

Relazione di Laboratorio

Gruppo 3

Gerardo Selce, Maurizio Liguori, Emanuela Galluccio

01/04/2025

CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI RIFRAZIONE DELL'ACQUA

1 Introduzione

Scopo dell'esperienza è la determinazione sperimentale dell'indice di rifrazione dell'acqua, utilizzando la legge di Snell. Per svolgere l'esperimento è stato utilizzato un semplice setup costituito da una vaschetta di plastica trasparente con carta millimetrata visibile sul fondo, un'asta con un'altezza superiore a quella della vaschetta e una riga. L'asta è munita di un mirino mobile, che viene fissato ad una altezza prestabilita per tutta la durata dell'esperimento, allo scopo di mantenere fissa la posizione di osservazione.

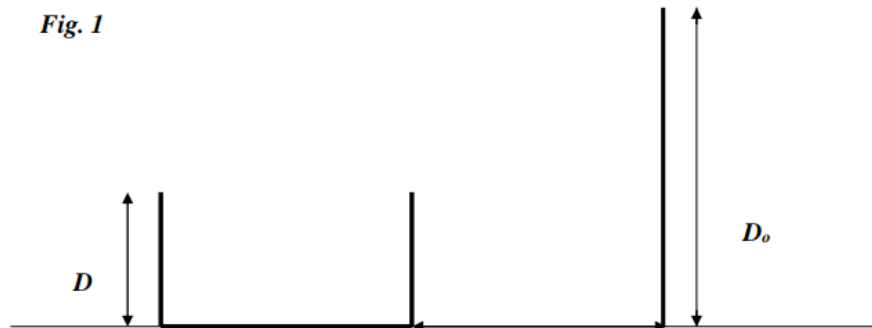


Figura 1: Sezione trasversale della vaschetta, rappresentata da tre segmenti adiacenti in grassetto (di altezza D) e l'asta, di altezza D_0 .

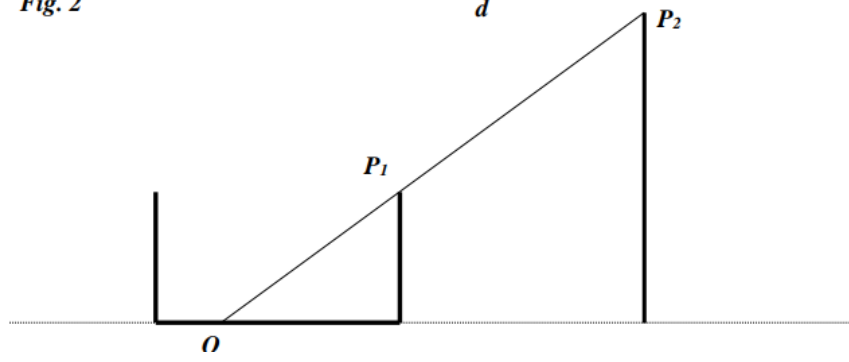
Fig. 2

Figura 2: P_2 è il punto fisso sull'asta da cui si effettuano le osservazioni, mentre P_1 è la cima della vaschetta. Quando questa è vuota, la retta P_1P_2 interseca il fondo nel punto O , che rappresenta il punto effettivamente osservato.

Fissato il punto O , si riempie gradualmente la vaschetta d'acqua. All'aumentare del livello h , osservando in direzione P_1P_2 , la rifrazione sposta l'immagine di O in O' , come illustrato in Figura (3).

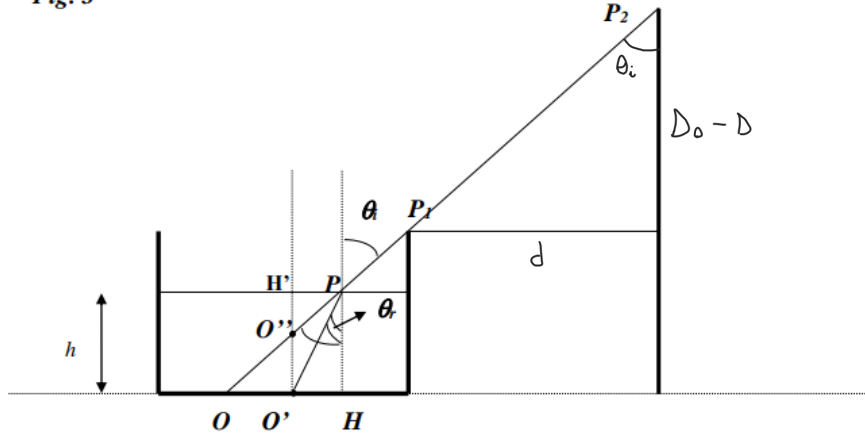
Fig. 3

Figura 3: Effetto della rifrazione dovuto alla presenza di un liquido all'interno della vaschetta, il cui livello è H' e l'angolo di rifrazione θ_r . In figura è anche riportato l'angolo di incidenza θ_i .

La distanza OO' , che sarà indicata con x , al variare del livello dell'acqua h segue un andamento lineare, in particolare:

$$x = h(\tan(\theta_i) - \tan(\theta_r)) \quad (1)$$

Riportando in grafico x in funzione di h è possibile calcolare l'angolo di rifrazione θ_r dal coefficiente angolare della retta di regressione. L'angolo di incidenza θ_i è misurabile a partire da semplici considerazioni trigonometriche. A questo punto, tramite la legge di Snell, si ottiene l'indice di rifrazione:

$$n = \frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_r)} \quad (2)$$

2 Richiami teorici

L'ottica geometrica è una branca della fisica classica che permette di descrivere efficacemente la propagazione della luce, nell'approssimazione in cui la lunghezza d'onda λ del raggio luminoso sia molto inferiore alle dimensioni d degli ostacoli incontrati:

$$\lambda \ll d$$

In tale contesto, la luce può essere rappresentata come un fascio di raggi rettilinei, ciascuno dei quali rappresenta la direzione di propagazione dell'onda luminosa. Si tratta di un modello semplificato che permette però di descrivere un'ampia gamma di fenomeni in maniera soddisfacente e senza ricorrere al concetto di onda. In un mezzo omogeneo e trasparente, la luce si propaga secondo traiettorie rettilinee. L'evidenza sperimentale mostra infatti che un corpo opaco interposto tra una sorgente luminosa puntiforme e uno schermo, proietta un'ombra con contorni ben definiti, la cui forma dipende dalla geometria dell'ostacolo e dalla direzione dei raggi incidenti, compatibilmente con il principio secondo cui i raggi luminosi si propagano in linea retta e non possono aggirare gli ostacoli.

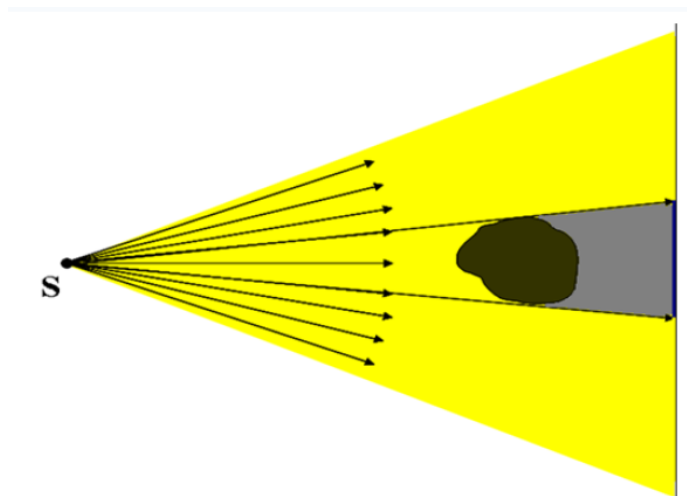


Figura 4: La regione d'ombra, al di là dell'ostacolo è limitata al solo cono avente per vertice la sorgente puntiforme S e generatrici tangenti all'ostacolo.

