שפות ω-רגולריות

הרצאה בקורס מבוא לאימות תוכנה בשיטות פורמליות

הפקולטה למדעי המחשב והמידע | אוניברסיטת בן-גוריון

גרא וייס

6/1/2026

תכנית להמשך: אימות תכונות ω-רגולריות

תכונות שמורה

↓

מיוצגות על ידי נוסחה לוגית המתארת מצבים העומדים בתנאי השמורה

↓

נבדקות באמצעות BFS או DFS

תכונות בטיחות רגולריות

↓

מיוצגות על ידי אוטומט המתאר את קבוצת הרישות הרעות

↓

נבדקות על ידי הרכבה $TS \times \mathcal{A}$ ורדוקציה לשמורה

תכונות ω-רגולריות

↓

מיוצגות על ידי אוטומט המתאר מילים אינסופיות

↓

נבדקות על ידי הרכבה $TS \times \mathcal{A}$ וסריקת מעגלים בגרף

← עד כאן הגענו

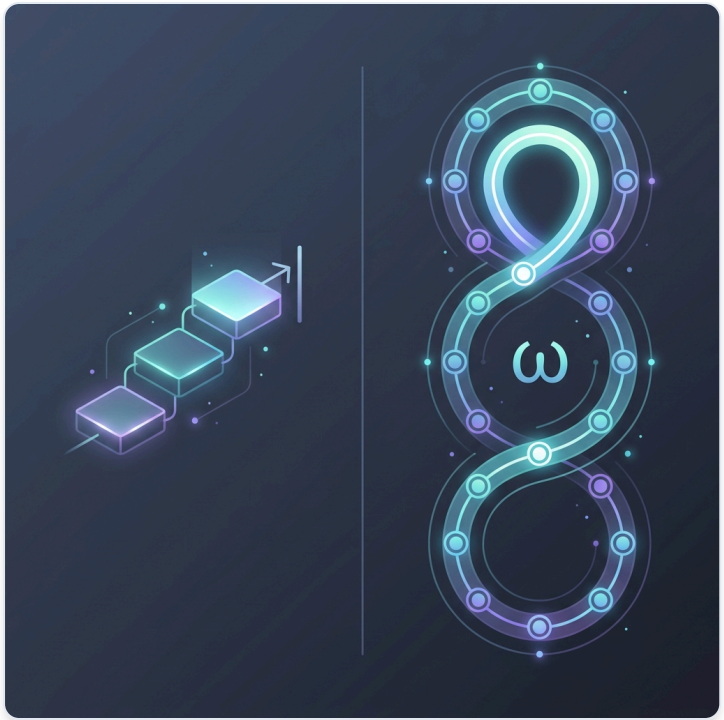
מטרות ההרצאה

להרחיב רגולריות למילים אינסופיות

- ניזכר בשפות רגולריות מעל מילים סופיות.
- נגדיר ביטויי ω-רגולריים.
- נתרגם תכונות זמן לינארי לשפות מעל 2^{AP}.

להכיר אוטומטי Büchi

- נגדיר ריצה מקבלת מעל מילה אינסופית.
- נראה דוגמאות לתכונות חַיּוּת.
- נציג את המשפט: NBA מקבלים בדיוק את השפות ה־ω-רגולריות.



למה צריך עוד מודל?

בשקפים הקודמים בדקנו:

- **שְׁמוּרוֹת**: נוסחה על כל מצב נגיש.
- **בטיחות רגולרית**: אוטומט שמזהה רישות רעות סופיות.

אבל תכונות רבות אינן נחשפות על ידי רישא סופית:

$$\text{Always}\ (wait \Rightarrow \text{Eventually}\ crit)$$

אי אפשר להפריך "בסוף יקרה" אחרי מספר סופי של צעדים.

שְׁמוּרָה

חיפוש מצב נגיש שמפר נוסחה.

בטיחות רגולרית

חיפוש רישא רעה סופית בעזרת אוטומט.

ω־רגולריות

חיפוש דפוס אינסופי: ביקורים חוזרים, מענה לבקשות, והוֹגְנוּת.

דוגמת מוטיבציה: מניעה הדדית

שאלת החַיּוּת:

$$\text{Always}\ (wait_L \Rightarrow \text{Eventually}\ crit_L)\ \wedge\ \text{Always}\ (wait_R \Rightarrow \text{Eventually}\ crit_R)$$

האימות כבר אינו "האם מגיעים למצב רע", אלא:

בקשה ללא מענה: האם קיימת ריצה אינסופית שבה בקשה נשארת ללא מענה?

מחזור מפר: האם במכפלה יש מחזור שמחזיק את ההפרה?

המעבר ממילים סופיות לאינסופיות

שפה רגולרית

שפה של מילים סופיות:

$$L \subseteq \Sigma^*$$

מתארת רישות, דוגמאות נגדיות סופיות, או התנהגויות עם סוף.

דוגמה:

מילים המכילות אות עם אדום (r) שלא קדמה לה אות עם צהוב (y):

$$(\neg y)^* \cdot r \cdot \text{true}^*$$

כאשר נוסחה מייצגת את קבוצת האותיות ב־Σ שמספקות אותה.

שפה ω-רגולרית

שפה של מילים אינסופיות:

$$L \subseteq \Sigma^\omega$$

מתארת עקבות של מערכות תגובתיות.

דוגמה:

מילים שבהן אות עם ירוק (g) לא מופיעה אינסוף פעמים (מופיעה מספר סופי של פעמים בלבד):

$$\text{true}^* \cdot (\neg g)^\omega$$

כאן true מייצג את Σ, ו־$\neg g$ מייצג את האותיות ללא g.

תזכורת: ביטויים רגולריים

ביטוי רגולרי מעל אלפבית Σ מוגדר על ידי התחביר:

$$E ::= \emptyset \mid \epsilon \mid a \mid E_1 + E_2 \mid E_1 \cdot E_2 \mid E^*$$

כאשר $a \in \Sigma$.

הסמנטיקה הפורמלית: השפה $L(E) \subseteq \Sigma^*$ מוגדרת באינדוקציה

$L(\emptyset) = \emptyset$

$L(\epsilon) = \{\epsilon\}$

$L(a) = \{a\}$ (לכל $a \in \Sigma$)

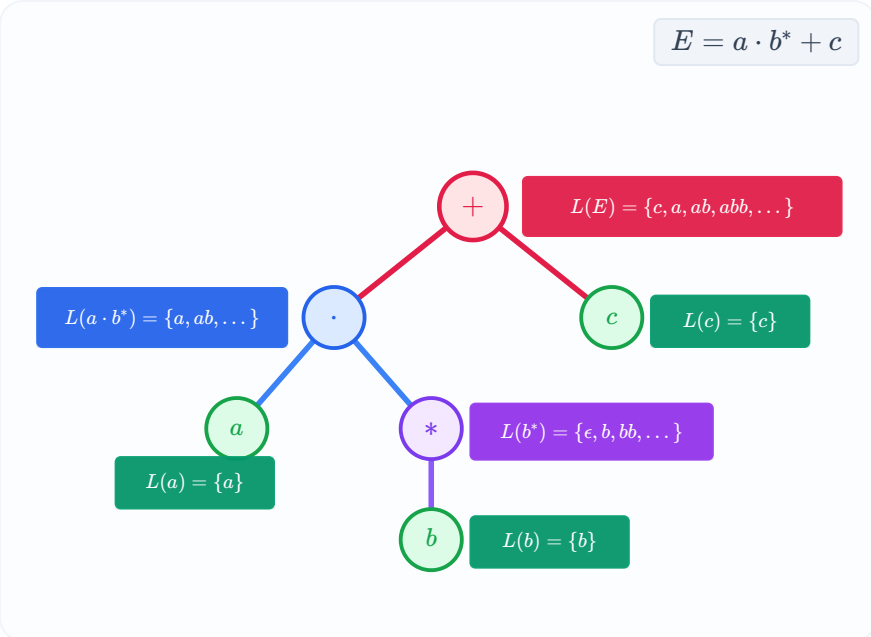
$L(E_1 + E_2) = L(E_1) \cup L(E_2)$

$L(E_1 \cdot E_2) = L(E_1) \cdot L(E_2)$

$L(E^*) = (L(E))^*$

דוגמה: תרגום אינדוקטיבי של ביטוי רגולרי לשפה

התרגום של ביטוי רגולרי E לשפה $L(E)$ נעשה מלמטה למעלה (מלמטה אל השורש):



1. **בסיס האינדוקציה (עלי השלד)**
   מתרגמים את אותיות האלפבית לקבוצות בסיס: $L(a) = \{a\}$, $L(b) = \{b\}$, $L(c) = \{c\}$.

2. **אופרטור כוכב (Kleene Star)**
   מחשבים את סגירת קלין של תת-העץ: $L(b^*) = (L(b))^* = \{\epsilon, b, bb, bbb, \dots\}$.

3. **אופרטור שרשור (Concatenation)**
   משרשרים את השפה של $L(a)$ עם השפה של $L(b^*)$: $L(a \cdot b^*) = L(a) \cdot L(b^*) = \{a, ab, abb, \dots\}$.

4. **אופרטור איחוד (Union)**
   מבצעים איחוד של שני צידי עץ השורש: $L(E) = L(a \cdot b^*) \cup L(c) = \{c, a, ab, abb, \dots\}$.

ביטויים ω-רגולריים

תחביר

ביטוי ω-רגולרי מעל אלפבית Σ הוא ביטוי מהצורה:

$$G = E_1.F_1^\omega + \cdots + E_n.F_n^\omega$$

E_i ו־F_i הם ביטויים רגולריים רגילים מעל Σ, כך ש־ $\epsilon \notin L(F_i)$.

דורשים $\epsilon \notin L(F_i)$ כדי שכל חזרה תורמת קטע לא ריק, ולכן השרשור אינסופי באמת.

דוגמאות:

A^ω	$(A+B)^*.B^\omega$	$(B^*A)^\omega$
רק מופעים של A	מספר סופי של A	אינסוף מופעים של A

חידון

מי מהבאים הם ביטויים אומגה רגולריים חוקיים?

כל מחובר חייב להסתיים בביטוי בחזקת ω

$$(\{a\} + \{a,b\})^* + (\{b\} + \{\})^\omega$$

לביטוי בחזקת ω אסור להכיל את המילה הריקה

$$(\{a\} + \{a,b\})^* \cdot (\{b\} + \epsilon)^\omega + \{a\}^\omega$$

$$(\{a\} \cdot \{a\})^* \cdot ((\{a\} + \{a,b\})^*)^\omega$$

גם כאן יש ביטוי שיכול להיות ריק

$$(\{a\} \cdot \{a\})^* \cdot ((\{a\} + \{a,b\})^+)^\omega$$

ביטוי חוקי

קבוצת המילים המוגדרת על ידי ביטוי ω-רגולרי

משמעות

אם $L \subseteq \Sigma^+$, אז נגדיר:

$$L^\omega = \{w_1 w_2 w_3 \cdots \mid \forall i \geq 1 \ (w_i \in L)\}$$

ובאמצעות הגדרה זו נגדיר:

$$L_\omega(G) = L(E_1).L(F_1)^\omega \cup \cdots \cup L(E_n).L(F_n)^\omega$$

שני ביטויים שקולים אם הם מגדירים את אותה שפה של מילים אינסופיות.

דוגמאות מעל $\{A, B\}$

אינסוף מופעים של A

$$(B^*A)^\omega$$

אם מילה מכילה אינסוף מופעים של A, חותכים אותה בכל מופע של A: כל קטע סופי שמתקבל הוא רצף של אפס או יותר B-ים ואחריהם A, כלומר מילה מתוך B^*A. לכן המילה כולה היא שרשור אינסופי של מילים מתוך B^*A.

להפך, אם מילה שייכת ל־$(B^*A)^\omega$, היא מורכבת מאינסוף בלוקים, וכל בלוק מסתיים ב־A. לכן מופיעים בה אינסוף A-ים.

רק מספר סופי של A

$$(A+B)^*.B^\omega$$

אם במילה מופיעים רק מספר סופי של A-ים, נסמן את המקום האחרון שבו מופיע A. הרישא עד המקום הזה היא מילה סופית כלשהי מעל $\{A, B\}$, כלומר מתוך $(A+B)^*$. מכאן ואילך מופיעים רק B-ים, ולכן הזנב הוא מתוך B^ω.

