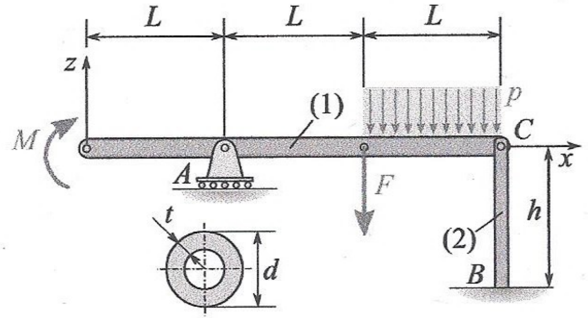
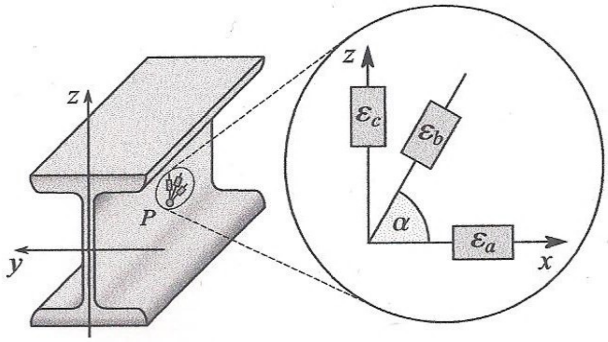
BME Gépészmérnöki Kar	SZILÁRDSÁGTAN	Név: Mikula Gerg? Ádám
Műszaki Mechanikai Tanszék	2. HÁZI FELADAT	Neptun kód: ZPIL4D
2019/20 II.	Határidő: május 11. 14:00	Késedelmes beadás: ☐ Javítás: ☐
Nyilatkozat: Aláírásommal igazolom, hogy a házi feladatot saját magam készítettem el, az abban leírtak saját megértésemet tükrözik.		Aláírás:

Csak a formai követelményeknek megfelelő feladatokat értékeljük! http://www.mm.bme.hu/targyak/bsc/sziltan

Feladatkitűzés

Az ábrán vázolt szerkezet két rúdja csuklósan kapcsolódik, anyaguk homogén, izotrop, lineárisan rugalmas (rugalmassági modulusz: $E = 210$ GPa; Poisson-tényező: $\nu = 0{,}3$). Az (1)-es rúd keresztmetszete az ábrán látható I-szelvény (I-80-MSZ-325), míg a (2)-es rúdé d külső átmérőjű körgyűrű.





Adatok

L [m]	h [m]	d [mm]	F [kN]	M [kNm]	p [kN/m]	ε_a [10^{-4}]	ε_b [10^{-4}]	ε_c [10^{-4}]	α [°]
1.250	2.250	56	4	1.50	2	-3.40	-6.50	3	135

(Rész)eredmények

A_z [kN]	x_{max} [m]	w_{max} [mm]	t_{min} [mm]	ε_y [10^{-4}]	γ_{xz} [10^{-4}]	σ_x [MPa]
2,025	0,00	33,0493	2,2	0,17143	12,6	-57,692
σ_z [MPa]	τ_{xz} [MPa]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]	σ_3 [MPa]	$\Delta\sigma_e$ [MPa]	u_d [J/cm^3]
45,692	101,77	108,146	0	-120,146	30,494	0,08073

e_{1x} [-]	e_{1y} [-]	e_{1z} [-]	e_{2x} [-]	e_{2y} [-]	e_{2z} [-]	e_{3x} [-]	e_{3y} [-]	e_{3z} [-]
0,523	0,00	0,8523	0	1	0	-0,8523	0	0,523

Pontozás

Minimumfeladat	Feladatok						Dokumentáció	Összesen
	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
	/5	/3	/4	/4	/2	/2	/5	/25

Feladatok

*Az 1. feladat **minimumfeladat**, helyes megoldása előfeltétele a házi feladat elfogadásának!*

1. Készítsen léptékhelyes ábrát a szerkezetről! Rajzolja meg a rudak szabadtest ábráit, majd ezek alapján határozza meg az A és B kényszerekben ébredő reakció komponenseket, valamint a rudak közt a C pontban átadódó erőket! – **Minimumfeladat**
2. Határozza meg az (1)-es rúd $w(x)$ lehajlásfüggvényét a rugalmas szál differenciálegyenletének felhasználásával, amennyiben a (2)-es rúd hosszváltozásától eltekintünk:
   - Szerkessze meg a hajlítónyomatéki igénybevételi függvényt (parabolaívek esetén az érintőket is)!
   - Írja fel a rugalmas szál differenciálegyenletét és a megoldáshoz szükséges peremfeltételeket, majd a jellegzetes értékek feltüntetésével ábrázolja a kapott lehajlás- és szögelfordulásfüggvényt. A szabványos I-szelvény y-tengelyre számított másodrendű nyomatéka $I_y = 77{,}8\ \mathrm{cm}^4$!
   - Adja meg az abszolút értelemben maximális elmozdulás $x_{\max}$ helyét és $w_{\max}$ előjelhelyes értékét!
3. Méretezze a (2)-es rudat kihajlásra:
   - Rajzolja meg a (2)-es rúdra jellemző σ_{kr} kritikus feszültség – λ karcsúság diagramot a jellegzetes értékek feltüntetésével, ha a folyáshatár $\sigma_F = 240$ MPa, $\lambda_0 = 105$, valamint a Tetmajer-egyenes képlete $\sigma_{\mathrm{kr}} = 308 - 1{,}14\lambda$ MPa.
   - Adja meg a $t_{\min}$ minimális falvastagságot tized mm-re kerekítve, hogy a (2)-es rúd háromszoros biztonsággal megfeleljen kihajlásra! Mekkora lesz ekkor a λ karcsúság?

Egy másik, ismeretlen terhelési esetben az (1)-es rúd alakváltozási állapotát vizsgáljuk az I-szelvény gerincére az ábrán látható módon felhelyezett nyúlásmérő bélyegekből álló "rozetta" segítségével. A vizsgált, terheletlen felületen az ε_a, ε_b és ε_c fajlagos nyúlásokat mérjük.

