1.- Conceptes bàsics de grafs

Primeres definicions

Un graf G és un parell (V,A) amb V un conjunt finit no buit i A un conjunt de parells no ordenats d'elements de V. $A \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$

- **Vèrtexs** son els elements de V
- **Arestes** son els elements de A
- **Ordre** de G és el nombre de Vèrtexs, |V|
- **Mida** de G és el nombre d'Arestes, |A|

Siguin $u, v \in V$ vèrtexs i $a, e \in A$ arestes de G, direm que:
- u i v son **adjacents o veïns** si $\{u, v\} \in A$ es denota $u \sim v$ o $uv \in A$
- u i v son **independents** si no són adjacents, es denota $u\, !\sim v$ o $uv \notin A$
- u i e son **incidents** si $e = \{u, w\}$ per algun $w \in V$
- a i e son **incidents** si tenen un vèrtex en comú, altrament son independents
- **grau** de u és el nombre de vèrtexs adjacents a u. $g(u) = \#\{v \in V \,|\, u \sim v\}$

Mida màxima amb n vèrtexs= $n(n - 1)/2$

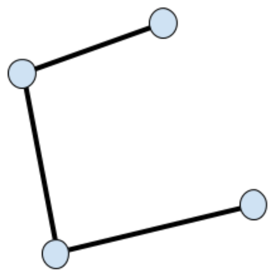
Mida d'un graf x-regular d'ordre y: $(x{\cdot}y)/2$

Mida del $K_{r,s}$= r · s

Representacions d'un graf

1.- Gràfica.

S'uneixen els vèrtexs adjacents (punts) amb arestes (línies):



2.- Llista d'adjacències

a	b	c	d	e	f	g	h	i
b	a	b	a	a	c	d	d	f
d	c	e	g	c	h	h	f	h
e		f	h		i		g	
							i	

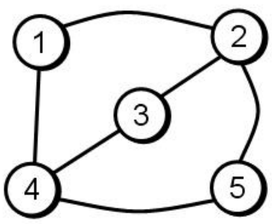
3.- Matriu adjacència de G

<u>NOMBRE D'UNS mida m: 2m</u>

Matriu $M_A = M_B(G)$ de tipus $n \times n$, tal que l'element m_{ij} de la fila i columna j és

$$m_{ij} \begin{cases} 1, \text{ si } v_i \sim v_j \\ 0, \text{ altrament} \end{cases}$$

- M_A és binària, amb zeros a la diagonal, i simètrica
- El nombre d'uns de la fila i és el grau de v_i
- No és única, depèn de l'ordenació que s'escull al conjunt de vèrtexs



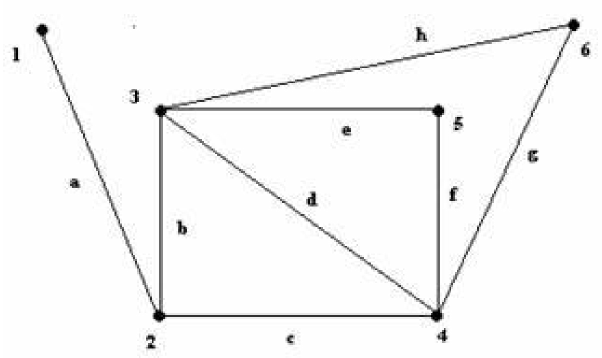
M	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

4.- Matriu d'incidència de G

NOMBRE D’UNS mida m: 2m

És la matriu $M_I = M_I(G)$ de tipus $n \times m$, tal que l’element b_{ij} de la fila i columna j és:

$$b_{ij} \begin{cases} 1, \text{ si } v_i \; i \; a_j \text{ són incidents} \\ 0, \text{ altrament} \end{cases}$$



$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

-M_I és binària. El nombre d’uns de la fila i és el grau de v_i i a cada columna hi ha exactament dos uns. No és única.

