention, la partie qui paie le taux fixe et reçoit le taux flottant est qualifiée d'acheteur. La partie qui paie le taux flottant et reçoit le taux fixe est qualifiée de vendeur.

Le taux flottant utilisé comme référence est en général le taux Libor (*London Interbank Offered Rate*) auquel vient s'ajouter une prime en points de base (100 points de base = 1 %). Suivant la fréquence des paiements flottants, on prend le Libor du terme désiré : trois mois, six mois (le plus fréquent), douze mois.

Tableau 9.4

**Flux échangés lors d'un swap de taux d'intérêt**

	En $t = 0$	En $t = 1 \dots T - 1$	En $T$
	aucun échange	(taux fixe – taux flottant)	aucun échange

Le taux fixe du swap étant fixé dès le départ, ces instruments peuvent être vus comme une suite de contrats à terme sur taux (chaque échéance correspondant à un échange taux fixe – taux flottant) ou comme l'échange de deux obligations (appelées « jambes » du swap), l'une fixe et l'autre flottante, comme le montre le tableau 9.5. Nous avons, dans ce tableau rajouté à chaque jambe du swap un remboursement à l'échéance de manière à faire apparaître deux obligations classique : une obligation à taux fixe et une obligation à taux variable.

Tableau 9.5

**Découpage d'un swap où l'on paie un taux fixe (6 %) contre la réception d'un taux flottant (Libor) (« Payer swap »)**

Année	0	1	2	3	4	4 (Remb)
– Jambe fixe	+100	–6 %	–6 %	–6 %	–6 %	–100
+ Jambe flottante	+100	– Libor	– Libor	– Libor	– Libor	–100

La valeur du swap est égale à la différence entre les valeurs des deux jambes c'est-à-dire la différence entre la valeur d'une obligation à taux flottant et celle d'une obligation à taux fixe :

$$V_{IRS} = V_{flot} - V_{fix}$$

Plaçons-nous à une date de paiement pour un swap de montant notionnel égal à 100. Notons  $R$  le taux fixe et  $v_t$  le facteur d'actualisation du paiement à la date  $t$ . La valeur

du swap peut s'écrire :

$$V_{IRSswap} = 100 - \left( \sum_t R \times 100 \times v_t + 100 \times v_T \right)$$

Le premier terme est la valeur de la jambe flottante. Le second terme entre parenthèses est la valeur de la jambe fixe (la somme des valeurs actuelles des coupons et de la valeur actuel du principal à l'échéance). En  $t = 0$ , la valeur du swap est par définition nulle. Le taux fixe du swap est donc fixé de manière à ce que la valeur la jambe fixe soit égale au montant notionnel du swap.

### Le principe et l'évaluation des swaps de taux de change

Les swaps de taux de change permettent à deux parties d'échanger des montants et des paiements d'intérêts dans deux devises différentes sur une certaine durée de temps (voir tableau 9.6).

Tableau 9.6

**Flux échangés lors d'un swap de taux de change**

En $t = 0$	En $t = 1 \dots T - 1$	En $T$
échange des montants	(taux fixe devise1 – taux fixe devise2)	échange inverse des montants

Notons qu'il existe une forme hybride appelée « cross-currency interest-rate swap » qui permet d'échanger des flux d'intérêts fixes et flottants dans des devises différentes.

Le principe d'évaluation est très semblable à celui d'un swap de taux d'intérêt. La seule différence réside dans le fait que l'on utilise une structure des taux différente pour chaque devise et que le plain vanilla currency swap suppose deux jambes fixes dans deux devises différentes. Considérons, par exemple, un swap de devises dans lequel on paie un taux fixe libellé en euros et on reçoit un taux fixe libellé en dollars. Notons  $V_{Euro}$  la valeur (en euro) de la jambe euro,  $V_{Dollar}$  la valeur (en dollar) de la jambe \$ et  $S_{\text{€\$}}$  le taux de change. La valeur de ce swap s'écrit :

$$V_{CurSwap} = S_{\text{€\$}} V_{Dollar} - V_{Euro}$$

### L'utilisation des swaps

Un taux d'emprunt net fixe permet à l'entreprise de connaître précisément le montant des paiements d'intérêt jusqu'à un horizon-temps donné. Or, l'entreprise emprunte de manière hybride, en mélangeant les emprunts à taux flottant et à taux fixe. Avec les swaps de taux d'intérêt, l'entreprise peut convertir ses expositions au taux flottant en taux fixe sans risque d'évolution.

Les swaps de taux de change, quant à eux, permettent à deux parties d'échanger des devises dans des contextes de régimes de change difficiles, voire impossibles, ou simplement de fixer une relation d'échange de flux dans des monnaies différentes en profitant de la facilité d'accès de chaque entreprise sur son marché.

En résumé, les swaps existent et sont intéressants parce que la perception de la qualité d'emprunteur d'une même entreprise diffère suivant les marchés. Est-ce une imperfection ou une vision ajustée à chaque marché du risque de crédit de la contrepartie ? En

tout cas, de très nombreuses entreprises et intermédiaires sont sur ce marché et sont prêts à s'exposer au risque de crédit pour obtenir de meilleures conditions de taux.

## 4.5 Les produits hybrides et structurés

Le monde des praticiens a créé de nombreux véhicules de placement pour les investisseurs dans les dernières années. Parallèlement aux investissements traditionnels et aux fonds (fonds d'investissement et fonds alternatifs ou hedge funds), des produits dits « structurés » sont apparus avec pour objectif de mieux correspondre à certains besoins des investisseurs. Ces produits sont un mélange d'actifs permettant d'obtenir un certain profil de profit ou de rendement à l'échéance. On peut les ranger en quatre grandes catégories (par ordre croissant de risque) :

- 1. Produits de protection du capital.** Ils permettent de bénéficier d'un plancher minimum de la **valeur** du produit en échange d'une prime et/ou d'un plafonnement des gains possibles. Très recherchés en période de troubles potentiels de la Bourse, leur popularité décroît avec la chute des taux d'intérêt, et ce à cause de leur structure. De nombreuses formules existent mais voici la plus générique d'entre elles. Une partie de l'investissement sert à acheter une obligation hors risque. Suivant le niveau des taux d'intérêt, il reste une fraction plus ou moins grande (la soultre) qui est investie dans un potentiel de croissance quelconque défini par une formule plus ou moins complexe qui se révèle être un produit optionnel. On comprend maintenant mieux pourquoi ce produit est moins intéressant en période de taux d'intérêt bas : la partie obligataire coûte cher et on peut moins investir dans la partie optionnelle.
- 2. Produits de yield enhancement.** Ils permettent de bénéficier d'un **rendement** plus élevé (dans une certaine plage ou selon certaines conditions) que la moyenne en échange d'un rendement nettement moins élevé si une condition est remplie ou cesse d'être remplie d'ici à l'échéance. Ce sont des produits à condition négative. Ils peuvent s'accompagner parfois de garanties. Ainsi, Citigroup propose le produit suivant : « Ce produit correspond à des "equity-linked debt securities" (titres de dette liée à des actions) émis par Citigroup Global Markets Holdings Inc. Sa maturité est d'un an. Il paie un coupon relativement élevé. À l'échéance, l'ELKS retourne :
  - Soit le montant principal investi, en cash, si le sous-jacent n'est pas descendu de plus d'un pourcentage déterminé à l'avance à n'importe quel moment de la vie du ELKS.
  - Soit un nombre déterminé d'actions sous-jacentes, dans le cas contraire. »
 Les conditions possibles sont très variées avec des formulations plus ou moins rombolesques. La dernière phrase est à lire très attentivement... « L'ELKS a dès lors le potentiel de surperformer l'action sur laquelle il repose. » L'investisseur est tenté par le mot « surperformance » mais doit rester attentif au mot « potentiel » qui ne veut pas dire « garantie ».
- 3. Les certificats.** Ils permettent à des investisseurs d'avoir un produit qui se comporte comme un certain sous-jacent mais en offrant souvent un potentiel de croissance plus important dans une certaine plage de valeurs ou de rendements du sous-jacent en échange d'une prime, d'un plafond au gain/rendement maximal, ou encore d'un certain risque accru.

**4. Produits de levier.** Il s'agit simplement de produits faisant appel au fort effet de levier de l'endettement et de certaines stratégies comme la vente de produits dérivés, etc.

## Résumé

La gestion des risques est l'un des domaines de la finance qui connaît une expansion considérable. Des notions théoriques présentées ci-dessus, les éléments suivants méritent de retenir toute l'attention :

- La VaR est un concept extrêmement utile pour mesurer l'exposition aux risques d'un portefeuille d'actifs divers. Elle mesure la perte maximale espérée pour un certain degré de confiance et un certain horizon-temps.
- Il existe trois méthodes principales pour produire une estimation de la VaR : la méthode var-covar, les simulations historiques, les simulations de Monte-Carlo.
- L'assurance de portefeuille consiste à couvrir les actifs par des options.
- La couverture consiste à utiliser des contrats à terme pour fixer la valeur de certaines variables. La formule d'évaluation générale d'un contrat futures peut être vue comme  $f = Se^{(-q+k)T} - Xe^{-rT}$
- Dans un contrat à terme, un risque de base demeure dès que la qualité de sous-jacent à couvrir ou l'horizon-temps de l'investissement dans celui-ci ne correspondent pas avec ceux de l'instrument de couverture.
- Quand un risque de base peut exister, il convient d'utiliser un ratio optimal de couverture qui minimise la variance du risque :

$$h = -\frac{\text{Cov}(\Delta S_t, \Delta F_t)}{\text{Var}(\Delta F_t)}.$$

- Les swaps sont fréquemment utilisés dans la gestion des risques de taux de change et de taux d'intérêt. Ils sont évalués comme deux jambes obligataires aux caractéristiques différentes.

## Références bibliographiques

- ALLEN F. et DOUGLAS G., *Financial Innovation and Risk Sharing*, MIT Press, 1994.
- CROUHY M. et GALAI, *Risk Management*, McGraw-Hill, 2000.
- DERMINE J. et BISSADA Y.F., *Asset & Liability Management*, Prentice-Hall, 2002.
- ESCH K. et LOPEZ, *Value At Risk : vers un Risk Management moderne*, DeBoeck Université, 1997.
- ESCH L., LOPEZ T. et KLEFFER R., *Asset et Risk Management*, DeBoeck Université, 2003.
- DOHERTY N.A., *Integrated Risk Management : Techniques and Strategies for reducing Risk*, McGraw-Hill, 2000.
- HULL J., *Options, Futures et autres actifs dérivés*, 6<sup>e</sup> éd., Pearson Education, 2007.
- JORION P., *Value-at-Risk : The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill, 2000.
- JORION P., *Financial Risk Manager Handbook*, John Wiley and Sons, 2003.
- STULZ R.M., *Risk Management & Derivatives*, Thomson, 2003.

