Laboratorio di Meccanica e Termodinamica

Relazione di Laboratorio

Gruppo 3
Gerardo Selce, Maurizio Liguori, Emanuela Galluccio

15/04/2025

MISURA DELLA COSTANTE DI TEMPO DI UN TERMOMETRO

---

1 Introduzione

Scopo dell'esperienza è determinare la **costante di tempo** τ di un termometro, un parametro che descrive la velocità con cui il termometro risponde a variazioni termiche. Per farlo, il termometro è stato trasferito da un bagno a temperatura T_1 ad un altro a temperatura T_2. All'equilibrio, il termometro raggiungerà la temperatura T_2, tuttavia il passaggio tra le due temperature non avviene istantaneamente ma attraverso una fase transiente in cui la temperatura si porta gradualmente a T_2. La legge che descrive questo processo è la seguente:

$$T(t) = T_2 + (T_1 - T_2)e^{-t/\tau} \tag{1}$$

dove:

- $T(t)$ è la temperatura letta dal termometro all'istante t,
- T_1 è la temperatura iniziale del termometro,
- T_2 è la temperatura finale dell'ambiente in cui viene immerso,
- τ è la costante di tempo del termometro.

La **costante di tempo** τ rappresenta l'intervallo di tempo necessario affinché la differenza tra la temperatura del termometro e la temperatura finale si riduca di un fattore e (circa 2,718). Più il valore di τ è piccolo, più rapidamente il termometro raggiunge l'equilibrio termico. Utilizzando due becher ed un fornellino in dotazione, sono stati preparati due bagni, uno "freddo" con acqua a temperatura ambiente, che indichiamo con T_1 l'altro "caldo" con acqua in ebollizione, la cui temperatura indichiamo con T_2. La temperatura dell'acqua del bagno "freddo" è stata misurata con un termometro digitale. Inizialmente, il termometro è stato immerso nel bagno caldo e lasciato fino al raggiungimento della temperatura di equilibrio T_2. Successivamente, è stato immerso nel bagno freddo per essere raffreddato, portandosi ad una temperatura intermedia di equilibrio T':

$$T_1 > T' > T_2 \tag{2}$$

La procedura è stata poi ripetuta per 3 volte. Ciascun ciclo di misurazioni è stato ripetuto per un totale di 8 volte.

2 Richiami teorici

Per stimare τ a partire dalla (1) si può procedere con il metodo di **linearizzazione**. Applicando il logaritmo naturale alla legge infatti, si ottiene:

$$\ln(T(t) - T_2) = \ln[(T_1 - T_2)e^{-t/\tau}] = \tag{3}$$

$$= \ln(T_1 - T_2) + \ln e^{-t/\tau} = \tag{4}$$

$$= \ln(T_1 - T_2) - \frac{t}{\tau} \tag{5}$$

Questa relazione suggerisce che, rappresentando $\ln(T(t) - T_2)$ in funzione di t, i dati dovrebbero disporsi lungo una retta con:

- **coefficiente angolare** pari a $-\frac{1}{\tau}$,
- **intercetta** pari a $\ln(T_1 - T_2)$.

In questo modo, tramite un semplice fit lineare, è possibile stimare il valore di τ.

2.1 Richiami Statistici

Il metodo dei minimi quadrati è una tecnica che permette di trovare una funzione, rappresentata da una curva di regressione, che si avvicini il più possibile ad un insieme di dati (tipicamente punti del piano). In particolare, la funzione trovata deve essere quella che minimizza la somma dei quadrati delle distanze tra i dati osservati e quelli della curva che rappresenta la funzione stessa. Siano b il coefficiente angolare e a l'intercetta della retta di regressione:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N}[(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})]}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \tag{6}$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x} \tag{7}$$

