

# DIFFÉRENCES FINIES I

Jean-Paul Chehab

LAMFA, Université de Picardie Jules Verne, Amiens

Amiens, 3 mars 2008

**plan :**

- ▶ Solutions classiques
- ▶ Schémas classiques, stabilité consistance
- ▶ Propriétés au niveau discrèt
- ▶ Où Fourier est nécessaire pour dévoiler le fond
- ▶ Schémas d'ordre élevés Schémas compacts
- ▶ Formalisme d'opérateurs
- ▶ Quelques applications

Soit  $\mathcal{D}$  un opérateur linéaire agissant sur les fonctions régulières. Soit  $x_i$  une suite de points de  $\Omega \subset R^N$ .

## DIFFÉRENCE FINIES

Schémas aux différences pour approcher  $\mathcal{D}(u)(x_i)$  (*via Taylor*)

## APPLICATIONS

- ▶ Approximation numérique de solution d'EDO, d'EDP
- ▶ Interpolation

## QUESTIONS

- ▶ Stabilité, consistance, précision, convergence
- ▶ Propriétés discrètes (inégalités fonctionnelles, intégration par parties, principe du maximum, analyse de Fourier ...)
- ▶ Mise en œuvre efficace (solveurs rapides FFT, Multigrille, réduction cyclique, méthodes de descente préconditionnées ...)

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f \quad \text{dans }]0, 1[ \quad (1)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (2)$$

## SOLUTION CLASSIQUE

$u(x)$  est solution classique si

- ▶  $u$  est  $\mathcal{C}^2([0, 1])$
- ▶  $u$  est solution de l'EDP.

On montre par intégrations successives que  $f \in \mathcal{C}([0, 1]) \iff u$  solution classique. Soit alors  $(x_i)_{i=1}^N \in ]0, 1[$ . Nous avons en particulier

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) = f(x_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (4)$$

On pose  $x_i = ih$  avec  $h = \frac{1}{N+1}$ . Par Taylor

$$\frac{2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{h^2} = -u''(x_i) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\frac{2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{h^2} = f(x_i) + \mathcal{O}(h^2)$$

**On définit**  $u_i \approx u(x_i)$  par

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), i = 1, \dots, N, \quad u_0 = 0, u_{N+1} = 0.$$

## SYSTÈME LINÉAIRE $N$ EQS À $N$ INCONNUES

$$Au = f, \text{ avec } A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & 0 & -1 & 2 & \end{pmatrix}$$

## PROPRIÉTÉS

- ▶ Intégration par parties discrète ( $u_0 = u_{N+1} = v_0 = v_{N+1} = 0$ )

$$\sum_{j=1}^N (2u_i - u_{i-1} - u_{i+1})v_i = \sum_{j=0}^N (u_{i+1} - u_i)(v_{i+1} - v_i) (\implies A \text{ SDP})$$

- ▶ Inégalité de Poincaré discrète  $\sum_{i=0}^N u_i^2 h \leq \sum_{i=0}^N \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h}$

- ▶ Principe du maximum discret

$$F \geq 0 \rightarrow U = A^{-1}F \geq 0$$

(propriété plus généralement vérifiée par les M-matrices)

I  $M_{i,i} > 0, M_{i,j} \leq 0, j \neq i$

II  $\sum_{j=1}^N M_{i,j} > 0, i = 1, \dots, N.$

$\implies M$  inversible,  $M^{-1} \geq 0$ .

## CONVERGENCE

- ▶ Si  $u \in \mathcal{C}^4$  : erreur de consistante

$$|E_i| = \left| -u''(x_i) - \frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1})}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} \|u^{(4)}\|_\infty.$$

- ▶ Stabilité  $\ell^2$  (inégalité d'énergie),  $\ell^\infty$  (pcp du maximum).

- ▶ Convergence  $|u_i - u(x_i)| \leq \frac{h^2}{96} \|u^{(4)}\|_\infty$ .