להפך, כל מילה מתוך $(A+B)^*.B^\omega$ מתחילה ברישא סופית כלשהי, שבה יכולים להופיע רק מספר סופי של A-ים, ואחריה זנב שמורכב רק מ־B. לכן במילה כולה יש רק מספר סופי של A-ים.

קבוצת השפות הניתנות לתיאור באמצעות ביטויי ω-רגולריים סגורה תחת איחוד, חיתוך ומשלים.

חידון משמעות תכונות אומגה רגולריות

נניח $AP = \{p, q, r\}$. כל אות היא קבוצת האטומים שנכונים באותו רגע.

ביטוי מעל 2^{AP}	משמעות במילים
$(2^{AP})^*.\{p\}^\omega$	לבסוף תמיד: רק p נכון, ו־ q ו־ r אינם נכונים יותר.
$((2^{AP})^*.(\{p,q\} + \{p,q,r\}))^\omega$	אינסוף פעמים: גם p וגם q נכונים יחד.
$(2^{AP})^*.(\{\} + \{q\} + \{r\} + \{q,r\})^\omega$	לבסוף תמיד: p שקרי.
$((\{\} + \{q\} + \{r\} + \{q,r\})^*.(\{p\} + \{p,q\} + \{p,r\} + \{p,q,r\}))^\omega$	אינסוף פעמים: p נכון.
$(2^{AP})^*.(\{r\} + \{p,r\} + \{q,r\} + \{p,q,r\}).(\{\} + \{p\} + \{q\} + \{p,q\})^\omega$	בשלב כלשהו r נכון, ומיד אחר כך ולתמיד r שקרי.

תכונות ω-רגולריות

תכונת זמן לינארי P מעל AP היא ω-**רגולרית** אם קיים ביטוי ω-רגולרי G מעל האלפבית 2^{AP} כך ש:

$$P = L_\omega(G)$$

כל אות במילה האינסופית היא קבוצת התוויות שנכונות במצב הנוכחי.

$\{\}$, $\{wait\}$, $\{crit\}$, $\{wait, crit\}$

שְׁמוּרוֹת ובטיחות רגולרית הן מקרים פרטיים

שְׁמוּרָה

אם Φ היא נוסחת מצב, אז כל האותיות שמקיימות אותה יוצרות שפה:

$$\left(\sum_{A \models \Phi} A\right)^{\omega}$$

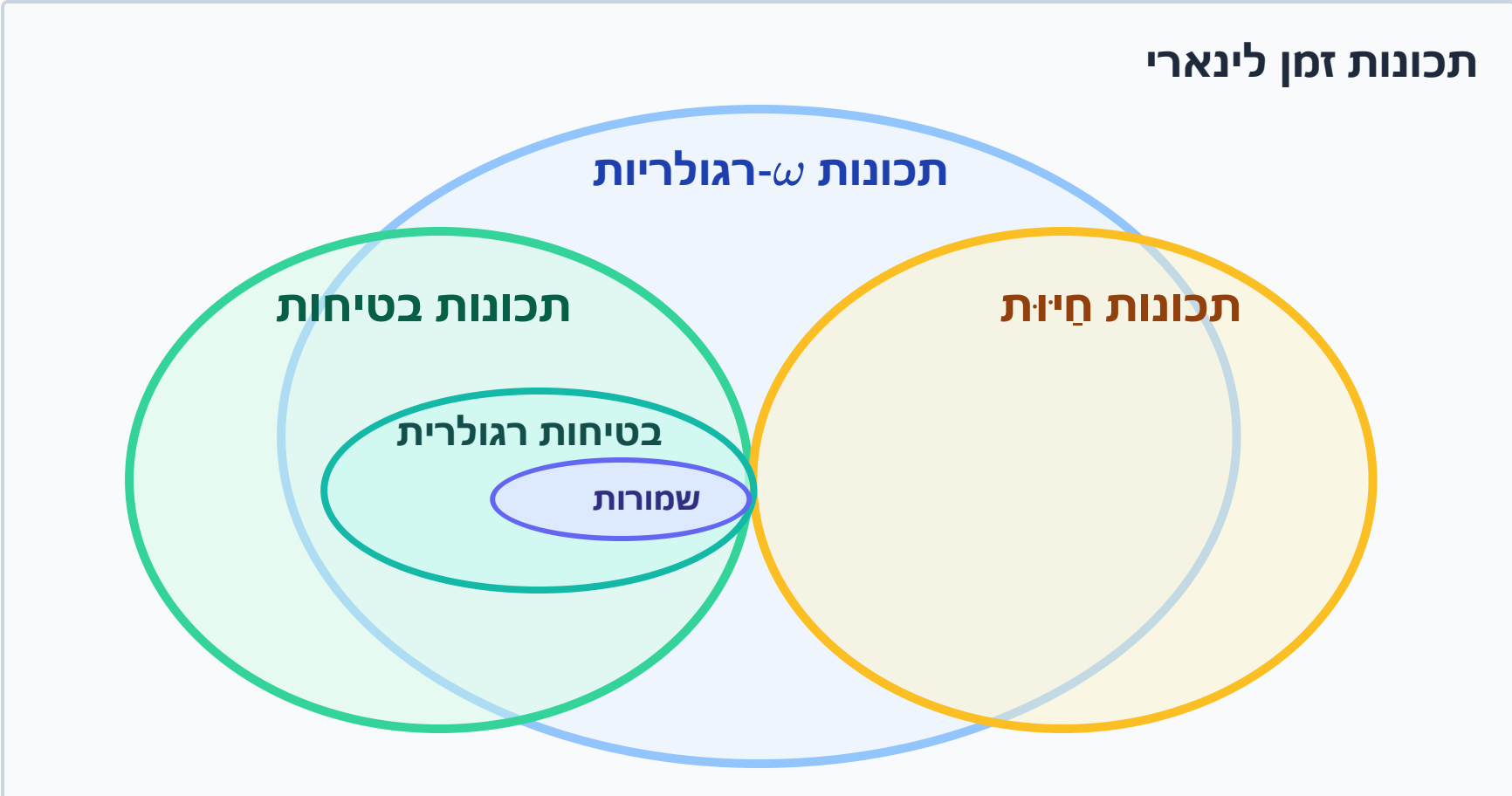
בטיחות רגולרית

אם $BadPref(P)$ רגולרית, אז ההפרות הן:

$$BadPref(P).(2^{AP})^{\omega}$$

ומכאן P עצמה ω-רגולרית, כי **יש סגירות תחת משלים** ⚠.

