

Modelación matemática

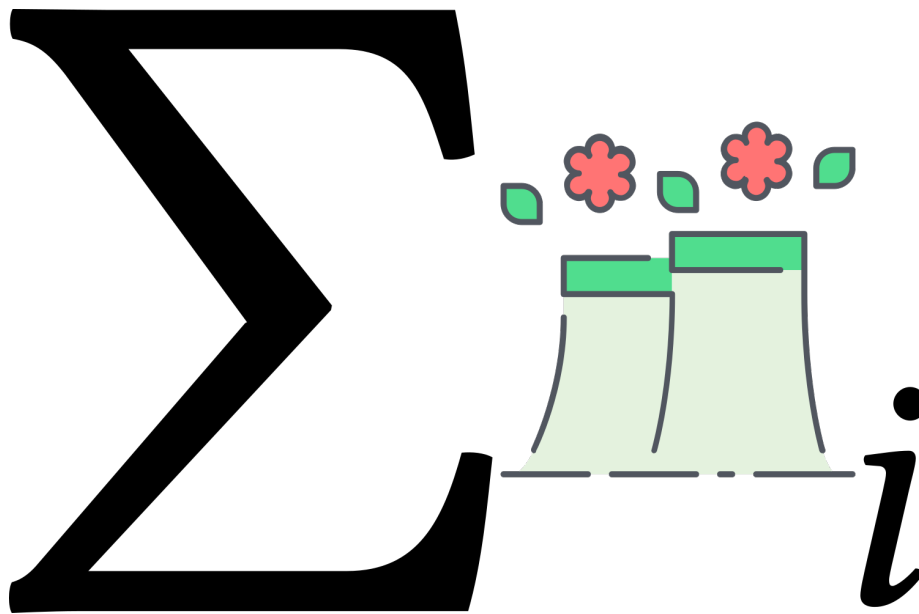
Gerardo Martín

2022-08-08

Contents

Chapter 1

Preámbulo



En el curso **Modelación matemática** aprenderemos a utilizar algunas herramientas matemáticas para analizar y entender los procesos de interés en ciencias ambientales. Los contenidos del índice se apegan al programa completo del curso, el cual se impartirá en los horarios normales establecidos. Para conocer cuándo, cómo y qué temas se se impartirán puedes consultar la estrategia docente.

Chapter 2

Criterios de evaluación

Las contribuciones a cada calificación parcial serán:

- Asistencia (25%)
- Trabajos de clase cumplidos (50%)
- Examen (25%)
- Participación (2 puntos extra máximo)

Cabe señalar, que la asistencia no corresponderá con su presencia en las sesiones sincrónicas, sino con el cumplimiento de los trabajos de clase. La participación se medirá tanto por participación directa en las sesiones sincrónicas como por el seguimiento que uds den a la clase por correo electrónico.

2.1 ¿Cómo se darán las clases?

Trataré de apegarnos a los tiempos de actividades sincrónicas y asincrónicas establecidos en la estrategia docente, pero éstos son completamente flexibles. Una estrategia que me ha funcionado en cursos anteriores ha sido la de dedicar la última actividad sincrónica de la semana a resolver dudas, es en estas sesiones en las que hay muchas posibilidades de conseguir puntos de participación.

Todos los contenidos del curso, lecturas y presentaciones, se irán añadiendo a este sitio web conforme avanza el semestre. En el Google Classroom de la materia se irán anunciando las diferentes actividades y sesiones sincrónicas con anticipación suficiente. Igualmente, los exámenes y resultados serán publicados a través de esta plataforma. A petición de uds, también se publicarán aquí los videos de las sesiones sincrónicas que tengamos, en especial para aquellos temas que sean mayor interés/dificultad/importancia. Los trabajos de práctica también se publicarán en Classroom.

Para finalizar, las clases sincrónicas estarán almacenadas en la playlist de la clase contenida en mi canal de youtube.

2.2 Reglas del salón

Estas, obviamente, son particulares del modelo en línea, por lo tanto aquí van las reglas de zoom:

1. Micrófonos apagados
2. Cámaras prendidas, exceptuando: 2.1. Si su velocidad de internet lo dificulta 2.2. Si tienen datos limitados
3. Hacer muchas preguntas
4. Decirme si paso algo por alto

2.3 Contacto

Para reportar fallos, resolver dudas y peticiones especiales grupales o individuales por favor enviar correo electrónico a gerardo.mmc@enesmerida.unam.mx.

Chapter 3

Unidad I: Modelos determinísticos

3.1 Introducción a la modelación

Imaginemos a seis personas invidentes, con la tarea de encontrar qué es el objeto que está frente a ellas usando únicamente el tacto. En la parábola de los seis hombres ciegos, el objeto es un elefante, de modo que la imagen que cada uno de ellos se forma del objeto depende enteramente de la parte del elefante que están tocando.

Quien toque los colmillos podrá pensar que se trata de una lanza, la trompa podría tratarse de una serpiente, la cola de una cuerda, las patas troncos de árbol y el cuerpo una pared. Es evidente que todas las hipótesis presentadas después de la inspección fueron erróneas, y que cuando estudiamos al mundo lo haremos igual, con la descripción de tan sólo una fracción de éste. Un séptimo hombre que pregunte a los otros seis qué fue lo que vieron podría formarse una imagen más completa del *sistema* para proponer otra hipótesis: se trata de un objeto grande reposando sobre cuatro columnas con apéndices adelante y atrás.

Al estudiar los sistemas ecológicos, al igual que los ciegos, no sabremos que estamos frente a un elefante. Los sistemas ecológicos, al igual que los elefantes, también tienen componentes interconectados, y nosotros los ecólogos somos como los hombres ciegos, sólo podemos observar ciertas partes de los ecosistemas. En nuestro trabajo entonces, aprender a identificar y proponer hipótesis sobre cómo funcionan los sistemas ecológicos.

Las hipótesis propuestas por los seis hombres representan modelos, es decir simplificaciones del mundo que nos ayudan a entenderlo. Los modelos matemáticos son simplificaciones formales del mundo utilizando otro lenguaje, las matemáticas.

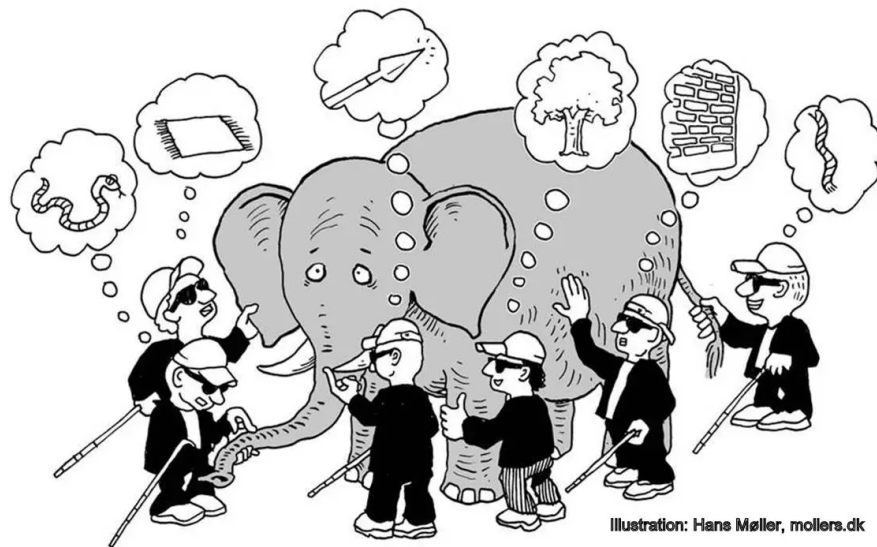


Figure 3.1: La parábola de los seis hombres ciegos inspeccionando un elefante.

3.2 Funciones básicas y su representación en el plano cartesiano

3.2.1 Las funciones

En ciencias frecuentemente se estudia cómo un fenómeno afecta a otro. Por ejemplo, cómo la disponibilidad de recurso afecta el crecimiento poblacional. Estas relaciones pueden ser representadas matemáticamente utilizando el concepto de función. Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos x y y , de modo que para cada elemento del conjunto x existe un solo elemento del conjunto y . Los elementos de y son llamados la imagen de x bajo la regla de correspondencia f , que se denota como $f(x)$. La función $f(x)$ se lee f de x , y el conjunto x es el *dominio* y y es el *codominio* de f .

Debido a que todos los valores de y son producidos por la función f , a x también se le conoce como variable independiente y a y como dependiente (puesto que depende de x). En términos prácticos $f(x) = y(x)$.

En esta unidad estaremos hablando de funciones, concretamente de:

- Lineales
- Cuadráticas
- La curva normal
- Trigonométricas

3.2. FUNCIONES BÁSICAS Y SU REPRESENTACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO 11

Para finalizar la unidad veremos una serie de aplicaciones de esta función, haciendo especial énfasis en la lineal.

