

Relazione di Laboratorio

Gruppo 3

Gerardo Selce, Maurizio Liguori, Emanuela Galluccio, Francesco Messano

17/12/2024

DESCRIZIONE DELLA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DI UNA VARIABILE ALEATORIA DISCRETA

1 Introduzione

L'esperimento consiste nel lancio di due dadi, rispettivamente a quattro e venti facce. Scopo dell'esperimento è lo studio della variabile casuale X definita come somma dei punteggi ottenuti nel lancio. L'esperimento si articola in due fasi. In una prima fase viene presentato un modello teorico di riferimento per la variabile X , di cui si determinano la distribuzione di probabilità (rappresentata graficamente con un istogramma) e gli indici di posizione e dispersione principali (rispettivamente valore atteso μ e varianza σ). Infine, sono calcolate le probabilità relative agli intervalli

$$[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma] \text{ con } k = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Nella seconda fase, si prosegue con il lancio effettivo dei dadi per simulare la variabile X . L'esperimento viene ripetuto per un totale di 241 volte. Dopo aver rappresentato i dati su un istogramma normalizzato, sono state calcolate le seguenti quantità:

- Media aritmetica \bar{x}
- Scarto quadratico medio ξ_q
- Frequenza relativa negli intervalli $[\bar{x} - k\xi_q, \bar{x} + k\xi_q]$ con $k = 1, 2, 3$

2 Richiami teorici

2.1 Definizione di probabilità di Laplace

La probabilità di un evento è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli all'evento ed il numero dei casi possibili, nelle ipotesi in cui questi ultimi siano tutti "ugualmente possibili"

$$P = \frac{n_f}{n_p} \quad (2)$$

La probabilità è valutata a priori.

2.2 Indici di Posizione: Valore Atteso

Sia Y una variabile aleatoria discreta (che per i nostri scopi possiamo assumere finita). Si definisce **valore atteso** di Y la quantità:

$$E[Y] = \sum_{i=1}^n y_i p_i = \mu \quad (3)$$

dove i valori y_i rappresentano le possibili realizzazioni di Y mentre p_i le rispettive probabilità. Rappresenta il valore "medio" attorno al quale i dati tendono a concentrarsi.

2.3 Indici di Dispersione: Varianza e Deviazione Standard

Si definisce **varianza** di Y la quantità:

$$E[(Y - E[Y])^2] = \sum_{i=1}^n p_i (y_i - \mu)^2 = \sigma^2 \quad (4)$$

Si definisce invece **deviazione standard** di Y la quantità:

$$\sigma = \sqrt{E[(Y - E[Y])^2]} \quad (5)$$

Questi indici rappresentano la dispersione dei valori rispetto alla media.

2.4 Modello teorico analizzato

Siano assegnati due dadi, rispettivamente di quattro e venti facce. Sia inoltre X la variabile aleatoria che descrive la somma dei punteggi ottenuti ad ogni lancio. Allora X è una variabile discreta che assume i seguenti valori:

$$\{x_i\}_{i=1, \dots, n} = \{2 \leq m \leq 24\} \quad (6)$$

In condizioni ideali e in assenza di ulteriori informazioni, è ragionevole assumere che le coppie del tipo (x_i, y_j) , con $i \in \{1, \dots, 4\}$ e $j \in \{1, \dots, 20\}$, siano equiprobabili. Pertanto:

$$P(x_i, y_j) = \frac{1}{4 \cdot 20}, \quad \forall i, j \quad (7)$$

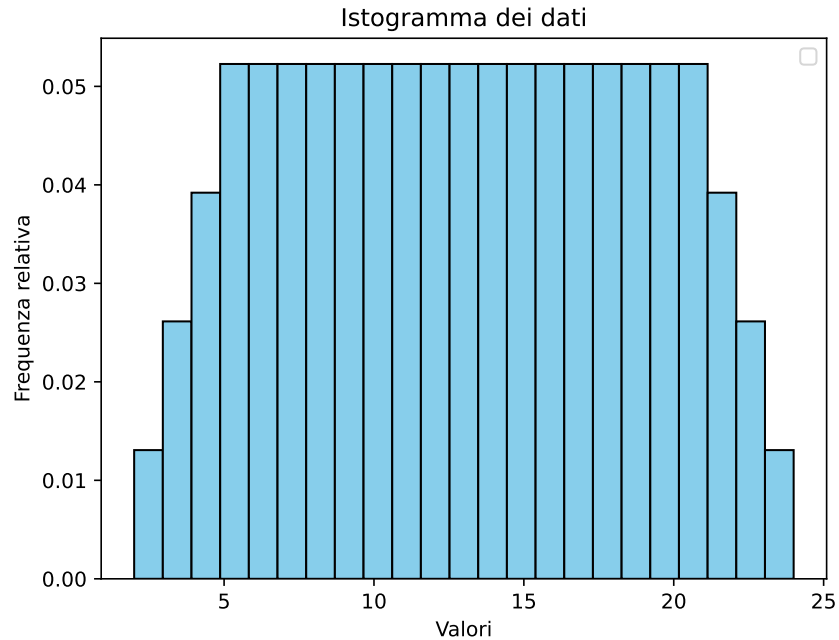


Figura 1: L'istogramma normalizzato in figura rappresenta la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X .

