10. Obične diferencijalne jednačine, problem graničnih uslova

1. Rešavanje ODJ 2. reda

Metoda konačnih razlika

ODJ 2. reda je definisana kao:

$$\begin{aligned} ODJ_{leva}\big(x, f(x), f'(x), f''(x)\big) &= ODJ_{desna}(x) \\ m_a(x)f''(x) + m_b(x)f'(x) + m_c(x)f(x) &= ODJ_{desna}(x) \end{aligned} \tag{1}$$

, gde je ODJ_{leva} leva strana diferencijalne jednačine u kojoj figurišu svi izvodi funkcije, čiji poznati množioci $m(x)$ mogu da zavise od nezavisno promenljive x, a mogu biti i konstante, a ODJ_{desna} je desna strana diferencijalne jednačine u kojoj figuriše nezavisno promenljiva x i slobodne konstante.

Ako se funkcija nad intervalom $x \in [a, b]$ izdeli na n podintervala širine h, tada je:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Za poznatu razliku h izvodi funkcije u tački x se mogu aproksimirati konačnim razlikama:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \\ \frac{df(x)}{dx} &= \frac{-f(x) + f(x+h)}{h} \\ f(x) &= f(x) \end{aligned}$$

Iterativni zapis:

$$\begin{aligned} f''(x_i) &= \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{h^2} \\ f'(x_i) &= \frac{-f(x_i) + f(x_{i+1})}{h} \\ f(x_i) &= f(x_i) \end{aligned}$$

Vektorski zapis:

$$\begin{aligned} f''(x_i) &= \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \end{bmatrix} \\ f'(x_i) &= \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \end{bmatrix} \\ f(x_i) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Zamenom (2) u (1) dobija se:

$$m_a(x_i)\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \end{bmatrix} + m_b(x_i)\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \end{bmatrix} + m_c(x_i)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \end{bmatrix} = ODJ_{desna}(x_i)$$

Ako su $m_a(x_i), m_b(x_i)$ i $m_c(x_i)$ poznate funkcije i ako su x_i i h poznati, prethodni izraz se za svaku tačku $x_i, i \in [1, n-1]$ može zapisati na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = ODJ_{desna}(x_1)$$
$$\begin{bmatrix} m_3 & m_4 & m_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = ODJ_{desna}(x_2)$$
$$\vdots$$
$$\begin{bmatrix} m_{3n-6} & m_{3n-5} & m_{3n-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} = ODJ_{desna}(x_{n-1})$$

, gde su množioci $m_0, m_1, \ldots, m_{3n-4}$ izračunati na osnovu poznatih vrednosti.
Matrični zapis prethodnog sistema jednačina je:

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & m_3 & m_4 & m_5 & 0 & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & m_6 & m_7 & m_8 & & & & & \\ & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & & m_{3n-12} & m_{3n-11} & m_{3n-10} & 0 & 0 \\ & & & & & \cdots & 0 & m_{3n-9} & m_{3n-8} & m_{3n-7} & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & m_{3n-6} & m_{3n-5} & m_{3n-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-3} \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ODJ_{desna}(x_1) \\ ODJ_{desna}(x_2) \\ ODJ_{desna}(x_3) \\ \vdots \\ ODJ_{desna}(x_{n-3}) \\ ODJ_{desna}(x_{n-2}) \\ ODJ_{desna}(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Prehodni sistem ima $(n+1)$ kolona, a $(n-1)$ vrsta.

Vrednost funkcije je poznata u krajevima intervala (granični uslovi):

$$f_0 = f(a) = f_a$$
$$f_n = f(b) = f_b$$

Prebacivanjem poznatih vrednosti na desnu stranu prve i poslednje jednačine, suvišne kolone se mogu eliminisati:

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & 0 & 0 & & & & & \\ m_3 & m_4 & m_5 & 0 & \cdots & & & & \\ 0 & m_6 & m_7 & m_8 & & & & & \\ & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & m_{3n-12} & m_{3n-11} & m_{3n-10} & 0 \\ & & & & \cdots & 0 & m_{3n-9} & m_{3n-8} & m_{3n-7} \\ & & & & & 0 & 0 & m_{3n-6} & m_{3n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-3} \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ODJ_{desna}(x_1) - m_0 f_a \\ ODJ_{desna}(x_2) \\ ODJ_{desna}(x_3) \\ \vdots \\ ODJ_{desna}(x_{n-3}) \\ ODJ_{desna}(x_{n-2}) \\ ODJ_{desna}(x_{n-1}) - m_{3n-4} f_b \end{bmatrix} \quad (3)$$

