# Teória automatického riadenia III.

## Cvičenie VI, Kriteriálna funkcia

G. Takács, G. Batista, E.Mikuláš

Ústav automatizácie, merania a aplikovanej informatiky
Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita

# Na dnešnom cvičení

Zostavenie kriteriálnych matíc potrebných k optimalizácií

- Hessian $\mathbf{H}$
- $\mathbf{G}, \mathbf{F}, \mathbf{P}_f$

pre ľubovoľný diskrétny lineárny stavový systém a váhovacie matice.

Ďalej sa porovná MPC bez obmedzení s LQ

# Z prednášky

Aká bude optimálna sekvencia budúcich vstupov?

$$\vec{\boldsymbol{u}}_k^* = arg \min_{\vec{\boldsymbol{u}}_k} J(\boldsymbol{x}_k, \vec{\boldsymbol{u}}_k)$$

Kriteriálna funkcia vo forme:

$$J_k = \sum_{i=0}^{n_p-1} (\boldsymbol{x}_{k+i}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x}_{k+i} + \boldsymbol{u}_{k+i}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{u}_{k+i}) + \boldsymbol{x}_{k+n_p}^T \boldsymbol{P}_f \boldsymbol{x}_{k+n_p}$$

# Z prednášky

Predickia stavov:

$$\boldsymbol{x}_{k+i} = \boldsymbol{M}_i \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{N}_i \boldsymbol{u}_k$$

$\boldsymbol{x}_{k+i}$ dosadíme do $J_k$ a dostaneme:

$$J_k = \boldsymbol{u}_k^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{u}_k + 2\boldsymbol{x}_k^T \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{x}_k^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{x}_k$$

# Z prednášky

Teda hľadáme minimum v tvare (člen $\boldsymbol{x}_k^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{x}_k$ nám nemení polohu minima tak ho môžeme vynechať):

$$\boldsymbol{u}_k^* = arg \min_{\boldsymbol{u}_k} J(\boldsymbol{u}_k^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{u}_k + 2\boldsymbol{x}_k^T \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{u}_k)$$

po derivácií kriteriálnej funkcie dostaneme:

$$\nabla J_k = 2\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_k + 2\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_k$$

a $J_k = 0$ potom:

$$\boldsymbol{u}_k^\star = -\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_k$$

# Čo k tomu potrebujeme

- LQ zosilnenie $\boldsymbol{K}$ pomocou **"dlqr"**
- penalizácia konečného stavu $\boldsymbol{P}_f$ pomocou **"dlyap"** kde,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_m \boldsymbol{X}_m \boldsymbol{A}_m^T - \boldsymbol{X}_m + \boldsymbol{Q}_m &= 0, \\
\boldsymbol{X}_m &= \boldsymbol{P}, \\
\boldsymbol{A}_m &= (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^T, \\
\boldsymbol{Q}_m &= \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{K},
\end{aligned}
$$

- zosilnenie MPC bez obmedzení $\mathscr{K}$ ktoré:

$$
\boldsymbol{u}_k = -\mathscr{K} \boldsymbol{x}_k = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n_u} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{H}^{-1} \boldsymbol{G} \boldsymbol{x}_k
$$

# Čo k tomu potrebujeme

Po dosadení predikcie do účelovej funkcie

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \sum_{i=0}^{n_p-1} (\boldsymbol{N}_i^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{N}_i) + \boldsymbol{N}_{n_p}^T \boldsymbol{P}_f \boldsymbol{N}_{n_p} + \mathscr{R} \\
\boldsymbol{G} &= \sum_{i=0}^{n_p-1} (\boldsymbol{N}_i^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{M}_i) + \boldsymbol{N}_{n_p}^T \boldsymbol{P}_f \boldsymbol{M}_{n_p} \\
\boldsymbol{F} &= \sum_{i=0}^{n_p-1} (\boldsymbol{M}_i^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{M}_i) + \boldsymbol{M}_{n_p}^T \boldsymbol{P}_f \boldsymbol{M}_{n_p} \\
\mathscr{R} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{R} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{R} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

# Zadanie

- napíšte algoritmus na vytvorenie matíc $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}_f$
- váš algoritmus musí byť univerzálne použiteľný
- vypočítajte zosilnenie $\mathscr{K}$ MPC bez obmedzení pre váš nosník a simulačne porovnajte priebeh regulácie s nesaturovaným LQ
- overte funkčnosť algoritmu pre stavové systémy inej veľkosti
- vypíšte výsledok kontrolného príkladu

# Pomôcka

- rozmer matice $\mathscr{R}$ je $(n_p \times n_u) \times (n_p \times n_u)$
- rozmer matice $\boldsymbol{H}$ je $(n_p \times n_u) \times (n_p \times n_u)$
- rozmer matice $\boldsymbol{G}$ je $(n_p \times n_u) \times (n_x)$
- rozmer matice $\boldsymbol{F}$ je $(n_x) \times (n_x)$

Vstupné parametre kontrolného príkladu:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1.1 & 2 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0787 \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q &= C^T C \\
R &= 0.01 \\
n_p &= 4
\end{aligned}
$$

# Pomôcka

Výstup:

$$\boldsymbol{P}_f = \begin{bmatrix} 3.915 & 4.826 \\ 4.826 & 13.856 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 13.839 & 66.693 \\ 66.693 & 413.120 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1.440 & 0.984 & 0.587 & 0.262 \\ 0.984 & 0.721 & 0.436 & 0.200 \\ 0.587 & 0.436 & 0.304 & 0.141 \\ 0.262 & 0.200 & 0.141 & 0.095 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 3.674 & 23.944 \\ 2.366 & 16.181 \\ 1.325 & 9.496 \\ 0.556 & 4.178 \end{bmatrix}$$