5. Interpolacija

1. Date su tačke:

```
x = [0.7854     1.9635     3.1416     4.3197     5.4978];
fX = [0.7071     0.9239     0.0000    -0.9239    -0.7071];
```

2. Nacrtati poznate tačke:

```
scatter(x, fX), hold on
```

3. Naći polinom koji zadovoljava poznate tačke:

```
order = length(x) - 1; % red polinoma mora biti za 1 manji od broja tačaka
p = polyfit(x, fX, order)
```

Rezultat:

```
p =
   -0.0000    0.1163   -1.0958    2.4970   -0.6344
```

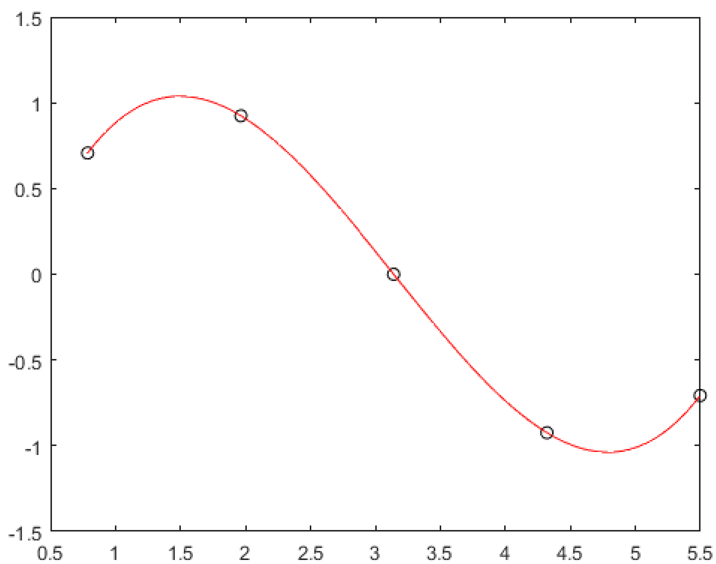
Pronađeni polinom se čita na sledeći način:

$$p(x) = -0.0000x^4 + 0.1163x^3 - 1.0958x^2 + 2.4970x - 0.6344$$

4. Nacrtati pronađeni polinom:

```
x = linspace(min(x), max(x), 100);
pX = polyval(p, x); % računanje vrednosti polinoma p za svaku vrednost vektora x
plot(x, pX, 'red')
```

Rezultat:



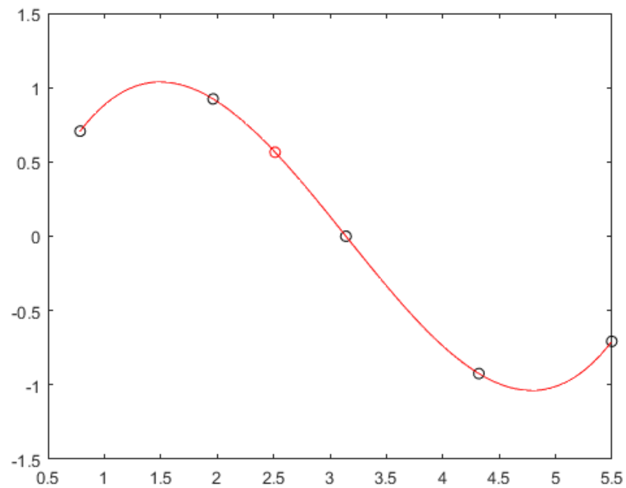
Slika 1. Polinom

5. Interpolacijom naći nepoznatu vrednost u tački $x_1 = \frac{4\pi}{5}$, a zatim na istom grafiku nacrtati dobijenu tačku:

```
x1 = 4*pi/5;
pX1 = polyval(p, x1)
scatter(x1, pX1, 'red')
```

Rezultat:

```
pX1 =
    0.5653
```



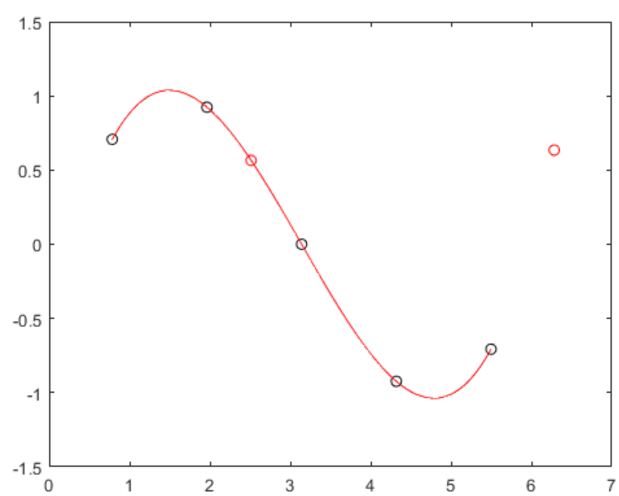
Slika 2. Interpolacija

6. Ekstrapolacijom naći nepoznatu vrednost u tački $x_2 = 2\pi$, a zatim na istom grafiku nacrtati dobijenu tačku:

```
x2 = 2*pi;
pX2 = polyval(p, x2)
scatter(x2, pX2, 'red')
```