Tale principio trova applicazione pratica nella camera oscura, in cui un piccolo foro praticato su una parete di una scatola chiusa, proietta un'immagine invertita di una sorgente luminosa esterna sulla parete opposta interna alla scatola.

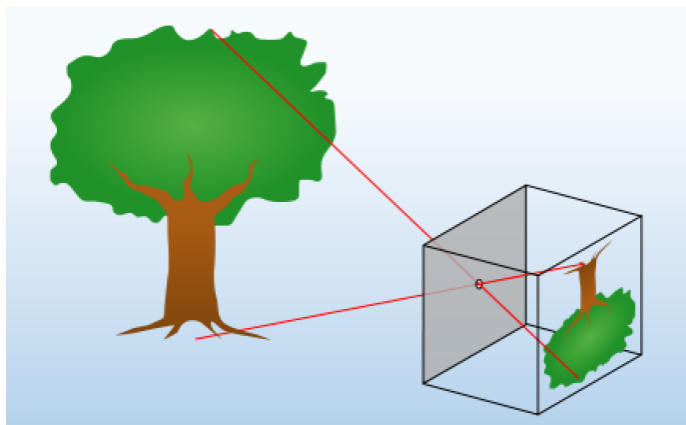


Figura 5: Camera Oscura

Sperimentalmente si osserva che quando un raggio luminoso attraversa l'interfaccia tra due mezzi, questo viene deviato rispetto alla normale alla superficie di separazione. Tale fenomeno è noto sotto il nome di **rifrazione**. È proprio a causa di questo fenomeno che possiamo osservare l'immagine spezzata di un oggetto immerso parzialmente in un bicchiere di acqua, come in figura.



Figura 6: immagine spezzata di una matita parzialmente immersa in un bicchiere d'acqua

Il fenomeno della rifrazione è descritto dalla **Legge di Snell**, secondo la quale Il raggio incidente,

quello rifratto e la normale alla superficie nel punto di incidenza, giacciono nello stesso piano:

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_r)} = \frac{v_1}{v_2} \quad (3)$$

Dove θ_i e θ_r sono gli angoli che il raggio luminoso forma con la normale alla superficie di incidenza nei rispettivi mezzi, mentre v_1 e v_2 sono le rispettive velocità di propagazione.

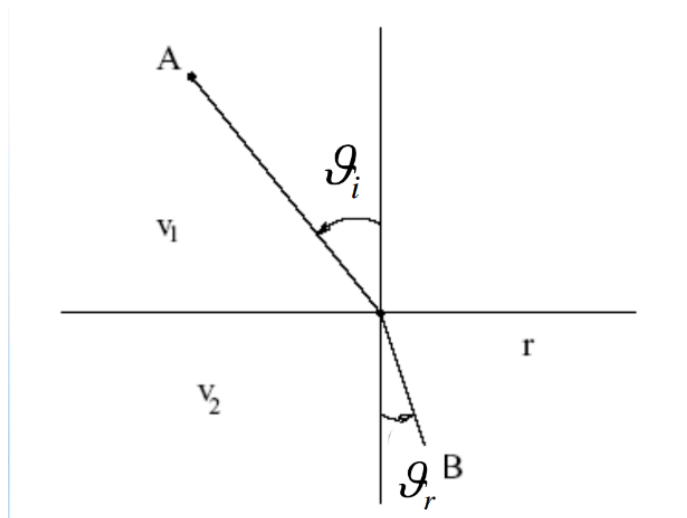


Figura 7:

Si dicono inoltre:

1. indice di rifrazione **assoluto**, il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e la velocità di propagazione nel mezzo:

$$n = \frac{c}{v} \quad (4)$$

2. indice di rifrazione **relativo** tra due mezzi m_1 ed m_2 il rapporto:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \quad (5)$$

Da quanto detto, si ricava grazie alla legge di Snell:

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_r)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (6)$$

Da misure sperimentali risulta che l'indice di rifrazione assoluto dell'aria n_1 è pari ad 1, mentre quello dell'acqua n_2 è pari a 1,33. Dall'esperienza effettuata ci si attende pertanto un valore prossimo a 1,33.

