Laboratorio di Meccanica e Termodinamica

Relazione di Laboratorio

GRUPPO 3
Gerardo Selce, Maurizio Liguori, Emanuela Galluccio, Francesco Messano

19/11/2024

DETERMINAZIONE DELLA COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA

---

1 Introduzione

É assegnata una molla con costante elastica k ignota. Scopo dell'esperienza è la determinazione della costante k attraverso due approcci, denominati rispettivamente **metodo statico** e **dinamico**. Nel primo caso (metodo statico) la molla, sospesa verticalmente su un supporto, è stata sottoposta a carichi crescenti applicando masse in modo progressivo e lineare. Per non compromettere le caratteristiche strutturali della molla, sono state utilizzate masse tali da causare allungamenti inferiori al doppio della sua lunghezza a riposo. Per ciascun valore della massa applicata, è stata registrata la corrispondente variazione di lunghezza rispetto alla condizione iniziale di riposo. Graficando tali lunghezze in funzione delle masse si ricava una prima stima del valore di k, sfruttando la legge:

$$Mg = k\Delta x \tag{1}$$

Nel secondo caso (metodo dinamico) è stato misurato il periodo di oscillazione della molla per ognuna delle masse utilizzate nella prima parte. Infine, ricorrendo alla seguente legge:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \tag{2}$$

è stata ricavata una seconda stima per k, successivamente confrontata con la prima stima per verificare la coerenza dei risultati ottenuti.

2 Richiami teorici

Il funzionamento del sistema massa-molla si basa sulla Legge di Hooke, la quale stabilisce che la deformazione elastica di un materiale è direttamente proporzionale alla forza applicata, a condizione che tale deformazione non superi un valore critico, detto **limite elastico** della molla. La legge di Hooke si può esprimere al seguente modo:

$$\vec{F'} = k\Delta\vec{x} \tag{3}$$

Dove:

- $\vec{F}$: Forza applicata $[N]$.
- k: Costante elastica della molla $[\frac{N}{m}]$.
- $\Delta\vec{x}$: Allungamento (o compressione) della molla rispetto alla posizione di equilibrio $[m]$.

Pertanto, per il terzo principio della dinamica, la forza esercitata dalla molla su una massa m applicata sarà pari ad $\vec{F} = -\vec{F}'$. La legge è valida solo entro il limite elastico della molla, in cui il sistema è in grado di ritornare alla sua forma originale, una volta rimossa la forza. Superato tale limite, si entra nel campo plastico o nei casi più estremi, si arriva alla rottura del materiale. Per un sistema massa-molla disposto verticalmente come nel nostro caso, in condizioni ideali (trascurando la massa della molla e la forza di attrito esercitata dall'aria) le uniche forze in gioco sono la forza peso $\vec{F}_g$ e la forza elastica $\vec{F}$ esercitata dalla molla. Entrambe le forze agiscono lungo la verticale. Fissiamo perciò un asse verticale orientato concordemente alla forza peso, che è sufficiente per descrivere l'evoluzione dinamica del sistema, poichè le forze agenti hanno componenti nulle su qualsiasi altro asse perpendicolare a quello scelto.

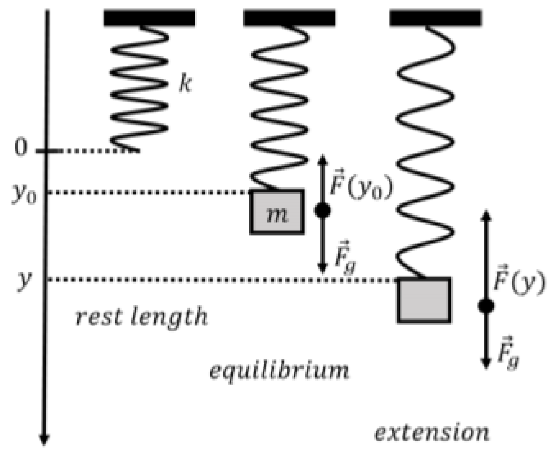

Figura 1: sistema massa-molla verticale.

