

9. Obične diferencijalne jednačine, problem početne vrednosti

1. Naći i nacrtati rešenje problema početne vrednosti nad intervalom $[0, 2\pi]$:

$$f'(x) = \cos x$$

$$f(0) = 0$$

rešenje: $f(x) = \sin x$

2. Naći i nacrtati rešenje problema početne vrednosti nad intervalom $[0, 2\pi]$:

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

rešenje: $f(x) = \sin x$

3. Naći i nacrtati rešenje problema početne vrednosti nad intervalom $[0, 4\pi]$:

$$f''(x) = -f(x) + x + 2$$

$$f(0) = 4$$

$$f'(0) = 2$$

rešenje: $f(x) = 2 \cos x + \sin x + x + 2$

4. Naći i nacrtati rešenje problema početne vrednosti nad intervalom $[0, 4\pi]$:

$$f^{(4)}(x) + 13f''(x) + 36f(x) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = -3$$

$$f''(0) = 5$$

$$f'''(0) = -3$$

rešenje: $f(x) = \cos 2x - 3 \sin 2x - \cos 3x + \sin 3x$

5. Ako na telo mase $1kg$, koje je u trenutku $0s$ imalo položaj $0m$ i brzinu $0 \frac{m}{s}$, deluje konstantna sila od $10N$, naći položaj tela nakon $10s$.

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = \frac{F}{m}$$
$$s''(t) = \frac{F}{m} = \frac{10}{1} = 10$$

$$s(0) = 0$$

$$s'(0) = v(0) = 0$$

rešenje: $s(10) = 500m$

6. Data je diferencijalna jednačina:

$$f'(t) = 2^{(0.2t - 0.1f(t))}$$

- a) Koju vrednost funkcija $f(t)$ ima u trenutku $t_1 = 2.2s$ ako u trenutku $t_0 = 3.4s$ ima vrednost $f(3.4) = 1.36$
b) U kom trenutku $t_1 = ?$ funkcija ima vrednost $f(t_1) = 4.8$ ako u $t_0 = 3.2s$ ima vrednost $f(3.2) = 5.4$

rešenje:

a) $f(2.2) = -0.3492$

b) $t_1 = 2.6297s$

7. Neka se u posudu cilindričnog oblika poluprečnika $3cm$ uliva voda po zakonitosti:

$$h'(t) = -\sin 2t + 0.2h$$

$$V = r^2\pi h$$

a) Ukoliko je u trenutku $t_0 = 5.5s$ nivo vode bio $h(t_0) = 2cm$, koja količina vode **će se uliti** u posudu do trenutka $t_1 = 10s$?

b) Ukoliko je u trenutku $t_0 = 2s$ nivo vode bio $h(t_0) = 8cm$, u kom trenutku t_1 će nivo vode biti $h(t_1) = 16cm$?

rešenje:

a) $V_2 - V_1 = 92.8188cm^3$

b) $t_1 = 5.2958s$