## VALEURS ET VECTEURS PROPRES DE A

$$\lambda_i = \frac{2}{h^2} (1 - \cos(\pi i h)), \quad w^{(i)} = (\sin(i\pi h), \sin(2i\pi h), \dots, \sin(N\pi h))^T.$$

## PASSAGE DANS LA BASE DE VECTEURS PROPRES DE A

$$u = \sum_{k=1}^N \hat{u}_k w^{(k)} \iff u_i = \sum_{k=1}^N \hat{u}_k \sin(ik\pi h)$$

Comme  $\sum_{k=1}^N \sin(jk\pi h) \sin(ik\pi h) = \frac{N+1}{2} \delta_{i,j}$  (ortho.  $L^2$  discrète)

$$\hat{u}_i = \frac{2}{N+1} \sum_{k=1}^N u_k \sin(ik\pi h)$$

## REMARQUES

- ▶ Calcul rapide des sommes : FFT

$$\▶ \hat{u}_i \simeq \frac{2}{1} \int_0^1 \sin(i\pi x) u(x) dx$$

- ▶ Méthode de résolution directe

$$\▶ \hat{f}_i = \frac{2}{N+1} \sum_{k=1}^N f_k \sin(ik\pi h)$$

$$\▶ \hat{u}_i = \frac{\hat{f}_i}{\lambda_i}$$

$$\▶ u_i = \sum_{k=1}^N \hat{u}_k \sin(ik\pi h)$$

## Réduction récursive

$$2u_{2i+1} - u_{2i} - u_{2i+2} = h^2 f_{2i+1} \text{ et } 2u_{2i-1} - u_{2i-2} - u_{2i} = h^2 f_{2i-1}$$

On déduit

$$u_{2i+1} = \frac{1}{2}(u_{2i} + u_{2i+2} + h^2 f_{2i+1}) \text{ et } u_{2i-1} = \frac{1}{2}(u_{2i} + u_{2i-2} + h^2 f_{2i-1}) (*)$$

De  $2u_{2i} - u_{2i+1} - u_{2i-1} = h^2 f_{2i}$  on déduit

$$2u_{2i} - u_{2i-2} - u_{2i+2} = h^2(2f_{2i} + f_{2i+1} + f_{2i-1}) (**)$$

## ALGORITHME

- ▶ On applique (\*\*)  $\rightarrow u_{2i}$
- ▶ On applique (\*)  $\rightarrow u_{2i+1}$

Application récursive de (\*\*) + (\*)

## REMARQUES

- ▶ Généralisable sur grille non régulière,  $x_i = g(ih)$
- ▶ Conditionnement d'une matrice  $M$  de discréétisation d'un opérateur d'ordre  $k$

$$\kappa(A) = \mathcal{O} \left( \frac{\left( \max_i \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right)^k}{\min_i \lambda_i} \right)$$

### Exemples

- ▶ Grille uniforme :  $\kappa(A) = \mathcal{O}(\frac{1}{h^2})$
- ▶ Grille "Chebyshev"  $\kappa(A) = \mathcal{O}(\frac{1}{h^4})$

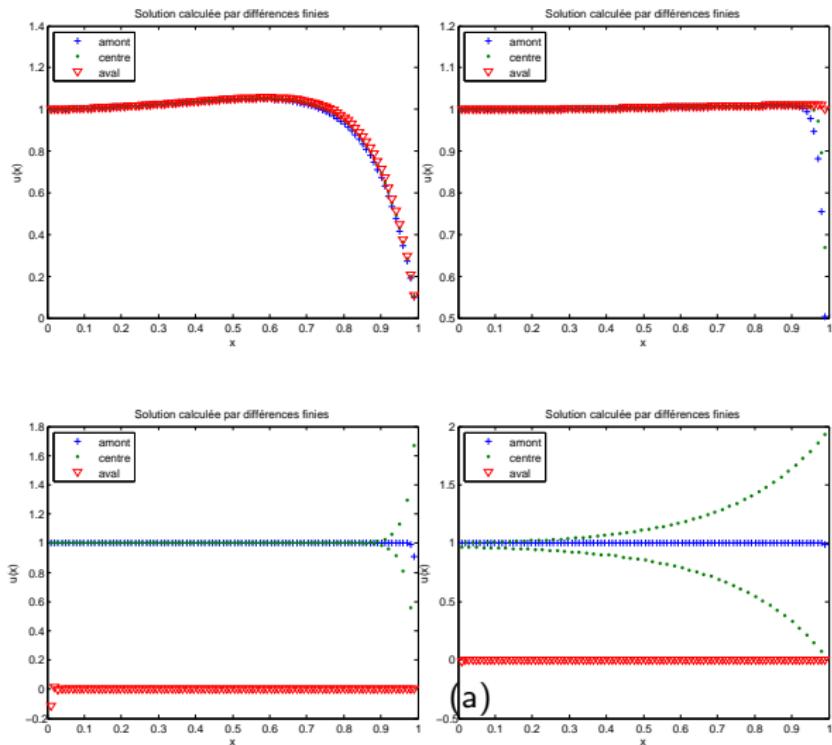
## PROBLÈMES NON SYMÉTRIQUES

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + c \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{dans }]0, 1[ \quad (5)$$

