

# Modelos Matemáticos en Ecología I

Gerardo Martín

2021-08-02



# Contents

<b>1</b>	<b>Sobre este curso</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Encuadre de la materia</b>	<b>7</b>
2.1	Criterios de evaluación . . . . .	7
2.2	¿Cómo se darán las clases? . . . . .	7
2.3	Reglas del salón . . . . .	8
2.4	Contacto . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Unidad I: Introducción a la modelación</b>	<b>9</b>
3.1	Introducción al concepto de modelo matemático . . . . .	9
3.2	Cómo construir un modelo . . . . .	11
3.3	Discusión sobre las distintas herramientas matemáticas em- pleadas en la modelación matemática . . . . .	13
3.4	Uso de los modelos matemáticos en ecología . . . . .	13
3.5	Tipos de modelos . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Methods</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Applications</b>	<b>21</b>
5.1	Example one . . . . .	21
5.2	Example two . . . . .	21



# Chapter 1

## Sobre este curso

En el curso **Modelos matemáticos en ecología** aprenderemos a utilizar algunas herramientas matemáticas para entender procesos en ecología. Los contenidos del índice se apegan al programa completo del curso, el cual se impartirá en los horarios normales establecidos. Para conocer cuándo, cómo y qué temas se se impartirán puedes consultar la estrategia docente.



## Chapter 2

# Encuadre de la materia

### 2.1 Criterios de evaluación

Las contribuciones a cada calificación parcial serán:

- Asistencia (25%)
- Trabajos de clase cumplidos (50%)
- Examen (25%)
- Participación (2 puntos extra máximo)

Cabe señalar, que la asistencia no corresponderá con su presencia en las sesiones sincrónicas, sino con el cumplimiento de los trabajos de clase. La participación se medirá tanto por participación directa en las sesiones sincrónicas como por el seguimiento que uds den a la clase por correo electrónico.

### 2.2 ¿Cómo se darán las clases?

Trataré de apegarnos a los tiempos de actividades sincrónicas y asincrónicas establecidos en la estrategia docente, pero éstos son completamente flexibles. Una estrategia que me ha funcionado en cursos anteriores ha sido la de dedicar la última actividad sincrónica de la semana a resolver dudas, es en estas sesiones en las que hay muchas posibilidades de conseguir puntos de participación.

Todos los contenidos del curso, lecturas y presentaciones, se irán añadiendo a este sitio web conforme avanza el semestre. En el Google Classroom de la materia se irán anunciando las diferentes actividades y sesiones sincrónicas con anticipación suficiente. Igualmente, los exámenes y resultados serán publicados a través de esta plataforma. A petición de uds, también se publicarán aquí los videos de las sesiones sincrónicas que tengamos, en especial para aquellos temas que sean mayor interés/dificultad/importancia. Los trabajos de práctica también se publicarán en Classroom.

## 2.3 Reglas del salón

Estas, obviamente, son particulares del modelo en línea, por lo tanto aquí van las reglas de zoom:

1. Micrófonos apagados
2. Cámaras prendidas, exceptuando: 2.1. Si su velocidad de internet lo dificulta 2.2. Si tienen datos limitados
3. Hacer muchas preguntas
4. Decirme si paso algo por alto

## 2.4 Contacto

Para reportar fallos, resolver dudas y peticiones especiales grupales o individuales por favor enviar correo electrónico a [gerardo.mmc@enesmerida.unam.mx](mailto:gerardo.mmc@enesmerida.unam.mx).



## Chapter 3

# Unidad I: Introducción a la modelación

### 3.1 Introducción al concepto de modelo matemático

Para comenzar a hablar de modelos matemáticos es preciso tener una idea de por qué las matemáticas forman parte de un grado en ciencias naturales. Los autores Otto and Day (2011), dan cuenta de qué tan comunes son las matemáticas en la labor del biólogo/ecólogo. Hacia el año 2006, una búsqueda sistemática del material publicado en revistas científicas contentiendo la palabra clave “math” sugiere que había ~900 mil artículos, la mayoría concentrados en revistas especializadas como *Bulletin of Mathematical Biology*, otros en las más prestigiosas *Nature* o *Science*. Una mirada más cercana a las revistas especializadas *Ecology and Evolution* y *American Naturalist* que el 35 y 60% respectivamente de las publicaciones utilizaron algún modelo matemático para mostrar predicciones. En resumen, la labor de un ecólogo requiere del uso frecuente de matemáticas, si no es mediante el desarrollo de algún modelo, requiere de su entendimiento.

#### 3.1.1 ¿Qué es un modelo?

Imaginemos a seis personas invidentes, con la tarea de encontrar qué es el objeto que está frente a ellas usando únicamente el tacto. En la parábola de los seis hombres ciegos, el objeto es un elefante, de modo que la imagen que cada uno de ellos se forma del objeto depende enteramente de la parte del elefante que están tocando.

Quien toque los colmillos podrá pensar que se trata de una lanza, la trompa podría tratarse de una serpiente, la cola de una cuerda, las patas troncos de árbol y el cuerpo una pared. Es evidente que todas las hipótesis presentadas después de la inspección fueron erróneas, y que cuando estudiamos al mundo lo

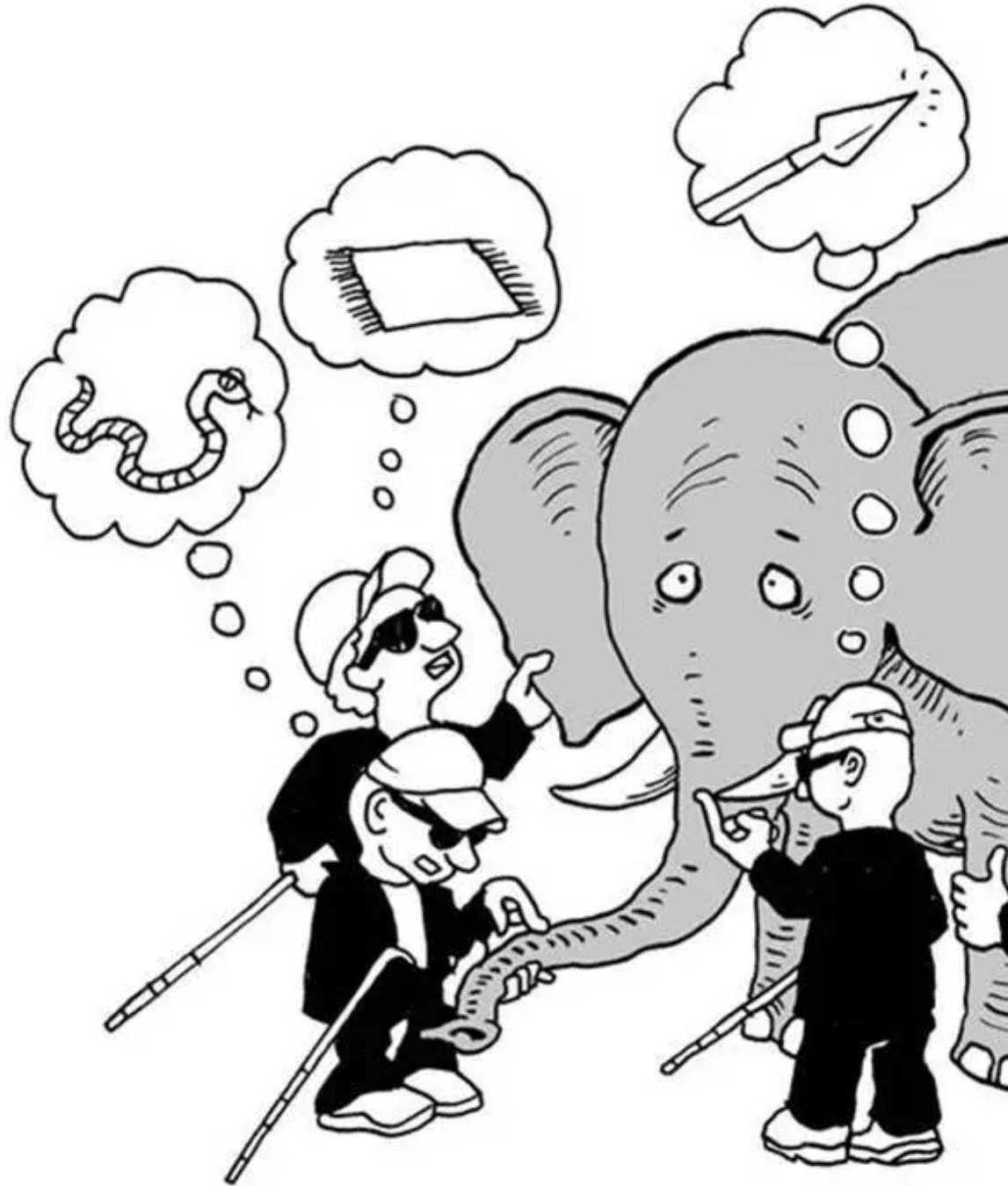


Figure 3.1: La parábola de los seis hombres ciegos inspeccionando un elefante.

haremos igual, con la descripción de tan sólo una fracción de éste. Un séptimo hombre que pregunte a los otros seis qué fue lo que vieron podría formarse una imagen más completa del *sistema* para proponer otra hipótesis: se trata de un objeto grande reposando sobre cuatro columnas con apéndices adelante y atrás.

Al estudiar los sistemas ecológicos, al igual que los ciegos, no sabremos que estamos frente a un elefante. Los sistemas ecológicos, al igual que los elefantes, también tienen componentes interconectados, y nosotros los ecólogos somos como los hombres ciegos, sólo podemos observar ciertas partes de los ecosistemas. En nuestro trabajo entonces, aprender a identificar y proponer hipótesis sobre cómo funcionan los sistemas ecológicos.

Las hipótesis propuestas por los seis hombres representan modelos, es decir simplificaciones del mundo que nos ayudan a entenderlo. Los modelos matemáticos son simplificaciones formales del mundo utilizando otro lenguaje, las matemáticas (Haefner, 1998).

## 3.2 Cómo construir un modelo

¿Cómo se construye un modelo? Es una pregunta difícil de responder, pues difícilmente existe un sólo modo de hacerlo que funcione para tod@s. Aquí voy a hablar de mi propia experiencia, y cómo aprendí a utilizar las matemáticas y estadística para entender los sistemas ecológicos. Los pasos generales que sigo son:

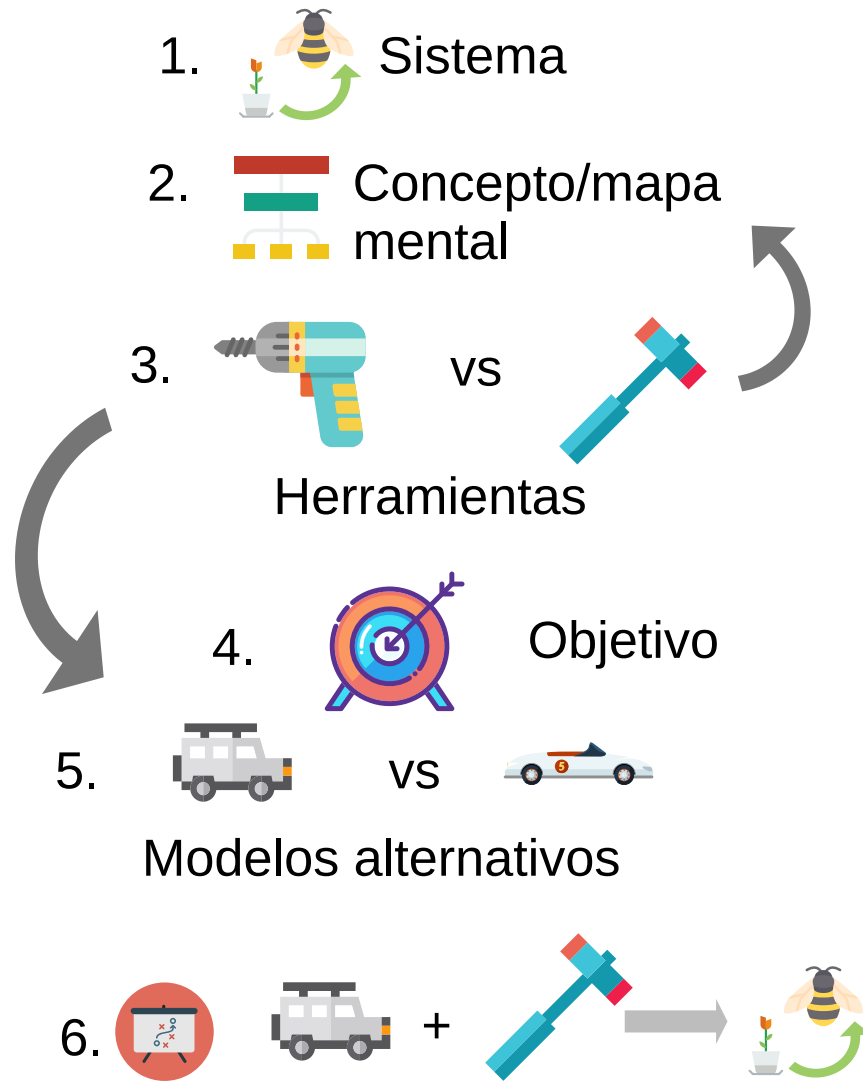
1. Identificar el sistema y sus componentes
2. Crear un modelo conceptual, haciendo dibujos
3. Identificar las herramientas matemáticas disponibles para representar el modelo conceptual
4. Establecer objetivos claros y alcanzables
5. Proponer una serie de modelos alternativos
6. Determinar una estrategia para seleccionar uno solo de los modelos que propuse para lograr el objetivo

