Feuille du Chapitre 4 : Exemples d'applications à la finance

Exercice 1. Donner, dans le modèle binomial, la loi de S_N. Représenter par ailleurs l'évolution de l'actif à l'aide d'un arbre. Justifier ainsi le mot 'binomial'.

Soit $p \in (0,1)$ et soit $(Y_i)_i$ iid $\mathcal{B}(p)$. On note $\xi_i = u^{Y_i} d^{1-Y_i} = d\left(\frac{u}{d}\right)^{Y_i}$. Dans ce cas,

$$S_n = S_0 d^n \left(\frac{u}{d}\right)^{\sum_{i=1}^n Y_i},$$

et

$$\ln(S_n) = \ln S_0 + n \ln d + \ln\left(\frac{u}{d}\right) \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Finalement, on sait que

$$\sum_{i=1}^n Y_i \sim \mathcal{B}(n,p).$$

Exercice 2. On se place dans le cas binomial et on suppose que

$$\Omega = \{d,u\}^N,$$

que l'on munit de la tribu des parties.

Les variables $\xi_1, \ldots, \xi_N$ sont données par les applications coordonnées :

$$\xi_n : (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \{d,u\}^N \mapsto \omega_n.$$

Montrer qu'il existe une unique probabilité risque neutre si $d < 1+r < u$.

Exercice 3. On appelle contrat d'achat européen le contrat obtenu en choisissant $f(x) = (x-K)_+$. Interpréter la valeur de K et la forme de f. Même chose lorsque $f(x) = (K-x)_+$. En appelant C et P les prix de chacun des deux produits, montrer la relation de parité :

$$C - P = S_0 - (1+r)^{-N} K.$$

On se donne un portefeuille avec un call européen de strike K et des actifs non risqués qui vaudront K à l'échéance. Alors à l'échéance, si $S \geq K$, le portefeuille vaut $S - K + K = S$ et si $K > S$, le portefeuille vaut K.

On se donne un autre portefeuille, avec un put européen, de strike K et 1 actif risqué. Ainsi, si $K > S$, on utilise le put et le portefeuille vaut $K - S + S = K$. Si $K \leq S$, le portefeuille vaut S.

Vu qu'à l'échéance les portefeuille sont égaux, ils le sont tout le temps (sinon il y a un arbitrage possible).

Ainsi, le prix de l'actif risqué en temps 0, sachant que ce dernier vaut K au temps N est $(1+r)^{-N}$, et de même le prix de l'actif risqué au temps 0 est de S_0. On a alors

$$S_0 + P = C + (1+r)^{-N} K$$

Exercice 4. Montrer, avec les notations de la Section 2.1, que $f_0(S_0) = (1+r)^{-N} \mathbb{E}^*[f(S_N)]$.

Exercice 5. On reprend l'exercice précédent, mais on choisit maintenant le modèle binomial, avec les paramètres suivants

$$u = (1+r)\big(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\big), \quad d = (1+r)\big(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\big),$$

pour un paramètre $\sigma < \sqrt{N}$.

(1) Montrer que, sous la probabilité risque neutre, les variables $(\xi_n)_{n=1,\cdots,N}$ suivent la loi $\frac{1}{2}\delta_u + \frac{1}{2}\delta_d$.

(2) On choisit $r = \lambda/N$. Montrer que

$$\mathbb{E}^*\Big[\big(\ln(\xi_n) - \ln(1+r)\big)^2\Big] = \frac{1}{2}\Big[\ln^2\big(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\big) + \ln^2\big(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\big)\Big].$$

En développant la fonction $g(x) = \ln^2(1+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0, montrer qu'il existe une constante c telle que

$$\mathbb{E}^*\Big[\big(\ln(\xi_n) - \ln(1+r)\big)^2\Big] = c\frac{\sigma^2}{N} + o\big(\frac{1}{N}\big),$$

De même montrer que

$$\mathbb{E}^*\big(\ln(\xi_n) - \ln(1+r)\big) = O(\frac{1}{N}).$$

(3) Déduire de la question précédente une approximation de la loi de S_N pour N grand. Montrer que, dans le régime de cette approximation, la fonction f_0 de l'exercice précédent s'écrit asymptotiquement sous la forme d'une convolution gaussienne. (On pourra supposer f continue et bornée.)

Exercice 6. Etudier le problème de réplication dans le cadre du modèle binomial avec $d < 1+r < u$. En particulier, en reprenant l'énoncé du Corollaire **??**, montrer que l'équation

$$\mathbb{V}^*\big[\phi s[\xi_{n+1} - (1+r)] - f_{n+1}(s\xi_{n+1})\big] = 0$$

a une unique solution, donnée par

$$\phi = \frac{f_{n+1}(su) - f_{n+1}(sd)}{us - ud}.$$

Interpréter la forme de cette écriture

Exercice 7. Un joueur lance un dé, deux fois de suite. A l'issue du premier lancer, on lui propose de repartir avec, comme gain, le résultat du premier dé ou de rejouer une deuxième fois. S'il rejoue une deuxième fois, il empoche, comme gain, la demi-somme des deux dés. Quelle est la bonne décision à prendre après le résultat du premier dé ?

Pour répondre au problème, on introduit le problème de contrôle suivant. On appelle X_1 et X_2 les lancers respectifs des premier et deuxième dés. On appelle ϕ le contrôle du joueur. Il s'agit d'une variable aléatoire $\sigma(X_1)$-mesurable à valeurs dans $\{0,1\}$. Si $\phi = 0$, le joueur s'arrête. Si $\phi = 1$, il continue.

(1) Montrer que le gain du joueur est

$$G = X_1(1-\phi) + \frac{X_1 + X_2}{2}\phi = X_1 + \frac{X_2 - X_1}{2}\phi.$$

(2) Calculer l'espérance conditionnelle de G sachant X_1.

(3) En fonction de l'observation de X_1, donner le choix de ϕ pour maximiser le gain conditionnel.