Graus

Sigui G = (V, A) un graf d’ordre n i v € V un vèrtex, anomenem:

- **grau de v,** $g(v)$**:** al nombre d’arestes incidents a v
- **grau mínim de G, δ(G):** al mínim grau dels vèrtex
- **grau màxim de G, Δ(G):** al màxim dels graus dels vèrtex
- **seqüència de graus de G:** successió dels graus de G ordenats de forma decreixent
- **graf regular:** tots els vèrtex tenen el mateix grau

El grau mínim de G és 0 i el màxim a n-1.

Tot graf d’ordre ≥ 2 té almenys dos vèrtex amb el mateix grau.

Lema de les encaixades: $2 \cdot |A| \; = \; \Sigma_{v \in V} \, g(v)$

Corol·lari: Tot graf té un nombre parell de vèrtex de grau senar.

Una seqüència d'enters decreixes és **gràfica** si hi ha algun graf que la té com a seqüència de graus.

Isomorfisme de grafs

Siguin G = (V,A) i G' = (V',A') dos grafs direm que:
- G i G' són iguals si V = V' i A = A'
- G i G' són isomorfs si existeix una aplicació bijectiva f : V → V' tal que, per a tot $u, v \in V$

Tipus de grafs

- **Graf nul** d'ordre n, N_n: és un graf d'ordre n i mida 0.
    - **Graf trivial:** N_1
- **Graf complet** d'ordre n, K_n: és un graf d'ordre n i mida màxima
- **Graf trajecte** d'ordre n, T_n = (V,A): és un graf d'ordre n i mida n-1.
    - $\delta(T_n) = 1$ i $\Delta(T_n) = 2$
- **Graf cicle** d'ordre n, $n \geq 3$, C_n = (V,A): amb ordre n i mida n.
    - $\delta(C_n) = \Delta(C_n) = 2$
- **Graf r-regular** d'ordre n: és un graf regular on r és el grau dels vèrtexs
    - El graf complet K_n és un graf (n-1)-regular
    - El graf cicle C_n és un graf 2-regular
    - Si G = (V,A) és un graf r-regular: $2 \cdot |A| = r \cdot |V|$
- **Graf bipartit**: és un graf G = (V,A) tal que hi ha dos subconjunts no buits V_1 i V_2 de V tals que $V = V_1 \cup V_2$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Anomenem parts estables a V_1 i V_2

Subgrafs

Sigui G = (V,A) un graf:

Subgraf de G, G' = (V',A'): és un graf amb V' ⊆ V i A' ⊆ A.

Subgraf generador de G, G' = (V',A'): és un subgraf tal que V' = V

Subgraf induït (o generat) per S ⊆ V: és el graf G[S] = (S, A') tal que A'=$\{uv \in A: u, v \in S\}$

Grafs derivats d'un graf

Sigui G = (V,A) un graf d'ordre n i mida m

Graf complementari de G, $G^C = (V^C, A^C)$: és el graf amb conjunt de vèrtexs igual, pero arestes inverses.

Un graf és **autocomplementari** si $G \cong G^C$.

Operacions amb grafs

Siguin G = (V,A) i G' = (V',A') dos grafs,

Graf reunió de G i G', G∪G': graf amb conjunt de vèrtexs de V ∪ V' i conjunt d'arestes A ∪ A'

- Si V ∩V' = Ø, l'ordre de G ∪G' és |V| + |V'| i mida |A| + |A'|

Graf producte G x G': graf amb conjunt de vèrtexs V x V' i les adjacències

$(u, u') \sim (v, v') \Leftrightarrow (uv \in A \; i \; u' = v') \; o \; (u = v \; i \; u'v' \in A')$

L'ordre de G x G' és |V|·|V'| i la mida és |V|·|A'| + |V'|·|A|

2.- Recorreguts, connexió i distància

Sigui G = (V,A) un graf, i siguin $u, v \in V$

Un u-v recorregut de longitud k és una seqüència de vèrtexs $u_0 u_1 u_2 \ldots u_{k-1} u_k$ tals que:

$$u_0 = u, \; u_k = v \text{ i } u_{i-1}u_i \in A, \text{ per a tot } i \in [k].$$

En general, el denotarem per $u_0, u_1, u_2 \ldots u_{k-1} u_k$. Si $u = v$ direm que és un recorregut tancat, i si $u \neq v$ direm que és un recorregut obert.

