Análisis de estabilidad y R_0

Ecología teórica

Gerardo Martín

28-08-2023

El modelo SIR con dinámica poblacional

Las ecuaciones

$$\dot{S} = \mu - \beta S I - \mu S \tag{1}$$

$$\dot{I} = \beta S I - (\mu + \gamma) I \tag{2}$$

$$\dot{R} = \gamma I - \mu R \tag{3}$$

$$\dot{N} = dN/dt$$

$$N = S + I + R = 1$$

Condiciones para distribución de equilibrio

Igualamos la ecuación para $\dot{I} = 0$:

$$\beta SI - (\mu + \gamma)I = 0$$

Factorizando I, tenemos:

$$I(\beta S - (\mu + \gamma)) = 0$$

Condiciones para distribución de equilibrio

Con lo que hay dos soluciones evidentes:

$$I^* = 0 \tag{4}$$

$$S^* = \frac{\mu + \gamma}{\beta} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

1. El equilibrio libre de enfermedad (I^*)
2. El equilibrio endémico (S^*)

Relación con R_0

La ecuación para R_0:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu}$$

Por lo que:

$$S^* = \frac{1}{R_0}$$

La distribución de equilibrio estable

- Cuando hay infecciones, el nivel de susceptibles será S^*
- Para encontrar la fracción de infectados, sustituimos $S^* = 1/R_0$ en:

$$\mu - \beta S I - \mu S = 0$$

de donde resolvemos para I, obteniendo:

$$I^* = \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1)$$

Encontrando R^*

Tomando en cuenta que:

$$S^* + I^* + R^* = 1$$

y que por lo tanto:

$$R^* = 1 - S^* - I^*$$

Sustituimos S^* e I^*

$$R^* = 1 - \frac{1}{R_0} - \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1)$$

Tenemos entonces que:

$$(S^*, I^*, R^*) = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), 1 - \frac{1}{R_0} - \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1)\right)$$

Interpretación de condiciones de equilibrio

En el modelo SIR con dinámicas

- Oscilaciones
- Decrecen con tiempo
- Amplitud disminuye
- Período aumenta

Simulación

Valores de parámetros y condiciones iniciales:

- $1/\mu = 70$ años
- $\beta = 520$ por año
- $1/\gamma = 7$ días
- $S(0) = 0.1$ y $I(0) = 2.5 \times 10^{-4}$
- $R_0 \approx 10$ (para cálculo hay que homogeneizar unidades de parámetros)

Código de deSolve

```r
parms <- list(
  mu = 1/(70 * 365),
  beta = 520 / 365,
  gamma = 1/7
)

y = c(S = 0.1, I = 2.5E-4, R = 0)

t <- seq(0, 60*365)
```

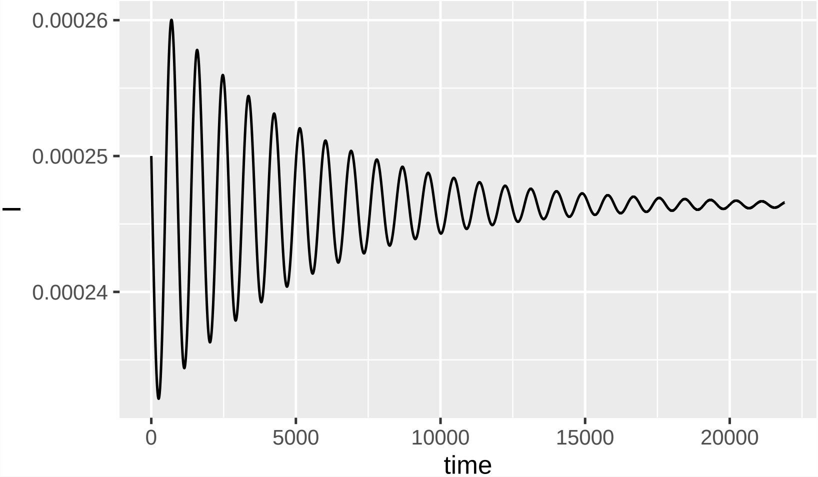
Código de deSolve

```
sir <- function(t, y, parms){
  S <- y[1]
  I <- y[2]
  R <- y[3]

  with(parms, {
    dS <- mu - beta * S * I  - mu * S
    dI <- beta * S * I  - (mu + gamma) * I
    dR <- gamma * I - mu * R

    return(list(c(dS, dI, dR)))
    })
}
```

