

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias



CON VALORES EN LA FRONTERA
GERARDO ROSETTI





Sistema a Estudiar


Una repostería que necesita conocer la temperatura de sus tortas en todo momento durante la elaboración de estas con la finalidad de asegurar la máxima calidad a sus clientes.

En cierto punto del proceso de preparación, es necesario sacar la torta del horno a 70°C y dejarla reposar por 5 minutos en una habitación que se encuentra a 15°C , pasados los 5 minutos la temperatura de la torta es de 45°C . La repostería quiere estudiar que sucedería con la temperatura de la torta si esta se dejara por fuera 5 minutos mas y posteriormente se volviera a introducir al horno a que se encuentra a 70°C por 10 minutos mas.


LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON


$$dT/dt = \begin{cases} \beta(T(t) - 15), & 0 \leq t \leq 10 \\ \beta(T(t) - 70), & 10 < t \leq 20 \end{cases}$$


$$T(0) = 70^{\circ}\text{C}$$


$$T(5) = 45^{\circ}\text{C}$$

$$dT/dt = \beta(T(t) - T_a)$$



$T(t)$: temperatura de un objeto
en un instante de tiempo t



T_a : temperatura del ambiente
constante



β : Constante de proporcionalidad

Métodos para Resolver Problemas

Con Valores en la Frontera

Tipo de problemas y método de solución	Ventajas	Desventajas
Problemas no homogéneos		
Método de disparo	Se puede utilizar un programa ya existente para problemas con condiciones iniciales.	Se hace con el método de prueba y error. Se aplica a una clase limitada de problemas. La solución puede ser inestable.
Método de diferencias finitas que utiliza la solución tridiagonal	No hay problemas de inestabilidad. No se utiliza el método de prueba y error para problemas lineales. Se puede aplicar a los problemas no lineales con iteración.	Se debe desarrollar un programa para cada problema particular.
Problemas de valores propios		
Método matricial (véase el capítulo 7)	Se calculan todos los valores propios de una sola vez.	No se puede aplicar si el tamaño de la matriz es grande.
Método iterativo		
Método de la potencia inversa	Sencillez.	Solamente para el valor propio fundamental.
Método de la potencia inversa con desplazamiento	Igual de sencillo que el método de la potencia. Se puede calcular cualquier valor propio.	Debe usarse el método de prueba y error para evaluar el valor propio; sólo para valores propios reales.

Resultados

Obtenemos el valor de Beta: El valor de b encontrado es: -0.12121


Obtenemos la temperatura a los 5min sacado del horno: es: $45.0026\text{ }^{\circ}\text{C}$

Obtenemos la temperatura a los 10min sacado del horno: es: $31.366444\text{ }^{\circ}\text{C}$

Obtenemos la temperatura a los 10min devuelto al horno: es: $58.503747\text{ }^{\circ}\text{C}$



Comparación


$$\beta = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{6}{11} \right) \quad -0.12122$$

$$T(t) = 15 + (55) \left(\frac{6}{11} \right)^{\frac{t}{5}}$$


$$t = 5 \rightarrow 45$$


$$t = 10 \rightarrow 31.36363$$

$$T(t) = 70 - (38.63637) \left(\frac{6}{11} \right)^{\frac{t}{5}}$$


$$t = 10 \rightarrow 58.50488$$




Grafica

