קשרים לוגיים, כמתים ומבני הוכחה

הרצאה בקורס: מבוא ללוגיקה ותורת הקבוצות

מרצה: פרופ. גרא וייס

למה אנחנו כאן?

- להבין ולהשתמש בשפה פורמלית (פסוקים, כמתים, נוסחאות)
- לרכוש מיומנויות הוכחה: ישירה, קונטרפוזיציה, בשלילה
- לבנות ולנתח אובייקטים מתמטיים: קבוצות, יחסים, פונקציות, סדרים
- לפתח אינטואיציה אלגוריתמית והוכחתית (אינדוקציה ואינדוקציה מבנית)
- להכין בסיס מוצק ללימודים מתקדמים במדמ״ח ומתמטיקה

מבנה ההערכה

- **מטלות ממוחשבות – 5%**
  - חובה ≥ 80% הצלחה כדי לקבל ניקוד
- **מטלות כתובות – 5%**
  - חמש מטלות קצרות
- **בוחן אמצע 1 – 5%**
- **בוחן אמצע 2 – 5%**
- **בחינה מסכמת – 80%**
  - חובה ≥ 56 כדי לעבור
  - אם < 56 → זהו הציון הסופי

לוח נושאים

1. לוגיקה פסוקית: טבלאות אמת, שקילות, גרירה
2. תורת הקבוצות: פעולות, חזקה, חלוקות
3. יחסים ומכפלות קרטזיות
4. יחסי סדר: חלקי/קווי, שרשראות/אנטי־שרשראות
5. יחסי שקילות ומרחבי מנה; "מוגדר היטב"
6. פונקציות: חד־חד־ערכיות, על, הרכבה, הפיכות, קדם־תמונה/תמונה
7. אינדוקציה, אינדוקציה שלמה, עקרון המינימום, שובך היונים
8. עוצמות: בנות־מנייה, קנטור–ברנשטיין, קנטור, $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})|$
9. היכרות עם לוגיקה מסדר ראשון (אם יישאר זמן)

מפת סמסטר

- הרצאות 1–2: קשרים לוגיים, כמתים, מבני הוכחה
- 3–5: פעולות בקבוצות, דה־מורגן, קבוצת חזקה
- 6–8: זוגות סדורים, יחסים ותכונות (רפלקסיבי/סימטרי/טרנזיטיבי)
- 9–10: יחסי סדר חלקיים וקוויים, מינימום/מקסימום, עוקב מיידי
- 11–12: יחסי שקילות ומרחבי מנה
- 13–16: פונקציות (חד״ע/על/הפוכה, הרכבה, "מוגדר היטב")
- 17–19: קבוצות סופיות ואינדוקציה (שובך היונים וכו׳)
- 20(+): **אינדוקציה מבנית** — הגדרות רקורסיביות על מבנים וסכמות הוכחה
- 21–24: עוצמות וקנטור–ברנשטיין
- 25–26: חזרה/העמקה

משאבים

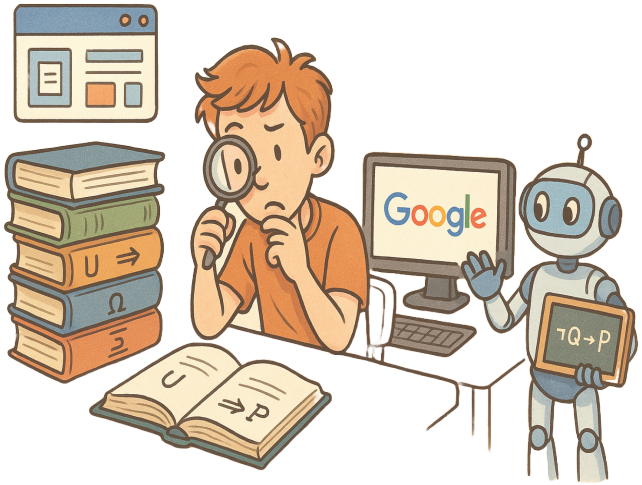
אנחנו מספקים משאבים רבים באתר הקורס ומצפים מהסטודנטים לקרוא אותם.

