FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 2
CONVERGENCES STOCHASTIQUES ET THÉORÈMES LIMITES.

Dans tous les exercices, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne l'espace de probabilité sous-jacent. Les exercices plus difficiles ou faisant intervenir des notions avancées de théorie de la mesure sont indiqués par un astérisque.

1. Convergences stochastiques

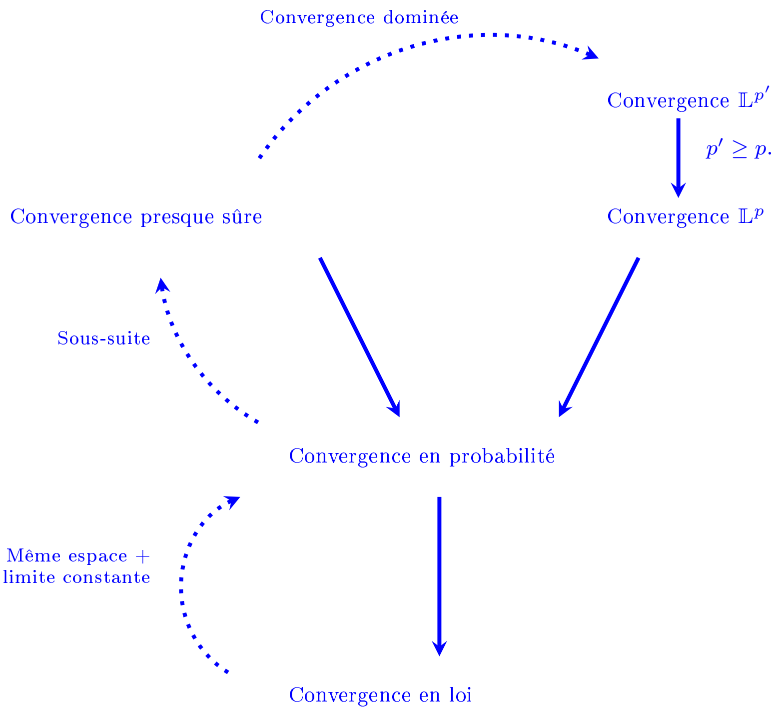
Exercice 1.
Rappeler les définitions de la convergence presque sûre, de la convergence dans $\mathbb{L}^p$, de la convergence en probabilité et de la convergence en loi. Indiquer les liens entre les différents types de convergence.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X si $\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega,\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1$.
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0$.
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{L}^p$ pour $p \geq 1$ vers X si $X_n, X \in \mathbb{L}^p$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] = 0$.
- On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X en loi si pour toute fonction *continue bornée* g on a $\mathbb{E}[g(X_n)] \to \mathbb{E}[g(X)]$.

(Pour cette dernière définition, il n'est pas nécessaire que les v.a. soient définies sur le même espace.)

Finalement, le diagramme suivant donne les différents liens entre les convergences.



Exercice 2.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui converge en loi vers une *constante* $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi en probabilité vers a.

On rappelle que, comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $a \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}\left(X_n \leq x\right) \to \mathbb{P}\left(a \leq x\right) = \mathbf{1}_{[a,+\infty)}(x).$$

Donc pour $\varepsilon > 0$, $F_{X_n}(a+\varepsilon) \to 1$ et $F_{X_n}(a-\varepsilon) \to 0$. Par ailleurs

$$\mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n - a > \varepsilon \text{ ou } X_n - a < \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(X_n \leq a+\varepsilon) + \mathbb{P}(X_n < a - \varepsilon).$$

De plus

$$\mathbb{P}(X_n < a-\varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n \leq a-\varepsilon),$$

ainsi

$$\mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) \leq 1 - F_{X_n}(a+\varepsilon) + F_{X_n}(a-\varepsilon).$$

En faisant tendre n vers ∞, on obtient bien $\mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) \to 0$.

* **Exercice 3.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une autre variable aléatoire, toutes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que $\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}$ est un événement.

On rappelle que pour $\omega \in \Omega$, la suite (rélle) $\big(X_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $X(\omega)$ si

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \quad |X_n(\omega) - X(\omega)| < 1/m.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\Big\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\Big\} = \Big\{\omega\in\Omega \ / \ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big\} &= \bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n_0\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq n_0}\{\,\omega\in\Omega \ / \ |X_n(\omega)-X(\omega)| < 1/m\,\} \\ &= \bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n_0\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq n_0}(X_n - X)^{-1}\Big(\big]-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\big[\Big).\end{aligned}$$

Les variables aléatoires sont, par définition, des fonctions mesurables de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donc les ensembles $\big(X_n - X\big)^{-1}\left(\left]-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right[\right)$ sont des événements (i.e. appartiennent à la tribu $\mathcal{F}$). Et, par définition d'une tribu, $\big\{\lim_{n\geq 0} X_n = X\big\}$ est bien également un événement.

* **Exercice 4.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une autre variable aléatoire, toutes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. On suppose que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) < \infty.$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X.
On pourra utiliser le premier lemme de Borel-Cantelli.

On rappelle le premier lemme de Borel-Cantelli (démontré dans la feuille de TD 0) :

Théorème. *Soit $(A_n)_n$ une suite d'événement d'un même espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. On suppose que*

$$\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(A_k) < +\infty.$$

Alors

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0, \quad \textit{où} \quad \limsup_n A_n = \bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n} A_k.$$

Fixons maintenant $m\in\mathbb{N}^*$, grâce à l'hypothèse de l'exercice, en prenant $\epsilon = 1/m$, et au Lemme de Borel-Cantelli, on sait que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \{\,|X_n - X| > 1/m\,\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n}\{\,|X_k - X| > 1/m\,\}\right) = 0.$$

Comme ceci est vrai pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ (qui est dénombrable), on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n}\{\,|X_k - X| > 1/m\,\}\right) \leq \sum_{m\geq 1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n}\{\,|X_k - X| > 1/m\,\}\right) = 0.$$

En passant au complémentaire, on a alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq 0}\bigcap_{k\geq n}\{\,|X_k - X| > 1/m\,\}\right) = 1,$$

soit d'après l'exercice 3, on a donc

$$\mathbb{P}(\lim X_n = X) = 1,$$

ce qui veut dire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètres p_n dans $[0,1]$.

(1) On suppose que $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

(a) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité et donner sa limite.

On a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \lim_{n\to\infty} p_n = 0.$$

Donc $X_n \mapsto 0$ en probabilité.

(b) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également dans $\mathbb{L}^1$.

On a

$$\mathbb{E}[|X_n - 0|] = \mathbb{E}[X_n] = p_n.$$

Ainsi $X_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$.

*(2) À quelle condition sur les paramètres p_n, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle $\mathbb{P}$-p.s. vers 0 ?

On montre que la convergence a lieu $\mathbb{P}$-p.s. ssi $\sum_{n\geq 0} p_n < +\infty$.

$\Leftarrow$) On utilise le résultat de l'exercice 4. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n\geq 0} p_n < +\infty,$$

et donc $(X_n)_n$ converge vers X presque sûrement

$\Rightarrow$) Réciproquement, on va raisonner par contraposée et utiliser le second lemme de Borel Cantelli (démontré dans la feuille de TD 0) : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements *indépendants* telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right) = 1 \quad \text{où} \quad \limsup_n A_n = \bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n} A_k.$$

On suppose donc que $\sum_{n\geq 0} p_n = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_n = 1) = +\infty$. Les variables X_n étant indépendantes, on obtient que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n}\{X_n = 1\}\right) = 1$$

soit

$$\mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, X_n = 1) = 1.$$

Ainsi, p.s., une infinité de variables sont égales à 1 et il n'y a pas convergence vers 0.

