Université des Lagunes
Département de Maths Appliquées
UE: Probabilité Avancées, L3

Année Universitaire
2022/2023

Travaux dirigés de Probabilité Avancées

Exercice 1 (Question de cours)

(1) Soit X une variable aléatoire discrète à valeur dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tel que
$$\forall\, k \in E,\ \ \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{k}.$$
   (a) Déterminer a. En déduire la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de X.

(2) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à densité f d'ensemble de définition $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+;\ x \leq y\}$.
   (a) Déterminer les lois de X et de Y. Comment les appelle t-on
   (b) Donner la relation entre la loi conjointe et les loi marginales pour que X et Y soient deux variables indépendantes
   (c) Donner l'expression de l'espérance du couple (X, Y) et sa procédure de calcul.

(3) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite variable aléatoire de fonction de densité $(f_n)_{n\geq 0}$ et X une variable aléatoire de fonction de densité f. On suppose que f_n converge simplement vers f. Donner la validité de ces affirmations suivantes.
   (a) $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X.
   (b) $(X_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas en loi vers X.
   (c) On ne pas rien conclure concernant la convergence en loi de $(X_n)_{n\geq 0}$ vers X.

Exercice 2

Une loterie est constituée de 1000 billets vendus 1000 Fcfa chacun. Un billet gagne 400000 Fcfa, deux billets gagnent chacun 100000 Fcfa et dix billets gagnent chacun 10000 Fcfa.

(1) Un joueur achète un billet. On appelle G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
   (a) Quelle est la loi de probabilité de G?
   (b) Calculer $\mathbb{E}(G)$.
   (c) Le jeu rapporte-t-il à l'organisateur de la loterie ou bien aux joueurs?

(2) Pour être sûre de gagner, une personne achète tous les billets. Elle gagne donc tous les lots.
   (a) Quelle somme débourse-t-elle ?
   (b) Quelle somme correspond au gain de tous les lots ?
   (c) Quelle somme la personne a-t-elle perdue ?
   (d) Quelle est la perte moyenne par billet acheté ?
   (e) Comparer ce résultat avec l'espérance mathématique trouvée à la question 1.c).

Exercice 3

Deux personnes conviennent d'un rendez-vous entre $14h$ et $15h$ en admettant qu'aucune des deux n'attendra plus de 15 minutes. Le problème est de déterminer la probabilité pour qu'elles se rencontrent. Pour cela on modélise l'instant d'arrivée de chacune de ces personnes par deux variables aléatoires notées X et Y de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, en ayant pris $14h$ comme origine du temps. On suppose que X et Y sont indépendantes.

(1) Déterminer la fonction de densité de probabilité du couple (X, Y).

(2) On considère A l'évènement "les deux personnes se rencontrent". Montrer que

(3)

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(|X - Y| \leq \frac{1}{4}\right).$$

(4) On pose $W = X$ et $Z = X - Y$. Déterminer la fonction de densité de probabilité du couple (X, Z).

(5) Déterminer la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire Z.

(6) En déduire $\mathbb{P}(A)$.

Exercice 4

Soit Z et W deux variables aléatoires indépendantes respectivement de loi uniforme sur $[0, 1]$ et exponentielle de paramètre 2.

(1) Déterminer la densité de probabilité conjointe du couple(Z, W).

(2) Déterminer la matrice de covariance de (Z, W).

(3) On construit un couple de variables aléatoires (U, V) définies par: $U = Z+W$ et $V = Z-W$

 (a) Déterminer la densité de probabilité conjointe du couple (U, V)

 (b) En déduire les lois marginales de U et V.

 (c) Calculer la covariance de U et V.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de densité $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathbf{1}_{\{x>1\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose

$$(Z, W) = (\ln(X), \frac{\ln(Y)}{\ln(X)}$$

(1) Montrer que f est bien une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue.

(2) Déterminer la loi de $Z = \ln(X)$.

(3) Les variables $\ln(X)$ et $\ln(Y)$ sont-elles indépendantes?

(4) Déterminer la loi de (Z, W). Z et W sont-elles indépendantes?

Exercice 6

Soit M la matrice définie par

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que M est une matrice de dispersion.

(2) On considère $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur Gaussien centré de matrice de dispersion M.

(a) Donner la condition sur M pour que le vecteur Gaussien X admette une fonction de densité.

(b) Vérifier si cette si condition est vérifier. Si oui déterminer la fonction de densité de X.

(3) Dans le cas où le vecteur $X = (X_1, X_2, X_3)$ est centré, déterminer la loi de $X_1 + 2X_2 + X_3$.

Exercice 7

Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur Gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) La variable X_3 et le vecteur (X_1, X_2) sont-ils indépendant? Justifier votre réponse.

(2) On considère le vecteur (X_1, X_2).

(a) Déterminer la loi de ce vecteur.

(b) Cette loi admet-elle une densité? Si oui déterminer cette fonction de densité.

(3) On considère le vecteur défini par $Y_1 = X_2$ et $Y_2 = X_2 + aX_1$.

(a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, (Y_1, Y_2) est un vecteur Gaussien.

(b) Déterminer a de sorte que Y_1 et Y_2 soient indépendants.

(c) En déduire $\mathbb{E}[X1|X2]$.

Exercice 8

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad \mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = \frac{1}{n^2}$$

(1) Calculer l'espérance et la variance de X_n.

(2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n > \varepsilon - 1) = \frac{1}{n^2}\mathbf{1}_{[0,n]}(\varepsilon).$$

(3) En utilisant la question 2, montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers -1.

(4) Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque surement vers -1.

Exercice 9

Un vol Toulouse-Paris est assuré par un avion de $N = 150$ places. Pour un vol de ce type, des estimations ont montré que la probabilité pour qu'une personne confirme son billet est $p = 0,75$. La compagnie vend n billets, $n > 150 > np$. Soit X la variable aléatoire "nombre de personnes parmi les n possibles ayant confirmé leur réservation pour ce vol".

(1) Quelle est la loi exact suivie par la variable X.

(2) Quel est le nombre maximum de places que la compagnie peut vendre pour que, à au moins 95%, elle soit sûre que tout le monde puisse monter dans l'avion (c'est-à-dire trouver n tel que $\mathbb{P}(X > 150) \leq 0,05$)?
   (a) En utilisant l'inégalité de Tchebychev.
   (b) En utilisant la formule de Moivre-Laplace