Soit $P(n)$ la proposition que l'équation

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Base de l'induction (n = 1):

Vérifions d'abord si $P(1)$ est vraie :

$$a^1 - b^1 = a - b$$

L'équation est vérifiée lorsque $n = 1$.

Hypothèse d'induction:

Supposons maintenant que $P(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que

$$a^k - b^k = (a-b)\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-1-i}$$

.

Étape de l'induction:

Nous devons montrer que $P(k+1)$ est également vraie. Considérons l'expression $a^{k+1} - b^{k+1}$:

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a \cdot a^k - b \cdot b^k$$

Factorisons a dans le premier terme et b dans le deuxième terme :

$$= a \cdot a^k - b \cdot b^k = a^k(a-b) - b^k(a-b)$$

Factorisons $a - b$:

$$= (a-b) \cdot a^k - b^k(a-b)$$

Regroupons les termes avec $(a - b)$:

$$= (a-b) \cdot (a^k - b^k)$$

Maintenant, nous pouvons utiliser l'hypothèse d'induction :

$$= (a-b) \cdot [(a-b)\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-1-i}]$$

Distribuons la somme et simplifions :

$$= (a-b)\sum_{i=0}^{k-1} a^{i+1} b^{k-1-i} - (a-b)\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i}$$

Regroupons les termes de la somme :

$$= (a-b)\sum_{i=1}^{k} a^i b^{k-i} - (a-b)\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i}$$

Les termes se simplifient :

$$= (a - b)[a^k b^0 - a^0 b^k]$$

$$= (a - b)[a^k - b^k]$$

En utilisant l'hypothèse d'induction, nous obtenons :

$$= (a - b) \sum_{i=0}^{k} a^i b^{k-i}$$

Cela montre que $P(k + 1)$ est également vraie.

Par conséquent, par le principe de l'induction, l'équation est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.