M1 IM IMPA
29/11/2023 – 01/12/2023.

Partiel.

Question (b).

$$\begin{cases} -u'' = 1 & (E) \\ u(0) - \alpha u'(0) = \alpha \mathcal{E} \\ u(1) + \alpha u'(1) = \alpha \mathcal{E} \end{cases}$$

On intègre (E) sur $[0,x]$ pour $x \in [0,1]$.

On a $-\int_0^x u''(s)\,ds = \int_0^x ds$

$\Leftrightarrow -u'(x) + u'(0) = x \quad (1)$

On réintègre une deuxième fois (1)

$$-\int_0^x u'(s)\,ds + \int_0^x u'(0)\,ds = \int_0^x s\,ds$$

Cela donne

$$-u(x) + u(0) + u'(0)x = \frac{x^2}{2}$$

D'où $\forall x \in [0;1]$

$$\boxed{u(x) = u(0) + u'(0)x - \frac{x^2}{2}.} \quad (2)$$

(2) en $x = 1$ donne :

$$\boxed{u(1) = u(0) + u'(0) - \frac{1}{2}.}$$

Si on dérive la relation (2) par rapport à x, on a

$$u'(x) = u'(0) - x \quad (3)$$

En faisant $x=1$ dans (3), on obtient

$$\boxed{u'(1) = u'(0) - 1.}$$

On utilise maintenant les conditions de bords:

$$\begin{cases} u(0) - \alpha u'(0) = g_0 \\ u(1) + \alpha u'(1) = g_1. \end{cases}$$

On utilise $\boxed{}$ dans la deuxième équation. Cela donne

$$\begin{cases} u(0) - \alpha u'(0) = g_0 \\ \underbrace{u(0) + u'(0) - \frac{1}{2}}_{u(1)} + \alpha \underbrace{(u'(0) - 1)}_{u'(1)} = g_1 \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{\begin{cases} \underbrace{u(0)} - \alpha \underbrace{u'(0)} = g_0 & (4) \\ \underbrace{u(0)} + (1+\alpha) \underbrace{u'(0)} = g_1 + \frac{1}{2} + \alpha & (5) \end{cases}}$$

Système de 2 équations à 2 inconnues.

$\smile$ inconnues.

(5) − (4) donne

$$(1+\alpha) u'(0) + \alpha u'(0) = g_1 - g_0 + \frac{1}{2} + \alpha$$

D'où $(1 + 2\alpha) u'(0) = g_1 - g_0 + 1/2 + \alpha$

$$u'(0) = \frac{1}{1+2\alpha} (g_1 - g_0 + 1/2 + \alpha)$$

Dans la question (b) $g_0 = g_1 = \alpha \varepsilon$, donc

$$u'(0) = \frac{1}{1+2\alpha} (1/2 + \alpha)$$

$$u'(0) = \frac{1}{2}$$

Puis $u(0) = \dfrac{\alpha}{2} + \alpha \varepsilon$ par (4)

Donc $\forall x \in [0,1]$, $u(x) = \dfrac{\alpha}{2} + \alpha\varepsilon + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{x^2}{2}$.

On vérifie maintenant que $u : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\alpha}{2} + \alpha\varepsilon + \frac{1}{2}x - \dfrac{x^2}{2}$ convient bien.

* u est polynomiale donc $\mathcal{C}^2([0,1])$
* $\forall x \in [0;1]$, $u'(x) = \dfrac{1}{2} - x$

  et $u''(x) = -1$

  Donc $\forall x \in [0;1]$ $-u''(x) = 1$.
* $\begin{cases} u(0) - \alpha u'(0) = \dfrac{\alpha}{2} + \alpha\varepsilon - \alpha\dfrac{1}{2} = \alpha\varepsilon = g_0 \\ u(1) + \alpha u'(1) = \dfrac{\alpha}{2} + \alpha\varepsilon + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + \alpha\left(\dfrac{1}{2} - 1\right) = \alpha\varepsilon = g_1 \end{cases}$

u est donc bien solution du problème considéré.