3.2.2 La línea recta

Una línea recta se puede representar matemáticamente de varias maneras, la más común de ellas es por medio de una función. Una función, en cambio es una expresión matemática que indica una serie de operaciones (aritméticas por ejemplo), que serán aplicadas a un conjunto de números en sucesión (los números reales, p. ej.) para producir otro conjunto. Así la, función lineal más sencilla puede ser:

$$y(x) = x \quad (3.1)$$

Lo que quiere decir que y es una función de x , y cada valor de y será igual a cada valor de x . En lenguaje matemático, el conjunto de números de x se llama el dominio, y $y(x)$ el codominio. Algunas funciones lineales más complejas son:

$$y(x) = ax \quad (3.2)$$

donde a es una constante, lo que quiere decir que cada valor de $y(x)$ será producido por el producto $a \times x$. Finalmente, la expresión más común de una ecuación lineal es:

$$y(x) = b + ax \quad (3.3)$$

donde b también es una constante que se llama intercepto, y a es la pendiente, pues esta última determina la inclinación de la línea recta representada en el plano cartesiano.

3.2.2.1 Representaciones gráficas de la recta

Comencemos por dar un repaso del plano cartesiano. Este consiste de la representación de dos conjuntos de números reales en los que representamos una función, como una regla de correspondencia entre los valores de cada conjunto, de modo que a cada valor de x corresponde uno y sólo uno de los valores de y . Cada conjunto se puede representar como una recta, y cuando éstas se disponen perpendiculares dan origen al plano.

Ahora veamos, con un ejemplo gráfico por qué la constante a recibe el nombre de *pendiente*.

Como podemos ver, de manera más general, la línea recta es generada por una regla de correspondencia muy sencilla, un conjunto de valores X son multiplicados por un escalar a , a los que se les puede añadir un *intercepto* b . El intercepto siempre es el valor de $y(x)$ cuando $x = 0$.

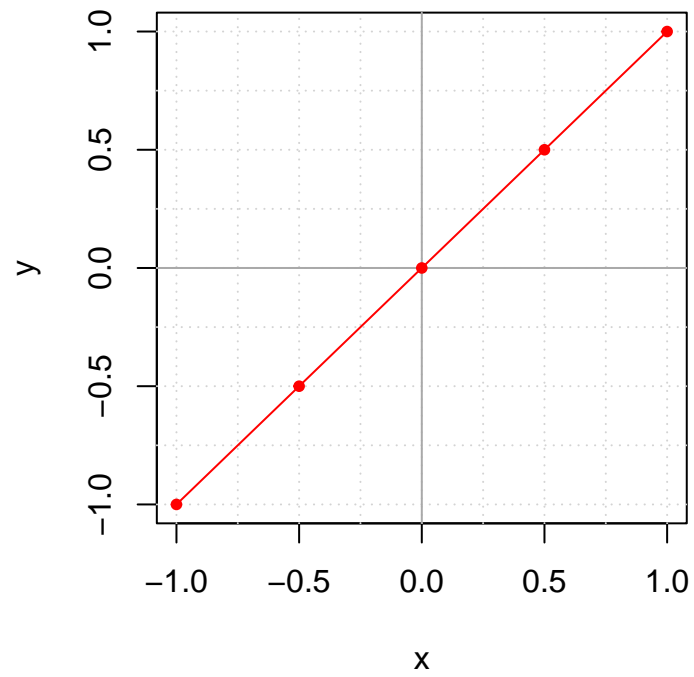


Figure 3.2: Ejemplo del plano cartesiado mostrando en rojo la correspondencia de valores para $y(x) = x$, donde los puntos corresponden a los pares de valores $(x = -1, y = -1), (-0.5, -0.5), (0, 0), (0.5, 0.5), (1, 1)$.

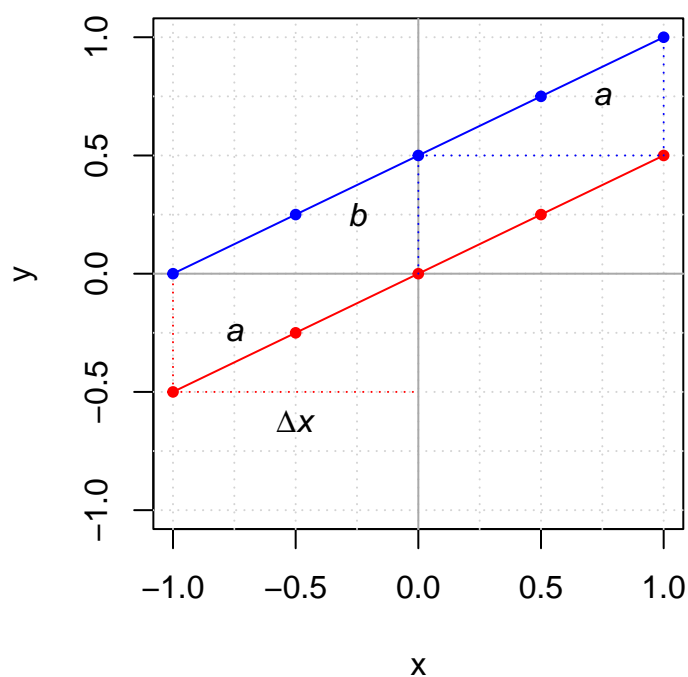


Figure 3.3: Gráficas de las funciones $y(x) = 0.5x$ (en rojo) y $y(x) = 0.5 + 0.5x$ (azul). Las líneas punteadas en colores indican el efecto de las constantes a y b , mientras que Δx denota el cambio de una unidad de x .

Ya se podrán imaginar que puede existir un sinnúmero de modelos lineales distintos, por ejemplo si y es una función de un gran número de conjuntos X :

$$y(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = b + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n \quad (3.4)$$

Gráficamente, estamos prácticamente limitados a explorar $y(x_1, x_2)$, pero existen muchas herramientas matemáticas para entender modelos lineales más complejos que veremos más adelante. Estas herramientas y las implicaciones generales de la simplicidad del modelo lineal lo hacen uno de los modelos más útiles con que contamos para estudiar matemáticamente fenómenos dinámicos (que cambian de estado a lo largo del tiempo), como para estudiarlos de manera probabilística (con estadística). De hecho, el modelo lineal nos puede servir para entender modelos, como la parábola y el exponencial, que geoméricamente no se parecen a la línea recta.

3.2.3 La parábola

Geoméricamente, la parábola es muy distinta de la recta:

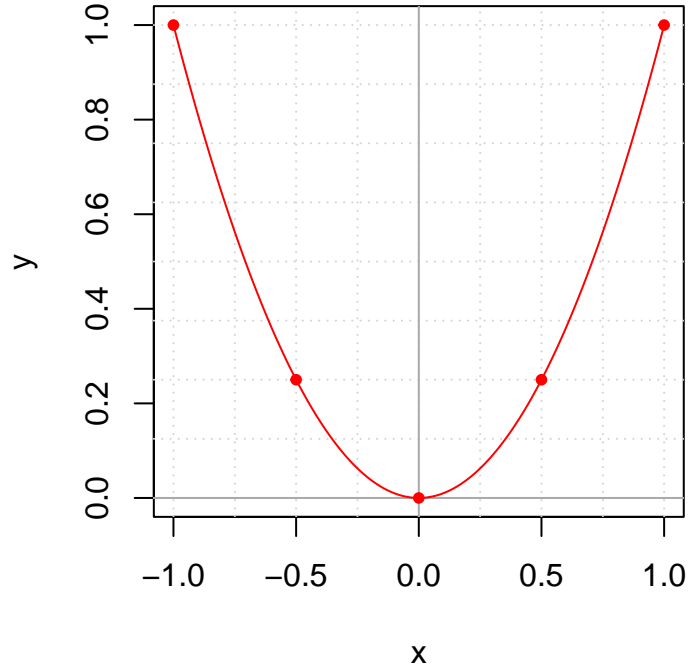


Figure 3.4: Ejemplo del plano cartesiado mostrando en rojo la correspondencia de valores para $y(x) = x^2$, donde los puntos corresponden a los pares de valores $(x = -1, y = 1), (-0.5, 0.25), (0, 0), (0.5, 0.25), (1, 1)$.

