SISTEMA MASA RESORTE AMORTIGUADOR

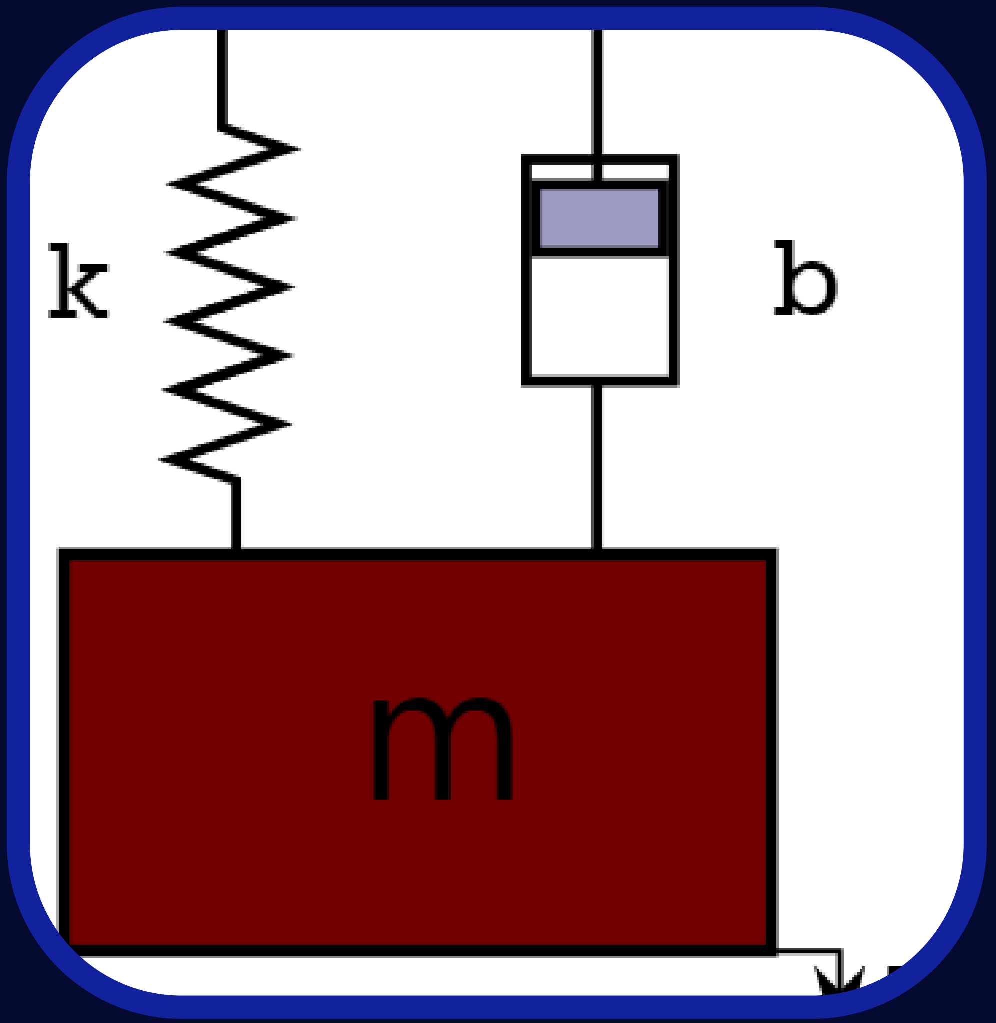
Gerardo Rosetti

CONTENIDO

- Se mostrara el problema de sistema masa-resorte-amortiguador.
- Se mostrara la ecuación de segundo orden que representa el problema y se explicara la obtención de algunos datos.
- Se explorarán los métodos numéricos de Euler modificado, Runge-Kutta y Predictor-Corrector.
- Se determinara cuál de los métodos ofrece la solución más precisa y eficiente.
- Se explicara el método mas eficiente seleccionado.
- Se darán conclusiones

PROBLEMA

Para el siguiente sistema de resorte-masa-amortiguador. Se sabe que un peso de 10 N alarga un resorte 2 metros. El mecanismo amortiguador ejerce una fuerza de 6 N para una velocidad de 2 m/seg. Se fija el resorte un peso de 10 N y se suelta el resorte desde una posición de 2 m debajo de la posición de equilibrio. En el momento en que se suelta, el sistema tiene una velocidad de 1 m/seg.



RESOLUCION

La ecuación diferencial de segundo orden que representa el concepto de vibración mecánica de un sistema masa-resorte-amortiguador en particular es la siguiente:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + k_a\frac{dy}{dt} + k_r y = F_{(t)}$$

Nosotros trabajaremos con:

$$F_{(t)} = 4e^{-3t}$$

Se supone que:

- En tiempo t=0 la masa es jalada hacia abajo (sentido positivo).
- Cada parte del enunciado es alguna de las fuerzas que intervienen en la ecuación.
- Se evalúa cada fuerza por separado sustituyendo los valores dados en el enunciado con la finalidad de hallar el valor de las constantes Ka, Kr y m.