Fissiamo l'origine degli assi nel punto corrispondente alla posizione dell'estremo libero della molla a riposo. Quando a questo viene attaccata la massa m, la molla subisce una deformazione che porta m in una nuova posizione di equilibrio y_0.

2.1 Metodo Statico

Dalla seconda legge di Newton, proiettata sull'asse di riferimento, si ottiene, per la nuova posizione di equilibrio:

$$F_g - F(y_0) = 0 \tag{4}$$
$$mg - ky_0 = 0 \tag{5}$$
$$mg = ky_0 \tag{6}$$

Otteniamo così la Legge (1).

2.2 Metodo Dinamico

Applicando ora la legge di Newton in una generica posizione y si ricava l'equazione del moto:

$$mg - ky = ma \tag{7}$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - ky \tag{8}$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = ky_0 - ky \tag{9}$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k(y - y_0) \tag{10}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}(y_0 - y) \tag{11}$$

Considerando una nuova variabile $y' = y - y_0$ si ottiene l'equazione dell'oscillatore armonico semplice:

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{k}{m}y' \tag{12}$$

Consideriamo una massa m attaccata a una molla ideale con costante elastica k, l'equazione del moto si basa sulla seconda legge di Newton:

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky \tag{13}$$

Dalla (4) otteniamo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0 \tag{14}$$

La Legge (5) rappresenta un'equazione differenziale lineare omogenea, il cui integrale generale è:

$$y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{15}$$

Dove:

- A e B sono costanti determinate dalle condizioni iniziali.
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ è la pulsazione.

Dalla pulsazione è possibile calcolare il periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

da cui ricaviamo la Legge (2). Tuttavia, è bene ricordare che nel caso in cui la massa della molla M non sia trascurabile, il valore del periodo è invece il seguente:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + \frac{m}{3}}{k}} \tag{16}$$

3 Descrizione dell'apparato sperimentale

Per svolgere quest'esperienza è stato utilizzato il seguente apparato sperimentale:

- Metro a nastro

- Cronometro digitale
- Bilancia
- Rondelle
- Supporto per rondelle
- Molla di costante elastica ignota

Strumenti di misura	**Risoluzione**
Metro a nastro	1 mm
Cronometro digitale	0.01 s
Bilancia	0.01 g

Tabella 1: Risoluzione degli strumenti di misura utilizzati

Figura 2: Molla utilizzata in laboratorio posta sul relativo supporto.

(a) Supporto per rondelle e rondelle utilizzate in laboratorio.

(b) Metro a nastro utilizzato in laboratorio.

4 Descrizione e analisi dei dati spereimentali

4.1 Metodo Statico

La lunghezza della molla a riposo è: $l_{riposo} = (11 \pm 0.05)\ cm$. La forza stimata a per raddoppiare la lunghezza è di circa $F_{max} = 0.4291\ N$. Le diverse masse M prese in considerazione saranno tali da ottenere un allungamento $\Delta x \in [0, 11]\ cm$. Abbiamo quindi effettuato 10 misurazioni di massa ma solo le prime 8 sono state utilizzate per misurare l'allungamento della molla poichè le altre sforano l'intervallo prestabilito. In realtà Δx_7 e Δx_8 non rientrano nell'intervallo ma sono state prese in considerazione poichè il numero minimo di misurazioni da valutare è 8.

$M\ [kg]$	$\Delta x\ [m]$
0.00758 ± 0.00001	0.024 ± 0.0005
0.01272 ± 0.00001	0.04 ± 0.0005
0.01786 ± 0.00001	0.057 ± 0.0005
0.02301 ± 0.00001	0.0735 ± 0.0005
0.02813 ± 0.00001	0.093 ± 0.0005
0.03330 ± 0.00001	0.01085 ± 0.0005
0.03853 ± 0.00001	0.0126 ± 0.0005
0.04374 ± 0.00001	0.0143 ± 0.0005

Tabella 2: La tabella mette in relazione l'allungamento della molla Δx in corrispondenza della massa M

Figura 3: Grafico dell'allungamento della molla in funzione della massa. Valori in Tabella (2). Coefficiente angolare $= (3.31398 \pm 0.07458)\ \frac{m}{kg}$ (Vedi Legge (10) e (12)).