Con $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ e $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$ mentre le incertezze:

$$\Delta b = 3\sigma_b \tag{8}$$

$$\Delta a = 3\sigma_a \tag{9}$$

Con

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - bx_i - a)^2}{N - 2}}$$

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{\Delta}}$$

$$\Delta = N \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2$$

2.2 Richiami di teoria della misura

Sia g una grandezza fisica dipendente da N grandezze fisiche $x_1, ..., x_N$ tale che

$$g = f(x_1, ..., x_N) \tag{10}$$

con

$$x_1 = x_{1_0} \pm \Delta x_1 \tag{11}$$

$$...$$

$$x_N = x_{N_0} \pm \Delta x_N \tag{12}$$

La formula di propagazione dell'errore massimo è:

$$\Delta g = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}=\vec{x_0}} \Delta x_i \tag{13}$$

con

$$\vec{x} = (x_1, ..., x_N) \tag{14}$$

$$\vec{x_0} = (x_{1_0}, ..., x_{N_0}) \tag{15}$$

Sia g una grandezza fisica pari alla somma, o alla differenza, di N grandezze fisiche $x_1, ..., x_N$ tale che

$$g = x_1 \pm ... \pm x_N \tag{16}$$

con

$$x_1 = x_{1_0} \pm \Delta x_N \tag{17}$$

$$...$$

$$x_N = x_{N_0} \pm \Delta x_N \tag{18}$$

La formula di propagazione dell'errore massimo è:

$$\Delta g = \Delta x_1 + ... + \Delta x_N \tag{19}$$

3 Apparato sperimentale

Per l'esecuzione del'esperienza è stato utilizzato il seguente apparato sperimentale:

- Termometro di vetro
- Termometro digitale
- Cronometro digitale

- 2 Becher
- Acqua
- Fornellino

Strumenti di misura	**Risoluzione**
Cronometro digitale	0.01 s
Termometro digitale	0.1 °C

Tabella 1: Risoluzione degli strumenti di misura utilizzati

Figura 1: Fornellino elettrico.

Figura 2: Termometro digitale.

Figura 3: Becher.

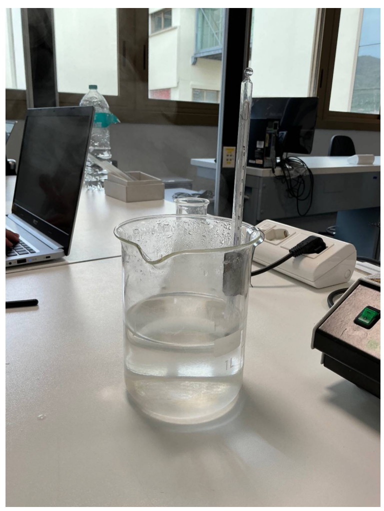

Figura 4: Becher.

4 Descrizione e analisi dei dati sperimentali

Per confrontare i dati sperimentali con la (5), sono state effettuate misure della temperatura ambiente, indicata con T_2, e della temperatura intermedia, indicata con $T(t)$, ad istanti di tempo distinti e riportati in tabella:

t $[s]$
5 ± 0.05
8 ± 0.05
11 ± 0.05
14 ± 0.05
17 ± 0.05
20 ± 0.05
23 ± 0.05
26 ± 0.05

Tabella 2: Istanti di tempo utilizzati per misurare il valore della temperatura intermedia $T(t)$.

La procedura è stata ripetuta 4 volte.

s	T_1	T_2	T_1	T_2	T_1	T_2	T_1	T_2
5.00	22.7	55	23.8	56	24.4	57	24.8	60
8.00	22.3	46	24.1	44	24.6	48	24.9	49
11.00	23.1	38	24.3	40	24.7	41	25.2	40
14.00	22.9	34	24.1	35	24.7	35	25.2	35
17.00	22.5	31	24.3	33	24.7	33	25.1	34
20.00	22.9	29	24.3	30	24.8	31	25.1	32
23.00	22.8	28	24.3	29	24.8	29.5	25.2	30
26.00	23.1	27	24.4	28	24.8	29	25.2	29.5

Tabella 3: Tabella aggregata di tutte le misure dirette. L'errore assoluto sui secondi è di $\pm 0.01s$, mentre sui tempi T_1 e T_2 è di $\pm 0.1\,°\mathrm{C}$.

