

## Relazione di Laboratorio

Gruppo 3

Gerardo Selce, Maurizio Liguori, Emanuela Galluccio

08/04/2025

---

### MISURA DEL MOMENTO DI INERZIA E VERIFICA SPERIMENTALE DEL TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

---

## 1 Introduzione

Scopo dell'esperienza è la misura del momento d'inerzia di un corpo rigido e la verifica sperimentale del teorema di Huygens-Steiner, utilizzando un sistema oscillante di tipo torsionale. L'apparato sperimentale è costituito da una molla elicoidale montata su un supporto, alla quale vengono fissati in momenti diversi un bilanciere (asta con coppia di masse come in figura x) e un disco forato (figura y). Il sistema così composto si comporta come un oscillatore armonico torsionale, il cui periodo  $T$  è descritto dalla relazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}} \quad (1)$$

dove  $I$  è il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione e  $K$  è la costante di richiamo della molla. L'esperienza è stata articolata in 3 fasi:

- **Fase preliminare:** consiste nella determinazione della costante elastica  $K$ . Applicando una forza  $\vec{F}$  normale al bilanciere e parallela al suolo, a una distanza  $r$  nota dall'asse di rotazione, viene ruotato il bilanciere di un angolo  $\alpha = \pi$ . il modulo del momento torcente diventa semplicemente:

$$M = Fr \quad (2)$$

Combinando l'equazione (2) con la seguente:

$$K = \frac{M}{\alpha} \quad (3)$$

si riesce a ricavare una stima per  $K$ .

- **Parte I:** misura del momento d'inerzia del sistema bilanciere-masse al variare della distanza delle masse dal centro.
- **Parte II:** verifica della legge di Huygens-Steiner, attraverso l'analisi del periodo di oscillazione di un disco forato, montato con assi di rotazione posti a distanze diverse dal centro di massa.

## 2 Richiami teorici

### 2.1 Momento d'Inerzia

Nello studio della dinamica rotazionale di un corpo rigido, il momento d'inerzia riveste un ruolo fondamentale, paragonabile a quello della massa nel secondo principio della dinamica: si tratta di una grandezza fisica che quantifica la resistenza di un corpo rigido alla variazione del proprio stato di rotazione rispetto a un asse. Per un sistema discreto composto da  $n$  punti materiali, il momento d'inerzia è definito come la somma dei prodotti tra la massa di ciascun punto e il quadrato della sua distanza dall'asse stesso:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (4)$$

Per un sistema continuo invece, la definizione si estende in maniera naturale al seguente modo:

$$I = \int_V \rho(\vec{r}) r^2 dV \quad (5)$$

dove  $\rho(\vec{r})$  rappresenta la densità del materiale nel generico punto individuato dal vettore posizione  $\vec{r}$ , mentre  $r$  rappresenta la distanza di ciascun elemento infinitesimo di volume  $dV$  dall'asse di rotazione considerato.

### 2.2 Oscillatore torsionale

Un oscillatore torsionale è un sistema meccanico che oscilla ruotando attorno a un asse fisso, sotto l'azione di una forza elastica di richiamo. A differenza del classico pendolo lineare, l'oscillatore torsionale ruota avanti e indietro, in senso orario e antiorario, intorno a un asse. Nel nostro caso, l'oscillatore è composto da:

- Una molla elicoidale che genera un momento torcente quando viene ruotata;
- Un corpo rigido (come un bilanciere o un disco) fissato alla molla, che oscilla attorno all'asse verticale passante per il punto di sospensione.

Quando l'oscillatore viene ruotato di un certo angolo e poi lasciato libero, la molla esercita un momento torcente  $M$  proporzionale all'angolo di rotazione  $\theta$ :

$$M = -K\theta \quad (6)$$

dove:

- $K$  è la costante di richiamo torsionale della molla (in  $\frac{N \cdot m}{rad}$ );
- Il segno negativo indica che la forza è diretta verso la posizione di equilibrio.

La dinamica di questo moto è del tutto analoga a quella di un oscillatore armonico semplice (come una massa su una molla), e l'equazione del moto diventa:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\theta \quad (7)$$

dove  $I$  è il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione. Questa equazione ha una soluzione del tipo:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (8)$$

con pulsazione angolare  $\omega = \sqrt{\frac{I}{K}}$ , da cui si ricava la Legge (3).