סוגי תכונות


תכונות זמן לינארי
תכונות ω-רגולריות
תכונות בטיחות
תכונות חַיּוּת
בטיחות רגולרית
שמורות

דוגמה: ביקור אינסופי ב־crit

מעל $AP = \{wait, crit\}$, התכונה:

$$\text{Always Eventually } crit$$

מתוארת על ידי:

$$((\neg crit)^*.crit)^\omega$$

ניתן לפרק את המילה לשרשור של אינסוף מילים באורך סופי שכל אחת מהן מכילה אות המקיימת את $crit$.

אוטומטי Büchi

כמו שלמדנו בקורס **מודלים חישוביים**, יש דואליות בין ביטויים רגולריים לבין אוטומטים:

$$\text{regular expressions} \iff \text{finite automata}$$

גם כאן נרצה דואליות דומה בין ביטויים ω-רגולריים לבין אוטומטים. אבל קודם צריך לשאול: איך אוטומט מגדיר שפה של מילים באורך אינסופי?

במילים סופיות אפשר לשאול באיזה מצב האוטומט נמצא כשהמילה מסתיימת.

במילים אינסופיות אין רגע סיום, ולכן הקריטריון הזה כבר לא זמין.

הרעיון של Büchi: נסתכל על המצבים שהריצה מבקרת בהם אינסוף פעמים, ונקבל אם ביניהם יש

אוטומט Büchi

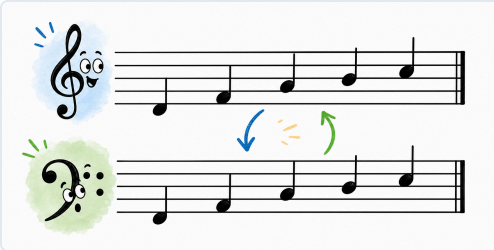
תחביר

אוטומט Büchi הוא:

$$\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$$

Q קבוצה סופית של מצבים, Σ אלפבית, ו־ $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ יחס המעברים.

$Q_0 \subseteq Q$ מצבי התחלה, ו־ $F \subseteq Q$ מצבים מקבלים.



אותם תווים; המפתח משנה את המשמעות.

אוטומט Büchi

משמעות

עבור מילה אינסופית σ, ריצה של האוטומט היא סדרת מצבים $q_0 q_1 q_2 \cdots$ כך ש־$q_0 \in Q_0$ ו־ $q_{i+1} \in \delta(q_i, \sigma[i])$ לכל i. שימו לב שמדובר בריצה באורך אינסופי.

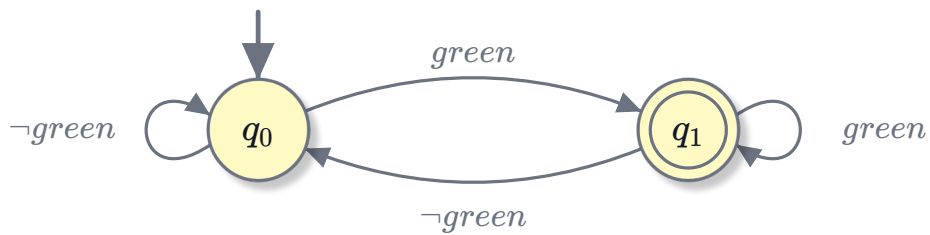
הריצה **מקבלת** אם היא מבקרת במצבי F אינסוף פעמים: $\exists_{\infty} i \ (q_i \in F)$.

השפה של האוטומט היא קבוצת כל המילים שיש להן ריצה מקבלת:

$$L_\omega(\mathcal{A}) = \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \mathcal{A} \text{ has an accepting run on } \sigma\}$$

דוגמה: אינסוף פעמים ירוק

התכונה Always Eventually $green$ מתקבלת על ידי אוטומט שמסמן קבלה בכל פעם שהאות הנוכחית מכילה $green$.



אם מפסיקים לראות green, הריצה נשארת לנצח מחוץ ל־F ולכן אינה מקבלת.

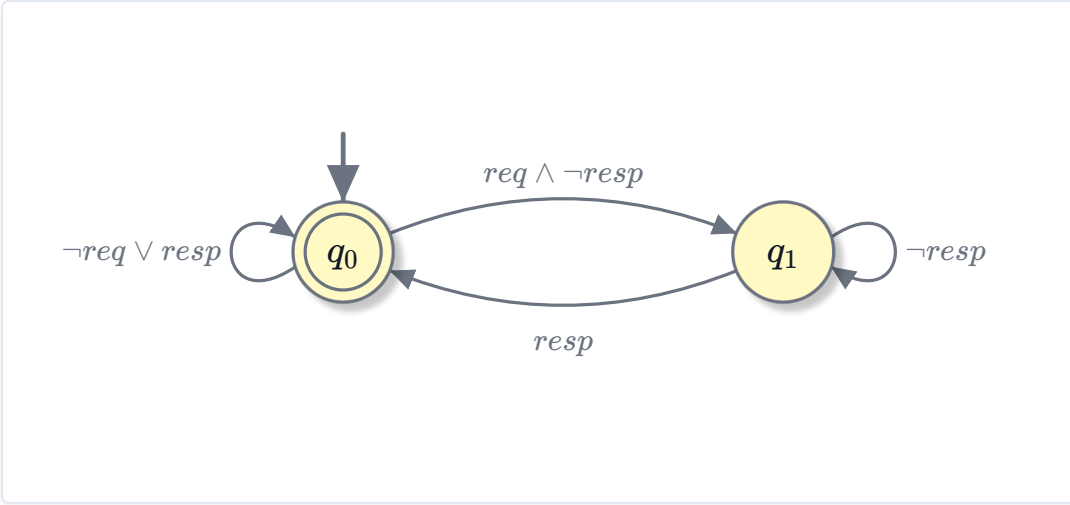
אם רואים green אינסוף פעמים, האוטומט מבקר ב־q_1 אינסוף פעמים. מכיוון ש־$q_1 \in F$, המילה מתקבלת.

$$L_\omega(\mathcal{A}) = \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \exists_\infty i \ (green \in \sigma[i])\}$$

דוגמה: בקשה מקבלת מענה

התכונה:

$$\text{Always}\ (req \Rightarrow \text{Eventually}\ resp)$$



מצב q_0 אומר שאין כרגע בקשה פתוחה. מצב q_1 אומר שאנחנו מחכים ל־resp.

