

## Relazione di Laboratorio

Gruppo 3

Gerardo Selce, Maurizio Liguori, Emanuela Galluccio

08/04/2025

---

### MISURA DEL MOMENTO DI INERZIA E VERIFICA SPERIMENTALE DEL TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

---

## 1 Introduzione

Scopo dell'esperienza è la misurazione del momento di inerzia di un corpo rigido e la verifica sperimentale del teorema di Huygens-Steiner. Per effettuare la misura, abbiamo sfruttato le proprietà di un oscillatore torsionale, costituito da una molla elicoidale su cui venivano montati, in fasi differenti dell'esperienza, un bilanciere con masse e un disco forato. Una fase preliminare fondamentale ha riguardato la determinazione della costante di richiamo  $K$  della molla. A tale scopo, è stata applicata una forza tangenziale al bilanciere tramite un dinamometro, posizionando il punto di applicazione a una distanza nota dal centro di rotazione. Misurando la forza e conoscendo l'angolo di rotazione imposto (pari a  $180^\circ$ , ovvero  $\pi \text{ rad}$ ), è stato possibile calcolare il momento torcente applicato e quindi risalire alla costante elastica della molla:

$$M = Fr \quad (1)$$

$$K = \frac{M}{\alpha} \quad (2)$$

Questo valore è stato poi impiegato nelle successive analisi per la determinazione del momento di inerzia. L'esperienza si è quindi articolata in due fasi principali: la prima dedicata alla misura del momento di inerzia del bilanciere al variare della posizione delle masse; la seconda alla verifica sperimentale del teorema di Huygens-Steiner, attraverso l'analisi delle oscillazioni di un disco forato in diverse posizioni. L'oscillatore è stato posto in oscillazione, e il periodo è stato misurato con un cronometro. Grazie alla relazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}} \quad (3)$$

È stato possibile determinare il momento d'inerzia.

## 2 Richiami teorici

### 2.1 Momento d'Inerzia

Nello studio della dinamica rotazionale di un corpo rigido, il momento d'inerzia riveste un ruolo fondamentale, paragonabile a quello della massa nel secondo principio della dinamica: si tratta di una grandezza fisica che quantifica la resistenza di un corpo rigido alla variazione del proprio stato di rotazione rispetto a un asse. Per un sistema discreto composto da  $n$  punti materiali, il momento

d'inerzia è definito come la somma dei prodotti tra la massa di ciascun punto e il quadrato della sua distanza dall'asse stesso:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (4)$$

Per un sistema continuo invece, la definizione si estende in maniera naturale al seguente modo:

$$I = \int_V \rho(\vec{r}) r^2 dV \quad (5)$$

dove  $\rho(\vec{r})$  rappresenta la densità del materiale nel generico punto individuato dal vettore posizione  $\vec{r}$ , mentre  $r$  rappresenta la distanza di ciascun elemento infinitesimo di volume  $dV$  dall'asse di rotazione considerato.

## 2.2 Oscillatore torsionale

Un oscillatore torsionale è un sistema meccanico che oscilla ruotando attorno a un asse fisso, sotto l'azione di una forza elastica di richiamo. A differenza del classico pendolo lineare, l'oscillatore torsionale ruota avanti e indietro, in senso orario e antiorario, intorno a un asse. Nel nostro caso, l'oscillatore è composto da:

- Una molla elicoidale che genera un momento torcente quando viene ruotata;
- Un corpo rigido (come un bilanciante o un disco) fissato alla molla, che oscilla attorno all'asse verticale passante per il punto di sospensione.

Quando l'oscillatore viene ruotato di un certo angolo e poi lasciato libero, la molla esercita un momento torcente  $M$  proporzionale all'angolo di rotazione  $\theta$ :

$$M = -K\theta \quad (6)$$

dove:

- $K$  è la costante di richiamo torsionale della molla (in  $\frac{N \cdot m}{rad}$ );
- Il segno negativo indica che la forza è diretta verso la posizione di equilibrio.