Valore atteso: $\mu = 13$

Varianza: $\sigma^2 = 34.5$

Deviazione Standard: $\sigma = 5.87$

2.5 Considerazioni Aggiuntive

Avendo a disposizione i valori di media μ e variazione standard σ possiamo calcolare le probabilità che la variabile X assuma valori nei seguenti intervalli:

$$[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma] \text{ con } k = 1, 2, 3$$

Otteniamo così i seguenti risultati:

- $k = 1 : P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) = 0.55$
- $k = 2 : P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) = 1$
- $k = 3 : P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) = 1$

3 Apparato sperimentale

Per svolgere questa esperienza è stato utilizzato il seguente apparato sperimentale:

- Dado a 4 facce
- Dado a 20 facce



Figura 2: Dadi utilizzati per l'esperimento

4 Descrizione e analisi dei dati sperimentali

Sono stati effettuati un totale di 241 lanci di dadi.

Valore	Frequenza Assoluta
11	17
8	17
6	17
7	16
12	16
5	16
14	15
17	15
19	14
10	12
18	11
4	10
13	9
15	9
9	8
16	8
3	7
20	7
21	6
22	6
2	2
23	2
24	1

Tabella 1: Tabella delle frequenze assolute della somma dei punteggi ottenuti nel lancio dei due dadi.

I dati riportati in Tabella 1 sono stati raccolti in un istogramma normalizzato.

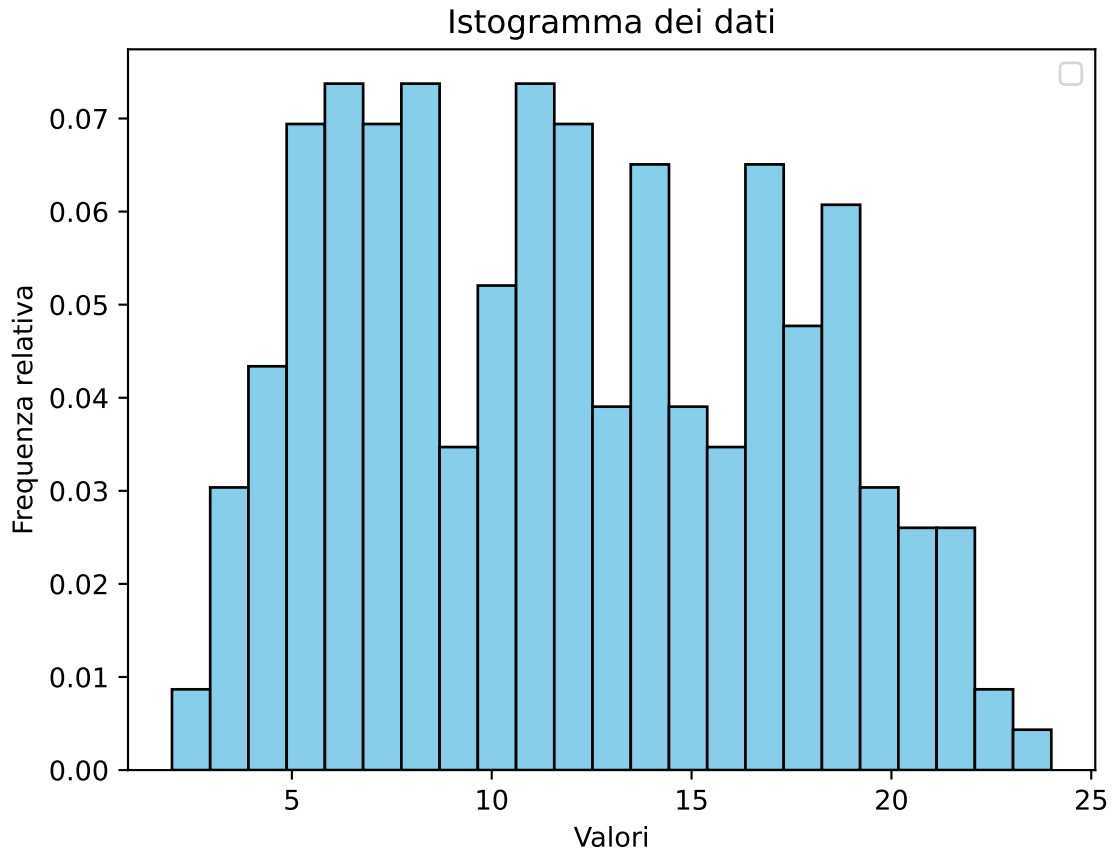


Figura 3: L'istogramma comprende un totale di $N = 241$ campioni in $k = 23$ bins nell'intervallo $[2, 24]$

Dall'istogramma in Figura 3 sono stati calcolati gli indici di dispersione e posizione:

- **Media aritmetica:** $\bar{x} = 11.80$
- **Scarto quadratico medio:** $\xi_q = 5.49$

Si può calcolare la probabilità che la variabile aleatoria X rientri nell'intervallo

$$[\bar{x} - k\xi_q, \bar{x} + k\xi_q] \text{ con } k = 1, 2, 3$$

Otteniamo i seguenti risultati:

- $k = 1 : P(X \in [\bar{x} - k\xi_q, \bar{x} + k\xi_q]) = 0.53$
- $k = 2 : P(X \in [\bar{x} - k\xi_q, \bar{x} + k\xi_q]) = 0.99$
- $k = 3 : P(X \in [\bar{x} - k\xi_q, \bar{x} + k\xi_q]) = 1$

5 Conclusioni

A causa del numero limitato di lanci effettuati l'istogramma del modello teorico non coincide perfettamente con quello dell'esperimento. Tuttavia i due istogrammi, e gli indici calcolati, sono particolarmente simili e ciò verifica la correttezza del modello teorico analizzato.