3.2. FUNCIONES BÁSICAS Y SU REPRESENTACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO15

La función matemática más sencilla que puede describir esta forma en el plano cartesiano es:

$$y(x) = x^2 \quad (3.5)$$

Al igual que con los modelos lineales, las parábolas pueden representarse matemáticamente de otras formas más complejas:

- $y(x) = a + bx + cx^2$
- $y(x) = a + cx^2$
- $y(x) = -x^2$

Si uno es observador, se dará cuenta de que estas ecuaciones son muy similares a la recta, y es que es posible considerar que x^2 se puede considerar como otro conjunto tal que $x' = x^2$, resultando así en funciones perfectamente lineales:

- $y(x) = a + bx + cx'$
- $y(x) = a + cx'$
- $y(x) = -x'$

Entonces, lo que realmente distingue matemáticamente a una parábola de una recta, es la doble ocurrencia de cada valor de y para los distintos valores de x :

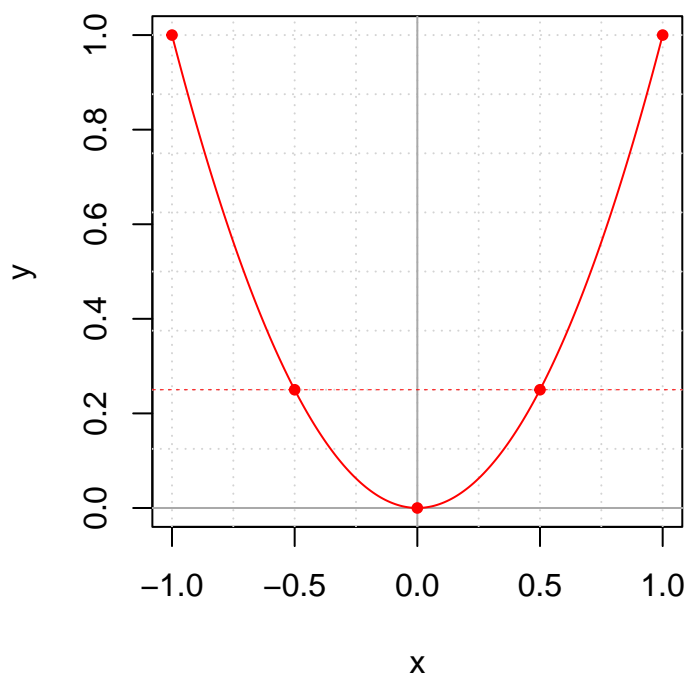


Figure 3.5: Correspondencia de dos valores distintos de x para el mismo valor de y

Cuando esto ocurre, las funciones tiene un solo punto a lo largo de todos los valores de x , donde sólo va a ocurrir un valor único de y . A estos puntos se les conocen como mínimos (par de valores con coordenadas $(0,0)$ en la figura ??). Los máximos, en cambio están ilustrados en la figura ??, e igual corresponde al punto con coordenadas $(0,0)$.

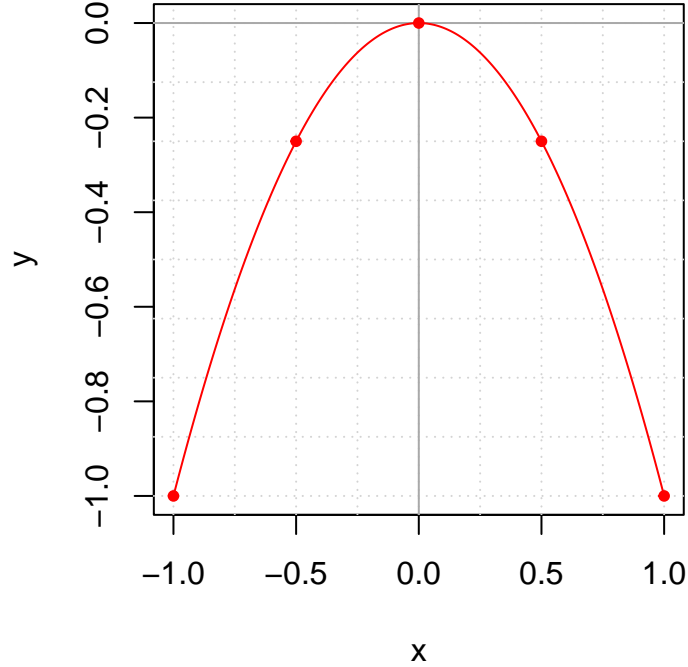


Figure 3.6: Correspondencia de valores para $y = -x^2$.

En los modelos parabólicos más sencillos ($y(x) = x^2, y(x) = -x^2$), los puntos mínimos y máximos siempre estarán en las coordenadas $(x = 0, y = 0)$, pero es posible alterarlos. Por ejemplo en $y(x) = 2 + x^2$, el mínimo estará en $(x = 0, y = 2)$. Para verificarlo resuelve $y(x) = 2 + x^2$ para $y(0)$, sustituyendo x por 0.

3.2.3.1 Ejercicio

A estas alturas, ya te podrás haber dado cuenta de ciertas propiedades de las parábolas, contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué tipo de punto único (mínimo o máximo) habrá en las siguientes parábolas?

- 1.1. $y(x) = 2 - x^2$ 1.2. $y(x) = 2x - 2x^2$ 1.3. $y(x) = 1 - x + 3x^2$ 1.4. $y(x) = x/2 - 4x^2/x$ 1.5. $y(x) = (5x)^2 - 3x + 1$

3.2.4 Cónicas

De manera muy general, una cónica es el conjunto de soluciones para una ecuación cuadrática cuando menos en dos variables. En este sentido, las parábolas, vistas en la sección anterior, son un tipo de cónica. Ejemplos:

1. $x^2 + y^2 = -1$
2. $x^2 + y^2 = 0$
3. $x^2 - y^2 = 0$
4. $xy - 1 = 0$
5. $x^2 - y = 0$

Debido a la generalidad de la definición de *cónicas*, las ecuaciones 1-5 tienen una variedad de formas muy distintas, en comparación con las secciones de rectas y parábolas (Figura ??). La mayoría de estas formas surgen como solución a la intersección de un plano bidimensional con una línea rotando sobre un eje definido dentro de ella en un espacio tridimensional (ver ejemplo)

3.2.5 La curva normal

En el curso de probabilidad y estadística, se acordarán, se mencionó repetidamente a la distribución normal. En cuestión de matemáticas, la distribución normal puede ser representada como una ecuación:

$$y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.6)$$

donde μ es la media aritmética, σ^2 es la varianza y x son todos los valores de la variable que observamos. Cuando tenemos datos de un experimento y los analizamos haciendo el cálculo del promedio estimamos justamente a μ de la ecuación (??), y al estimar la varianza obtenemos a σ^2 de la misma ecuación. Como es importante notar, al hacer estos cálculos estamos asumiendo que nuestros datos tienen una distribución (un histograma) que puede ser descrita por la ecuación (??).

Como vimos en la sección de parábolas, las funciones que no son monótonas (los valores de y no aumentan o disminuyen a lo largo de x), tienen un punto máximo o mínimo. La curva normal, tiene propiedades similares, aunque debido a la presencia de la función exponencial (e^{\dots}), los valores de $y(x)$ **siempre serán positivos**. Por lo tanto, la curva normal tiene un punto máximo que corresponde a $y(\mu)$, o sea, y alcanza su punto máximo cuando $x = \mu$ (Figura ??).

En estadística, esta función representa en el eje de las y la *densidad* de la variable x . Densidad se refiere a la proporción de observaciones de x dentro de un intervalo definido de x . Por lo tanto, la curva normal, representa la probabilidad de observar ese valor de x , de ahí que μ sea el valor teórico más probable. En lo que respecta a σ^2 , éste representa qué tan concentrados estarán los valores

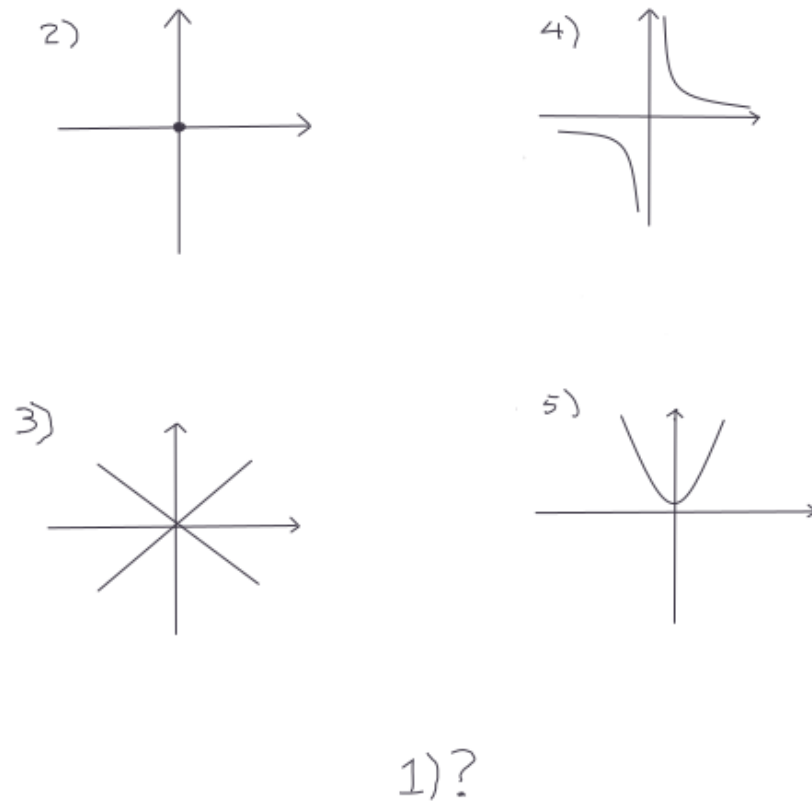


Figure 3.7: Representación gráfica de las ecuaciones 1-5.

