

Examen (corrigé)

Durée 3 heures

Documents, Téléphones et calculatrices non autorisés

Exercice 1

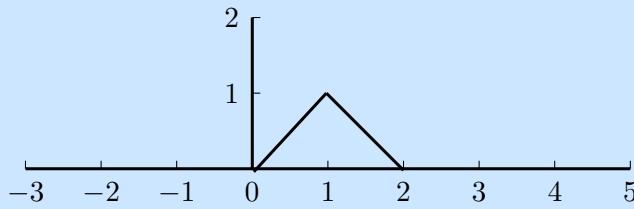
Chacune des questions suivantes compte pour 2 points. Traitez celles de votre choix pour un total de 6 points maximum. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- Tracer le graphe de la fonction $1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}$.

Solution:

Par définition on a

$$\begin{aligned} 1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}(x) &= \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,1]}(x-y) 1_{[0,1]}(y) d\lambda_1(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_{[x-1,x]}(y) 1_{[0,1]}(y) d\lambda_1(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_{[x-1,x] \cap [0,1]}(y) d\lambda_1(y) \\ &= \lambda_1([x-1, x] \cap [0, 1]) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 2 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases} \end{aligned}$$



- Soit f_n une suite de fonctions mesurables positives qui converge vers f presque partout sur un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) , et telle que $\int_X f_n d\mu$ converge vers 0. Montrer à l'aide du Lemme de Fatou que $f = 0$ p.p.

Solution:

Le Lemme de Fatou appliqué à la suite de fonction f_n mesurables positives donne

$$0 \leq \int_X \liminf f_n(x) d\mu(x) \leq \liminf \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

Or $\liminf f_n(x) = \lim f_n(x) = f(x)$ μ -presque partout et $\liminf \int_X f_n(x)d\mu(x) = \lim \int_X f_n(x)d\mu(x) = 0$, donc on en déduit que

$$0 \leq \int_X f(x)d\mu(x) \leq 0 \Rightarrow \int_X f(x)d\mu(x) = 0.$$

D'après un Lemme du cours, et parce que $f(x) \geq 0$, il en découle $f = 0$ μ -p.p.

3. Montrer que toute application croissante de \mathbb{R} vers \mathbb{R} est Borelienne.

Solution:

Puisque f est croissante, il est facile de voir que pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'ensemble $f^{-1}([a, +\infty[)$ est un intervalle, donc un Borelien. Puisque les ensemble du type $[a, +\infty[$ engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que f est Borel-mesurable.

4. Soit $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables de l'espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) vers l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer que l'ensemble $\{x \in X; \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \geq 1\}$ appartient à \mathcal{A} .

Solution:

Il suffit d'écrire

$$\{x \in X; \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \geq 1\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([1, +\infty[).$$

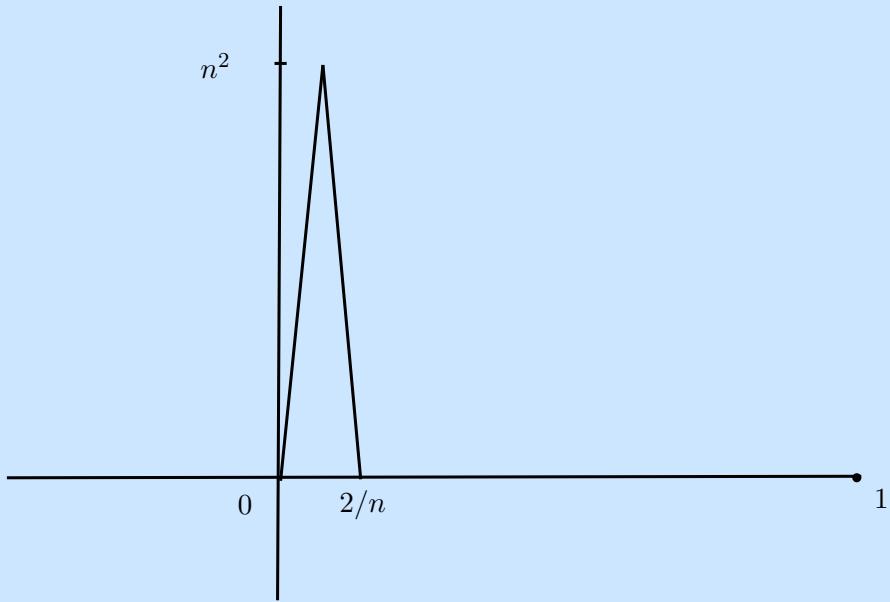
Or f_n étant mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$, les ensembles $f_n^{-1}([1, +\infty[)$ sont tous dans \mathcal{A} et donc leur intersection (dénombrable) aussi car \mathcal{A} est une tribu.

