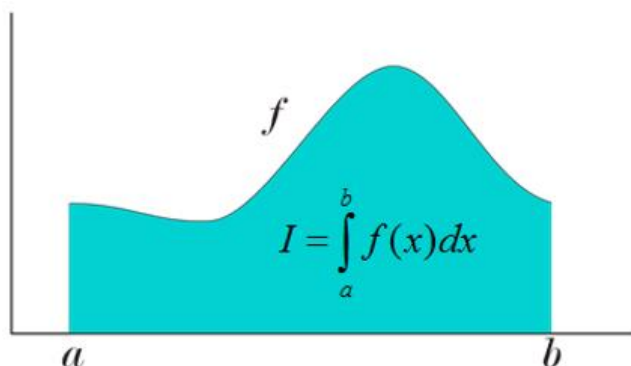


8. Numerička integracija

1. Površina ispod funkcije

Površina ispod funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ jednaka je vrednosti određenog integrala I te funkcije nad istim intervalom:

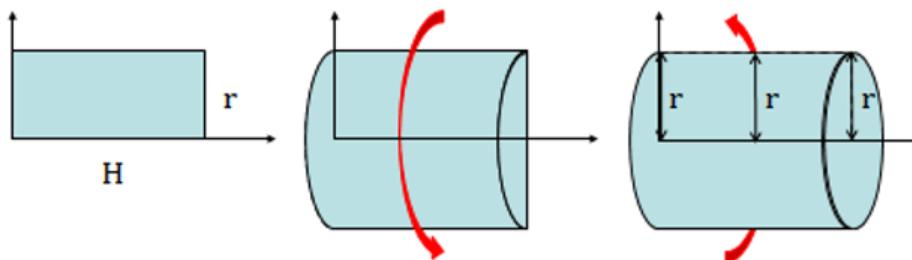


Slika 1. Površina ispod funkcije

2. Zapremina simetričnih tela

Rotacijom površi oko prave koja se nalazi u istoj ravni dobija se simetrično telo.

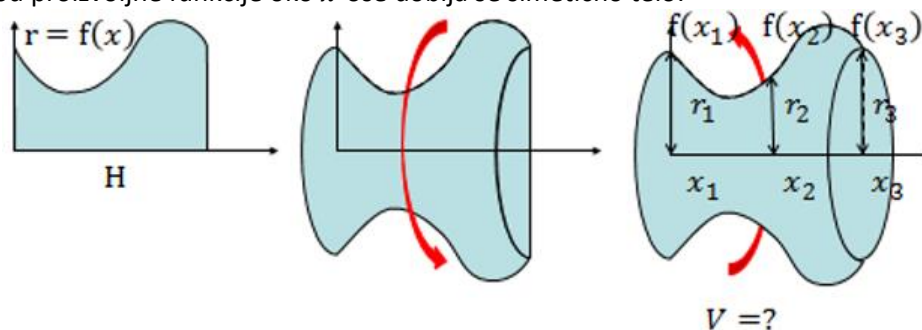
Npr. rotacijom pravougaonika oko x -ose dobija se cilindar:



Slika 2. Cilindar dobijen rotacijom pravougaonika

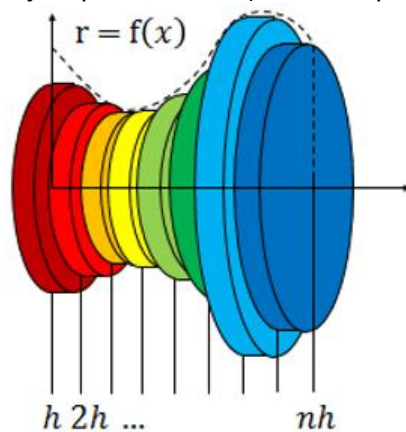
Zapremina cilindra je: $V = r^2 \pi H$, $r = \text{const.}$

Rotacijom površi ispod proizvoljne funkcije oko x -ose dobija se simetično telo:



Slika 3. Simetrično telo dobijeno rotacijom površi ispod proizvoljne funkcije

Zapremina takvog tela se može naći integracijom po diskovima (sumom zapremina manjih cilindara):



Slika 4. Integracija po diskovima

$$h = \frac{H}{n}$$

$$V = r_1^2 \pi h + r_2^2 \pi h + \dots + r_n^2 \pi h = \sum_{i=1}^n r_i^2 \pi h$$

$$V = f(x_1)^2 \pi h + f(x_2)^2 \pi h + \dots + f(x_n)^2 \pi h = \sum_{i=1}^n f(x_i)^2 \pi h$$

$$V = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i)^2 \pi h = \int_0^H f(x)^2 \pi dx$$