(3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = nX_n$. À quelle condition sur les paramètres p_n la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en probabilité vers 0 ? dans $\mathbb{L}^1$?

De la même façon que précédemment, on a pour tout $\varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}\left(X_n > \frac{\varepsilon}{n}\right) = p_n$. Ainsi $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en probabilité si $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

Par ailleurs $\mathbb{E}[|Y_n - 0|] = \mathbb{E}[Y_n] = np_n$, ainsi $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathbb{L}^1$ si $p_n = o(n^{-1})$.

Exercice 6. On se donne un réel $p \geq 1$ et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant en norme $\mathbb{L}^p$ vers une v.a. X. Montrer que, pour tout $1 \leq r \leq p$,

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n\|_r = \|X\|_r.$$

Pour toute v.a. $Y \in \mathbb{L}^p$, comme $r \leq p$, on a $\|Y\|_r \leq \|Y\|_p$. Ainsi la v.a. X et les v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $\mathbb{L}^r$. De plus, l'application $\|\cdot\|_r$ étant une norme, la seconde inégalité triangulaire donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\|X_n\|_r - \|X\|_r| \leq \|X_n - X\|_r \leq \|X_n - X\|_p.$$

On a donc bien convergence des moments d'ordre inférieur à p.

Exercice 7.

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = (-1)^n X$.

(1) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi et donner sa limite.

On se rappelle que si X est une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite, alors $-X \sim X$, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim X$. Soit g une fonction continue et bornée, alors

$$\mathbb{E}[g(X_n)] = \mathbb{E}[g(X)].$$

Par définition de la convergence en loi, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$.

(2) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en probabilité.

On a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_{2n} - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(0 > \varepsilon) = 0,$$

donc (X_{2n}) converge vers X en probabilité. Et

$$\mathbb{P}(|X_{2n+1} - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(2|X| > \varepsilon) = \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{2\pi}}.$$

Cette dernière quantité ne converge pas vers 0. Ainsi $(X_{2n+1})_n$ ne converge pas vers X en probabilité, et donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers X en probabilité. Et comme il existe une sous-suite de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers cette variable, la suite ne peut pas avoir de limite en probabilité.

* **Exercice 8.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ convergeant en probabilité vers une v.a. X.

(1) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la convergence en probabilité i.e.

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N, \quad \mathbb{P}(|X_n - X_m| > \epsilon) < \delta.$$

Soit $\varepsilon, \delta > 0$. Remarquons tout d'abord que

$$\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}([X_n - X| + |X_m - X| > \varepsilon).$$

Par ailleurs ,on remarque également que si $a, b > 0$ et $a + b > \varepsilon$ alors, soit $a > \varepsilon/2$, soit $b > \varepsilon/2$ (le contraire amène à une contradiction). Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|X_n - X_m| > \varepsilon\right) &\leq \mathbb{P}\left(\{|X_n - X| > \varepsilon/2\} \cup \{|X_m - X| > \varepsilon/2\}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon/2\right) + \mathbb{P}\left(|X_m - X| > \varepsilon/2\right).\end{aligned}$$

De plus, comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X, il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $k \geq N$,

$$\mathbb{P}\left(|X_k - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Le résultat est donc vrai pour $n, m \geq N$.

(2) On pose $n_0 = 1$ et pour $j \geq 1$,

$$n_j = \inf\{k > n_{j-1},\ \forall p, q \geq k,\ \mathbb{P}(|X_p - X_q| > 1/2^j) < 1/3^j\}.$$

Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $n_j < \infty$.

Dans la question précédente, on prend $\varepsilon = \frac{1}{2^j}$ et $\delta = \frac{1}{3^j}$ ainsi que le N précédent. Pour tout $p, q \geq N$,

$$\mathbb{P}\left(|X_p - X_q| > \frac{1}{2^j}\right) < \frac{1}{3^j}.$$

Donc l'ensemble d'entiers sur lequel on doit prendre l'infimum est non vide et $n_j < +\infty$.

(3) Montrer que la suite $(X_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement de Cauchy. En déduire qu'elle converge p.s. vers X.

Remarquons que par construction, $n_{j+1} > n_j$ et que donc

$$\mathbb{P}\left(|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > \frac{1}{2^j}\right) \leq \frac{1}{3^j}.$$

Le premier lemme de Borel Cantelli appliqué aux événements $\left\{|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > \frac{1}{2^j}\right\}$ donne donc

$$\mathbb{P}\left(\limsup_j \left\{|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > \frac{1}{2^j}\right\}\right) = 0, \tag{1}$$

c'est à dire que

$$\mathbb{P}\left(\exists J \geq 0,\ \forall k \geq J,\ |X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| \leq \frac{1}{2^k}\right) = 1.$$

Soit $\epsilon > 0$ et fixons un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{N-1}} \leq \varepsilon$. Alors, d'après (1), presque sûrement, il existe une v.a. $J \geq 0$ telle que

$$\forall k \geq J,\ |X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Et, pour tout $j \geq \max(J, N)$ et $k \geq 0$,

$$|X_{n_{j+k}} - X_{n_j}| \leq \sum_{\ell=j}^{j+k-1} |X_{n_{\ell+1}} - X_{n_\ell}| \leq \sum_{\ell=j}^{j+k-1} \frac{1}{2^\ell} \leq \sum_{\ell \geq N} \frac{1}{2^\ell} = \frac{1}{2^{N-1}} \leq \varepsilon \quad \text{p.s.}$$

Cela montre que $(X_{n_j})_j$ est presque sûrement de Cauchy. Elle converge donc presque sûrement. La converge presque sûre impliquant la convergence en probabilité, et la limite de (X_{n_j}) en probabilité étant X, la sous-suite converge presque sûrement vers X.

* **Exercice 9.** Pour deux variables aléatoires X et Y définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on pose

$$d(X,Y) = \mathbb{E}\left[|X-Y| \wedge 1\right].$$

(1) Montrer que d définit une distance sur l'ensemble des (classes de) variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On rappelle qu'une distance d sur un espace E est une application symétrique de $E^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que

— pour tout $x, y \in E$, $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

— pour tout $x, y, z \in E$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

On rappelle également que l'on identifie les variables aléatoires et leur classe d'équivalence par égalité presque sûre.

— L'application d est clairement symétrique, vu que $|X-Y| = |Y-X|$, et positive.

— $d(X,X)$ est nulle et si $d(X,Y) = 0$, alors la v.a. positive $|X-Y| \wedge 1$ étant d'espérance nulle, cette v.a. est nulle presque sûrement et donc $X = Y$ p.s.

— Finalement, si $a, b > 0$, on a $(a+b) \wedge 1 \leq a \wedge 1 + b \wedge 1$. Grâce à l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on a $|X-Z| \leq |X-Y| + |Y-Z|$ et donc, par linéarité de l'espérance, $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$

(2) Montrer qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable X ssi

$$\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = 0\ .$$

$\Rightarrow$) On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X. Alors, pour $0 < \varepsilon \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 1] &= \mathbb{E}\left[(|X_n - X| \wedge 1)\, \mathbf{1}_{|X_n - X| \leq \varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[(|X_n - X| \wedge 1)\, \mathbf{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}\right] \\ &\leq \varepsilon + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon).\end{aligned}$$

Pour borner le premier terme, nous avons utilisé qu'une indicatrice est toujours plus petite que 1 et pour borner le second terme, que $\cdot \wedge 1 \leq 1$. Par ailleurs comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X, on sait qu'il existe un entier $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \varepsilon$. Ainsi pour tout $n \geq N$, $d(X_n, X) \leq 2\varepsilon$ i.e. $d(X_n, X)$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞.