### Commentaires

L'utilisation de produits dérivés pour la gestion des risques n'est pas nouvelle. Bon nombre de textes tendent à confirmer que ce sont les commerçants hollandais au XVII<sup>e</sup> siècle qui traitèrent les bulbes de tulipes à terme et créèrent ainsi le premier vrai marché de contrats forwards.

D'autres iront même jusqu'à dire que l'on retrouve l'idée de la gestion des risques dans l'Ancien Testament : un pharaon de l'Égypte ancienne ayant fait un étonnant rêve sur sept bovins sains dévorant sept épis de blé sains et sept bovins malades dévorant sept épis de blé malades, Joseph fut appelé pour l'interpréter. Il conclut que le rêve prédisait sept années d'abondance suivies de sept années de famine. Pour se protéger contre ce risque, le pharaon acheta et stocka de grandes quantités de blé. L'Égypte prospéra durant la famine et Joseph devint le deuxième homme le plus puissant d'Égypte.

# Problèmes et exercices

Les exercices suivants illustrent les concepts abordés précédemment. Le calcul de l'exposition VaR dans différents contextes est d'abord présenté. Ensuite, l'utilisation de certains actifs en tant qu'instruments d'immunisation, de couverture ou de protection est développée.

## La mesure des risques

### Exercice 1 Étudier un produit structuré

#### Énoncé

Vous examinez actuellement différentes propositions d'un banquier institutionnel pour le fonds de pension que vous gérez. Ces propositions impliquent chacune un certain niveau de risque. Vous connaissez bien le concept de VaR et vous vous dites qu'il serait tentant de l'appliquer pour chacun des cas de figure qu'on vous propose. Vous avez 30 000 € à investir à 6 mois. Votre degré de confiance est de 99 %. Les propositions sont les suivantes :

- a. Un investissement dans des actions ALCATEL, cotant à 12,59 €. L'action ALCATEL a une volatilité annuelle de 52 %.
- b. Vous vous dites que tout compte fait, votre investissement dans ALCATEL n'est pas isolé, en ce sens, qu'il sera ajouté à une stratégie existante qui consiste à avoir un portefeuille d'actions se comportant comme l'indice EuroStoxx50. Or, le bêta d'ALCATEL avec cet indice est de 1,92. La volatilité annuelle de l'indice est de 24 %.
- c. Un investissement dans une obligation de coupon 4,25 % à 10 ans de l'État belge. Ces obligations cotent actuellement à 99,74 % (il reste exactement 10 ans à courir) pour 1 000 € de valeur nominale. Le « rendement-à-l'échéance » de ces obligations (de 4,283 % actuellement) présente une volatilité annuelle de 9 %. La duration effective de cette obligation est de 8,35 années.
- d. Un investissement dans des call sur l'indice EuroStoxx50, de prix d'exercice 2000. L'EuroStoxx50 traite actuellement à 2 900 €. Ces options ont un prix (net) de 9 700 €, donnant droit à 10 € par point d'indice (prix = 970 € × 10 €/point). Le delta actuel de ces options (la sensibilité de leur prix par rapport à l'évolution de la valeur de l'indice) est de 0,96.

Pour chaque proposition, calculez une VaR relative.

**Solution**

- a** La valeur de  $z_c$  pour un seuil de confiance de 99 % (c'est-à-dire qu'il est supérieur à seulement 1 % des valeurs réalisables d'après l'historique) est de 2,326342. Avec 30 000 €, on peut donc acheter  $30\ 000 / 12,59 \approx 2\ 382$  actions, pour une valeur totale de 29 989,38 €. Connaissant la formule de la VaR relative, nous déduisons que :

$$\text{VaR}_{rel} = z_c \times \sqrt{T} \times \text{Montant} \times \sigma = 2,326342 \times \sqrt{0,5} \times 29\ 989,38 \times 52 \% = 25\ 652,48 \text{ € !}$$

- b** Cette fois-ci, on ne s'intéresse qu'au risque systématique d'ALCATEL. Nous devons donc ne pas considérer la volatilité totale d'ALCATEL. Nous allons utiliser la volatilité de l'indice et la relier à la variabilité d'ALCATEL (en termes de risque systématique) à travers le bêta. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{rel} &= z_c \times \sqrt{T} \times \text{Montant} \times \sigma_{\text{indice}} \times \beta_{\text{alcatel}} \\ &= 2,326342 \times \sqrt{0,5} \times 29\ 989,38 \times 24 \% \times 1,92 = 22\ 732,05 \text{ €}\end{aligned}$$

- c** Grâce à la duration, et en supposant que la structure des taux d'intérêt évolue par mouvements parallèles, nous savons que la sensibilité relative du prix d'une obligation par rapport à l'évolution des taux d'intérêt (ou du yield moyen de l'obligation) est donnée par la relation :

$$\frac{\Delta P}{P} = - \underbrace{\frac{\text{duration}}{(1+y)}}_{\text{duration modifiée}} \Delta y$$

Dès lors, comme pour le cas de l'indice, il existe un lien entre l'évolution du taux et l'évolution du rendement de la valeur des obligations. Nous pouvons donc nous fonder sur la valeur de la volatilité du taux tout en la faisant correspondre à la volatilité du prix en la multipliant par la duration modifiée. Puisque la valeur pour une obligation de 1 000 € est de 997,4 €, nous devons malheureusement nous limiter à un achat rond de 30 obligations, ce qui nous fait une valeur investie de  $30 \times 997,4 = 29\ 922$  €. Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{rel} &= z_c \times \sqrt{T} \times \text{Montant} \times \sigma_{\text{yield}} \times \frac{\text{Duration}_{\text{obligation}}}{1+y} \\ &= 2,326342 \times \sqrt{0,5} \times 29\ 922 \times 9 \% \times \frac{8,35}{(1+4,283\%)} \\ &= 35\ 470,28 \text{ € !}\end{aligned}$$

Ceci est problématique car la VaR dépasse la valeur de l'investissement. Ceci est dû au fait que le niveau de confiance est très haut et que, comme la duration est une mesure linéaire de l'impact sur le prix, la convexité du prix de l'obligation par rapport aux taux est absente du calcul. Donc, dans ce cas, la VaR maximale est le montant de l'investissement. Par contre, ceci montre aussi que, en dehors d'un investissement jusqu'à l'échéance, le risque de prix d'une obligation n'est pas si faible qu'on le croit.

- d** Nous allons reprendre le même raisonnement que pour le bêta et la duration. Cette fois, la sensibilité du prix d'une option par rapport à l'évolution du cours du sous-jacent est

représentée par le delta de l'option. Dans le modèle proposé par Black et Scholes, ce delta pour un call équivaut au  $N(d_1)$ . Cette approche est très réductrice car le prix de l'option n'est pas linéaire par rapport à l'évolution du sous-jacent et il dépend aussi d'autres facteurs. Nous savons que lorsque  $S < K$  (la valeur du sous-jacent est inférieure au prix d'exercice), la valeur du call n'est qu'une valeur temporelle et sa valeur intrinsèque  $\text{Max}(S - K, 0)$  est de 0. Le delta va donc sensiblement évoluer d'ici à l'échéance. Dans notre cas, nous ne pouvons, avec 30 000 €, acheter que 3 call à 9 700 €. Donc, voici notre VaR (calculée simplement avec le delta) :

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{rel} &= z_c \times \sqrt{T} \times \text{Montant} \times \sigma_{\text{indice}} \times \text{Delta}_{\text{option call}} \\ &= 2,326342 \times \sqrt{0,5} \times 29\,100 \times 24\% \times 0,96 = 11\,028,95 \text{ €}\end{aligned}$$

Il faut cependant faire la remarque suivante : une perte de 11 028,95 € suppose une perte de 3 676,15 € par contrat. Or, nous avons payé (et acheté) des calls à 9 700 €. Il faudra faire attention donc à ce que la VaR ne dépasse jamais la valeur de 9 700 €, puisque nous ne sommes pas tenu d'exercer absolument ces options. Nous ne les exercerons que si à l'échéance  $S > K$ . Ce calcul méritera d'être ré-estimé fréquemment puisqu'il repose sur un modèle linéaire pour un produit qui ne l'est pas du tout.

## Exercice 2 Implémenter l'approche variance-covariance

### Énoncé

Vous disposez d'un portefeuille composé des actifs suivants (on n'expliquera pas ici comment vous en êtes arrivé là) :

Actif	Description	Prix unitaire de marché	Devise
1	7 parts d'un fonds de placement indicé sur l'EuroStoxx50	1 500,00	EUR
2	2 parts d'un fonds de placement indicé sur le Dow Jones	10 000,00	USD
3	10 obligations zéro-coupon de l'État américain d'échéance 10 ans (valeur nominale : 1 000,00 \$)	650,00	USD

Le taux de change \$/€ (nombre de dollars par euro) est actuellement de 1,25. Votre devise de référence est l'euro, c'est-à-dire que votre but est de pouvoir consommer *in fine* des euros.

- a** Identifiez les sources de risque de ce portefeuille.
- b** Calculez les expositions de chacune des trois positions aux sources de risque mentionnées dans la question précédente.
- c** Les calculs d'écart-type des rendements annuels des valeurs des sources de risque ainsi que les corrélations entre elles vous sont proposés ci-dessous. Calculez la matrice de variances-covariances.

	Écart type	Corrélations			
		EuroStoxx 50	DJ	\$	US 10 ans
EuroStoxx 50	30,00 %	1,00	0,49	0,64	-0,28
DJ	20,00 %	0,49	1,00	0,80	-0,37
\$	10,00 %	0,64	0,80	1,00	-0,43
US 10 ans	9,00 %	-0,28	-0,37	-0,43	1,00

- d** Calculez la VaR hebdomadaire de ce portefeuille selon la méthode var-covar.  
**e** Quel est l'apport de chaque source de risque au VaR total ?

