

Trabajo Final - Optimización de lugares de recuperación de desastres. Métodos y Cómputo Numérico

Aboulafia Gerardo

Diciembre 2024

Indice

1. Introducción	1
2. Optimización Exacta con Programación Lineal Entera	1
2.1. Formulación Matemática	1
2.2. Descripción del Método	2
3. Búsqueda Tabú	3
3.1. Descripción General	3
3.2. Pasos del Método	3
4. Simulated Annealing	4
4.1. Descripción General	4
4.2. Pasos del Método	4
5. Análisis de Resultados	4
5.1. Valor de la Función Objetivo (Distancia Total Ponderada)	5
5.2. Selección de Instalaciones	5
5.3. Visualización de Resultados	6
6. Refinamiento de centros de recuperación	7
7. Análisis de nuevos resultados	8
8. Conclusiones	9

1. Introducción

El problema de ubicación de instalaciones para la respuesta ante desastres consiste en seleccionar un conjunto de ubicaciones, entre un conjunto candidato, para instalar centros de atención que minimicen costos asociados (típicamente distancia ponderada por población y probabilidad de desastre) y cumplan con requisitos mínimos de cobertura. Entre los factores a considerar se encuentran:

- La población afectada y su distribución geográfica.
- La probabilidad de que ocurran desastres en cada zona.
- La distancia desde las instalaciones candidatas a las zonas afectadas.
- El número máximo de instalaciones que se pueden abrir, debido a restricciones presupuestarias o de recursos.
- Las necesidades mínimas de cobertura para cada sitio.

La complejidad del problema radica en que es de naturaleza combinatoria, ya que las variables de decisión son en su mayoría binarias, y el espacio de búsqueda puede ser extremadamente grande. Para abordarlo, se pueden emplear tanto métodos exactos como heurísticos:

- **Optimización exacta con Programación Lineal Entera (PLE):** Ofrece la solución óptima, pero puede ser muy costosa en tiempo de cómputo para grandes instancias.
- **Búsqueda Tabú:** Una metaheurística que explora el espacio de soluciones usando una memoria a corto plazo (lista tabú) para evitar ciclos, encontrando soluciones cercanas al óptimo en menos tiempo.
- **Simulated Annealing (Recocido Simulado):** Una metaheurística inspirada en el proceso de enfriamiento de metales que permite aceptar soluciones peores temporalmente, favoreciendo la exploración global antes de converger.

A continuación se detalla cada uno de estos enfoques, incluyendo su formulación y su lógica de funcionamiento.

2. Optimización Exacta con Programación Lineal Entera

2.1. Formulación Matemática

Sea:

- I : Conjunto de sitios afectados, indexados por $i = 1, 2, \dots, I$.

- J : Conjunto de ubicaciones candidatas para abrir instalaciones, indexados por $j = 1, 2, \dots, J$.
- M_i : Población del sitio i .
- B_i : Probabilidad de desastre en el sitio i .
- d_{ij} : Distancia entre el sitio i y la ubicación candidata j .
- F : Número máximo de instalaciones a abrir.
- Q_i : Cobertura mínima requerida para el sitio i .

Variables de decisión:

$x_j \in \{0, 1\}$ indica si se abre (1) o no (0) la instalación en j ,

$z_{ij} \in \{0, 1\}$ indica si el sitio i es atendido por la instalación j .

La función objetivo minimiza el costo total ponderado por distancia, población y riesgo:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J M_i B_i d_{ij} z_{ij}.$$

Sujeto a las restricciones:

$$\sum_{j=1}^J x_j = F \quad (\text{exactamente } F \text{ instalaciones abiertas}),$$

$$\sum_{j=1}^J z_{ij} \geq Q_i \quad \forall i \in \{1, \dots, I\} \quad (\text{cobertura mínima}),$$

$$z_{ij} \leq x_j \quad \forall i, j \quad (\text{no se puede asignar a una instalación no abierta}),$$

$$x_j, z_{ij} \in \{0, 1\}.$$

2.2. Descripción del Método

La resolución se realiza empleando un solver de programación lineal entera, que típicamente utiliza técnicas de Branch-and-Bound, cortadores de planos y diversas estrategias de poda. Esto garantiza encontrar la solución óptima. Sin embargo, el tiempo requerido puede ser prohibitivo para problemas grandes, dado que el problema suele ser NP-duro.

