

La función exponencial, en su forma cerrada es:

$$N(t) = e^{rt}$$

Para encontrar su derivada $N'(t)$, necesitamos recordar la regla de las funciones encadenadas, que dice:

$$\text{si } h(x) = f(g(x)), \quad h'(x) = g'(x)f'(g(x)).$$

Por analogía, $h(x) = N(t)$, $g(x) = rt$, y $f(x) = e^x$, por lo tanto:

$$g'(x) = r; \quad f'(x) = e^x; \quad \text{y } f(g(x)) = r e^{rt}$$

Nota que en estos ejemplos, t simplemente sustituye a x

Entonces, sustituyendo $f'(x)$ y $g'(x)$, obtenemos:

$$N'(t) = r e^{rt}$$

donde podemos sustituir $N(t) = e^{rt}$:

$$N'(t) = rN$$

Para obtener la forma con el tiempo implícito. En ocasiones, es imposible revertir la forma implícita de manera analítica para obtener la integral y así conocer los valores futuros de las variables, y por lo tanto necesitamos integrar numéricamente.

El método de Euler se basa en invertir la fórmula de la derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

asumiendo que al seleccionar un tamaño fijo de h arbitrariamente pequeño, podemos llegar a conocer los valores futuros $f(x+h)$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ f'(x) \times h &= f(x+h) - f(x) \\ f(x+h) &= f(x) + f'(x) \times h \end{aligned}$$

Aplicando esto al modelo exponencial, necesitamos seleccionar primero un valor inicial ($f(0) = N(0) = 10$), un valor para la tasa de crecimiento $r = 0.1$, y otro para $h = dt = 1$

Paso de tiempo	Aproximación numérica	Solución analítica
N(1)	$N(0) + 0.1 (N(0))(dt) = 10 + 0.1(10) = 11$	$10 (e^{0.1(1)}) = 11.05$
N(2)	$N(1) + 0.1 (N(1))(dt) = 11 + 0.1(11) = 12.1$	$10 (e^{0.1(2)}) = 12.21$
N(3)	$N(2) + 0.1 (N(2))(dt) = 12.1 + 0.1(12.1) = 13.321$	$10 (e^{0.1(3)}) = 13.498$
N(4)	$N(3) + 0.1(N(3))(dt) =$	$10 (e^{0.1(4)}) =$