$$u(0) = 1, u(1) = 0. \quad (6)$$

- ▶ schéma en amont  $\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h)$
- ▶ schéma centré  $\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$
- ▶ schéma en aval  $\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \mathcal{O}(h)$

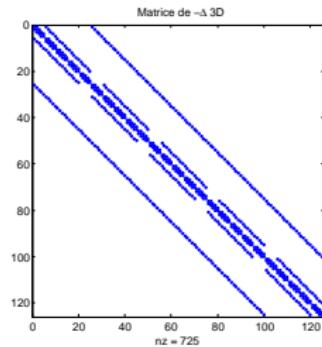
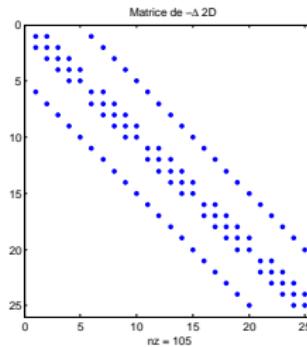
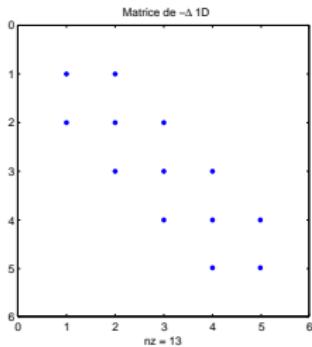
Stabilité  $\ell^\infty$  inconditionnelle pour amont, sous la condition  $Pe = \frac{ch}{2} < 1$   
 pour les autres (matrice de discréétisation est une M-matrice).

FIGURE: Pb de convection diffusion ( $N=100$ ),  $c=10$ ,  $c=100$ ,  $c=1000$ ,  $c=10000$

# DIMENSION SUPÉRIEURE

Domaines Parallélépipédiques : on procède tensoriellement

- ▶ En dimension 2 :  $A \otimes Id + Id \otimes A$
- ▶ En dimension 3 :  $Id \otimes A \otimes Id + Id \otimes Id \otimes A + A \otimes Id \otimes Id$



## DIRICHLET NON HOMOGÈNE

$$\frac{2u_1 - u_0 - u_2}{h^2} = f_1 \iff \frac{2u_1 - u - 2}{h^2} = f_1 + \frac{u_0}{h^2}$$

## NEUMANN

$\frac{du}{dx}(0) = \alpha$ . On a  $\frac{du}{dx}(0) = \alpha \simeq \frac{u_1 - u_0}{h}$  donc  $u_1 = u_0 + \alpha h + \mathcal{O}(h^2)$ , on pose  $u_O = u_1 - \alpha h$  dans le schéma.

## PÉRIODIQUES

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x_0) \simeq \frac{2u_0 - u_1 - u_{-1}}{h^2}$$

avec  $u_{-1} = u_N - \frac{d^2u}{dx^2}(x_0) \simeq \frac{2u_0 - u_1 - u_N}{h^2}$ .

## FORMALISME D'OPÉRATEURS

- ▶ **Opérateur de déplacement progressif** :  $Eu_i = u_{i+1}$
- ▶ **Opérateur de déplacement rétrograde** :  $E^{-1}u_i = u_{i-1}$
- ▶ **Opérateur aux différences progressif** :  $\delta^+ u_i = u_{i+1} - u_i$
- ▶ **Opérateur aux différences rétrograde** :  $\delta^- u_i = u_i - u_{i+1}$
- ▶ **Opérateur aux différences centré** :  $\delta u_i = u_{i+1/2} - u_{i-1/2}$
- ▶ **Opérateur aux différences centré** :  $\bar{\delta} u_i = \frac{1}{2}(u_{i+1/2} - u_{i-1/2})$
- ▶ **Opérateur de moyenne** :  $\mu u_i = \frac{1}{2}(u_{i+1/2} + u_{i-1/2})$
- ▶ **Opérateur Différentiel** :  $Du = u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$