4. Értékelje ki a nyúlásmérés eredményét:
   - Határozza meg az $\boldsymbol{\varepsilon}$ alakváltozási tenzor mátrixát a P pontbeli x-y-z koordináta rendszerben! Adja meg a vizsgált P pontban a $\Delta V/V$ fajlagos térfogatváltozás értékét!
   - A Hooke-törvény segítségével adja meg a $\boldsymbol{\sigma}$ feszültségi tenzor mátrixát (az x-y-z koordináta rendszerben), valamint adja meg a skalár invariánsai értékét! Ábrázolja a feszültségi állapotot feszültségi kiskockán!
5. Határozza meg a főfeszültségeket és a főirányokat a Mohr-féle feszültségi kördiagram szerkesztésével! Adja meg a főirányok $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ egységvektorait úgy, hogy jobbsodrású rendszert alkossanak és az e_{1x} komponens ne legyen negatív értékű! Ellenőrizze számítását, sajátérték-sajátvektor számítással!
6. Számítsa ki a P pontbeli feszültségi állapothoz tartozó $\sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{Mohr}}$ Mohr-féle, valamint a $\sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{HMH}}$ HMH-féle egyenértékű feszültségeket! Adja meg a két elmélet $\Delta\sigma_{\mathrm{e}} = \sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{Mohr}} - \sigma_{\mathrm{e}}^{\mathrm{HMH}}$ abszolút eltérését!
7. Számítsa ki a P pontbeli u alakváltozási energiasűrűség értékét! Adja meg ennek az u_h térfogatváltozásra, és az u_d alaktorzulásra forduló részét!

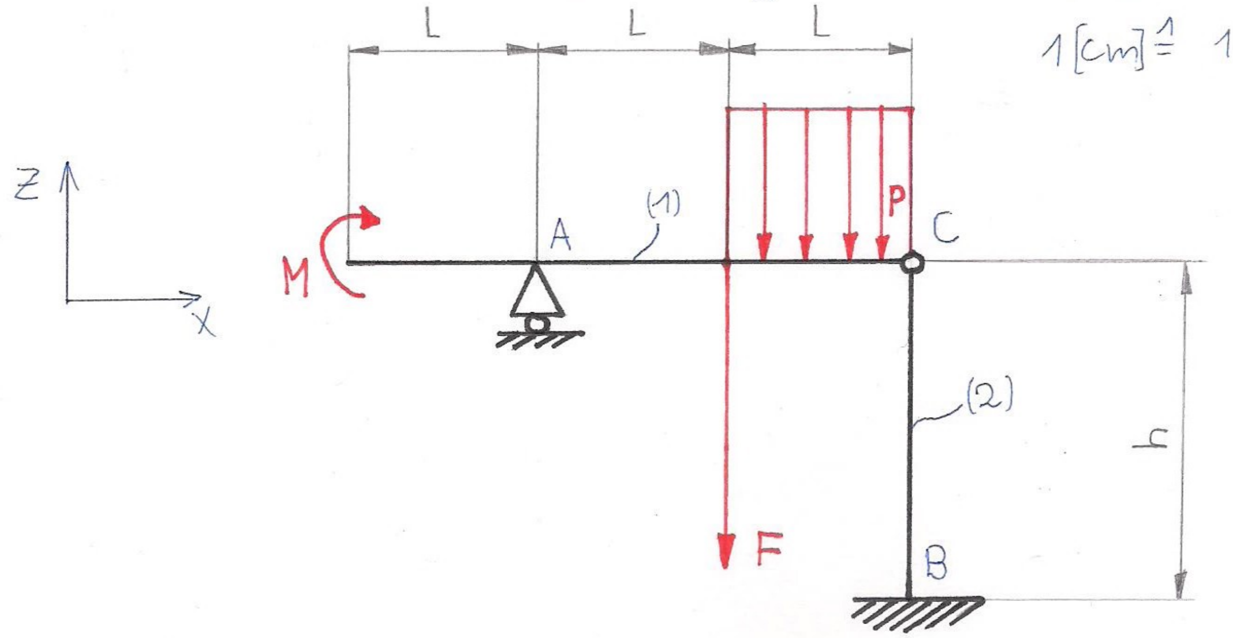
MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

1. Feladat

A szerkezet méretarányos ábrája:

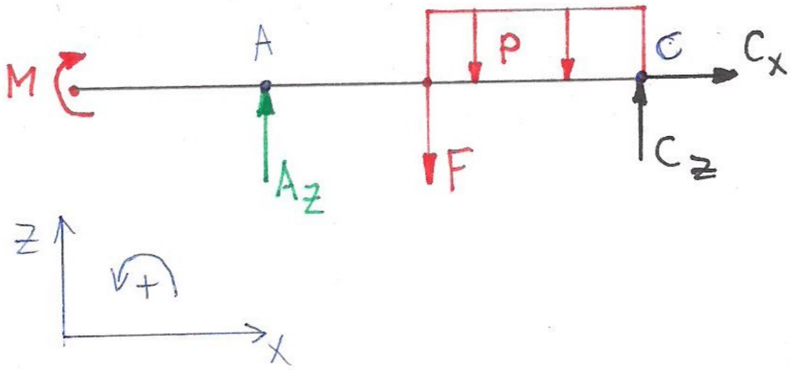
$1\,[cm] \triangleq 0{,}5\,[m]$

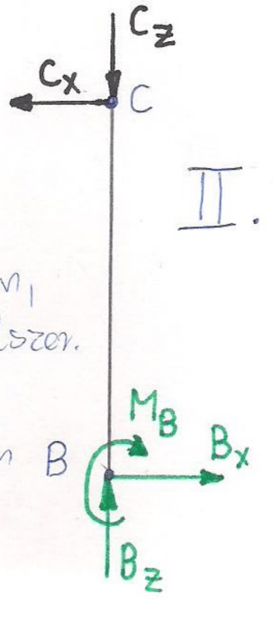
$1\,[cm] \triangleq 1\,[kN]$



Szabadtest ábrák:

I.





II.

Összesen 6 db ismeretlen erő van, azaz statikailag határozott a rendszer.
Az egyensúlyi egyenleteket mindkét rúdra felírom, és azokból számolom az ismeretlen erőket.

MIKULA GERGŐ
ZPIL4P
Mikula G. Áá

Az egyensúlyi egyenletek:

I. rúd:

$\sum F_x = 0$: $\underline{C_x = 0\ [kN]}$

$\sum F_z = 0$: $A_z - F + C_z - p \cdot L = 0$

$\sum M_A = 0$: $-M - F \cdot L - p \cdot L\left(\frac{L}{2} + L\right) + C_z \cdot 2L = 0$

II. rúd:

$\sum F_x = 0$: $-C_x + B_x = 0$

$\sum F_z = 0$: $B_z - C_z = 0$

$\sum M_B = 0$: $-M_B + C_x \cdot h = 0$

Az egyenleteket átrendezve kiadódnak a keresett erők és a nyomat

$\underline{B_x} = C_x = \underline{0\ [kN]}$

$\underline{M_B} = C_x \cdot h = \underline{0\ [kNm]}$

$\underline{C_z} = \dfrac{M + F \cdot L + p \cdot L\left(\frac{3}{2}L\right)}{2L} = \underline{4{,}475\ [kN]}$