5. Donner un exemple d'une suite f_n telle que $f_n \rightarrow 0$ p.p, et $\int_X f_n d\mu \rightarrow +\infty$

Solution:

Sur $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue on considère la suite de fonctions continues définie par

$$f_n(x) = n^3 x \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]}(x) + (2n^2 - n^3 x) \mathbf{1}_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}(x).$$



La fonction f_n étant supportée sur l'intervalle $[0, 2/n]$ on a bien $f_n(x) \rightarrow 0$ p.p. En outre

$$\int_{[0,1]} f_n(x) d\lambda(x) = 2n \rightarrow +\infty.$$

6. Montrer que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Solution:

$$\begin{aligned}
 \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy \right| dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| dy dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| dx \right) dy \tag{1} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \right) dy \tag{2} \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \right).
 \end{aligned}$$

Pour (1) nous avons appliqué le Théorème de Fubini-Tonelli (les fonctions $|f(x-y)|$ et $|g(y)|$ étant mesurables et positives), et pour (2) nous avons appliqué le changement de variable $z = x - y$ dans l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| dx$, dont le Jacobien (en valeur absolue) vaut 1.

7. Soit $f(x) = 1_{[0,1]}(x) \frac{1}{\sqrt{x}}$. Calculer $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ pour $1 \leq p < 2$, où \mathbb{R} est muni de la mesure de Lebesgue.

Solution:

$$\|f\|_p^p = \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\left[\frac{x^{-\frac{p}{2}+1}}{-\frac{p}{2}+1} \right]_0^1 \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{2}{2-p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

8. Soit f une fonction Lebesgue intégrable sur \mathbb{R} . Justifier que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^n(\pi x) d\lambda(x) = 0.$$

Solution:

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ on a $|\cos(\pi x)| < 1$ d'où $\cos(\pi x)^n \rightarrow 0$. Puisque $\lambda(\mathbb{Z}) = 0$ on en déduit que $|\cos(\pi x)| \rightarrow 0$ pour λ -presque tout x . D'autre part, f étant intégrable, il existe un ensemble $N \subset \mathbb{R}$ tel que $|f| \neq +\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus N$ et $\lambda(N) = 0$. On en déduit que $f(x) \cos(\pi x) \rightarrow 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} \cup N)$. Autrement dit, on vient de démontrer que

$$f(x) \cos(\pi x)^n \rightarrow 0 \text{ p.p. sur } \mathbb{R}.$$

Enfin, nous avons la majorante intégrable suivante

$$|f(x) \cos(\pi x)^n| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nous sommes donc en mesure d'appliquer le théorème de convergence dominée, qui garantie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(\pi x)^n d\lambda(x) = 0.$$

Exercice 2

Soit

$$\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \forall n \in \mathbb{N}, 2n \in A \Leftrightarrow 2n + 1 \in A\}.$$

1. Montrer que \mathcal{T} est une tribu sur \mathbb{N} .

Solution:

Vérifions les 3 propriétés qui caractérisent les tribus :

- Il est clair que $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$
- Si $A \in \mathcal{T}$ alors par définition on a $2n \in A \Leftrightarrow 2n + 1 \in A$. En raisonnant par double contraposé il vient $2n \in A^c \Leftrightarrow 2n + 1 \in A^c$, d'où $A^c \in \mathcal{T}$.
- Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ensemble de \mathcal{T} et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Alors il existe i_0 tel que $2n \in A_{i_0}$. Et donc $2n + 1 \in A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. En raisonnant de la même façon on montre que $2n + 1 \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ implique $2n \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, ce qui prouve que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T}$.

Conclusion : \mathcal{T} est bien une tribu.

2. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction définie par $f(x) = x + 2$. Montrer que f est \mathcal{T} -mesurable.

