Ajuste de Curvas

Gerardo A. Rosetti M.
C.I 27668596

¿Qué es y para qué se Utiliza?

El ajuste de curvas es una técnica utilizada en matemáticas y estadísticas para encontrar una curva que mejor se adapte a un conjunto de datos. Esta curva se ajusta de manera óptima para representar la relación entre las variables en los datos, lo que permite predecir valores futuros o analizar el comportamiento de un fenómeno.

El ajuste de curvas es esencial para comprender y trabajar con conjuntos de datos, permitiendo la aproximación y manipulación de funciones que representan de manera precisa el comportamiento de los datos numéricos, lo que es fundamental para la resolución de problemas y la toma de decisiones en diversos campos científicos y de ingeniería.

Regresión Lineal

Si se desea encontrar una función lineal, con una desviación mínima. La función lineal determinada de esta manera se llama una recta de regresión.

La función lineal se expresa: $g(x) = a + bx$ con a y b constantes por determinar.

Desviación: $r_i = y_i - g(x_i) = y_i - (a + bx_i), \quad i = 1, 2, \ldots, L$ donde L es el número de datos

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= L & A_{2,1} &= \sum x_i \\ A_{1,2} &= \sum x_i & A_{2,2} &= \sum (x_i)^2 \\ Z_1 &= \sum y_i & Z_2 &= \sum x_i y_i \end{aligned}$$

La finalidad de la regresión lineal es la de ajustar una función lineal a puntos dados mediante el método de mínimos cuadrados.

Regresión Lineal

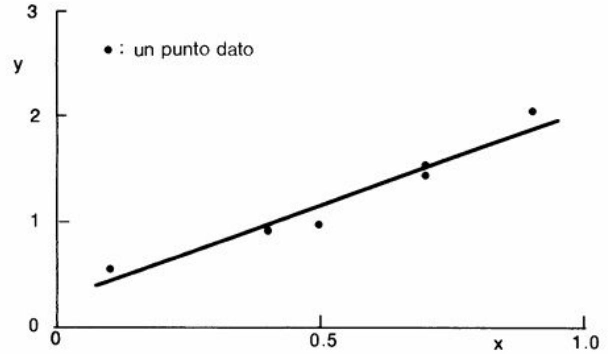
Propósito	A12, A21	Z1	A22	Z2
i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	.1	.61	.01	.061
2	.4	.92	.16	.368
3	.5	.99	.25	.495
4	.7	1.52	.49	1.064
5	.7	1.47	.49	1.029
6	.9	2.03	.81	1.827
Total	3.3	7.54	2.21	4.844

$$A11 = L = 6, \quad A12 = 3.3, \quad Z1 = 7.54$$
$$A21 = 3.3, \quad A22 = 2.21, \quad Z2 = 4.844$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3.3 \\ 3.3 & 2.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.54 \\ 4.844 \end{bmatrix}$$

$$a = 0.2862, \quad b = 1.7645 \longrightarrow g(x) = 0.2862 + 1.7645x$$

i	$x(i)$	$y(i)$	$g = ax + b$	Desviación
1	0.1	0.61	0.4626161	0.14738
2	0.4	0.92	0.9919831	−0.07198
3	0.5	0.99	1.168439	−0.17844
4	0.7	1.52	1.52135	−0.00135
5	0.7	1.47	1.52135	−0.05135
6	0.9	2.03	1.874261	0.15574



Ajuste de Curvas con un Polinomio de Orden Superior

- El ajuste de polinomios es una extensión del ajuste de rectas y se basa en el método de mínimos cuadrados.
- El número de puntos ajustados es generalmente mucho más grande que el orden del polinomio.
- Con frecuencia, la ecuación lineal asociada con el ajuste de polinomios es demasiado vulnerable a los errores de redondeo.

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_N x^N$$

$$r_i = y_i - g(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, L$$

$$\begin{bmatrix} L & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^N \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{N+1} \\ & & & \cdots & \\ \sum x_i^N & \sum x_i^{N+1} & \sum x_i^{N+2} & \cdots & \sum x_i^{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \\ \sum x_i^N y_i \end{bmatrix}$$

Ajuste de Curvas con un Polinomio de Orden Superior

i	x	y
1	0.1	0.61
2	0.4	0.92
3	0.5	0.99
4	0.7	1.52
5	0.7	1.47
6	0.9	2.03

$$\begin{bmatrix} 6.0000 & 3.3000 & 2.2100 \\ 3.3000 & 2.2100 & 1.6050 \\ 2.2100 & 1.6050 & 1.2245 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5400 \\ 4.8440 \\ 3.5102 \end{bmatrix}$$

Potencia n	Coeficiente a_n
0	0.587114
1	0.059102
2	1.729537

$$y = 0.587114 + 0.059102x + 1.729537x^2$$

i	$x(i)$	$y(i)$	Polinomio	Desviación
1	0.1	0.61	0.6103198	−0.00032
2	0.4	0.92	0.8874811	0.03252
3	0.5	0.99	1.049050	−0.05905
4	0.7	1.52	1.475959	0.04404
5	0.7	1.47	1.475959	−0.00596
6	0.9	2.03	2.041231	−0.01123

Ajuste de Curvas Mediante una Combinación Lineal de Funciones Conocidas

- El ajuste de curvas, incluyendo el ajuste de rectas y polinomios, se basa en el metodo de mInimos cuadrados.
- Las funciones que aparecen en una combinaciôn lineal se pueden elegir, ya sea por experiencia o por razones teóricas.

$$g(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + \cdots + a_N f_N(x)$$
$$= \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x)$$

$$r_i = y_i - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x_i), \; i = 1, 2, \ldots, L$$

$$\sum_{m=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{L} f_m(x_i) f_n(x_i) \right] a_m = \sum_{i=1}^{L} y_i f_n(x_i) \quad \text{para } n = 1 \text{ a } N$$

Ajuste de Curvas Mediante una Combinación Lineal de Funciones Conocidas

x	y
0.1	0.61
0.4	0.92
0.5	0.99
0.7	1.52
0.7	1.47
0.9	2.03

→

$$\begin{bmatrix} 6.0000E+00 & 3.3000E+00 & 3.0404E+00 & 1.0733E+01 \\ 3.3000E+00 & 2.2100E+00 & 2.0124E+00 & 6.5645E+00 \\ 3.0404E+00 & 2.0124E+00 & 1.8351E+00 & 6.0030E+00 \\ 1.0733E+01 & 6.5645E+00 & 6.0030E+00 & 2.0325E+01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5400E+00 \\ 4.8440E+00 \\ 4.4102E+00 \\ 1.4693E+01 \end{bmatrix}$$

→

Función n	Coeficiente a_n
1	−5.265785
2	−19.706939
3	13.496765
4	5.882096

$$g(x) = a_1 + a_2 x + a_3 \operatorname{sen}(x) + a_4 \exp(x)$$

i	$x(i)$	$y(i)$	Curva ajustada	Desviaciòn
1	0.1	0.61	0.6117	−0.0017
2	0.4	0.92	0.8824	0.0376
3	0.5	0.99	1.0494	−0.0594
4	0.7	1.52	1.4793	0.0407
5	0.7	1.47	1.4793	−0.0093
6	0.9	2.03	2.0380	−0.0080