$\underline{B_z} = C_z = \underline{4{,}475\ [kN]}$

$\underline{A_z} = F - C_z + p \cdot L = \underline{2{,}025\ [kN]}$

Ellenőrzés: $\sum F_z \stackrel{?}{=} 0$

$A_z - F - p \cdot L + B_z = 2{,}025 - 4 - 2 \cdot 1{,}25 + 4{,}475 \stackrel{?}{=} 0$

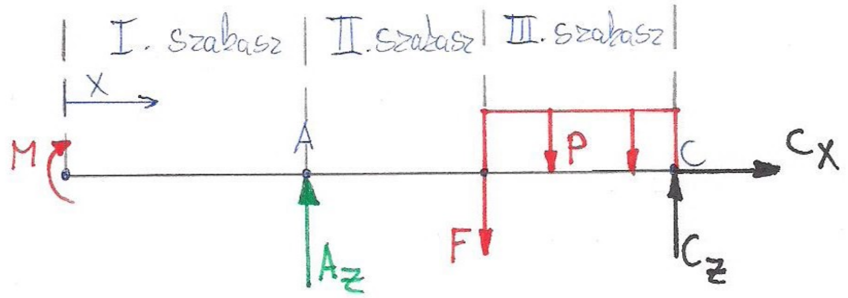
$0 = 0$ ✓

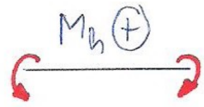
MIKULA GERG
ZPIL4D

2. Feladat

Az 1-es rúd hajlítónyomatéki igénybevételi függvényei:

Ehhez 3 szakaszra bontottam fel a rudat.





Az igénybevételi függvények:

Az egyenletekben ‚x' helyére [m]-ben behelyettesítve a hajlítónyomatékot az egyes szakaszokra [kNm]-ben kapjuk meg.

I. szakasz: $0 \leq x \leq L$

$$M_{h_1}(x) = -M = -1{,}5 \ [kNm]$$

II. szakasz: $L \leq x \leq 2L$

$$M_{h_2}(x) = -M - A_z(x-L) = -2{,}025x + 1{,}03125$$

III. szakasz: $2L \leq x \leq 3L$

$$M_{h_3}(x) = -M - A_z(x-L) + F(x-2L) + p\frac{(x-2L)^2}{2}$$

$$M_{h_3}(x) = x^2 - 3{,}025x - 2{,}7188$$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

Az igénybevételi ábra:

Jellegzetes helyeken:

$M_{h1}(0) = -1{,}5$ [kNm]

$M_{h1}(1{,}25) = -1{,}5$ [kNm]

$M_{h2}(2{,}5) = -2{,}025 \cdot 2{,}5 + 1{,}03125 = -4{,}03125$ [kNm]

$M_{h3}(3{,}75) = 3{,}75^2 - 3{,}025 \cdot 3{,}75 - 2{,}7188 = 0$ [kNm]

A parabola érintőinek meghatározása:

$M'_{h3}(x) = 2x - 3{,}025$

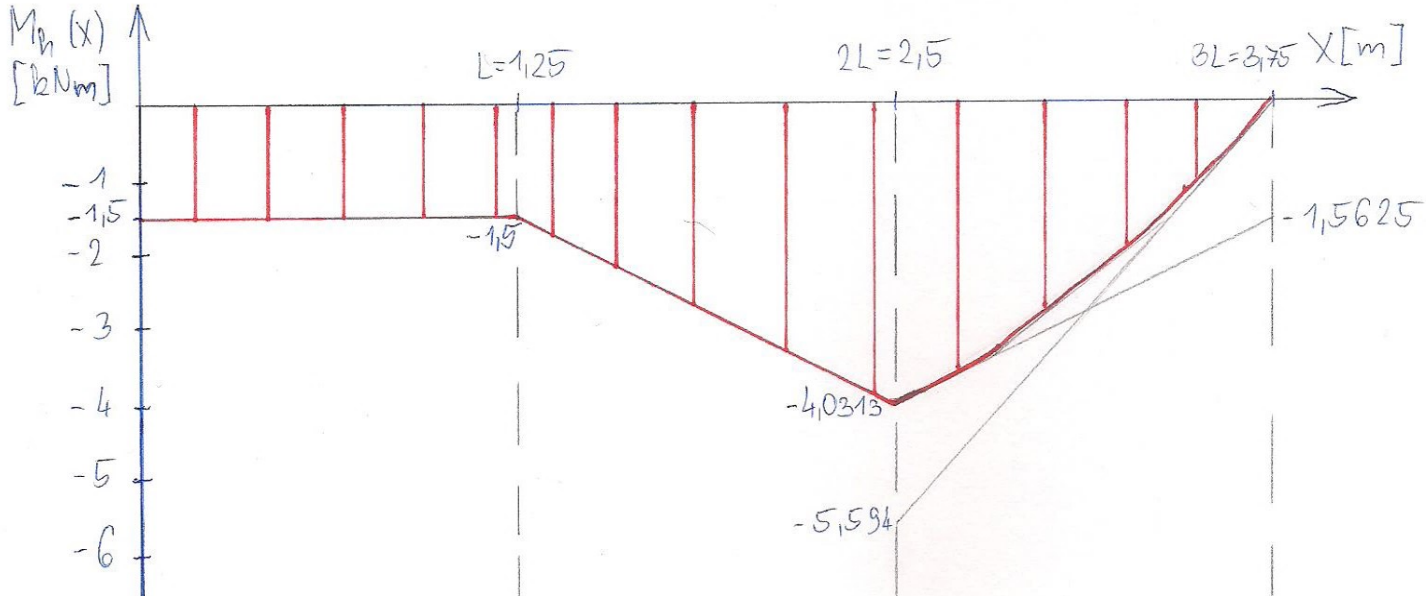
$M_{h3}(2L) + L \cdot M'_{h3}(2L) = -4{,}03125 + 1{,}25 \cdot (2 \cdot 2{,}5 - 3{,}025) =$

$= -1{,}5625 \rightarrow$ ($x = 3L$-ben az érintő végpontja)

$M_{h3}(3L) - L \cdot M'_{h3}(3L) = 0 - 1{,}25(2 \cdot 3{,}75 - 3{,}025) =$

$= -5{,}594 \rightarrow x = 2L$-ben a másik érintő kezdőpontja

Az ábra:



MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

Az 1-es rúd lehajlásfüggvényének meghatározása:

Adatok:

$I_y = 77{,}8\ [cm^4]$

$E = 210\ [GPa]$

$I_y \cdot E = 163\,380\ [Nm^2]$

A rugalmas szál differenciál-egyenlete:

$$-w''(x) = \frac{M_h(x)}{I \cdot E}$$

Ismét 3 szakaszra kell bontani a rudat.