מצב הקבלה הוא q_0: כדי לקבל, צריך לחזור אליו אינסוף פעמים.

בטיחות רגולרית כאוטומט Büchi

אם יש לנו DFA שלם לרישות הרעות עם מצבי מלכודת מקבלים, אפשר לקרוא אותו גם כאוטומט Büchi.

משלים התכונה: ההפרות

האוטומט כמו שהוא מקבל את **משלים התכונה**: בדיוק ריצות שבהן הופיעה רישא רעה. אחרי שנכנסים למלכודת מקבלת, נשארים בה ולכן מבקרים במצב מקבל אינסוף פעמים.

התכונה עצמה

בלי הגבלת הכלליות נניח שהאוטומט שלם ודטרמיניסטי. אז החלפת קבוצת הקבלה ל־$Q \setminus F$ מקבלת את התכונה עצמה: אם אין רישא רעה, הריצה לעולם לא נכנסת למלכודת ולכן מבקרת במצבים שמחוץ ל־F אינסוף פעמים. אם יש רישא רעה, נכנסים למלכודת שב־F ונשארים בה, ולכן לא מבקרים ב־$Q \setminus F$ אינסוף פעמים.

זו הסיבה ש־ω־רגולריות באמת מרחיבה את בטיחות רגולרית, ולא מחליפה אותה.

זהירות: שקילות סופית ושקילות אינסופית אינן שקולות

NFA מול NBA

שני אוטומטים יכולים לקבל אותה שפה סופית, אבל כשקוראים אותם מעל מילים אינסופיות הם יכולים לקבל שפות שונות. וגם להפך: הם יכולים לקבל אותה שפה אינסופית, אבל שפות סופיות שונות.

הָאִינְטוּאִיצְיָה

באוטומט סופי מספיק להגיע פעם אחת למצב מקבל. באוטומט Büchi צריך לחזור למצבי קבלה אינסוף פעמים.

$$L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2) \not\Rightarrow L_\omega(\mathcal{A}_1) = L_\omega(\mathcal{A}_2)$$

$$L_\omega(\mathcal{A}_1) = L_\omega(\mathcal{A}_2) \not\Rightarrow L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$$

NFA מול NBA: שקילות סופית אינה שקילות ω

$\mathcal{A}_1$

$\mathcal{A}_2$

כאוטומטים סופיים, שני האוטומטים מקבלים את אותה שפה:

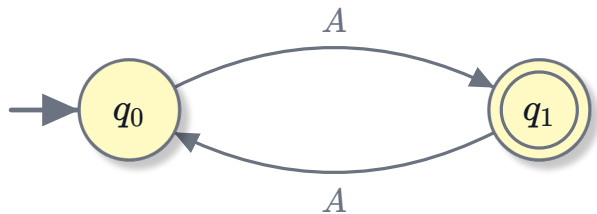
$$L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2) = \{A\}^+$$

אבל כאוטומטי Büchi הם אינם שקולים. ב־$\mathcal{A}_1$ הריצה מגיעה למצב המקבל ונשארת בו. ב־$\mathcal{A}_2$ אין ריצה אינסופית שמבקרת במצב המקבל אינסוף פעמים.

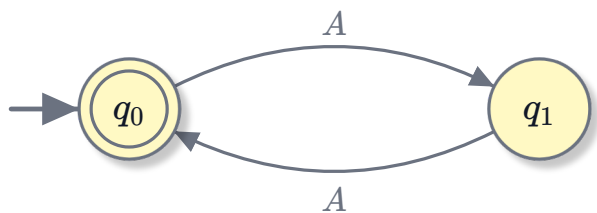
$$L_\omega(\mathcal{A}_1) = \{A^\omega\} \qquad L_\omega(\mathcal{A}_2) = \emptyset$$

DFA מול DBA: שקילות ω אינה שקילות סופית

$\mathcal{A}_1$



$\mathcal{A}_2$



כאן האוטומטים אינם שקולים כשקוראים מילים סופיות:

$$L(\mathcal{A}_1) = \{A^{2k+1} \mid k \geq 0\}$$

$$L(\mathcal{A}_2) = \{A^{2k} \mid k \geq 0\}$$

אבל על המילה האינסופית היחידה מעל האלפבית הזה, הריצה בשני האוטומטים מבקרת במצב מקבל אינסוף פעמים.

$$L_\omega(\mathcal{A}_1) = L_\omega(\mathcal{A}_2) = \{A^\omega\}$$

המשפט המרכזי

השפות שמתקבלות על ידי אוטומטי Büchi לא דטרמיניסטיים הן בדיוק השפות ה־ω-רגולריות.

מאוטומט לביטוי

מפרקים ריצה מקבלת לרישא סופית ועוד לולאות שחוזרות שוב ושוב דרך מצב מקבל.

מביטוי לאוטומט

בונים אוטומטים עבור איחוד, עבור L^ω, ועבור שרשור של שפה סופית עם שפת Büchi.

מאוטומט לביטוי ω-רגולרי: מתכון

נשתמש בכלי מהקורס **מודלים חישוביים**: בונים אוטומט סופי רגיל ומפיקים ממנו ביטוי רגולרי רגיל.

1. רישא עד מצב מקבל

לכל $q_0 \in Q_0$ ולכל $q \in F$ בונים אוטומט סופי: אותם מצבים ומעברים, מצב התחלתי q_0, וקבוצת קבלה $\{q\}$. מהאוטומט הזה מפיקים ביטוי רגולרי $E_{q_0,q}$.

2. לולאה לא ריקה דרך אותו מצב

לכל $q \in F$ בונים אוטומט סופי חדש: מוסיפים מצב התחלה חדש s, ומ־s יוצאים בדיוק כמו שיוצאים מ־q באות הראשונה. מצב הקבלה היחיד הוא q. כך מתקבלות בדיוק המילים הלא ריקות שמובילות מ־q חזרה ל־q. מהאוטומט הזה מפיקים ביטוי רגולרי רגיל G_q.