3. Búsqueda Tabú

3.1. Descripción General

La Búsqueda Tabú es una metaheurística que trabaja con una solución inicial y produce soluciones vecinas a la actual, evaluándolas y seleccionando la mejor. Para evitar estancamientos en óptimos locales, mantiene una lista tabú con movimientos recientemente realizados que no se pueden volver a aplicar de inmediato. Esta memoria a corto plazo impide volver a las mismas soluciones una y otra vez, forzando la exploración de regiones distintas del espacio de soluciones.

3.2. Pasos del Método

1. **Solución Inicial:** Generar una solución inicial, por ejemplo eligiendo aleatoriamente las F instalaciones a abrir y asignando cada sitio a la instalación abierta más cercana.
2. **Vecindario:** Definir el vecindario como las soluciones obtenidas a partir de la solución actual al cambiar una instalación abierta por una cerrada, o modificando alguna asignación. Esto genera múltiples vecinos.
3. **Evaluación del Costo:** Para una solución dada, el costo se calcula como:

$$\text{Costo} = \sum_{i=1}^I \left(M_i B_i \min_{j: x_j=1} d_{ij} \right).$$

Esta expresión toma, para cada sitio i , la instalación abierta más cercana (que minimiza la distancia d_{ij}) y utiliza la población y el riesgo para ponderar el costo.

4. **Lista Tabú:** Registrar en la lista tabú los movimientos (por ejemplo, “abrir instalación j en lugar de k ”). Estos movimientos no se pueden revertir por un número determinado de iteraciones, forzando la búsqueda a explorar otras opciones.
5. **Selección de la Próxima Solución:** Elegir la mejor solución vecina que no se encuentre prohibida por la lista tabú. Si esta es mejor que la mejor global hallada hasta ahora, se actualiza el óptimo.
6. **Criterio de Parada:** Repetir el proceso durante un número fijo de iteraciones o hasta que no se observe mejora después de cierto umbral. La solución final es la mejor obtenida durante el proceso.

Aunque no ofrece garantía de optimalidad, la Búsqueda Tabú suele hallar soluciones de alta calidad en menos tiempo que la búsqueda exacta, siendo muy útil en casos de gran escala.

4. Simulated Annealing

4.1. Descripción General

Simulated Annealing se inspira en el proceso físico del recocido de metales: se “calienta” el sistema (permitiendo aceptar soluciones peores con mayor probabilidad) y luego se “enfía” gradualmente, disminuyendo la probabilidad de aceptar soluciones inferiores a medida que avanza la búsqueda. Esto le permite escapar de óptimos locales al inicio y, conforme reduce su temperatura, asentarse en una buena solución.

4.2. Pasos del Método

1. **Inicialización:** Partir de una solución inicial (por ejemplo, aleatoria) y establecer una temperatura inicial T relativamente alta.
2. **Generar un Vecino:** Crear una solución vecina modificando un elemento de la solución actual (por ejemplo, cerrar una instalación abierta y abrir otra).
3. **Cálculo del Cambio de Costo:** Sea $\Delta = \text{Costo}_{\text{vecino}} - \text{Costo}_{\text{actual}}$. Si $\Delta < 0$, se acepta inmediatamente. Si $\Delta \geq 0$, se acepta con probabilidad:

$$P = e^{-\Delta/T}.$$

4. **Actualización de la Temperatura:** Reducir gradualmente la temperatura según una regla de enfriamiento, por ejemplo:

$$T \leftarrow \alpha T, \quad \text{con } 0 < \alpha < 1.$$

5. **Criterio de Parada:** Detenerse cuando la temperatura es muy baja o se alcanzan un número máximo de iteraciones. La solución final es la mejor hallada durante el proceso.

Simulated Annealing no garantiza el óptimo global, pero su capacidad para aceptar soluciones peores al inicio puede descubrir soluciones de alta calidad que no se alcanzarían con métodos más deterministas.