A megoldandó diff. egyenletek: (x [m]-ben; M_h [Nm]-ben)

I. szakasz: $0 \leq x \leq 1{,}25$

$$-I \cdot E\, w_1''(x) = M_{h_1}(x)$$

$$+I \cdot E \cdot w_1''(x) = +1500 \quad / \int dx$$

$$+I E\, w_1'(x) = +1500x + C_{11} \quad / \int dx$$

$$I E\, w_1(x) = \frac{1500}{2} x^2 + C_{11} \cdot x + C_{12}$$

$$w_1(x) = \frac{1}{IE}\left(750 x^2 + C_{11} x + C_{12}\right)$$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D
Mikula Gergő

II. szakasz: $1,25 \leq x \leq 2,5$

$$-IE\,w_2''(x) = M_{h2}(x)$$

$$IE\,w_2''(x) = 2025x - 1,03125 \cdot 10^3 \quad / \int dx$$

$$IE\,w_2'(x) = \frac{2025\,x^2}{2} - 1031,25 \cdot x + C_{21} \quad / \int dx$$

$$IE\,w_2(x) = \frac{2025\,x^3}{6} - \frac{1031,25\,x^2}{2} + C_{21}x + C_{22}$$

$$w_2(x) = \frac{1}{IE}\left(\frac{2025}{6}x^3 - \frac{1031,25}{2}x^2 + C_{21}x + C_{22}\right)$$

III. szakasz: $2,5 \leq x \leq 3,75$

$$-IE\,w_3''(x) = M_{h3}(x)$$

$$IE\,w_3''(x) = -1000x^2 + 3025x + 2718,8 \quad / \int dx$$

$$IE\,w_3'(x) = -\frac{1000x^3}{3} + \frac{3025}{2}x^2 + 2718,8x + C_{31} \quad / \int dx$$

$$IE\,w_3(x) = -\frac{1000}{12}x^4 + \frac{3025}{6}x^3 + \frac{2718,8}{2}x^2 + C_{31}x + C_{32}$$

$$w_3(x) = \frac{1}{IE}\left(-\frac{1000}{12}x^4 + \frac{3025}{6}x^3 + \frac{2718,8}{2}x^2 + C_{31}x + C_{32}\right)$$

Mind három diff. egyenlet 2-2 ismeretlent tartalmaz, ezért 6 peremfeltételre van szükségünk.
Tudjuk, hogy $x = L$-ben és $x = 3L$-ben a lehajlás értéke zérus, illetve a rúd folytonosságából adódóan feltesszük, hogy a 3 szakasz egybeeső pontjaiban mindkét oldalról fgv. értéke megegyezik.

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D
Mikula Gergő

Tehát a peremfeltételek:

(1) $w_1(L) = 0$

(2) $w_2(L) = 0$

(3) $w_1'(L) = w_2'(L)$

(4) $w_2(2L) = w_3(2L)$

(5) $w_2'(2L) = w_3'(2L)$

(6) $w_3(L) = 0$

Paraméteresen:

(1) $\frac{1}{IE}\left(750 \cdot L^2 + C_{11} \cdot L + C_{12}\right) = 0$

(2) $\frac{1}{IE}\left(\frac{2025}{6} L^3 + \left(-\frac{1031{,}25}{2} L^2\right) + C_{21} \cdot L + C_{22} = 0\right.$

(3) $\frac{1}{IE}\left(1500 \cdot L + C_{11}\right) = \frac{1}{IE}\left(\frac{2025}{2} L^2 - 1031{,}25 L + C_{21}\right)$

(4) $\frac{1}{IE}\left(\frac{2025}{6}(2L)^3 - \frac{1031{,}25}{2} \cdot (2L)^2 + C_{21} \cdot 2L + C_{22}\right. =$

$= \frac{1}{IE}\left(-\frac{1000}{12}(2L)^4 + \frac{3025}{6}(2L)^3 + \frac{2718{,}8}{2}(2L)^2 + C_{31} \cdot 2L + C_{32}\right)$

(5) $\frac{1}{IE}\left(\frac{2025}{2}(2L)^2 - 1031{,}25 \cdot 2L + C_{21}\right) = \frac{1}{IE}\left(\frac{4000}{12}(2L)^3 + \frac{3 \cdot 3025}{6}(2L)^2\right.$

$\left.+ 2718{,}8 \cdot 2L + C_{31}\right)$

(6) $\frac{1}{IE}\left(-\frac{1000}{12}(3L)^4 + \frac{3025}{6}(3L)^3 + \frac{2718{,}8}{2}(3L)^2 + C_{31} \cdot 3L + C_{32}\right) = 0$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

Behelyettesítve a numerikus értékeket, valamint egyszerűsítve $\frac{1}{IE}$-vel:

(1) $1171{,}875 + 1{,}25\,C_{11} + C_{12} = 0$

(2) $-146{,}484 + 1{,}25\,C_{21} + C_{22} = 0$

(3) $1875 + C_{11} = 292{,}97 + C_{21}$

(4) $2050{,}78 + 2{,}5\,C_{21} + C_{22} = 13118{,}65 + 2{,}5\,C_{31} + C_{32}$

(5) $3750 + C_{21} = 11041{,}79 + C_{31}$

(6) $29\,223{,}984 + 3{,}75\,C_{31} + C_{32} = 0$

A 6 egyenletből álló lineáris egyenletrendszert megoldva a <u>konstansok értékei:</u>

$C_{11} = -5257{,}174$

$C_{12} = 5399{,}593$

$C_{21} = -3675{,}144$

$C_{22} = 4740{,}414$

$C_{31} = -10966{,}934$

$C_{32} = 11902{,}0192$

Vissza helyettesítve a konstansokat a már felírt egyenletekbe megkapjuk a 3 szakasz lehajlás függvényét, illetve a szögelfordulás függvényét, ami a lehajlás fgv. első deriváltja.