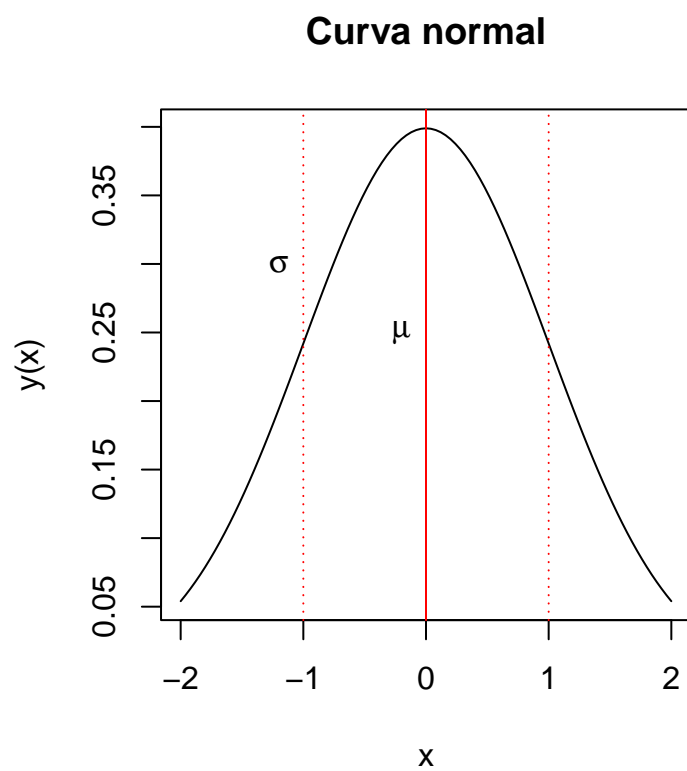


Figure 3.8: Representación gráfica de la curva normal.

de x alrededor de μ . Altos valores de σ se traducirán en baja concentración alrededor de μ (Figura ??).

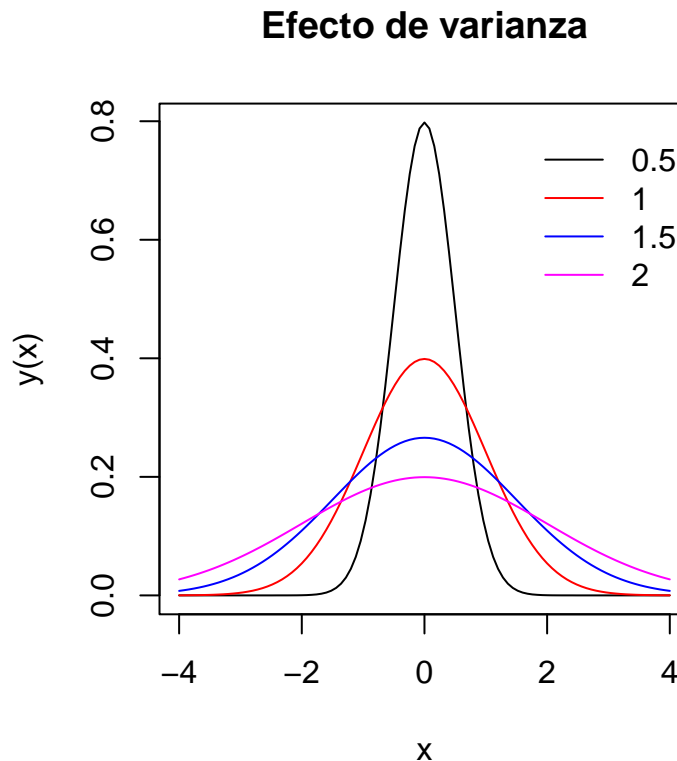


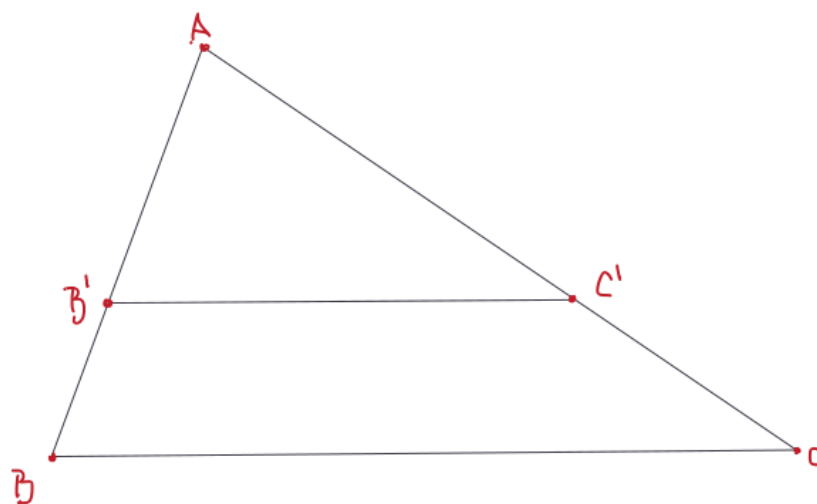
Figure 3.9: Efecto de la varianza sobre la la dispersión alrededor de la media.

3.3 Funciones trigonométricas

En esta sección revisaremos algunas de las funciones trigonométricas y cómo se representan en el plano cartesiano.

La trigonometría es una rama de las matemáticas que se comenzó a desarrollar a partir de la necesidad de medir distancias de manera indirecta. Por ejemplo, la distancia entre la luna y la tierra y la tierra y el sol, la distancia entre dos barcos, la distancia entre un barco y el puerto más cercano. Las herramientas trigonométricas entonces se comenzaron a desarrollar utilizando la geometría de triángulos rectángulos. Aquí es preciso describir el teorema de los triángulos proporcionales, dados dos triángulos con ángulos internos idénticos y longitudes de lados diferentes, los cocientes de las longitudes de sus lados serán iguales (Figura ??).

De modo que sin importar las longitudes de los lados, los cocientes de las lon-



$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Figure 3.10: El teorema de los ángulos proporcionales es la base para las fórmulas geométricas de las funciones trigonométricas.

gitudes siempre serán iguales, lo cual se puede extender a todos los triángulos rectángulos, la base geométrica para la trigonometría. Aquí veremos entonces las funciones trigonométricas básicas seno, coseno y tangente.

3.3.0.1 Nomenclatura de triángulos para trigonometría básica

Hay una serie de términos tradicionales que se emplean en trigonometría, los cuales utilizaremos a lo largo del curso. Se trata de los nombres que se dan a los lados y ángulos internos de un triángulo rectángulo. Por lo general, el triángulo rectángulo lo interpretaremos como una representación del plano cartesiano, de modo que los **catetos** corresponden a los ejes de las x y y , y son los lados que forman un ángulo recto al cruzarse. El lado que los une en secante, es la **hipotenusa**. El ángulo que forma la hipotenusa con el eje de las x tradicionalmente recibe el nombre con la letra griega θ (teta).

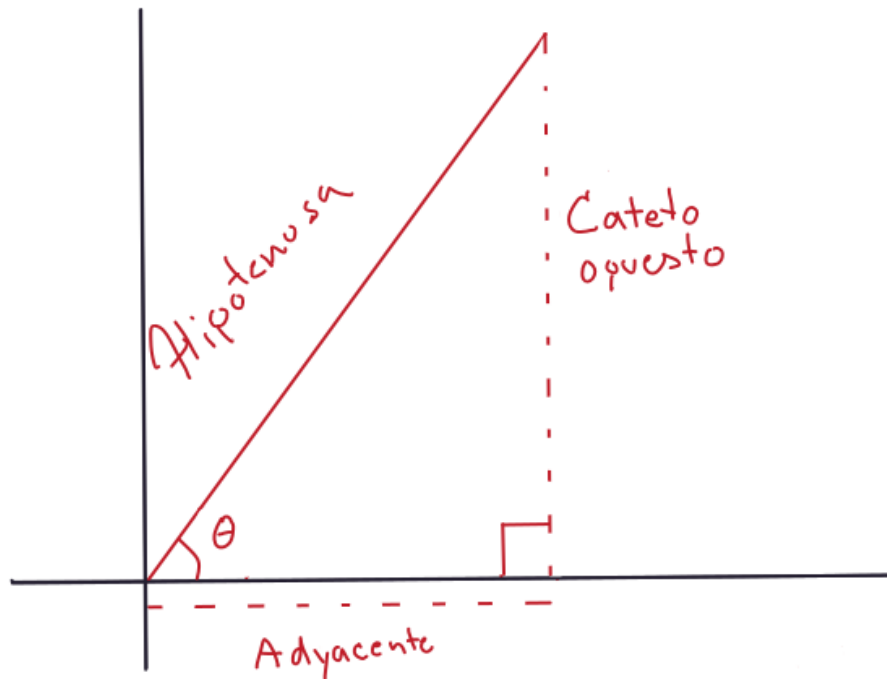


Figure 3.11: Representación gráfica de las partes del triángulo y los nombres que reciben tradicionalmente en trigonometría plana.

