Könyvolvasás

Nándi Bátfai Gréta Bátfai Matyi Bátfai Norbi Bátfai

2020. május 12.

1. MatLog

A Péter Rózsa: Játék a végtelennel című könyvével kezdtünk. A 261. oldal 3. bekezdésétől kb. a 265. oldalig jeleltük le:

- Bevezetés a matematikai logikába 1., `https://youtu.be/j1IBkFO3UNk`

Majd Dragálin Albert: Bevezetés a matematikai logikába című könyvének jelöléseivel (használva közben a `http://detexify.kirelabs.org/classify.html` lapot a legmegfelelőbb logikai szimbólumok megtalálásához) próbálkoztunk latex-ben:

- Második TeXelés, `https://youtu.be/qly_9ECViBM`

Aztán a Dragálin könyv 44. oldalával folytattuk, a természetes nyelvű mondatok matlog átíratával.

1.1. Természetes nyelvű mondatok matlog átírata

Dragálin Albert: Bevezetés a matematikai logikába, 44. oldal.

1.1.1. A könyv példái

Első stream.

- Minden hal, kivéve a cápát, szereti a gyerekeket.
  $\forall x(\neg \text{Cápa}(x) \supset \text{SzeretiGyerekek}(x))$
- Minden ember, kivéve a pacifistákat, szereti a fegyvereket.
  $\forall x(\neg \text{pacifista}(x) \supset \text{Szeretifegyver}(x))$
- Péter akkor szellemes, ha részeg
  $\text{PéterRészeg} \supset \text{PéterSzellemes}$
- Péter **csak** akkor szellemes, ha részeg.
  $\text{PéterSzellemes} \supset \text{PéterRészeg}$

- Péter ha részeg, akkor szellemes.
  PéterRészeg $\supset$ PéterSzellemes

- Péter **akkor és csak** akkor szellemes, ha részeg.
  (PéterRészeg $\supset$ PéterSzellemes) $\wedge$ (PéterSzellemes $\supset$ PéterRészeg)

Második stream.

- Minden ember szeret valakit.
  $\forall x \exists y Szeret(x, y)$

- Valakit minden ember szeret.
  $\exists y \forall x Szeret(x, y)$ *vegyük észre, hogy mi a különbség az előző formulával összehasonlítva: a kvantokrok sorrendje számít!*

- Senki nem szeret mindenkit.
  $\neg \exists x \forall y Szeret(x, y)$

- Valaki szeret mindenkit.
  $\exists x \forall y Szeret(x, y)$

- Valaki senkit sem szeret.
  $\exists x \forall y \neg Szeret(x, y)$

- Mindenki szeret valakit vagy valaki szeret mindenkit.
  $\forall x \exists y Szeret(x, y) \vee \exists x \forall y Szeret(x, y)$

1.2. A matlog nyelv

A matematikai logikai (matlog) nyelv a beszélt nyelvnél pontosabb kifejező eszköz. A beszélt nyelv szavakból és mondatokból épül, még a matlog nyelv termekből és formulákból. A termek változókból és függvényekből épülnek.Term például az az x változó, ami befutotta az embereket. A formulák termekből és prédikátumokból épülnek. Formula például a korábban használt Szeret(x, y) két változós prédikátum. Illetve a logikai jelekkel a formulákból további formulák építhetőek fel. Ha A és B formula, akkor a

- $(A \wedge B)$ is az, olvasva "A és B", LaTeX-ben leírva: `$(A \wedge B)$`
- $(A \vee B)$ is az, olvasva "A vagy B", LaTeX-ben leírva: `$(A \vee B)$`
- $(A \supset B)$ is az, olvasva "A-ból következik B", LaTeX-ben leírva: `$(A \supset B)$`
- $\neg A$ is az, olvasva "Nem A", LaTeX-ben leírva: `$\neg A$`
- $\exists x A$ is az, olvasva "Van olyan x, hogy A", LaTeX-ben leírva: `$\exists x A$`
- $\forall x A$ is az, olvasva "Minden x-re A", LaTeX-ben leírva: `$\forall x A$`

1.2.1. Az Ar matlog nyelv

A 0, x, y, $z \ldots$ változók természetes szám típusúak (a 0 egy konstans, azaz nem változó változó, a 0 természetes szám jele).