2.1 Determinazione della relazione tra spostamento dell'immagine ed angoli di incidenza e rifrazione

Come si evince dalla Figura (3), valgono le seguenti relazioni:

- $\overline{OH} = h \cdot \tan(\theta_i)$

- $\overline{O'H} = h \cdot \tan(\theta_r)$

Osservando che lo spostamento x si può ottenere al seguente modo:

$$x = \overline{OH} - \overline{O'H} = \quad (7)$$

$$= h \cdot \tan(\theta_i) - h \cdot \tan(\theta_r) = \quad (8)$$

$$= h \cdot (\tan(\theta_i) - \tan(\theta_r)) \quad (9)$$

2.2 Richiami Statistici

Il metodo dei minimi quadrati è una tecnica che permette di trovare una funzione, rappresentata da una curva di regressione, che si avvicini il più possibile ad un insieme di dati (tipicamente punti del piano). In particolare, la funzione trovata deve essere quella che minimizza la somma dei quadrati delle distanze tra i dati osservati e quelli della curva che rappresenta la funzione stessa. Siano b il coefficiente angolare e a l'intercetta della retta di regressione:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (10)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (11)$$

Con $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$ e $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}$ mentre le incertezze:

$$\Delta b = 3\sigma_b \quad (12)$$

$$\Delta a = 3\sigma_a \quad (13)$$

Con

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - bx_i - a)^2}{N - 2}}$$

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{\Delta}}$$

$$\Delta = N \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

2.3 Richiami di teoria della misura

Sia g una grandezza fisica dipendente da N grandezze fisiche x_1, \dots, x_N tale che

$$g = f(x_1, \dots, x_N) \quad (14)$$

con

$$x_1 = x_{1_0} \pm \Delta x_1 \quad (15)$$

...

$$x_N = x_{N_0} \pm \Delta x_N \quad (16)$$

La formula di propagazione dell'errore massimo è:

$$\Delta g = \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \Delta x_i \quad (17)$$

con

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_N) \quad (18)$$

$$\vec{x}_0 = (x_{1_0}, \dots, x_{N_0}) \quad (19)$$

Sia g una grandezza fisica pari alla somma, o alla differenza, di N grandezze fisiche x_1, \dots, x_N tale che

$$g = x_1 \pm \dots \pm x_N \quad (20)$$

con

$$x_1 = x_{1_0} \pm \Delta x_1 \quad (21)$$

...

$$x_N = x_{N_0} \pm \Delta x_N \quad (22)$$

La formula di propagazione dell'errore massimo è:

$$\Delta g = \Delta x_1 + \dots + \Delta x_N \quad (23)$$

3 Apparato sperimentale

Per svolgere quest'esperienza è stato utilizzato il seguente apparato sperimentale:

- Vaschetta trasparente di plastica di altezza D
- Asta di lunghezza $D_0 > D$
- Metro a nastro
- Carta millimetrata
- Riga
- Nastro adesivo
- Morsa da tavolo per fissare l'asta

| Strumenti di misura | Risoluzione |
|---------------------|-------------|
| Metro a nastro | 1 mm |
| Carta millimetrata | 1 mm |
| Riga | 1 mm |

Tabella 1: Risoluzione degli strumenti di misura utilizzati



Figura 8: Vaschetta utilizzata per l'esperimento. Sulla sua base è posta la carta millimetrata per permettere la determinazione del punto O' . Alla sua destra è presente il metro a nastro utilizzato.



