Laboratorio di Meccanica e Termodinamica

Relazione di Laboratorio

Gruppo 3
Gerardo Selce, Maurizio Liguori, Emanuela Galluccio, Francesco Messano

17/12/2024

DESCRIZIONE DELLA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DI UNA VARIABILE ALEATORIA DISCRETA

---

1 Introduzione

L'esperimento consiste nel lancio di due dadi, rispettivamente a quattro e venti facce. Scopo dell'esperienza è lo studio della variabile casuale X definita come somma dei punteggi ottenuti nel lancio. L'esperimento si articola in due fasi. In una prima fase viene presentato un modello teorico di riferimento per la variabile X, di cui si determinano la distribuzione di probabilità (rappresentata graficamente con un istogramma) e gli indici di posizione e dispersione principali (rispettivamente valore atteso μ e varianza σ). Infine, sono calcolate le probabilità relative agli intervalli

$$[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma] \; con \; k = 1, 2, 3 \tag{1}$$

Nella seconda fase, si prosegue con il lancio effettivo dei dadi per simulare la variabile X. L'esperimento viene ripetuto per un totale di 241 volte. Dopo aver rappresentato i dati su un istogramma normalizzato, sono state calcolate le seguenti quantità:

- Media aritmetica $\overline{x}$
- Scarto quadratico medio ξ_q
- Frequenza relativa negli intervalli $[\overline{x} - k\xi_q, \overline{x} + k\xi_q] \; con \; k = 1, 2, 3$

2 Richiami teorici

2.1 Definizione di probabilità di Laplace

La probabilità di un evento è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli all'evento ed il numero dei casi possibili, nelle ipotesi in cui questi ultimi siano tutti "ugualmente possibili"

$$P = \frac{n_f}{n_p} \tag{2}$$

La probabilità è valutata a priori.

2.2 Indici di Posizione: Valore Atteso

Sia Y una variabile aleatoria discreta (che per i nostri scopi intendiamo finita, i.e. di rango finito). Si definisce **valore atteso** di Y la quantità:

$$E[Y] := \sum_{i=1}^{n} y_i p_i =: \mu \tag{3}$$

dove i valori y_i rappresentano le possibili realizzazioni di Y e p_i le rispettive probabilità. In maniera informale ma efficace, il valore atteso di una variabile aleatoria fornisce un valore di riferimento intorno al quale si distribuisce la massa di probabilità. Può essere perciò pensato come un'approssimazione della realizzazione di X. Tuttavia, ogni approssimazione è del tutto inutile se non accompagnata da una stima dell'errore, che ci consenta di valutarne la qualità. In quest'ottica, il valore $E[X]$ è tanto più significativo quanto più concentrati sono i dati. Per questo motivo (per valutare la bontà di $E[Y]$ come approssimazione di X) si ricorre alla nozione di varianza.

2.3 Indici di Dispersione: Varianza e Deviazione Standard

Si definisce **varianza** di Y la quantità:

$$E[(Y - E[Y])^2] = \sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - \mu)^2 = \sigma^2 \tag{4}$$

Si definisce invece **deviazione standard** di Y la quantità:

$$\sigma = \sqrt{E[(Y - E[Y])^2]} \tag{5}$$

Questi indici rappresentano la dispersione dei valori rispetto alla media.

2.4 Modello teorico analizzato

Siano assegnati due dadi, rispettivamente di quattro e venti facce. Sia inoltre X la variabile aleatoria che descrive la somma dei punteggi ottenuti ad ogni lancio. Allora X è una variabile discreta che assume i seguenti valori:

$$\{x_i\}_{i=1,\ldots,n} = \{2 \leq m \leq 24\} \tag{6}$$

In condizioni ideali e in assenza di ulteriori informazioni, è ragionevole assumere che le coppie del tipo (x_i, y_j), con $i \in \{1, ..., 4\}$ e $j \in \{1, ..., 20\}$, siano equiprobabili. Pertanto:

$$P(x_i, y_i) = \frac{1}{4 \cdot 20}, \ \forall i, j \tag{7}$$

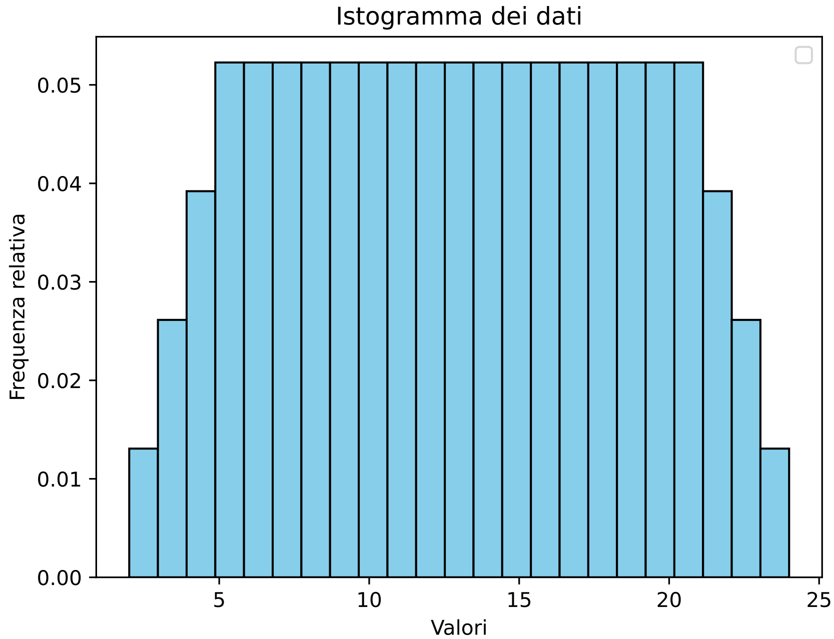

Figura 1: L'istogramma normalizzato in figura rappresenta la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X.
Valore atteso: $\mu = 13$
Varianza: $\sigma^2 = 34.5$
Deviazione Standard: $\sigma = 5.87$

2.5 Considerazioni Aggiuntive

Avendo a disposizione i valori di media μ e variazione standard σ possiamo calcolare le probabilità che la variabile X assuma valori nei seguenti intervalli:

$$[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma] \ con\ k = 1, 2, 3$$

Otteniamo così i seguenti risultati:

- $k = 1 : P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) = 0.55$
- $k = 2 : P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) = 1$
- $k = 3 : P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) = 1$

3 Apparato sperimentale

Per svolgere questa esperienza è stato utilizzato il seguente apparato sperimentale:

- Dado a 4 facce
- Dado a 20 facce

Figura 2: Dadi utilizzati per l'esperimento

4 Descrizione e analisi dei dati sperimentali

Sono stati effettuati un totale di 241 lanci di dadi.

Valore	**Frequenza Assoluta**
11	17
8	17
6	17
7	16
12	16
5	16
14	15
17	15
19	14
10	12
18	11
4	10
13	9
15	9
9	8
16	8
3	7
20	7
21	6
22	6
2	2
23	2
24	1

Tabella 1: Tabella delle frequenze assolute della somma dei punteggi ottenuti nel lancio dei due dadi.

I dati riportati in Tabella 1 sono stati raccolti in un istogramma normalizzato.

