קשרים לוגיים, כמתים ומבני הוכחה

הרצאה בקורס: מבוא ללוגיקה ותורת הקבוצות

מרצה: פרופ. גרא וייס

למה אנחנו כאן?

- להבין ולהשתמש בשפה פורמלית (פסוקים, כמתים, נוסחאות)
- לרכוש מיומנויות הוכחה: ישירה, קונטרפוזיציה, בשלילה
- לבנות ולנתח אובייקטים מתמטיים: קבוצות, יחסים, פונקציות, סדרים
- לפתח אינטואיציה אלגוריתמית והוכחתית (אינדוקציה ואינדוקציה מבנית)
- להכין בסיס מוצק ללימודים מתקדמים במדמ״ח ומתמטיקה

מבנה ההערכה

- **מטלות ממוחשבות – 5%**
  - חובה ≥ 80% הצלחה כדי לקבל ניקוד
- **מטלות כתובות – 5%**
  - חמש מטלות קצרות
- **בוחן אמצע 1 – 5%**
- **בוחן אמצע 2 – 5%**
- **בחינה מסכמת – 80%**
  - חובה ≥ 56 כדי לעבור
  - אם < 56 → זהו הציון הסופי

לוח נושאים

1. לוגיקה פסוקית: טבלאות אמת, שקילות, גרירה
2. תורת הקבוצות: פעולות, חזקה, חלוקות
3. יחסים ומכפלות קרטזיות
4. יחסי סדר: חלקי/קווי, שרשראות/אנטי־שרשראות
5. יחסי שקילות ומרחבי מנה; "מוגדר היטב"
6. פונקציות: חד־חד־ערכיות, על, הרכבה, הפיכות, קדם־תמונה/תמונה
7. אינדוקציה, אינדוקציה שלמה, עקרון המינימום, שובך היונים
8. עוצמות: בנות־מנייה, קנטור–ברנשטיין, קנטור, $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})|$
9. היכרות עם לוגיקה מסדר ראשון (אם יישאר זמן)

מפת סמסטר

- הרצאות 1–2: קשרים לוגיים, כמתים, מבני הוכחה
- 3–5: פעולות בקבוצות, דה־מורגן, קבוצת חזקה
- 6–8: זוגות סדורים, יחסים ותכונות (רפלקסיבי/סימטרי/טרנזיטיבי)
- 9–10: יחסי סדר חלקיים וקוויים, מינימום/מקסימום, עוקב מיידי
- 11–12: יחסי שקילות ומרחבי מנה
- 13–16: פונקציות (חד״ע/על/הפוכה, הרכבה, "מוגדר היטב")
- 17–19: קבוצות סופיות ואינדוקציה (שובך היונים וכו׳)
- 20(+): **אינדוקציה מבנית** - הגדרות רקורסיביות על מבנים וסכמות הוכחה
- 21–24: עוצמות וקנטור–ברנשטיין
- 25–26: חזרה/העמקה

משאבים

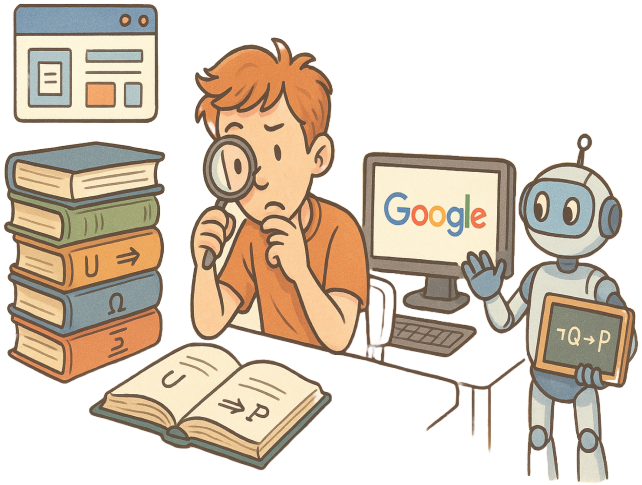
אנחנו מספקים משאבים רבים באתר הקורס ומצפים מהסטודנטים לקרוא אותם.