### Solution

- a** Les sources de risque de ce portefeuille sont les suivantes :
- une exposition au risque (marché, actions) d'évolution de l'indice EuroStoxx50.
  - une exposition au risque (marché, actions) d'évolution de l'indice Dow Jones.
  - une exposition au risque devise \$/€.
  - une exposition au risque de fluctuations des taux d'intérêt, ce qui induira une fluctuation du prix de vos obligations.
- b** Le fait de faire correspondre des positions à des expositions aux quatre sources de risque mentionnées dans la réponse **a** s'appelle un mapping. Si l'on multiplie les parts de chaque position à leur valeur de marché unitaire et que l'on s'assure qu'elles sont exprimées en euros, nous obtenons les trois montants suivants :

Position	Description	Calcul	Valeur en €
1	Parts EuroStoxx 50 :	$7 \times 1500 = 10\,500$	(33,12 %)
2	Parts Dow Jones :	$(2 \times 10\,000)/1,25 = 16\,000$	(50,47 %)
3	Obligations US :	$(10 \times 650)/1,25 = 5\,200$	(16,40 %)

Maintenant, nous devons attribuer ces valeurs à des expositions aux quatre sources de risque mentionnées en **a**. La position 1 est exposée au risque « EuroStoxx 50 », tandis que la position 2 présente une exposition au risque « Dow Jones » mais aussi « devise \$ ». Pour ce qui est de la troisième position, elle est exposée au risque « obligations US à 10 ans » ainsi que « devise \$ ». Le montant de ces expositions est tout simplement basé sur la valeur des positions dans la devise de référence, c'est-à-dire l'euro. Le tableau ou matrice suivante donne les résultats par position et par source de risque (« mapping ») tout en calculant la somme totale (de chaque colonne) exposée à chaque source :

	EuroStoxx 50	Dow Jones	\$/€	Obligation US 10 ans
Parts EuroStoxx 50 :	10 500			
Parts Dow Jones :		16 000	16 000	
Obligations US :			5 200	5 200
Total	10 500	16 000	21 200	5 200

Nous avons ainsi des expositions totales à chaque source pour ce portefeuille de trois positions.

c

Une variance ou covariance est obtenue par la multiplication des écarts-type de toutes les paires de sources de risque possibles, fois leur corrélation. Ainsi, toute variance (ou covariance) est obtenue par la multiplication suivante :

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \times \sigma_j \times \rho_{i,j}$$

En appliquant cela à toutes les paires possibles, nous avons la matrice de variances-covariances suivante (tableau 9.7).

Tableau 9.7

**Variances-covariances**

	EuroStoxx 50	DJ	\$	US 10 ans
EuroStoxx 50	0,09000	0,02940	0,01920	-0,00756
DJ	0,02940	0,04000	0,01600	-0,00666
\$	0,01920	0,01600	0,01000	-0,00387
US 10 ans	-0,00756	-0,00666	-0,00387	0,00810

d

D'après la formule de VaR relative, nous devons faire le produit de toutes les paires multiplicatives d'expositions (à partir des quatre expositions totales calculées ci-dessus) par leur variance-covariance respective de la matrice obtenue dans la question précédente. En résumant, le vecteur des expositions totales (4 valeurs) doit être multiplié une première fois par la matrice de variances-covariances, ce qui revient à sommer toutes les multiplications ligne-par-ligne, et ce colonne par colonne de la matrice de variances-covariances. Ainsi, pour la première source de risque, nous avons :

EuroStoxx 50	
$10500 \times 0,09000$	= 945,00
$16000 \times 0,02940$	= 470,40
$21200 \times 0,01920$	= 407,04
$5200 \times -0,00756$	= -39,312
Total	1 783,13

En le faisant également pour les autres colonnes de la matrice de variance-covariances, nous obtenons le vecteur de résultats suivants :

EuroStoxx 50	DJ	\$	US 10 ans
1 783,13	1 253,27	649,8	-225,86

Ensuite, il faut re-multiplier ce vecteur par celui des expositions encore une fois, et nous obtenons ainsi le tableau 9.8.

Tableau 9.8

EuroStoxx 50	
$1783,13 \times 10500$	= 18 722 844,0
$1253,27 \times 16000$	= 20 052 288,0
$649,48 \times 21200$	= 13 768 891,2
$-225,86 \times 5200$	= -1 174 493,8
Total	51 369 530,4

Cette variance totale en euros est une variance annuelle. Pour la convertir en variance hebdomadaire, il faut encore la diviser par 52 (semaines par année). Pour ensuite en obtenir un écart-type, il faut en calculer la racine carrée. Au total, cela donne :

$$\sqrt{\frac{51\ 369\ 530,4}{52}} = 993,92$$

Sachant que la valeur de  $z_c$  pour un degré de confiance de 95 % est de 1,644853, alors il faut encore multiplier 993,92 par ce dernier chiffre pour trouver la VaR hebdomadaire pour un degré de confiance de 95 %, c'est-à-dire :

$$993,92 \times 1,644853 = 1634,85$$

Pour tout changement d'horizon-temps, il suffit de multiplier ce chiffre par la racine carrée du bon ordre de grandeur ( $\times \sqrt{52}$  pour avoir la VaR annuelle, c'est-à-dire 11 789,08). Et pour tout changement de degré de confiance, il suffit de le diviser par 1,644853 et de le remultiplier par la valeur de  $z_c$  pour le degré de confiance désiré.

- e** On peut se baser sur le premier vecteur de résultats pour voir l'apport de chaque source de risque. Si l'on prend chaque valeur de ce vecteur et qu'on la divise par la volatilité totale annuelle, mais normalisée par la valeur critique de  $z_c$ , on a :

EuroStoxx 50	DJ	USD	US 10 ans
$(1783,13 / 7167,25) \times 1,644853$	$(1253,27 / 7167,25) \times 1,644853$	$(649,8 / 7167,25) \times 1,644853$	$(-225,86 / 7167,25) \times 1,644853$
0,41	0,29	0,15	-0,05

En multipliant ensuite chaque valeur par celle correspondante dans le vecteur des expositions, on obtient finalement le montant de la VaR qui peut être attribué à chaque source de risque :

$10500 \times 0,41 = 4296,81$	(36,45 %)
$16000 \times 0,29 = 4601,91$	(39,04 %)
$21200 \times 0,15 = 3159,90$	(26,80 %)
$5200 \times -0,05 = -269,54$	(-2,29 %)
Total 11 789,08	(100 %)

# Comment gère-t-on les risques ?

## Exercice 3 Combiner des options

### Énoncé

M. Loiseau est actif sur le marché du café. Il y prend régulièrement des positions dans le but de bénéficier de mouvements à la hausse ou à la baisse. M. Loiseau est un spéculateur, certes, mais un spéculateur averti. Il connaît très bien les produits dérivés et la possibilité de les combiner afin d'obtenir des profils de stratégies ne comprenant pas forcément beaucoup de risques. Voici ce qu'il observe aujourd'hui sur le New York Board of Trade :

Prix du café (spot)	0,65 \$/lbs
Volatilité annuelle implicite observée	31 %
Taux d'intérêt à trois mois	1 %
Options à disposition	Options put et call européennes à trois mois
Taille d'un contrat	37 500 lbs. = 17 010 kg

- a** Quelle est la taille, en \$, d'un contrat pour acheter le sous-jacent au prix actuel ?
- b** Définissez quatre possibilités de stratégies pour M. Loiseau, profils de pertes et profits à l'appui, dans le cas où celui-ci n'a pas de direction privilégiée mais où il anticipe toutefois une volatilité qui restera très élevée ?
- c** Comparez les stratégies en terme d'exposition au risque du prix du café.
- d** En supposant que vous puissiez appliquer la formule de Black-Scholes directement pour l'évaluation d'options sur le prix du café, quelles seraient les stratégies les plus coûteuses ?
- e** Sur quelle base faites-vous votre choix final ?
- f** À quel genre de limitation est-on ici confronté ?

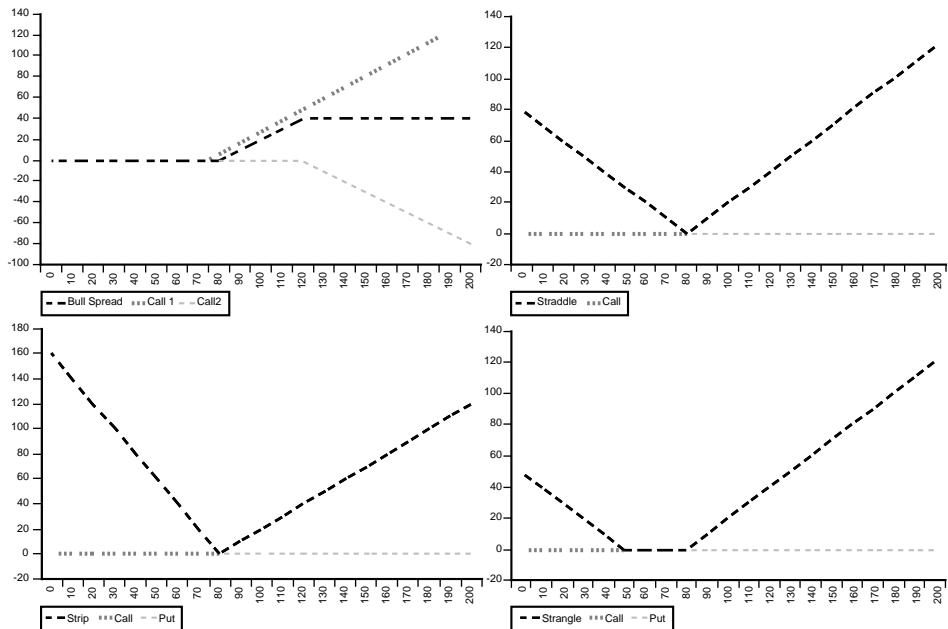
### Solution

- a** La taille d'un contrat en valeur monétaire peut être estimée à l'aide de la taille du contrat spécifiée par le descriptif ainsi qu'avec le cours actuel du sous-jacent. Ainsi, la taille de ce contrat est aujourd'hui de :

$$\begin{aligned}\text{Taille du contrat (en USD)} &= \text{Taille du contrat (unités)} \times \text{Prix par unité} \\ &= 37\,500 \text{ lbs} \times 0,65 \text{ USD/lb} \\ &= 24\,375 \text{ USD}\end{aligned}$$

- b** Les quatre graphiques suivants (voir figure 9.5) montrent les profils obtenus pour quatre stratégies différentes et ce, sans prise en compte de leur coût, étant donné qu'on s'intéresse d'abord à l'exposition résiduelle qu'elles nous proposent. D'autres stratégies connues existent (Butterfly spread, Seagull, Cilindres, etc.) mais nous n'en montrons ici que quatre.

Figure 9.5



- Un bull-spread : achat d'un call et vente d'un call, le premier ayant un prix d'exercice plus élevé. Dans le cas présent, nous avons choisi des prix d'exercice de 80 et 120, en supposant qu'ils soient disponibles sur le marché.
- Un long straddle, c'est-à-dire un straddle misant à la hausse. Il s'agit de combiner l'achat simultané d'un call et d'un put à des conditions identiques. De nouveau, nous avons choisi un prix d'exercice out-of-the-money.
- Un long strip. Les strips sont spéciaux en ce sens qu'ils combinent un double put avec un call de mêmes caractéristiques.
- Le strangle présente le même profil que le straddle mais à ceci près qu'il laisse une zone neutre autour du prix spot actuel.

- c** En cas d'achat de ces stratégies les quatre profils ne présentent pour ainsi dire aucun risque pour M. Loiseau, mis à part la valeur des primes payées pour ces combinaisons. Elles sont toutes haussières. On peut dire est que le bull spread proposé contient simplement un coût d'opportunité, c'est-à-dire celui de refuser une partie de la hausse si le prix du café venait à atteindre un niveau supérieur à 1,20 \$/lb.
- d** En appliquant directement la formule de Black-Scholes aux parties de chaque combinaison, nous obtenons les résultats suivants (voir tableau 9.9).