Figura 9: Asta assemblata utilizzata per l'esperimento. Si noti la differenza di altezza tra quest'ultima e la vaschetta.

4 Descrizione e analisi dei dati sperimentali

Per svolgere questo esperimento sono stati innanzitutto scelti dei riferimenti:

- La distanza tra la vaschetta e l'asta $d = (57.50 \pm 0.05) \text{ cm}$.
- L'altezza dell'asta dalla quale sono state effettuate le osservazioni $D_0 = (42.35 \pm 0.05) \text{ cm}$.

Dopodiché è stata misurata l'altezza della vaschetta, ottenendo il seguente risultato: $D = (11.85 \pm 0.05) \text{ cm}$. Queste tre grandezze sono state misurate utilizzando la riga. Per ognuna di loro sono state effettuate tre misurazioni e, poiché la loro semidispersione è minore dell'errore strumentale, la loro incertezza corrisponde proprio a quest'ultimo. Con queste tre misure è stato possibile stabilire, utilizzando la carta millimetrata posta sul fondo della vaschetta, il punto $O = (19.50 \pm 0.05) \text{ cm}$ (vedi Figura(3)). Come mostrato in Figura (3) è possibile calcolare facilmente l'angolo di incidenza θ_i :

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{d}{D_0 - D}\right) = 62.06^\circ \quad (24)$$

Mentre la sua incertezza, dalla Legge (14) e ponendo $\vec{x}_0 = (d, D_0, D)$, sarà calcolata con la relazione:

$$\Delta\theta_i = \left(\frac{D_0 - D}{d^2 + D_0^2 - 2DD_0 + D^2}\right) \Delta d - \left(\frac{d}{D_0^2 - 2DD_0 + D^2 + d^2}\right) \Delta D_0 + \left(\frac{d}{D^2 - 2D_0D + D_0^2 + d^2}\right) \Delta D = 0.02^\circ \quad (25)$$

Facendo riferimento alla Legge (2) e alla Figura (3), per ottenere una discreta stima del coefficiente angolare della retta di regressione sono state effettuate osservazioni dell'immagine O' a dieci altezze h dell'acqua differenti. Le altezze sono state misurate utilizzando la riga. Per ognuna di esse sono state catturate cinque misurazioni del punto O' e, poiché la loro semidisersione è minore dell'errore strumentale, si anticipa che la loro incertezza corrisponderà all'errore strumentale. Il loro valore assoluto sarà invece la media delle diverse misurazioni. È stato poi calcolato il valore di x tenendo conto che:

$$x = O - O' \quad (26)$$

e la sua incertezza è quindi data dalla Legge (20).

4.1 Prima altezza

$$h_1 = (1.25 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (27)$$

| O' [cm] |
|------------------|
| 18.40 ± 0.05 |
| 18.30 ± 0.05 |
| 18.30 ± 0.05 |
| 18.30 ± 0.05 |
| 18.40 ± 0.05 |

Tabella 2: Punti O' misurati per la prima ampiezza.

Il punto O' è quindi:

$$O'_1 = (18.34 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (28)$$

mentre il valore di x :

$$x_1 = (1.16 \pm 0.10) \text{ cm} \quad (29)$$

4.2 Seconda altezza

$$h_2 = (1.65 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (30)$$

| O' [cm] |
|------------------|
| 17.60 ± 0.05 |
| 17.70 ± 0.05 |
| 17.60 ± 0.05 |
| 17.60 ± 0.05 |
| 17.70 ± 0.05 |

Tabella 3: Punti O' misurati per la seconda ampiezza.

Il punto O' è quindi:

$$O'_2 = (17.64 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (31)$$

mentre il valore di x :

$$x_2 = (1.86 \pm 0.10) \text{ cm} \quad (32)$$

4.3 Terza altezza

$$h_3 = (2.05 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (33)$$

| $\mathbf{O' [cm]}$ |
|--------------------|
| 17.10 ± 0.05 |
| 17.10 ± 0.05 |
| 17.10 ± 0.05 |
| 17.20 ± 0.05 |
| 17.10 ± 0.05 |

Tabella 4: Punti O' misurati per la terza ampiezza.