3.3.0.2 Las funciones trigonométricas básicas

Todas las funciones trigonométricas representan una descripción del ángulo θ como el cociente de la longitud de dos lados del triángulo rectángulo de modo

que:

1. **Seno:** $\sin(\theta) = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$
2. **Coseno:** $\cos(\theta) = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$
3. **Tangente:** $\tan(\theta) = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}}$

Para recordar las fórmulas de cada función podemos utilizar la mnemotecnía:

- **Seno:** SOH (Seno, Opuesto, Hipotenusa)
- **Coseno:** CAH (Coseno, Adyacente, Hipotenusa)
- **Tangente:** TOA (Tangente, Opuesto, Adyacente)

3.3.0.3 Representación gráfica de las funciones trigonométricas

Para entender por qué las funciones trigonométricas se comportan como lo hacen es útil tener en cuenta que representan el cociente de dos números que cambian uno en relación del otro. Esto queda de manifiesto en la Figura ???. Como se puede apreciar, la hipotenusa (H en la misma figura) se mantiene constante, pues representa el radio de la circunferencia, mientras que los catetos se alargan o encojen conforme la hipotenusa se acerca a los ejes x o y .

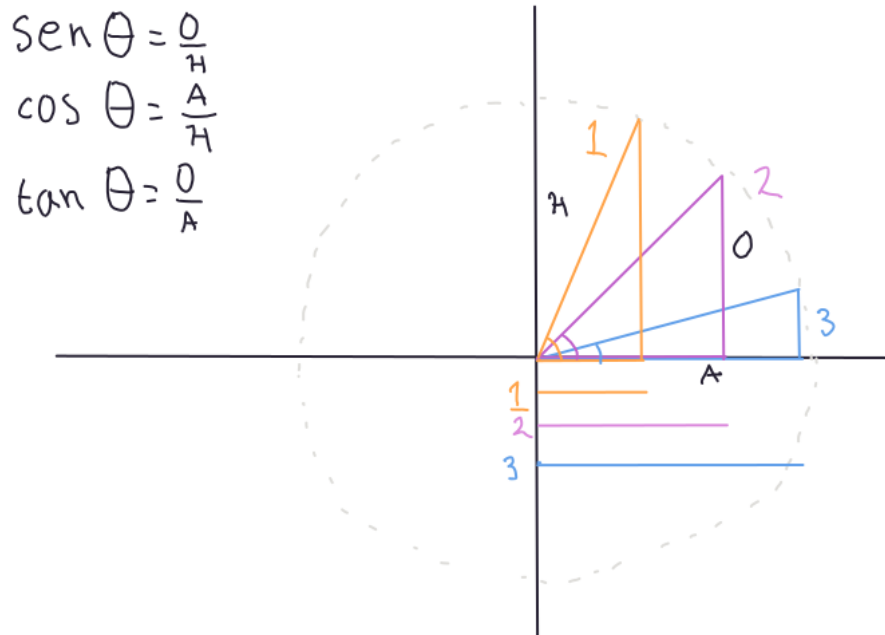


Figure 3.12: Representación gráfica del efecto del ángulo sobre la longitud de los catetos.

Como es de esperarse, los valores del seno y coseno están limitados por 1 y -1 cuando la longitud del cateto es igual a la hipotenusa. La tangente, por

otro lado, puede tomar valores que van de $-\infty, +\infty$ cuando el cateto adyacente tiene longitud cero 0. Aquí, mediremos los ángulos en radianes, o unidades de π , donde $\pi = 180^\circ$

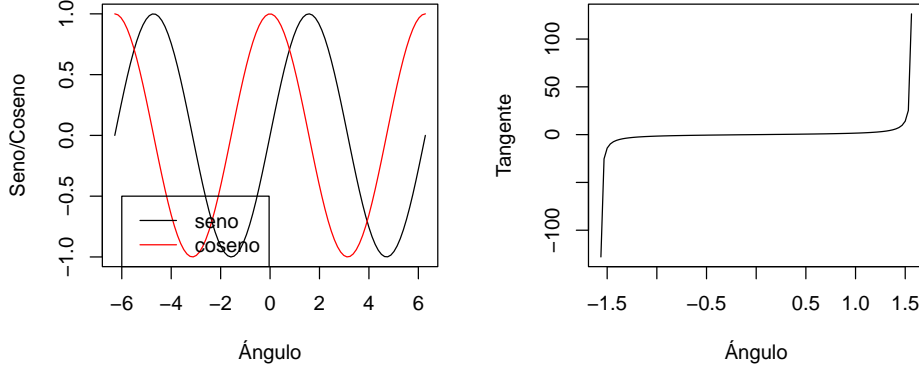


Figure 3.13: Gráfica de las funciones trigonométricas básicas.

Las funciones seno, coseno y tangente son las básicas en trigonometría. Otras funciones comunes, pasadas en la inversión de las mencionadas son la secante, cosecante y cotangente respectivamente. Al igual que otras operaciones aritméticas, para las funciones trigonométricas, existen inversiones. La inversión de una multiplicación es una división, de la suma es la resta, del exponente es la raíz. Las inversiones de las funciones trigonométricas reciben el nombre de Arco- $f(\theta)$, de modo que al aplicarlas al resultado de la función obtenemos el valor del ángulo:

1. $\theta = \arcsin\left(\frac{O}{H}\right)$
2. $\theta = \arccos\left(\frac{A}{H}\right)$
3. $\theta = \arctan\left(\frac{O}{A}\right)$

3.3.0.4 Aplicaciones de las funciones trigonométricas

En mi experiencia, las dos funciones con más aplicaciones en modelación de sistemas ambientales son la tangente y el coseno. Para comenzar, la tangente de un ángulo tiene una relación directa con la pendiente de una recta. Si recordamos la recta está descrita por la ecuación:

$$y = a + bx \quad (3.7)$$

donde b es la pendiente de la recta que se forma al graficar x y y en el plano cartesiano. En realidad b es la tangente del ángulo que se forma entre la recta y el eje de las x . Por lo tanto, cuando nos encontramos ante un modelo formulado por medio de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, los valores que obtenemos al hacer los cálculos de ese sistema es una pendiente o tangente.

El coseno, por otro lado, nos es muy útil para forzar la oscilación de algún parámetro. Ello es necesario cuando estamos interesados en representar fenómenos cíclicos como la temperatura diaria o anual. En la práctica, podemos reemplazar la pendiente b de la ecuación (??) por una función coseno.

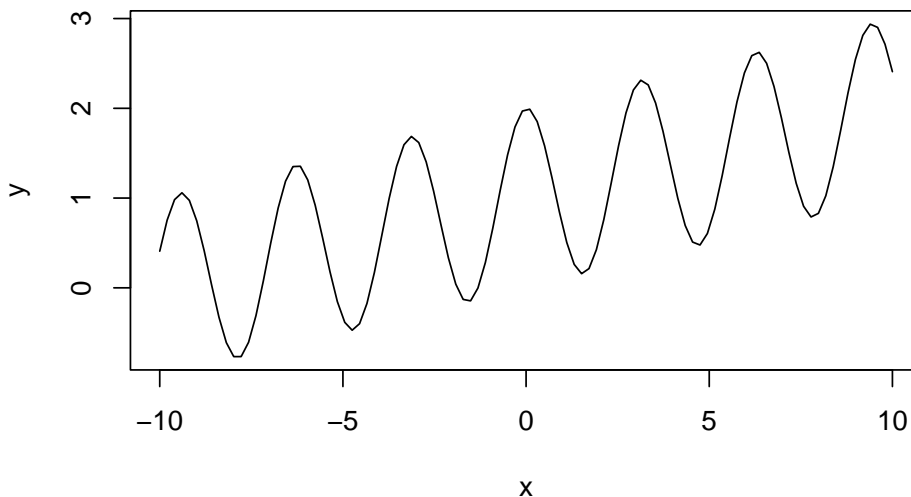


Figure 3.14: Gráfica de la función $y = 2\cos(x)^2 + 0.1x$.

3.4 La línea recta como modelo “universal”

De los modelos vistos anteriormente, la línea recta es el más flexible y común de todos. Por su simplicidad, puede ser utilizado para representar muchos fenómenos de la naturaleza, incluso aquellos cuyo comportamiento es... ¡no lineal!

Cuando decimos no lineal, nos referimos, generalmente, a los casos en que una regla de correspondencia entre x y y representada en el plano cartesiano no forman una línea recta. Ya hemos visto que, matemáticamente, es posible concebir como lineales reglas de correspondencia que geométricamente no son lineales, de ahí que la línea recta sea tan flexible. Para que una ecuación sea considerada como lineal debe cumplir con las siguientes características:

1. Sólo hay adición de variables
2. Sólo hay multiplicación con constantes
3. Las variables solo están elevadas a la potencia 1

Con base en estas definiciones, las siguientes ecuaciones **no** son lineales

1. $xy = 1$
2. $y = a + bx^2$
3. $y = e^x$

Aún cuando estas expresiones no son lineales, es posible transformar algunas de ellas para que adquieran propiedades lineales. Para comenzar, el caso 1, no puede ser linealizado. Para el caso 2, ya vimos una transformación posible, si asumimos que existe una x' tal que $x' = x^2$. Para el caso 3 hay que usar un poco más de conocimiento de dos funciones matemáticas, el logaritmo y la exponencial.