המשאבים המרכזיים:

- **ספרי הקורס** - המקור העיקרי לחומר התיאורטי
- **השקפים** - סיכום מובנה של החומר מההרצאות
- **סילבוס ומטלות** - באתר המודל של הקורס
- **דפי עזר ותרגולים** - יפורסמו לאורך הסמסטר

ציפיות נוספות:

- אתם מצופים גם לחפש חומרי לימוד בעצמכם
- להעמיק במה שלמדנו גם ממקורות חיצוניים
- לפתח הבנה עצמאית ויכולת חקר אישית



ציפיות ועקרונות עבודה

- להגיע לשעות הקבלה עם דפי העזר פתורים חלקית; לדון, לשאול, לטעות ולתקן
- להגיש מטלות בזמן; לשמור על יושרה אקדמית
- להשתמש בשפה מתמטית מדויקת, עם ניסוח והנמקות מלאות
- שעות הקבלה שלי: ימי רביעי בין 16:00-18:00, מיד לאחר השיעור
  - ניתן לקבוע פגישות נוספות לפי הצורך
  - ניתן ליצור קשר במייל: geraw@bgu.ac.il
  - המשרד שלי בחדר 123 בבניין 37
- מומלץ מאוד לבוא לכל השיעורים והתרגולים, לשאול שאלות ולבקש הבהרות

פתח דבר

- לוגיקה היא השפה וכללי ההוכחה של המתמטיקה; היא עוסקת בהסקת מסקנות מתמטיות.
- טענה מתמטית יכולה להיות אמת או שקר, אך חשובה הבהירות והחד־משמעות של הניסוח.
- מטרת הקורס: להכיר שיטות הוכחה ולהתנסות בהגשה מפורטת ומדוקדקת של הוכחות.
- לא תצטרכו להשתמש בכל הוכחה בפועל בהמשך, אך הכלים וההבנה שתרכשו יהיו שימושיים בקריירה ובלימודים מתקדמים.
  - למשל, מפתחי תוכנה צריכים "להוכיח" שהאלגוריתמים שלהם נכונים לכל קלט אפשרי. מאחר שמספר הקלטים הוא עצום (ולעיתים אינסופי), לא ניתן לבדוק את כולם, וחייבים להשתמש בטיעון לוגי משכנע.
- נחקור מה פירוש המילה "נכונות" ונגדיר מושגי יסוד (כגון 'מבנה') שישמשו להגדרת אמיתות.
- השפה המתמטית שונה משפת היומיום; הכרת הניסוח המדויק חשובה להבעה ולחשיבה מתמטית.

מבוא לשפה המתמטית ולוגיקה

- טענות מתמטיות בנויות מטענות פשוטות ומילות קישור - ה"לבנים" של השפה.
- מילות הקישור הן הקִשָׁרים הלוגיים והכַּמָּתים:
  - קשרים: "אם ... אז ...", "וגם", "או", "לא"
  - כמתים: "לכל ...", "יש ..."
- למשל בטענה הבאה, הכמתים והקשרים מודגשים: "לכל זוג מספרים a, b, אם $a \neq b$ אז יש $q \in \mathbb{Q}$ כך ש $a < q < b$ או $b < q < a$".
- נבדיל בין מבנה ומשמעות:
  - זה משפט במבנה "לכל ... אם ... אז ... יש ... או ...".
  - הוא אומר אמירה מתמטית נכונה - ערך האמת שלו הוא True.
- יש סמלים מקובלים לסימון הקשרים והכמתים, ואנחנו נשתמש גם בסמלים אלו, ולא רק במילות הקישור והכימות.

בניית טענות מתמטיות

- קשרים - מרכיבים טענות חדשות מטענות קיימות:
  - $\alpha \vee \beta$ ⟵ *"α או β". נקרא קשר הדיסיונקציה (disjunction).*
  - $\alpha \wedge \beta$ ⟵ *"α וגם β". נקרא קשר הקונקונקציה (conjunction).*
  - $\alpha \to \beta$ ⟵ *"אם α אז β" / "α גורר β". נקרא קשר הגרירה (implication).*
  - $\alpha \leftrightarrow \beta$ ⟵ *"α אם ורק אם β". נקרא קשר האם־ורק־אם (biconditional / iff).*
  - $\neg\alpha$ ⟵ *"לא α". נקרא קשר ההשלילה (negation).*
- כמתים - כאשר הטענה תלויה במשתנה x:
  - $\forall x\,(\alpha)$ ← *"לכל x מתקיים α". נקרא הכמת הכולל (universal quantifier).*
  - $\exists x\,(\alpha)$ ← *"יש x כזה ש־α". נקרא הכמת הקיומי (existential quantifier).*
- השפה המתמטית גמישה: אותו רעיון ניתן לנסח בכמה אופנים.
  אל תשננו נוסח מילולי בלבד - הבינו את המשמעות ובחרו ניסוח שנוח לכם.

טבלאות אמת

טבלאות האמת מסכמות את התנהגות הקשרים; T = אמת, F = שקר.

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

הטבלה מגדירה איך אנחנו בונים טענות מורכבות מתוך טענות פשוטות.

נשתמש בטבלאות אמת כדי להוכיח שקילות בין טענות.

