Álgebra Lineal Numérica

Gerardo A. Rosetti M.
C.I 27668596

¿Qué es y para qué se Utiliza?

El álgebra lineal es fundamental, tanto para el análisis científico como para los métodos numéricos, y no podríamos hacer mucho sin tener un conocimiento básico de ella.

En métodos numéricos el álgebra lineal se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales y para representar y transformar datos en forma matricial. Los métodos numéricos utilizan conceptos del álgebra lineal, como la factorización de matrices, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, la aproximación de funciones y la optimización, para resolver problemas matemáticos y de ingeniería de manera computacional.

En resumen, el álgebra lineal proporciona herramientas y técnicas fundamentales para el análisis numérico y la resolución de problemas cuantitativos en campos como la ingeniería, la física, la economía y la ciencia de datos.

Métodos de Ecuaciones Lineales

Tabla 6.1 Comparación de los tres métodos para las ecuaciones lineales

Método	Ventajas	Desventajas
Eliminación de Gauss	El algoritmo de solución más básico.	Solución de un único conjunto de ecuaciones lineales a la vez.
Eliminación de Gauss-Jordan	La base para calcular la inversa; puede resolver conjuntos múltiples de ecuaciones.	Menos eficiente para un único conjunto de ecuaciones.
Descomposición *LU*	Eficaz si un conjunto de ecuaciones lineales se resuelve varias veces con distintos términos no homogéneos (por ejemplo, en el método de la potencia inversa).	Menos eficiente y más complicado que la eliminación de Gauss si sólo se usa una vez.

Eliminaciones de Gauss y Gauss-Jordan para Problemas Ideales Sencillos

El algoritmo de eliminación de Gauss se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante la eliminación sucesiva de incógnitas. El proceso implica la conversión del sistema de ecuaciones en uno equivalente en el que la matriz de coeficientes se convierte en una matriz triangular superior a través de operaciones elementales de fila.

El algoritmo de Gauss-Jordan es una extensión del método de eliminación de Gauss en el que, una vez que se ha obtenido la forma triangular superior, se realiza una eliminación hacia atrás para obtener una matriz identidad. Esto permite encontrar directamente las soluciones del sistema de ecuaciones.

Eliminación de Gauss
Ejemplo

Un conjunto de N ecuaciones es de la forma

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,N}x_N &= y_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,N}x_N &= y_2 \\
&\vdots \\
a_{N,1}x_1 + a_{N,2}x_2 + a_{N,3}x_3 + \cdots + a_{N,N}x_N &= y_N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,N}x_N &= y_1 \\
a'_{2,2}x_2 + a'_{2,3}x_3 + \cdots + a'_{2,N}x_N &= y'_2 \\
a''_{3,3}x_3 + \cdots + a''_{3,N}x_N &= y''_3 \\
&\vdots \\
a^{(N-1)}_{N,N}x_N &= y^{(N-1)}_N
\end{aligned}
$$

$$a'_{i,j} = a_{i,j} - (a_{i,1}/a_{1,1})a_{1,j}$$

Eliminación de Gauss-Jordan
Ejemplo

$$
\begin{matrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,N-1} & 0 & \bar{y}_1 \\
0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \cdots & a'_{2,N-1} & 0 & \bar{y}_2 \\
0 & 0 & a''_{3,3} & \cdots & a''_{3,N-1} & 0 & \bar{y}_3 \\
\vdots & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a^{(N-2)}_{N-1,N-1} & 0 & \bar{y}_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bar{y}_N
\end{matrix}
$$

$$
\begin{matrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & 0 & 0 & \bar{y}'_1 \\
0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \cdots & 0 & 0 & \bar{y}'_2 \\
0 & 0 & a''_{3,3} & \cdots & 0 & 0 & \bar{y}'_3 \\
\vdots & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bar{y}'_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bar{y}_N
\end{matrix}
$$

$$
\begin{matrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{y}_1^{(N-1)} \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{y}_2^{(N-2)} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \bar{y}_3^{(N-3)} \\
\vdots & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bar{y}'_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bar{y}_N
\end{matrix}
$$

Pivoteo y Eliminación Canónica de Gauss

El pivoteo y la eliminación canónica son técnicas utilizadas en el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El pivoteo busca evitar la división por cero al seleccionar el elemento más grande en valor absoluto en la columna correspondiente como pivote, intercambiando filas si es necesario. Esto ayuda a mejorar la estabilidad numérica del algoritmo y a reducir el error de redondeo.