Un vèrtex considera un recorregut de longitud zero.

Un cicle passa per dos vèrtex u i v si i només si hi ha dos $u - v$ camins que no tenen cap vèrtex en comú llevat de u i de v.

Un graf sense cicles s'anomena acíclic.

Proposició 1

Siguin G = (V,A) un graf i u,v vèrtex diferents. Si a G hi ha un $u - v$ recorregut de longitud k, aleshores hi ha un $u - v$ camí de longitud $\leq k$

Proposició 2

Siguin G = (V,A) un graf i u,v vèrtex diferents. Si G té dos $u - v$ camins diferents, llavors G conté un cicle.

Grafs connexos

Un graf G = (V, A) direm que és connex si per a tot parell de vèrtexs diferents u i v hi ha un $u - v$ camí. Altrament direm que el graf és no connex.

Remarca Si G = (V, A) és un graf connex d'ordre més gran que 1, llavors $g(v) \geq 1$, per a tot $v \in V$

Definim la relació **R** a V: per a tot $x, y \in V$

$$xRy \Leftrightarrow \text{existeix un } x - y \text{ camí a G}$$

R és una **relació d'equivalència**:

-**Reflexiva**, xRx: existeix un $x - x$ camí de longitud zero

-**Simètrica**: Si xRy, llavors yRx: tot $x - y$ camí recorregut en sentit invers és un $y - x$ camí

-**Transitiva**: Si xRy i yRz, llavors xRz. Amb un $x - y$ camí $xx_1 \dots x_n y$ i un $y - z$ camí $yy_1 \dots y_m z$, es construeix un $x - v$ recorregut $xx_1 \dots x_n yy_1 \dots y_m z$, per tant, hi ha un $x - z$ camí

Si G = (V,A) és un graf no connex hi ha una partició de V en $k > 1$ subconjunts V_1, $V_2 \dots Vk$, les classes d'equivalència de la relació **R**. Per tant, per tot $1 \leq i, j \leq k$:

1. $V_i \neq \emptyset$,$V_i \cap V_j = \emptyset$per a tot $i \neq j$, i $V = U_{i=1}^{k} V_i$
2. $G[V_i]$(el subgraf induït per V_i) és connex
3. No hi ha cap camí entre vèrtexs de $G[V_i]$ i els de $G[V_j]$, amb $i \neq j$
4. G = $U_{i=1}^{k} G[V_i]$

Anomenem components connexos del graf G als subgrafs $G[V_1]$, $G[V_2] \dots G[V_k]$

Remarca

Sigui G = $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, on són els components connexos de G, llavors ordre G = ordre G_1 + … + ordre G_k

mida G = mida G_1 + … + mida G_k

Proposició 3

Un graf és 2-regular si, i només si, els seus components connexos són cicles

Proposició 4

Sigui G = (V,A) un graf connex i siguin $e = xy \in A$ i $u \in V$. Aleshores

1. El graf $G - e$ té com a molt 2 components connexos; si en té 2, a un hi ha el vèrtex x i a l'altre el vèrtex y
2. El graf $G - u$ té com a molt $g(u)$components connexos

Proposició 5

Tot graf connex d'ordre n té com a mínim $n - 1$ arestes

Algorisme DFS: Cerca en profunditat (pila)

Mirar en GIT la implementación

Teorema 6

Sigui G = (V,A) un graf i v un vèrtex de G. El subgraf $G[W]$ induït pels vèrtex de G visitats usant DFS és el component connex de G que conté v.

Vèrtex de tall i arestes pont

Sigui G = (V,A) un graf. SIguin $v \in V$ i $a \in A$ direm que

- v és **vèrtex de tall** o vèrtex d'articulació si $G - v$ té més components connexos que G
- a és una **aresta pont** si $G - a$ té més components connexos que G
- G és un graf **2-connex** si és connex, té almenys 3 vèrtex i **no té vèrtex de tall**

1. Si G és connex i u és un vèrtex de tall, llavors $G - u$ és un graf no connex amb com a molt $g(u)$ components connexos.
2. Els vèrtex de grau 1 no són vèrtex de tall
3. Si G és connex i a és una aresta pont, llavors $G - a$ és un graf no connex amb exactament 2 components connexos

Teorema 7 Caracterització dels vèrtex de tall

Sigui G = (V,A) un graf connex. Un vèrtex u de G és de tall si i només si existixen un parell de vèrtex x, y diferents d'u tals que tot $x - y$ camí passa per u.