Az S, $+$, $\cdot$ függvények.

A termek építésének kódja:

1. minden változó neve term, például 0, x
2. ha t term, akkor St is az, például Sx, $SSS0$, $S(0+x)$
3. ha t, v termek, akkor $(t+v)$ és $(t \cdot v)$ is termek, például $(x+0)$, $(Sx+SSS0)$.

Formulák építéséhez egyetlen prédikátum van, az Egyenlő(t, v), amit olvashatóbban így írunk $(t = v)$. Például az $((x+0) = SSS0)$ egy formula. Ez a formula az $x = 3$ kiértékelés mellett igaz egyébként hamis. Mikor igaz az $(x + y = Sx + x)$ formula? Mikor igaz az $(x = SSy)$ formula?

Alapozzuk meg a következő formulákat! Lásd a `https://www.twitch.tv/nbatfai` csatornán közvetített élő adások archívumát a `https://www.youtube.com/c/nbatfai` YTB csatornán, konkrétan például: `https://youtu.be/ZexiPy3ZxsA` és `https://youtu.be/DUGPRlXk_2w`.

- $(x \leq y) \leftrightharpoons \exists z(z + x = y)$
- $(x \neq y) \leftrightharpoons \neg(x = y)$
- $(x < y) \leftrightharpoons \exists z(z + x = y) \wedge \neg(x = y)$
- $(x < y) \leftrightharpoons (x \leq y) \wedge (x \neq y)$
- $(x|y) \leftrightharpoons \exists z(z \cdot x = y) \wedge (x \neq 0)$
- $(x \text{ páros}) \leftrightharpoons (SS0|x)$
- $(\infty \text{ sok szám van}) \leftrightharpoons (\forall x \exists y(x < y))$
- $(\text{véges sok szám van}) \leftrightharpoons (\exists y \forall x(x < y))$
- $(x \text{ prím}) \leftrightharpoons (\forall z(z|x) \supset (z = x \vee z = S0)) \wedge (x \neq 0) \wedge (x \neq S0)$
- $(\infty \text{ sok prímszám van}) \leftrightharpoons (\forall x \exists y((x < y) \wedge (y \text{ prím})))$
- $(\infty \text{ sok iker-prímszám van}) \leftrightharpoons (\forall x \exists y((x < y) \wedge (y \text{ prím}) \wedge (SSy \text{ prím})))$
- $(\text{véges sok prímszám van}) \leftrightharpoons (\exists y \forall x(x \text{ prím}) \supset (x < y))$
- $(\text{véges sok prímszám van}) \leftrightharpoons (\exists y \forall x(y < x) \supset \neg(x \text{ prím}))$

Olvassuk el a most feldolgozott, Dragálin könyv 15-19 oldalait!

"Hol a tagadás lábát megveti" Felmerült, hogy a (véges sok prímszám van) kifejezhető lenne a (∞ sok prímszám van) tagadásaként, azaz (véges sok prímszám van) $\leftrightharpoons$ $\neg$(∞ sok prímszám van)

Tagadjuk az egyik végességet kifejező formulánkat!

$$\begin{gathered}
\neg\exists y \forall x((y < x) \supset \neg(x \text{ prím})) \\
\forall y \neg\forall x((y < x) \supset \neg(x \text{ prím})) \\
\forall y \exists x \neg((y < x) \supset \neg(x \text{ prím})) \\
\forall y \exists x((y < x) \wedge \neg\neg(x \text{ prím})) \\
\forall y \exists x((y < x) \wedge (x \text{ prím}))
\end{gathered}$$

az eredmény éppen a végtelenséges formulánk volt!

Ismételjük meg ezt a számítást a másik formulával!

$$\neg\exists y \forall x((x \text{ prím}) \supset (x < y))$$