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D
Mikula Gergő

Tehát a lehajlás- és szögelfordulás függvények:

$$w_1(x) = \frac{1}{163380}\left(750x^2 + (-5257{,}174 \cdot x) + 5399{,}593\right)$$

$$w_2(x) = \frac{1}{163380}\left(\frac{2025}{6}x^3 - \frac{1031{,}25}{2}x^2 + (-3675{,}144 \cdot x) + 4740{,}414\right)$$

$$w_3(x) = \frac{1}{163380}\left(-\frac{1000}{12}x^4 + \frac{3025}{6}x^3 + \frac{2718{,}8}{2}x^2 + (-10966{,}934 \cdot x) + 11902{,}019\right)$$

$$\varphi_1(x) = w_1'(x) = \frac{1500x - 5257{,}174}{163380}$$

$$\varphi_2(x) = w_2'(x) = \left(\frac{2025x^2}{2} - 1031{,}25x - 3675{,}144\right) \cdot \frac{1}{163380}$$

$$\varphi_3(x) = w_3'(x) = \left(-\frac{1000}{3}x^3 + \frac{3025}{2}x^2 + 2718{,}8x - 10966{,}934\right) \cdot \frac{1}{163380}$$

Függvényértékek a nevezetes helyeken:

$$w_1(0) = \frac{5399{,}593}{163380} = 0{,}0330493\,[m] = 33{,}0493\,[mm]$$

$$w_2(1{,}25) = \frac{1}{163380}\left(\frac{2025}{6} \cdot 1{,}25^3 - \frac{1031{,}25}{2} \cdot 1{,}25^2 - 3675{,}144 \cdot 1{,}25 + 4740{,}414\right) =$$

$$w_2(1{,}25) = 0\,[m]$$

$$w_2(2{,}5) = \frac{1}{163380}\left(\frac{2025}{6} \cdot 2{,}5^3 - \frac{1031{,}25}{2} \cdot 2{,}5^2 - 3675{,}144 \cdot 2{,}5 + 4740{,}414\right) =$$

$$w_2(2{,}5) = -0{,}01467\,[m] = -14{,}67\,[mm]$$

$$w_3(3{,}75) = 0\,[m]$$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

$\varphi_1(0) = -0{,}032177\ [rad] = -1{,}844°$

$\varphi_1(1{,}25) = -0{,}020701\ [rad] = -1{,}186°$

$\varphi_2(2{,}5) = 4{,}58171 \cdot 10^{-4}\ [rad] = 0{,}0263°$

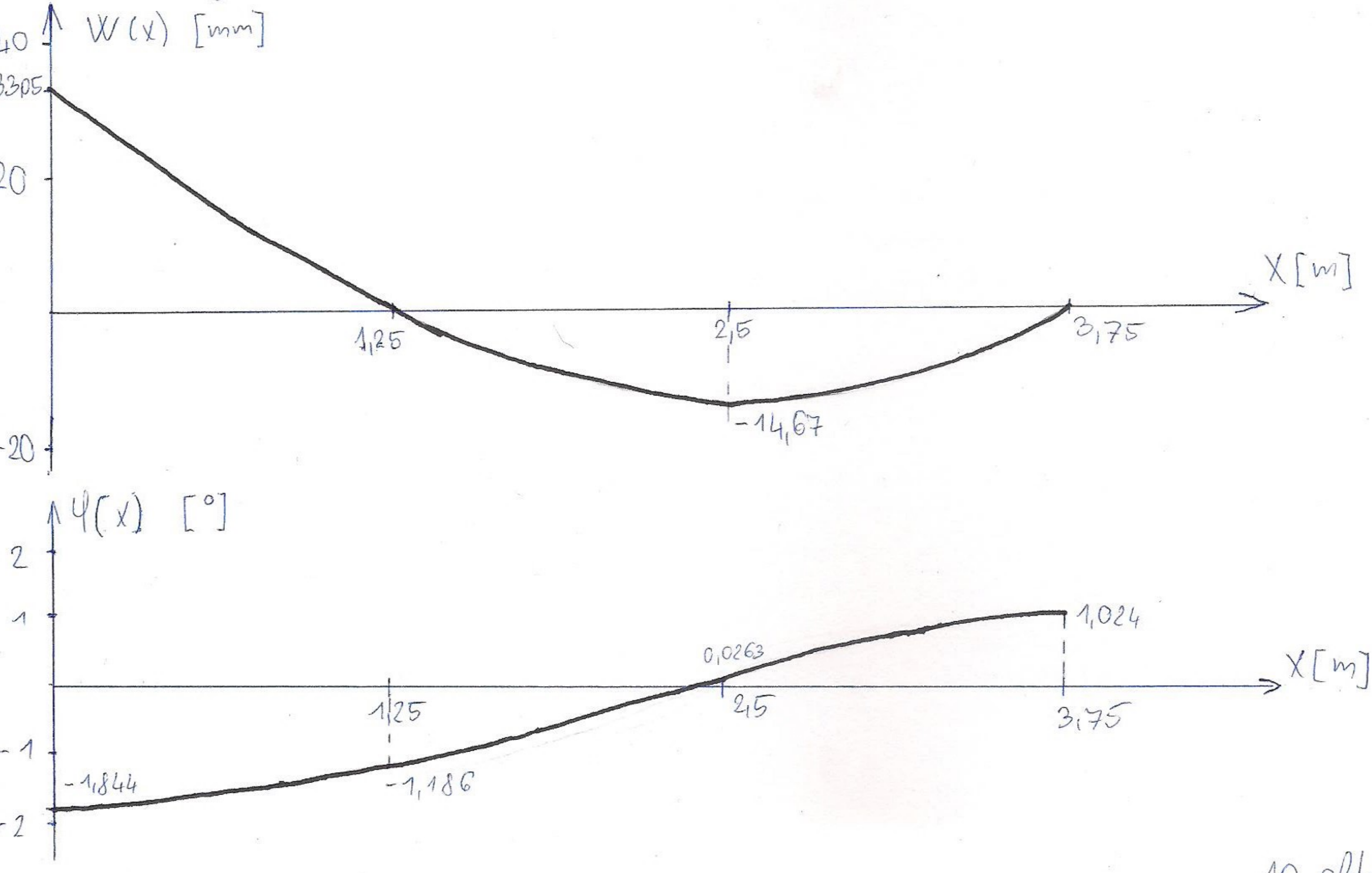
$\varphi_3(3{,}75) = 0{,}01787\ [rad] = 1{,}024°$

A maximális elmozdulás tehát $x = 0\ [m]$-ben van, ahol $w(0) = 33{,}0493\ [mm]$-rel tér ki a rúd függőlegesen felfelé.