Dalla Legge (1) sappiamo che il coefficiente angolare b della retta dei minimi quadrati è legato alla costante elastica k dalla relazione:

$$b = \frac{g}{k} \tag{17}$$

E quindi, considerando la propagazione dell'errore di b su k, otteniamo:

$$k = (2.96 \pm 0.07)\ \frac{N}{m} \tag{18}$$

4.2 Metodo Dinamico

Per ognuna delle masse in Tabella (2) è stato misurato il tempo di dieci oscillazioni della molla. Questa misurazione è stata effettuata cinque volte per ognuna delle masse.

M $[kg]$	t_1 $[s]$	t_2 $[s]$	t_3 $[s]$	t_4 $[s]$	t_5 $[s]$
0.00758 ± 0.00001	3.95 ± 0.01	4.05 ± 0.01	3.83 ± 0.01	3.80 ± 0.01	4.05 ± 0.01
0.01272 ± 0.00001	4.52 ± 0.01	4.71 ± 0.01	4.88 ± 0.01	4.58 ± 0.01	4.62 ± 0.01
0.01786 ± 0.00001	5.41 ± 0.01	5.53 ± 0.01	5.57 ± 0.01	5.34 ± 0.01	5.24 ± 0.01
0.02301 ± 0.00001	5.95 ± 0.01	6.05 ± 0.01	5.95 ± 0.01	6.01 ± 0.01	6.08 ± 0.01
0.02813 ± 0.00001	6.68 ± 0.01	6.85 ± 0.01	6.55 ± 0.01	6.84 ± 0.01	6.57 ± 0.01
0.03330 ± 0.00001	7.14 ± 0.01	7.40 ± 0.01	7.13 ± 0.01	7.17 ± 0.01	6.99 ± 0.01
0.03853 ± 0.00001	7.55 ± 0.01	7.80 ± 0.01	7.53 ± 0.01	7.80 ± 0.01	7.87 ± 0.01
0.04374 ± 0.00001	7.89 ± 0.01	8.08 ± 0.01	7.87 ± 0.01	8.16 ± 0.01	7.75 ± 0.01

Tabella 3: La tabella contiene le cinque misurazioni delle dieci oscillazioni della molla per ogni massa M utilizzata.

Da questa tabella è stato poi calcolato il periodo di oscillazione di ognuna delle masse. Il valore assoluto è dato dalla media delle cinque misurazioni, l'incertezza è stata calcolata per semidispersione.

M $[kg]$	T $[s]$
0.00758 ± 0.00001	0.39 ± 0.02
0.01272 ± 0.00001	0.47 ± 0.02
0.01786 ± 0.00001	0.54 ± 0.02
0.02301 ± 0.00001	0.60 ± 0.01
0.02813 ± 0.00001	0.67 ± 0.01
0.03330 ± 0.00001	0.72 ± 0.02
0.03853 ± 0.00001	0.77 ± 0.02
0.04374 ± 0.00001	0.80 ± 0.02

Tabella 4: La tabella mette in relazione la massa M agganciata alla molla in corrispondenza del periodo di oscillazione T