5. Análisis de Resultados

En esta sección se presentan y analizan los resultados obtenidos tras la aplicación de los métodos de optimización descritos anteriormente: Programación Lineal Entera (PLE), Búsqueda Tabú y Simulated Annealing (Recocido Simulado). Se observa que los tres métodos arrojaron resultados idénticos en la primera ejecución, lo cual se detalla a continuación.

Los métodos aplicados (Programación Lineal Entera, Búsqueda Tabú y Simulated Annealing) generaron los siguientes resultados consistentes en la primera ejecución:

Valor de la Función Objetivo (Distancia Total Ponderada): 779,692,084.72

Cuadro 1: Población Servida por Cada Instalación Abierta

Instalación	Población Servida
San Antonio, TX	115,859,135
St. Louis, MO	43,291,620
Atlanta, GA	54,188,155
Baltimore, MD	83,746,849
Cincinnati, OH	34,981,620

5.1. Valor de la Función Objetivo (Distancia Total Ponderada)

El **Valor de la Función Objetivo** obtenido (779,692,084.72) representa la **Distancia Total Ponderada** que se busca minimizar en el problema de optimización. Este valor se calcula considerando los siguientes factores:

$$\text{Distancia Total Ponderada} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J M_i B_i d_{ij} z_{ij}$$

Donde:

- M_i es la población del sitio i .
- B_i es la probabilidad de desastre en el sitio i .
- d_{ij} es la distancia entre el sitio i y la instalación candidata j .
- z_{ij} es una variable binaria que indica si el sitio i es atendido por la instalación j .

Este valor combina la distancia entre las instalaciones y los sitios afectados, la población de cada sitio y la probabilidad de desastre en cada zona, asegurando que las instalaciones seleccionadas estén estratégicamente ubicadas para atender de manera eficiente a la mayor población posible con el menor costo ponderado.

5.2. Selección de Instalaciones

A pesar de disponer de 10 ubicaciones candidatas para abrir instalaciones, solo se seleccionaron 5. Esta decisión se fundamenta en las siguientes razones:

1. Restricciones Presupuestarias y de Recursos:

- Abrir y operar cada instalación conlleva costos asociados que, en conjunto, podrían exceder el presupuesto disponible si se opta por abrir todas las 10 instalaciones.

- Los recursos humanos y materiales necesarios para operar cada instalación son limitados, lo que impone un tope en el número de instalaciones viables.

2. Optimización de la Cobertura:

- Limitar el número de instalaciones permite una asignación más eficiente de los recursos, asegurando que cada instalación abierta tenga una cobertura óptima.
- Se busca maximizar la población servida mientras se minimiza la distancia ponderada, lo que es más manejable con un número reducido de instalaciones.

3. Minimización de la Distancia Total Ponderada:

- Al seleccionar solo las 5 instalaciones más estratégicamente ubicadas, se logra minimizar la distancia total ponderada, resultando en una respuesta más eficiente ante desastres.

4. Cumplimiento de Requisitos Mínimos de Cobertura:

- Aunque se abren menos instalaciones, todas las ubicaciones abiertas cumplen o superan los requisitos mínimos de cobertura establecidos, garantizando que cada sitio afectado reciba la atención necesaria.

Esta selección representa un equilibrio entre la eficiencia de recursos y la efectividad en la cobertura de la población afectada, asegurando una respuesta ante desastres óptima dentro de las limitaciones impuestas.

5.3. Visualización de Resultados

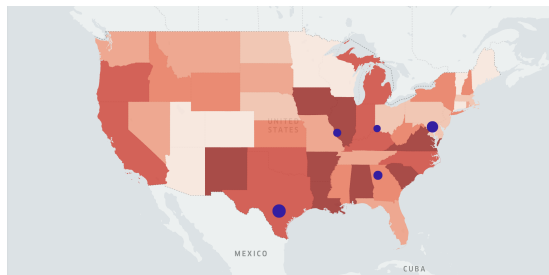


Figura 1: Distribución Geográfica de las Instalaciones Abiertas

El gráfico 1, muestra a los estados de Estados Unidos coloreados en una escala de blanco a rojo, siguiendo la probabilidad de que ocurra un desastre natural. Los puntos azules son las instalaciones. El radio del punto está determinado por la cantidad de personas que deberían alojar esos centros.