Solution:

Soit $A \in \mathcal{T}$. Remarquons premièrement que f est bijective, d'inverse $f^{-1}(x) = x - 2$. Montrons que $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. Pour ce faire, on considère un $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n \in f^{-1}(A)$. Par définition il existe $a \in A$ tel que $f(2n) = a$, donc $a = 2n + 2 = 2(n + 1)$ et donc puisque $A \in \mathcal{T}$ on a forcément $2(n + 1) + 1 \in A$. Mais alors $f^{-1}(2(n + 1) + 1) = 2n + 1 \in f^{-1}(A)$. En raisonnant de manière analogue, on démontre que $2n + 1 \in f^{-1}(A)$ implique $2n \in f^{-1}(A)$, ce qui montre que f est bien mesurable.

3. Soit $\mu : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\mu(A) := \sum_{j \in A} 2^{-j} \quad \text{si } A \neq \emptyset,$$

et $\mu(\emptyset) = 0$. Montrer que μ est une mesure.

Solution:

La mesure μ est une mesure à densité de la forme $f\mu_0$ où μ_0 est la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et f est la fonction intégrable positive $f(n) = 2^{-n}$. Par conséquent d'après le cours, μ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Mais puisque $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, μ est à forciori une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$

4. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{T}$, $A \neq \emptyset$, on a

$$\mu(A) \geq \frac{3}{2^{\min(A)+1}}. \tag{3}$$

Solution:

Tout d'abord, observons que si $A \neq \emptyset$, alors $\min(A)$ est forcément un nombre pair (car si $\min(A)$ était impair alors par définition de \mathcal{T} on aurait $\min(A) > \min(A) - 1 \in A$ ce qui est absurde). Donc A contient au moins les deux éléments $\{\min(A), \min(A) + 1\}$. Par suite,

$$\mu(A) = \sum_{j \in A} 2^{-j} \geq 2^{-\min(A)} + 2^{-(\min(A)+1)} = \frac{3}{2^{\min(A)+1}}.$$

5. Pour quels ensembles $A \in \mathcal{T}$ a-t-on égalité dans (3) ?

Solution:

On a égalité si et seulement si A est composé de seulement deux éléments, i.e. A est de la forme $\{2n, 2n + 1\}$.

Exercice 3. [6 points]

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé et $t \geq 0$ on pose

$$F_N(t) := \int_0^N e^{-xt} \sin(x) dx.$$

1. A l'aide d'un théorème du cours sur les intégrales à paramètre, montrer que $F_N(t)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Solution:

Soit $I =]0, +\infty[$ ouvert dans \mathbb{R} .

- Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto e^{-xt} \sin(x)$ est intégrable sur $[0, N]$ (car continue sur le compact $[0, N]$).
- Pour tout $x \in [0, N]$ la fonction $t \mapsto e^{xt} \sin(x)$ est de classe C^1 sur I .
- On a la majoration suivante

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} e^{-xt} \sin(x) \right| = |-xe^{-xt} \sin(x)| \leq x,$$

et $x \mapsto x$ est bien entendu intégrable sur $[0, N]$.

En conclusion, les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre sont bien remplies (version du théorème vue en TD), ce qui implique que $F_N(t) \in C^1(I)$.

2. En utilisant une double intégration par parties, calculer explicitement $F_N(t)$ en fonction de N et t .

Solution:

Une première intégration par partie donne

$$\begin{aligned} F_N(t) &= \int_0^N e^{-xt} \sin(x) dx = [-e^{-xt} \cos(x)]_0^N - t \int_0^N \cos(x) e^{-xt} dx \\ &= -e^{-Nt} \cos(N) + 1 - t \int_0^N \cos(x) e^{-xt} dx. \end{aligned}$$

Une deuxième intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^N e^{-xt} \cos(x) dx &= [e^{-xt} \sin(x)]_0^N + t \int_0^N \sin(x) e^{-xt} dx \\ &= e^{-Nt} \sin(N) + t F_N(t). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$F_N(t) = 1 - e^{-Nt} \cos(N) - te^{-Nt} \sin(N) - t^2 F_N(t),$$

d'où

$$F_N(t) = \frac{1 - e^{-Nt} \cos(N) - te^{-Nt} \sin(N)}{1 + t^2}.$$

3. Calculer

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F_N(t) dt.$$

Solution:

D'une part on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} F_N(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

D'autre part on a la majoration

$$|F_N(t)| \leq \frac{2+te^{-t}}{1+t^2} \leq \frac{C}{1+t^2},$$

car $e^{-Nt} \leq e^{-t}$ pour $N \in \mathbb{N}$ et te^{-t} est bornée sur \mathbb{R}^+ . Or $\frac{1}{1+t^2}$ est bien intégrable sur $]0, +\infty[$ (par exemple, d'après le critère de Riemann) donc le théorème de convergence dominée s'applique et montre que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F_N(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \arctan(T) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

4. Montrer que

$$(x, t) \mapsto e^{-xt} \sin(x)$$

est intégrable sur $[0, N] \times [0, +\infty[$ muni de la mesure de Lebesgue $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$.

Solution:

En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction mesurable positive $|e^{-xt} \sin(x)|$ on trouve

$$\begin{aligned} \int_{[0, N] \times [0, +\infty[} |e^{-xt} \sin(x)| d\lambda_2 &= \int_0^N |\sin(x)| \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \right) dx \\ &= \int_0^N |\sin(x)| \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} dx \\ &= \int_0^N \frac{|\sin(x)|}{x} dx < +\infty \end{aligned}$$

car $|\sin(x)| \sim x$ en 0.

5. En déduire, à l'aide du Théorème de Fubini, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Solution:

La fonction $(x, t) \mapsto e^{-xt} \sin(x)$ étant intégrable sur $[0, N] \times [0, +\infty[$, nous pouvons appliquer le Théorème de Fubini et écrire

$$\begin{aligned}\int_{[0, N] \times [0, +\infty[} e^{-xt} \sin(x) d\lambda_2 &= \int_0^N \sin(x) \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \right) dx \\ &= \int_0^N \frac{\sin(x)}{x} dx\end{aligned}\tag{4}$$

d'une part, et d'autre part

$$\begin{aligned}\int_{[0, N] \times [0, +\infty[} e^{-xt} \sin(x) d\lambda_2 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^N \sin(x) e^{-xt} dt \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} F_N(x) dx.\end{aligned}\tag{5}$$

On conclut donc en utilisant les questions précédentes et en passant à la limite $N \rightarrow +\infty$.

Exercice 4. [3 points] Pour $t \geq 0$, on pose

$$I(t) = \int_{[1, +\infty[\times \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 y^2 + x^2 + t} dx dy.$$

Calculer $I(t)$ à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{v^2 - t}$, $y = \frac{uv}{\sqrt{v^2 - t}}$.

Solution:

L'application

$$\varphi(u, v) = (\sqrt{v^2 - t}, \frac{uv}{\sqrt{v^2 - t}})$$

est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R} \times [\sqrt{1+t}, +\infty[$ vers $[1, +\infty[\times \mathbb{R}$ d'inverse

$$\varphi^{-1}(x, y) = (\frac{xy}{\sqrt{x+t}}, \sqrt{x+t}).$$

Un calcul montre que

$$D\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v}{\sqrt{v^2-t}} \\ \frac{v}{\sqrt{v^2-t}} & \cdot \end{pmatrix}$$

d'où

$$J\varphi = \frac{v^2}{v^2 - t}.$$

La formule de changement de variable s'écrit

$$\int_{[1, +\infty[\times \mathbb{R}} \frac{1}{x^2 y^2 + x^2 + t} dx dy = \int_{\varphi^{-1}([1, +\infty[\times \mathbb{R})} f \circ \varphi(u, v) J\varphi(u, v) du dv,$$

d'où, en appliquant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{\mathbb{R} \times [\sqrt{1+t}, +\infty[} \frac{1}{u^2 v^2 + v^2} \frac{v^2}{v^2 - t} dudv \\ &= \int_{\mathbb{R} \times [\sqrt{1+t}, +\infty[} \frac{1}{(u^2 + 1)} \cdot \frac{1}{(v^2 - t)} dudv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(u^2 + 1)} du \int_{[\sqrt{1+t}, +\infty[} \frac{1}{(v^2 - t)} dv \\ &= \pi \frac{1}{2\sqrt{t}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+t} + \sqrt{t}}{\sqrt{1+t} - \sqrt{t}} \right| \end{aligned}$$