Teória automatického riadenia III.

Cvičenie X, MPC polohovanie bremena žeriavu

G. Takács, G. Batista

Ústav automatizácie, merania a aplikovanej informatiky
Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita

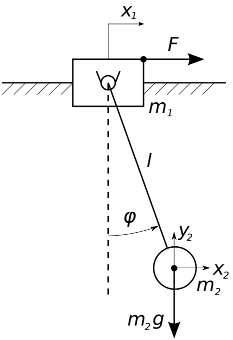
Na dnešnom cvičení

Dnes si urobíme regulátor polohovania bremena žeriavu so všetkými obmedzeniami. K tomu budeme potrebovať:

- Odvodenie matematického modelu vozíka s kyvadlom
- Nelineárna simulácia dynamiky mechanického systému
- Zostavenie lineárneho LQ regulátora so saturáciami
- Zostavenie lineárneho MPC regulátora s obmedzeniami vstupov a stavov

Odvodenie modelu

Mechanický model:



pričom

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + l\sin\phi \\ y_2 &= l(1-\cos\phi) \end{aligned}$$

Kinetická energia systému:

$$E_k = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

Potenciálna energia systému:

$$E_p = m_2 g l(1-\cos\phi)$$

Disipačná energia systému:

$$D = 0$$

Zovšeobecnené sily:

$$Q_1 = F, Q_2 = 0$$

Odvodenie modelu

Nato aby sme dostali matematický model systému dosadíme energie a sily do Langrangeovej rovnice II. druhu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = Q_j$$

Po dosadení a derivovaní dostávame nelineárny systém rovníc:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l \cos\phi\ddot{\phi} &= F \\ m_2 l \cos\phi\ddot{x}_1 + m_2 l^2\ddot{\phi} &= -m_2 g l \sin\phi \end{aligned}$$

Odvodenie modelu

Pohybové rovnice v maticovom tvare:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_N\ddot{\boldsymbol{q}} &= \boldsymbol{f}_N \\ \begin{bmatrix} (m_1+m_2) & m_2 l\cos\phi \\ m_2 l\cos\phi & m_2 l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F \\ -m_2 g l\sin\phi \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Takýto nelineárny model je vhodný na simuláciu. Je však potrebné diskrétne integrovať zrýchlenia a rýchlosti v každom simulačnom kroku. Pre potrebu zostavenia regulátora linearizujeme tento systém pri podmienke $\phi \in (-5^\circ, 5^\circ)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_L\ddot{\boldsymbol{q}} &= \boldsymbol{f}_L \\ \begin{bmatrix} (m_1+m_2) & m_2 l \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F \\ -m_2 g l\phi \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Odvodenie modelu

Linearizovaný systém prepíšeme do tvaru:

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} \quad + \quad \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}u \\ \begin{bmatrix} (m_1+m_2) & m_2 l \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 g l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F \end{array}$$

Nato aby sme tento lineárny systém previedli do tvaru stavového modelu je potrebné urobiť ešte nasledovné transformácie:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} &= \boldsymbol{f}u \qquad /\boldsymbol{M}^{-1} \\ \boldsymbol{I}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q} &= \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}u \\ \ddot{\boldsymbol{q}} &= -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}u \end{aligned}$$

Tu si označíme $-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{G}_1$ a $u = F$

Stavový model

Následne rozšírime stavový vektor o rýchlosť a uhlovú rýchlosť a dostaneme stavový model v tvare:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}u$$

Keďže sa nám nechce počítať analyticky inverziu matice $\boldsymbol{M}$, rozpíšeme tento model v maticovom tvare pričom $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{G}_1$ riešime v Matlab-e.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{F}_1(1,1) & 0 & \boldsymbol{F}_1(1,2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \boldsymbol{F}_1(2,1) & 0 & \boldsymbol{F}_1(2,2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{G}_1(1) \\ 0 \\ \boldsymbol{G}_1(2) \end{bmatrix} u$$

Nelineárna simulácia

Pre uskutočnenie nelineárnej simulácie potrebujeme najskôr definovať počiatočný stav $\dot{\boldsymbol{q}}$ a $\boldsymbol{q}$. Potom je treba prepočítať matice $\boldsymbol{M}_N$ a $\boldsymbol{f}_N$, vypočítať $\ddot{\boldsymbol{q}}$ a potom výsledok integrovať v čase. Algoritmus takého cyklu vyzerá nasledovne:

$$\boldsymbol{q}_0 = [...]$$
$$\dot{\boldsymbol{q}}_0 = [...]$$

cyklus:

$$\boldsymbol{M}_N = [...]$$
$$\boldsymbol{f}_N = [...]$$
$$\ddot{\boldsymbol{q}}_{k+1} = \boldsymbol{M}_N^{-1} \boldsymbol{f}_N$$
$$\dot{\boldsymbol{q}}_{k+1} = \dot{\boldsymbol{q}}_k + \ddot{\boldsymbol{q}}_{k+1} dt$$
$$\boldsymbol{q}_{k+1} = \boldsymbol{q}_k + \dot{\boldsymbol{q}}_{k+1} dt$$

Procesné obmedzenia

Zavedieme 3 druhy obmedzení:

- obmedzenie absolútnej veľkosti sily pôsobiacej na vozík $u \in (-10, 10)$, kvôli maximálnemu momentu pohonov
- obmedzenie prírastku sily pôsobiacej na vozík $du \in (-5, 5)$, aby sme sa vyhli nežiadaným prúdovým špičkám v pohone
- obmedzenie výkyvového uhla bremena $\phi \in (-5^\circ, 5^\circ)$, aby sa zamedzilo nelineárnemu chovaniu systému. Zaručí sa tým správna funkčnosť lineárneho regulátora

$5^\circ = 0.087266$ rad

Obmedzenie prírastku vstupu v MPC

Ak sa optimalizuje sekvencia vstupov, obmedzenie ich prírastku má podobu:

Kladný prírastok:

$$
\begin{aligned}
u_1 &\leq u_0 + du \\
u_2 &\leq u_1 + du \\
u_3 &\leq u_2 + du
\end{aligned}
$$

Záporný prírastok:

$$
\begin{aligned}
u_1 &\geq u_0 - du \\
u_2 &\geq u_1 - du \\
u_3 &\geq u_2 - du
\end{aligned}
$$

Prepísané:

$$
\begin{aligned}
u_1 &\leq u_0 + du \\
u_2 - u_1 &\leq du \\
u_3 - u_2 &\leq du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-u_1 &\leq -u_0 + du \\
-u_2 + u_1 &\leq du \\
-u_3 + u_2 &\leq du
\end{aligned}
$$

Obmedzenie prírastku vstupu v MPC

Tieto obmedzenia v maticovej forme.

Kladné:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} u_0 + du \\ du \\ du \end{bmatrix}$$

Záporné:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} du - u_0 \\ du \\ du \end{bmatrix}$$

Parametre systému

$$
\begin{aligned}
m_1 &= 2\ [\mathrm{kg}] \\
m_2 &= 1\ [\mathrm{kg}] \\
l &= 4\ [\mathrm{m}] \\
g &= 9.81\ [\mathrm{ms}^{-1}] \\
Ts &= 0.1\ [\mathrm{s}] \\
x_{1ziadana} &= [10, 0, 0, 0]^T
\end{aligned}
$$

Zadanie

- vytvorte lineárne regulátory pre polohovadlo
  -saturovaný LQ
  -MPC s obmedzeniami
- oba regulátory aplikujte na nelineárnu simuláciu dynamiky polohovadla
- regulátory naladťe tak aby systém dosiahol žiadaný stav $x_{1ziadana}$ za zhruba 10s
- vyšetrite chovanie MPC regulátora pre rôzne dĺžky predikčného horizontu
- v závere slovne zhodnoťte výkon oboch regulátorov, ich klady a zápory a napíšte aj vaše postrehy

Bonusové úlohy

- animácia polohovadla, +1 bod
- integrovanie Kálmánovho filtra do regulátora, pričom meraná je iba poloha vozíka x_1 a šum jej merania sa pohybuje v realistických medziach, +2 body