Como se nota en la figura 1, todas las instalaciones están cerca de la costa este de Estados Unidos. Además, el centro que tiene más población asignada es el que se encuentra más cerca del oeste (el que está justo encima de México). Este centro tiene muchas personas porque arrastra a toda la población de la costa oeste que no tiene a otro centro cercano para ir.

6. Refinamiento de centros de recuperación

La situación anterior planteó un desafío importante. Como se visualiza en la figura 2, no se cuenta con instalaciones cerca de la costa oeste. Esta zona debe tomarse en cuenta por casos como el de California, estado que tiene una probabilidad de desastre relativamente alta (0.4). Además, se debe recordar que la población en California es alta (casi 40 millones de habitantes), por la que cuando se calculan los pesos, tiene mucha importancia en el modelo.

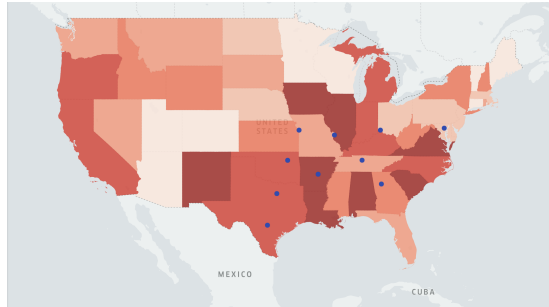


Figura 2: Distribución Geográfica de las Instalaciones Disponibles

Es por esto que se generaron 3 instalaciones en la zona oeste de manera random para evaluar el comportamiento de los algoritmos con nueva información recibida. Luego del ajuste, la distribución de las instalaciones fueron modificadas, como se ve en la figura 3. Es importante recalcar que estas no son las instalaciones abiertas, sino las disponibles para que los algoritmos de optimización usen para los datos.

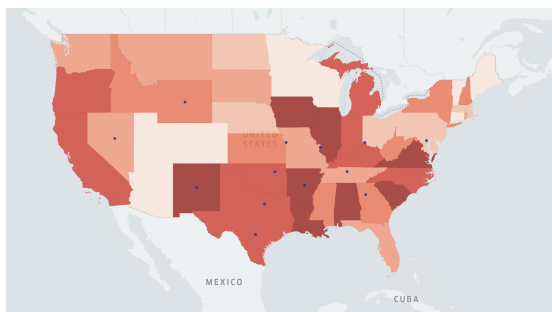


Figura 3: Distribución Geográfica de las Instalaciones Disponibles luego del ajuste

7. Análisis de nuevos resultados

Ciudad	Valor
San Antonio, TX	41,245,245
St. Louis, MO	60,191,080
Atlanta, GA	70,500,244
Baltimore, MD	85,516,920
Eureka, NV	74,613,890

Cuadro 2: Tabla de instalaciones y valores asociados.

Como se muestra en la figura 4, la inclusión de un centro de recuperación en Nevada, el único en la región oeste, fue una de las decisiones óptimas identificadas por los algoritmos. Este centro se convirtió en el segundo con mayor cantidad de habitantes asignados, lo que evidencia su importancia estratégica para atender la alta densidad poblacional de la costa oeste. Este ajuste también refleja cómo la ausencia inicial de instalaciones en esta región generaba una sobrecarga en los centros ubicados en otras áreas, especialmente en Texas.

Un cambio significativo observado fue en el centro de Texas, que inicialmente era el que alojaba la mayor cantidad de habitantes (115,859,135 personas). Tras la redistribución, pasó a ser el centro con menos personas asignadas. Esto se explica por el hecho de que gran parte de la población de la costa oeste, que antes dependía de Texas debido a la falta de instalaciones cercanas, ahora está asignada al centro en Nevada. Este resultado destaca cómo la inclusión de nuevas instalaciones en ubicaciones clave puede aliviar la presión sobre otras infraestructuras existentes.