La dinamica di questo moto è del tutto analoga a quella di un oscillatore armonico semplice (come una massa su una molla), e l'equazione del moto diventa:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\theta \quad (7)$$

dove  $I$  è il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione. Questa equazione ha una soluzione del tipo:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (8)$$

con pulsazione angolare  $\omega = \sqrt{\frac{I}{K}}$ , da cui si ricava la Legge (3).

### 2.3 Teorema di Huygens-Steiner

Come si evince dalla Legge (5), la conoscenza del momento di inerzia di un corpo rigido rispetto a un asse passa per il calcolo di un integrale. Nel caso in cui si presentino particolari condizioni di simmetria, il calcolo dell'integrale può di norma essere semplificato notevolmente. Quando tali condizioni vengono meno, il calcolo del momento di inerzia può diventare assai complicato. Il teorema di Huygens Steiner interviene in questo caso, permettendo di risolvere il problema. Esso stabilisce che *Il momento d'inerzia di un corpo di massa  $m$  rispetto ad un asse che si trova ad una distanza  $d$  dal centro di massa del corpo è dato da:*

$$I = I_c + md^2 \quad (9)$$

dove  $I_c$  indica il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.

### 2.4 Richiami Statistici

Il metodo dei minimi quadrati è una tecnica che permette di trovare una funzione, rappresentata da una curva di regressione, che si avvicini il più possibile ad un insieme di dati (tipicamente punti del piano). In particolare, la funzione trovata deve essere quella che minimizza la somma dei quadrati delle distanze tra i dati osservati e quelli della curva che rappresenta la funzione stessa. Siano  $b$  il coefficiente angolare e  $a$  l'intercetta della retta di regressione:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (10)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (11)$$

Con  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$  e  $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}$  mentre le incertezze:

$$\Delta b = 3\sigma_b \quad (12)$$

$$\Delta a = 3\sigma_a \quad (13)$$

Con

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - bx_i - a)^2}{N - 2}}$$

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{\Delta}}$$

$$\Delta = N \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

## 2.5 Richiami di teoria della misura

Sia  $g$  una grandezza fisica dipendente da  $N$  grandezze fisiche  $x_1, \dots, x_N$  tale che

$$g = f(x_1, \dots, x_N) \quad (14)$$

con

$$x_1 = x_{1_0} \pm \Delta x_1 \quad (15)$$

...

$$x_N = x_{N_0} \pm \Delta x_N \quad (16)$$

La formula di propagazione dell'errore massimo è:

$$\Delta g = \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \Delta x_i \quad (17)$$

con

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_N) \quad (18)$$

$$\vec{x}_0 = (x_{1_0}, \dots, x_{N_0}) \quad (19)$$

Sia  $g$  una grandezza fisica pari alla somma, o alla differenza, di  $N$  grandezze fisiche  $x_1, \dots, x_N$  tale che

$$g = x_1 \pm \dots \pm x_N \quad (20)$$

con

$$x_1 = x_{1_0} \pm \Delta x_1 \quad (21)$$

...

$$x_N = x_{N_0} \pm \Delta x_N \quad (22)$$

La formula di propagazione dell'errore massimo è:

$$\Delta g = \Delta x_1 + \dots + \Delta x_N \quad (23)$$

## 3 Apparato sperimentale

Per l'esecuzione dell'esperienza è stato utilizzato il seguente apparato sperimentale:

- Supporto con molla elicoidale e relativa base;
- Bilanciere (asta in acciaio) con elemento di montaggio e coppia di masse;
- Disco forato con elemento di montaggio;
- Cronometro digitale;
- Dinamometro analogico;
- Bilancia digitale;
- Riga millimetrata.

<b>Strumenti di misura</b>	<b>Risoluzione</b>
Cronometro digitale	0.01 <i>s</i>
Dinamometro analogico	0.05 <i>N</i>
Bilancia digitale	0.01 <i>g</i>
Riga millimetrata	1 <i>mm</i>

Tabella 1: Risoluzione degli strumenti di misura utilizzati

## 4 Descrizione e analisi dei dati sperimentali

## 5 Conclusioni