Il punto O' è quindi:

$$O'_3 = (17.12 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (34)$$

mentre il valore di x :

$$x_3 = (2.38 \pm 0.10) \text{ cm} \quad (35)$$

4.4 Quarta altezza

$$h_4 = (2.45 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (36)$$

| $\mathbf{O' [cm]}$ |
|--------------------|
| 16.70 ± 0.05 |
| 16.80 ± 0.05 |
| 16.80 ± 0.05 |
| 16.80 ± 0.05 |
| 16.80 ± 0.05 |

Tabella 5: Punti O' misurati per la quarta ampiezza.

Il punto O' è quindi:

$$O'_4 = (16.78 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (37)$$

mentre il valore di x :

$$x_4 = (2.72 \pm 0.10) \text{ cm} \quad (38)$$

4.5 Quinta altezza

$$h_5 = (2.85 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (39)$$

| O' [cm] |
|------------------|
| 16.40 \pm 0.05 |
| 16.40 \pm 0.05 |
| 16.40 \pm 0.05 |
| 16.50 \pm 0.05 |
| 16.40 \pm 0.05 |

Tabella 6: Punti O' misurati per la quinta ampiezza.

Il punto O' è quindi:

$$O'_5 = (16.42 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (40)$$

mentre il valore di x :

$$x_5 = (3.08 \pm 0.10) \text{ cm} \quad (41)$$

4.6 Sesta altezza

$$h_6 = (3.35 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (42)$$

| O' [cm] |
|------------------|
| 15.80 \pm 0.05 |
| 15.80 \pm 0.05 |
| 15.90 \pm 0.05 |
| 15.90 \pm 0.05 |
| 15.90 \pm 0.05 |

Tabella 7: Punti O' misurati per la sesta ampiezza.

Il punto O' è quindi:

$$O'_6 = (15.86 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (43)$$

mentre il valore di x :

$$x_6 = (3.64 \pm 0.10) \text{ cm} \quad (44)$$

4.7 Settima altezza

$$h_7 = (3.95 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (45)$$

| O' [cm] |
|------------------|
| 15.50 \pm 0.05 |
| 15.50 \pm 0.05 |
| 15.40 \pm 0.05 |
| 15.50 \pm 0.05 |
| 15.50 \pm 0.05 |

Tabella 8: Punti O' misurati per la settima ampiezza.

Il punto O' è quindi:

$$O'_7 = (15.48 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (46)$$

mentre il valore di x :

$$x_7 = (4.02 \pm 0.10) \text{ cm} \quad (47)$$

4.8 Ottava altezza

$$h_8 = (4.85 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (48)$$

| $\mathbf{O' [cm]}$ |
|--------------------|
| 14.60 ± 0.05 |
| 14.50 ± 0.05 |
| 14.60 ± 0.05 |
| 14.60 ± 0.05 |
| 14.60 ± 0.05 |

Tabella 9: Punti O' misurati per l'ottava ampiezza.

Il punto O' è quindi:

$$O'_8 = (14.58 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (49)$$

mentre il valore di x :

$$x_8 = (4.92 \pm 0.10) \text{ cm} \quad (50)$$

4.9 Nona altezza

$$h_9 = (6.05 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (51)$$

| $\mathbf{O' [cm]}$ |
|--------------------|
| 13.50 ± 0.05 |
| 13.50 ± 0.05 |
| 13.40 ± 0.05 |
| 13.50 ± 0.05 |
| 13.40 ± 0.05 |

Tabella 10: Punti O' misurati per la nona ampiezza.