שקילות לוגית

- שתי טענות, α ו־β, ייקראו **שקולות לוגית** אם יש להן אותו ערך אמת בכל מצב.
- במילים אחרות, בכל שורה בטבלת האמת, ערכי האמת של α ו־β זהים.
- כאשר שתי טענות שקולות, נסמן זאת $\alpha \equiv \beta$.
- ההבדל בין $\alpha \leftrightarrow \beta$ לבין $\alpha \equiv \beta$ הוא:
  - $\alpha \leftrightarrow \beta$ הוא **פסוק** בשפה הפורמלית, שיכול להיות אמיתי או שקרי.
  - $\alpha \equiv \beta$ הוא **טענה שלנו** (במטא-שפה) על כך שהפסוק $\alpha \leftrightarrow \beta$ הוא טאוטולוגיה (אמיתי תמיד).
- נלמד שקילויות שימושיות רבות ונשתמש בהן כדי לפשט טענות מורכבות.
- נראה גם כיצד להוכיח שקילות בין טענות באמצעות טבלאות אמת.

הוכחת שקילויות באמצעות טבלאות אמת

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\alpha \to \beta$	$\alpha \vee \beta$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

הוכחת שקילויות באמצעות טבלאות אמת

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\alpha \to \beta$	$\alpha \vee \beta$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

הוכחת שקילויות באמצעות טבלאות אמת

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\alpha \to \beta$	$\alpha \vee \beta$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

שלילת טענות

שלילת טענות היא כלי בסיסי וחיוני. עם תרגול, המעבר מטענה לשלילתה הופך טבעי ומהיר:

- **שלילה כפולה:** $\alpha \equiv \neg(\neg\alpha)$ ⟶ שלילת השלילה שקולה לטענה המקורית.
- **שלילת קוניונקציה:** $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ ⟶ שימושי בהוכחות בשלילה.
- **שלילת דיסיונקציה:** $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ ⟶ כלל דה־מורגן.
- **שלילת גרירה:** $\neg(\alpha \to \beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$ ⟶ משמעות של "אם לא אז".
- **כלל ההיפוך (קונטרפוזיציה):** $\alpha \to \beta \equiv \neg\beta \to \neg\alpha$ ⟶ מאפשר להחליף הנחות ומסקנות.

כמתים

- כמו הקשרים, גם הכמתים משמשים ליצירת טענות מורכבות. למשל:

> "לכל מספר טבעי n יש מספר ראשוני p כך ש־$n < p$."

- אפשר היה לנסח זאת ללא משתנים ("לכל מספר טבעי, יש מספר ראשוני שגדול ממנו"), אך שימוש במשתנים (n, p) מבהיר את מבנה הטענה.
  - **המלצה:** להתרגל להשתמש במשתנים גם בניסוח בעברית.
- אם α היא טענה התלויה במשתנה x, אז הטענות $\forall x\,(\alpha)$ ו־$\exists x\,(\alpha)$ נקראות **"טענות מכומתות"**:
  - $\forall x\,(\alpha)$: טוענת שהנוסחה α נכונה **לכל** x.
  - $\exists x\,(\alpha)$: טוענת ש**קיים** לפחות x אחד שעבורו α מתקיימת.

שלילת טענות המכילות כמתים

- **שלילת כמת כולל:** השלילה של "כל x מקיים את α" היא "קיים x שעבורו α שקרי".

$$\neg\forall x\,(\alpha) \equiv \exists x\,(\neg\alpha)$$

- **שלילת כמת קיומי:** השלילה של "קיים x המקיים את α" היא "לכל x, α אינה נכונה".

$$\neg\exists x\,(\alpha) \equiv \forall x\,(\neg\alpha)$$

- **חלחול שלילה:** ניתן להפעיל כללים אלו מספר פעמים. סימן השלילה "מחלחל פנימה" והופך כל כמת בדרכו:

$$\neg\forall x(\exists y(\forall z(\alpha))) \equiv \exists x(\forall y(\exists z(\neg\alpha)))$$

- **דוגמה:** שלילת הטענה "לכל מספר, אם הוא גדול משתיים, אז הוא גדול מאחת".