Teorema 8 Caracterització de les arestes pont

Sigui G = (V,A) un graf connex i $a = uv$ una aresta de G. Són equivalents:

- a és una aresta pont
- existeixen un parell de vèrtex x, y tals que tot $x - y$ camí passa per a
- per l'aresta a no passa cap cicle

Un graf pot tenir vèrtex de tall però cap aresta pont
Sigui $a = uv$ una aresta pont. Si $g(u) = 1$, u no és un vèrtex de tall. Si $g(u) \geq 2$, el vèrtex u és de tall
L'únic graf connex amb una aresta pont i cap vèrtex de tall és el K_2

Distància

Sigui G = (V,A) un graf i u, v vèrtexs de G
-Si u, v són al mateix component connex, definim **distància** entre u i v, $d(u, v)$, com el valor mínim entre les longituds de tots els $u - v$ camins.
Altrament direm que la distància és infinit.

- **Excentricitat** del vèrtex u, $e(u)$: la distància més gran entre u i qualsevol altre vèrtex de G és a dir, $e(u)$, = $max\{d(u, v) \mid v \in V\}$
  - Si G es un graf connex, tots els vèrtex tenen excentricitat finita.
  - En un graf, o tots els vèrtexs tenen excentricitat finita o tots la tenen infinita.
- **Diàmetre** de G, $D(G)$: la **màxima** de les distàncies entre els vèrtexs de G, és a dir,
  $D(G) = \text{màx}\{d(u, v) \mid u, v \in V\} = \text{màx}\{e(u) \mid u \in V\}$

<u>Remarca</u> Si $xy \in A$, llavors $d(x, y) = 1$

En un graf G = (V,A) (connex) per a tots u, v, zvèrtexs es satisfà:

1. $d(u, v) \geq 0$, i $d(u, v) = 0$si, i només si, $u = v$
2. $d(u, v) = d(u, v)$
3. $d(u, v) + d(v, z) \geq d(u, z)$(desigualtat triangular)

Algorisme BFS: Cerca amplada (cua)

Teorema 9

Sigui G = (V,A) un graf i $v \in V$. El vector D donat per l'algorisme BFS emmagatzema la distància del vèrtex v a qualsevol altre vèrtex del graf

Caracterització dels grafs bipartits

Lema 10

Sigui G = (V,A) un graf

1. Si a G hi ha un recorregut tancat de longitud senar, a G hi ha un cicle de longitud senar.
2. L'existència de recorreguts tancats de longitud parella a G no assegura l'existència de cicles a G.

Teorema 11 Caracterització dels grafs bipartits

Un graf d'ordre ≥ 2 és bipartit si, i només si, no té cicles de longitud senar.

3.- Grafs Eulerians i Hamiltonians

Teoria de grafs

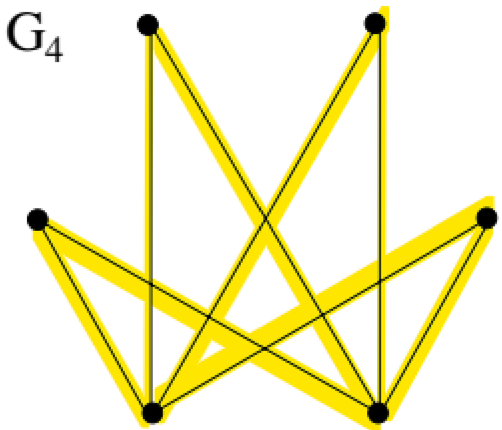
Matemática Discreta

Definicions:

Euler:

Circuit eulerià: Camí tancat que passa una i només una vegada per cada aresta.