Per ciascuna prova i dati sperimentali sono stati riportati, previa linearizzazione della (3), su un grafico che contiene anche una retta dei minimi quadrati:

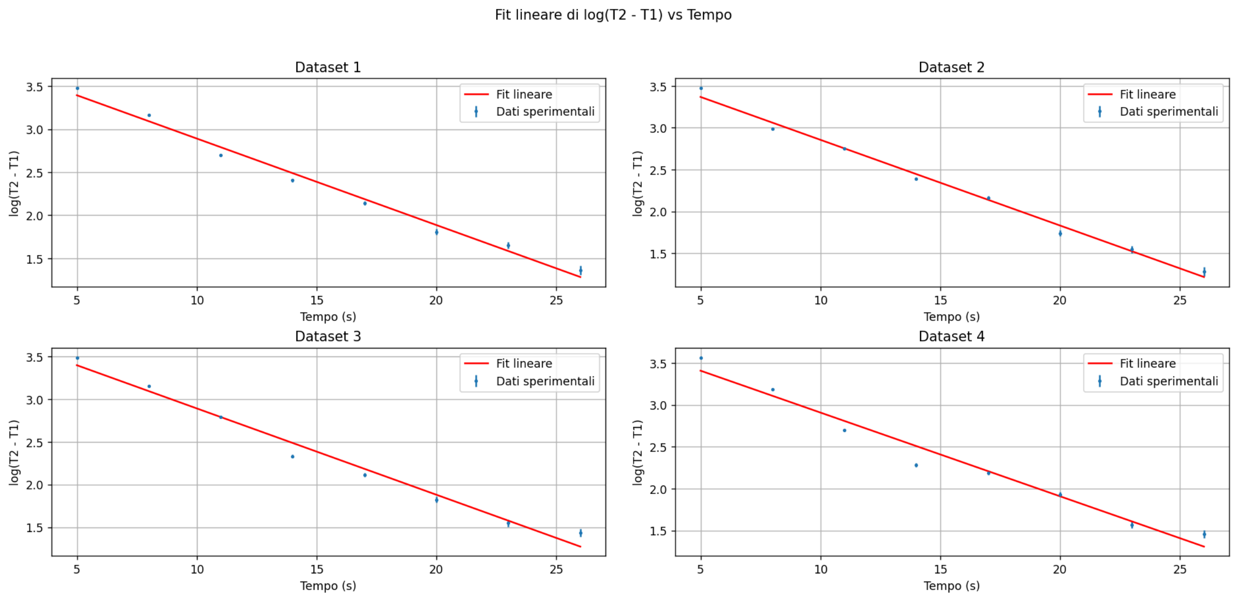

Figura 5:

Tra i vari fit, il migliore appare essere quello relativo al Dataset 2, da cui ricaviamo un coefficiente angolare pari a:

$$b = -0.10 \pm 0.01s \tag{20}$$

Ricordando che la costante di tempo τ e il coefficiente angolare b sono legati dalla seguente relazione:

$$b = -\frac{1}{\tau} \tag{21}$$

si ottiene il seguente valore per $\tau = 10.00s$. L'incertezza su τ è fornita dalla legge:

$$\begin{aligned} \delta\tau &= \left|\frac{d}{b}(-\frac{1}{b})\right| \quad \delta b && (22) \\ &= \left|\frac{1}{b^2}\right| \quad \delta b = && (23) \\ &= 1.00s && (24) \end{aligned}$$

5 Conclusioni

Utilizzando strumenti sufficientemente accurati per i nostri scopi, è stato possibile raccogliere dati di buona qualità. Come è possibile notare dal grafico infatti, essi si dispongono con buona approssimazione intorno alla retta dei minimi quadrati, confermando così le previsioni fatte nella sezione "Richiami Teorici".