On s'aperçoit avec ce tableau que, suivant les valeurs du prix d'exercice, nous pouvons obtenir des valeurs très élevées pour certaines stratégies. C'est surtout le cas pour toutes les stratégies cumulant des options in-the-money et donc relativement chères initialement.

Tableau 9.9

**Prix de différentes stratégies optionnelles d'après certaines valeurs de  $K$  (prix d'exercice)**

Stratégie	Nb	Option	Prix d'exercice	Valeur	Valeur d'un contrat	Valeur en % d'un contrat évalué au prix du sous-jacent
<b>Bull spread</b>	1	Call	80	0,4824	180,89	0,74 %
	-1	Call	120	0,0001	0,05	0,00 %
			Total	0,4825	180,94	0,74 %
<b>Long straddle</b>	1	Call	80	0,4824	180,89	0,74 %
	1	Put	80	15,2826	5 730,99	23,51 %
			Total	15,7650	5 911,88	24,25 %
<b>Strip</b>	1	Call	80	0,4824	180,89	0,74 %
	2	Put	80	15,2826	5 730,99	23,51 %
			Total	31,0476	11 642,87	47,77 %
<b>Strangle</b>	1	Call	80	0,4824	180,89	0,74 %
	1	Put	50	0,1576	59,10	0,24 %
			Total	0,6400	240,00	0,98 %

Le strangle permet d'obtenir un profil proche des strips et des straddles pour autant que l'on puisse espérer une certaine volatilité des cours sur le marché. Le fait de vouloir profiter de toute la hausse dès le premier mouvement de marché rend la stratégie très chère. Pour ce qui est du spread, la vente du call à 120 ne permet pas vraiment de rendre la stratégie moins chère car le prix d'exercice est visiblement difficile à atteindre même en cas de forte volatilité.

De manière générale, la volatilité actuelle est intégrée dans les prix. À moins d'attendre une volatilité encore plus forte, les prix reflètent précisément l'avantage attendu de chaque stratégie d'après les conditions actuelles. D'où le fait que les options sont assez chères dès le moment où le risque est très limité et les gains potentiels, assez élevés. On rappellera ici que ces prix sont obtenus à partir de relations d'arbitrage qui interdisent tout profit anormal sans risque.

- e** Le choix dépend avant tout des espérances de volatilité effective de M. Loiseau et des prix des stratégies. *A priori*, le straddle est bidirectionnel (des gains sont possibles à la hausse comme à la baisse) et peu cher. Le spread est légèrement moins cher mais il suppose que l'on fasse une hypothèse de hausse (pour le bull spread) ou de baisse (pour le bear spread).
- f** La taille minimale du contrat (37 500 lbs.) impose une limitation sur le fractionnement de l'investissement de M. Loiseau tout en définissant un levier sur une base de 24 375 \$.

## Exercice 4 Réaliser des arbitrages à l'aide de contrats à terme

### Énoncé

Nous sommes le 21 janvier. Il est 20 h. M. Laiglon, trader à la Commodity Trading Company (Comtrade), souhaite, avant de quitter son bureau, s'assurer qu'aucune opération d'arbitrage n'est possible. Son bonus de fin d'année est lié aux profits qu'il peut générer et il est donc très motivé pour exploiter toute possibilité qui existerait. M. Laiglon est chargé de la gestion des contrats sur le zinc. Le zinc est un métal dont la possession ne procure aucun revenu. Supposons, en outre, qu'il ait la propriété merveilleuse de n'entraîner aucun coût de stockage. Les positions de M. Laiglon sont les suivantes :

- Une position courte sur cinq contrats forward de 10 tonnes chacun venant à échéance le 21 avril et conclus à un prix de livraison de 1 250 \$/tonne.
- Une position longue sur dix contrats forward de 10 tonnes chacun venant à échéance le 21 juillet et conclus à un prix de livraison de 1 200 \$/tonne.

En consultant son écran Reuter, M. Laiglon constate que les prix spots et forward du zinc s'établissent comme suit :

Échéance	Cours (\$/tonne)
Spot	1 200
21 avril	1 218
21 juillet	1 225

Il voit, par ailleurs, que le taux d'intérêt (continu) sur le marché US est de 5 % par an.

- a** Que doit faire M. Laiglon pour bloquer son résultat sur ces contrats venant à échéance en avril ?
- b** Calculez le prix à terme du contrat échéance avril en l'absence d'opportunités d'arbitrage. Que conseilleriez-vous à M. Laiglon ?
- c** Quelle est la valeur aujourd'hui des contrats venant à échéance en avril ?
- d** Quelle décision devrait prendre M. Laiglon concernant les contrats venant à échéance en juillet ?

### Solution

- a** Comtrade est vendeur, à l'échéance d'avril, de 50 tonnes de zinc à un prix de livraison de 1 250 \$/tonne. Le prix à terme coté sur le marché pour cette échéance est de 1 218 \$/tonne. M. Laiglon pourrait donc clôturer sa position en achetant à terme à échéance avril 50 tonnes de zinc à 1 218 \$/tonne ce qui lui permettrait de réaliser en avril un profit de :  $50 \times (1250 - 1218) = 1600 \$$ .
- b** En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le prix à terme devrait être égal à la valeur future du prix spot (compte tenu de l'hypothèse que le zinc ne génère aucun revenu et n'entraîne aucun coût de stockage) :  $F = Se^{rT} = 1200e^{0,05 \times 0,25} = 1215,09 \$$ .

Nous constatons donc que le prix coté sur le marché (1 218 \$) est supérieur au prix en l'absence d'arbitrage. Autrement dit, un achat à terme synthétique (un achat au comptant couplé à un emprunt) est meilleur marché qu'un achat à terme au prix coté sur le

marché. Plutôt que d'acheter à terme au prix coté sur le marché, M. Laiglon doit réaliser un achat à terme « synthétique » pour aboutir à une position « cash and carry ». Pour cela, il procède ainsi :

- Achat de 50 tonnes de zinc au comptant et stockage (il prend une position longue sur le zinc).
- Emprunt de la somme nécessaire à la transaction.

Étant vendeur à terme, M. Laiglon utilisera le zinc stocké pour exécution des contrats de vente à terme. Il aboutira ainsi au résultat suivant :  $50 \times (1250 - 1215,09) = 1745 \$$ . Notons qu'il ne doit pas limiter sa position aux cinq contrats initiaux. Il pourrait accroître son profit en achetant un volume de zinc plus important (financé par emprunt) et en revendant ce surplus à terme au prix coté de 1218 \$/tonne. Il réalisera ainsi un profit d'arbitrage (en avril) de 2,91 \$ ( $1218 - 1215,09$ ) par tonne additionnelle.

- c** La valeur d'un contrat à terme par tonne de zinc ( $f$ ) est égale à la différence entre le prix spot et la valeur actuelle du prix de livraison :  $1200 - 1250e^{-0,05 \times 0,25} = -34,47 \$$ .

Mais Comtrade a une position courte sur les contrats venant à échéance en avril. Leur valeur est donc de  $50 \times 34,47 = 1723,61 \$$  ! Il est important de remarquer que cette valeur est aussi égale à la valeur actuelle du résultat que pourrait dégager Comtrade en mettant en place une position « cash and carry », soit  $1723,61 \$ = 1745 \$ \times e^{-0,05 \times 0,25}$ .

- d** Comtrade est acheteur, à l'échéance de juillet, à un prix de livraison de 1200 \$/tonne. Le prix coté étant de 1225 \$/tonne, Comtrade pourrait vendre à terme les 100 tonnes de zinc à ce prix et s'assurer un résultat égal à :  $100 \times (1225 - 1200) = 2500 \$$ . En l'absence d'arbitrage, le prix à terme d'un contrat venant à échéance en juillet devrait être :  $F = Se^{rT} = 1200e^{0,05 \times 0,50} = 1230,38 \$$ .

Le prix coté sur le marché est inférieur au prix à terme en l'absence d'arbitrage. M. Laiglon devrait donc réaliser la vente à terme par la voie « synthétique » et se constituer ainsi une position de « reverse cash and carry ». Pour cela, il devrait :

- Emprunter 100 tonnes de zinc avec un engagement de les rendre en juillet (il prend une position courte sur le zinc) et les vendre au comptant.
- Placer le produit de vente.

Étant acheteur à terme, M. Laiglon utilisera le zinc livré en exécution des contrats de l'achat à terme pour rembourser le zinc emprunté. Il aboutira ainsi au résultat suivant :  $100 \times (1230,38 - 1200) = 3038 \$$ .

Notons que la valeur actuelle de montant est égale à la valeur de marché des contrats.

## Exercice 5 Utiliser des contrats à terme sur matières premières

### Énoncé

Votre budget étant particulièrement grevé par une consommation obsessionnelle de chocolat, vous décidez tout de même d'essayer de comprendre un peu mieux le marché du cacao et des contrats futures sur cette denrée. Vous vous apercevez ainsi que le prix spot du cacao de qualité « Malaysian 110 » le 16 janvier 2004 est de 1 622 \$ par tonne métrique. En regardant de près d'autres données de marché, vous observez que :

- Le taux d'intérêt continu annualisé est de 2 %.
- Le convenience yield actuellement traité sur le marché est de 18 %.
- Le contrat futures sur cacao à trois mois cote à 1 597 \$.
- Les coûts de stockage moyens sont estimés à 10 \$ par mois et par tonne.

- a** Quel est le prix théorique du futures à trois mois sur cacao ?
- b** En regardant le prix de marché de ce même contrat futures, expliquez comment vous pouvez en profiter. Détaillez vos calculs et expliquez clairement votre démarche.
- c** Si maintenant on vous disait que la différence constatée précédemment n'est rien d'autre qu'une appréciation différente du convenience yield pour cette qualité-là de cacao d'après les études d'offre et de demande faites à trois mois, à combien se monterait ce taux ?

### Solution

- a** En utilisant la formulation suivante  $F_{0,3 \text{ mois}} = S_0 e^{(r-y)T} + k_0^S$  et en faisant l'hypothèse que les coûts de stockage sont tous payés *in fine* sur la base du nombre de mois écoulés, nous obtenons un prix théorique du futures de

$$F_{0,3 \text{ mois}} = 1622 e^{(2\%-18\%) \frac{3}{12}} + 30 = 1588,40 \text{ $.}$$

- b** Le prix de marché du futures étant de 1 597 \$, un profit d'arbitrage de  $1597 - 1588,40 = 8,60$  \$ devrait pouvoir être réalisé. Un arbitrage est véritablement hors risque s'il n'exige aucun investissement au temps 0 (autofinancé) et qu'il génère avec certitude un profit strictement positif à l'échéance.