3.4.1 El logaritmo

Para entender cómo funciona la transformación logarítmica, revisemos qué hace el logaritmo. Supongamos que queremos encontrar el valor de la incógnita x en la siguiente ecuación:

$$10^x = 20$$

La operación necesaria para invertir el radical 10^x y encontrar el valor de x es precisamente el logaritmo base 10, de modo que:

$$\log_{10} 10^x = \log_{10} 20$$

$$x \log_{10} 10 = \log_{10} 20$$

sabemos que $\log_{10} 10 = 1$ pues $10^1 = 10$ por lo que:

$$x = \log_{10} 20 \approx 1.3$$

Así como en esta ocasión utilizamos \log_{10} (logaritmo base 10), se puede utilizar como base cualquier número $b > 0$, si está en el conjunto de los números reales (positivos). El logaritmo más común recibe el nombre de natural, que utiliza de base la constante $e = 2.718282\dots$ de Euler. La convención en escritura de logaritmos es:

- Logaritmo natural: \ln
- Logaritmo base 10: \log
- Logaritmo base $b > 0, b \in \mathbb{R}$: \log_b

Aún cuando esta es la convención más común, en la modelación, la mayoría de las veces que se utiliza \log se refiere a \ln , de modo que a menos que se especifique la base, \log y \ln también significan \log_e .

3.4.2 La función exponencial

Una de las funciones más comunes en aplicaciones matemáticas es la exponencial que se denota por $\exp(x)$, que significa e^x . De este modo cuando y es una función exponencial de x , tenemos que:

$$y(x) = \exp(x) = e^x$$

La función exponencial puede tomar formas más complejas, por ejemplo, conteniendo una ecuación lineal:

$$y(x) = \exp(a + bx) = e^{a+bx}$$

y dadas las reglas de los exponentes, también es equivalente a:

$$y(x) = e^a e^{bx} = a' e^{bx}$$

3.4.2.1 Linealizando la función exponencial

Como se ha mostrado en esta sección, transformar una función exponencial en lineal es relativamente sencillo. En sentido literal, las transformaciones logarítmicas no son lineales sino log-lineales pues:

$$y(x) = e^{a+bx} \quad (3.8)$$

se convierte en:

$$\log y(x) = a + bx \quad (3.9)$$

donde el lado izquierdo es una función logarítmica y el derecho es estrictamente lineal. Matemáticamente entonces, la transformación es lineal $\forall x \in \mathbb{R}$, puesto que $\log y$ puede tomar cualquier valor entre $-\infty$ y $+\infty$. Entonces, la ecuación número 3 de la lista de ecuaciones no-lineales al principio de esta sección es:

$$\log y(x) = \ln y(x) = x$$

Esta equivalencia, como veremos más adelante y como verán en modelación estadística, es sumamente útil en la modelación de sistemas dinámicos.

3.4.2.2 Representación gráfica de la función exponencial

En la función exponencial, la variable y crece muy rápido. De hecho, su crecimiento en cualquier punto es proporcional al valor que tiene en ese punto. Es decir que si tomamos un punto cualquiera en y y dibujamos una tangente a ese punto, la pendiente de esa recta tendrá el mismo valor que y .

Esta relación entre el valor de la curva y la pendiente tiene implicaciones importantísimas en modelación de poblaciones, pues expone las razones por las cuales el crecimiento demográfico puede ser descrito como *exponencial*: el crecimiento neto de una población, el total de individuos nuevos que se incorporarán a la población, en ese instante es proporcional al número de individuos reproductivos de esa población. Es por esta razón que el número total de individuos que nacen

Función exponencial

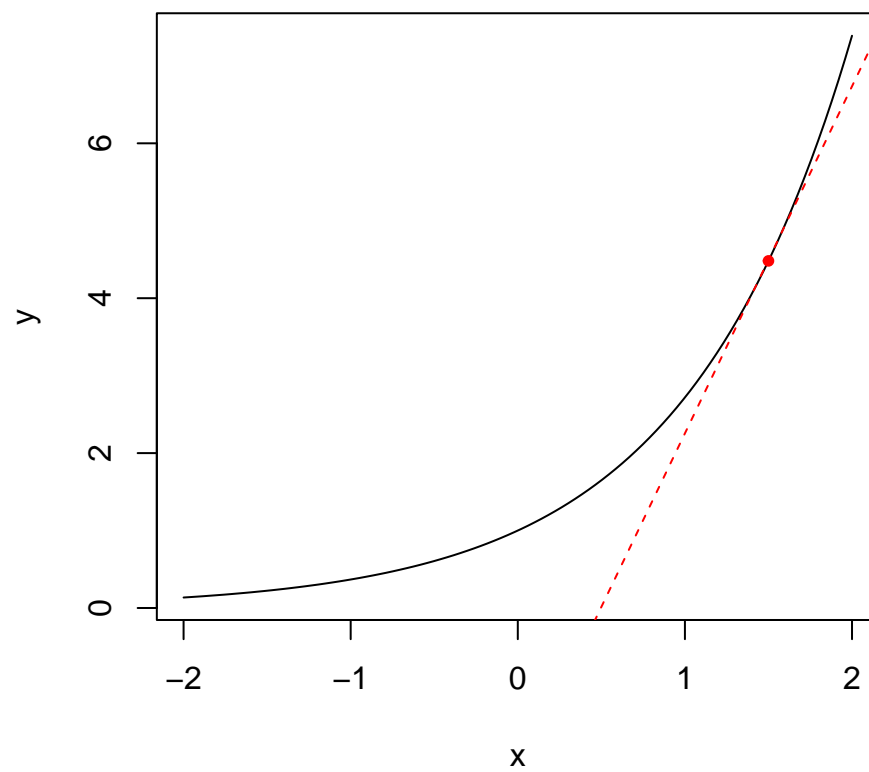


Figure 3.15: Representación gráfica de la función exponencial. El punto rojo representa $y = \exp(1.5)$, de modo que la pendiente de la recta tangente a la curva (en rojo) en ese punto es precisamente $\exp(1.5)$.

en una población es más grande cuantos más individuos haya, a pesar de que la tasa reproductiva por unidad de tiempo sea la misma.

Veamos como ejemplo, que el crecimiento de la humanidad, desde que se pueden obtener estimaciones, es aproximadamente exponencial ??.

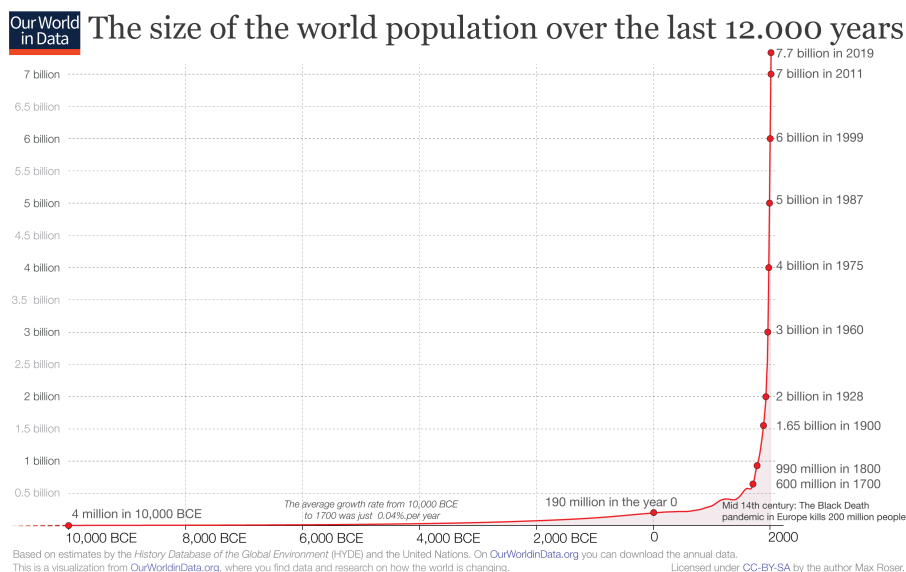


Figure 3.16: Población humana a lo largo del tiempo, según estimaciones de [Our world in data](<https://ourworldindata.org/world-population-growth>).