המשאבים המרכזיים:

- **ספרי הקורס** - המקור העיקרי לחומר התיאורטי
- **השקפים** - סיכום מובנה של החומר מההרצאות
- **סילבוס ומטלות** - באתר המודל של הקורס
- **דפי עזר ותרגולים** - יפורסמו לאורך הסמסטר

ציפיות נוספות:

- אתם מצופים גם לחפש חומרי לימוד בעצמכם
- להעמיק במה שלמדנו גם ממקורות חיצוניים
- לפתח הבנה עצמאית ויכולת חקר אישית



ציפיות ועקרונות עבודה

- להגיע לשעות הקבלה עם דפי העזר פתורים חלקית; לדון, לשאול, לטעות ולתקן
- להגיש מטלות בזמן; לשמור על יושרה אקדמית
- להשתמש בשפה מתמטית מדויקת, עם ניסוח והנמקות מלאות
- שעות הקבלה שלי: ימי רביעי בין 16:00-18:00, מיד לאחר השיעור
  - ניתן לקבוע פגישות נוספות לפי הצורך
  - ניתן ליצור קשר במייל: geraw@bgu.ac.il
  - המשרד שלי בחדר 123 בבניין 37
- מומלץ מאוד לבוא לכל השיעורים והתרגולים, לשאול שאלות ולבקש הבהרות

פתח דבר

- לוגיקה היא השפה וכללי ההוכחה של המתמטיקה; היא עוסקת בהסקת מסקנות מתמטיות.
- טענה מתמטית יכולה להיות אמת או שקר, אך חשובה הבהירות והחד־משמעות של הניסוח.
- מטרת הקורס: להכיר שיטות הוכחה ולהתנסות בהגשה מפורטת ומדוקדקת של הוכחות.
- לא תצטרכו להשתמש בכל הוכחה בפועל בהמשך, אך הכלים וההבנה שתרכשו יהיו שימושיים בקריירה ובלימודים מתקדמים.
  - למשל, מפתחי תוכנה צריכים "להוכיח" שהאלגוריתמים שלהם נכונים לכל קלט אפשרי. מאחר שמספר הקלטים הוא עצום (ולעיתים אינסופי), לא ניתן לבדוק את כולם, וחייבים להשתמש בטיעון לוגי משכנע.
- נחקור מה פירוש המילה "נכונות" ונגדיר מושגי יסוד (כגון 'מבנה') שישמשו להגדרת אמיתות.
- השפה המתמטית שונה משפת היומיום; הכרת הניסוח המדויק חשובה להבעה ולחשיבה מתמטית.

מבוא לשפה המתמטית ולוגיקה

- טענות מתמטיות בנויות מטענות פשוטות ומילות קישור - ה"לבנים" של השפה.
- מילות הקישור הן הקֶשָׁרים הלוגיים והכַּמָּתים:
  - קשרים: "אם ... אז ...", "וגם", "או", "לא"
  - כמתים: "לכל ...", "יש ..."
- למשל בטענה הבאה, הכמתים והקשרים מודגשים: "לכל זוג מספרים a, b, אם $a \neq b$ אז יש $q \in \mathbb{Q}$ כך ש $a < q < b$ או $b < q < a$".
- נבדיל בין מבנה ומשמעות:
  - זה משפט במבנה "לכל ... אם ... אז ... יש ... או ...".
  - הוא אומר אמירה מתמטית נכונה - ערך האמת שלו הוא True.
- יש סמלים מקובלים לסימון הקשרים והכמתים, ואנחנו נשתמש גם בסמלים אלו, ולא רק במילות הקישור והכימות.

בניית טענות מתמטיות

- קשרים - מרכיבים טענות חדשות מטענות קיימות:
  - $\alpha \vee \beta$ ⟵ *"α או β". נקרא קשר הדיסיונקציה (disjunction).*
  - $\alpha \wedge \beta$ ⟵ *"α וגם β". נקרא קשר הקונקונקציה (conjunction).*
  - $\alpha \rightarrow \beta$ ⟵ *"אם α אז β" / "α גורר β". נקרא קשר הגרירה (implication).*
  - $\alpha \leftrightarrow \beta$ ⟵ *"α אם ורק אם β". נקרא קשר האם־ורק־אם (biconditional / iff).*
  - $\neg\alpha$ ⟵ *"לא α". נקרא קשר ההשלילה (negation).*
- כמתים - כאשר הטענה תלויה במשתנה x:
  - $\forall x\,(\alpha)$ ← *"לכל x מתקיים α". נקרא הכמת הכולל (universal quantifier).*
  - $\exists x\,(\alpha)$ ← *"יש x כזה ש־α". נקרא הכמת הקיומי (existential quantifier).*
- השפה המתמטית גמישה: אותו רעיון ניתן לנסח בכמה אופנים.
  אל תשננו נוסח מילולי בלבד - הבינו את המשמעות ובחרו ניסוח שנוח לכם.

טבלאות אמת

טבלאות האמת מסכמות את התנהגות הקשרים; T = אמת, F = שקר.

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

הטבלה מגדירה איך אנחנו בונים טענות מורכבות מתוך טענות פשוטות.

נשתמש בטבלאות אמת כדי להוכיח שקילות בין טענות.

שקילות לוגית

- שתי טענות, α ו־β, ייקראו **שקולות לוגית** אם יש להן אותו ערך אמת בכל מצב.
- במילים אחרות, בכל שורה בטבלת האמת, ערכי האמת של α ו־β זהים.
- כאשר שתי טענות שקולות, נסמן זאת $\alpha \equiv \beta$.
- ההבדל בין $\alpha \leftrightarrow \beta$ לבין $\alpha \equiv \beta$ הוא:
  - $\alpha \leftrightarrow \beta$ הוא **פסוק** בשפה הפורמלית, שיכול להיות אמיתי או שקרי.
  - $\alpha \equiv \beta$ הוא **טענה שלנו** (במטא-שפה) על כך שהפסוק $\alpha \leftrightarrow \beta$ הוא טאוטולוגיה (אמיתי תמיד).
- נלמד שקילויות שימושיות רבות ונשתמש בהן כדי לפשט טענות מורכבות.
- נראה גם כיצד להוכיח שקילות בין טענות באמצעות טבלאות אמת.

הוכחת שקילויות באמצעות טבלאות אמת

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\alpha \to \beta$	$\alpha \vee \beta$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

הוכחת שקילויות באמצעות טבלאות אמת

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\alpha \to \beta$	$\alpha \vee \beta$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

הוכחת שקילויות באמצעות טבלאות אמת

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\alpha \to \beta$	$\alpha \vee \beta$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

שלילת טענות

שלילת טענות היא כלי בסיסי וחיוני. עם תרגול, המעבר מטענה לשלילתה הופך טבעי ומהיר:

- **שלילה כפולה:** $\alpha \equiv \neg(\neg\alpha)$ ⟶ שלילת השלילה שקולה לטענה המקורית.
- **שלילת קוניונקציה:** $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ ⟶ שימושי בהוכחות בשלילה.
- **שלילת דיסיונקציה:** $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ ⟶ כלל דה־מורגן.
- **שלילת גרירה:** $\neg(\alpha \to \beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$ ⟶ משמעות של "אם לא אז".
- **כלל ההיפוך (קונטרפוזיציה):** $\alpha \to \beta \equiv \neg\beta \to \neg\alpha$ ⟶ מאפשר להחליף הנחות ומסקנות.

סיכום ביניים: מה למדנו עד כאן?

- הכרנו את הקשרים הלוגיים: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$.
- ראינו כיצד כל קשר מוגדר באמצעות טבלת אמת.
- למדנו כיצד לבנות טענות מורכבות מקשרים אלו.
- ראינו איך ניתן להרכיב טבלת אמת לכל טענה מורכבת ולנתח את ערך האמת שלה.
- הבנו את מושג השקילות הלוגית וכיצד להוכיח שקילות בין טענות בעזרת טבלאות אמת.