Voici les opérations à effectuer au temps 0 et leur déroulement trois mois plus tard :

En  $t = 0$  :

- achat du cacao spot : -1622 \$
- emprunt pour l'achat du cacao : +1622 \$
- vendre le contrat futures : 0
- investissement initial de : 0

Trois mois plus tard :

- liquidation du contrat futures :  $1597 \$ - S_T$
- valeur du cacao en stock :  $S_T$
- coûts de stockage : -30 \$
- coûts de financement :  $-1622 \times 1,005 - 1630,13$
- gains implicites liés à la présence de l'actif : 71,73 \$

$$(1622 \times \exp[rT]) \times (1 - \exp[-yt])$$

Profit d'arbitrage sans risque : 8,60 \$

- c** Il suffit de reprendre la même formule que dans la réponse **a** et de la remanier de manière à isoler le taux  $y$  :

$$\begin{aligned}
 F_{0,3 \text{ mois}} &= S_0 e^{(r-y)(T-t)} + k_0^S \\
 \rightarrow \left( \frac{F_{0,3 \text{ mois}} - k_0^S}{S_0} \right) &= e^{(r-y)(T-t)} \\
 \rightarrow \frac{1}{T-t} \ln \left( \frac{F_{0,3 \text{ mois}} - k_0^S}{S_0} \right) &= r - y \\
 \rightarrow y &= r - \frac{1}{T-t} \ln \left( \frac{F_{0,3 \text{ mois}} - k_0^S}{S_0} \right) = 2\% - 4 \ln \left( \frac{1.597 - 30}{1.622} \right) = 15,80\%
 \end{aligned}$$

Cette sous-question montre combien l'appréciation de ce convenience yield rend sensible le prix du futures, et qu'il n'est pas évident de se rendre compte à quel point l'opportunité d'arbitrage est bien réelle. Les convenience yields sont d'ailleurs très élevés pour les futures sur cacao. Ce taux est plutôt de l'ordre de 2 %-3 % pour l'argent par exemple.

## Exercice 6 Se couvrir à l'aide de contrats à terme sur indice boursier

### Énoncé

Vous possédez un portefeuille contenant trois titres faisant partie de l'indice DJ Euro Stoxx 50 :

Titre	Prix au 15 janvier	Nombre	$\beta$ calculé le 15 janvier 2004 (par rapport à l'Euro Stoxx 50)	Dividende attendu
Fortis	18,21	650	1,15	0,66 (18 juin 2003)
Groupe Danone	132,60	200	0,27	0
Alcatel	13,73	850	0,92	2,30 (6 mai 2003)

Vous savez que vous devrez liquider le portefeuille le 15 juin 2004. Craignant une éventuelle baisse du marché français au cours des prochains mois, vous envisagez de couvrir ce portefeuille avec des contrats futures sur l'indice Euro Stoxx 50 avec échéance le 25 juin 2004. Le prix de ce contrat est de 2 842 €. La valeur de l'indice au comptant est, le 15 janvier 2004, de 2 824,39 tandis que la taille du contrat est 10 € par point d'indice.

- a** Calculez le nombre optimal de contrats à acheter ou vendre pour couvrir votre portefeuille.
- b** Vous faites l'hypothèse des données de marché ou résultats suivants pour le 15 juin 2004 : +6% sur votre portefeuille, l'indice cote à 2 940 et le futures à 2 960. En utilisant le

**Solution**

nombre de contrats trouvé à la question précédente, estimez le résultat espéré de votre stratégie le 15 juin 2004 ?

- c** Est-ce que votre stratégie vous conduit nécessairement à une couverture parfaite ? Dans le cas contraire, montrez chiffres à l'appui les sources principales des différences par rapport à une couverture parfaite.

**a**

Dans le cas présent, notre hedge ratio est le bêta du portefeuille, puisque nous ne pouvons pas faire l'hypothèse d'une sensibilité de 1 par rapport à l'indice et donc par rapport au futures. La valeur de ce portefeuille est de :

$$\begin{aligned} 18,21 \times 650 + 132,60 \times 200 + 13,73 \times 850 &= 11\,836,50 + 26\,520,00 + 11\,670,50 \\ &= 50\,027,00 \text{ €} \end{aligned}$$

Le bêta moyen pondéré de ce portefeuille est de :

$$\frac{11\,836,50 \times 1,15 + 26\,520,00 \times 0,27 + 11\,670,50 \times 0,92}{50\,027,00} = 0,6298$$

Pour déterminer le nombre naïf de contrats futures, il suffit de diviser le montant de notre position à couvrir par la taille d'un contrat. Or, dans le cas présent le montant à couvrir est exprimé en € tandis que la taille du contrat futures est exprimée en € par point d'indice. Nous devons donc exprimer tout d'abord cette taille en €. La valeur du portefeuille est de 50 027 € et :

$$\begin{aligned} \text{taille du futures (EUR)} &= \text{EUR/point d'indice} \times \text{valeur du futures} \\ &= 10 \text{ EUR/point d'indice} \times 2842 \\ &= \text{EUR } 28\,420 \end{aligned}$$

Ce qui nous fait un ratio naïf de couverture de :

$$\frac{S_t}{F_{t,T} \times \text{taille}} = \frac{50\,027}{28\,420} = 1,7603$$

Mais, puisque la couverture ne peut pas être parfaite, nous devons modifier ce ratio en appliquant le bêta, à savoir :

$$\begin{aligned} \text{nb. de contrats} &= h^* \times \frac{V_t}{F_{t,T} \times \text{taille}} = \beta \times \frac{V_t}{F_{t,T} \times \text{taille}} \\ &= \frac{\text{Cov}(\Delta V \%, \Delta F \%)}{\text{Var}(\Delta F \%)} \times \frac{V_t}{F_{t,T} \times \text{taille}} \\ &\approx \hat{\beta} \times \frac{V_t}{F_{t,T} \times \text{taille}} \\ &= \frac{\text{Cov}(\Delta V \%, \Delta I \%)}{\text{Var}(\Delta I \%)} \times \frac{V_t}{F_{t,T} \times \text{taille}} \\ &= \frac{\text{Cov}(\Delta S \%, \Delta I \%)}{\text{Var}(\Delta I \%)} \times \frac{I_t}{F_{t,T}} \times \frac{Q}{\text{taille}} \\ &= 0,6298 \times \frac{50\,027}{28\,420} = 1,1087 \end{aligned}$$

Cette démonstration revient à dire que, dans le cas des actifs financiers, on s'intéresse davantage à la covariance des rendements qu'à celle des prix car c'est sur les premiers que nous faisons en général l'hypothèse de normalité. On décide de vendre un contrat futures sur l'Euro Stoxx 50.

b

Voici le détail du résultat :

- *Dividendes reçus* : en multipliant le nombre d'actions par les dividendes attendus et en faisant l'hypothèse que ce sont effectivement les dividendes reçus, nous avons un total de 2 384 €
- *Gain/perte sur le sous-jacent* : l'appréciation de 6 % nous donne un gain de  $50\,027 \times 6\% = 3\,001,62$  €.
- *Gain/perte sur le futures* :  $(2\,842 - 2\,960) \times 10 = -1\,180$  €.
- *Total* : 4 205,62 €.

c

On voit bien dès le départ que nous ne pourrons jamais prétendre avoir une situation de hedge parfait. Nous sommes loin d'avoir un portefeuille bien indexé, notre horizontemps diffère de celui du futures et les dividendes attendus ne sont pas connus avec certitude. Bref, on ne peut pas éliminer le risque avec un hedge incertain. Expliquons la différence constatée :

- *La mobilité du bêta*. Notre calcul de ratio de couverture repose sur l'hypothèse que le bêta utilisé est constant et représente un lien exact avec l'indice. Or, la variation sur le portefeuille est de  $50\,027 \times 6\% = 3\,001,62$  €. Le résultat sur l'instrument de couverture est de  $-1,1087$  contrat  $\times$  taille de  $10 \times (2\,940 - 2\,824,39) = -1\,281,77$  €, soit un total de 1 719,85 €.
- *Le problème des arrondis*. Nous avons vendu un contrat futures à la place de 1,1087 contrat. Cela fait une différence d'arrondis de 0,1087 contrat sur une variation du prix du futures de  $(2\,960 - 2\,842) \times 0,1087$  contrat  $\times$  taille de  $10 = 128,27$  €.
- *Le risque ou l'évolution de la base*. La base à  $t = 0$  est de  $2\,842 - 2\,824,39 = 17,61$  €. Au 15 juin 2004, elle devrait être de  $(2\,960 - 2\,940) = 20$  €, pour une différence totale de  $-1,1087$  contrat  $\times$  taille de  $10 \times (20 - 17,61) = -26,50$  €.
- *Le montant des dividendes reçus*. Le montant reçu est de 2 384 €. Cela fait bien un total de 4 205,62 €.

## Exercice 7 Mettre en place une couverture à l'aide de futures sur obligation notionnelle

### Énoncé

Lynda Zarate gère, pour le compte des Assurances universelles (ASU) un portefeuille d'obligations d'État d'une valeur nominale de 1,5 milliard d'euros. La valeur de marché de ce portefeuille s'élève à 1,65 milliard et la duration modifiée est de neuf années. Elle souhaite couvrir son risque d'intérêt et a demandé conseil à M. d'Argent, le sympathique banquier de la Banque Ducoin. Ce dernier suggère d'utiliser le contrat BUND traité sur la Deutsche Börse et qui a les caractéristiques suivantes :

- unité de cotation : 100 000 € de valeur nominale ;
- coupon : 6 %.

Le contrat venant à échéance dans six mois cote actuellement 115,60 €. Sa duration modifiée est de neuf années.

- a** Quelle perte pourrait subir les ASU en cas de hausse des taux d'intérêt de 1 % ?
- b** Combien de contrats futures devraient-elles acheter ou vendre pour couvrir la position ?
- c** Vérifiez l'efficacité de la couverture en cas de hausse des taux d'intérêt de 1 %.

**Solution**

- a** Les ASU sont confrontées à un risque de taux d'intérêt. La duration du portefeuille étant de neuf ans, un accroissement des taux de 1 % devrait entraîner une perte d'environ 9 % sur la valeur du portefeuille soit 148,5 millions d'euros (rappelez-vous la formule  $\partial P/P = -(D/(1+r))\partial r$  du chapitre 6). L'objectif de Lynda est de compenser cette perte par un gain sur une position en futures sur obligation notionnelle.
- b** Pour couvrir sa position, Lynda devrait vendre des contrats futures. En effet, une hausse des taux conduira à une baisse du prix du futures et donc à un profit sur les positions courtes. Elle dégagera ainsi un profit en cas de hausse des taux d'intérêt qui compensera la perte sur son portefeuille. Si la variation du prix du futures ( $\Delta F$ ) est égale à celle du prix moyen des obligations détenues par les ASU ( $\Delta S$ ), celles-ci devraient choisir un ratio de couverture égal à l'unité, c'est-à-dire un montant nominal égal à la valeur nominale de la position à couvrir. Le nombre de contrats à vendre est donc :

$$n = \frac{1\ 500\ 000\ 000}{100\ 000} = 15\ 000.$$

- c** Le contrat venant à échéance dans six mois cote actuellement 115,60 € et la duration est de neuf ans. Une hausse des taux de 1 % provoquerait une baisse du cours d'environ 9 % soit -10,04 €. Cette variation correspond à une baisse de 1 004 points de base. Or, le tick du contrat est de 10 €. En conséquence, la variation entraînera un gain pour les ASU (qui ont pris une position courte) de 10 040 € par contrat. Multiplié par le nombre de contrats (15 000), cela conduit à un gain sur la position en futures de 156 millions d'€ qui compense ainsi la perte de 148,5 millions sur la position à couvrir.

