6. Aproksimacija funkcija

1. Date su tačke:

```
x = [0.0000    1.2500    2.5000    3.7500    5.0000];
fX = [1.7499    0.9830    1.2554    3.0802    2.3664];
```

2. Nacrtati poznate tačke:

```
scatter(x, fX, 'black'), hold on
```

3. Naći polinom 3. stepena koji aproksimira funkciju kroz poznate tačke

```
p = polyfit(x, fX, 3)
```

Rezultat:

```
p =
   -0.1527    1.2208   -2.1641    1.8157
```

4. Naći ukupnu kvadratnu grešku po svim tačkama:

```
pX = polyval(p, x)
sumSquaredErr = sum((fX - pX).^2)
```

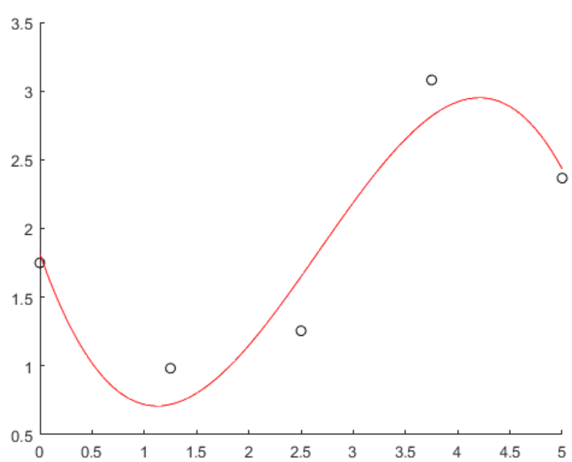
Rezultat:

```
sumSquaredErr =
    0.3028
```

5. Nacrtati pronađeni polinom:

```
x = linspace(min(x), max(x), 100);
pX = polyval(p, x);
plot(x, pX, 'red') , hold off
```

Rezultat:



Slika 1. Polinom

Metoda najmanjih kvadrata

Zadatak 1. Napisati metodu najmanjih kvadrata za aproksimaciju funkcije kroz proizvoljan broj poznatih tačaka polinomom proizvoljnog stepena (bar za 1 manjeg od broja tačaka).

Potrebno je naći polinom $(m-1)$-tog stepena $(m \leq n)$, gde je n broj poznatih tačaka:

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0$$

Da bi ukupna kvadratna greška po svim tačkama bila što manja, potrebno je rešiti sledeći problem:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(a_j {x_i}^j - f(x_i)\right)^2}{\partial a_0} = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(a_j {x_i}^j - f(x_i)\right)^2}{\partial a_1} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(a_j {x_i}^j - f(x_i)\right)^2}{\partial a_m} = 0$$

Rešenje problema je:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_j {x_i}^j {x_i}^0 - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) {x_i}^0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_j {x_i}^j {x_i}^1 - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) {x_i}^1 = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_j {x_i}^j {x_i}^m - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) {x_i}^m = 0$$

Rešenje problema se može zapisati i na sledeći način:

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=1}^{n} {x_i}^j {x_i}^0 a_j = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) {x_i}^0$$

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=1}^{n} {x_i}^j {x_i}^1 a_j = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) {x_i}^1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{i=1}^{n} {x_i}^j {x_i}^m a_j = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) {x_i}^m$$

Matrični zapis rešenja je:

$$(A^T A) a = A^T f_x$$

$$A = \begin{bmatrix} {x_1}^0 & {x_1}^1 & \cdots & {x_1}^m \\ {x_2}^0 & {x_2}^1 & & {x_2}^m \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ {x_n}^0 & {x_n}^1 & \cdots & {x_n}^m \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \qquad f_x = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Vektor a je rešenje sistema jednačina:

$$a = (A^T A) \backslash (A^T f_x)$$

Pokušati prvo ručno nalaženje polinoma za skup tačaka:

```
x = [0.0000    1.2500    2.5000    3.7500    5.0000];
fX = [1.7499    0.9830    1.2554    3.0802    2.3664];

order = 3;
```