A diferencia del ejemplo de la figura ??, donde $y = \exp(x)$, para representar el crecimiento de la población humana tenemos que medir la tasa reproductiva, de modo que podamos establecer la relación directa entre el tiempo y el tamaño de la población. En otras palabras, medir cuántos individuos son producidos en promedio por cada individuo presente en la población en cada unidad de tiempo:

$$N(t) = \exp(r \cdot t) \quad (3.10)$$

donde r es la tasa reproductiva de la población y utilizamos N en lugar de y para representar al Número de individuos, y t en lugar de x para dejar claro que x representa tiempo. Si utilizamos el conocimiento de la subsección anterior, veremos que al aplicar el logaritmo a ambos lados de la ecuación (??) obtenemos una ecuación lineal!

$$\log N = r \cdot t \quad (3.11)$$

Es evidente que un modelo tan sencillo como este tiene serias deficiencias biológicas. Por ejemplo, cuando $t = 0$, $\exp(r \cdot t) = 1$, de modo que se asume que siempre habrá cuando menos un individuo presente. Esto puede o no ser cierto, por lo que una forma más generalizable incluye un intercepto para el tamaño poblacional inicial:

$$N(t) = N_0 e^{r \cdot t} \rightarrow \log N(t) = \log N_0 + r \cdot t \quad (3.12)$$

3.4.2.3 Representación gráfica del logaritmo

A diferencia de la función exponencial, donde el crecimiento de y es cada vez más *rápido*, en el logaritmo es más lento (figura ??).

Función logarítmica

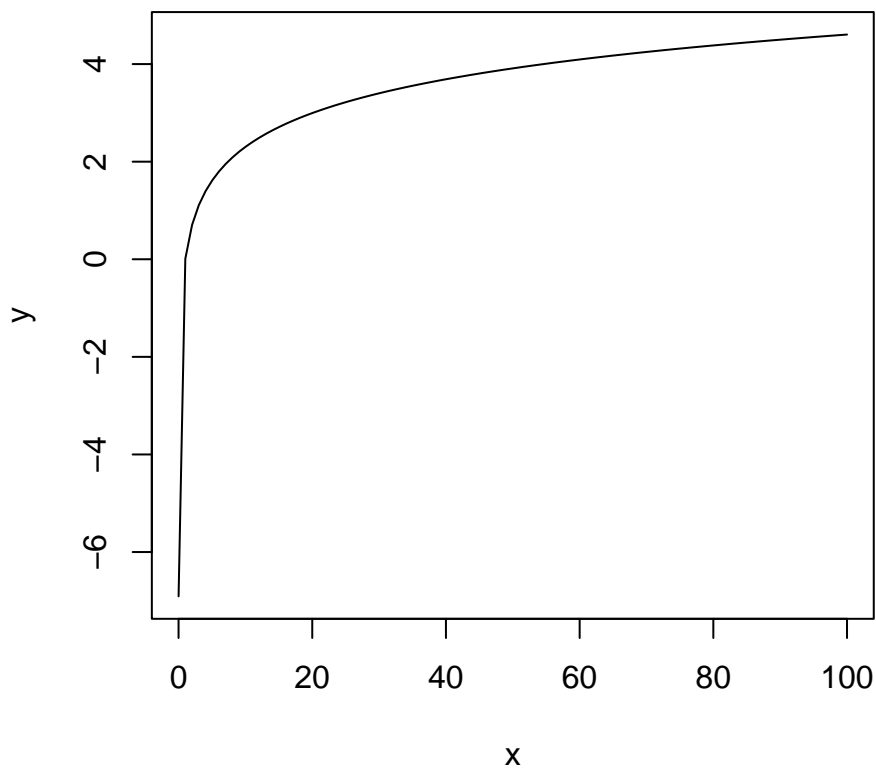


Figure 3.17: Representación gráfica del logaritmo con $y = \log x$.

3.4.3 Relevancia de la recta

Una vez cubiertas las funciones logarítmicas y exponenciales, hemos comenzado a vislumbrar la relevancia más amplia de la recta para fenómenos que no son lineales. En el cálculo diferencial, la recta nos da los elementos para entender el significado de la derivada, y también es el bloque fundamental para implementar métodos de integración numérica relativamente sencillos, para ecuaciones diferenciales que no se pueden integrar analíticamente.

3.5 Modelación de sistemas sociales y ambientales

3.5.1 Tipos generales de modelos

De manera muy general, un modelo es una representación miniatura del sistema que nos interesa estudiar. Así que podemos representar los sistemas socioambientales mediante modelos:

1. Diagramáticos: Dibujos, bosquejos, gráficos
2. Conceptuales: Descripciones verbales o escritas
3. Físicos: Maquetas que repliquen aspectos importantes del sistema de estudio
4. Formales: Ecuaciones matemáticas que nos permitan cuantificar el fenómeno a partir de observaciones, o análisis simbólico.

Las diferentes herramientas matemáticas que hemos revisado representan los bloques para construir representaciones matemáticas de los fenómenos que se estudian en ciencias ambientales.

De todas las herramientas que vimos la línea recta es el más útil de todos pues nos permite entender el concepto de pendiente, y representar funciones más complejas como una colección de rectas. Por otra parte, fenómenos como el crecimiento poblacional que es exponencial se puede representar como una línea recta en escala logarítmica.

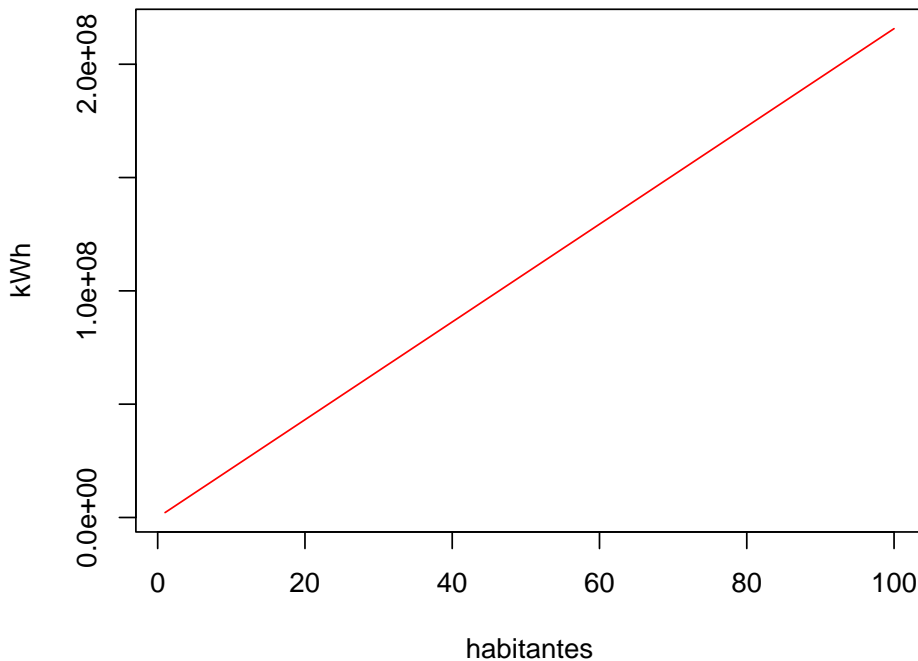
El modelo exponencial lo utilizaremos para modelar fenómenos cuyo estado en el futuro se verá afectado por su estado actual, tal como el número de individuos nuevos en el futuro en una población depende del número de individuos que actualmente contiene. Modelos como el lineal, se pueden en cambio utilizar para representar fenómenos cuyo estado futuro es independiente de su estado actual (en cierta medida). Veamos una serie de ejemplos.

3.5.2 Consumo eléctrico en ciudades

Aunque existen muchos factores sociales, económicos y culturales que explican el consumo de electricidad en una ciudad, el número de habitantes puede considerarse uno de los factores más importantes. De modo que, si en México el

ciudadano promedio consume 2157 kWh anualmente (datos de OCDE), el consumo de una ciudad puede asumirse como el producto de sus habitantes y el consumo promedio:

$$\text{kWh} = N \times \text{Consumo promedio}$$



3.5.3 Crecimiento de una población

La cantidad de individuos nuevos en una población depende de la cantidad de individuos presentes. Por lo tanto, este fenómeno se puede representar con una función exponencial:

$$N(t) = N_0 e^{rt} \quad (3.13)$$

donde N es el número de individuos, N_0 es el tamaño inicial de la población, r es la tasa de crecimiento (proporción de individuos nuevos en cada unidad de tiempo), y t es el tiempo. Aquí he reemplazado N por y y t por x .

Como ya sabemos, el modelo exponencial, lo podemos transformar a una línea recta:

$$\ln N = \ln N_0 + rt$$

por lo tanto si observamos el curso de una población a lo largo del tiempo, y no se forma una línea recta, podemos concluir que la tasa r no ha sido constante, tal como ocurre con la población del mundo (??).

