Teória automatického riadenia III.

Cvičenie V, Kálmánov filter

G. Takács, G. Batista

Ústav automatizácie, merania a aplikovanej informatiky
Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita

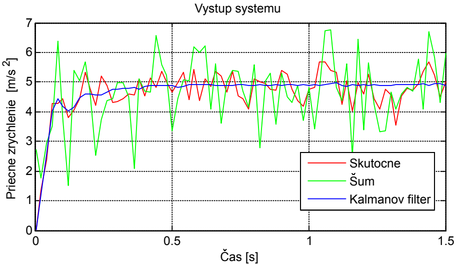
Čo je Kálmánov filter

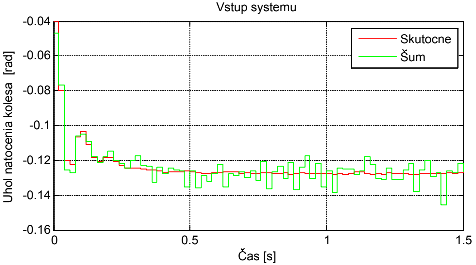
Diskrétny Kálmánov filter rekonštruuje stav systému, pričom minimalizuje varianciu chyby odhadu, t.j. odhaduje stav systému ktorého výstupný signál je značne zašumený

Používa sa v prípade keď:

- poznáme dynamiku systému
- niektorý zo stavov nie je merateľný
- máme k dispozícií viac senzorov tej istej veličiny s rozdielnou presnosťou
- meraný výstup je zašumený
- poznáme varianciu a kovarianciu merania a procesu

Čo je Kálmánov filter





Čo je Kálmánov filter

Pre diskrétny systém:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

kde $\mathbf{w}_k$ a $\mathbf{v}_k$ sú šum procesu a merania

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= E[\mathbf{w}\mathbf{w}^T] \\ \mathbf{R} &= E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] \end{aligned}$$

z toho je **Q** kovariačná matica šumu procesu a **R** je kovariačná matica šumu merania

Kálmánov filter

apriórny odhad stavu

$$\mathbf{e}_{k+1}^{-} = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-}$$

aposteriórny odhad stavu

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}$$

Kovariancie potom:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^{-} &= E[\mathbf{e}_{k+1}^{-}\mathbf{e}_{k+1}^{-T}] \\ \mathbf{P}_{k+1} &= E[\mathbf{e}_{k+1}\mathbf{e}_{k+1}^{T}] \end{aligned}$$

Aplikovateľnosť filtra

Pre vyhodnotenie aplikovateľnosti Kálmánovho filtra je nutné vyšetriť pozorovateľnosť systému:

$$Ob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

kde hodnosť matice *Ob* musí byť rovná hodnosti matice dynamiky systému

Kálmánov filter

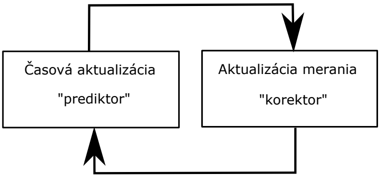
chceme dostať aposteriórny odhad:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-} + \mathbf{K}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-})$$

kde **K** je Kálmánovo zosilnenie

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^{-}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}_k^{-}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}$$

Pre nás



$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{C}\mathbf{C}^T diag(\sigma_y^2)\\ \mathbf{Q} &= \mathbf{B}\mathbf{B}^T diag(\sigma_u^2)\\ \mathbf{P}_0 &= \mathbf{Q}\end{aligned}$$

Prediktor

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k\\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}\end{aligned}$$

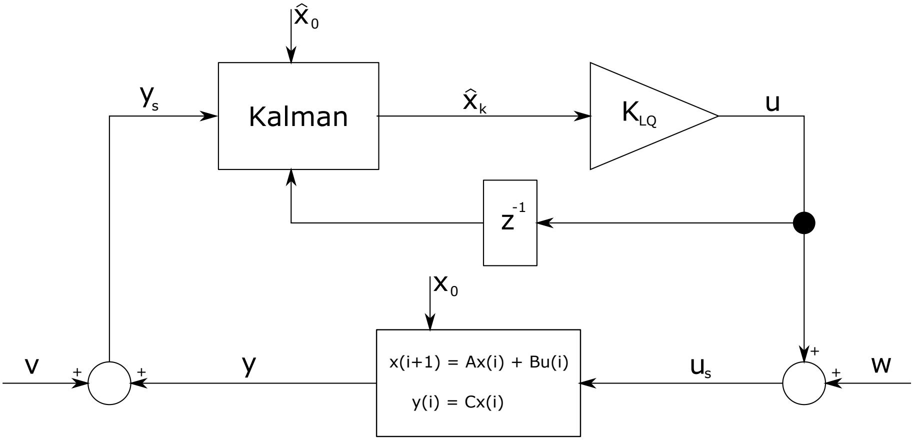
Korektor

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^-\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}_k^-\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}\\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-)\\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})\mathbf{P}_k^-\end{aligned}$$

Zadanie

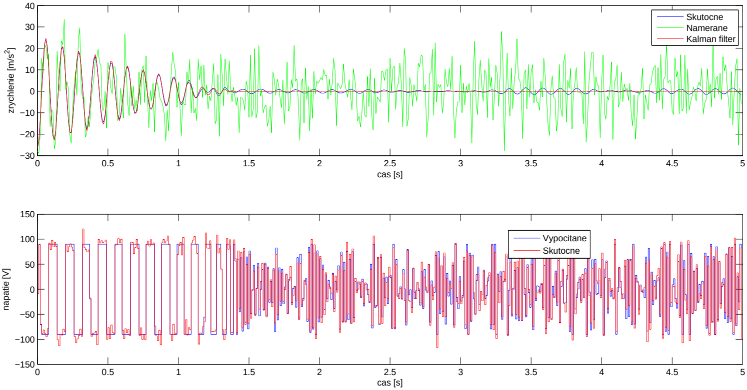
- načítajte váš identifikovaný model a LQ regulátor z predošlej hodiny
- nastavte maticu merania na meranie zrýchlenia $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$
- nastavte smerodajnú odchýlku šumu merania na $\sigma_y = 10m/s^2$
- nastavte smerodajnú odchýlku šumu procesu na $\sigma_u = 10V$
- urobte diskrétnu simuláciu saturovaného LQ riadenia pričom:
  - šum vstupu a výstupu simulujte pomocou funkcie "**random**" ktorej argument je relevantná smerodajná odchýlka
  - vstup LQ regulátora je výstup Kálmánovho filtra (to znamená že si ten filter musíte naprogramovať)
- graficky porovnajte reálny výstup systému, nameraný(zašumený) signál, odhad výstupu Kálmánovým filtrom
- taktiež porovnajte vypočítaný vstup systému a reálny(zašumený)
- graficky porovnajte frekvenčné charakteristiky spomenutých troch výstupných signálov
- kód dobre okomentujte a grafické výstupy spravte tak aby sa v nich dalo orientovať

Schéma simulácie



Očakávaný výstup

Odozva:



Očakávaný výstup

Frekvenčná charakteristika: