

Funciones trigonométricas en función de las otras cinco.¹

En términos de	sen	cos	tan	cot	sec	csc
$\text{sen } \theta$	$\text{sen } \theta$	$\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$	$\frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}{\sec \theta}$	$\frac{1}{\csc \theta}$
$\cos \theta$	$\sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}$	$\cos \theta$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\frac{\cot \theta}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$	$\frac{1}{\sec \theta}$	$\frac{\sqrt{\csc^2 \theta - 1}}{\csc \theta}$
$\tan \theta$	$\frac{\text{sen } \theta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta}$	$\tan \theta$	$\frac{1}{\cot \theta}$	$\sqrt{\sec^2 \theta - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2 \theta - 1}}$
$\cot \theta$	$\frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}}{\text{sen } \theta}$	$\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\frac{1}{\tan \theta}$	$\cot \theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\sqrt{\csc^2 \theta - 1}$
$\sec \theta$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}}$	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$	$\frac{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}{\cot \theta}$	$\sec \theta$	$\frac{\csc \theta}{\sqrt{\csc^2 \theta - 1}}$
$\csc \theta$	$\frac{1}{\text{sen } \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}$	$\sqrt{1 + \cot^2 \theta}$	$\frac{\sec \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\csc \theta$

De las definiciones de las funciones trigonométricas:

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \csc x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Son más sencillas de probar en la circunferencia trigonométrica o goniométrica (que tiene radio igual a 1):

$$\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi) \quad \cos(x) = \cos(x + 2\pi) \quad \tan(x) = \tan(x + \pi)$$

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x) \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x) \quad \cot(-x) = -\cot(x)$$

$$\text{sen}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \cos(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

A veces es importante saber que cualquier combinación lineal de una serie de ondas senoidales que tienen el mismo período pero están desfasadas, es también una onda senoidal del mismo período pero con un desplazamiento de fase diferente. Dicho de otro modo:

$$a \text{sen}(x) + b \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \text{sen}\left(x + \arctan \frac{b}{a}\right)$$

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Es llamada **identidad trigonométrica fundamental**, y efectuando sencillas operaciones permite encontrar unas 24 identidades más, muy útiles para problemas introductorios del tipo conocido el valor de la función seno, obtenga el valor de las restantes (sin tabla ni calculadora).

Por ejemplo, si se divide ambos miembros de " $\text{sen}^2 + \cos^2 = 1$ " por \cos^2 , se obtiene:

$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

Ahora, dividiendo ambos miembros de la misma expresión por el sen^2 , se obtiene:

$$\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$$

Entonces puede expresarse la función seno según alguna otra conocida:

$$\text{sen}(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} \quad \text{sen}(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$$

$$\text{sen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2(x)}} \quad \text{sen}(x) = \frac{1}{\sec x} \sqrt{\sec^2(x) - 1}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} = \sen^2 t$$

Teoremas de la suma y diferencia de ángulos

Pueden demostrarse según la Fórmula de Euler o mediante la proyección de ángulos consecutivos. La identidad de la tangente surge del cociente entre coseno y seno, y las restantes de la recíproca correspondiente.

$$\sen(x \pm y) = \sen(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sen(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sen(x) \sen(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}$$

De lo que se sigue para determinados ángulos suplementarios:

$$\sen(\pi \pm x) = \mp \sen(x)$$

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos(x)$$

$$\tan(\pi \pm x) = \pm \tan(x)$$

$$\csc(\pi \pm x) = \mp \csc(x)$$

Para ángulos complementarios:

$$\sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sen(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec(x)$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc(x)$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$$

Para ángulos opuestos:

$$\sen(-x) = -\sen(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\csc(-x) = -\csc(x)$$

$$\sec(-x) = \sec(x)$$

$$\cot(-x) = -\cot(x)$$

Identidades del ángulo múltiple

Si T_n es el n -simo Polinomio de Chebyshev entonces

$$\cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$

Fórmula de De Moivre:

$\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx) = (\cos(x) + i \operatorname{sen}(x))^n$

Identidades del ángulo doble, triple y medio

Pueden obtenerse remplazándolo y por x (o sea $\operatorname{sen}(x + x) = \operatorname{sen}(2x)$) en las identidades anteriores, y usando el teorema de Pitágoras para los dos últimos (a veces es útil expresar la identidad en términos de seno, o de coseno solamente), o bien aplicando la Fórmula de De Moivre cuando $n = 2$.

Fórmula del ángulo doble			
$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2\theta &= 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}\end{aligned}$	$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}\end{aligned}$	$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	$\cot 2\theta = \frac{\cot \theta - \tan \theta}{2}$
Fórmula del ángulo triple			
$\operatorname{sen} 3\theta = 3 \operatorname{sen} \theta - 4 \operatorname{sen}^3 \theta$	$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$	$\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$	
Fórmula del ángulo medio			
$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$	$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$	$\begin{aligned}\tan \frac{\theta}{2} &= \csc \theta - \cot \theta \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta}\end{aligned}$	$\cot \frac{\theta}{2} = \csc \theta + \cot \theta$

Producto infinito de Euler

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{8}\right) \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}.$$

Identidades para la reducción de exponentes

Resuelve las identidades tercera y cuarta del ángulo doble para cos²(x) y sen²(x).

Seno	$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$	$\operatorname{sen}^3 \theta = \frac{3 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 3\theta}{4}$	$\operatorname{sen}^4 \theta = \frac{3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}$	
Coseno	$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	$\cos^3 \theta = \frac{3 \cos \theta + \cos 3\theta}{4}$	$\cos^4 \theta = \frac{3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}$	$\cos^5 \theta = \frac{10 \cos \theta + 5 \cos 3\theta + \cos 5\theta}{16}$
Otros	$\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1 - \cos 4\theta}{8}$	$\operatorname{sen}^3 \theta \cos^3 \theta = \frac{\operatorname{sen}^3 2\theta}{8}$		

Paso de producto a suma

Puede probarse usando el teorema de la suma para desarrollar los segundos miembros.