3. הופכים ללולאה אינסופית

הביטוי G_q^ω אומר: חזרה אינסופית על מקטעים לא ריקים, שכל אחד מהם מתחיל ב־q ומחזיר ל־q.

4. מחברים את כל האפשרויות

מצב ההתחלה ומצב הקבלה שחוזרים אליו אינם ידועים מראש, לכן כותבים סכום של כל המחוברים.

$$R_{\mathcal{A}} = \sum_{q_0 \in Q_0,\ q \in F} E_{q_0,q} \cdot G_q^\omega$$

מאוטומט לביטוי: למה המתכון נכון

מריצה מקבלת לביטוי

אם מילה מתקבלת, יש ריצה שבה מצב מקבל $q \in F$ מופיע אינסוף פעמים. נבחר את הביקור הראשון ב־q: הרישא עד אליו שייכת ל־$E_{q_0,q}$. בין כל שני ביקורים עוקבים ב־q מתקבל מקטע לא ריק ששייך ל־G_q. לכן המילה שייכת ל־ $E_{q_0,q} \cdot G_q^\omega$.

מהביטוי לריצה מקבלת

אם מילה שייכת ל־$E_{q_0,q} \cdot G_q^\omega$, אז יש רישא שמובילה מ־$q_0$ ל־q, ואחריה אינסוף מקטעים לא ריקים שכל אחד מוביל מ־q חזרה ל־q. מדביקים את המסלולים האלה ומקבלים ריצה שמבקרת ב־q אינסוף פעמים. מכיוון ש־$q \in F$, הריצה מקבלת.

$$\text{NBA} \implies R_{\mathcal{A}} = \sum E \cdot G^\omega$$

דוגמה: מצב מקבל שחוזרים אליו

הרישא שמגיעה ל־q_3:

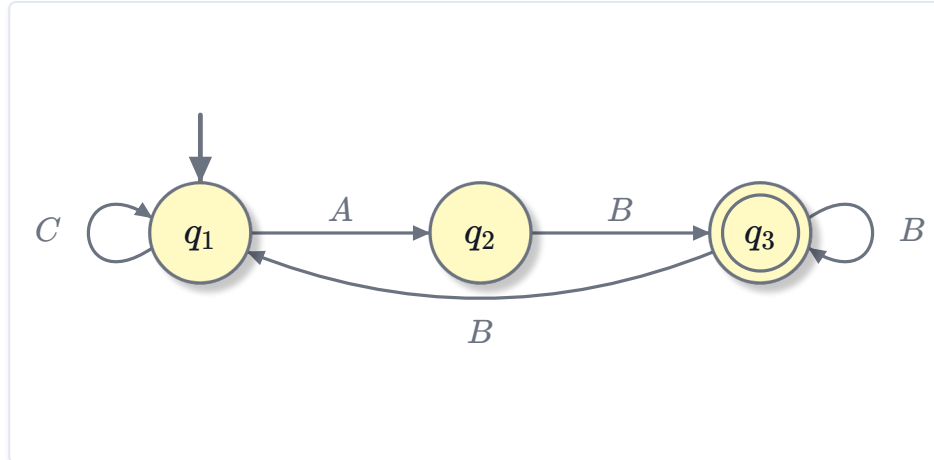
$$C^*AB$$

הלולאות שחוזרות מ־q_3 אל q_3:

$$B + BC^*AB$$

ולכן הביטוי ה-ω-רגולרי הוא:

$$C^*AB \cdot (B + BC^*AB)^\omega$$



דוגמה: שני מצבים מקבלים

עבור q_1: הרישא היא A, והלולאות הלא ריקות הן A או BB^*C.

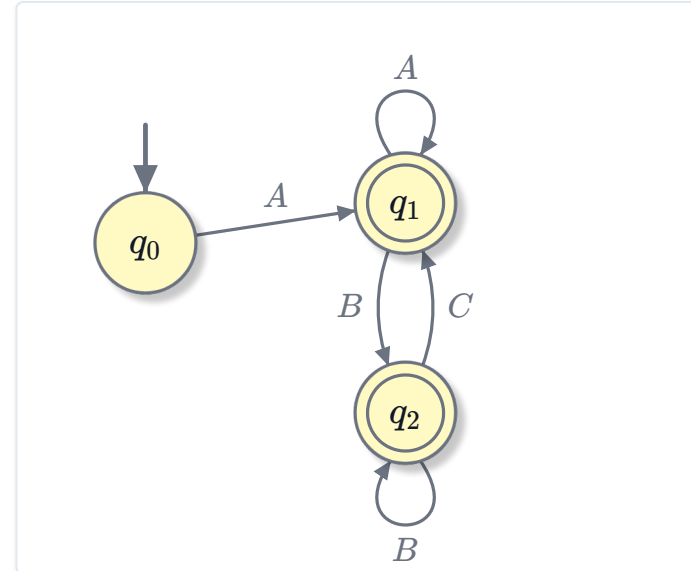
$$A(A+BB^*C)^\omega$$

עבור q_2: הרישא היא AA^*B, והלולאות הלא ריקות הן B או CA^*B.

$$AA^*B(B+CA^*B)^\omega$$

לכן הביטוי שנבנה הוא סכום שני המחוברים:

$$A(A+BB^*C)^\omega + AA^*B(B+CA^*B)^\omega$$



מביטוי לאוטומט: שלושת אבני הבניין

1. אופרטור ω

אם L רגולרית ו־$\epsilon \notin L$, בונים NBA שמקבל L^ω.

2. שרשור

אם L רגולרית ו־$\mathcal{A}$ מקבל שפת Büchi, בונים אוטומט עבור $L.L_\omega(\mathcal{A})$.

