

# Epidemiología

Los modelos SI y SIR

---

Gerardo Martín

28-07-2023

- Representa dinámica de infecciones con dos estados

Susceptibles  $\rightarrow$  Infectados

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI \quad (2)$$

Con transmisión denso-dependiente

Para encontrarlo, nos interesa el caso donde  $\dot{I} = 0$ :

$$\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \beta SI = 0 \quad (3)$$

$$I^* = 0; S^* = 0 \quad (4)$$

Entonces hay dos puntos de equilibrio, con ó sin enfermedad

```
beta <- 0.01
h = 0.1
t <- 25
S <- numeric(t/h)
I <- numeric(t/h)

S[1] <- 100
I[1] <- 1

for(i in 2:length(S)){
  S[i] <- S[i-1] + (- beta * S[i-1] * I[i-1]) * h
  I[i] <- I[i-1] + beta * S[i-1] * I[i-1] * h
}
```

## Resultado de la integración

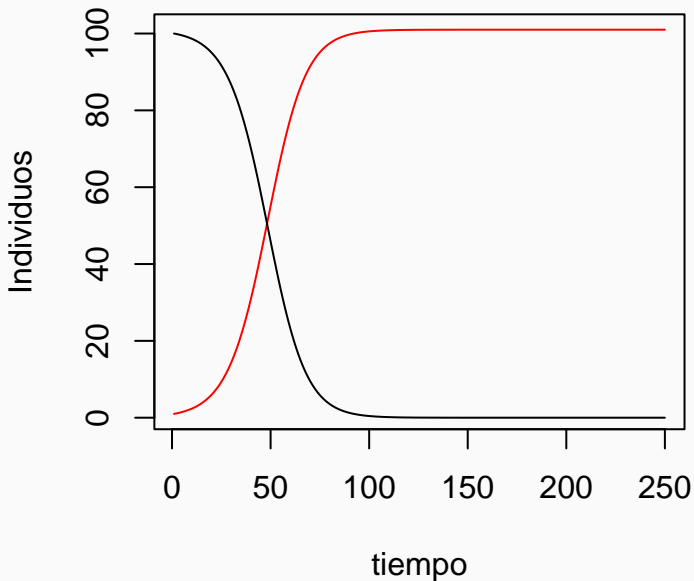


Figure 1: La línea roja representa el número de infectados, y la negra el de

- El modelo  $SI$  es equivalente al de metapoblaciones de Levins, donde individuos son los parches de hábitat
- Demostración: si  $N = S + I$ , y dividimos todo entre  $N$ ,  $s + i = 1$  y  $s = 1 - i$
- Sustituyendo en la ecuación para  $I$ , tenemos:

$$\frac{di}{dt} = \beta i(1 - i)$$

## El modelo $SIR$

---

## Qué representa

Hay tres estados:

Susceptible  $\rightarrow$  Infectado  $\rightarrow$  Recuperado

Por lo tanto hay tres ecuaciones:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad (5)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad (6)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (7)$$



- $\beta$  es la tasa de transmisión
- $\gamma$ , la tasa de recuperación, ó inverso del tiempo de duración de la infección
- El estado de equilibrio también lo encontramos resolviendo para  $I$ :

$$\beta SI - \gamma I = 0$$

$$I^* = \frac{\beta S}{\gamma}$$

- Equilibrio en  $SIR$  es muy diferente de  $SI$
- Al inicio de una epidemia  $I \approx 1$ , por lo que cuando:

$$I^* = \frac{\beta S}{\gamma} = 1$$

Se conoce como el umbral  $R_0$ , y resolviendo para  $S$ , tenemos:

$$S = \gamma/\beta$$

¿Qué representa  $S = \gamma/\beta$ ?

---

- El tamaño crítico de la comunidad
  - Densidad poblacional debajo de la cual la epidemia no puede crecer
  - Si  $S < \gamma/\beta$  la infección se extingue
- Si calculamos  $\beta$  y  $\gamma$  para una comunidad con tamaño poblacional definido:

$$R_0 = \frac{\beta S}{\gamma}$$

- $R_0$  sólo tiene sentido al inicio de la epidemia
- En ese estado, representa el número de casos secundarios que genera cada infectado
  - Si  $R_0 > 1$ , la epidemia crece, si  $R_0 < 1$  no habrá epidemia

## Modelo SIR con mortalidad en infectados

- Caso revisado hasta ahora, no hay efecto de infección sobre supervivencia
- Infecciones causan mortalidad, por lo que puede ser necesario contemplarla mediante  $\alpha$ :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad (8)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\gamma + \alpha)I \quad (9)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (10)$$

Esquema

## Modelos de transmisión frecueto-dependiente

---

- Denso-dependencia se basa en densidad crítica de permite transmisión
- Frecuento-dependencia, no requiere densidad mínima
  - Representa enfermedades con dinámicas de transmisión más lenta

Denso-dependencia, ó acción de pseudo-masas:

$$\beta SI$$

Frecuento-dependencia:

$$\beta S \frac{I}{N}$$

donde  $I/N$  es ...



La prevalencia de la infección

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S \frac{I}{N} \quad (11)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I \quad (12)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (13)$$

A este modelo se pueden añadir términos igual que al denso-dependiente

Derivemos la expresión para  $R_0$ , tomando en cuenta que  $N = S + I$ :

1.  $\beta - \gamma I = 0$
2.  $\beta \frac{SI}{S+I} = \gamma(S + I)$
3. Debido que al inicio de la epidemia  $S \approx N$ :

$$\beta I = \gamma I \rightarrow \frac{\beta}{\gamma} = 1$$

Las condiciones que evitarían la epidemia dependen de  $\beta$  y  $\gamma$ , no de  $S$

## Caos en el modelo SIR

---

- Transformar tamaños poblacionales en proporciones, con base en:

$$N = S + I + R \quad (14)$$

$$s = S/N \quad (15)$$

$$i = I/N \quad (16)$$

$$r = R/N \quad (17)$$

$$n = 1 = N/N \quad (18)$$

$$\frac{ds}{dt} = n - \beta si - \mu s \quad (19)$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - (\gamma + \alpha + \mu)i \quad (20)$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r \quad (21)$$