Rezultat:

```
pX2 =
    0.6344
```



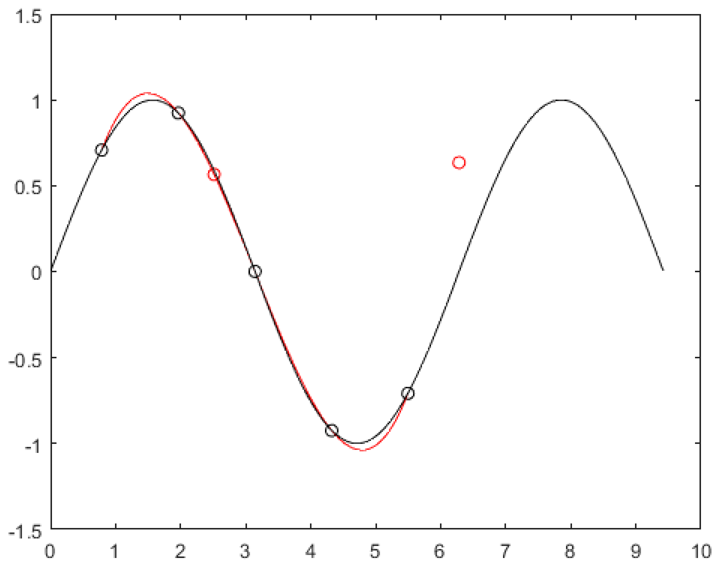
Slika 3. Ekstrapolacija

7. Stvarna funkcija koja zadovoljava tačke je $f(x) = \sin x$. Na istom grafiku nacrtati funkciju na intervalu $x \in [0,3\pi]$, a zatim naći apsolutnu grešku u odnosu na stvarne vrednosti funkcije u tim tačkama:

```
f = @(x) sin(x);

x = linspace(0, 3*pi, 100);
fX = f(x);
plot(x, fX, 'black'), hold off

errAbs1 = abs(sin(x1) - pX1)
errAbs2 = abs(sin(x2) - pX2)
```

Rezultat:

```
errAbs1 =
    0.0225

errAbs2 =
    0.6344
```



Slika 4. Stvarna funkcija

Ekstrapolacija je rezultovala daleko većom greškom od interpolacije!

Množenje (konvolucija) polinoma

Primer 1
Data su dva polinoma:

$$p_1(x) = x - 1$$
$$p_2(x) = x - 2$$

Njihov proizvod je:

$$p_1(x)p_2(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$$

Prethodni rezultat se mogao naći ugrađenom MATLAB funkcijom `conv(p1, p2)`:

```
p1 = [1 -1];
p2 = [1 -2];

conv(p1, p2)
```

Rezultat:

```
ans =
     1    -3     2
```

Lagranžova interpolacija

Zadatak 1. Napisati metodu za traženje Lagranžovog polinoma koji zadovoljava proizvoljan broj poznatih tačaka. Pokušati prvo ručno nalaženje koeficijenata Lagranžovog polinoma za skup tačaka:

```
x = [0.7854    1.9635    3.1416    4.3197    5.4978];
fX = [0.7071    0.9239    0.0000   -0.9239   -0.7071];
```

S obzirom na to da je dato 5 tačaka, traženi Lagranžov polinom je 4. reda:

$$p(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) + L_3 f(x_3) + L_4 f(x_4) + L_5 f(x_5)$$

$$\begin{aligned} p(x) = {} & \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)} f(x_1) \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)} f(x_2) \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)} f(x_3) \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)} f(x_4) \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)} f(x_5) \end{aligned}$$

Primetiti da je x jedina nepoznata koja figuriše u jednačini. Sve ostale vrednosti (x_1, $f(x_1)$, x_2, $f(x_2)$, x_3, $f(x_3)$, x_4, $f(x_4)$, x_5 i $f(x_5)$,) se mogu uvrstiti.
Primetiti da i u imeniocu i u brojiocu razlomka koji množe svaki $f(x_i)$ ne figurišu članovi koji sadrže x_i.