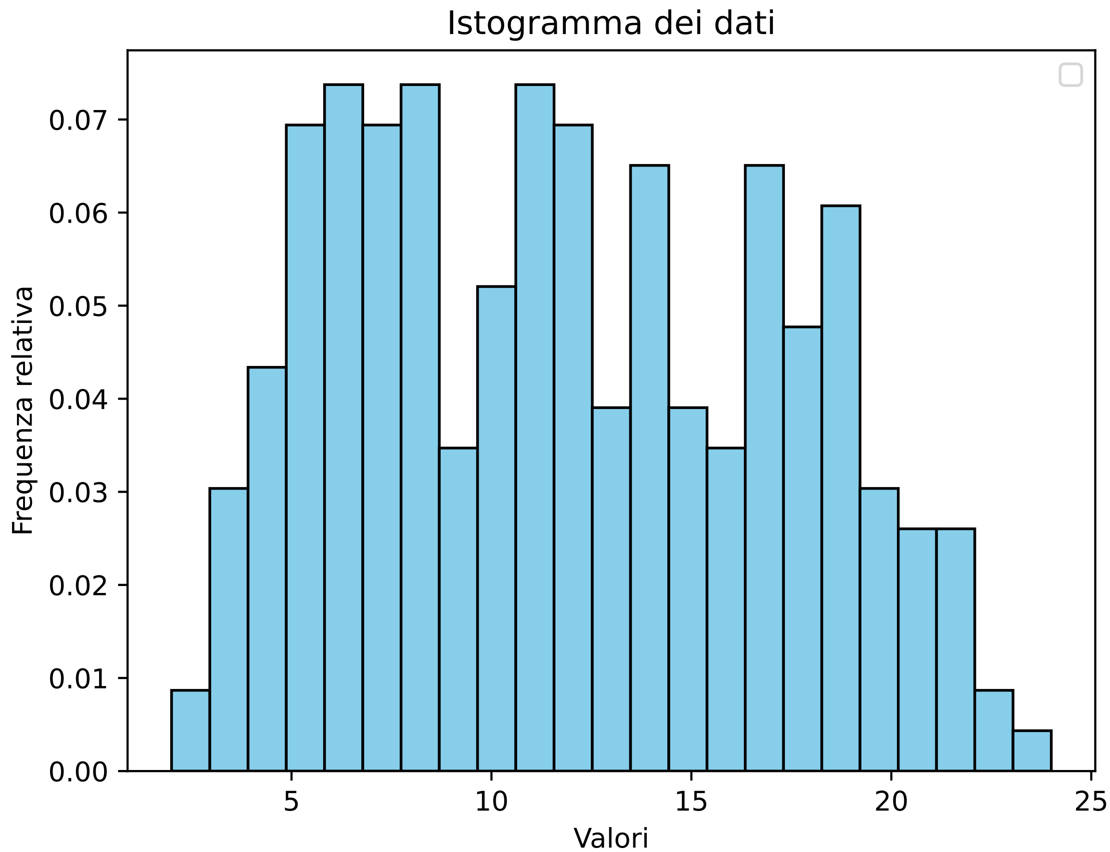

Figura 3: L'istogramma comprende un totale di $N = 241$ campioni in $k = 23$ bins nell'intervallo $[2,\ 24]$

Dall'istogramma in Figura 3 sono stati calcolati gli indici di dispersione e posizione:

- **Media aritmetica:** $\overline{x} = 11.80$
- **Scarto quadratico medio:** $\xi_q = 5.49$

Si può calcolare la probabilità che la variabile aleatoria X rientri nell'intervallo

$$[\overline{x} - k\xi_q, \overline{x} + k\xi_q]\ con\ k = 1, 2, 3$$

Otteniamo i seguenti risultati:

- $k = 1 : P(X \in [\overline{x} - k\xi_q, \overline{x} + k\xi_q]) = 0.53$
- $k = 2 : P(X \in [\overline{x} - k\xi_q, \overline{x} + k\xi_q]) = 0.99$
- $k = 3 : P(X \in [\overline{x} - k\xi_q, \overline{x} + k\xi_q]) = 1$

5 Conclusioni

Questa esperienza ha evidenziato la possibilità di confrontare dei risultati teorici con quelli sperimentali. In conclusione, a causa del numero limitato di lanci effettuati, l'istogramma del modello teorico non coincide perfettamente con quello dell'esperimento. Tuttavia i due istogrammi, e gli indici calcolati, sono particolarmente simili e ciò verifica la correttezza del modello teorico analizzato al Paragrafo 2.5.