### 2.3 Teorema di Huygens-Steiner

Come si evince dalla Legge (5), la conoscenza del momento di inerzia di un corpo rigido rispetto a un asse passa per il calcolo di un integrale. Nel caso in cui si presentino particolari condizioni di simmetria, il calcolo dell'integrale può di norma essere semplificato notevolmente. Quando tali condizioni vengono meno, il calcolo del momento di inerzia può diventare assai complicato. Il teorema di Huygens Steiner interviene in questo caso, permettendo di risolvere il problema. Esso stabilisce che *Il momento d'inerzia di un corpo di massa  $m$  rispetto ad un asse che si trova ad una distanza  $d$  dal centro di massa del corpo è dato da:*

$$I = I_c + md^2 \quad (9)$$

dove  $I_c$  indica il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.

### 2.4 Richiami Statistici

Il metodo dei minimi quadrati è una tecnica che permette di trovare una funzione, rappresentata da una curva di regressione, che si avvicini il più possibile ad un insieme di dati (tipicamente punti del piano). In particolare, la funzione trovata deve essere quella che minimizza la somma dei quadrati delle distanze tra i dati osservati e quelli della curva che rappresenta la funzione stessa. Siano  $b$  il coefficiente angolare e  $a$  l'intercetta della retta di regressione:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (10)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (11)$$

Con  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$  e  $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}$  mentre le incertezze:

$$\Delta b = 3\sigma_b \quad (12)$$

$$\Delta a = 3\sigma_a \quad (13)$$

Con

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - bx_i - a)^2}{N - 2}}$$

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{\Delta}}$$

$$\Delta = N \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

## 2.5 Richiami di teoria della misura

Sia  $g$  una grandezza fisica dipendente da  $N$  grandezze fisiche  $x_1, \dots, x_N$  tale che

$$g = f(x_1, \dots, x_N) \quad (14)$$

con

$$x_1 = x_{1_0} \pm \Delta x_1 \quad (15)$$

...

$$x_N = x_{N_0} \pm \Delta x_N \quad (16)$$

La formula di propagazione dell'errore massimo è:

$$\Delta g = \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \Delta x_i \quad (17)$$

con

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_N) \quad (18)$$

$$\vec{x}_0 = (x_{1_0}, \dots, x_{N_0}) \quad (19)$$

Sia  $g$  una grandezza fisica pari alla somma, o alla differenza, di  $N$  grandezze fisiche  $x_1, \dots, x_N$  tale che

$$g = x_1 \pm \dots \pm x_N \quad (20)$$

con

$$x_1 = x_{1_0} \pm \Delta x_1 \quad (21)$$

...

$$x_N = x_{N_0} \pm \Delta x_N \quad (22)$$

La formula di propagazione dell'errore massimo è:

$$\Delta g = \Delta x_1 + \dots + \Delta x_N \quad (23)$$

## 3 Apparato sperimentale

Per l'esecuzione dell'esperienza è stato utilizzato il seguente apparato sperimentale:

- Supporto con molla elicoidale e relativa base;
- Bilanciere (asta in acciaio) con elemento di montaggio e coppia di masse;
- Disco forato con elemento di montaggio;
- Cronometro digitale;
- Dinamometro analogico;
- Bilancia digitale;
- Riga millimetrata.

Strumenti di misura	Risoluzione
Cronometro digitale	0.01 <i>s</i>
Dinamometro analogico	0.05 <i>N</i>
Bilancia digitale	0.01 <i>g</i>
Riga millimetrata	1 <i>mm</i>

Tabella 1: Risoluzione degli strumenti di misura utilizzati

## 4 Descrizione e analisi dei dati sperimentali

### 4.1 Operazioni Preliminari

Per prima cosa si procede al montaggio dell'apparato sperimentale, formato da un bilanciere collegato ad un supporto con molla, come in figura (x). Successivamente, si procede a ruotare il bilanciere di  $180^\circ$  rispetto alla posizione di equilibrio. Disponendo un dinamometro ortogonalmente al bilanciere e parallelamente al suolo, è stato possibile misurare la forza di richiamo della molla in corrispondenza di diversi valori della distanza  $r$  del punto di applicazione del dinamometro dal centro del bilanciere. La disposizione del dinamometro ci consente di calcolare il modulo del momento della forza di richiamo semplicemente come

$$M = F \cdot r \quad (24)$$

I dati relativi alle distanze e alle forze di richiamo misurate sono contenuti nelle seguenti tabelle:

	<b>r</b> [ <i>m</i> ]
$r_1$	$0.3005 \pm 0.0005$
$r_2$	$0.2505 \pm 0.0005$
$r_3$	$0.2005 \pm 0.0005$
$r_4$	$0.1505 \pm 0.0005$
$r_5$	$0.1005 \pm 0.0005$
$r_6$	$0.0505 \pm 0.0005$

Tabella 2: Distanze  $r$  del punto di applicazione del dinamometro dal centro del bilanciere.