Voir feuille Maple

On peut alors exprimer tous les opérateurs au différences à l'aide de  $E$  et de son inverse.

$$\delta^+ = E - 1, \quad \delta^- = 1 - E^{-1} \text{ d'où } \delta^+ = E\delta^-,$$

et

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2} = \frac{1}{2}(E - E^{-1}), \quad \mu = \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2})$$

En outre

$$\delta^+\delta^- = \delta^-\delta^+ = \delta^+ - \delta^- = \delta^2$$

On peut également définir des puissances des opérateurs aux différences

$$\delta^{+2} = \delta^+\delta^+ = E^2 - 2E + 1,$$

et de manière plus générale

## LA RELATION MAGIQUE $E = e^{hD}$

$$\begin{aligned}
 u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \cdots \\
 &= \left(1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2} + \frac{h^3 D^3}{3!} + \cdots\right)u(x) \\
 &= e^{hD}u(x),
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$E = e^{hD}$$

et on peut définir l'opérateur différentiel  $D$  par

$$D = \ln(E)/h$$

$$E = 1 + \delta^+ \text{ et } E = 1 - \delta^-,$$

On peut écrire formellement

$$D = \frac{1}{h} \ln(1 + \delta^+)$$

et

$$D = \frac{1}{h} \ln(1 - \delta^-).$$

On obtient alors, en utilisant un développement formel

$$D = \frac{1}{h} \left( \delta^+ - \frac{1}{2}\delta^{+2} + \frac{1}{3}\delta^{+3} - \frac{1}{4}\delta^{+4} + \frac{1}{5}\delta^{+5} \dots \right),$$

$$D = -\frac{1}{h} \left( \delta^- + \frac{1}{2}\delta^{-2} + \frac{1}{3}\delta^{-3} + \frac{1}{4}\delta^{-4} + \frac{1}{5}\delta^{-5} \dots \right),$$

Exemple : Considérons le schéma  $\frac{1}{h}(\delta^+)$ . Le premier terme de la troncature  $-\frac{1}{2h}\delta^{+2}$  est

$$-\frac{1}{2h}\delta^{+2}u(x) = -\frac{1}{2h}(u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)) = -\frac{1}{2}u_{xx}h + \dots$$

Suivant cette démarche, on construit un schéma d'ordre 2 progressif par

$$\frac{1}{h} \left( \delta^+ - \frac{1}{2}\delta^{+2} \right)$$

soit

$$\begin{aligned} u_x(x) &= \frac{1}{h} \left( u(x+h) - u(x) - \frac{1}{2}(u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)) \right) + \frac{1}{3}h \\ &= \frac{1}{2h}(-u(x+2h) + 4u(x+h) - 3u(x)) + \frac{1}{3}h^2u_{xxx} \end{aligned}$$

Plus généralement, le terme principal de l'erreur du schéma

$$\frac{1}{h} \left( \delta^+ - \frac{1}{2}\delta^{+2} + \frac{1}{3}\delta^{+3} - \frac{1}{4}\delta^{+4} \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\delta^{+k} \right)$$

est

$$\frac{(-1)^{k+1}}{k} h^{k-1}$$

## SCHÉMAS COMPACTS

**But :** schémas d'ordre élevés

**Problème :** nb de points augmente localement  $\implies$  pb au bord

$$-u''(x_i) = \frac{30u(x_i) - 16(u(x_{i+1}) + u(x_{i-1})) + u(x_{i+2}) + u(x_{i-2})}{12h^2} + \mathcal{O}(h^4)$$