Rešenje sistema je vektor:

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$$

Ako se u vektor uključe poznate vrednosti vrednosti:

$$f = \begin{bmatrix} f_a \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_b \end{bmatrix}$$

Vektor predstavlja vrednosti funkcije u tačkama $a + ih, i \in [0, n]$, tj. numeričko rešenje ODJ sa problemom graničnih uslova (PGU).

Zadatak 1. Napisati metodu konačnih razlika za rešavanje diferencijalne jednačine 2. reda sa PGU nad proizvoljnim intervalom.

1. Definisati 3 funkcije koje vraćaju 3-člane vektore množioca uz f_{i-1}, f_i i f_{i+1} iz jednačina (2):

- za konačnu razliku 2. izvoda:

```
function fX = ddf(h)
    fX = [1 -2 1]/h^2;
end
```

- za konačnu razliku 1. izvoda:

```
function fX = df(h)
    fX = [0 -1 1]/h;
end
```

- za konačnu razliku 0. izvoda (same funkcije):

```
function fX = f(h)
    fX = [0 1 0];
end
```

Pokušati prvo ručno jednu iteraciju metode konačnih razlika nad funkcijom na intervalu $x \in [0, 2\pi]$ sa 10: podintervala za sledeći PGU:

$$f''(x) - \sin x\, f'(x) + 2f(x) = 1 - x$$

$$f(0) = 0$$
$$f(2\pi) = 0$$

Definisati funkciju koja odgovara levoj strani diferencijalne jednačine oslanjajući se na funkcije definisane u koraku 1:

```
left = @(x, h) ddf(h) - sin(x)*df(h) + 2*f(h);
```

Definisati funkciju koja odgovara desnoj strani diferencijalne jednačine:

```
right = @(x) 1 - x;
```

Definisati granične uslove i izračunati korak h:

```
x0 = 0; fX0 = 0;
xN = 2*pi; fXN = 0;
h = (xN - x0)/10;
```

2. Napraviti vektor vrednosti nezavisno promenljive `x` za dati korak `h`:

```
x = x0:h:xN;
```

3. Izračunati dimenziju `dim` matrice `A` i vektora `b` sistema jednačina (3), a zatim ih inicijalizovati:

```
dim = length(x) - 2;
A = zeros(n, n);
b = zeros(n, 1);
```

Izračunati levu i desnu stranu diferencijalne jednačine za x_1:

```
m = left(x(2), h)
b(it) = right(x(2))
```

Rezultat:

```
m =
    2.5330   -2.1306    1.5975

b =
    0.3717
         0
         0
         0
         0
         0
         0
         0
         0
```

4. Popuniti 3-dijagonalnu matricu `A` i vektor `b` sistema jednačina (3), koristeći izračunate vrednosti leve i desne strane diferencijalne jednačine u novoj tački `x` za svaku sledeću vrstu:

```
A = zeros(dim, dim);
b = zeros(dim, 1);
for it = 1:dim
    m = left(x(it + 1), h);
    mid = round(length(m)/2);

    fromA = max(1, it - mid + 1);
    toA = min(dim, it + mid - 1);
    fromM = mid - it + fromA;
    toM = mid - it + toA;
    A(it, fromA:toA) = m(fromM:toM);
    b(it) = right(x(it + 1));
end
```

5. Oduzeti poznate vrednosti `fX0`, odnosno `fXn`, pomnožene odgovarajućim množiocima od prvog, odnosno poslednjeg elementa vektora `b`:

```
mA = left(x(2), h);
b(1) = b(1) - mA(mid - 1)*fX0;
mB = left(x(end - 1), h);
b(end) = b(end) - mB(mid + 1)*fXN;
```