$\Leftarrow$) On suppose maintenant que $d(X_n, X) \to 0$. Remarquons que

$$|X_n - X| \wedge 1 = |X_n - X| \mathbf{1}_{|X_n - X| \leq 1} + \mathbf{1}_{|X_n - X| > 1}.$$

On a ainsi

$$d(X_n, X) = \mathbb{E}\left[|X_n - X| \mathbf{1}_{|X_n - X| \leq 1}\right] + \mathbb{P}(|X_n - X| > 1),$$

donc, pour $\varepsilon \geq 1$,

$$0 \leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| > 1) \leq d(X_n, X) \to 0.$$

Par ailleurs, pour $0 < \varepsilon < 1$, on a

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|X_n - X| \wedge 1 > \varepsilon\right)$$

et l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| \wedge 1 > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 1]}{\epsilon} = \frac{d(X_n, X)}{\epsilon} \to 0.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \to 0.$$

et on a montré que la distance d est associée la convergence en probabilité.

Exercice 10. *Il n'y a pas d'équivalent du lemme de Césaro pour la convergence en probabilité.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que la fonction de répartition de X_n est définie par

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{x+n} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On note de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$.

(1) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 en probabilité.

On rappelle que

$$\mathbb{P}\left(|X_n| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(X_n < -\varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(X_n > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(X_n < -\varepsilon\right) + 1 - F_n(\varepsilon).$$

Grâce à la forme de la fonction de répartition de X_n on voit que $\mathbb{P}\left(X_n < -\varepsilon\right) \leq F_n(-\varepsilon) = 0$. Donc, on a

$$\mathbb{P}\left(|X_n| > \varepsilon\right) = \frac{1}{n+\varepsilon} \to_{n\to\infty} 0,$$

et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers 0.

(2) On introduit la variable $Y_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$. Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Y_n \leq x) \leq \left(1 - \frac{1}{x+n}\right)^n.$$

On rappelle que les $(X_n)_n$ sont des variables indépendantes positives. Ainsi pour tout $x > 0$

$$\mathbb{P}\left(Y_n \leq -x\right) = 0$$

et pour $x \geq 0$, par indépendance des X_i,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y_n \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq x\right) = \mathbb{P}\left(X_1 \leq x \text{ et } \cdots \text{ et } X_n \leq x\right)\\ &= \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}\left(X_i \leq x\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{i+x}\right).\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on a pour $x \geq 0$,

$$1 - \frac{1}{i+x} \leq 1 - \frac{1}{n+x},$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(x) \leq \left(1 - \frac{1}{n+x}\right)^n \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x).$$

(3) En déduire que, pour tout $\epsilon > 0$, $\liminf_n \mathbb{P}(\epsilon < \frac{Y_n}{n}) > 0$ puis que $\left(\overline{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité vers 0.

Pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} > \varepsilon\right) = 1 - F_{Y_n}(n\varepsilon) \geq 1 - \left(1 - \frac{1}{n+n\varepsilon}\right)^n.$$

On remarque alors que, pour $x \geq 0$,

$$\left(1 - \frac{1}{n+nx}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+nx}\right)} = e^{-\frac{n}{n+nx}+o(1)} \to_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{1+x}}.$$

Ainsi,

$$\liminf_n \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} > \varepsilon\right) \geq 1 - e^{-\frac{1}{1+\varepsilon}} > 0.$$

On remarque maintenant que

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > \varepsilon\right) \geq \mathbb{P}\left(\frac{\max_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i}{n} > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} > \varepsilon\right).$$

Et donc

$$\liminf_n \mathbb{P}\left(\overline{X}_n > \varepsilon\right) \geq 1 - e^{-\frac{1}{1+\varepsilon}} > 0,$$

en particulier $\left(\overline{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 en probabilité, ce qui montre bien que le lemme de Césaro ne fonctionne pas pour la convergence en probabilité.

2. Convergence en loi

Exercice 11.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n ait pour densité la fonction $f_n(x) = nx^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

(1) Montrer que f_n est bien une densité de probabilité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si
- f est mesurable et positive.
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$.

La fonction f_n est continue sauf en deux points, elle est donc mesurable. Par ailleurs elle est positive. De plus

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 nx^{n-1}\,\mathrm{d}\,x = 1.$$

On peut donc en déduire que f_n est une densité de probabilité.

(2) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la constante 1.

Remarquons que, presque sûrement, $X_n \in [0,1]$. Ainsi pour tout $x < 0$, $F_{X_n}(x) = 0$ et pour tout $x \geq 1$, $F_{X_n}(x) = 1$. De plus pour $x \in [0,1]$, on a

$$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}\left(X_n \leq x\right) = \int_0^x nx^{n-1}\,\mathrm{d}\,x = x^n.$$

Donc pour $x \in [0,1[$, $F_{X_n}(x) \to 0$. Ainsi F_{X_n} converge simplement vers $\mathbf{1}_{[1,+\infty[}$, qui est la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante égale à 1. Donc X_n converge en loi vers 1.

Exercice 12. *Dans cet exercice, on pourra utiliser les fonctions caractéristiques.*

(1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. telle que $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. On suppose que $\lim_n m_n = m \in \mathbb{R}$ et $\lim_n \sigma_n^2 = \sigma^2 \geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi et préciser sa limite.

On rappelle que la fonction caractéristique d'une variable qui suit la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ vaut $t \mapsto e^{itm-\frac{\sigma^2 t}{2}}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{itm_n - \frac{\sigma_n^2 t}{2}} = e^{itm-\frac{\sigma^2 t}{2}}.$$

Grâce au théorème de Lévy, on sait donc que

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2).$$

*(2) Soit $\lambda > 0$. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.

On rappelle que la fonction caractéristique d'une variable de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est $t \mapsto \left(1 + p\left(e^{it} - 1\right)\right)^n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_{X_n}(t) = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\left(e^{it} - 1\right)\right)^n.$$

Comme nous travaillons avec des nombres complexes, nous ne pouvons utiliser le développement limité du logarithme népérien pour montrer que $(1+z/n)^n \to e^z$. Pour éviter l'utilisation d'outils d'analyse complexe un peu élaborés, nous allons montrer qu'on peut se ramener au cas réel en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\left|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}\right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right| |z|^k \end{aligned} \tag{2}$$

Remarquons maintenant que pour tout $k \leq n$,

$$\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \prod_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{n}\right) \geq 0.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right||z|^k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)|z|^k$$

et on peut faire le cheminement inverse de celui de l'inégalité (2), avec $|z|$, pour obtenir :

$$|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n| \leq e^{|z|} - \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n$$

Comme $|z| \in \mathbb{R}$, on peut maintenant utiliser le développement limité du logarithme népérien pour montrer que

$$\lim_{n\to\infty} e^{|z|} - \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n = 0$$

et donc que $(1+\frac{z}{n})^n$ converge vers e^z pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$. Cela nous permet de revenir à la convergence des fonctions caractéristiques :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

On reconnaît la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre λ. Ainsi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 13. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$. On note $M_n = \max(U_1, U_2, ..., U_n)$.

(1) Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers 1.

On remarque que, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [0,1]$, on a également $M_n \in [0,1]$, p.s. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(M_n > 1+\varepsilon) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|M_n - 1| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(M_n > 1+\varepsilon \text{ ou } M_n < 1-\varepsilon) = \mathbb{P}(M_n \leq 1-\varepsilon)\\ &= \mathbb{P}(U_1 \leq 1-\varepsilon, \cdots, U_n \leq 1-\varepsilon) = \prod_{i=1}^n F_{U_i}(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n.\end{aligned}$$

On a utilisé que les variable $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étaient i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$ pour les deux dernières égalités. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|M_n - 1| > \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} (1-\varepsilon)^n = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < +\infty.$$

Donc, d'après un critère du cours (voir aussi l'exercice 4), on sait que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 1.

