Epidemiología

Los modelos SI y SIR

Gerardo Martín

28-07-2023

El modelo SI

- Representa dinámica de infecciones con dos estados

Susceptibles $\longrightarrow$ Infectados

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S I \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S I \tag{2}$$

Con transmisión denso-dependiente

Estado de equilibrio

Para encontrarlo, nos interesa el caso donde $\dot{I} = 0$:

$$\frac{dI}{dt} = 0 \therefore \beta S I = 0 \qquad (3)$$

$$I^* = 0; S^* = 0 \qquad (4)$$

Entonces hay dos puntos de equilibrio, con ó sin enfermedad

```r
beta <- 0.01
h = 0.1
t <- 25
S <- numeric(t/h)
I <- numeric(t/h)

S[1] <- 100
I[1] <- 1

for(i in 2:length(S)){
  S[i] <- S[i-1] + (- beta * S[i-1] * I[i-1]) * h
  I[i] <- I[i-1] + beta * S[i-1] * I[i-1] * h
}
```

Resultado de la integración

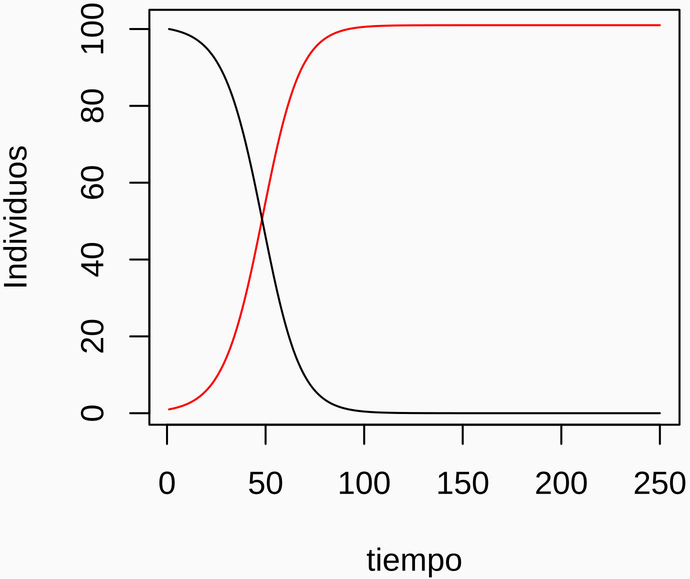

Figure 1: La línea roja representa el número de infectados, y la negra el de

El modelo SIR

Hay tres estados:

Susceptible $\longrightarrow$ Infectado $\longrightarrow$ Recuperado

Por lo tanto hay tres ecuaciones:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \tag{5}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \tag{6}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{7}$$

Parámetros y estado de equilibrio

- β es la tasa de transmisión
- γ, la tasa de recuperación, ó inverso del tiempo de duración de la infección
- El estado de equilibrio también lo encontramos resolviendo para I:

$$\beta SI - \gamma I = 0$$

$$I^* = \frac{\beta S}{\gamma}$$

El concepto R_0

- Equilibrio en SIR es muy diferente de SI
- Al inicio de una epidemia $I \approx 1$, por lo que cuando:

$$I^* = \frac{\beta S}{\gamma} = 1$$

Se conoce como el umbral R_0, y resolviendo para S, tenemos:

$$S = \gamma / \beta$$

¿Qué representa $S = \gamma/\beta$?

R_0

- El tamaño crítico de la comunidad
  - Densidad poblacional debajo de la cual la epidemia no puede crecer
  - Si $S < \gamma/\beta$ la infección se extingue
- Si calculamos β y γ para una comunidad con tamaño poblacional definido:

$$R_0 = \frac{\beta S}{\gamma}$$

- R_0 sólo tiene sentido al inicio de la epidemia
- En ese estado, representa el número de casos secundarios que genera cada infectado
  - Si $R_0 > 1$, la epidemia crece, si $R_0 < 1$ no habrá epidemia

Modelo SIR con mortalidad en infectados

- Caso revisado hasta ahora, no hay efecto de infección sobre supervivencia
- Infecciones causan mortalidad, por lo que puede ser necesario contemplarla mediante α:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \tag{8}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\gamma + \alpha)I \tag{9}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{10}$$