La estrategia general que les doy puede, por el momento, sonar un tanto abstracta, pero la iremos poniendo en práctica conforme avanza el curso para que al final, esperemos, tenga más sentido que ahorita.

### 3.2.1 Ejemplos

La presente pandemia ha puesto en boca de todxs muchos aspectos de la modelación matemática y estadística. Como es de esperarse, los modelos son distintos dependiendo del objetido que se quiera conseguir con ellos:

1. Determinar el número reproductivo básico ( $R_0$ ) de COVID-19
2. Predecir la ocupación hospitalaria ante ciertas medidas de restricción de movilidad



Estrategia, alcanzar objetivos con el modelo y herramientas

Figure 3.2: Diagrama de mi estrategia para desarrollar modelos.

### 3.3. DISCUSIÓN SOBRE LAS DISTINTAS HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS EMPLEADAS EN LA MODELACIÓN

3. Estimar cómo cambiaría el número reproductivo básico ante ciertas medidas de restricción
4. Predecir localidades geográficas donde surgirán nuevas cepas
5. Predecir las cualidades infecciosas o virulentas de las nuevas cepas

Todos estos objetivos puede de cierta manera conseguirse por medio de modelos matemáticos, todos ellos con modelos muy distintos, algunos con herramientas muy diferentes unos de otros.

### 3.3 Discusión sobre las distintas herramientas matemáticas empleadas en la modelación matemática

Las matemáticas son un área de conocimiento muy extenso, por lo que hablar de todas las herramientas disponibles ¡nos podría llevar años! En este curso nos vamos a enfocar en un tipo general de modelo y de sistema ecológico: aquellos que cambian rápidamente con el tiempo, también llamados dinámicos.

Las herramientas matemáticas más comunmente utilizadas para estudiar estos sistemas son las ecuaciones diferenciales ordinarias y el álgebra de matrices. Las ecuaciones diferenciales nos ayudan a medir los cambios que sufre el sistema ecológico a través del tiempo en cada uno de sus componentes, y son muy útiles para representar las ideas plasmadas en forma de modelos conceptuales. El álgebra de matrices, por otro lado, nos sirve para *conectar* los cambios de los diferentes componentes del sistema de estudio, y así hacer cálculos sobre sus cambios *como un todo*.