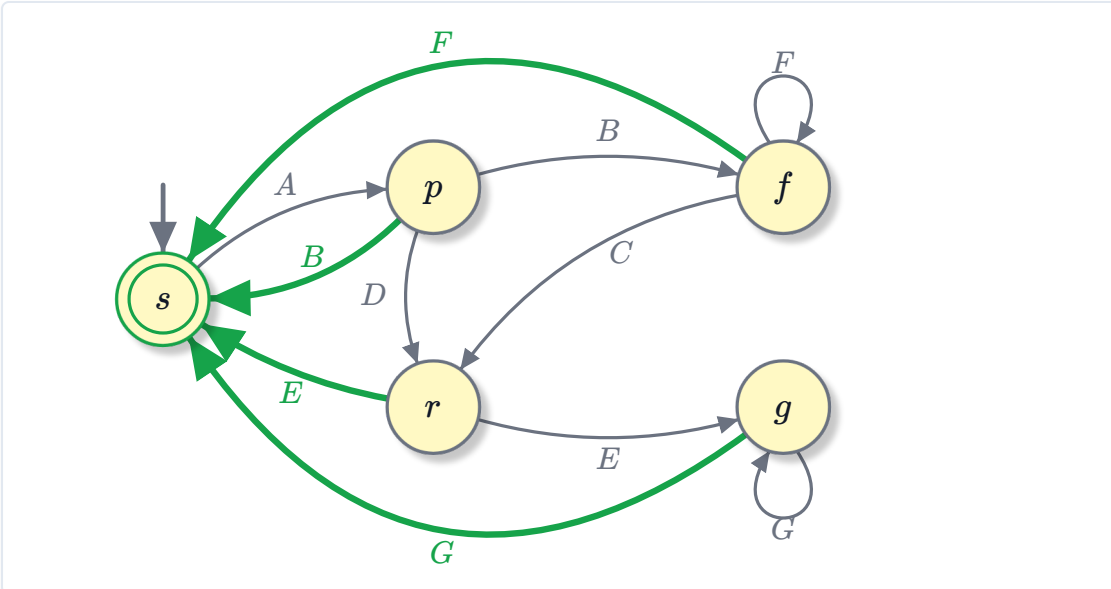
3. איחוד

אם יש אוטומטים ל־L_1 ול־L_2, שמים אותם זה לצד זה ומאחדים את מצבי ההתחלה.

$$E_1.F_1^\omega + \cdots + E_n.F_n^\omega$$

אופרטור ω עבור NFA כשאין מעברים למצבי ההתחלה

$$\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle, \qquad \epsilon \notin L(\mathcal{A}), \qquad \forall q \in Q_0,\ \sigma \in \Sigma\ (\delta(q, \sigma) = \emptyset)$$



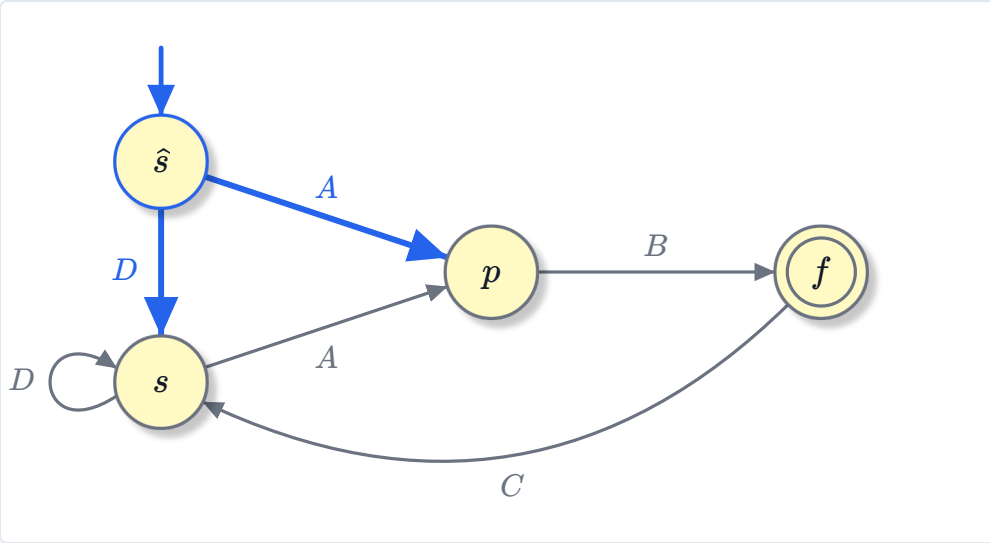
נבנה אוטומט Büchi $\mathcal{B}$ עבור L^ω. הכולל איפוס שיחזיר אותנו למצבי ההתחלה המקוריים.

$$\mathcal{B} = \langle Q, \Sigma, \delta', Q_0, Q_0 \rangle$$

1. מתחילים מהאוטומט המקורי: למשל AB מובילה מ־s אל מצב מקבל, וגם ADE.
2. לכל מעבר שנכנס למצב מקבל מוסיפים גם מעבר איפוס להתחלה: למשל $p \xrightarrow{B} s$, $f \xrightarrow{F} s$, $r \xrightarrow{E} s$, $g \xrightarrow{G} s$.
3. מצבי ההתחלה הם מצבי הקבלה של Büchi: בכל פעם שמסתיים בלוק מתוך L, חוזרים להתחלה. $F_{\mathcal{B}} = Q_0$.

אופרטור ω: המקרה הכללי

אם יש מעברים שנכנסים למצבי ההתחלה, קודם מחליפים את האוטומט באוטומט שקול מבחינת השפה הסופית, שבו אין מעברים אל מצבי ההתחלה.



1. מוסיפים עותקי התחלה

לכל $q_0 \in Q_0$ מוסיפים מצב חדש $\widehat{q_0}$. מצבי ההתחלה החדשים הם רק $\widehat{Q_0}$.

2. מעתיקים את היציאות

לכל מעבר $q_0 \xrightarrow{a} p$ מוסיפים $\widehat{q_0} \xrightarrow{a} p$. בפרט, הלולאה $s \xrightarrow{D} s$ נותנת את החץ $\hat{s} \xrightarrow{D} s$. המעברים המקוריים נשארים כמו שהם.