Recorregut eulerià: Trajecte per totes les arestes sense repetir-les.



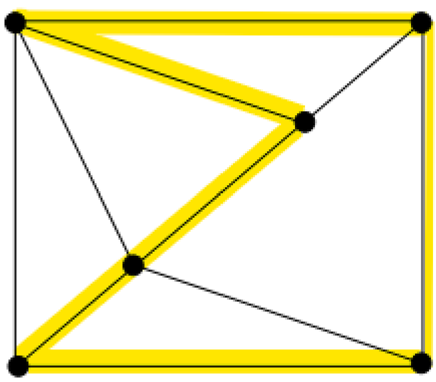
Teorema de caracterització dels grafs eulerians:
Sigui G un graf connex no trivial. Aleshores, *G és eulerià si, i només si, tots els vèrtexs tenen grau parell.*

Corol·laris:
Un graf connex té un senderó eulerià si, i només si, té exactament dos vèrtexs de grau senar. El senderó eulerià comença en un vèrtex de grau senar i acaba en l'altre vèrtex de grau senar.

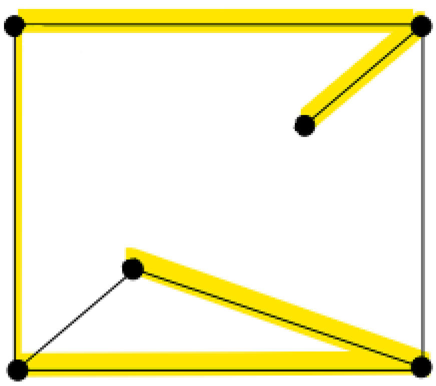
Hamilton:

Cicle hamiltonià: Recorre de forma tancada tots els vèrtexs. Sense repetir-los.
Camí hamiltonià: Passa per tots els vèrtexs però no de forma tancada.

Un graf es **hamiltonià** quan conté un cicle hamiltonià:



Un graf **NO** és hamiltonià si només té un camí hamiltonià:



Condicions necessàries[1]**:** Sigui G = (V, A) un graf hamiltonià d'ordre n, aleshores:

- Si al quitar k vértices del grafo G se producen más de k componentes conexas, entonces G no es Hamiltoniano. Se deduce del hecho de que en un ciclo la anterior situación es imposible.
- $g(v) \geq 2$, per a tot $v \in V$

Condicions suficients[2]**:**

- **Teorema de Ore:** G = (V, A) graf d'ordre $n \geq 3$ tal que per a tot u, $v \in V$ diferents i no adjacents es té $g(u) + g(v) \geq n$. Aleshores, G és un graf hamiltonià.
- **Teorema de Dirac:** G = (V, A) graf d'ordre $n \geq 3$ tal que $g(u) \geq n / 2$, per a tot $u \in V$. Aleshores, G es hamiltonia

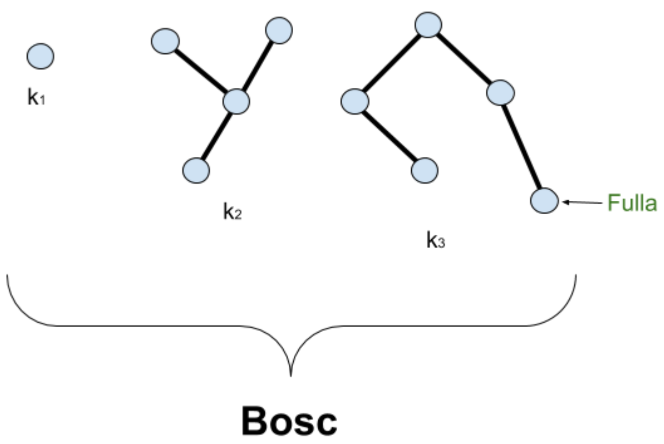
[1] Tot graf hamiltonià ha de tenir-la.
[2] Si compleix alguna d'aquestes, es considera hamiltonià.

4.- Arbres

Teorema de caracterització d'arbres:

Un graf G qualsevol serà arbre si i només si és connex i acíclic.