La eliminación canónica de Gauss es el proceso de reducir una matriz a su forma escalonada reducida mediante la eliminación de elementos por debajo de la diagonal principal, utilizando los pivotes obtenidos previamente. Esto permite simplificar el sistema original en uno equivalente más fácil de resolver.

Eliminación de Canónica Gauss con Pivoteo
Ejemplo

Inicio:

$$\begin{matrix} 0 & 10 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{matrix}$$

Cambio de filas:

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Cambio de filas:

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 7/2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -16/5 & 33/5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 2.7187 \\ 0 & 1 & 0 & 0.4062 \\ 0 & 0 & 1 & -2.0625 \end{matrix}$$

$$x_3 = -2.0625$$

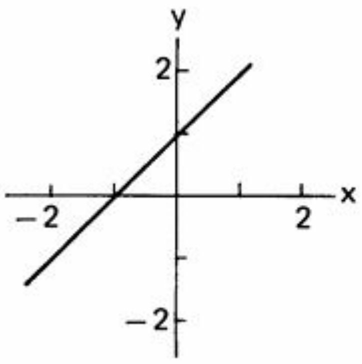
$$x_2 = (2 - x_3)/10 = 0.4062$$

$$x_1 = (5 - 4x_2 - x_3) = 2.7187$$

Problemas sin Solución Única

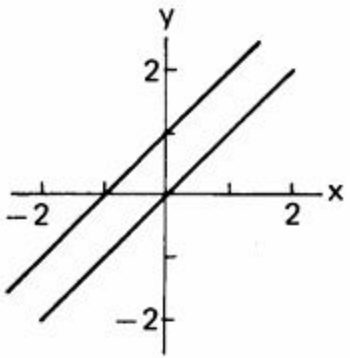
No siempre es posible resolver un conjunto de ecuaciones lineales en forma numérica. Los siguientes conjuntos de ecuaciones lineales son tres ejemplos sencillos pero importantes:

$$-x + y = 1$$
$$-2x + 2y = 2$$



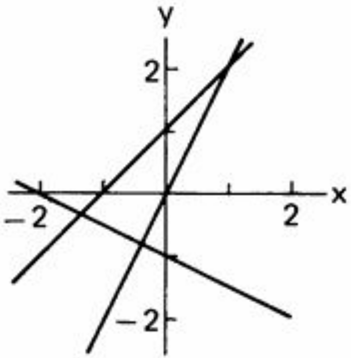
Número infinito de soluciones

$$-x + y = 1$$
$$-x + y = 0$$



Sin solución

$$-x + y = 1$$
$$2x - y = 0$$
$$x + 2y = -2$$



Sin solución

Matrices, Vectores e Inversión de Matriz

- Un vector columna es una matriz con una única columna, un vector renglón es una matriz con un único renglón y se puede expresar como el transpuesto de un vector columna.
- Se puede sumar o restar dos matrices con el mismo número de columnas y renglones.
- Una matriz B puede multiplicar a ta izquierda (pre multiplicarse) a otra matriz A si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B.
- Si BA = I o AB= I, donde I es una matriz identidad, entonces B = A^-1.
- La inversa de una matriz se puede calcular aplicando la eliminación de Gauss y/o de Gauss-Jordan al arreglo aumentado que está formado por la matriz que se invertirá y la matriz identidad.

Descomposición LU

El algoritmo de descomposición LU es un método utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Consiste en descomponer una matriz (no singular) de coeficientes en el producto de dos matrices triangulares, una inferior (L) y otra superior (U). La descomposición LU permite resolver sistemas de ecuaciones de forma más eficiente, ya que una vez que la descomposición está completa, se pueden resolver sistemas lineales con la misma matriz de coeficientes de manera más rápida y eficiente.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

Problemas Mal Condicionados

- El hecho de que La matriz de coeficientes de un conjunto de ecuaciones lineales esté mal condicionado o no, no se puede ver fãcilmente examinando la solución de las ecuaciones lineales.
- Entre los métodos para examinar las matrices ma! condicionadas se inc!uyen e! cãlcuLo de A' (A')' y det (A) det (A').