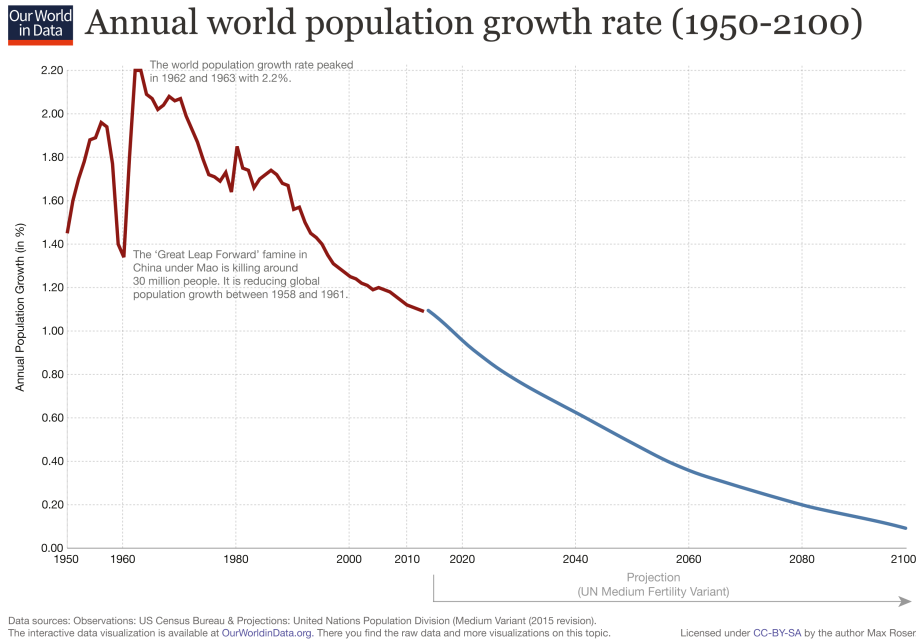


Figure 3.18: Cambios históricos y proyectados de la tasa de crecimiento de la población humana.

Bajo este escenario, un trabajo interesante para un científico ambiental sería estudiar las causas de las variaciones históricas de r , transformándolo de una cantidad fija, como se asume en la ecuación (??) a una función de otros factores como la disponibilidad de alimento:

$$r(\text{alimento}) = a + b \text{ alimento} + c \text{ alimento}^2$$

Conforme avancemos en el semestre aprenderemos a usar matemáticas más sofisticadas que nos permitirán concebir los sistemas socio-ambientales de un modo dinámico.

3.5.4 Modelos deterministas

Todos los modelos que vimos a la fecha:

1. Línea recta
2. Parábola
3. Cónicas

4. Curva normal
5. Trigonómicas

Se consideran modelos deterministas, lo que quiere decir que siempre que los resolvamos producirán el mismo resultado. La contraparte de los modelos deterministas son los modelos **estocásticos**, que con ayuda de una computadora producirán resultados ligeramente diferentes cada vez que los resolvamos.

Este curso se enfoca exclusivamente en modelos deterministas, pues su interpretación y estudio es más sencillo que los modelos estocásticos, aunque en la realidad la inmensa mayoría de los sistemas ambientales son estocásticos.

Chapter 4

Unidad II: Introducción al álgebra de matrices

4.1 Sistemas lineales

Un sistema lineal es un conjunto de ecuaciones lineales donde hay, idealmente, tantas variables como ecuaciones y viceversa. Cuando esta condición se cumple, se dice que el sistema está **completo**. La contraparte de estos sistemas son **incompletos**, y pueden tener más variables que ecuaciones ó más ecuaciones que variables.

Un sistema completo de ecuaciones lineales con dos variables sería:

$$2x + 3y = 4$$

$$4x - 2y = 10$$

Generalizando tenemos que un cualquier sistema lineal puede ser:

$$a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \cdots + a_{n,1}x_n = b_1 \quad (4.1)$$

$$a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{n,2}x_n = b_2 \quad (4.2)$$

$$\vdots \quad (4.3)$$

$$a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \quad (4.4)$$

Cuando nos enfrentamos a un sistema como estos, la meta es encontrar los valores de x_1, x_2, \dots, x_n que satisfacen las igualdades. Para sistemas de dos ecuaciones, es fácil encontrar la solución utilizando una variedad de métodos, el primero de ellos, por graficación.

4.1.1 Solución gráfica

La solución para el sistema de ecuaciones del primer ejemplo:

$$2x + 3y = 4 \quad (4.5)$$

$$4x - 2y = 10 \quad (4.6)$$

sería:

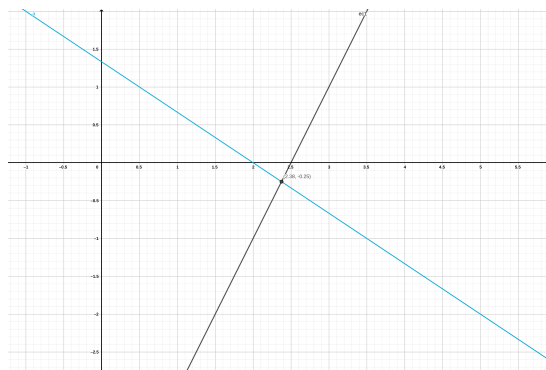


Figure 4.1: Solución gráfica del sistema de ecuaciones para dos variables

4.1.2 Solución algebraica

El método más sencillo en esta ocasión sería resolver la ecuación 2 para y , pues la podemos simplificar dividiendo ambos lados entre 2:

$$(4x - 2y)/2 = (10)/2 \rightarrow 2x - y = 5$$

de donde obtenemos que:

$$y = 2x - 5$$

Este valor de y en términos de x , lo podemos sustituir en, la ecuación 1:

$$2x + 3(2x - 5) = 4$$

y resolvemos para x para obtener:

$$8x = 19 \rightarrow x = 19/8 = 2.375$$

Y entonces sustituimos a x en:

$$y = 2(2.375) - 5 = -0.25$$

Como se puede apreciar, resolver simples ecuaciones lineales puede ser laborioso. Es por ello que se desarrolló el álgebra de matrices, para resolver de eficientemente, sistemas de ecuaciones lineales con muchas variables. En esta unidad revisaremos brevemente los conceptos y técnicas más importantes del álgebra de matrices.

4.1.3 Sistemas lineales sin solución

En ocasiones, aunque un sistema de ecuaciones sea aparentemente completo, puede no tener solución. Por ejemplo el sistema:

$$x + y = 1 \tag{4.7}$$

$$2x + 2y = 4 \tag{4.8}$$

no tiene solución, lo cual se manifiesta gráficamente como dos líneas paralelas. Esto quiere decir que no existe un par de valores x y y que satisfagan las ecuaciones del sistema.

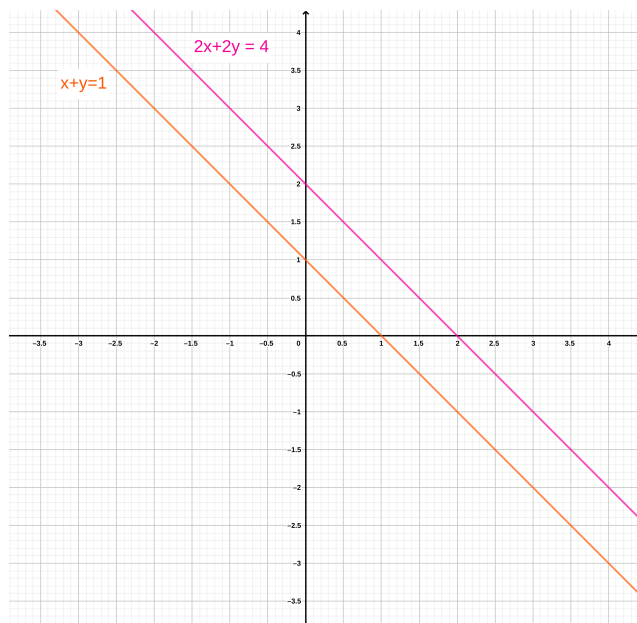


Figure 4.2: Representación gráfica de un sistema lineal sin solución.

Si intentamos sumar o restar ambas ecuaciones terminamos con una contradicción. Tomemos por ejemplo la primera ecuación, multiplicada por -2 para obtener:

$$(x + y = 1) \times -2 \rightarrow -2x - 2y = -2$$

Y al sumarla a la segunda ecuación:

$$2x - 2x + 2y - 2y = 4 - 2 \rightarrow 0 = 2$$

4.1.4 Resolviendo sistemas lineales más complejos

Cualquier sistema de ecuaciones lineales son solución se puede revolver con los métodos que hemos aprendido hasta el momento. Como hemos visto, en estos métodos es fácil cometer errores, máxime con sistemas más complejos con muchas variables y ecuaciones. El método ideal sería aquel que:

1. Evita manipulaciones riesgosas de las ecuaciones
2. Permite encontrar todas las soluciones posibles
3. Permite identificar sistemas sin solución

En la tarea de aprender a utilizar dichos métodos cabe resaltar que las incógnitas (x, y, z, \dots) juegan un papel secundario, lo más importante son los coeficientes de cada una en las distintas ecuaciones.

Para comenzar a visualizar un sistema lineal como matriz, echemos un vistazo al siguiente sistema:

$$x + y + z + t = 1 \tag{4.9}$$

$$x - y - z + t = 3 \tag{4.10}$$

$$-x - y + z - t = 1 \tag{4.11}$$

$$-3x + y - 3z - 3t = 4 \tag{4.12}$$

cuyos coeficientes podemos representar en una matriz como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Nota que cada columna corresponde con cada una de las variables x, y, z, t , y los números que contiene la matriz A son sus coeficientes. Usando este mismo arreglo, podemos representar todo el sistema de ecuaciones como el producto de un vector x, y, z, t y la matriz A :