Como podemos ver, gran parte de este curso estará enfocado en *entender y medir los cambios*. Te preguntarás entonces ¿cambios de qué? En ecología, estos son algunos de los cambios que nos interesa observar:

1. Número de individuos de una especie
2. Cantidad de materia orgánica almacenada en la vegetación
3. Calorías consumidas por una población de aves
4. Probabilidad de extinción de una especie

### 3.4 Uso de los modelos matemáticos en ecología

Como ya mencionamos anteriormente, una alta proporción de las publicaciones académicas en ecología utiliza modelos matemáticos para predecir. Existen sin embargo otros usos de los modelos matemáticos que se pueden describir en términos generales como analíticos, es decir para analizar y entender cómo los diferentes componentes de un sistema afectan su comportamiento. Otras veces, los modelos se utilizan para medir las respuestas del sistema de interés ante perturbaciones, haciendo muchas simulaciones. Veamos una serie de ejemplos

de estos diferentes usos de los modelos.

### 3.4.1 Analíticos: Dinámicas depredador-presa

En 1928, Vito Volterra (Volterra, 1928) desarrolló un modelo matemático para describir cómo varía el número de individuos de una especie de depredador y una presa. Como ya es conocido, este modelo replica muy bien el comportamiento oscilatorio de ambas poblaciones (Figura 3.3).

El comportamiento oscilatorio resulta *obvio* desde una perspectiva biológica: los depredadores no se pueden reproducir a menos que se alimenten de sus presas, pero cuando hay muchos depredadores, estos consumen las presas disminuyendo sus números, resultando en menor potencial reproductivo para el depredador. Pero matemáticamente, ¿qué hace posible estas oscilaciones? Para responder esta pregunta se necesita entender bajo qué condiciones el sistema de ecuaciones que describe el sistema es estable, es decir cuándo los cambios de ambas poblaciones son cero, es decir bajo qué situaciones el sistema como un todo no experimenta cambio alguno. Este análisis matemático tiene un resultado un tanto sorprendente, pues las condiciones bajo las que dicha condición ocurre son un número imaginario, lo que indica que el sistema como tal es inestable, y por lo tanto **siempre** tiende a oscilar. El análisis matemático de los modelos es en su mayoría netamente simbólico y requiere de buenas bases matemáticas.

### 3.4.2 Simulaciones: Dinámica de enfermedades infecciosas

Los sistemas ecológicos pueden ser muy complejos, lo que resulta en sistemas de ecuaciones igualmente complejos con muchas variables de estado y parámetros, y a la vez hace que el análisis sea muy complicado o imposible. En vista de ello se puede entonces *resolver* el modelo utilizando herramientas computacionales. Un ejemplo que me gusta mucho es el estudio de la leptospirosis (infección por bacteria del género *Leptospira*) en ratones *Mastomys* de Holt et al. (2006). Los autores formularon un modelo relativamente simple de ecuaciones diferenciales para ver cómo las constantes de su modelo afectan el número de ratones *Mastomys* y de bacterias *Leptospira* en el ambiente. Ello lo consiguieron aumentando en 10% los valores de cada una de las constantes y midiendo el cambio tras cada simulación.

Los análisis de sensibilidad mostrados en la Figura 3.4 son en realidad una serie de predicciones del sistema. De hecho la predicción generalmente echa mano de modelos matemáticos, así que nos centraremos en resumir: la predicción requiere de la planeación de una serie de escenarios para identificar áreas de intervención (alteración del hábitat por ejemplo) para obtener un resultado favorable de acuerdo con el modelo.