<b>F</b> [ <i>N</i> ]
$0.175 \pm 0.025$
$0.225 \pm 0.025$
$0.275 \pm 0.025$
$0.375 \pm 0.025$
$0.550 \pm 0.025$
$1.10 \pm 0.03$

Tabella 3: Forze di richiamo  $F$  al variare della distanza  $r$ .

In corrispondenza dei valori di  $r$  ed  $F$  misurati, si ottengono i valori del momento  $M$ :

$\mathbf{M} [N * m]$
$0.0525 \pm 0.0004$
$0.0563 \pm 0.0004$
$0.0550 \pm 0.0003$
$0.0563 \pm 0.0003$
$0.0550 \pm 0.0003$
$0.0550 \pm 0.0001$

Tabella 4: Momento  $M$  della forza di richiamo al variare della distanza  $r$ .

I valori di  $M$  sono stati calcolati utilizzando la formula (24), arrotondandoli al numero minimo di cifre significative tra quelle dei fattori  $r$  ed  $F$ , pari a tre. Le incertezze su  $M$  sono state ottenute al seguente modo:

- Si calcola l'incertezza relativa con la seguente formula di propagazione:

$$\frac{\delta M}{|M|} = \frac{\delta F}{|F|} + \frac{\delta r}{|r|} \quad (25)$$

- Si calcola l'incertezza assoluta:

$$\delta M = \frac{\delta M}{|M|} \cdot |M| \quad (26)$$

Possiamo infine calcolare la migliore stima di  $M$  come media dei valori riportati in tabella (4) e l'incertezza associata come deviazione standard della media:

- Stima migliore per  $M$ :

$$M_{best} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (27)$$

dove  $N$  è il numero di misurazioni disponibili,  $x_i$  i rispettivi valori. Nel nostro caso,

$$M_{best} = 0.055 \text{ Nm} \quad (28)$$

- Deviazione standard della media:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N} \quad (29)$$

ove  $\bar{x} = M_{best}$  e  $\sigma_x$  indica la deviazione standard dei valori di  $M$ . Nel nostro caso:

$$\sigma_{\bar{x}} = 0.001 \text{ Nm} \quad (30)$$

A questo punto, è possibile sfruttare l'equazione (6) per stimare il modulo di  $K$ :

$$K = \frac{M}{\pi} \quad (31)$$

otteniamo così la seguente conclusione:

- $K = 0.018 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$ .
- $\delta K = \frac{1}{\pi} \cdot \delta M = 0.001 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$

## 4.2 Parte I: Misura del momento d'inerzia di un corpo rigido

Scopo della presente sezione è la misurazione del momento d'inerzia di una coppia di masse approssimativamente uguali, disposte simmetricamente rispetto all'asse perpendicolare al bilanciere e passante per il suo centro. Dopo aver posizionato le masse sul bilanciere in posizione simmetrica, si procede a determinare e registrare la posizione di equilibrio del sistema. Ruotando il bilanciere di un angolo pari a  $\frac{\pi}{2}$  rispetto alla posizione di equilibrio, il sistema viene lasciato in oscillazione libera. Si procede così alla misurazione del tempo corrispondente a 5 oscillazioni a partire dal primo passaggio dalla posizione di equilibrio. La misura è stata ripetuta 4 volte alternando le rotazioni in senso orario e antiorario, in maniera tale da poter ricavare una stima accettabile del periodo di oscillazione. La procedura è stata ripetuta 6 volte, riducendo ad ogni passaggio la distanza delle due masse dal centro secondo quanto riportato in tabella (2).

Distanze	$T_1$ [s]	$T_2$ [s]	$T_3$ [s]	$T_4$ [s]	$\delta T$ [s]
$r_1$	47.92	47.75	47.72	47.72	0.01
$r_2$	40.40	40.44	40.50	40.44	0.01
$r_3$	33.77	33.65	33.58	33.60	0.01
$r_4$	26.87	26.87	26.77	26.70	0.01
$r_5$	20.73	20.77	20.77	20.75	0.01
$r_6$	16.00	16.14	16.16	16.05	0.01

Tabella 5: Tabella dei periodi in funzione delle distanze dal centro del bilanciere.

