Metapoblaciones

Modelos

Gerardo Martín

28-07-2023

- Modelos representan fracción de parches ocupados en un sistema de parches de hábitat
- Los modelos son mecanínsticos
    - Representan explícitamente parte del fenómeno
- Basados en ecuaciones diferenciales
    - Tiempo contínuo vs Tiempo discreto

Recordatorio

Ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

- $dN/dt = N'(t)$, es la derivada de N con respecto de t
    - Es el cambio neto de la población por unidad de tiempo
- r es la tasa instantánea de cambio de N
    - Número nuevo de individos per cápita que ingresarán a población

Ejemplo con función lineal

$$f(x) = a + bx$$

La derivada de $f(x)$ es;

$$f'(x) = b$$

Y representada con la notación de Leibniz:

$$\frac{df(x)}{dx} = b$$

Ejemplo con función cuadrática

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

La derivada de $f(x)$ es;

$$f'(x) = b + cx$$

Y representada con la notación de Leibniz:

$$\frac{df(x)}{dx} = b + cx$$

Modelo exponencial

En la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

El tiempo está implícito, pero se puede integrar para obtener:

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

A veces no es posible integrar analíticamente, por lo que se recurre a integración numérica, invirtiendo la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En las ecuaciones diferenciales conocemos $f'(x)$, pero queremos conocer $f(x+h)$, por lo que si asumimos que $h > 0$ es constante, podemos resolver para $f(x+h)$:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \times h$$

Método de Euler, base de todas integración numérica

Inicio de rutina de integración:

1. Proponemos valor inicial de $f(x)$ y valor fijo de h, sustituimos
2. Hacemos el cálculo de $f'(x)$
3. Añadimos $f(x) + f'(x) \times h$
4. Utilizamos el valor obtenido de $f(x+h)$ como $f(x)$ y se repite el proceso

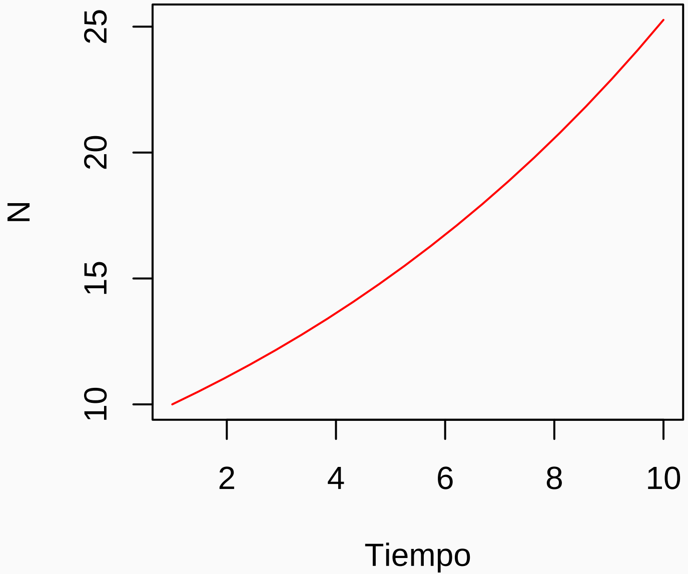
Ejemplo de integración numérica

1. $r = 0.1$, $N(0) = 10$, $h = 0.5$
2. Queremos conocer $N(0.5) = N(0) + N'(0) \times 0.5$
3. $N'(0) = 0.1 \times N(0) = 0.1 \times 10$
4. $N(0.5) = 10 + 0.1 \times 10 \times 0.5 = 11.5$$
5. Pasos 2-4 se repiten:

$$N(1) = N(0.5) + N'(0.5) \times h = 11.5 + 0.1 \times 11.5 \times 0.5 = 12.075$$

$$N(1.5) = N(1) + N'(1) \times h = 12.075 + 0.1 \times 12.075 \times 0.5 = 12.67875$$

Solución para 10 pasos de tiempo



Utilizando R para hacer integración numérica

Iniciando valores

```
r <- 0.1 #Parámetro
h <- 0.5 #Longitud del paso
t <- 10 #Número de unidades de tiempo
N <- numeric(t/h) #Vector que contiene valores
N[1] <- 10 #Tamaño inicial
```

Iteraciones de la integración

```
for(i in 2:length(N)){
      N[i] = N[i-1] + r*N[i-1]*h
  }
```

El modelo básico de metapoblaciones

Modelo de Levins

- Representa proporción de parches de hábitat ocupados por una especie
- Parches ocupados dependen de parches ocupados:

$$\frac{dp}{dt} = cp(1 - p)$$

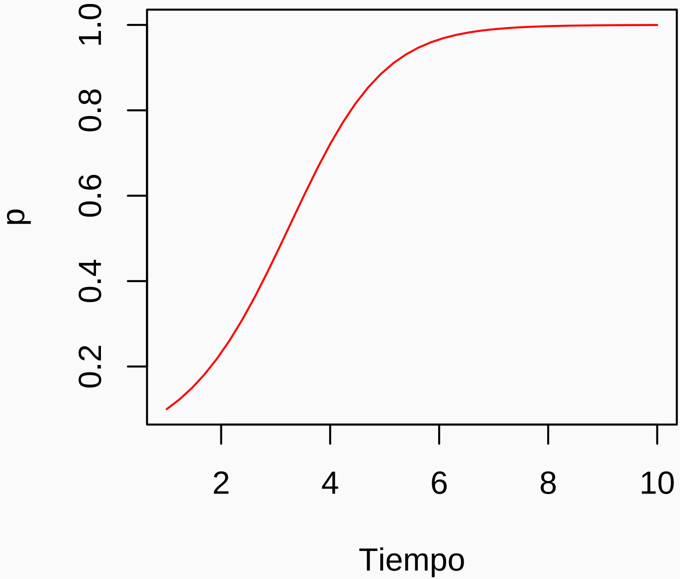
- p es la proporción de parches ocupados
- c es la tasa de colonización