Zapremina tela je: $V = \pi \int_0^H f(x)^2 dx$

1. Izračunati vrednost integrala funkcije $f(x) = \sin x$ nad intervalom $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

rešenje:

$$I = 1 \text{ (za Simpsonovu metodu)}$$

2. Izračunati vrednost integrala $I = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{0.2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

rešenje:

$$I = 0.1585 \text{ (za Simpsonovu metodu)}$$

3. Izračunati površinu između 2 krive: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ nad intervalom $[0, 2]$.

rešenje:

$$P = 1.4475 \text{ (za Simpsonovu metodu)}$$

4. Izračunati zapreminu tela dobijenog rotacijom površi ispod funkcije $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ nad intervalom $[1, 2]$ oko x -ose.

rešenje:

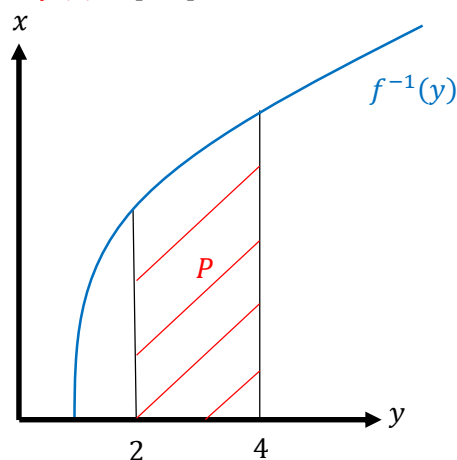
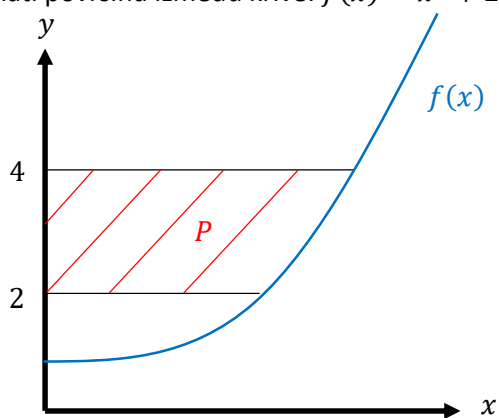
$$V = 776.3355 \text{ (za Simpsonovu metodu)}$$

5. Izračunati zapreminu tela dobijenog rotacijom površi ograničene funkcijama: $f(x) = e^x + 2$, $g(x) = \sqrt{x}$ nad intervalom $[2,3]$ oko x -ose.

rešenje:

$$V = 712.2030 \text{ (za Simpsonovu metodu)}$$

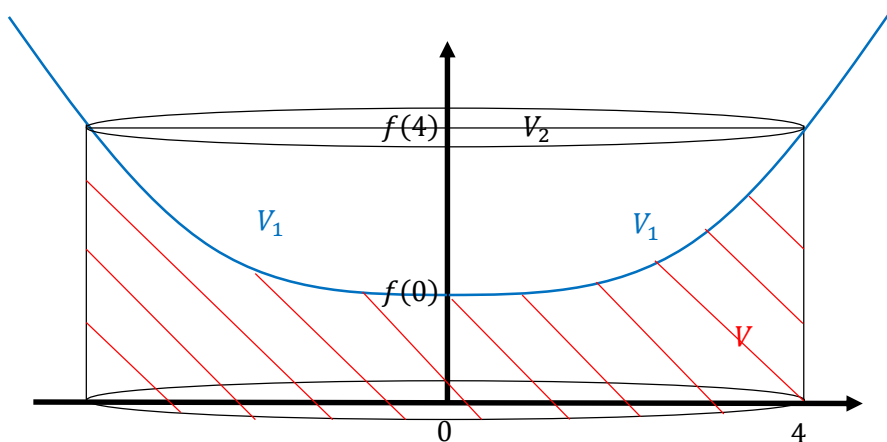
6. Izračunati površinu između krive: $f(x) = x^2 + 2$ i y -ose nad intervalom $f(x) \in [2, 4]$.



rešenje:

$$P = 1.8854 \text{ (za Simpsonovu metodu)}$$

7. Izračunati zapreminu tela dobijenog rotacijom površi ispod funkcije: $f(x) = x^2 + 2$ nad intervalom $x \in [0, 4]$ oko y -ose.



rešenje:

$$V = 502.6548 \text{ (za Simpsonovu metodu)}$$

8. Telo se kreće brzinom $v(t) = t^2 - 2t + 3$. Naći pređeni put tela posle $t_1 = 5s$.

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$s = \int_0^{t_1} v(t) dt$$

rešenje:

$$s = 31.6667 \text{ (za Simpsonovu metodu)}$$