**Idée** approximation rationnelle (cf L. Collatz, 1965, S. Lele 1994)

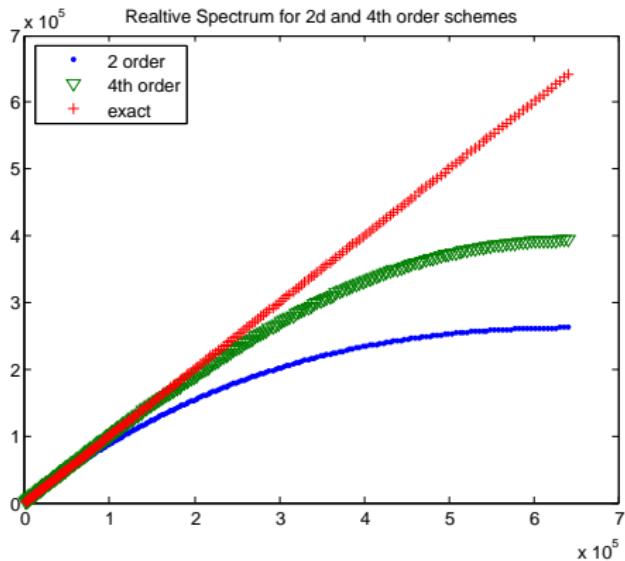
$$\begin{aligned} f_i'' + \alpha \frac{f_{i+1}'' + f_{i-1}''}{2} &= a \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2.f_i}{h^2} + b \frac{f_{i+2} + f_{i-2} - 2.f_i}{4h^2} \\ &\quad + \beta \frac{f_{i+2}'' + f_{i-2}''}{2} + c \frac{f_{i+3} + f_{i-3} - 2.f_i}{9h^2}. \end{aligned}$$

Formule de fermeture

$$\begin{aligned} f_1'' + \alpha \frac{f_2'' + 0}{2} &= a_1 \frac{f_2 + f_0 - 2.f_1}{h^2} + a_2 \frac{f_3 + 2.f_0 - 3.f_1}{3h^2} \\ &\quad + a_3 \frac{f_4 + 3.f_0 - 4.f_1}{6h^2} + a_4 \frac{f_5 + 4.f_0 - 5.f_1}{10h^2}. \end{aligned}$$

## PROPRIÉTÉS

- ▶ Meilleure représentation des fréquences
- ▶ Facilement étendu en dimensions 2 et 3
- ▶ Mise en œuvre efficace et stable (compatible avec parallèle)
- ▶ Adaptable sur grilles non régulières (C-Miranville, M2AN, 1998)
- ▶ Fournit une jolie application du calcul formel



## REMARQUE

On peut construire des schémas compacts en utilisant la solution du pb

$$\frac{2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{h^2} = -u''(x_i) - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i) + \mathcal{O}(h^4)$$

or  $-u''(x_i) = f(x_i)$  donc  $-u^{(4)}(x_i) = f''(x_i)$

Ainsi

$$\frac{2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{h^2} = f(x_i) + \frac{2f(x_i) - f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{12} + \mathcal{O}(h^4)$$

Même pcp en dimensions 2 et 3

NSE (Liu-Wang, Ben Artzi-Croisille)

# RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE QUELQUES EDP

## ► Problème de Poisson

$$-\Delta u = f$$

Classique et avec trou

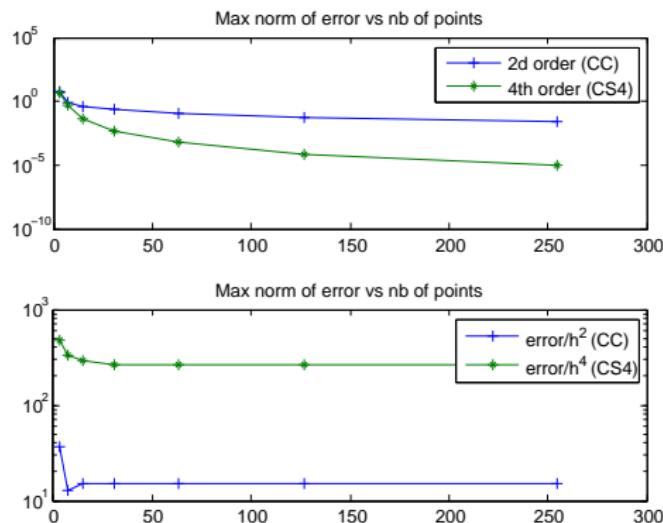
## ► Problème de Stokes

$$\begin{aligned} -\frac{1}{Re} \Delta u + \nabla p &= f \\ \operatorname{div}(u) &= 0 \end{aligned}$$

## ► Problème de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} -\frac{1}{Re} \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p &= f \\ \operatorname{div}(u) &= 0 \end{aligned}$$

## Poisson



## Poisson, domaine à trous

## MÉTHODE DES DOMAINES FICTIFS

$$-\Delta u = f \quad x \in \Omega \setminus C$$

$$u = 0 \quad \partial\Omega$$

$$u = 0 \quad \partial C$$

$$\begin{aligned} -\Delta u + \frac{1}{\nu} \chi_C u &= f \quad x \in \Omega \\ u &= 0 \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

Avec  $0 < \nu \ll 1$ .