Il punto O' è quindi:

$$O'_9 = (13.46 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (52)$$

mentre il valore di x :

$$x_9 = (6.04 \pm 0.10) \text{ cm} \quad (53)$$

4.10 Decima altezza

$$h_{10} = (6.85 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (54)$$

| O' [cm] |
|------------------|
| 12.70 ± 0.05 |
| 12.60 ± 0.05 |
| 12.60 ± 0.05 |
| 12.70 ± 0.05 |
| 12.70 ± 0.05 |

Tabella 11: Punti O' misurati per la decima ampiezza.

Il punto O' è quindi:

$$O'_{10} = (12.66 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (55)$$

mentre il valore di x :

$$x_{10} = (6.84 \pm 0.10) \text{ cm} \quad (56)$$

A questo punto è possibile mettere in relazione lo spostamento x , del punto O' rispetto al punto O , in funzione del livello dell'acqua h .

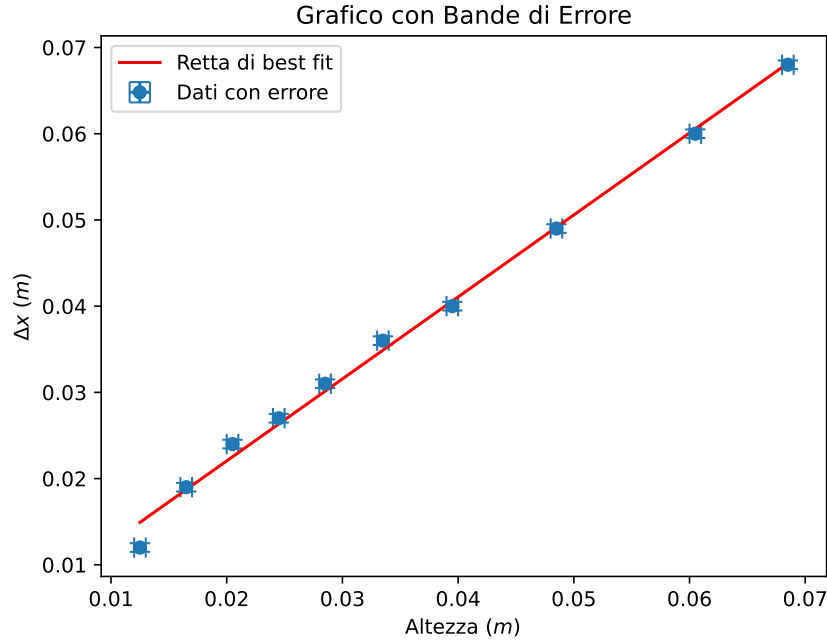


Figura 10: Il grafico mostra lo spostamento x in funzione dell'altezza dell'acqua. I punti blu rappresentano le nostre misurazioni mentre in rosso è rappresentata la retta di best-fit calcolata utilizzando il metodo dei minimi quadrati (vedi Sezione (2.1)).

Coefficiente angolare: $b = 0.95 \pm 0.07$

Si noti, dalla Legge (1), che il coefficiente angolare è adimensionale.

Ricordiamo, dalla Legge (1), che il coefficiente angolare della retta di best-fit in Figura (10) è uguale a $(\tan(\theta_i) - \tan(\theta_r))$. Avendo misurato θ_i e la relativa incertezza, e avendo calcolato, mediante metodi

statistici, il coefficiente angolare della retta di regressione e la relativa incertezza, è possibile stimare l'angolo di rifrazione:

$$\theta_r = \arctan(\tan(\theta_i) - b) = 43.1^\circ \quad (57)$$

e la relativa incertezza (vedi Legge (17)):

$$\Delta\theta_r = \left(\frac{1}{\tan^2(\theta_i) - 2b \tan(\theta_i) + b^2 + 1} \right) \Delta \tan(\theta_i) - \left(\frac{1}{b^2 - 2b \tan(\theta_i)b + \tan^2(\theta_i) + 1} \right) = 2.1^\circ \quad (58)$$

5 Conclusioni