3. שומרים על קבלה

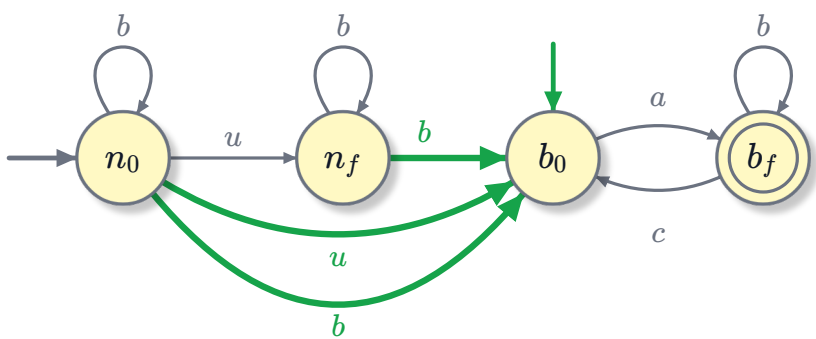
אם $q_0 \in F$, גם $\widehat{q_0}$ יהיה מקבל. כך מתקבל אוטומט $\mathcal{A}'$ עם $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$ וללא מעברים למצבי התחלה.

כעת מפעילים על $\mathcal{A}'$ את הבנייה מהשקף הקודם.

שרשור NFA ו־NBA

נתונים NFA $\mathcal{A}_1$ לשפה סופית L, ו־NBA $\mathcal{A}_2$ לשפה אינסופית M.
רוצים לבנות NBA $\mathcal{B}$ שמקבל את השפה $L \cdot M$.

$$L_\omega(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A}_1) \cdot L_\omega(\mathcal{A}_2) = L \cdot M$$



1. שמים זה לצד זה

המצבים והמעברים של $\mathcal{A}_1$ ושל $\mathcal{A}_2$ נשארים. מצבי ההתחלה הם מצבי ההתחלה של $\mathcal{A}_1$.

2. מחברים בסיום הרישא

לכל מעבר $q \xrightarrow{a} f$ שנכנס למצב מקבל f של $\mathcal{A}_1$, מוסיפים גם $q \xrightarrow{a} q_0$ לכל מצב התחלתי q_0 של $\mathcal{A}_2$.

3. מעדכנים מצבי התחלה של $\mathcal{A}_2$

אם יש מצב מקבל שהוא גם מצב התחלה של $\mathcal{A}_1$, משאירים את מצבי ההתחלה של $\mathcal{A}_2$. אחרת מוחקים אותם.

4. קובעים קבלה

מצבי הקבלה של $\mathcal{B}$ הם בדיוק מצבי הקבלה של $\mathcal{A}_2$. כך הרישא הסופית נצרכת פעם אחת, ומאותו רגע נדרשת ריצת Büchi מקבלת.

מתכון לאיחוד שפות

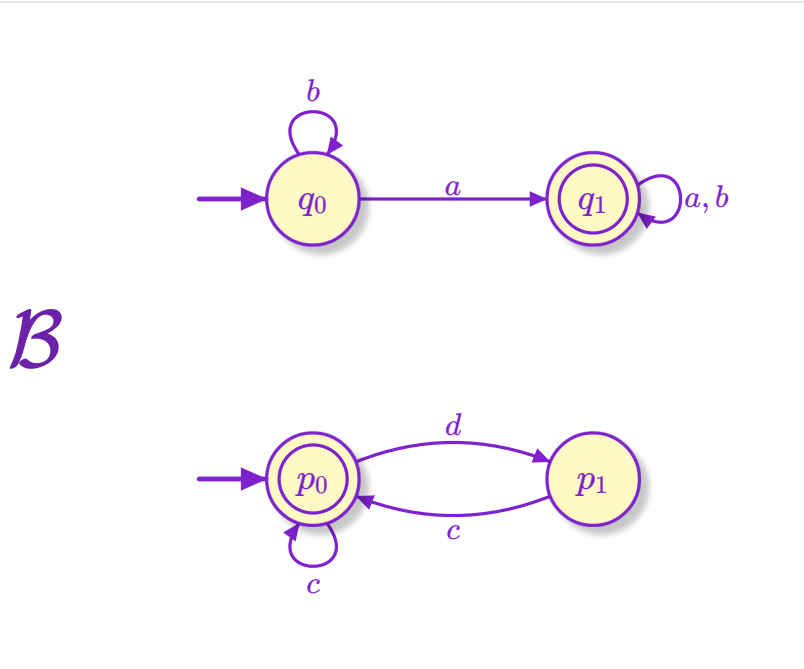
$$L_\omega(\mathcal{B}) = L_\omega(\mathcal{A}_1) \cup L_\omega(\mathcal{A}_2)$$

1. שמים זה לצד זה

פשוט מסתכלים על שני האוטומטים יחד, כולל חץ ההתחלה וסימון המצבים המקבלים.

2. לא צריך לעשות כלום :-)

מתייחסים לכל מה שרואים כאוטומט אחד: $\mathcal{B}$.



מה קיבלנו?

$$G = E_1.F_1^\omega + \cdots + E_n.F_n^\omega$$

1. בונים את החלק האינסופי

לכל F_i יש NFA רגיל מהקורס הקודם. מהבנייה של ω מקבלים NBA עבור F_i^ω.

2. מוסיפים את הרישא

לכל E_i יש NFA רגיל. בעזרת בניית השרשור מחברים אותו לפני האוטומט של F_i^ω, ומקבלים אוטומט עבור $E_iF_i^\omega$.

3. מאחדים את כל המחוברים

בעזרת בניית האיחוד שמים את כל האוטומטים זה לצד זה. האוטומט המתקבל מקבל בדיוק את סכום המחוברים, כלומר את G.

$$L_\omega(\mathcal{A}_G) = L_\omega(G)$$

לכן כל ביטוי ω-רגולרי מתורגם באופן קונסטרוקטיבי לאוטומט Büchi.

זה הכיוון $\omega\text{-regular expression} \Rightarrow NBA$.

סיכום

שפות ω-רגולריות

- מתארות עקבות אינסופיים.
- נכתבות כביטויים $E.F^\omega$ ואיחודים שלהם.
- כוללות שְׁמוּרוֹת ובטיחות רגולרית.

אוטומטי Büchi

- מקבלים ריצה אם היא מבקרת ב־F אינסוף פעמים.
- מבטאים תכונות חַיּוּת כמו $\text{Always Eventually } p$ ו־ $\text{Always } (req \Rightarrow \text{Eventually } resp)$.
- שקולים בכוחם לביטויי ω-רגולריים.