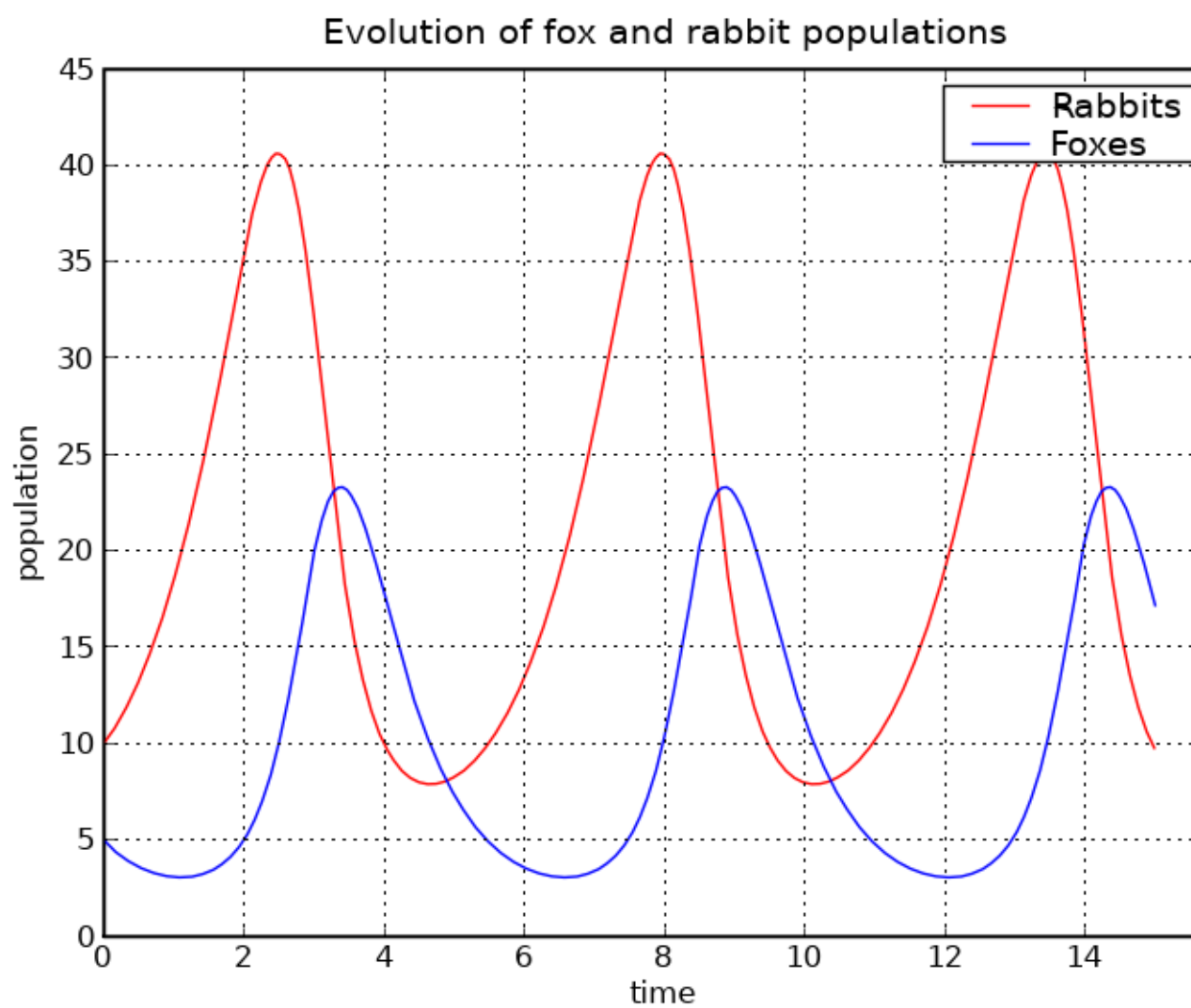


Figure 3.3: Simulación del modelo [Lotka-Volterra](<https://scipy-cookbook.readthedocs.io/items/LotkaVolterraTutorial.html>).

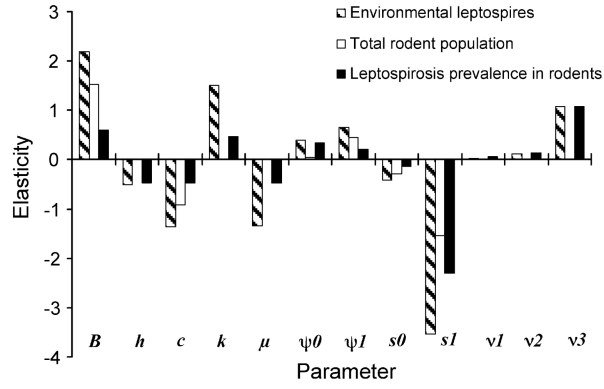


Fig. 3. Elasticity values for parameters for the version of the model in which both rodent reproduction and leptospire survival exhibit yearly cycles, using a variation of +10% according to the elasticity analysis (see text). The impacts on maximum abundance of leptospires in the environment, rodents and leptospirosis prevalence in rodents reached during the yearly cycle are presented. The higher the absolute elasticity, the more sensitive the model to the corresponding parameter.