Tehát:

$x_{max} = 0\ [m]$; $w_{max} = 33{,}0493\ [mm]$

A lehajlás- és szögelfordulásfüggvény ábrázolva:



MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

3. Feladat

A 2-es rúd méretezése kihajlásra:

Adatok:

$$\sigma_F = 240\,[MPa]\ ;\ \lambda_0 = 105\ ;\ \sigma_{kr} = 308 - 1{,}14\lambda\ [MPa]$$

A kezdeti szakaszon λ-tól független konstans σ_F a kritikus feszültség. A Tetmajer-egyenes két szélsőértéke az Euler kezdetét jelentő λ_0 és az a λ_1 érték, ahol a Tetmajer-egyenes eléri a folyáshatárt.

$$\sigma_{kr}(\lambda_1) = \sigma_F$$

$$308 - 1{,}14\lambda_1 = 240$$

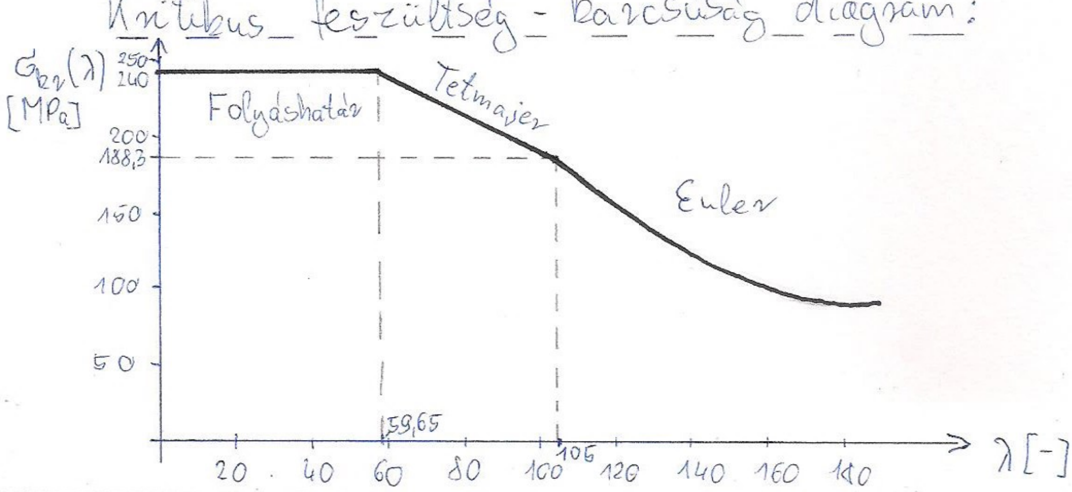
$$\lambda_1 = 59{,}65$$

$$\sigma_{kr}(\lambda_0) = 308 - 1{,}14 \cdot 105 = 188{,}3\,[MPa]$$

λ_0 karcsúság felett az Euler-képlet érvényes:

$$\sigma_{kr}^{Eul.}(\lambda) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot E = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000\,[MPa]}{\lambda^2} = \frac{207\,261{,}9}{\lambda^2}\,[MPa]$$

Kritikus feszültség - karcsúság diagram:

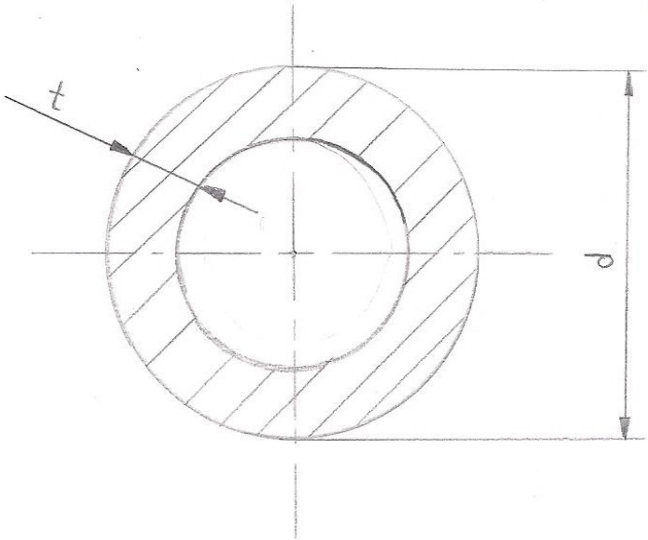


MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

A keresztmetszet minimális falvastagságának meghatározása:

A rúd keresztmetszete:

$d = 56$ [mm]



A kiszámítási mód függ attól, hogy melyik tartományba esik a rúd. Azonban mivel nem ismerjük a falvastagságot, ezért csak feltételezzük, hogy a rúd az Euler-tartományba esik karcsúság szempontjából.

Az egyenértékű hossz $c = 2$ szorzással kapható meg.

$$h_0 = c \cdot h = 2 \cdot 2{,}25 = 4{,}5 \ [m]$$

$$I_2 = I_1 = \frac{d^4 \pi}{64} - \frac{(d-2t)^4}{64} = \frac{[d^4 - (d-2t)^4] \cdot \pi}{64}$$

A kritikus erő meghatározása

$$F_{krit} = n \cdot C_z = 3 \cdot 4{,}475 = 13{,}425 \ [kN]$$

vagy

$$F_{krit} = \left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2 \cdot I_2 \cdot E = \left(\frac{\pi}{h_0}\right)^2 \cdot I_2 \cdot E$$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

$$F_{kr} = \left(\frac{\pi}{h_0}\right)^2 \cdot \frac{\left[d^4-(d-2t)^4\right]\cdot\pi}{64} \cdot E = \left(\frac{\pi}{4500}\right)^2 \cdot \frac{\left[56^4-(56-2t)^4\right]\cdot\pi}{64} \cdot 210\,000$$

t-re átrendezve az egyenletet: $t = 2{,}134$ [mm]

t értékét felfelé egy tizedesre kell kerekíteni, hogy a másodrendű nyomaték a minimális érték felett maradjon.

$t \approx 2{,}2$ [mm]

Ezután ellenőrizni kell, hogy jogos volt-e a feltételezés miszerint Euler-tartományba esik a rúd.

Keresztmetszet geometriai jellemzői:

$$A = \frac{d^2-(d-2t)^2}{4}\pi = \frac{56^2-(56-2\cdot 2{,}2)^2}{4}\pi = 371{,}84\ [mm^2]$$

$$I_2 = \frac{\left[d^4-(d-2t)^4\right]\pi}{64} = \frac{56^4-(56-2\cdot 2{,}2)^4}{64}\cdot\pi = 134\,758{,}14\ [mm^4]$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{134\,758{,}14}{371{,}84}} = 19\ [mm]$$

A karcsúság: $\lambda = \frac{h_0}{i_2} = \frac{4500}{19} = 236{,}8$

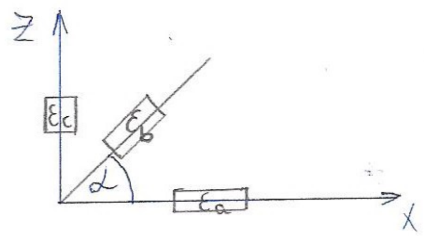
Mivel $\lambda = 236{,}8 > \lambda_0 = 105$ teljesül, ezért jól méreteztük a rudat.