Rezultat:

```
 A =                                                                                        b =
    -2.1306    1.5975         0         0         0         0         0         0         0        0.3717
     2.5330   -1.5524    1.0194         0         0         0         0         0         0       -0.2566
          0    2.5330   -1.5524    1.0194         0         0         0         0         0       -0.8850
          0         0    2.5330   -2.1306    1.5975         0         0         0         0       -1.5133
          0         0         0    2.5330   -3.0661    2.5330         0         0         0       -2.1416
          0         0         0         0    2.5330   -4.0015    3.4685         0         0       -2.7699
          0         0         0         0         0    2.5330   -4.5797    4.0467         0       -3.3982
          0         0         0         0         0         0    2.5330   -4.5797    4.0467       -4.0265
          0         0         0         0         0         0         0    2.5330   -4.0015       -4.6549
```

6. Rešiti sistem jednačina i uklopiti rešenje sa poznatim vrednostima funkcije u krajevima intervala:

```
fX = A\b;
fX = [fX0 fX' fXN]
```

Rezultat:

```
fX =
     0    3.7703    5.2610   -1.6086  -16.3908  -20.2564   -8.9736    3.6419    8.8988    6.7963         0
```

7. Sada je moguće definisati funkciju koja sadrži prethodni algoritam:

```
function fX = finiteDifference(left, right, x0, fX0, xN, fXN, h)
    x = x0:h:xN;

    .
    .
    .

    fX = [fX0 fX' fXN];
end
```

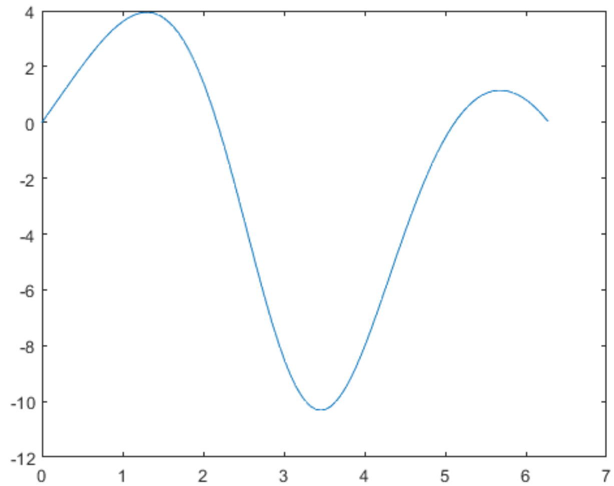
8. Testirati funkciju na primeru:

```
left = @(x, h) ddf(h) - sin(x)*df(h) + 2*f(h);
right = @(x) 1 - x;

x1 = 0; fX1 = 0;
x2 = 2*pi; fX2 = 0;
h = (x2 - x1)/100;

x = x1:h:x2;
fX = finiteDifference(left, right, x1, fX1, x2, fX2, h);
plot(x, fX)
```

Rezultat:



1. Grafik rešenja PGU

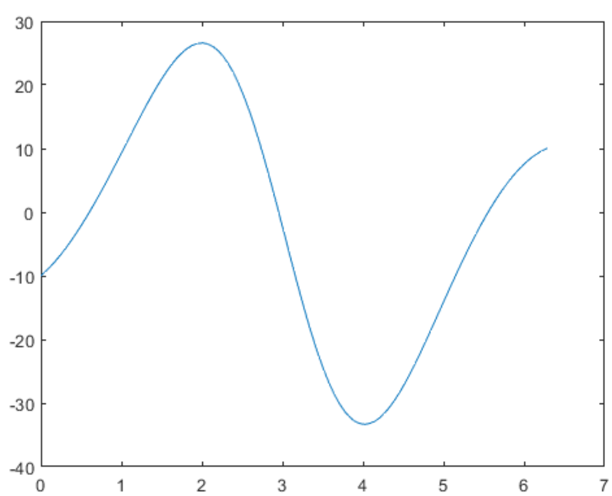
9. Pomeriti granične uslove:

```
left = @(x, h) ddf(h) - sin(x)*df(h) + 2*f(h);
right = @(x) 1 - x;

x1 = 0; fX1 = -10;
x2 = 2*pi; fX2 = 10;
h = (x2 - x1)/100;

x = x1:h:x2;
fX = finiteDifference(left, right, x1, fX1, x2, fX2, h);
plot(x, fX)
```

Rezultat:



2. Drugačije rešenje usled novih graničnih uslova