1. Red polinoma se izračunava na sledeći način:

```
order = length(x) - 1;
```

Posmatrati npr. 2. element sume:

$$\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)}f(x_2)$$

On se može izračunati sledećim MATLAB izrazom:

```
lNumer = conv([1 -x(1)], conv([1 -x(3)], conv([1 -x(4)], [1 -x(5)])));
lDenom = (x(2) - x(1))*(x(2) - x(3))*(x(2) - x(4))*(x(2) - x(5));
lNumer/lDenom*fX(2)
```

Rezultat:

```
ans =
   -0.0799    1.0987   -5.1775    9.3914   -4.6841
```

Uz napomenu da su brojilac (`lNumer`) i imenilac (`lDenom`) kumulativini proizvodi, izrazi se mogu razviti:

```
lNumer = 1;
lDenom = 1;
lNumer = conv(lNumer, [1 -x(1)]);
lDenom = lDenom*(x(2) - x(1));
lNumer = conv(lNumer, [1 -x(3)]);
lDenom = lDenom*(x(2) - x(3));
lNumer = conv(lNumer, [1 -x(4)]);
lDenom = lDenom*(x(2) - x(4));
lNumer = conv(lNumer, [1 -x(5)]);
lDenom = lDenom*(x(2) - x(5));
lNumer/lDenom*fX(2)
```

Primetiti šta je fiksno, a šta promenljivo. Promenljivi indeksi rastu od 1 do fiksnog indeksa - 1 i od fiksnog indeksa + 1 do reda polinoma + 1. Ovo se može zapisati sa 2 *for* petlje pri čemu promenljivi indeksi zavise od indeksa *for* petlji:

```
lNumer = 1;
lDenom = 1;
for itX = 1:2 - 1
    lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
    lDenom = lDenom*(x(2) - x(itX));
end
for itX = 2 + 1:order + 1
    lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
    lDenom = lDenom*(x(2) - x(itX));
end
lNumer/lDenom*fX(2)
```

Ceo polinom se može izračunati kao kumulativna suma svih elemenata:

```
p = 0;

lNumer = 1;
lDenom = 1;
for itX = 1:1 - 1
    lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
    lDenom = lDenom*(x(1) - x(itX));
end
for itX = 1 + 1:order + 1
    lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
    lDenom = lDenom*(x(1) - x(itX));
end
p = p + lNumer/lDenom*fX(1);

lNumer = 1;
lDenom = 1;
for itX = 1:2 - 1
    lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
    lDenom = lDenom*(x(2) - x(itX));
end
for itX = 2 + 1:order + 1
    lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
    lDenom = lDenom*(x(2) - x(itX));
end
p = p + lNumer/lDenom*fX(2);

lNumer = 1;
lDenom = 1;
for itX = 1:3 - 1
    lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
    lDenom = lDenom*(x(3) - x(itX));
end
for itX = 3 + 1:order + 1
    lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
    lDenom = lDenom*(x(3) - x(itX));
end
p = p + lNumer/lDenom*fX(3);

lNumer = 1;
lDenom = 1;
for itX = 1:4 - 1
    lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
    lDenom = lDenom*(x(4) - x(itX));
end
for itX = 4 + 1:order + 1
    lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
    lDenom = lDenom*(x(4) - x(itX));
end
p = p + lNumer/lDenom*fX(4);

lNumer = 1;
lDenom = 1;
for itX = 1:5 - 1
    lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
    lDenom = lDenom*(x(5) - x(itX));
end
for itX = 5 + 1:order + 1
    lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
    lDenom = lDenom*(x(5) - x(itX));
end
p = p + lNumer/lDenom*fX(5);
```

Rezultat:

```
p =

    0.0000    0.1163   -1.0958    2.4971   -0.6345
```

2. Primetiti šta je promenljivo. Promenljivi indeksi rastu od 1 do reda polinoma + 1. Prethodni par *for* petlji se može ugnjezditi u novu *for* petlju pri čemu promenljivi indeksi zavise od indeksa nove *for* petlje:

```
p = 0;
for itFX = 1:order + 1
    lNumer = 1;
    lDenom = 1;
    for itX = 1:itFX - 1
        lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
        lDenom = lDenom*(x(itFX) - x(itX));
    end
    for itX = itFX + 1:order + 1
        lNumer = conv(lNumer, [1 -x(itX)]);
        lDenom = lDenom*(x(itFX) - x(itX));
    end
    p = p + lNumer/lDenom*fX(itFX);
end
```