Si un graf és acíclic → els seus components connexos son arbres, i per tant el graf es un **bosc.**
Els vèrtexs d'un arbre amb grau 1, s'anomenaran **fulles**.



Tot ordre n tindrà com a arbre el graf estrella i el graf recorregut.

Lema 4.2:

Sigui **G = (V, A)** un graf on tots els vèrtexs tenen grau almenys 2, G té algún cicle.

Proposició 4.3:

Sigui **T = (V, A)** un arbre d'ordre ≥ 2, amb **a ∊ A** i **u ∊ V**. Aleshores:

1. **T** té almenys una fulla
2. **a** és una resta pont
3. **T - a** és un bosc amb 2 components connexos
4. Si **g(u)** ≥ 2, és un vèrtex de tall
5. **T - u** és un bosc amb **g(u)** components connexos
6. Si u és una fulla **T - u** és un arbre

(Útil per a demostracions per inducció)

Proposició 4.4:

Sigui G = (V, A) un graf acíclic de mida **m** i ordre **n** $\geq$**1**. Aleshores **m** $\leq$ **n - 1**.

Corol·lari 4.5

Sigui T un arbre d'ordre **n** i mida **m**. Aleshores **m = n - 1**

Teorema 4.6 (Teorema de caracterització d'arbres)

Sigui **T = (V,A)** un graf d'ordre **n**$\geq$**2** i mida **m**. Els enunciats següents són equivalents:

a. **T** és un arbre
b. **T** és acíclic i **m = n - 1**
c. **T** és connex i **m = n - 1**
d. **T** és connex i tota aresta és pont
e. Per a cada parell de vèrtex **u** i **v** hi ha un únic **u-v** camí a **T**
f. **T** és acíclic i, per a tota **a** $\in A^{C}$, **T + a** té un únic cicle

Corol·lari 4.7:

Un bosc G d'ordre n i k components connexos té mida **n - k**.

Corol·lari 4.8:

Tot arbre d'ordre n $\geq$ 2 té almenys dues fulles.

Arbres generadors

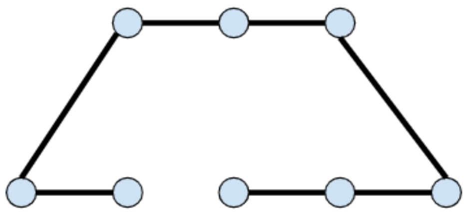
Sigui G = (V, A) un graf d'ordre $\geq$ 2. Anomenem arbre generador als subgrafs generadors de G que són arbres, és a dir, T = (V', A') és un arbre generador de G si, V' = V, A' $\subseteq$A i T és un arbre.

Teorema 4.9:

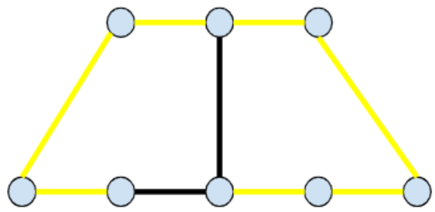
Un graf és connex si, i només si, té un arbre generador.

Demostració: $\Leftarrow$Siguin G = (V, A) un graf i T = (V, B) un arbre generador de G. Per a tot parell de vèrtexs x, y $\in$ V existeix un x-y camí a T que, a la vegada, és un x-y camí de G. Per tant, G ´es connex.

$T = (V, B)$



$G = (V, A)$



⇒Sigui G = (V, A) un graf connex. Si |A| = |V | − 1, G és un arbre i ja hem acabat. Altrament, si |A| > |V |−1, G no és un arbre i, com que és connex, conté un cicle. Sigui e una aresta d'aquest cicle. El graf G' = G − e és un subgraf generador de G (té els mateixos vèrtexs) i és connex (ja que e no és aresta pont per ser en un cicle). Si mida(G') = ordre (G') − 1, G' és un arbre, ja que és connex, i ja tenim l'arbre generador. Altrament, si mida(G') > ordre(G') − 1, G' té algun cicle; repetim el procés començant ara amb el graf G' i fins que el subgraf obtingut sigui acíclic, que per ser generador i connex, ser`a un arbre generador de G.