## Exercice 8 Mettre en place une couverture à l'aide de futures sur taux d'intérêt

**Énoncé**

Nous sommes en janvier. La Société automobile du Sud (SAS) prévoit d'emprunter 2 millions d'euros de fin juin à fin septembre. Elle s'interroge sur la méthode adéquate pour couvrir le risque d'intérêt. Elle a traditionnellement réalisé des opérations à terme. Elle souhaite cependant analyser les possibilités de couverture offertes par le contrat Euribor traité sur Euronext. M. Delco, le directeur financier, a consulté le site Web d'Euronext pour connaître les caractéristiques du contrat et les conditions de marché. Malheureusement, ses connaissances en matière de futures sont limitées et il a donc décidé de consulter M. d'Argent, son banquier.

Le contrat Euribor est fondé sur l'Euribor trois mois. Un contrat porte sur 1 million d'euros. Le cours d'un contrat à échéance juin est de 97,80 €. Le contrat est liquidé en espèces : le cours de liquidation est égal à : 100 - l'Euribor trois mois du jour d'échéance.

- a** Quel est le taux d'intérêt que la SAS pourrait s'assurer sur son placement en prenant une position en IRF ?
- b** Quelle position sur futures devrait prendre la SAS pour couvrir sa position ?
- c** Vérifiez l'efficacité de la couverture pour des valeurs du taux Euribor trois mois de 2 % et 3 % à fin juin.

### Solution

- a** Le cours d'un IRF est égal à  $100 - \text{taux}$ . Le cours de 97,80 € signifie donc que M. Delco devrait pouvoir assurer un taux d'intérêt de  $2,20\% = ([100 - 97,80]/100)$  sur le placement de 2 millions d'euros qu'il réalisera de fin juin à fin septembre.
  - b** Pour couvrir sa position, la SAS doit acheter des IRF. Le risque auquel est soumise la société est celui d'une baisse des taux qui conduirait à une rémunération moindre de son placement. Cette perte devrait alors être compensée par un gain sur la position en IRF. Or, une baisse des taux entraînerait une hausse du cours de l'IRF (souvenez-vous qu'il est calculé en soustrayant le taux de 100). En conséquence, en étant longue sur des contrats IRF, la SAS réalisera un profit en cas de hausse des taux.
- Le nombre de contrats est égal à la position à couvrir (2 millions d'euros) divisée par la taille d'un contrat (1 million d'euros). Il faudrait donc acheter deux contrats.
- c** Vérifions l'efficacité de la couverture. Supposons que le taux Euribor soit 2 % à l'échéance.
- intérêts perçus sur le placement :  $2000\,000 \times 2\% \times 3/12 = 10\,000 \text{ €}$ ;
  - cours du futures à l'échéance :  $100 - 2 = 98 \text{ €}$ ;
  - variation (en points de base) :  $(98 - 97,80) \times 10\,000 = 20 \text{ points de base}$ ;
  - gain ou perte par contrat : variation en point de base  $\times$  tick =  $20 \times 25 = +500 \text{ €}$ ;
  - gain ou perte totale sur futures : nombre de contrats  $\times$  gain ou perte par contrat =  $2 \times 500 = +1\,000 \text{ €}$ ;
  - résultat total : intérêts perçus sur le placement + gain ou perte total sur futures =  $10\,000 + 1\,000 = 11\,000 \text{ €}$ ;
  - taux d'intérêt : résultat total/montant placé  $\times 12/3 = (11\,000 / 2\,000\,000) \times 4 = 2,20\%$ .

Le tableau qui suit montre que le résultat est identique quelle que soit l'évolution du taux d'intérêt.

Taux Euribor trois mois	2 %	3 %
Intérêts perçus	10 000	15 000
Cours du futures	98	97
Variation (pb)	+20	-80
Résultat par contrat	500	-2 000
Résultat sur futures	+1 000	-4 000
Résultat total	+11 000	+11 000
Taux d'intérêt	2,20 %	2,20 %

## Exercice 9 Évaluer un swap de taux d'intérêt

### Énoncé

Les compagnies AlphaCorp et BetaLink ont obtenu les conditions (taux d'intérêt annuels) suivantes pour un prêt de 5 millions d'euros sur dix ans :

	Taux fixe	Taux flottant
AlphaCorp	7,0 %	Libor +0,5 %
BetaLink	8,8 %	Libor +1,5 %

Supposez que les deux compagnies ont chacune la nécessité imminente de s'endetter à concurrence de 5 millions d'euros. De plus, BetaLink préférerait s'endetter au taux fixe alors que AlphaCorp désirerait payer des intérêts nets au taux flottant sur son opération de financement.

- a** Pouvez-vous déceler une opportunité d'arbitrage dans cette situation ? Si oui, laquelle ? À combien se monte-t-elle ?
- b** En tant qu'intermédiaire, que proposeriez-vous aux directions financières des deux compagnies de manière à réduire leur coût d'endettement tout en vous assurant une prime annuelle nette de 0,2 % ? (L'opération devrait en outre paraître aussi attractive à AlphaCorp qu'à BetaLink.)
- c** Quels sont le(s) risque(s) encouru(s) par les deux compagnies ? Quel(s) risque(s) assumez-vous en tant qu'intermédiaire ?
- d** Que se passerait-il s'il n'y avait pas d'intermédiaire entrant dans la transaction, au niveau du coût et des risques pour les deux contreparties ? Qu'en penseriez-vous ?

### Solution

- a** Il y a une opportunité d'arbitrage en ce sens que la différence de taux n'est pas la même sur les deux marchés. En effet, on voit que :

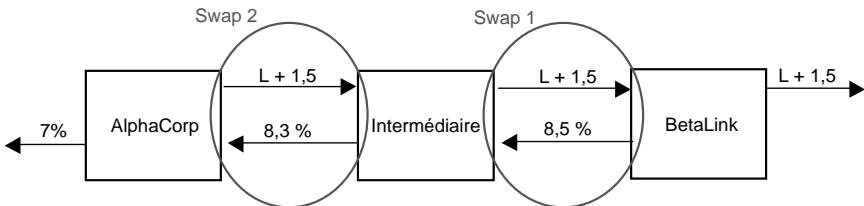
	Taux fixe	Taux flottant
AlphaCorp	7,0 %	Libor +0,5 %
BetaLink	8,8 %	Libor +1,5 %
Différence	-1,8 %	-1 %

Dès lors, il y a un avantage à arbitrer de  $1,8\% - 1\% = 0,8\%$ . Cela veut dire qu'AlphaCorp a un avantage relatif à emprunter sur le marché fixe, ce qui intéresse BetaLink qui veut justement emprunter au taux fixe ! BetaLink peut emprunter au taux flottant (relativement plus favorable pour lui) et changer ce flux en taux fixe grâce au swap de taux d'intérêt.

- b** Avec l'existence d'un intermédiaire, la proposition peut être résumée par la figure 9.6 (les flèches indiquent le sens du paiement). Il y a 0,8 % à répartir de la manière suivante : 0,2 % pour l'intermédiaire et 0,3 % pour chaque partie. L'intermédiaire va ainsi conclure un swap avec chacune d'elles :

Figure 9.6

**Swap de taux d'intérêt**



- Swap 1 : BetaLink emprunte au taux flottant d'abord. En reportant « Libor +1,5% » sur la flèche supérieure du cercle « Swap 1 », on en déduit très rapidement que BetaLink doit payer 8,5 % pour avoir un avantage de 0,3 % par rapport aux 8,8 % qu'il obtiendrait s'il allait directement sur le marché du taux fixe. La cotation sur le marché se faisant par rapport au Libor, cela revient à dire que BetaLink conclut un swap où elle paie 7 % contre Libor.
- Swap 2 : AlphaCorp emprunte d'abord au taux fixe. « Libor +1,5% » est reporté sur la flèche supérieure du « Swap 2 », et sachant que l'intermédiaire doit garder une marge de 0,2 %, nous observons un paiement de 8,3 % (fixe) à AlphaCorp, ce qui signifie qu'AlphaCorp paie dans ce swap 6,8 % contre Libor.

**c** Les risques encourus par les deux parties sont éventuellement des risques de taux d'intérêt :

- AlphaCorp se retrouve exposée au taux flottant (risque de hausse). Mais cela correspond à ses désiderata. Ignorant quelles sont les autres obligations de la société en interne, nous ne savons pas à ce stade si elle désirait du flottant pour contrer des revenus qu'elle recevait également au taux flottant. ?
- BetaLink ne conserve, sur cette transaction, aucun risque de taux sur ses paiements d'intérêt futurs.

L'intermédiaire reçoit 0,2 % de marge mais subit un risque de crédit des contreparties. En effet, son rôle est de continuer à assumer les paiements si une des parties venait à faire défaut, puisque les contrats ont été passés par chaque partie avec lui. Il ne craint aucun risque de taux pour autant qu'aucune contrepartie ne fasse défaut.

**d** Chaque partie gagnerait 10 points de base supplémentaires (100 points de base = 1 %) mais assumerait par la même occasion le risque de défaut. Or, si l'intermédiaire peut bénéficier d'une certaine diversification de son portefeuille de crédit, il n'en va pas forcément de même avec les contreparties.

## Exercice 10 Évaluer un swap de taux de change

**Énoncé**

Bonaventure SA voudrait emprunter des couronnes norvégiennes (KN) à un taux d'intérêt fixe, tandis que Costandina Inc. a besoin de ringgits malais (RM). Les montants requis par les deux sociétés sont rigoureusement les mêmes au taux de change actuel. Voici les taux d'intérêt cotés pour chacune d'entre elles :

- a** Pouvez-vous déceler une opportunité d'arbitrage dans cette situation ? Si oui, laquelle ? À combien se monte-t-elle ?
- b** En tant qu'intermédiaire, que proposeriez-vous aux directions financières des deux compagnies de manière à réduire leur coût d'endettement tout en vous assurant une

	Ringgit	Couronnes norvégiennes
Bonaventure SA	3,5 %	9 %
Costandina Inc.	5,5 %	10 %

prime annuelle nette de 0,5 % ? (L'opération devrait en outre paraître aussi attractive à Bonaventure SA qu'à Costandina Inc.)

