Teória automatického riadenia III.

Cvičenie, Optimalizácia, Lagrangeove multiplikátory

G. Takács, G. Batista

Ústav automatizácie, merania a aplikovanej informatiky
Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita

Zápis optimalizačného problému:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \\ & h_j(x) = 0, \end{aligned}$$

kde $g_i(x)$ sú obmedzenia s nerovnosťami, $i = 1, ..., m$
a $h_j(x)$ sú obmedzenia s rovnosťami, $j = 1, ..., l$

Takýto optimalizačný problém sa rieši pomocou Lagrangeových multiplikátorov, ktoré sa značia μ_i pre nerovnosti, λ_j pre rovnosti.

Zovšeobecnené riešenie tohto problému musí spĺňať podmienky KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

Nutné podmienky

- 1. Stacionarita (Stationarity)
  - pre max.: $\nabla f(x^\star) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^\star) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_j \nabla h_j(x^\star)$
  - pre min.: $-\nabla f(x^\star) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^\star) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_j \nabla h_j(x^\star)$
- 2. Primárna prípustnosť (Primal feasibility)
  - $g_i(x^\star) \leq 0$, pre všetky $i = 1, ..., m$
  - $h_j(x^\star) = 0$, pre všetky $j = 1, ..., l$
- 3. Duálna prípustnosť (Dual feasibility)
  - $\mu_i \geq 0$, pre všetky $i = 1, ..., m$
- 4. Doplnková vôľa (Complementary slackness)
  - $\mu_i g_i(x^\star) = 0$, pre všetky $i = 1, ..., m$

- $x^\star$ označuje polohu optima

Ak sú splnené nutné podmienky, nemusí to znamenať že je výsledok globálne optimálny. Treba sa pozrieť aj na podmienky regularity a na postačujúce podmienky (je ich veľa, tak ich teraz neuvádzam).

Domáca úloha

Skupina A

1.

$$\begin{aligned} \min, \max \quad & x^2 + y \\ \text{s.t.} \quad & x^2 - y^2 = 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \min, \max \quad & x^2 + 2y^2 \\ \text{s.t.} \quad & x^2 + y^2 \leq 4 \end{aligned}$$

Skupina B

1.

$$\begin{aligned} \min, \max \quad & x^2 y \\ \text{s.t.} \quad & x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \min, \max \quad & x^4 + y^2 \\ \text{s.t.} \quad & x^2 + y^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Výpočet oboch príkladov overte kontrolou nutných podmienok KKT