- מושגים מרכזיים:
  - **טאוטולוגיה:** טענה שערך האמת שלה הוא True בכל מצב אפשרי (למשל $\alpha \vee \neg\alpha$).
  - **סתירה:** טענה שערך האמת שלה הוא False בכל מצב אפשרי (למשל $\alpha \wedge \neg\alpha$).
  - **שקילות לוגית:** שתי טענות הן שקולות אם יש להן אותו ערך אמת בכל מצב; כלומר, טבלת האמת שלהן זהה.

כמתים

- כמו הקשרים, גם הכמתים משמשים ליצירת טענות מורכבות. למשל:

> "לכל מספר טבעי n יש מספר ראשוני p כך ש־$n < p$."

- אפשר היה לנסח זאת ללא משתנים ("לכל מספר טבעי, יש מספר ראשוני שגדול ממנו"), אך שימוש במשתנים (n, p) מבהיר את מבנה הטענה.
  - **המלצה:** להתרגל להשתמש במשתנים גם בניסוח בעברית.
- אם α היא טענה התלויה במשתנה x, אז הטענות $\forall x\,(\alpha)$ ו־$\exists x\,(\alpha)$ נקראות **"טענות מכומתות"**:
  - $\forall x\,(\alpha)$: טוענת שהנוסחה α נכונה **לכל** x.
  - $\exists x\,(\alpha)$: טוענת ש**קיים** לפחות x אחד שעבורו α מתקיימת.

שלילת טענות המכילות כמתים

- **שלילת כמת כולל:** השלילה של "כל x מקיים את α" היא "קיים x שעבורו α שקרי".

$$\neg\forall x\,(\alpha) \equiv \exists x\,(\neg\alpha)$$

- **שלילת כמת קיומי:** השלילה של "קיים x המקיים את α" היא "לכל x, α אינה נכונה".

$$\neg\exists x\,(\alpha) \equiv \forall x\,(\neg\alpha)$$

- **חלחול שלילה:** ניתן להפעיל כללים אלו מספר פעמים. סימן השלילה "מחלחל פנימה" והופך כל כמת בדרכו:

$$\neg\forall x(\exists y(\forall z(\alpha))) \equiv \exists x(\forall y(\exists z(\neg\alpha)))$$

- **דוגמה:** ניסוח שלילת הטענה "לכל מספר, אם הוא גדול משתיים, אז הוא גדול מאחת" בלי המילה "לא"

1. **ניסוח פורמלי:** $\forall x(x > 2 \to x > 1)$
2. **הוספת שלילה:** $\neg\forall x(x > 2 \to x > 1)$
3. **הכנסת שלילה פנימה (הופכת כמת):** $\exists x\neg(x > 2 \to x > 1)$
4. **שלילת גרירה:** $\exists x(x > 2 \wedge \neg(x > 1))$
5. **פישוט:** $\exists x(x > 2 \wedge x \leq 1)$

- כלומר: $\neg\forall x(x > 2 \to x > 1) \equiv \exists x(x > 2 \wedge x \leq 1)$

כללי הוכחה

הוכחת גרירה ($\alpha \to \beta$):

- ישירה: מניחים את נכונות α ומוכיחים את β.
- קונטרפוזיציה: מוכיחים את הטענה השקולה $\neg\beta \to \neg\alpha$ (מניחים את שלילת β ומסיקים את שלילת α).
- שלילה: מניחים $\neg(\alpha \to \beta)$, כלומר $\alpha \wedge \neg\beta$, ומגיעים לסתירה.

הוכחת דיסיונקציה ($\alpha \vee \beta$):

- גרירה שקולה: מוכיחים $\neg\alpha \to \beta$ או $\neg\beta \to \alpha$.
- שלילה: מניחים $\neg(\alpha \vee \beta)$, כלומר $\neg\alpha \wedge \neg\beta$, ומגיעים לסתירה.

