Exercice 1

On donne $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x^4 + y^4 - 3x^2 - y^2$.

On considère le problème de minimisation de f sur $\mathbb{R}^2$.

1) Ecrire proprement le problème d'optimisation ; on déterminera notamment la/les variable/s d'optimisation et la fonction coût

Les variables d'optimisation associées à notre problème sont x et y.
L'espace vectoriel dans lequel vivent ces variables est $V = \mathbb{R}^2$.

Ainsi la fonction coût f est donnée par :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x^4 + y^4 - 3x^2 - y^2.$$

Le problème d'optimisation s'écrit donc ; trouver $x^* \in \mathbb{R}^2$ telle que $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$.

2) Est-ce un problème d'optimisation en dimension finie, avec ou sans contraintes, quadratique ?

Il s'agit d'un problème d'optimisation en dimension finie $V = \mathbb{R}^2$, sans contrainte non quadratique.

3) <u>Montrons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 + (x^2-2)^2 + y^2 + (y^2-1)^2 - 5$</u>

On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x^2 + (x^2-2)^2 + y^2 + (y^2-1) - 5 = x^2 + x^4 + 4 - 4x^2 + y^2 + y^4 + 1 - 2y^2 - 5$$
$$= x^4 + y^4 - 3x^2 - y^2 .$$

D'où : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + (x^2-2)^2 + y^2 + (y^2-1)^2 - 5 = f(x,y)$.

4.) a - <u>Calculons $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $Hess(f)(x_0,y_0)$, la matrice Hessienne de f au point (x_0,y_0).</u>

La fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et on a : $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 4x_0^3 - 6x \\ 4y_0^3 - 2y_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $Hess(f)(x_0,y_0) = \nabla^2 f(x_0,y_0)$.

or $\nabla^2 f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 12x_0^2 - 6 & 0 \\ 0 & 12y_0^2 - 2 \end{pmatrix}$

Donc $Hess(f)(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 12x_0^2 - 6 & 0 \\ 0 & 12y_0^2 - 2 \end{pmatrix}$

b) f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?

Par définition, f est convexe sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice Hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^2$ sont positives.

D'après ce qui précède, les valeurs propres de la matrice Hessienne de f au point (x_0, y_0) sont $\lambda_1 = 12x_0^2 - 6$ et $\lambda_2 = 12y_0^2 - 2$.

4.b) (suite)

Donc, J est ~~f~~ convexe sur $\mathbb{R}^2$ si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

Autrement dit, si $\lambda_1 = 12x_0^2 - 6 > 0 \Rightarrow x_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}$

et $\lambda_2 = 12y_0^2 - 2 > 0 \Rightarrow y_0 > \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Par conséquent, J n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.

5.a) Montrons que le problème d'optimisation considéré admet au moins une solution

On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $J(x,y) = x^2 + (x^2-2)^2 + y^2 + (y^2-1)^2 - 5$.

Ainsi, la fonction $(x,y) \mapsto J(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ est ~~a~~ un fermé non-vide.

D'autre part, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $J(x,y) \geq x^2 + y^2 - 5 = \|(x,y)\|^2 - 5$; où $\|\cdot\|$ désigne la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, en prenant une suite $u_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ telle que $\|u_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, On a $J(u_n) \geq \|u_n\|^2 - 5 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Donc, J est infinie à l'infini.

D'après le théorème du cours, le problème d'optimisation considéré admet au moins une solution sur $\mathbb{R}^2$.

5-b) <u>Ecrivons une condition nécessaire d'optimalité ~~est~~ reliée à ce problème</u>

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ~~et~~ une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}^n$, une condition nécessaire pour que $x^* \in \mathbb{R}^n$ soit un minimum local / global de f sur $\mathbb{R}^n$ est que $\nabla f(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $\nabla^2 f(x^*)$ est définie positive.

Dans notre cas, $n = 2$ et on a $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 6x \\ 4y^3 - 2y \end{pmatrix}$

Donc, une condition nécessaire pour que $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ élément de $\mathbb{R}^2$ soit un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$ est que $\nabla f(u^*) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Autrement dit, $\begin{cases} 4u_1^{*3} - 6u_1^* = 0 \\ 4u_2^{*3} - 2u_2^* = 0 \end{cases}$