$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$
$\cos x \cos y = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}$
$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)}{2}$
$\cos x \operatorname{sen} y = \frac{\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)}{2}$

Paso de suma a producto

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

Paso de diferencia de cuadrados a producto

$$1) \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}(x+y) \operatorname{sen}(x-y)$$

$$2) \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \cos(x+y) \cos(x-y)$$

Deducción

1) recordando: que cateto opuesto sobre cateto adyacente

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

multiplicando

$$\cos(x+y) \cos(x-y) = \cos^2 x \cos^2 y - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y$$

De tal manera que obtendremos:

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y$$

aplicando esto en la ecuación inicial

$$\cos(x+y) \cos(x-y) = \cos^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 y) - (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen}^2 y$$

multiplicando

$$1) \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \cos(x+y) \cos(x-y)$$

De una manera análoga se halla el primer teorema.

Eliminar seno y coseno

A veces es necesario transformar funciones de seno y coseno para poderlas sumar libremente, en estos casos es posible eliminar senos y cosenos en tangentes.

$$|\operatorname{sen}(x)| = \frac{|\tan(x)|}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$$

$$\operatorname{sen}(x) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{2 \tan \left(\frac{1}{2} x \right)}{1 + \tan^2 \left(\frac{1}{2} x \right)}$$

$$\cos(x) = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) - 1 = \frac{1 - \tan^2 \left(\frac{1}{2} x \right)}{1 + \tan^2 \left(\frac{1}{2} x \right)}$$

$$|\cos(x)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$$

Funciones trigonométricas inversas

$$\arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \begin{cases} \pi/2, & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

Composición de funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad \cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\tan(\operatorname{arcsen}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

para $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos(n \arccos(x)) = \frac{2^n x^n}{2} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n}{k} \binom{n-1-k}{k-1} (2x)^{n-2k}$$

$$\operatorname{sen}(n \operatorname{arcsen}(x)) = x \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} (2x)^{n-2k-1} \right]$$

Fórmula de productos infinitos

Seno

Coseno

$$\operatorname{sen} x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2} \right)$$

$$\operatorname{senh} x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 n^2} \right)$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 (n - \frac{1}{2})^2} \right)$$

$$\cosh x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 (n - \frac{1}{2})^2} \right)$$

Fórmula de Euler

$$e^{+ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i \operatorname{sen}(x)$$

Teorema del Coseno

Teorema del coseno

Dado un triángulo ABC, siendo α , β , γ , los ángulos, y a , b , c , los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Teorema del seno

En todo triángulo se da la siguiente relación entre la longitud de sus lados a , b y c y el seno de sus respectivos ángulos opuestos A , B y C

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

Aplicación

El teorema del seno es usado con frecuencia para resolver problemas en los que se conoce un lado del triángulo y dos ángulos y se desea encontrar las medidas de los otros lados para posteriormente identificar los valores de las funciones trigonométricas.

Definiciones exponenciales

La mayor parte de funciones trigonométricas admiten una formulación en términos de números complejos, algunos ejemplos:

Función	Función inversa
$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$	$\operatorname{arcsen} x = -i \ln\left(ix + \sqrt{1 - x^2}\right)$
$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$	$\operatorname{arccos} x = -i \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
$\tan \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}$	$\operatorname{arctan} x = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i + x}{i - x}\right)$
$\operatorname{csc} \theta = \frac{2i}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$	$\operatorname{arccsc} x = -i \ln\left(\frac{i}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$
$\sec \theta = \frac{2}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$	$\operatorname{arcsec} x = -i \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{i}{x^2}}\right)$
$\cot \theta = \frac{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$	$\operatorname{arccot} x = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i - x}{i + x}\right)$
$\operatorname{cis} \theta = e^{i\theta}$	$\operatorname{arccis} x = \frac{\ln x}{i}$

Véase también

- Trigonometría
- Función trigonométrica
- Hexágono trigonométrico. Recurso mnemónico para ayudar a recordar relaciones e identidades trigonométricas.
- Seno, coseno, tangente

Referencias

1. *Trigonometría* (Segunda edición). Limusa(Noriega editores). ISBN 968-18-5617-1. El recuadro se parece mucho pero el libro tiene un lapsus en

la última casilla.

Bibliografía

- Spiegel, M. & Abellanas, L.: "*Fórmulas y tablas de matemática aplicada*", Ed. McGraw-Hill, 1988. ISBN 84-7615-197-7.

Enlaces externos

- Algunas identidades extras más varios ejercicios resueltos. (http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Identidades_trigonométricas)
- Prueba visual del seno de la suma. Prueba visual del teorema del seno. (<http://www.rinconmatematico.com>)
- Trigonometría Fácil: El Hexágono Trigonométrico. (<http://www.youtube.com/watch?v=uvSsFPLXCJw>)
- Tabla de Identidades Trigonómicas para imprimir. (<http://neoparaiso.com/imprimir/identidades-trigonometricas.html>)

Obtenido de «https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Identidades_trigonométricas&oldid=93489747»

Categorías: Trigonometría | Identidad matemática

- Esta página fue modificada por última vez el 9 sep 2016 a las 01:02.
- El texto está disponible bajo la Licencia Creative Commons Atribución Compartir Igual 3.0; podrían ser aplicables cláusulas adicionales. Al usar este sitio, usted acepta nuestros términos de uso y nuestra política de privacidad.
- Wikipedia® es una marca registrada de la Fundación Wikimedia, Inc., una organización sin ánimo de lucro.