- c** Quels sont le(s) risque(s) encouru(s) par les deux compagnies ? Quel(s) risque(s) assumez-vous en tant qu'intermédiaire ?
- d** Que se passerait-il s'il n'y avait pas d'intermédiaire entrant dans la transaction, au niveau du coût et des risques pour les deux contreparties ? Qu'en penseriez-vous ?
- e** Bonaventure SA voudrait savoir quelle est la valeur du swap avec l'intermédiaire alors qu'il reste trois ans à courir pour le swap. Pour cela, voici les données supplémentaires :
  - Supposez que les structures des taux d'intérêt soient uniformes en Malaisie comme en Norvège et qu'elles se situent à 3,5 % et 9 % d'après la structure de la courbe zéro-coupon obtenue à partir de celle des taux swaps (ici plate) de ces deux marchés.
  - Le taux de change actuel est de 1 ringgit = 2,57 couronnes norvégiennes.
  - Les montants échangés dans les deux devises sont 10 millions de ringgits et 24 millions de couronnes norvégiennes.
  - Les paiements sont échangés chaque année (un vient juste d'avoir lieu).
  - Supposez que tous les taux d'intérêt soient composés de manière continue.

### Solution

- a** Il y a une opportunité d'arbitrage en ce sens que la différence de taux n'est pas la même sur les deux marchés. En effet, on voit que

	Ringgit malais	Couronnes norvégiennes
Bonaventure SA	3,5 %	9 %
Costandina Inc.	5,5 %	10 %
Différence	-2 %	-1 %

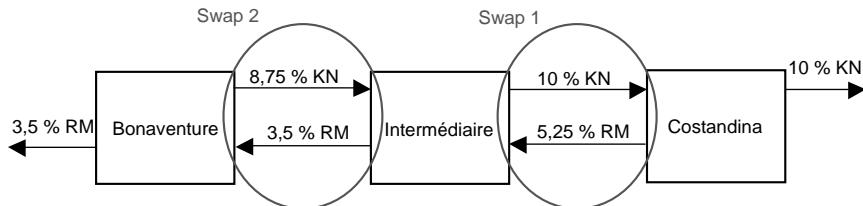
Dès lors, il y a un avantage à arbitrer de  $2\% - 1\% = 1\%$ . Cela veut dire que Bonaventure a un avantage relatif à emprunter sur le marché malais. Cela tombe bien car Costandina peut emprunter sur ce marché au taux norvégien (relativement plus favorable pour lui) et swapper ce flux en taux malais grâce au swap de taux de change.

- b** Avec l'existence d'un intermédiaire, la proposition peut être résumée par le schéma suivant (les flèches indiquent le sens du paiement). Il y a 1 % à répartir de la manière suivante : 0,5 % pour l'intermédiaire et 0,25 % pour chaque contrepartie. L'intermédiaire va ainsi conclure un swap avec chaque contrepartie :
  - Swap 1 : Costandina emprunte à 10 % en couronnes norvégiennes d'abord. En reportant « 10 % KN » sur la flèche supérieure du cercle « Swap 1 », on en déduit très rapidement que Costandina doit payer 5,25 % RM pour avoir un avantage de 0,25 % par rapport aux 5,5 % qu'il obtiendrait s'il allait directement sur le marché malais.

- Swap 2 : Bonaventure emprunte d'abord au taux de 3,5 % RM. « 3,5 % RM » est reporté sur la flèche inférieure du « Swap 2 », et sachant que l'intermédiaire doit garder une marge de 0,5 %, nous voyons un paiement de 8,75 % (KN) de Bonaventure.

Figure 9.7

### Swap de taux de change



- c** Les contreparties ont obtenu ce qu'elles désiraient. Dans le cas idéal où l'intermédiaire leur fournit le paiement exact dans la devise dans laquelle ils ont emprunté au départ (cas montré ici), celui-ci conserve le risque de change en plus du risque de défaut. En effet, il va devoir convertir des ringgits malais en couronnes norvégiennes à chaque paiement. De plus, le risque de crédit est accru puisqu'il y a échange des montants dans chaque devise au début et à la fin du contrat.
- d** Les contreparties assumeront un risque de crédit plus un risque de change. Il faut comparer donc le 0,5 % laissé à l'intermédiaire aux risques auxquels on serait exposé sachant que l'on n'a pas forcément le portefeuille d'activité financière d'un intermédiaire (conditions, diversification, cross-currency hedges, etc.).
- e** On est juste après une date de versement et la question nous précise que l'on va entreprendre les actualisations en continu en faisant l'hypothèse que nous sommes en présence de taux continus.

En ce qui concerne la jambe en ringgits, on paie un coupon de 3,5 % sur un montant de 10 millions et la courbe des taux est à 3,5 %. Cela donne, avec des paiements reçus annuellement :

$$\text{Jambe}_{RM} = 0,35e^{-1,3,5\%} + 0,35e^{-2,3,5\%} + 10,35e^{-3,3,5\%} = 10$$

Pour la jambe en couronnes, on paie un coupon de 8,75 % (obtenu grâce au swap) sur un montant de 24 millions tandis que la vraie structure est à 9 %, c'est-à-dire :

$$\text{Jambe}_{KN} = 2,1e^{-1,9\%} + 2,1e^{-2,9\%} + 26,1e^{-3,9\%} = 23,84$$

La valeur du swap est donc simplement la somme de ces deux jambes, évaluées dans la même devise grâce au taux de change actuel du marché (marked-to-market). Laquelle des deux devises ? Comme cette évaluation doit être faite du point de vue de Bonaventure qui était désireuse de se retrouver avec un emprunt en couronnes, on va l'estimer en couronnes tout en respectant les signes des jambes, soit :

$$\begin{aligned} VS_t &= \left( \text{Jambe}_{RM} \times \text{taux}_{\frac{RM}{KN}} \right) - \text{Jambe}_{KN} \\ &= 10 \times 2,57 - 23,84 = 1,85 \end{aligned}$$

En valeur actuelle et dans les conditions actuelles de marché, le swap est donc positif envers Bonaventure. Cela est dû à l'évolution du taux de change. Dans la réalité, le taux

fixe du swap est le résultat recherché en  $t = 0$ . On actualise les flux fixes à une courbe de taux d'intérêt générale du marché swap (généralement non plate) indépendamment de la contrepartie pour en déterminer, à  $t = 0$ , le taux fixe du swap qui fait que celui-ci a une valeur nulle.



# Index

## A

Actifs financiers, 8  
Actions  
    bêta, 191  
    plus-value, 107  
    prix, 107  
    rendement, 107  
    évaluation, 189  
Agences de rating, 164  
Analyse  
    arbre de décision, 230  
    point mort, 228  
    scénarios, 229  
    sensibilité, 228  
Annuité  
    facteur d'annuité, 109, 143  
    valeur actuelle, 109  
Arbitrage, 12  
    absence, 4, 11, 76  
    définition, 4  
    modèle d'évaluation, 44  
    taux à terme, 149  
Arbitrage Pricing Theory (APT), 44  
Arbre de décision, 230  
Augmentation de capital, 113  
Avantage concurrentiel, 116  
Avantage fiscal de l'endettement, 195, 200  
Aversion au risque, mesure de, 44

## B

Besoin en fonds de roulement (BFR), 112  
Bêta  
    actifs, 41, 191, 193  
    actions, 191, 193  
    dettes, 191, 193  
    interprétations, 42  
    rentabilité attendue (lien avec), 191

## C

Call, 167  
Capitalisation, 2

boursière, 116, 190  
Cash-flows  
    détermination, 2-3, 225  
    exploitation, 113  
    financement, 113  
    free cash flow, 113  
    investissement, 113  
    lien avec la comptabilité, 113  
Choix d'investissement  
    coûts annuels équivalents, 227  
    durée des investissements, 231  
    options réelles, 230  
    payback, 221  
    payback actualisé, 221  
    TRI, 3, 7, 223  
    VAN, 3, 7, 221, 224  
Coefficient  
    d'aversion au risque, 44  
    d'endettement, 190  
Collateralized Debt Obligations (CDO), 172  
Contrats à terme  
    définition, 270  
    futures, 270, 274  
    profit à l'échéance, 272  
    ratio de couverture, 276  
    risque de base, 276  
    utilisation, 276  
    évaluation, 272  
Conversion, 168  
Convexité, 147  
Copula, 171  
Corrélation, 38, 169–171  
Coupon, 143  
Courte (position), 12, 76  
Couverture  
    contrats à terme, 276  
    définition, 260  
    naturelle, 268  
    option (stratégies à base d'), 269  
    produits hybrides et structurés, 281  
    ratio de couverture, 276

- swaps, 281
  - Covariance, 41
  - Coût d'opportunité
    - investissement alternatif, 4
    - projet d'investissement, 226
  - Coût Moyen Pondéré du Capital (CMPC)
    - définition et présentation, 190, 198
    - formule d'ajustement de Modigliani-Miller, 198, 232
    - formule de Miles-Ezzel, 200, 232
    - impôt des personnes physiques, 200
  - Coûts annuels équivalents, 227
  - Coûts de difficultés financières, 201
  - Coûts irrécupérables, 226
  - Credit Default Swaps (CDS), 172
- D**
- Découvert (position à), 12
  - Delta, 78, 80, 194, 269
  - Dette
    - avantage fiscal, 195
    - béta, 194, 197
    - risquée, 163, 167, 193
    - évaluation, 189
  - Distribution de probabilité normale, 170
  - Diversification, 40
  - Dividend Discount Model (DDM), 107
  - Dividendes (taux de croissance), 109
  - Droit
    - de conversion, 168
    - de priorité, 166
  - Duration, 145
  - Durée des investissements, 231
  - Découvert (position à), 76
- E**
- Écart-type
    - d'un portefeuille de  $n$  actifs, 40
    - d'un portefeuille de 2 actifs, 37
  - Échelle de ratings, 165
  - États de la nature, 8
  - Évaluation
    - actions, 189
    - contrats à terme, 272
    - dette, 143, 189
    - dette risquée, 163
    - entreprise non endettée, 112
    - obligation, 143
    - obligation convertible, 168
    - option, 76, 77
    - swaps, 279, 280
- F**
- Facteur d'actualisation, 3
- Faillite (seuil de), 201
  - Financement
    - hybride, 168
    - de projets, 232
  - Fonction d'utilité
    - coefficient d'aversion au risque, 44
    - notion, 44
  - Free Cash Flow Model, 113
  - Frontière efficiente, 44
  - Futures
    - définition, 270
    - sur devises, 273
    - sur indices boursiers, 273
    - sur marchandises, 276
    - sur obligation, 273, 274
    - sur taux d'intérêt, 273, 274
- G**
- Gamma, 82, 269
  - Gaussian copula, 171
  - Gestion Actifs-Passifs, 148, 269
  - Gordon-Shapiro
    - modèle, 108, 110
    - valeur d'opportunité de croissance, 116
  - Greeks
    - delta, 78, 194, 269
    - gamma, 82, 269
    - vega, 83, 269
- I**
- Inflation, 226
- K**
- KMV, 172
- L**
- Leland (Modèle de), 201
  - logit, 165
  - Loi
    - du prix unique, 11
    - normale, 36, 169, 171, 261
  - Longue (position), 12, 76
- M**
- Marché parfait des capitaux, 1
  - MEDAF
    - définition, 44
    - gestion de portefeuille, 260
  - Merton (modèle de), 163, 166, 193, 201
  - Mesure d'aversion au risque, 44
  - Mezzanine financing, 168
  - Miles-Ezzel, 200, 232