1. **ניסוח פורמלי:** $\forall x(x > 2 \to x > 1)$
2. **הוספת שלילה:** $\neg\forall x(x > 2 \to x > 1)$
3. **הכנסת שלילה פנימה (הופכת כמת):** $\exists x\neg(x > 2 \to x > 1)$
4. **שלילת גרירה:** $\exists x(x > 2 \wedge \neg(x > 1))$
5. **פישוט:** $\exists x(x > 2 \wedge x \leq 1)$

- כלומר: $\neg\forall x(x > 2 \to x > 1) \equiv \exists x(x > 2 \wedge x \leq 1)$

כללי הוכחה

הוכחת גרירה ($\alpha \to \beta$):

- ישירה: מניחים את נכונות α ומוכיחים את β.
- קונטרפוזיציה: מוכיחים את הטענה השקולה $\neg\beta \to \neg\alpha$ (מניחים את שלילת β ומסיקים את שלילת α).
- שלילה: מניחים $\neg(\alpha \to \beta)$, כלומר $\alpha \wedge \neg\beta$, ומגיעים לסתירה.

הוכחת דיסיונקציה ($\alpha \vee \beta$):

- גרירה שקולה: מוכיחים $\neg\alpha \to \beta$ או $\neg\beta \to \alpha$.
- שלילה: מניחים $\neg(\alpha \vee \beta)$, כלומר $\neg\alpha \wedge \neg\beta$, ומגיעים לסתירה.

הוכחת קוניונקציה ($\alpha \wedge \beta$):

- מוכיחים כל טענה בנפרד: מוכיחים את α ומוכיחים את β.

פיצול למקרים ($(\alpha \vee \beta) \to \gamma$):

- מוכיחים בנפרד $\alpha \to \gamma$ וגם $\beta \to \gamma$.
- שקילות: $(\alpha \vee \beta) \to \gamma \equiv (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)$.

הוכחה באמצעות טענת ביניים:

- כדי להוכיח $\alpha \to \beta$, ניתן למצוא טענת ביניים γ ולהוכיח $\alpha \to \gamma$ וגם β gamma \to\$.

הוכחת טענות מהצורה $\forall x(\alpha)$

- מציאת דרך טובה להוכחת טענה מהצורה $\forall x(\alpha)$, עשויה להיות משימה קשה.
  - אין "מתכון" יחיד, ולכן חשוב לרכוש ניסיון בטכניקות הוכחה שונות.
- הגישה הבסיסית:
  - כדי להוכיח $\forall x(\alpha)$, עלינו להראות שהטענה α אמיתית לכל ערך של x.
  - מתחילים את ההוכחה עם משתנה x כללי, ללא הנחות מוקדמות, ומוכיחים עבורו את נכונות α.
- דוגמה: הוכחת הטענה "לכל מספר טבעי n, אם הוא מתחלק ב-4, אז הוא מתחלק גם ב-2".
- הוכחה:
  1. ניקח n מספר טבעי כלשהו.
  2. נניח כי n מתחלק ב-4. כלומר, קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$n = 4k$.
  3. מכאן, $n = 2(2k)$, ולכן n מתחלק ב-2.
  4. מכיוון ש-n היה מספר טבעי כלשהו, הוכחנו כי הטענה נכונה לכל מספר טבעי n.

הוכחה בדרך השלילה

טכניקת הוכחה חשובה היא **הוכחה בדרך השלילה**. כדי להוכיח טענה α, אנו מניחים את שלילתה ($\neg\alpha$) ומוכיחים שהנחה זו מובילה לסתירה.

דוגמה להוכחה בדרך השלילה

משפט: אין מספר רציונלי r כך ש-$r^2 = 2$. כלומר, לכל מספר רציונלי r, $r^2 \neq 2$.

הוכחה:

- **הנחת השלילה:** נניח שיש מספר רציונלי r כך ש-$r^2 = 2$.
- נכתוב את r כשבר מצומצם: $r = \frac{p}{q}$, כאשר p, q הם מספרים שלמים ללא גורם משותף גדול מ-1 (ונניח $p, q \geq 1$).
- מהנחת השלילה: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, כלומר $\frac{p^2}{q^2} = 2$, ולכן $p^2 = 2q^2$.
- משוואה זו מראה כי p^2 הוא מספר זוגי.
- אם ריבוע של מספר הוא זוגי, גם המספר עצמו חייב להיות זוגי (כי ריבוע של אי-זוגי הוא אי-זוגי). לכן, p הוא מספר זוגי.
- נכתוב $p = 2k$ עבור מספר שלם k.
- נציב זאת במשוואה: $(2k)^2 = 2q^2$, כלומר $4k^2 = 2q^2$, אשר מפושט ל-$2k^2 = q^2$.
- משוואה זו מראה כי q^2 הוא מספר זוגי, ולכן גם q הוא מספר זוגי.
- קיבלנו שגם p וגם q הם מספרים זוגיים, כלומר שניהם מתחלקים ב-2.
- זוהי **סתירה** להנחה שהשבר $\frac{p}{q}$ הוא מצומצם.
- לכן, הנחת השלילה שגויה, והמשפט המקורי נכון.