1. Naći broj poznatih tačaka n i broj množioca polinoma m:

```
n = length(x);
m = order + 1;
```

2. Vektore `x` i `fX` je potrebno transponovati da bi dimenziono odgovarali izrazima u matričnoj jednačini (jer su dati kao vektori vrsta):

```
x = x';
fX = fX';
```

3. Formirati matricu A:

```
A = zeros(n, m);
for it = 1:m
    A(:, it) = x.^(it - 1);
end
```

4. Rešiti sistem jednačina:

```
a = (A'*A)\(A'*fX);
```

Rešenje će nastati u sledećem obliku:

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

5. Potrebno je dovesti rešenje u sledeći oblik:

$$a = [a_m \quad a_{m-1} \quad \cdots \quad a_0]$$

```
p = fliplr(a')
```

Rezultat:

```
p =
    -0.1527    1.2207   -2.1640    1.8157
```

6. Sada je moguće definisati funkciju koja sadrži prethodni postupak:

```
function p = lSquares(x, fX, order)
    .
    .
    .
end
```

7. Testirati funkciju na primeru:

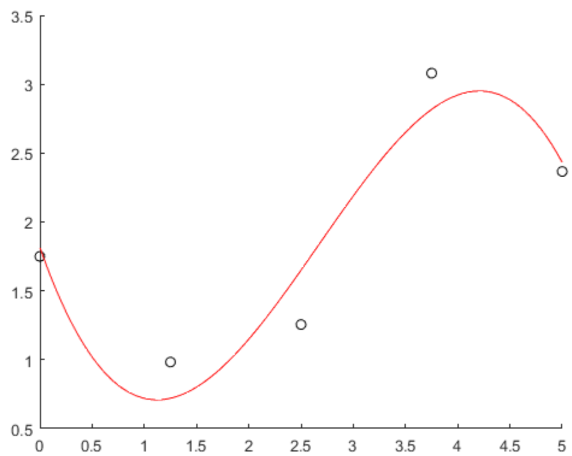
```
x = [0.0000    1.2500    2.5000    3.7500    5.0000];
fX = [1.7499    0.9830    1.2554    3.0802    2.3664];
scatter(x, fX, 'black'), hold on

p = lSquares(x, fX, 3)

x = linspace(min(x), max(x), 100);
pX = polyval(p, x);
plot(x, pX, 'red'), hold off
```

Rezultat:

```
p =
    -0.1527    1.2207   -2.1640    1.8157
```



Slika 2. Niži stepen polinoma

8. Povećati stepen polinoma:

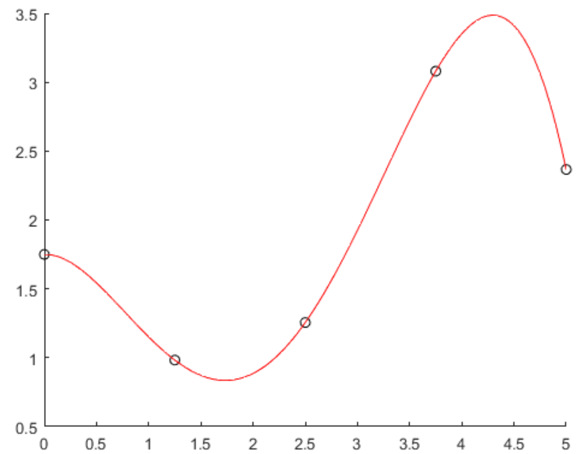
```
x = [0.0000    1.2500    2.5000    3.7500    5.0000];
fX = [1.7499    0.9830    1.2554    3.0802    2.3664];
scatter(x, fX, 'black'), hold on

p = lSquares(x, fX, 4)

x = linspace(min(x), max(x), 100);
pX = polyval(p, x);
plot(x, pX, 'red'), hold off
```

Rezultat:

```
p =
   -0.0786    0.6331   -1.1822    0.0284    1.7499
```



Slika 3. Maksimalni stepen polinoma