Poichè per ogni distanza abbiamo a disposizione solo poche misure del periodo  $T$  che si ripetono, possiamo stimare questo valore al seguente modo:

- Stima del periodo:

$$T_{best} = \frac{T_{max} + T_{min}}{2} \quad (32)$$

dove  $T_{max}$  è il periodo più alto e  $T_{min}$  quello più basso rispetto ad una distanza fissata.

- Stima dell'incertezza con il metodo della semidisersione:

$$\delta T = \frac{T_{max} - T_{min}}{2} \quad (33)$$

La tabella che segue riporta i valori numerici delle stime ottenute tenendo conto delle (32) e (33):

$I$ [ $kg \cdot m^2$ ]
$47.82 \pm 0.10$
$40.45 \pm 0.05$
$33.68 \pm 0.10$
$26.79 \pm 0.09$
$20.75 \pm 0.02$
$16.08 \pm 0.08$

Tabella 6: Periodi di oscillazione.

A questo punto, mediante semplici calcoli, è possibile ricavare una stima del momento d'inerzia dalla formula (3):

$$I = \frac{K \cdot T^2}{4\pi^2} \quad (34)$$

Osserviamo che i valori ricavati per  $I$  misurano il momento d'inerzia del sistema bilanciante-masse e pertanto contengono un termine addizionale rappresentato dal momento d'inerzia del bilanciante vuoto  $I_a = 0.01 \pm 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , che va sottratto dai valori ottenuti dalla (34), per ottenere il momento d'inerzia delle sole masse. La propagazione dell'incertezza su  $I$  è stata valutata con il metodo dei differenziali:

$$\delta I = \frac{T^2 \delta K + 2KT \delta T}{4\pi^2} + \delta I_a \quad (35)$$

La tabella che segue riporta i valori numerici delle stime ottenute tenendo conto delle (34) e (35):

$I \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$
$1.0 \pm 0.2$
$0.72 \pm 0.01$
$0.50 \pm 0.01$
$0.31 \pm 0.01$
$0.19 \pm 0.01$
$0.11 \pm 0.01$

Tabella 7: Momento d'inerzia al variare della distanza dal centro del bilanciante.

Poichè  $K$  e  $T$  sono riportati rispettivamente con 2 e 4 cifre significative, il momento di inerzia  $I$  è stato riportato con 2 cifre significative.

Di seguito viene riportato il grafico di  $I$  in funzione di  $d^2$ .

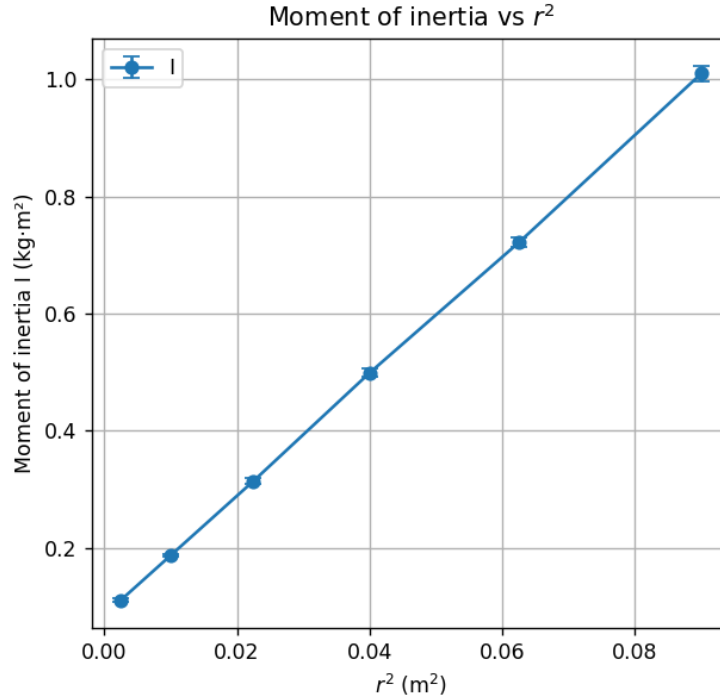


Figura 1: Grafico del momento d'inerzia in funzione del quadrato della distanza



### 4.3 Parte II: Verifica Del Teorema di Huygens-Steiner

Scopo della presente sezione è verificare che il momento d'inerzia di un disco rispetto ad un asse parallelo ad un asse baricentrico e a distanza  $d$  da quest'ultimo dipende linearmente da  $d^2$ , coerentemente con il teorema di Huygens-Steiner il cui enunciato è riportato di seguito:

[Huygens-Steiner] Il momento d'inerzia di un corpo rigido rispetto a un asse qualsiasi parallelo a un asse passante per il baricentro è dato dalla somma del momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico  $G$  e del prodotto tra la massa e il quadrato della distanza tra i due assi:

$$I = I_G + md^2$$

Un disco forato è stato montato al supporto con molla, utilizzando preliminarmente il foro centrale. Ruotando il disco di un angolo  $\frac{\pi}{2}$  rispetto alla posizione di equilibrio, si procede con la misurazione del periodo corrispondente a 5 oscillazioni, contate azionando il cronometro in corrispondenza del primo passaggio dalla posizione di equilibrio fissata precedentemente. La misura è stata ripetuta per 4 volte, ruotando alternativamente il disco in senso orario e antiorario. La procedura appena descritta è stata ripetuta variando la posizione del disco utilizzando i fori praticati sulla sua superficie. Le distanze utilizzate sono riportate nella seguente tabella:

<b>d [m]</b>
0.0000 ± 0.0005
0.0205 ± 0.0005
0.0405 ± 0.0005
0.0605 ± 0.0005
0.0805 ± 0.0005
0.101 ± 0.001

Tabella 8: Distanze dell'asse rispetto all'asse baricentrico ortogonale al disco.

Il momento d'inerzia del disco rispetto agli assi corrispondenti alle distanze riportate in tabella è stato calcolando seguendo la stessa procedura della prima parte, ottenendo i seguenti risultati:

<b>I [kg · m<sup>2</sup>]</b>
0.291 ± 0.006
0.316 ± 0.005
0.319 ± 0.004
0.352 ± 0.005
0.472 ± 0.017
0.535 ± 0.009

Tabella 9: Momenti d'inerzia

Di seguito, riportiamo i valori del momento d'inerzia  $I$  in funzione del quadrato della distanza  $d^2$  fra il foro centrale e quello utilizzato per il fissaggio del disco.

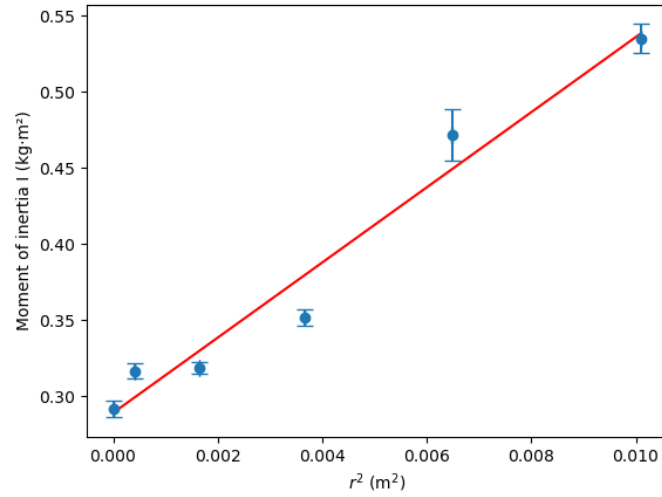


Figura 2: Grafico del momento d'inerzia in funzione del quadrato della distanza

## 5 Conclusioni

### 5.1 Parte I

Avendo disposto due masse approssimativamente uguali  $m_1 = m_2 = m$  in posizione simmetrica rispetto all'asse di rotazione, l'equazione (4) diventa semplicemente:

$$I = 2mr^2 \quad (36)$$

dove  $r$  rappresenta la semidistanza tra le due masse (o equivalentemente, la distanza di ciascuna massa dall'asse di rotazione). Ci attendiamo pertanto una dipendenza lineare del momento d'inerzia  $I$  in funzione del quadrato della distanza  $d^2$ . Come mostra il grafico in Figura 1, le previsioni sono confermate dai dati sperimentali in maniera più che soddisfacente.

### 5.2 Parte II

Dall'equazione (36), ci attendiamo una dipendenza lineare di  $I$  in funzione di  $r^2$ . Il grafico in Figura 2 conferma approssimativamente le previsioni, anche se in maniera meno accurata rispetto a quanto fatto nella parte I. La causa principale risiede nella difficoltà incontrata nel realizzare le stesse condizioni ad ogni misurazione del periodo di oscillazione del disco, per la mancanza di riferimenti stabili rispetto a cui riportare il disco ad ogni misurazione.