Por último, el Total Weight del modelo, que representa el costo total ponderado en términos de distancia, población y riesgo, se redujo de 779,692,084 a 385,430,979. Esto implica una mejora significativa en la eficiencia del modelo, logrando una distribución más equilibrada y eficiente de los recursos. La disminución en el costo ponderado refleja que las nuevas ubicaciones no solo op-

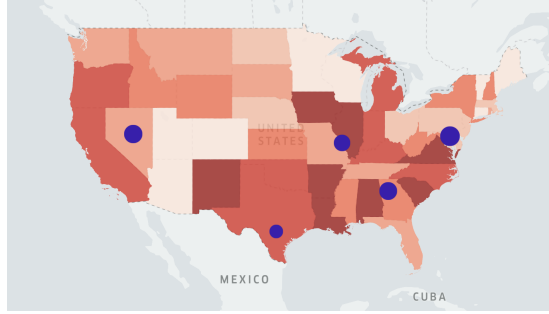


Figura 4: Distribución Geográfica de las Instalaciones Disponibles luego del ajuste

timizan la cobertura, sino que también reducen la distancia promedio entre las instalaciones y las zonas afectadas, mejorando la capacidad de respuesta general ante desastres.

8. Conclusiones

Este trabajo abordó el problema de optimización de ubicación de instalaciones para la respuesta ante desastres, un desafío complejo debido a su naturaleza combinatoria y a la cantidad de variables involucradas. A través de un enfoque integral que combinó métodos exactos y metaheurísticos, se lograron identificar estrategias eficientes para la distribución de instalaciones de recuperación, maximizando la cobertura de población y minimizando los costos ponderados.

La formulación basada en Programación Lineal Entera permitió definir el problema de manera precisa, incorporando variables clave como población, probabilidad de desastres y distancias geográficas. Esta formulación sirvió como una base sólida para evaluar el desempeño de los métodos implementados. Si bien la Programación Lineal Entera ofreció soluciones óptimas, su escalabilidad resultó limitada para problemas de gran tamaño debido al tiempo de cómputo requerido. Por otro lado, los métodos metaheurísticos, como la Búsqueda Tabú y el Simulated Annealing, demostraron ser herramientas eficaces para encontrar soluciones cercanas al óptimo en menor tiempo, especialmente cuando se incluyó nueva información, como la generación de instalaciones adicionales.

La incorporación de centros en la costa oeste, específicamente en Nevada, evidenció la importancia de considerar la densidad poblacional y la probabilidad de desastres al distribuir las instalaciones. Este ajuste no solo mejoró la cobertura en una región previamente desatendida, sino que también redujo significativamente el costo total ponderado, pasando de 779,692,084 a 385,430,979. Además, la redistribución permitió aliviar la carga en las instalaciones previamente más sobrecargadas, logrando una asignación más equilibrada y eficiente de los recursos.

La selección de un número limitado de instalaciones (cinco) reflejó un compromiso entre las restricciones presupuestarias y la necesidad de optimizar la cobertura. Este enfoque demostró ser efectivo para evitar la sobrecarga de recursos en regiones específicas, asegurando una respuesta eficiente dentro de las limitaciones del modelo.

El análisis de los resultados destacó que la inclusión de datos adicionales, como nuevas ubicaciones candidatas, puede influir significativamente en la calidad de las soluciones. Esto subraya la importancia de mantener modelos flexibles y adaptables a diferentes escenarios. Asimismo, se identificó que las regiones con alta densidad poblacional y riesgo de desastres deben priorizarse estratégicamente, incluso si requieren ajustes adicionales en los datos iniciales.

En conclusión, este trabajo logró una solución eficiente para un problema de alta complejidad, demostrando la efectividad de los métodos de optimización y la importancia de integrar información relevante para mejorar la toma de decisiones estratégicas. Los hallazgos representan una contribución valiosa para la planificación de infraestructura en contextos de recuperación ante desastres y sientan las bases para futuros desarrollos en este ámbito.

Referencias

- [1] Boonmee, Chawis, Mikiharu Arimura, y Takumi Asada. *Facility location optimization model for emergency humanitarian logistics*. Division of Sustainable and Environmental Engineering, Muroran Institute of Technology, Muroran, Hokkaido, Japón. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212420916302576>
- [2] MathWorks. *¿Qué es el recocido simulado?*. Disponible en: <https://la.mathworks.com/help/gads/what-is-simulated-annealing.html>
- [3] Algorithm Afternoon. *Tabu Search*. Disponible en: https://algorithmafternoon.com/stochastic/tabu_search/