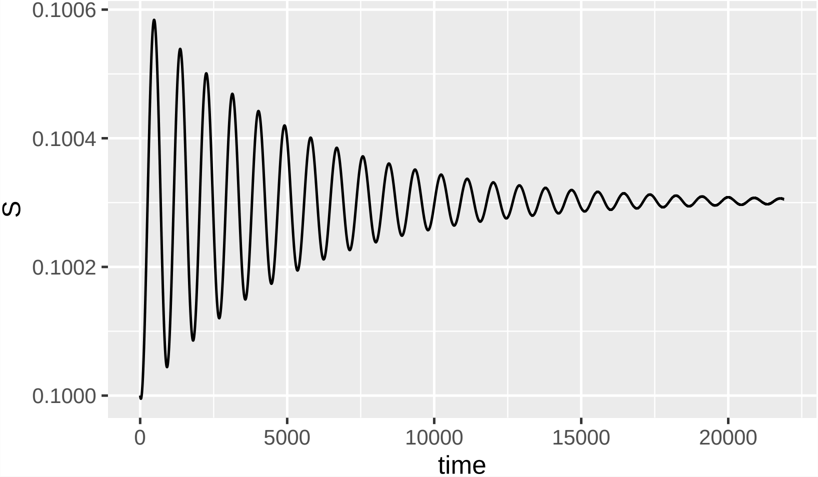
Código de deSolve

```r
library(deSolve)
sim <- lsoda(y = y, times =t,
             parms = parms,
             func = sir)
```

Resultado



Resultado



Actividad

Calcula de las condiciones de equilibrio endémico con los valores de los parámetros utilizados

Un marco más generalizable para el análisis de estabilidad

La matriz Jacobiana (J)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^*}{\partial N_1} & \frac{\partial f_1^*}{\partial N_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^*}{\partial N_n} \\ \frac{\partial f_2^*}{\partial N_1} & \frac{\partial f_2^*}{\partial N_2} & \cdots & \frac{\partial f_2^*}{\partial N_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n^*}{\partial N_1} & \frac{\partial f_n^*}{\partial N_2} & \cdots & \frac{\partial f_n^*}{\partial N_n} \end{bmatrix} \tag{7}$$

- $f_1^* \to \dot{S} = 0$
- $f_2^* \to I^*$
- $f_3^* \to R^*$
- $\partial S^* / \partial S$ quiere decir que es una derivada parcial
    - Se calcula igual, pero se considera que todo lo demás es constante

Obteniendo las derivadas parciales

$$S^* = \mu - \beta S^* I^* - \mu S^*$$

Si sólo consideramos que S es una variable:

$$\frac{\partial S^*}{\partial S} = -\beta I * -\mu$$

Obteniendo las derivadas parciales

En la derivada parcial con respecto de I, tratamos a S como constante y a I como variable:

$$\frac{\partial S^*}{\partial I} = -\beta S^*$$

Y en la de R, S e I son constantes

$$\frac{\partial S^*}{\partial R} = 0$$

La matriz completa una vez que calculamos todas las parciales

Matriz J de SIR

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I^* - \mu & -\beta S* & 0 \\ \beta I^* & \beta S^* - (\gamma + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} \tag{8}$$

Qué se hace con J

- Para encontrar cómo se llegará al equilibrio endémico, calculamos los valores propios (λ_J)
- Si tenemos 3 compartimentos, habrá 3 valores propios
- λ puede ser complejo, (p. ej. $\lambda = 1 - 3\sqrt{-1} = 1 - 3i$)
- Si $\lambda \in \mathbb{Z} \rightarrow$ se llegará al equilibrio endémico por medio de oscilaciones
- Si la parte real de $\lambda < 0$ el sistema eventualmente se equilibrará

Ejercicio 2

Sustituye los parámetros en J y calcula los valores propios (puedes usar cualquier herramienta).

- Las funciones f^* para J pueden ser cualesquiera
- Método se puede aplicar para todo tipo de infecciones en una población
- Otras cantidades importantes a calcular son la **edad promedio de primera infección** cuando la infección es endémica
    - Expresión derivada de J se puede utilizar en análisis de datos provenientes de poblaciones

Keeling y Rohani (2007). Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals. Princeton (en existencia en la biblioteca).