הוכחת קוניונקציה ($\alpha \wedge \beta$):

- מוכיחים כל טענה בנפרד: מוכיחים את α ומוכיחים את β.

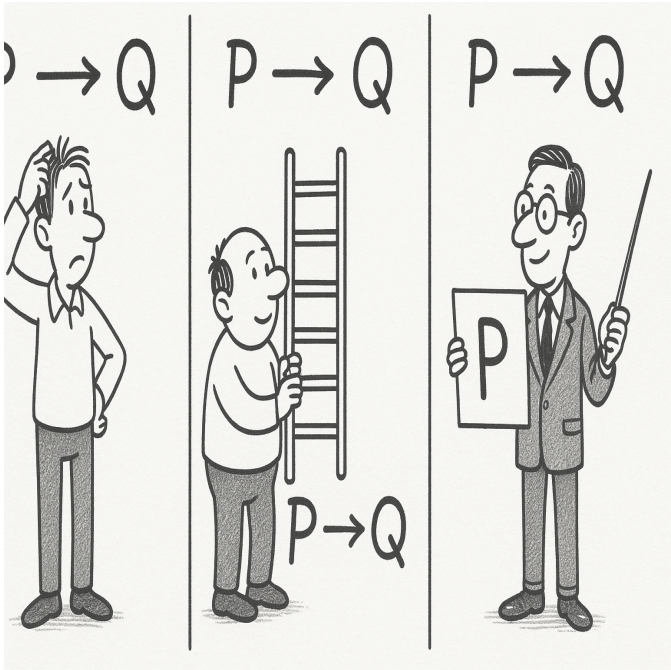
פיצול למקרים ($(\alpha \vee \beta) \to \gamma$):

- מוכיחים בנפרד $\alpha \to \gamma$ וגם $\beta \to \gamma$.
- שקילות: $(\alpha \vee \beta) \to \gamma \equiv (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)$.

הוכחה באמצעות טענת ביניים:

- כדי להוכיח $\alpha \to \beta$, ניתן למצוא טענת ביניים γ ולהוכיח $\alpha \to \gamma$ וגם β gamma \to\$.

דוגמה: שלוש דרכים להוכחת גרירה



נניח שעלינו להוכיח את הגרירה: **אם n מתחלק ב-4 אז n מתחלק ב-2.**

- **הוכחה ישירה:**
  - נניח n מתחלק ב-4. כלומר, קיים k כך ש-$n = 4k$.
  - אז $n = 2(2k)$ ולכן n מתחלק ב-2.
- **הוכחת קונטרפוזיציה:**
  - נוכיח: אם n לא מתחלק ב-2 אז n לא מתחלק ב-4.
    - אם n לא מתחלק ב-2, אז n אי-זוגי.
    - מספר אי-זוגי אינו מתחלק ב-4.
- **הוכחה בשלילה:**
  - נניח n מתחלק ב-4 אך לא מתחלק ב-2.
  - אם $n = 4k$ אז n זוגי, סתירה לכך ש-n לא מתחלק ב-2.

הוכחה בדרך השלילה

טכניקת הוכחה חשובה היא **הוכחה בדרך השלילה**. כדי להוכיח טענה α, אנו מניחים את שלילתה ($\neg\alpha$) ומוכיחים שהנחה זו מובילה לסתירה.

עוד דוגמה להוכחה בשלילה

משפט: אין מספר רציונלי r כך ש-$r^2 = 2$. כלומר, לכל מספר רציונלי r, $r^2 \neq 2$.