Angot, Bruneau, Fabrie (Navier-Stokes), Pironneau, Glowinski, Maury

## Poisson, domaine à trous

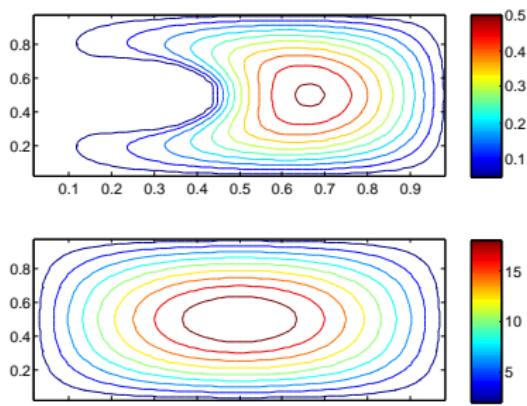
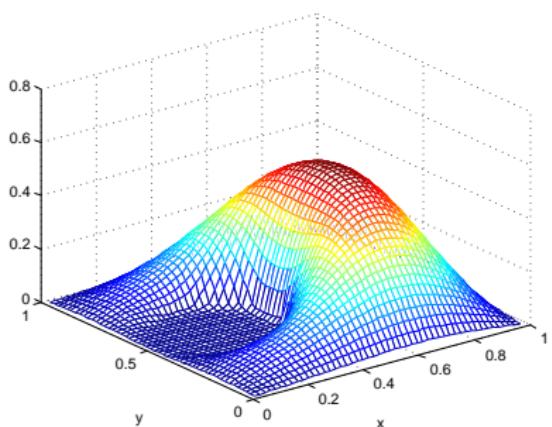


FIGURE: Pb de Dirichlet ds domaine troué

## Problème de Stokes

$$\begin{aligned} -\frac{1}{Re} \Delta u + \nabla p &= f \\ \operatorname{div}(u) &= 0 \end{aligned}$$

## DISCRÉTISATION ET RÉSOLUTION

- ▶ Grilles décalées (MAC) pour avoir compatibilité des discréttisation de la divergence et du gradient ( $\operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \Delta$ )

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ B_1^T & B_2^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Méthode d'Uzawa : méthode de descente sur le complément de Schur

$$SP = G \text{ avec } S = B_1^T A_1^{-1} B_1 + B_2^T A_2^{-1} B_2$$

$\frac{9h}{2}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	.
$\frac{7h}{2}$	.	$v$	.	$v$	.	$v$	.	$v$	.	$v$	.	$v$	.	.
.	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	.
$\frac{5h}{2}$	.	$v$	.	$v$	.	$v$	.	$v$	.	$v$	.	$v$	.	.
.	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	.
$\frac{3h}{2}$	.	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	.	.
.	$v$	.	$v$	.	$v$	.	$v$	.	$v$	.	$v$	.	$v$	.
$\frac{h}{2}$	.	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	$u$	$p$	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	$\frac{h}{2}$		$\frac{3h}{2}$		$\frac{5h}{2}$		$\frac{7h}{2}$		$\frac{9h}{2}$					