(2) On considère maintenant la suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = n(1 - M_n)$.

(a) Quelle est la fonction de répartition de X_n ?

On fait le même calcul que précédemment. Tout d'abord on note que presque sûrement $0 \leq X_n \leq n$. Par ailleurs, pour $0 \leq x \leq n$

$$\begin{aligned}F_{X_n}(x) =& \mathbb{P}(n(1-M_n) \leq x)\\ =& \mathbb{P}\left(M_n \geq 1 - \frac{x}{n}\right)\\ =& 1 - \mathbb{P}\left(U_1 \leq 1 - \frac{x}{n}\right)^n\\ =& 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-\frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0; n[\\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}.$$

(b) Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Grâce à la question précédente, on sait que pour tout $x < 0$, $F_{X_n}(x) = 0$. Par ailleurs, on sait également que pour tout $x \geq 0$ on a

$$\forall n \geq x, \quad F_{X_n}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - e^{n\log(1-x/n)} = 1 - e^{-x+o(1)}.$$

Donc, la fonction de répartition de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1.

*** Exercice 14.**
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrer la loi faible des grands nombres dans le cas $\mathbb{L}^2$ puis la loi forte des grands nombres dans le cas $\mathbb{L}^4$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_1 \in \mathbb{L}^2$ et on note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X_1 - m)^2]$. Notons tout d'abord que comme les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes et dans $\mathbb{L}^2$, on a

$$\mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[X_i] = n\sigma^2.$$

On a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n (X_i - m)\right| > n\varepsilon\right).$$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et on obtient

$$\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Ainsi, lorsque $n \to \infty$, on a $\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon\right) \to 0$ et $\overline{X}_n$ converge vers m en probabilité.

On suppose désormais que $X_1 \in \mathbb{L}^4$. On a en utilisant l'inégalité de Markov ,

$$\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n (X_i - m)\right|^4 > n^4\varepsilon^4\right) \leq \frac{1}{n^4\varepsilon^4}\mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^n (X_i - m)\right|^4\right].$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^n (X_i - m)\right|^4\right] =& \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[(X_i - m)^4\right] + 3\sum_{i\neq j} \mathbb{E}\left[(X_i - m)^2(X_j - m)^2\right] \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k,l\in\{1,\cdots,n\} \\ \text{au moins un indice est différent des 3 autres}}} \mathbb{E}\left[(X_i - m)(X_j - m)(X_k - m)(X_l - m)\right] \\ =& n\mathbb{E}\left[(X_1 - m)^4\right] + 3n(n-1)\sigma^4\end{aligned}$$

En effet, chaque terme de la seconde somme vaut σ^4 et le dernier terme vaut 0 par indépendance. On a donc (en utilisant que $n(n-1) \leq n^2$

$$\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[(X_1 - m)^4\right]}{\varepsilon^4 n^3} + \frac{3\sigma^4}{\varepsilon^4 n^2}.$$

On a donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - m| > \varepsilon) < +\infty$$

et, par le critère du cours (cf exercice 4), $(\overline{X}_n)_n$ converge presque sûrement vers m.

Exercice 15.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables réelles $\mathbb{L}^2$ i.i.d . On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$. Pour tout $n \geq 2$, on définit les variables aléatoires

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \text{ et } \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X}_n)^2.$$

(1) Calculer, pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{E}[\overline{X}_n]$, $\mathbb{V}\left[\overline{X}_n\right]$ et $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2]$.

Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = m.$$

De plus, comme les variables sont indépendantes,

$$\mathbb{V}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{V}[X_k] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Par ailleurs, notons que

$$
\begin{aligned}
(n-1)\hat{\sigma}_n^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left[(X_k-m)^2 - 2(X_k-m)(\overline{X}_n-m) + (\overline{X}_n-m)^2\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2\right] - 2(\overline{X}_n-m)\left[\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)\right] + n(\overline{X}_n-m)^2 \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2\right] - 2n(\overline{X}_n-m)^2 + n(\overline{X}_n-m)^2.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2 - \frac{n}{n-1}(\overline{X}_n-m)^2.
$$

Et, par linéarité de l'espérance, on a

$$
\mathbb{E}\left[\hat{\sigma}_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\left[X_i\right] - \frac{n}{n-1}\mathbb{V}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{n}{n-1}\sigma^2 - \frac{1}{n-1}\sigma^2 = \sigma^2.
$$

Remarque : On comprends grâce à ce calcul que $\hat{\sigma}_n^2$ est construit (en particulier le $\frac{1}{n-1}$) de telle sorte que son espérance soit égale à la variance de X_1.

(2) Montrer que $(\overline{X}_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers m et que $(\hat{\sigma}_n^2)_{n\geq 2}$ converge p.s. vers σ^2.

Grâce à la Loi forte des Grands Nombres, on sait que $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} m$. Par ailleurs, la Loi forte des Grands Nombres s'applique aussi à la suite de variables aléatoires $\left((X_n-m)^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et donc

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2 \to \mathbb{E}[(X_1-m)^2] = \sigma^2 \quad \text{presque sûrement.}
$$

Ainsi, on a

$$
\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-m)^2 - \frac{n}{n-1}(\overline{X}_n-m)^2 \to \sigma^2 \quad \text{presque sûrement.}
$$

(3) Donner une application en statistique de ce résultat.

Ces deux quantités ($\overline{X}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$) sont appelées ***estimateurs sans biais*** de l'espérance et de la variance. Elles permettent de donner une approximation de l'espérance et de la variance dont l'espérance est égale aux quantités approchées. Afin d'étudier l'efficacité de ces estimateurs, on pourrait calculer le risque quadratique pour calculer l'erreur fixe ou utiliser le théorème central limite pour calculer l'erreur asymptotique. Ces points seront approfondis en cours de Statistiques.

Exercice 16. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$. Calculer la limite des variables aléatoires Z_n dans les cas suivants (on expliquera en quel sens la limite a lieu).

$$
Z_n^1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \quad Z_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2, \quad Z_n^3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{X_i\leq 1}
$$

$$
Z_n^4 = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}X_i, \quad Z_n^5 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}e^{\sqrt{X_i}}, \quad Z_n^6 = \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}e^{-X_i}}\right)^2.
$$

Une application directe de la Loi Forte des Grands Nombres montre que p.s. :

$$
\lim_n Z_n^1 = \mathbb{E}[X_1] = 1/\lambda, \quad \lim_n Z_n^2 = \mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 2/\lambda^2, \quad \lim_n Z_n^3 = \mathbb{P}\left(X_1 \leq 1\right) = 1 - e^{-\lambda}.
$$

De plus, $\lim_n Z_n^4 = \lim_n \sqrt{n}Z_n^1 = \infty$ et $e^{\sqrt{X_1}} \in \mathbb{L}^1$,

$$
\lim_n Z_n^5 = \lim_n \frac{1}{n} \times \lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\sqrt{X_i}} = 0 \times \mathbb{E}\left[e^{\sqrt{X_1}}\right] = 0
$$

Finalement, la fonction $x \to x^{-2}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en $\mathbb{E}\left[e^{-X_1}\right]$,

$$
\lim_n Z_n^6 = \left(\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{-X_i}\right)^{-2} = \left(\mathbb{E}\left[e^{-X_1}\right]\right)^{-2} = \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^2}.
$$

* **Exercice 17.** *LGN et v.a. non intégrables.*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. *non intégrables*. On note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$.

(1) (a) Montrer que $\{\overline{X}_n$ a une limite finie$\} \subset [\limsup\{|X_n| \geq n\}]^c$.

Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned}[\limsup\{|X_n| \geq n\}]^c &= \{\,\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |X_n| \geq n\,\}^c \\ &= \{\,\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |X_n| < n\,\}.\end{aligned}$$

On considère une réalisation de $(\overline{X}_n)_n$ ayant une limite finie, notée X. Remarquons que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\overline{X}_n - X = \frac{n-1}{n}\left(\overline{X}_{n-1} - X\right) + \frac{X_n - X}{n}$$

soit

$$\frac{X_n}{n} = (\overline{X}_n - X) - \frac{n-1}{n}\left(\overline{X}_{n-1} - X\right) + \frac{X}{n}.$$

Le terme de droite de l'égalité converge vers 0 lorsque n tend vers ∞, il en va donc de même pour X_n/n et donc à partir d'un certain rang, $|X_n| < n$.

(b) En déduire que $\overline{X}_n$ diverge p.s.

On rappelle le deuxième lemme de Borel Cantelli.

Théorème. *Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements indépendants d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que*

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty,$$

alors

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1.$$

Comme les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont i.i.d. et non intégrables, on a

$$+\infty = \mathbb{E}[\,|X_1|\,] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X_1| > x)\,\mathrm{d}\,x \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1} \mathbb{P}(|X_1| > x)\,\mathrm{d}\,x \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_1| > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| > n).$$

D'après le deuxième lemme de Borel Cantelli, les événement $\{\,|X_n| > n\,\}$ étant indépendants, on a

$$\mathbb{P}(\limsup_n \{\,|X_n| > n\,\}) = 1,$$

et par conséquence,

$$\mathbb{P}(\limsup_n \{\,|X_n| > n)^c\,\} = 0.$$

Grâce à la question précédente,

$$\mathbb{P}((\overline{X}_n)_n \text{ a une limite finie}) = 0.$$

(c) Montrer que $\overline{X}_n$ n'est pas bornée.

Si $(\overline{X}_n)_n$ est bornée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\overline{X}_n| \leq \frac{N}{2}$. De la même façon que précédemment, comme

$$\frac{X_n}{n} = \overline{X}_n - \frac{n-1}{n}\overline{X}_{n-1},$$

on a alors que, pour tout $n \geq 1$, $|X_n| \leq nN$. Donc

$$\begin{aligned}\left((\overline{X}_n)_n \text{ bornée}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} &= \bigcup_{N\geq 0}\bigcap_{n\geq 0}\{\,|\overline{X}_n| \leq N/2\,\} \subset \bigcup_{N\geq 0}\bigcap_{n\geq 1}\{\,X_n \leq nN\,\} \\ &\subset \bigcup_{N\geq 0}\bigcup_{n\geq 0}\bigcap_{k\geq n}\{\,X_k \leq kN\,\} = \bigcup_{N\geq 0}\left[\limsup_n \{\,X_n > nN\,\}\right]^c\end{aligned}$$

En raisonnant comme dans la question précédente, on a

$$\mathbb{P}\left(\left[\limsup_n \{\,X_n > nN\,\}\right]^c\right) = 0.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}\left((\overline{X}_n)_n \text{ bornée}\right) \leq \sum_N \mathbb{P}\left(\left[\limsup_n \{\,X_n > nN\,\}\right]^c\right) = 0.$$

(2) On suppose maintenant que les X_i sont $\mathbb{P}$-p.s. positives. Montrer que $\overline{X}_n$ diverge $\mathbb{P}$-p.s. vers l'infini.

Soit $M \in \mathbb{N}$, on note $Y_n^M = X_n \wedge M$. La suite $(Y_n^M)_n$ est une suite de variables aléatoires bornées. Par la loi forte de grands nombres, on a donc

$$\overline{Y}_n^M \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X_1 \wedge M].$$

Par ailleurs, les variables étant positives, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall M \geq 0, \quad \overline{X}_n \geq \overline{Y}_n^M.$$

Ainsi, presque sûrement,

$$\forall M \geq 0, \quad \liminf_n \overline{X}_n \geq \mathbb{E}[X_1 \wedge M].$$

De plus, par le théorème de converge monotone, on a $\lim_{M\to\infty} \mathbb{E}[X_1 \wedge M] = \mathbb{E}[X_1] = +\infty$. On a donc montré que $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} +\infty$.

Exercice 18. *Démonstration probabiliste du théorème de Bernstein*
Étant donnée une fonction f continue sur le segment $[0,1]$, on définit, pour tout rang $n \geq 1$, la fonction polynomiale

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\big(\frac{k}{n}\big).$$

(1) En introduisant, pour tout $x \in [0,1]$, une suite de v.a.i.i.d. de même loi de Bernoulli de paramètre x, $(\varepsilon_n(x))_{n\geq 1}$, et en posant $S_n(x) = \varepsilon_1(x) + \cdots + \varepsilon_n(x)$, interpréter $\mathcal{P}_n(x)$ comme une espérance.

On rappelle (en utilisant les fonctions caractéristiques par exemple) que si $(\varepsilon_n(x))_n$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{B}(x)$ pour $x \in [0,1]$, alors $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(x) \sim \mathcal{B}(n,x)$. Ainsi, pour toute fonction f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in [0,1], \quad \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = \mathcal{P}_n(x).$$

(2) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que

$$\forall \delta > 0, \forall x \in [0,1], \forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n(x)}{n} - x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Notons que

$$\frac{S_n(x)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(x).$$

Comme les variables aléatoires $\varepsilon_k(x)$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{B}(x)$, on a

$$\forall x \in [0,1,], \forall n \geq 1, \quad \mathbb{V}\left[\frac{S_n(x)}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\left[\varepsilon_k(x)\right] = \frac{1}{n}\mathbb{V}\left[\varepsilon_1(x)\right] = \frac{1}{n}x(1-x).$$

De plus, la fonction polynomiale $x \mapsto x(1-x)$ est maximum en $\frac{1}{2}$ où elle vaut $\frac{1}{4}$. Donc

$$\forall x \in [0,1,], \forall n \geq 1, \quad \mathbb{V}\left[\frac{S_n(x)}{n}\right] \leq \frac{1}{4n}.$$

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a donc

$$\forall \delta > 0, \forall x \in [0,1], \forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n(x)}{n} - x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{\mathbb{V}\left[S_n(x)/n\right]}{\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

(3) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|f(x) - \mathcal{P}_n(x)\right| = 0.$$

Notons tout d'abord que f est continue sur l'intervalle compact $[0,1]$. En particulier f est bornée par une constante $M>0$ et uniformément continue (théorème de Heine). Soit $\varepsilon>0$, il existe donc $\delta>0$ tel que pour tout $x,y\in[0,1]$ avec $|x-y|\le\delta$, on ait $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon$. On a donc

$$\begin{aligned}\forall n\ge 1,\ \forall x\in[0,1],\quad |f(x)-\mathcal{P}_n(x)| &\le \mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right)\right|\right]\\ &=\mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right)\right|\mathbf{1}_{\left|\frac{S_n(x)}{n}-x\right|\ge\delta}\right]+\mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right)\right|\mathbf{1}_{\left|\frac{S_n(x)}{n}-x\right|<\delta}\right]\\ &\le 2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n(x)}{n}-x\right|\ge\delta\right)+\varepsilon\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n(x)}{n}-x\right|<\delta\right)\\ &\le\frac{M}{2n\delta^2}+\varepsilon\end{aligned}$$

soit

$$\forall n\ge 1,\qquad \sup_{x\in[0,1]}\left|f(x)-\mathcal{P}_n(x)\right|\le\frac{M}{2n\delta^2}+\varepsilon.$$

Par passage à la limite en n, on obtient

$$\limsup_n \sup_{x\in[0,1]}\left|f(x)-\mathcal{P}_n(x)\right|\le\varepsilon$$

et ce pour tout $\epsilon>0$. D'où le résultat recherché.