הוכחה:

- **הנחת השלילה:** נניח שיש מספר רציונלי r כך ש-$r^2 = 2$.
- נכתוב את r כשבר מצומצם: $r = \frac{p}{q}$, כאשר p, q הם מספרים שלמים ללא גורם משותף גדול מ-1 (ונניח $p, q \geq 1$).
- מהנחת השלילה: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, כלומר $\frac{p^2}{q^2} = 2$, ולכן $p^2 = 2q^2$.
- משוואה זו מראה כי p^2 הוא מספר זוגי.
- אם ריבוע של מספר הוא זוגי, גם המספר עצמו חייב להיות זוגי (כי ריבוע של אי-זוגי הוא אי-זוגי). לכן, p הוא מספר זוגי.
- נכתוב $p = 2k$ עבור מספר שלם k.
- נציב זאת במשוואה: $(2k)^2 = 2q^2$, כלומר $4k^2 = 2q^2$, אשר מפושט ל-$2k^2 = q^2$.
- משוואה זו מראה כי q^2 הוא מספר זוגי, ולכן גם q הוא מספר זוגי.
- קיבלנו שגם p וגם q הם מספרים זוגיים, כלומר שניהם מתחלקים ב-2.
- זוהי **סתירה** להנחה שהשבר $\frac{p}{q}$ הוא מצומצם.
- לכן, הנחת השלילה שגויה, והמשפט המקורי נכון.

דוגמה: שתי דרכים להוכחת דיסיונקציה

נבחן מצב פתיחה מסוים במשחק שחמט (פתיחה X), ונגדיר שתי טענות:

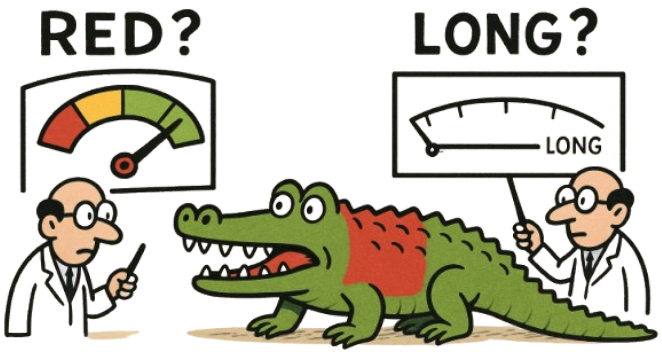
- A: יש שחקן שיכול לכפות ניצחון.
- B: תחת משחק מושלם התוצאה היא תיקו.

הטענה: $A \vee B$.

- **הוכחה 1 - גרירה שקולה ($\neg A \to B$):**
  נניח שאין שחקן שיכול לכפות ניצחון ($\neg A$). תחת הנחה זו, ננתח את עץ המהלכים מהמצב הנתון ונבחן את התגובות האפשריות. אם בשום ענף אין מהלך שמוביל לניצחון כפוי של מישהו (זו בדיוק ההנחה), הרי שכל ענף שממשיך תחת שחקנים הממשים משחק מושלם אינו מוביל לניצחון חד־משמעי, ולכן התוצאה בכל ענף תהיה תיקו. כלומר, מהנחת $\neg A$ עוקב B, ולכן $A \vee B$ מתקיים.

- **הוכחה 2 - שלילה (הוכחה על ידי סתירה):**
  לשם הניגוד, נניח שהטענה $A \vee B$ שגויה, כלומר $\neg A \wedge \neg B$ - אין ניצחון כפוי ואין תיקו כפוי. אך אם אין תיקו כפוי, זה אומר שיש לפחות שחקן אחד שיכול לכפות ניצחון (בניגוד ל־$\neg A$), או שיש מצב שבו אף אחד לא יכול לכפות תיקו, מה שמוביל לסתירה עם ההנחה שהמשחק מושלם.
  מכיוון שההנחה מובילה לסתירה, היא אבסורדית, ולכן $A \vee B$ חייבת להיות נכונה.

הוכחת קוניונקציה



- נרצה להראות: "התנין c ארוך וגם ירוק".
  נסמן:
  - $L(c)$:=: "התנין c ארוך".
  - $G(c)$:=: "התנין c ירוק".
  - הטענה: $L(c) \wedge G(c)$.
- שלב 1 - הוכחת $L(c)$: הצגת ראיה ישירה (למשל מדידה) לכך שהתנין ארוך.
- שלב 2 - הוכחת $G(c)$: הצגת ראיה עצמאית (למשל תצפית) לכך שהתנין ירוק.
- שלב 3 - חיבור: לפי כלל ההקדמה לקוניונקציה, אם הראינו $L(c)$ ו־$G(c)$, ניתן להסיק $L(c) \wedge G(c)$.