Figure 3.4: Las barras (eje  $y$ ) indican el cambio proporcional de las diferentes cantidades de interés (color de las barras), ante el aumento del valor de cada parámetro (eje  $x$ ), [@holt2006model].



### 3.4.3 Mal uso de los modelos

Así como existe un uso adecuado de los modelos, es muy fácil darles un mal uso, generalmente relacionado con la calidad de los datos que los respaldan, el grado de entendimiento del sistema en cuestión, y con la relación entre las herramientas matemáticas utilizadas y la naturaleza del problema. Holling (1978) y Karplus (1975), suman los siguientes usos potenciales de los modelos en relación a la calidad de los datos (1-baja calidad, 6-alta calidad):

1. Atención del público
2. Aprendizaje sobre el sistema
3. Prueba de teorías
4. Juegos “qué pasaría si...”
5. Recomendación de acciones
6. Diseño de productos

## 3.5 Tipos de modelos

La clasificación de los modelos depende de la herramienta que se utiliza para desarrollarlos. En la sección “Cómo construir un modelo”, mencioné brevemente que uno de los pasos es la formulación de un modelo “conceptual”, en forma de un esquema o diagrama. Esta clasificación la podemos ampliar un poco:

1. **Modelo conceptual o verbal.** Descripciones en lenguaje natural.
2. **Diagramático.** Representación gráfica (diagramas de flujo o cajas).
3. **Físico.** Representación a escala de sistema (sistemas hidráulicos).
4. **Formal.** Matemático (algebraico o sistemas de ecuaciones).

Aquí nos centraremos en ver a mayor profundidad los modelos formales, en clasificar los modelos matemáticos. Haefner (1998) sugiere la siguiente clave dicotómica de clasificación:

1. **¿Las matemáticas representan de manera explícita el proceso de interés?**
  - 1.1. **Sí:** Modelo mecanístico
  - 1.2. **No:** Modelo descriptivo, fenomenológico
2. **¿Las matemáticas representan de manera explícita las condiciones del estado futuro del sistema?**
  - 2.1. **Sí:** Modelo dinámico
  - 2.2. **No:** Modelo estático
3. **¿Las matemáticas representan el tiempo de manera continua?**
  - 3.1. **Sí:** Modelo continuo

3.2. **No:** Modelo discreto (el tiempo sólo toma valores enteros, un día, un año)

4. **¿Las matemáticas representan explícitamente el espacio?**

4.1. **Sí:** Modelo espacialmente heterogéneo

4.2. **No:** Modelo espacialmente homogéneo

5. **¿Las matemáticas permiten la ocurrencia de eventos aleatorios?**

5.1. **Sí:** Modelo estocástico

5.2. **No:** Modelo determinístico

**3.5.1 Modelos determinísticos (generalidades)**

**3.5.2 Modelos estocásticos (generalidades)**

## Chapter 4

# Methods

We describe our methods in this chapter.



## Chapter 5

# Applications

Some *significant* applications are demonstrated in this chapter.

### 5.1 Example one

### 5.2 Example two



# Bibliography

- Haefner, J. W. (1998). Modeling biological systems. *Bulletin of Mathematical Biology*, 60(3):597.
- Holling, C. S. (1978). *Adaptive environmental assessment and management*. John Wiley & Sons.
- Holt, J., Davis, S., and Leirs, H. (2006). A model of leptospirosis infection in an african rodent to determine risk to humans: seasonal fluctuations and the impact of rodent control. *Acta tropica*, 99(2-3):218–225.
- Karplus, W. J. (1975). The place of systems ecology models in the spectrum of mathematical models. *IN: New Direction in the analysis of ecological systems, edited by GS Innis. Simulation Council Proceedings Series*, 5(2):225–228.
- Otto, S. P. and Day, T. (2011). *A biologist's guide to mathematical modeling in ecology and evolution*. Princeton University Press.
- Volterra, V. (1928). Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together. *ICES Journal of Marine Science*, 3(1):3–51.