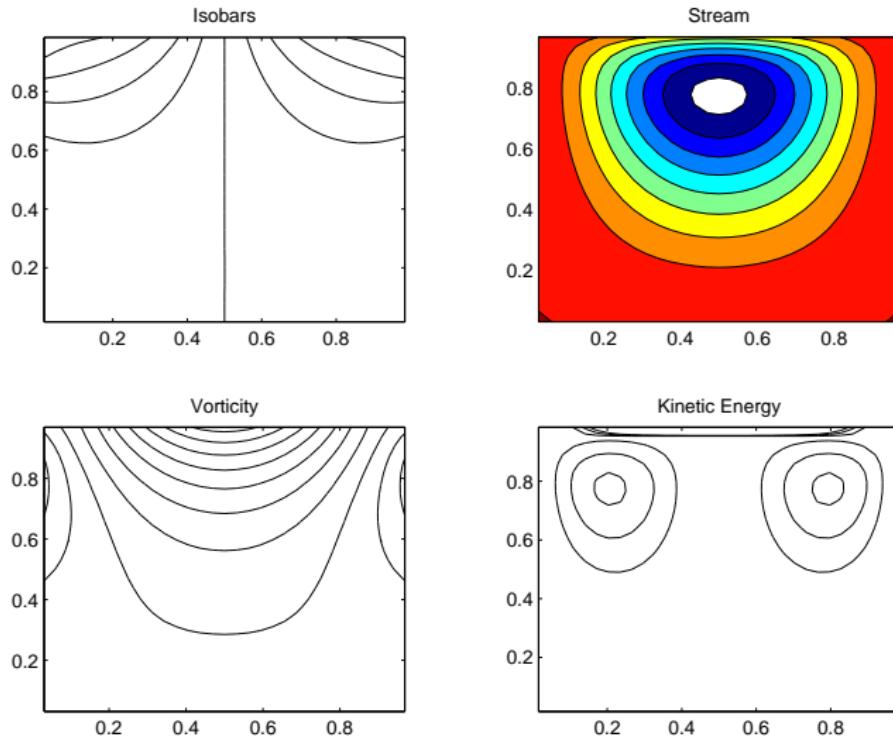


FIGURE: Solution du Pb de Stokes ( $Re=1000$ )

## Problème de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$$

## DISCRÉTISATION ET RÉSOLUTION

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} \frac{dU}{dt} \\ \frac{dV}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ B_1^T & B_2^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(U, V) \\ G(U, V) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Point fixe ou de Newton (Uzawa partie linéaire)
- ▶ (Cas évolutif) Méthode des projections (Chorin-Temam)

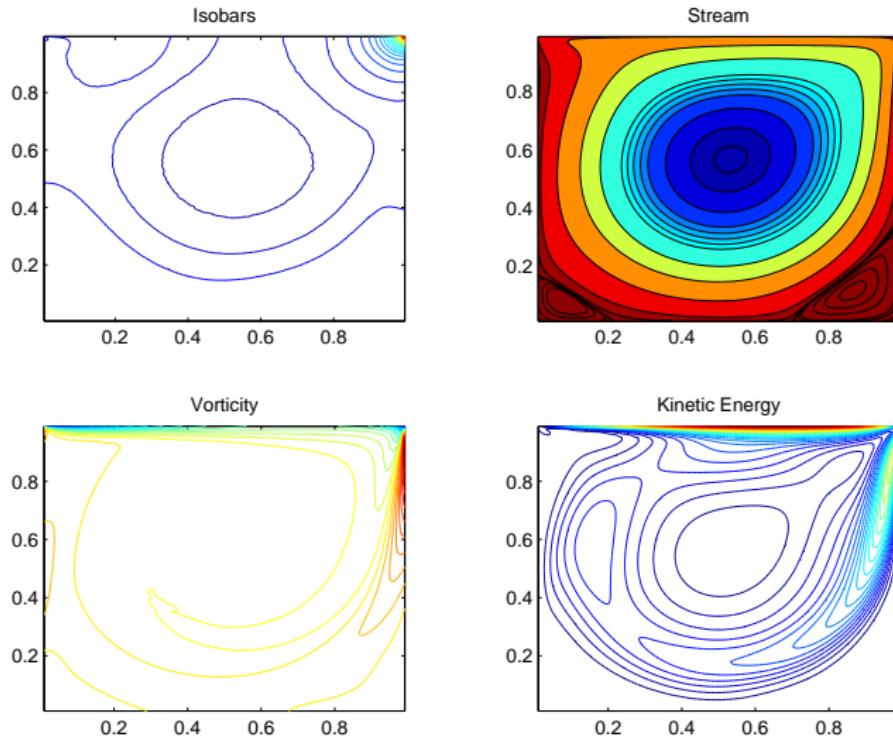


FIGURE: Solution du Pb de Navier-Stokes ( $Re=1000$ ),  $N=127$

## CONCLUSION

- ▶ Simple
- ▶ souple : conditions aux limites variés et ordre élevé possible.
- ▶ Existence de solveurs rapides quand domaine est un pavé (FFT, Multigrille)
- ▶ Limitation de la géométrie mais s'applique à des situations plus tordues (Domaines fictifs)