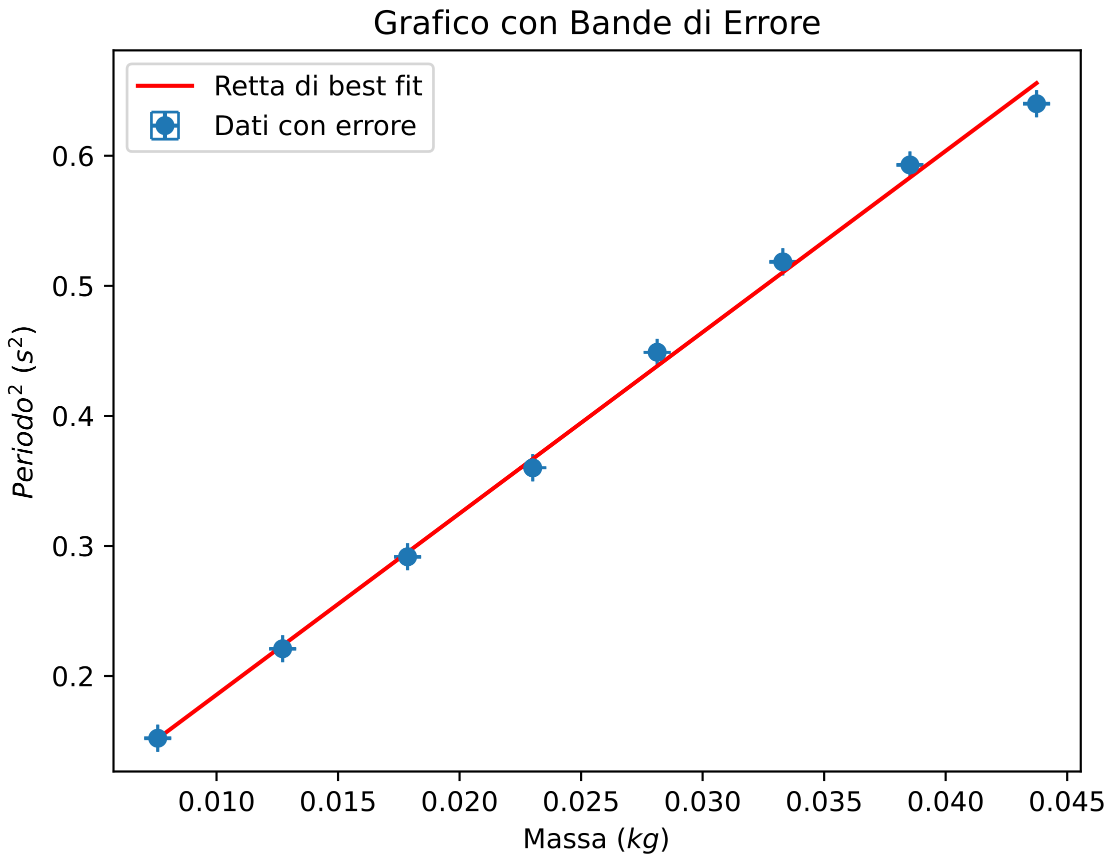

Figura 4: Grafico del quadrato del periodo di oscillazione della molla in funzione della massa. Valori in Tabella (4).
Coefficiente angolare $= (13.93857 \pm 0.88895)\ \frac{m}{N}$ (Vedi Legge (10) e (12)).

Utilizzando la Legge (7) e considerando anche la massa della molla $m = (15.45 \pm 0.01)\ g$ otteniamo esattamente lo stesso coefficiente angolare riportato in Figura (3). Ne consegue che la massa della molla è trascurabile. La stima del coefficiente angolare e dell'intercetta delle rette di best fit è stata effettuata utilizzando il metodo dei minimi quadrati. Siano b il coefficiente angolare e a l'intercetta della retta:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N}[(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})]}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \tag{19}$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x} \tag{20}$$

Con $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ e $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$ mentre le incertezze:

$$\Delta b = 3\sigma_b \tag{21}$$

$$\Delta a = 3\sigma_a \tag{22}$$

Con

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \tag{23}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - bx_i - a)^2}{N-2}} \tag{24}$$

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{\Delta}} \tag{25}$$

$$\Delta = N \sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 \tag{26}$$

Conoscendo il coefficiente angolare della retta di regressione si ricava facilmente il valore della costante elastica della molla. Infatti, dalla relazione:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} M \tag{27}$$

Ricaviamo la costante k come:

$$k = \frac{4\pi^2}{b} \tag{28}$$

E l'incertezza assoluta Δk:

$$\Delta k = \frac{\Delta b}{b} k \tag{29}$$

Quindi otteniamo il valore k:

$$k = (2.83 \pm 0.18)\ \frac{N}{m} \tag{30}$$

5 Conclusioni

I due approcci conducono a risultati compatibili. La discrepanza tra i due valori è inferiore alla somma degli errori assoluti:

$$|2.96 - 2.83| = 0.13 < 0.07 + 0.18$$