Notons également que par construction $\mathcal{P}_n$ est une fonction polynomiale. On a donc montré que pour toute fonction continue f sur [0,1] il existe une suite de fonction polynomiale dont la limite uniforme sur $[0,1]$ est la fonction f.

Exercice 19. Des événements d'un certain type se produisent en des temps $T_n=\sum_{k=1}^n X_k$ où les X_k sont des variables aléatoires i.i.d., $\mathbb{L}^1$ et p.s. strictement positives. On pose $T_0=0$. Pour tout $t\ge 0$, on note

$$N_t=\max\{n\in\mathbb{N}\ ,\ T_n\le t\}$$

le nombre d'événements qui se sont produits avant le temps t.

(1) Montrer que, $\mathbb{P}$-p.s., $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n}=\mathbb{E}[X_1]$. En déduire que, $\mathbb{P}$-p.s., pour tout $t>0$, $N_t<\infty$ et que $\lim_{t\to\infty}N_t=+\infty$.

- Par la loi forte des grands nombres, $\frac{T_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}}\mathbb{E}[X_1]$.
- Fixons $t\ge 0$. Soit $N_1\ge 0$ tel que pour tout $n\ge N_1$, $n\frac{\mathbb{E}[X_1]}{2}>t$. Soit $N_2>0$ telle que pour tout $n\ge N_2$, $\left|\frac{T_n}{n}-\mathbb{E}[X_1]\right|\le\frac{\mathbb{E}[X_1]}{2}$. Notons que N_2 est fini presque sûrement et que pour $n\ge N_2$,

$$\frac{T_n}{n}-\mathbb{E}[X_1]\ge-\frac{\mathbb{E}[X_1]}{2}.$$

Ainsi pour tout $n\ge N_1\vee N_2$,

$$T_n=n\mathbb{E}[X_1]+n\left(\frac{T_n}{n}-\mathbb{E}[X_1]\right)\ge n\mathbb{E}[X_1]-n\frac{\mathbb{E}[X_1]}{2}=n\frac{\mathbb{E}[X_1]}{2}>t.$$

Ceci prouve que $N_t\le N_1\vee N_2<+\infty$ presque sûrement.

- Notons que pour $t'>t$,

$$\{n\in\mathbb{N}\,:\,T_n\le t\}\subset\{n\in\mathbb{N}\,:\,T_n\le t'\},$$

et donc $t\mapsto N_t$ est une fonction croissante qui converge vers une limite $\ell\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Supposons que $\ell<\infty$. Comme pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $N_t\in\mathbb{N}$ si la limite de N_t est finie, presque sûrement N est constante à partir d'un certain t_0 et vaut ℓ. Ainsi, dans ce cas, pour tout $t\ge t_0$, $T_{\ell+1}>t$ soit $T_{\ell+1}=+\infty$. Or $\mathbb{L}^1$ étant un e.v., $T_{\ell+1}\in\mathbb{L}^1$ et est fini presque sûrement. Donc $\mathbb{P}(\ell<\infty)=0$ et presque sûrement $N_t\to+\infty$.

(2) Montrer que $T_{N_t}\le t\le T_{N_t+1}$ pour tout $t\ge 0$.

La variable N_t représente le plus grand indice n tel que $T_n\le t$, donc, par construction, $T_{N_t}\le t$.
Par ailleurs, N_t+1 étant plus grand que N_t, on a bien $T_{N_t+1}>t$.

(3) En déduire que, $\mathbb{P}$-p.s., $\lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t}=\frac{1}{\mathbb{E}[X_1]}$.

On sait que $N_t \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} +\infty$. Donc

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T_{N_t}}{N_t} = \lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \mathbb{E}[X_1].$$

Et, d'après la question précédente,

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{N_t}{T_{N_t+1}} \leq \frac{N_t}{t} \leq \frac{N_t}{T_{N_t}} \quad \text{soit} \quad \frac{N_t+1}{T_{N_t+1}} - \frac{1}{T_{N_t+1}} \leq \frac{N_t}{t} \leq \frac{N_t}{T_{N_t}}.$$

Ainsi, N_t/t est encadré par deux fonctions qui convergent p.s. vers $1/\mathbb{E}[X_1]$ (car $1/T_{N_t+1}$ tend vers 0) et converge donc également vers $1/\mathbb{E}[X_1]$.

4. Théorème Central Limite

Exercice 20.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables de $\mathbb{L}^2$. On note $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_1]$ (supposée >0). On définit

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}.$$

(1) Rappeler la convergence en loi de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du théorème central limite. Ainsi, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

(2) Établir la convergence en loi de la suite de terme général $Z_{2n} - Z_n$ et donner sa limite.

Notons que

$$\begin{aligned} Z_{2n} - Z_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - \mu}{\sigma\sqrt{2n}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - \mu}{\sigma\sqrt{n}} + \sum_{k=2n+1}^{2n} \frac{X_k - \mu}{\sigma\sqrt{2n}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) Z_n + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_{n+k} - \mu}{\sigma\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Remarquons que $\sum_{k=1}^n \frac{X_{n+k}-\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ et Z_n sont des variables aléatoires indépendantes de même loi. On peut donc déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{Z_{2n}-Z_n}(t) = \phi_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)Z_n}(t)\phi_{\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^n \frac{X_{n+k}-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = \phi_{Z_n}\left(t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\right)\phi_{Z_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

De plus, on rappelle que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une normale centrée de variance v^2 si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{Y_n}(t) \to e^{-\frac{v^2t^2}{2}}$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{Z_{2n}-Z_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}\left(2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)t^2}.$$

On a donc montré que $(Z_{2n} - Z_n)_n$ converge en loi vers une $\mathcal{N}\left(1, 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$.

(3) En déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut pas converger en probabilité.

Si $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité, alors $(Z_{2n})_n$ converge également en probabilité vers la même limite. Il existe alors une extraction $j : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telle que $(Z_{j(2n)})_n$ et $(Z_{j(n)})_n$ convergent presque sûrement. Ainsi, dans ce cas, $(Z_{j(2n)} - Z_{j(n)})_n$ converge presque sûrement vers 0. Notons que cette suite est une sous suite de $(Z_{2n} - Z_n)_n$, et donc elle converge en loi vers $\mathcal{N}\left(1, 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$. Ceci est une contradiction et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité.

Exercice 21.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme de n v.a.i.i.d. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\lambda)$.

On rappelle que si X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Alors si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires iid de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. alors

$$\phi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \phi_{X_1}(t)^n = e^{n\lambda(e^{it}-1)}.$$

(2) En utilisant le Théorème Central Limite, montrer que $\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires iid de loi $\mathcal{P}_1$. On rappelle qu'on a $\mathbb{E}[X_1]=1$ et $\mathbb{V}[X_1]=1$. Grâce au théorème central limite, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{n}}\leq 0\right)\to\mathbb{P}(N\leq 0)=\frac{1}{2},$$

où $N\sim\mathcal{N}(0,1)$. De plus, grâce à la question 1,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n}{\sqrt{n}}\leq 0\right)=\mathbb{P}\left(X_1+\cdots+X_n\leq n\right)=e^{-n}\sum_{k\geq 0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty}e^{-n}\sum_{k\geq 0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2}.$$

Exercice 22. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$. On note $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$. Trouver une suite de variables aléatoires $(a_n=a_n(\overline{X}_n))_{n\geq 1}$ construites sans faire intervenir la valeur de p telles que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|\overline{X}_n-p|\leq a_n)=0.95.$$

On rappelle que grâce au théorème central limite (vu que $\mathbb{E}[X_1]=p$ et $\mathbb{V}(X_1)=p(1-p)$),

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n-p}{\sqrt{p(1-p)}}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}N\sim\mathcal{N}(0,1).$$

Soit $\alpha\in[0,1]$ et $q_\alpha\in\mathbb{R}$ le quantile d'ordre α de la loi gaussienne centrée réduite, c'est à dire telle que $\mathbb{P}(N\leq q_\alpha)=\alpha$. Notons que par symétrie de la loi normale centrée réduite, on a $-q_{1-\alpha}=q_\alpha$.