3. Sada je moguće definisati funkciju koja sadrži prethodni algoritam:

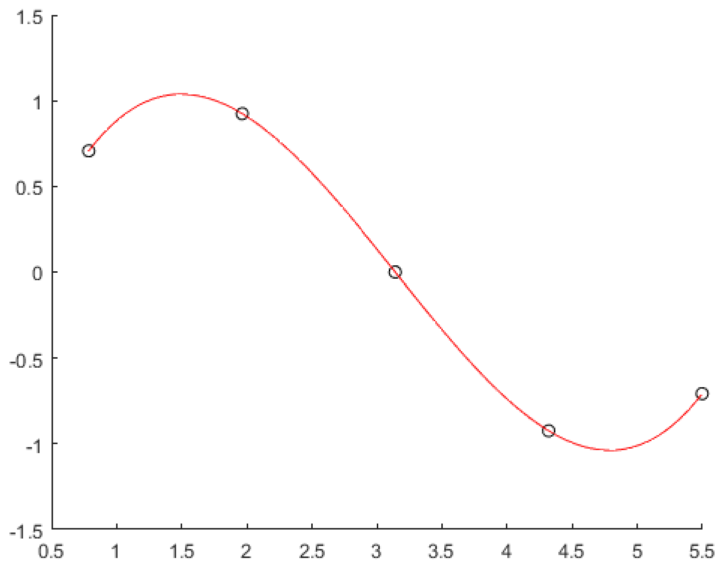
```
function p = lagrangeInterp(x, fX)
    order = length(x) - 1;

    .
    .
    .
end
```

4. Testirati funkciju na primeru:

```
x = [0.7854    1.9635    3.1416    4.3197    5.4978];
fX = [0.7071    0.9239    0.0000   -0.9239   -0.7071];
scatter(x, fX, 'black'), hold on

p = lagrangeInterp(x, fX)

x = linspace(min(x), max(x), 100);
pX = polyval(p, x);
plot(x, pX, 'red'), hold off
```

Rezultat:

```
p =
    0.0000    0.1163   -1.0958    2.4971   -0.6345
```



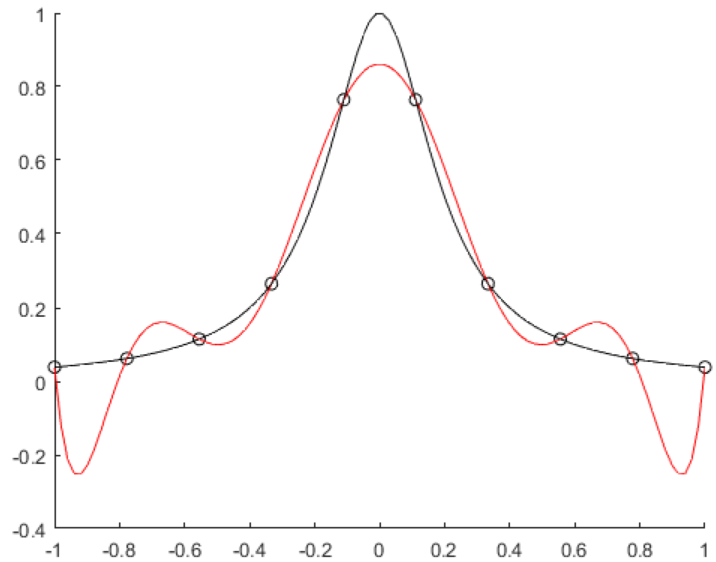
Slika 5. Lagranžova interpolacija

5. Testirati funkciju na primeru:

```
x = linspace(-1.0, 1.0, 10);
f =  @ (x) 1.0./(1 + 25*x.^2);
fX = f(x);
scatter(x, fX, 'black'), hold on

p = lagrangeInterp(x, fX)

x = linspace(min(x), max(x), 100);
pX = polyval(p, x);
plot(x, pX, 'red', x, f(x), 'black'), hold off
```

Rezultat:

```
p =
    0.0000   21.6248   -0.0000  -44.9155   -0.0000   30.7285   -0.0000   -8.2609   -0.0000    0.8615
```



Slika 6. Oscilacije

U zavisnosti od funkcije i od broja tačaka, može da dođe do neželjenih oscilacija. Tada polinom ne aproskimira funkciju dovoljno dobro. Problem se rešava *spline* interpolacijom ili upotrebom regresije.

* **Zadatak 2.** Napisati metodu za traženje Njutnovog polinoma koji zadovoljava proizvoljan broj poznatih tačaka.