RESOLUCION

Se sabe que un peso de 10 N (*Fr*) alarga el resorte 2 metros (*y*): $F_{r(y)} = -k_r y$

Donde: $F_{r(y)} = -10\ N$ $y = 2\ m$

Por tanto: $-10N = -k_r(2m)$ $k_r = 2\ \frac{N}{m}$

RESOLUCION

El mecanismo amortiguador ejerce una fuerza de 6 N (Fa) para una velocidad de 2 m/seg (va). Es decir:

$$F_{a(y)} = -k_a v_a$$

Donde:

$$v_a = \frac{dy}{dt}$$

$$F_{a(y)} = -6\ N$$

$$v_a = 2\,\frac{m}{seg}$$

Por tanto:

$$-6\ N = -k_a\left(2\,\frac{m}{seg}\right)$$

$$k_a = 3\,\frac{N * seg}{m}$$

RESOLUCION

Se fija el resorte un peso de 10 N (w) y se suelta el resorte desde una posición de 2 m (y0) debajo de la posición de equilibrio.

Es decir:

$$m = \frac{w}{g} = \frac{10\ N}{10\ m/s^2} = 1\,Kg$$

$$y_{(0)} = 2\,m$$

RESOLUCION

Ya con todos estos datos podemos expresarlos de la siguiente manera:

$$y'' + 3y' + 2y = 4e^{-3t};\ y(0) = 2;\ y'(0) = 1$$

Y haciendo un cambio de variable para poder descomponer nuestra EDO de segundo orden en varias ecuaciones de primer orden, podemos terminar de expresar todo de la forma:

$$z = y';\ z' = -3z - 2y + 4e^{-3t};\ y(0) = 2;\ z(0) = 1$$

Tabla 9.1 Resumen de los métodos para los problemas de EDO con condición inicial

Nombre de los métodos	Fórmula relevante	Error Local	Error Global	Otras características[a]
Ecuaciones no rígidas:				
Métodos de Euler				
hacia adelante	Diferencias hacia adelante	$0(h^2)$	$0(h)$	AI, CF
modificado	Regla del trapecio	$0(h^3)$	$0(h^2)$	AI, CF, NL
hacia atrás	Diferencias hacia atrás	$0(h^2)$	$0(h)$	AI, CF, NL
Runge-Kutta				
de segundo orden	Regla del trapecio	$0(h^3)$	$0(h^2)$	AI, CF
de tercer orden	Regla de 1/3 de Simpson	$0(h^4)$	$0(h^3)$	AI, CF
de cuarto orden	Regla de 1/3 o 3/8 de Simpson	$0(h^5)$	$0(h^4)$	AI, CF
Predictor-corrector				
de segundo orden	(idéntico al de Runge-Kutta de segundo orden)			AI, CF
de tercer orden	Newton hacia atrás	$0(h^4)$	$0(h^3)$	NA, CD
de cuarto orden	Newton hacia atrás	$0(h^5)$	$0(h^4)$	NA, CD
Ecuaciones rígidas:				
Métodos implícitos	Diferencias hacia atrás; método de Gear			AI/NA
Transformación exponencial	Transformación exponencial			AI

[a]NA: Sin capacidad de autoinicialización.
AI: Capacidad de autoinicialización.
CF: El tamaño del intervalo se puede cambiar con facilidad a mitad de la solución.
CD: El tamaño del intervalo se cambia con dificultad.
NL: En cada paso, podría requerirse la solución de ecuaciones no lineales.

RESULTADOS

Tamaño del paso:

$h = 0.01$

Euler Modificado	`t = 5, y = 0.0468811, z = -0.0463835`
Runge-Kutta	`t = 5, y = 0.0468484, z = -0.0465319`
Predictor-Corrector	`t = 5, y = 0.0466831, z = -0.0462368`

Valor por Resolución Analítica	0.046848441289	-0.04653186539
	Valor de y con t = 5	Valor de z con t = 5

RESULTADOS

Runge_kutta 4to Orden

El método de Runge-Kutta de cuarto orden se obtiene mediante un proceso de integración numérica que utiliza una combinación ponderada de pendientes para estimar el comportamiento de la solución de una EDO

El método de Runge-Kutta de cuarto orden es especialmente eficaz para reducir el error de aproximación, ya que utiliza una combinación ponderada de pendientes en varios puntos del intervalo para mejorar la precisión de la solución. Este proceso se fundamenta en la serie de Taylor y utiliza fórmulas de combinación ponderada para mejorar la precisión en comparación con métodos de orden inferior.

Se selecciono la versión basada en la regla de 1/3 de Simpson para obtener los resultados anteriores.

$$k_1 = hf(y_n, t_n)$$

$$k_2 = hf\left(y_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(y_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(y_n + k_3, t_n + h)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

CONCLUSIÓN
CONCLUSIÓN

Euler Modificado:

- Ligera alejamiento de la solución analítica.
- Fácil de implementar y bajo costo computacional.
- Brinda resultados aproximados, pero con posibles errores acumulativos en problemas complejos.

Runge-Kutta de Cuarto Orden:

- Muy cercano a la referencia analítica.
- Mayor precisión y estabilidad que Euler Modificado, con un costo computacional ligeramente mayor.
- Proporciona una buena aproximación a la solución analítica con menos errores acumulativos debido a su precisión de cuarto orden.

Predictor-Corrector de Cuarto Orden:

- Ligero alejamiento de la solución analítica.
- Combina la estabilidad del Predictor con la precisión del Corrector, ofreciendo una posible mejora en la aproximación.
- Al integrar un paso de predicción y uno de corrección, ofrece una mejora significativa en la precisión, especialmente para problemas complejos.

GRACIAS