On a alors

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}|\overline{X}_n-p|\leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(\overline{X}_n-p)\leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)-\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(\overline{X}_n-p)\leq -q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Ainsi,vue que la convergence en loi est équivalente à la convergence des fonctions de répartition, lorsque la limite est une loi continue, on a

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}|\overline{X}_n-p|\leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\to\mathbb{P}(N\leq q_{1-\frac{\alpha}{2}})-\mathbb{P}(N\leq q_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}=1-\alpha.$$

On pourrait prendre les valeurs $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ pour les a_n, si on acceptait qu'elles dépendent de p. Mais l'utilité en statistiques de ce type de convergence est d'être capable, lorsque la valeur de p est inconnue, de construire à partir des données, donc ici de $\overline{X}_n$, un intervalle dans lequel p se trouve avec grande probabilité. Il ne faut donc pas que les bornes de l'intervalle et donc les a_n dépendent de p. Pour résoudre ce problème, on peut utiliser le lemme de Slutsky. En effet,

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}}1\quad\text{et}\quad\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\left(\overline{X}_n-p\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}N\sim\mathcal{N}(0,1).$$

Comme la limite p.s. est une constante, alors

$$\sqrt{\frac{n}{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}\left(\overline{X}_n-p\right)=\sqrt{\frac{p(1-p)}{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\left(\overline{X}_n-p\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}1\cdot N\sim\mathcal{N}(0,1)$$

également. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{n}{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}|\overline{X}_n-p|\leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\to 1-\alpha$$

et pour conclure l'exercice, il suffit alors de prendre

$$\alpha=0.05\quad\text{et}\quad a_n=\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}q_{0.975}\approx 1,96\sqrt{\frac{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}{n}}.$$

Exercice 23. *Théorème Central Limite et formule de Stirling.*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.

(1) Montrer que $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ suit la loi $\Gamma(n,1/\lambda)$ de densité

$$f_n(x)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}e^{-\lambda x}x^{n-1}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

On rappelle que la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Ainsi, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de va iid de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{X_1+\cdots+X_n}(x) = \phi(x)^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n.$$

Par ailleurs, soit Y une variable aléatoire de loi Gamma $\Gamma(n, 1/\lambda)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{(it-\lambda)x}}{(n-1)!} \,\mathrm{d}\,x$$

En effectuant une intégration par parties ($u'(x) = \lambda^n e^{(it-\lambda)x}$ et $v(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$), on obtient :

$$\begin{aligned}
\phi_Y(t) &= \left[\frac{\lambda^n e^{(it-\lambda)x}}{(it-\lambda)} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]_0^\infty - \frac{\lambda^n}{(it-\lambda)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-2} e^{(it-\lambda)x}}{(n-2)!} \,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{\lambda^n}{(\lambda - it)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-2} e^{(it-\lambda)x}}{(n-2)!} \,\mathrm{d}\,x
\end{aligned}$$

En itérant, cela nous amène à

$$\phi_Y(t) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - it)^{n-1}} \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x} \,\mathrm{d}\,x = \frac{\lambda^n}{(\lambda - it)^n}$$

La fonction caractéristique caractérise la loi. On voit donc que $Y \sim X_1 + \cdots X_n$.

(2) En étudiant la loi limite de $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$, démontrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

On rappelle que, d'après le Théorème Central Limite,

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N \sim \mathcal{N}(0,1).$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \le 0\right) = \mathbb{P}\left(N \le 0\right) = 1/2.$$

D'autre part, d'après le résultat de la question 1,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \le 0\right) &= \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\left\{\frac{x-n}{\sqrt{n}} \le 0\right\}} x^{n-1} e^{-x} \frac{1}{(n-1)!} \,\mathrm{d}\,x \\
&\underset{y = \frac{x-n}{\sqrt{n}}}{=} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{y \le 0\}} (\sqrt{n} y + n)^{n-1} \sqrt{n} e^{-\sqrt{n} y - n} \frac{1}{(n-1)!} \,\mathrm{d}\,y \\
&= \frac{n^{n-1}\sqrt{n}}{(n-1)! e^n} \int_{-\infty}^0 g_n(y) \,\mathrm{d}\,y.
\end{aligned}$$

où on a posé

$$\forall y \le 0, \; g_n(y) = \mathbf{1}_{\{-\sqrt{n} < y\}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} e^{-\sqrt{n} y}.$$

On va étudier la limite de l'intégrale $\int_{-\infty}^0 g_n(y) \,\mathrm{d}\,y$ grâce au théorème de convergence dominée.

— limite de g_n :

$$\begin{aligned}
\forall y \le 0, \quad g_n(y) &= \mathbf{1}_{\{-\sqrt{n} < y\}} e^{-\sqrt{n} y} e^{(n-1)\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)} \\
&= \mathbf{1}_{\{-\sqrt{n} < y\}} e^{-\sqrt{n} y} e^{(n-1)\left(\frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= \mathbf{1}_{\{-\sqrt{n} < y\}} e^{-\frac{y^2}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $y \to e^{-\frac{y^2}{2}}$.

— *Domination :* pour $u \geq 0$, on a $\ln(1-u) \leq -u - u^2/2$ et donc pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}\forall y \leq 0, \quad |g_n(y)| &= \mathbf{1}_{\{-\sqrt{n}<y\}} e^{(n-1)\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)} e^{-\sqrt{n}y} \\ &\leq \mathbf{1}_{\{-\sqrt{n}<y\}} e^{(n-1)\left(\frac{y}{\sqrt{n}}-\frac{y^2}{2n}\right)-\sqrt{n}y} \\ &\leq e^{-\frac{y^2}{4}+|y|}\end{aligned}$$

qui est intégrable sur $]-\infty, 0[$.

Donc le théorème de convergence dominée permet d'inverser intégrale et limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^0 g_n(y) = \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}\, y = \sqrt{2\pi}/2.$$

On vient de montrer quand on met tout bout à bout que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n-1}\sqrt{n}}{(n-1)!e^n} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{1}{2},$$

soit

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

*** Exercice 24.** *TCL pour une somme aléatoire de v.a.*
On considère $(N_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui diverge vers l'infini en probabilité : pour tout $M > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(N_n \geq M) = 1$.

(1) Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une autre suite, indépendante de $(N_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de v.a. convergeant en loi vers une limite Y (toutes définies sur le même espace de probabilité). Montrer que la suite $(Y_{N_n})_{n\geq 1}$ converge également en loi vers Y.

Soit f une fonction continue et bornée. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence en loi, il existe $M > 0$ tel que pour tout $k \geq M$,

$$|\mathbb{E}[f(Y_k)] - \mathbb{E}[f(Y)]| \leq \varepsilon.$$

On sait, de plus, grâce à l'hypothèse de l'énoncé que

$$\mathbb{P}(N_n < M) = 1 - \mathbb{P}(N_n \geq M) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbb{P}(N_n < M) \leq \varepsilon$. Grâce à l'indépendance de $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_0, \quad |\mathbb{E}[f(Y_{N_n})] - \mathbb{E}[f(Y)]| &\leq \left|\sum_{k\geq 0}^{M-1} (\mathbb{E}[f(Y_k)\mathbf{1}_{N_n=k}] - \mathbb{E}[f(Y)]\,\mathbb{P}(N_n=k))\right| \\ &\quad + \left|\sum_{k=M}^{+\infty} (\mathbb{E}[f(Y_k)\mathbf{1}_{N_n=k}] - \mathbb{E}[f(Y)]\,\mathbb{P}(N_n=k))\right| \\ &\leq \sum_{k\geq 0}^{M-1} |\mathbb{E}[f(Y_k)] - \mathbb{E}[f(Y)]|\,\mathbb{P}(N_n=k) \\ &\quad + \sum_{k=M}^{+\infty} |\mathbb{E}[f(Y_k)] - \mathbb{E}[f(Y)]|\,\mathbb{P}(N_n=k) \\ &\leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(N_n < M) + \varepsilon\mathbb{P}(N_n \geq M) \\ &\leq (2\|f\|_\infty + 1)\varepsilon.\end{aligned}$$

On vient donc de montrer que pour tout f continue et bornée, $(\mathbb{E}[f(Y_{N_n})])_n$ converge vers $\mathbb{E}[f(Y)]$, et donc $Y_{N_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y$.