Aquesta demostració és constructiva, ens dona un algorisme per trobar un arbre generador que concretem a continuació:

`Entrada` G = (V, A) un graf connex
`Sortida` Un arbre generador de G

`Iniciar` $G' := G,\ n = |V|,\ m' = |A|$
`while` m' > n - 1 fer:
triar una aresta e de G' per la que passi un cicle
G' := G' - e
m' := m' - 1 (és la mida del nou G')
`endwhile`
`return` G'

Proposició 4.10:

Sigui G = (V,A) un graf connex i sigui **a ϵ A.**

1. Si a és una aresta pont, aleshores tot arbre generador conté l'aresta a.
2. Hi ha almenys un arbre generador de G que conté l'aresta a.

Algorisme DFS per a obtenir arbres generadors:

`Entrada` G = (V , A) graf ∧ $v \in$ V
`Sortida` llista W dels vèrtexs del component connex de G que conté v
llista B de les arestes per les que passa l'algorisme.
`foo(){`

`Inici` $pila$:= $\{v\}$, W := $\{v\}$, B = {};

`Do` x := cim de la $pila$;

`If` existeix $y \in V - W$ tal que $x \sim y$

Then posar y al cim de la $pila$,
$W := W \cup \{y\}$
$B := B \cup \{xy\}$

Else treure x de la $pila$

While $pila \neq \{\}$

Return W, B
}

T

Teorema 4.11:

Sigui W i B el conjunt de vèrtexs i d'arestes, respectivament, que retorna l'algorisme DFS en ser executat en un graf G amb vèrtex inicial v. Aleshores el graf (W, B) és un arbre generador del component connex de G on es troba v.

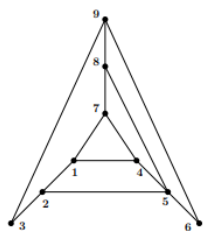
Teorema 4.13:

Siguin W i B el conjunt de vèrtexs i d'arestes, respectivament, que retorna l'algorisme BFS en ser executat en un graf G amb vèrtex inicial v. Aleshores el graf (W, B) és un arbre generador del component connex de G on es troba v.

Exemple 4.12:

Exemple 4.12 Considerem el graf $G = (V, A)$ amb $V = \{1, 2, \ldots, 9\}$ i les adjacències donades per la taula de l'esquerra i representat gràficament a la dreta

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	2	1	2	5	1	5	3
4	3	9	5	4	9	4	7	6
7	5		7	6		8	9	8
				8				



Descrivim en la taula següent els passos de l'algorisme DFS aplicat al graf G i prenent com a vèrtexs inicial $v = 1$.

cim	acció	*pila*	W	B
		1	$\{1\}$	
1	posar 2	1,2	$\{1,2\}$	$\{12\}$
2	posar 3	1,2,3	$\{1,2,3\}$	$\{12,23\}$
3	posar 9	1,2,3,9	$\{1,2,3,9\}$	$\{12,23,39\}$
9	posar 6	1,2,3,9,6	$\{1,2,3,9,6\}$	$\{12,23,39,96\}$
6	posar 5	1,2,3,9,6,5	$\{1,2,3,9,6,5\}$	$\{12,23,39,96,65\}$
5	posar 4	1,2,3,9,6,5,4	$\{1,2,3,9,6,5,4\}$	$\{12,23,39,96,65,54\}$
4	posar 7	1,2,3,9,6,5,4,7	$\{1,2,3,9,6,5,4,7\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47\}$
7	posar 8	1,2,3,9,6,5,4,7,8	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
8	treure 8	1,2,3,9,6,5,4,7	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
7	treure 7	1,2,3,9,6,5,4	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
4	treure 4	1,2,3,9,6,5	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
5	treure 5	1,2,3,9,6	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
6	treure 6	1,2,3,9	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
9	treure 9	1,2,3	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
3	treure 3	1,2	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
2	treure 2	1	$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$
1	treure 1		$\{1,2,3,9,6,5,4,7,8\}$	$\{12,23,39,96,65,54,47,78\}$