

# PROCESSUS STOCHASTIQUES EXAMEN PARTIEL

Durée : 2 heures

*Calculatrices, calculettes, notes de cours et téléphones portables sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. La clarté de la rédaction sera prise en compte dans la notation.*

*Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.*

**Exercice 1.** (5 points) Soit  $\lambda > 0$ . On considère une suite de v.a.  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, 1 \wedge (\lambda/n))$  et on se donne également une v.a.  $X$  de loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ .

(1) Montrer que la fonction caractéristique de  $X$  s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

(2) Montrer que, pour tout  $n > \lambda$ , la fonction caractéristique de  $X_n$  s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}e^{it}\right)^n.$$

(3) En déduire que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers  $X$ .

*On pourra utiliser, sans la démontrer, la propriété suivante :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z/n)^n = e^z.$$

**Exercice 2.** (5 points) Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $X_n$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$ .

(1) Montrer que la fonction de répartition de la variable  $X_n$  s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{X_n}(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) = \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \mathbf{1}_{t \in [0;1[} + \mathbf{1}_{t \geq 1}$$

où  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière inférieure de  $x$ .

(2) Montrer que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $X$  de loi uniforme  $\mathcal{U}([0;1])$ .

(3) En déduire la convergence des sommes de Riemann : pour toute fonction continue  $f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) = \int_0^1 f(x) dx.$$

**Exercice 3.** (10 points)

On considère une variable aléatoire  $X$  de loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  et on pose  $Y = X^2$ .

- (1) Calculer  $\mathbb{E}[Y]$  et  $\mathbb{V}[Y]$ .
- (2) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Indiquer pour quelles valeurs de  $\lambda$ , l'espérance  $\mathbb{E}[e^{\lambda Y}]$  est finie et la calculer dans ce cas.

On considère maintenant une suite de v.a.i.i.d.  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de même loi que  $Y$  et on introduit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la variable  $S_n$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{i=1}^n Y_i .$$

La loi de la variable  $S_n$  est appelée *loi du  $\chi^2$  à  $n$  degrés de liberté*. On étudie ici le comportement asymptotique de  $S_n$ .

- (3) La suite  $(S_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge-t-elle  $\mathbb{P}$ -p.s. ? Si oui, quelle est sa limite ?
- (4) Montrer que  $(S_n - n)/\sqrt{n}$  converge en loi vers une v.a.  $Z$  de loi normale dont on précisera la moyenne et la variance.

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique presque sûr de  $S_n - n$ .

- (5) Montrer que pour tout  $\lambda < 1/2$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{E}[e^{\lambda S_n}] = \left(\frac{1}{1-2\lambda}\right)^{n/2}$ .
- (6) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall c > 0, \forall \lambda \in [0; 1/2[, \quad \mathbb{P}(S_n \geq n(1+c)) \leq e^{-\lambda n(1+c) - \frac{n}{2} \ln(1-2\lambda)} .$$

- (7) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $c > 0$ ,

$$\mathbb{P}(S_n \geq n(1+c)) \leq e^{-\frac{n}{2}(c - \ln(1+c))}$$

On pourra étudier la fonction  $\lambda \rightarrow \lambda(1+c) + \frac{1}{2} \ln(1-2\lambda)$ .

On admettra dans la suite de l'exercice que l'inégalité suivante est également vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall c \in ]0; 1[, \quad \mathbb{P}(S_n \leq n(1-c)) \leq e^{\frac{n}{2}(\ln(1-c)+c)}$$

- (8) Montrer que  $\frac{S_n - n}{\sqrt{n \log n}}$  converge en probabilité vers 0, puis que  $\frac{S_n - n}{\sqrt{n \log n}}$  converge  $\mathbb{P}$ -p.s. vers 0.