- Modigliani-Miller  
 dans un monde avec impôts, 198, 232  
 dans un monde sans impôts, 1, 5, 12, 191, 194  
 en avenir incertain, 12  
 gestion de portefeuille, 259
- Modèle  
 binomial (à  $n$  périodes), 79  
 binomial (à 2 périodes), 76  
 black-Scholes, 80  
 Dividend Discount Model, 107  
 évaluation par arbitrage, 44  
 Gordon-Shapiro, 108, 110  
 Leland (1994), 201  
 Merton, 163, 166, 193, 201  
 Monte-Carlo, 229, 268  
 Méthode var-covar, 265
- O**
- Obligation, 3  
 classique, 143  
 convertible, 168  
 convexité, 147  
 coupon, 143  
 duration, 145  
 principal, 143  
 rendement actuel, 145  
 rendement à l'échéance, 145  
 risques (prix, réinvestissement, taux), 145  
 valeur faciale, 143  
 valeur nominale, 143
- Opportunités d'arbitrage, 11
- Options  
 américaine, 80, 168  
 bornes, 76  
 call, 73  
 d'achat (call), 73  
 de conversion, 169  
 de vente (put), 73  
 delta, 78, 194, 269  
 échéance, 73  
 européenne, 73, 80  
 évaluation, 76, 77, 79  
 exercice de l'option, 75  
 gamma, 82  
 instrument de couverture, 269  
 parité Put-Call européens, 75  
 prime, 73  
 profit à l'échéance (option européenne), 73  
 put, 73  
 stratégies, 269  
 valeur intrinsèque, 76  
 valeur à l'échéance (option européenne), 73  
 valorisation, 73, 76, 77, 79
- vega, 83, 269  
 volatilité implicite, 83
- Options réelles, 230  
 abandon, 230  
 attente, 230  
 expansion, 230  
 flexibilité, 230
- P**
- Pair, 145  
 Parité Put-Call, 75  
 Payback, 222  
 Perpétuités  
 constante, 109  
 croissante, 109  
 Plus-value, 107  
 Point mort (analyse), 228
- Portefeuille  
 bêta, 41, 42  
 choix, 11  
 diversification, 40  
 efficient, 44  
 impact du coefficient de corrélation, 37  
 marché, 44  
 optimal, 44  
 préférences (fonction d'utilité), 44  
 ratio de Sharpe, 44  
 variance, 42  
 à  $n$  actifs, 40  
 à 2 actifs, 37
- Position  
 à découvert, 12, 76  
 courte, 12, 76  
 longue, 12, 76
- Price Earnings Ratio, 116
- Prime de risque du marché, 44
- Prix  
 action, 107  
 d'exercice, 73
- Probabilité  
 binomiale, 173  
 défaut, 164, 166, 168, 169  
 neutre au risque, 79
- probit, 165
- Produits  
 dérivés de crédit, 172  
 hybrides et structurés, 281
- Q**
- Quantiles, 170
- R**
- Rating, 164

- Ratio
- de conversion, 168
  - de couverture des intérêts, 164, 276
- Ratio de Sharpe
- définition, 38
  - détermination du portefeuille optimal, 44
- Recouvrement, 168
- Remboursement anticipé, 169
- Rendement
- action, 107
  - actuel (obligation), 145
- Rentabilité
- attendue, 4, 191, 196
  - distribution de probabilité, 36
  - définition, 35
  - excédentaire par unité de risque, 38, 44
  - exigée par les actionnaires, 108, 189, 196
  - modèle d'évaluation par arbitrage, 44
  - Médaf, 44
  - portefeuille à  $n$  actifs, 40
  - portefeuille à 2 actifs, 37
  - ratio de Sharpe, 38, 44
  - structure financière, 189
- Risque
- base (contrats à terme), 276
  - crédit, 163, 260
  - diversifiable, 41
  - financier, 191
  - marché, 260
  - mesures, 41, 261
  - modèle, 260
  - opérationnel, 260
  - portefeuille à  $n$  actifs, 41
  - portefeuille à 2 actifs, 37
  - prix (obligations), 145
  - rentabilité attendue, 191, 196
  - réduction par diversification, 41
  - réinvestissement (obligations), 145
  - systématique, 41, 45
  - value at risk, 263
  - économique, 191
- S**
- Score, 164
- Sharpe (ratio de)
- définition, 38
  - détermination du portefeuille optimal, 44
- Solvabilité
- liée à la liquidité, 164
  - structurelle, 164
- Sous-jacent, 73
- Structure financière
- coût moyen pondéré du capital (impact sur), 189
  - endettement optimum, 201
  - Modigliani-Miller
  - dans un monde avec impôts, 194, 198
  - dans un monde sans impôts, 5, 12, 113, 191, 194
  - modèle de Leland, 201
  - rentabilité (impact sur), 189
  - valeur de l'entreprise (impact sur), 189
- Structure par terme des taux, 148
- Swaps
- devises (évaluation), 280
  - définition, 278
  - jambe, 279
  - taux d'intérêt (évaluation), 278
  - utilisation, 280
- T**
- Tableau de financement, 112
- Taux
- actualisation, 2
  - actuel, 7
  - croissance des dividendes, 109
  - de recouvrement, 166
  - rendement actuel, 145
  - rentabilité des investissements nouveaux, 110
  - rentabilité exigée par les actionnaires, 107
  - rentabilité interne (TRI), 7, 145, 223
  - réinvestissement, 110
- Taux d'intérêt
- annuel équivalent, 148
  - capitalisation multiple, 148
  - caractéristiques, 148
  - composition, 148
  - comptant, 148
  - forward, 149
  - sans risque, 9, 191
  - spot, 148
  - structure par terme, 148
  - taux à terme, 149
- Théorie du compromis, 200
- Titres contingents
- définition, 9, 10
  - évaluation d'options, 77
- Titrisation, 172
- Tranche, 172
- CDO, 172
- V**
- Valeur
- à risque de crédit, 172
  - actions, 189
  - avantage fiscal de l'endettement (VAFE), 195
  - dette, 189
  - déterminants, 227

entreprise, 6, 13, 194  
espérée de recouvrement, 168  
faciale, 3, 143, 225  
future, 2, 3, 143  
nominale, 3, 143, 225  
obligation, 143  
structure financière (impact), 189  
Valeur actuelle  
définition, 2  
en avenir incertain, 8  
formules simplificatrices, 109  
nette (VAN), 1, 3, 222, 224  
nette ajustée (VANA), 232  
opportunités de croissance, 116  
Value at risk (Valeur à risque), 263

Variance, 42  
Vasicek, 172  
Vega, 83, 269  
Volatilité, 168  
    implicite, 83

## W

Warrant, 169

## Y

Yield, 168

## Z

Zéro-coupon 3  
    unitaire, 3

# Synthèse de cours & exercices corrigés

**André Farber** est professeur à la Solvay Business School (SBS) de l'Université Libre de Bruxelles (ULB). Il est également membre du Comité Supérieur des Finances belge.

**Marie-Paule Laurent** est chercheuse au centre Émile Bernheim (ULB) et partenaire de Risk Dynamics.

**Kim Oosterlinck** est professeur à la SBS (ULB) et coresponsable académique du programme doctoral.

**Hugues Pirotte** est professeur à la SBS (ULB) et partenaire de FinMetrics. Responsable du module Corporate Finance de l'Académie Suisse d'Expertise Comptable, il est aussi Academic Expert à la Luxembourg School of Finance.

## Direction de collection :

**Roland Gillet**, professeur à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

## Dans la même collection :

- **Analyse financière et évaluation d'entreprise**, S. Parienté
- **Contrôle de gestion**, 2<sup>e</sup> éd., Y. De Rongé et K. Cerrada
- **Performance de portefeuille**, P. Grandin *et al.*
- **Marché des changes**, P. Fontaine
- **Analyse de données avec SPSS**, M. Carricano et F. Poujol
- **Statistique descriptive**, É. Bressoud et J.-C. Kahné
- **Gestion des ressources humaines**, É. Campoy *et al.*

# Finance

2<sup>e</sup> édition



Voici en neuf chapitres **l'essentiel de la finance d'entreprise et de marché**. Sans faire l'économie de la théorie et des outils mathématiques nécessaires à la pratique de la discipline, cet ouvrage présente de façon claire et progressive, et non sans humour, les notions et les concepts clés de la finance moderne : théorie du portefeuille, options, options réelles, décisions d'investissement, valorisation d'un projet ou d'une entreprise. Les exercices, qui occupent la moitié du livre, sont intégralement corrigés et permettent efficacement de mettre en pratique les notions abordées.

Dans un contexte de tourmente des marchés financiers, cette nouvelle édition est notamment l'occasion d'approfondir **le risque de crédit et la valorisation des produits dérivés de crédit**, avec un nouveau chapitre consacré aux modèles d'évaluation de la dette risquée.

Comme l'application des concepts de la finance ne peut se passer de calculs, Excel accompagne le lecteur au fil des chapitres. Toutes les données des exercices, des outils supplémentaires pour résoudre les problèmes posés, et des outils dédiés à la valorisation des actifs financiers sont téléchargeables sous forme de fichiers Excel sur [www.pearson.fr](http://www.pearson.fr).

L'ouvrage s'adresse aux étudiants d'université ou d'école de commerce qui suivent un enseignement de finance : il sera un précieux outil de révision et d'auto-évaluation. Il intéressera également les professionnels confrontés à un problème pratique et désireux de rafraîchir ou compléter leurs connaissances.

**La collection Synthex propose aux gestionnaires et aux économistes de découvrir ou de réviser une discipline et de se familiariser avec ses outils au travers d'exercices résolus.**

Chaque ouvrage présente une synthèse pédagogique et rigoureuse des techniques et fondements théoriques, qu'une sélection d'exercices aux corrigés détaillés permet d'assimiler progressivement. Le lecteur, étudiant ou professionnel, est ainsi conduit au cœur de la discipline considérée, et, via la résolution de nombreux problèmes, acquiert une compréhension rapide et un raisonnement solide.

ISBN : 978-2-7440-4068-9