Racional

- El máximo de parches ocupados es 1
- La colonización disminuye si hay muchos ocupados
    - Baja probabilidad de encontrar parches desocupados

Integración

```r
c <- 0.5; h <- 0.5; t <- 20
p <- numeric(t/h); p[1] <- 0.1
for(i in 2:length(p)){
  p[i] <- p[i-1] + c*p[i-1]*(1-p[i-1]) * h
}
```


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
p
2
4
6
8
10
Tiempo

- Sistema es estable cuando $dp/dt = 0$

$$cp(1 - p) = 0$$

- Por lo tanto hay dos puntos en que la fracción de parches se mantiene constante:

1. $p = 0$
2. $p = 1$

Supuestos del modelo

- Los individuos de mueven aleatoriamente entre parches
- Sólo hay colonizaciones
- No hay extinciones
- Se pueden incluir extinciones en el sistema:

$$\frac{dp}{dt} = cp(1-p) - ep$$

- e es la tasa de extinción

1. ¿Cuántos hay?
2. ¿Por qué?
3. ¿Cuál(es) es(son)?
4. Utilizando el código del modelo simple, integra el modelo con tasa de extinción
5. ¿Qué otros aspectos importantes debería incluir in modelo de metapoblaciones?

Lluvia de propágulos

- En modelo de Levins la fracción de parches ocupados siempre proviene de otros parches ocupados
- Existe posibilidad de inmigración de propagulos de otras fuentes
- Lluvia de propagulos sugiere eventos aleatorios de inmigración:

$$\frac{dp}{dt} = c(1-p) - ep$$

- c es la probabilidad de inmigración de otras fuentes
- ¿Punto(s) de equilibrio?

Punto(s) de equilibrio

$$p^* = \frac{c}{c - e}$$

Si $c = 0.1$ y $e = 0.05$

$$p^* = \frac{0.1}{0.1 + 0.05} = 0.666...$$

Aprximadamente el 67% de los parches permanecerán ocupados contstantemente

Modelo

$$\frac{dp}{dt} = (c + c_e p)(1 - p) - ep$$

- c es la probabilidad de importación de propágulos
- c_e es la tasa de colonización
- e es la tasa de extinción

Modelo de Levins con efecto de rescate

- Rescate: probabilidad de extinción disminuye cuando la fracción ocupada de parches es alta.
- E es la extinción total y es afectada por los parches desocupados $(1-p)$:

$$E = -ep(1-p)$$

E incluimos en el modelo de Levins con lluvia de propágulos:

$$\frac{dp}{dt} = (c + c_e p)(1-p) - ep(1-p)$$

Destrucción de hábitat

Racional

- La destrucción de hábitats es el problema definitorio del antropoceno
- ¿Cómo podemos tomarlo en cuenta para las metapoblaciones?
- La destrucción de hábitats debería de afectar la probabilidad de inmigración
    - Mas destrucción, menos atractivos son los hábitats, menos inmigración
- En Levins, la inmigración disminuye con fracción ocupada, por lo tanto...

El modelo

Modificación del modelo clásico (sin lluvia de propágulos ni rescate)

$$\frac{dp}{dt} = cp(1 - D - p) - ep$$

- donde D es la fracción de hábitats destruidos
- Punto(s) de equilibrio:

$$p^* = 1 - \frac{e}{c} - D$$

Integración con paquete `deSolve`

Necesidad real

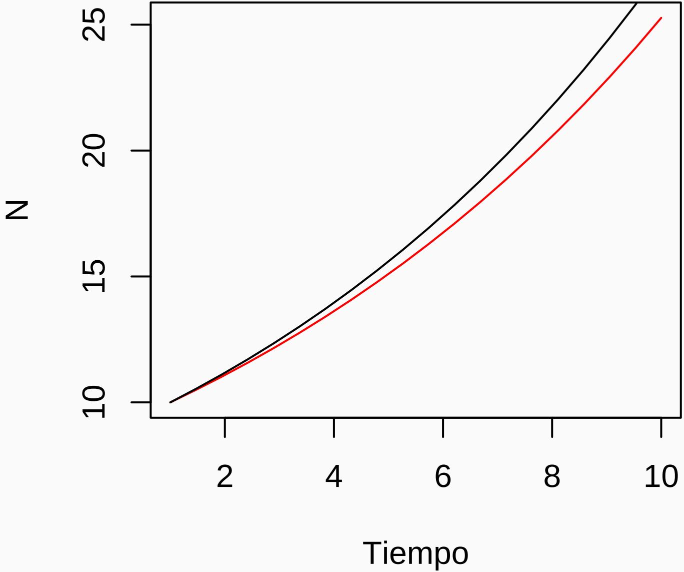


Figure 1: Línea negra es la solución analítica. Roja es solución de Euler

Necesidad real

- El método de Euler es muy inexacto
- El error de integración se acumula
- Se puede controlar, disminuyendo h, pero se vuelve leeento
- Métodos como Runge-Kutta de 2 y 4 pasos tienen menos error
    - Adams-Bashford son más sofisticados y rápidos
- Están implementados en paquete `deSolve` de `R`