(2) On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a.i.i.d. dans $\mathbb{L}^2$ indépendante des $\{N_n\}_{n\geq 1}$ de moyenne m et de variance σ^2. On pose pour $n \geq 1$, $Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - m\right)$. Montrer que $(Z_{N_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.

Grâce au théorème central limite, on a $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N \sim \mathcal{N}(0,1)$. D'après la question précédente, on a donc $Z_{N_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 25. *Méthode de Monte-Carlo*

(1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées de loi de densité q sur $\mathbb{R}^d$ et f une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ bornée.

(a) Montrer, qu'avec probabilité 1,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)q(x)dx.$$

Grâce à la loi forte des grands nombres, comme la suite $(f(X_n))_n$ est une suite de va iid bornées et donc $\mathbb{L}^1$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_i) \to \mathbb{E}[f(X_1)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)q(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

(b) Est-il possible d'affaiblir l'hypothèse f bornée ?

Notons que la LFGN s'applique lorsque les variables sont intégrables. L'hypothèse bornée de la question précédente garantit que les variables sont intégrables. Dans l'absolue, pour pouvoir appliquer la LFGN, il faut et il suffit que

$$f(X_1)\in\mathbb{L}^1, \quad \text{càd} \quad \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|q(y)\,\mathrm{d}\,y < +\infty.$$

(c) On suppose maintenant que la variance des variables $f(X_i)$ est une valeur σ_f^2 finie et on note pour tout $n\geq 1$,

$$\epsilon_n = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)q(x)\,\mathrm{d}\,x\right|.$$

Montrer, que pour tout $a>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\epsilon_n \leq \frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}\,x$$

On utilise le théorème centrale limite. On appelle

$$Z_n = \sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)q(x)\,\mathrm{d}\,x}{\sigma_f}.$$

Pour tout $a>0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\varepsilon_n \leq \frac{a\sigma_f}{\sqrt{n}}\right) = \mathbb{P}\left(|Z_n|\leq a\right) = \mathbb{P}(Z_n\leq a) - \mathbb{P}(Z_n\leq -a).$$

Ainsi, d'après le TCL, en notant N une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$,

$$\mathbb{P}\left(\varepsilon_n \leq \frac{a\sigma_f}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(N\leq a) - \mathbb{P}(N\leq -a) = \mathbb{P}(|N|\leq a) = \int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x.$$

(2) On rappelle que la fonction Γ est définie par

$$\forall t>0, \quad \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}\exp(-x)dx.$$

(a) Montrer que, pour tout $t>0$, $\Gamma(t)$ est bien définie et que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Pour tout $t>0$ fixé, la fonction $f_t : x\mapsto x^{t-1}e^{-x}$ est continue sur $]0,\infty[$ et

$$f_t(x) \sim_{x\to 0} x^{t-1} \quad \text{et} \quad f_t(x) = o_{x\to\infty}(e^{-x/2}).$$

Ces deux fonctions étant intégrable respectivement au voisinage de 0 (car $t-1>-1$) et de $+\infty$, la fonction f_t est bien intégrable sur $]0,\infty[$ et $\Gamma(t)$ est bien définie. Remarquons qu'on a, par intégration par parties,

$$\forall t>0, \quad \Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \left[-x^t e^{-x}\right]_0^{+\infty} + t\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = t\Gamma(t).$$

Par ailleurs, notons que

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = 1.$$

Une récurrence immédiate donne alors pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$.

(b) Montrer qu'il existe une v.a. X telle que

$$\forall t > 0, \quad \Gamma(t) = \mathbb{E}\left[X^{t-1}\right].$$

En déduire une méthode probabiliste d'approximation de $\Gamma(t)$.

Soit $X \sim \mathcal{E}(1)$. Soit $t > 0$. Alors

$$\mathbb{E}\left[X^{t-1}\right] = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \Gamma(t).$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires iid de loi $\mathcal{E}(1)$, grâce à la question précédente, on sait que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^{t-1} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \Gamma(t).$$

Par ailleurs, pour tout $t > 1/2$, (pour $t \leq 1/2$, la variance n'est pas définie)

$$\mathbb{V}(X^{t-1}) = \mathbb{E}\left[X^{2(t-1)}\right] - \mathbb{E}\left[X^{t-1}\right]^2 = \Gamma(2t-1) - \Gamma(t)^2.$$

(c) Soit Y une v.a. de loi exponentielle de paramètre $1/2$. Montrer que

$$\forall t > 0, \quad \Gamma(t) = 2\mathbb{E}\left[Y^{t-1}\exp(-Y/2)\right].$$

En déduire une autre méthode probabiliste d'approximation de $\Gamma(t)$.

On a de la même façon

$$2\mathbb{E}\left[Y^{t-1}e^{-\frac{Y}{2}}\right] = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-\frac{y}{2}}e^{-\frac{1}{2}y}\,\mathrm{d}\,y = \int_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-y}\,\mathrm{d}\,y = \Gamma(t).$$

Ainsi, soit $g(y) = 2y^{t-1}e^{-\frac{y}{2}}$ et soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires iid de loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(Y_k) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \Gamma(t).$$

Par ailleurs, pour tout $t > 1/2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(Y)^2] &= \mathbb{E}[4Y^{2(t-1)}e^{-Y}] = 2\int_0^{+\infty} y^{2(t-1)}e^{-\frac{3}{2}y}\,\mathrm{d}\,y \\ &\underset{z=\frac{3}{2}y}{=} \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2(t-1)}\Gamma(2t-1) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}\Gamma(2t-1).\end{aligned}$$

Ainsi $\sigma_g^2 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}\Gamma(2t-1) - \Gamma(t)^2$.

(d) Comparer ces deux méthodes d'approximation en utilisant le résultat de la question (1c).

On a vu dans la question (1c) que l'erreur (probabiliste) de l'approximation est donnée par le théorème central limite et est proportionnelle à σ_f (ou σ_g). Afin de comparer les erreurs dans l'approximation de Γ, il suffit de comparer σ_f^2 et σ_g^2. On a

$$\sigma_f^2 - \sigma_g^2 = \left(1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}\right)\Gamma(2t-1).$$

Ainsi, la première approximation de $\Gamma(t)$ avec des vaiid de loi $\mathcal{E}(1)$ est meilleure que la seconde si

$$1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2t} \leq 0$$

c'est à dire si

$$-\ln 3 \leq 2t\left(\ln 2 - \ln 3\right),$$

soit

$$t \leq \frac{\ln 3}{2\left(\ln 3 - \ln 2\right)}.$$

Ainsi pour $t \lesssim 1.355$, l'approximation des $\Gamma(t)$ avec des vaiid de loi $\mathcal{E}(1)$ est meilleure et pour $1.355 \lesssim t$, l'approximation de $\Gamma(t)$ est meilleure avec des $\mathcal{E}(1/2)$.