סיכום: הוכחת קוניונקציה מתבצעת על-ידי הוכחת כל רכיב בנפרד ולאחר מכן חיבורם.

הוכחת טענות מהצורה $\forall x(\alpha)$

להוכחת טענות מהצורה $\forall x(\alpha)$, עלינו להראות שלא משנה איזה ערך נציב במשתנה x, הטענה α תהיה אמיתית עבור ערך זה.

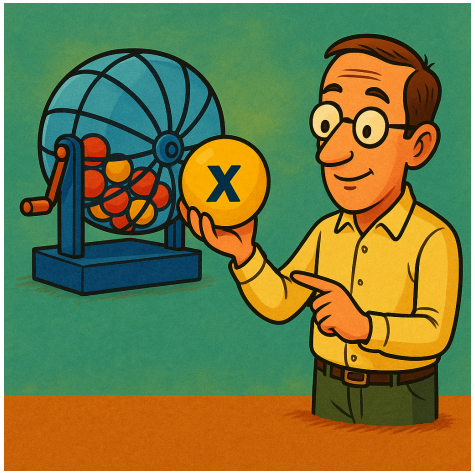
לשם כך מתחילים את ההוכחה עם משתנה x כללי, עליו לא מניחים הנחות מוקדמות, ומוכיחים את נכונותה של α.

דוגמה:

נוכיח: לכל מספר טבעי n, אם הוא מתחלק ב-4, אז הוא מתחלק גם ב-2.

הוכחה (בניקוד נקודות):

- יהי n מספר טבעי כלשהו (הצגת משתנה כללי).
- יש להראות: אם n מתחלק ב-4 אז n מתחלק ב-2.
- נניח כי n מתחלק ב-4, כלומר קיימת $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$n = 4k$.
- מכיוון ש-$n = 4k = 2(2k)$, ניתן לכתוב n כמכפלה של 2 במספר הטבעי $2k$.
- לכן n מתחלק ב-2 כנדרש.



הוכחה באמצעות חלוקה למקרים

- כאשר הטענה שאנו רוצים להוכיח תלויה בתנאים שניתן למנות, אפשר לחלק את ההוכחה למקרים נפרדים.
- דוגמה
  - נגדיר קשר לוגי חדש, הנקרא NAND (Not AND): $p \uparrow q := \neg(p \wedge q)$.
- משפט: כל טענה לוגית המורכבת משני משתנים בוליאניים p ו-q יכולה להיות מיוצגת באמצעות ביטוי המכיל רק את האופרטור NAND ($\uparrow$).
- הוכחה בשקף הבא: נבנה את כל 16 הטבלאות האפשריות בעזרת NAND בלבד.

כל 16 הטענות האפשריות ממומשות באמצעות NAND בלבד

- F1: $p \uparrow (p \uparrow p)$
- F2: $(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$
- F3: $q \uparrow (p \uparrow p)$
- F4: $(p \uparrow p) \uparrow (p \uparrow p)$
- F5: $p \uparrow (q \uparrow q)$
- F6: $(q \uparrow q) \uparrow (q \uparrow q)$
- F7: $(p \uparrow q) \uparrow \big((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)\big)$
- F8: $(p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$
- F9: $p \uparrow q$
- F10: $((p \uparrow q) \uparrow p) \uparrow ((p \uparrow q) \uparrow q)$
- F11: $q \uparrow q$
- F12: $(p \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow (p \uparrow (q \uparrow q))$
- F13: $p \uparrow p$
- F14: $((p \uparrow p) \uparrow q) \uparrow ((p \uparrow p) \uparrow q)$
- F15: $((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q))$
- F16: $((p \uparrow p) \uparrow p) \uparrow ((p \uparrow p) \uparrow p)$

p	q	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	F	F	T	F	T	T	F	F