Tehát a minimális falvastagság $t_{min} = 2{,}2$ [mm]

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D
Mikula Gergő

4. Feladat

Anyúlásmérés eredményének értékelése:



$\varepsilon_a = -3{,}4 \cdot 10^{-4}$

$\varepsilon_b = -6{,}5 \cdot 10^{-4}$

$\varepsilon_c = 3 \cdot 10^{-4}$

$\alpha = 135^\circ$

A P' pont az x-z síkban van ezért az alakváltozási tenzor:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

ε_a az x tengellyel, ε_c a z tengellyel párhuzamos:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a = -3{,}4 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_c = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_x \cdot \cos^2\alpha + \varepsilon_z \cdot \sin^2\alpha + \gamma_{xz} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_x \cdot \cos^2\alpha - \varepsilon_z \cdot \sin^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{-6{,}5 \cdot 10^{-4} + 3{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot \cos^2(135^\circ) - 3 \cdot 1}{\sin(135^\circ) \cdot \cos(135^\circ)}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 1{,}26 \cdot 10^{-3}$$

A síkfeszültségi állapotból adódóan:

$$\varepsilon_y = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_z) = \frac{-0{,}3}{1-0{,}3}\left(-3{,}4 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-4}\right) = 1{,}7143 \cdot 10^{-5}$$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

Ezek után az alakváltozási mátrix:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -3{,}4\cdot 10^{-4} & 0 & \frac{1{,}26\cdot 10^{-3}}{2} \\ 0 & 1{,}7143\cdot 10^{-5} & 0 \\ \frac{1{,}26\cdot 10^{-3}}{2} & 0 & 3\cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

A fajlagos térfogatváltozás a mátrix első skalár invariánsa:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_I = \varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -3{,}4\cdot 10^{-4} + 1{,}7143\cdot 10^{-5} + 3\cdot 10^{-4}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -2{,}2857\cdot 10^{-5}$$

A feszültségi tenzor mátrixa síkfeszültségi állapotban:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} [MPa]$$

Felírva a Hooke törvényt:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{(x,y,z)} + \frac{\nu}{1-2\nu}\cdot \varepsilon_I \cdot \underline{\underline{E}} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu}\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-2\nu}\cdot(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\cdot\varepsilon_I\right) = \frac{210\,000}{1+0{,}3}\left(-3{,}4\cdot10^{-4} + \frac{0{,}3}{1-2\cdot0{,}3}\cdot\left(-2{,}2857\cdot10^{-5}\right)\right)$$

$$\sigma_x = -57{,}692\ [\mathrm{MPa}]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\cdot\varepsilon_I\right) = \frac{210\,000}{1+0{,}3}\left(3\cdot10^{-4} + \frac{0{,}3}{1-0{,}6}\left(-2{,}2857\cdot10^{-5}\right)\right)$$

$$\sigma_z = 45{,}692\ [\mathrm{MPa}]$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{E}{1+\nu}\cdot\frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{210\,000}{1+0{,}3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1{,}26\cdot10^{-3} = 101{,}77\ [\mathrm{MPa}]$$

A feszültségi mátrix:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -57{,}692 & 0 & 101{,}77 \\ 0 & 0 & 0 \\ 101{,}77 & 0 & 45{,}692 \end{bmatrix} [\mathrm{MPa}]$$

Skalár invariánsai:

$$\sigma_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -12\ [\mathrm{MPa}]$$

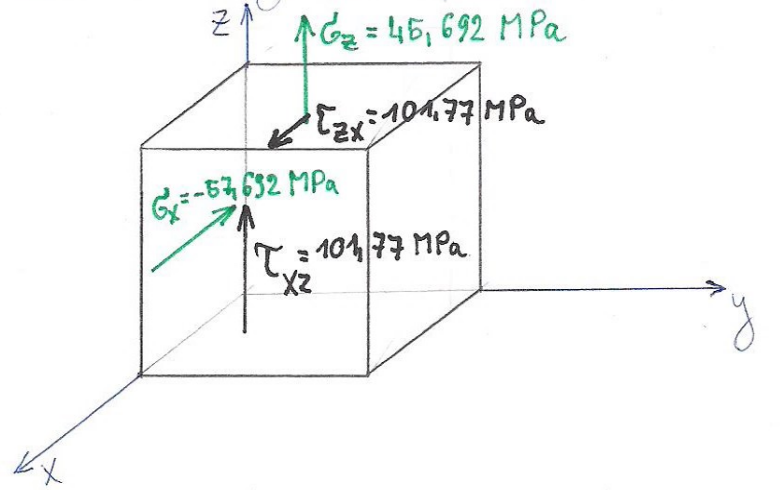
$$\sigma_{II} = \sigma_x\cdot\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 =$$

$$\sigma_{II} = (-57{,}692)(45{,}692) - 101{,}77^2 = -12\,993{,}2\ [\mathrm{MPa}^2]$$

$$\sigma_{III} = \det(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$$ (Oszlopa van a mátrixnak)

MIKULA GERGŐ
ŻPIL4D

A feszültségi állapot ábrázolása:



5. Feladat

A főfeszültségek és a főirányok meghatározása a Mohr-féle feszültségi kördiagram szerkesztésével.

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -57,692 & 0 & 101,77 \\ 0 & 0 & 0 \\ 101,77 & 0 & 45,692 \end{bmatrix}$$

$\sigma_y = 0$ főfeszültség kiolvasható a mátrixból.

A σ_y főfeszültséghez tartozó főirány is ismert ez a $\underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

A mátrixból továbbá leolvasható 2 pont az ismeretlen feszültségi síkon:

$$X\,(\sigma_x\,;|\tau_{xz}|) = (-57,692\,;\,101,77)$$
$$Z\,(\sigma_z\,;|\tau_{zx}|) = (45,692\,;\,101,77)$$

MIKULA GERGŐ
ZPILLD

Továbbá az ismert főfeszültség:

$$Y(\sigma_y, 0) = (0,0)$$

A Mohr kör középpontja és sugara:

$$\sigma_K = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = \frac{-57,693 + 45,692}{2} = -6\ [MPa]$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{-57,63 - 45,692}{2}\right)^2 + 101,77^2}$$

$$R = 114,146\ [MPa]$$

A főfeszültségek:

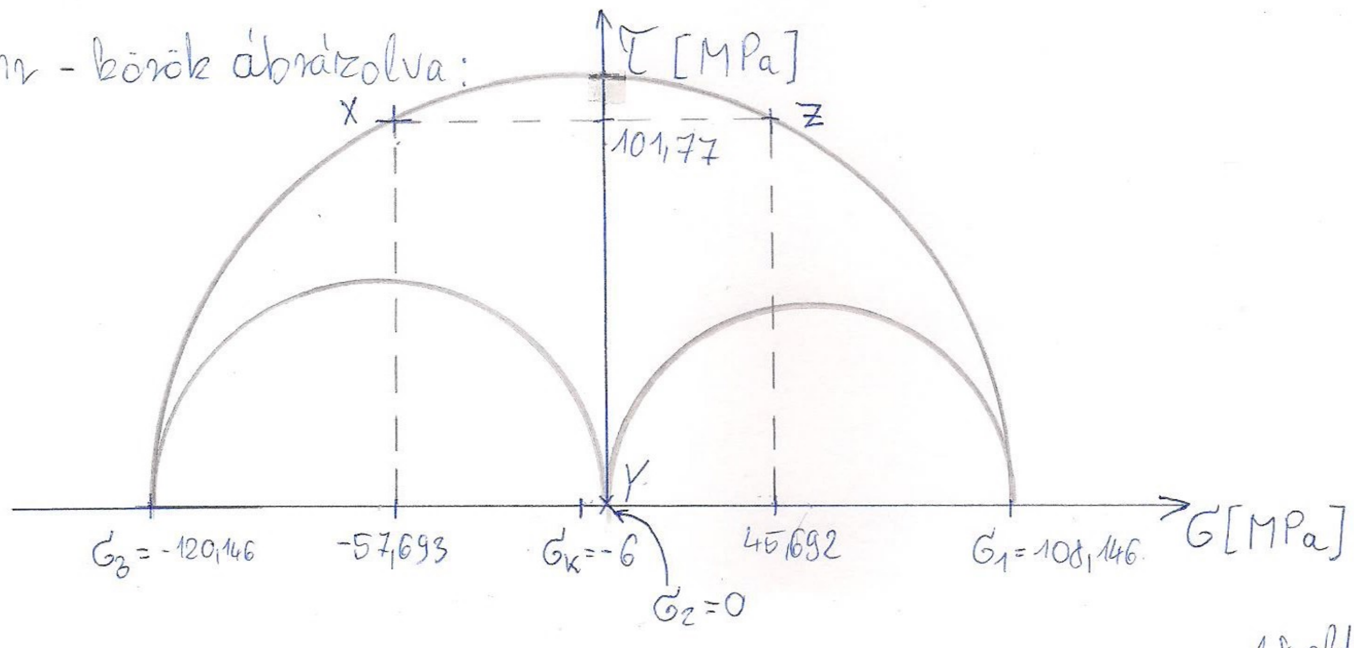
$(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$!

$$\sigma_1 = \sigma_K + R = -6 + 114,146 = 108,146\ [MPa]$$

$$\sigma_2 = 0\ [MPa]$$

$$\sigma_3 = \sigma_K - R = -6 - 114,146 = -120,146\ [MPa]$$

Mohr - körök ábrázolva:



MIKULA GERGŐ
ZPILUD
Mikula G.

Az 1-es főirány x' tengellyel bezárt szöge:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{108{,}146 + 57{,}693}{+101{,}77}\right) = 58{,}464°$$

Az 1-es főirány egységvektora:

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}523 \\ 0 \\ 0{,}8523 \end{bmatrix}$$

A 3-mas főirány a jobbsodrás miatt számolható az 1-es és 2-es főirány vektoriális szorzatából.

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}523 \\ 0 \\ 0{,}8523 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}8523 \\ 0 \\ 0{,}523 \end{bmatrix}$$

Tehát:

$$\sigma_1 = 108{,}146 \text{ [MPa]} \longrightarrow \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}523 \\ 0 \\ 0{,}8523 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ [MPa]} \longrightarrow \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_3 = -120{,}146 \text{ [MPa]} \longrightarrow \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} -0{,}8523 \\ 0 \\ 0{,}523 \end{bmatrix}$$

A kapott értékek ellenőrzése sajátérték - sajátvektor számítással.

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

$$\det(\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} - \sigma \underline{\underline{E}}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -57{,}692-\sigma & 0 & 101{,}77 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 101{,}77 & 0 & 45{,}692-\sigma \end{vmatrix} = (-\sigma)\left[(-57{,}692-\sigma)(45{,}692-\sigma) - 101{,}77^2\right] = 0$$

$\sigma = 0$ főfeszültség

$$(-57{,}692-\sigma)(45{,}692-\sigma) - 101{,}77^2 = 0$$

$$\sigma^2 + 12\sigma - 2636{,}063 - 10357{,}13 = 0$$

$$\sigma^2 + 12\sigma - 12\,993{,}196 = 0$$

$$\sigma = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \cdot 12\,993{,}196}}{2} = \begin{cases} \sigma = -120{,}146 \ [MPa] \\ \sigma = 108{,}146 \ [MPa] \end{cases}$$

Sorba rendezve a főfeszültségek:

$$\sigma_1 = 108{,}146 \ [MPa]$$

$$\sigma_2 = 0 \ [MPa]$$

$$\sigma_3 = -120{,}146 \ [MPa]$$

A σ_2-höz tartozó $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ főirány ismert.

A másik két főirány az x-z síkban van, ezért $\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$ alakban keressük a megoldást.

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D
Mikula G.

Az első főirány egységvektorának számítása:

σ helyére $\sigma_1 = 108,146$ [MPa]

$$\begin{bmatrix} -165,838 & 0 & 101,77 \\ 0 & -108,146 & 0 \\ 101,77 & 0 & -62,454 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az első sorból számítható a szög:

$$-165,838 \cdot \cos\varphi + 101,77 \cdot \sin\varphi = 0$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{+165,838}{101,77}\right) = 58,464°$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,523 \\ 0 \\ 0,8523 \end{bmatrix}$$

Jobb sodrásból:

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0,523 \\ 0 \\ 0,8523 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8523 \\ 0 \\ 0,523 \end{bmatrix}$$

Az eredmények ugyanazok lettek, mint a Mohr-körös számításnál.

MIKULA GERGŐ
ZPJL40

6. Feladat

Az egyenértékű feszültség két elmélet szerint számolható a már ismert főfeszültségek segítségével:

$$\sigma_e^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = 108{,}146 - (-120{,}146) = 228{,}292\,[MPa]$$

$$\sigma_e^{HMH} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[(108{,}146-0)^2 + 228{,}292^2 + (0-(-120{,}146))^2\right]} =$$

$$\sigma_e^{HMH} = 197{,}798\,[MPa]$$

Az eltérés: $\Delta\sigma_e = \sigma_e^{Mohr} - \sigma_e^{HMH} = 228{,}292 - 197{,}798 =$

$$\Delta\sigma_e = 30{,}494\,[MPa]$$

7. Feladat:

Az alakváltozási energiasűrűség:

$$u = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{(x,y,z)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\cdot\varepsilon_x + \tau_{xz}\cdot\frac{1}{2}\gamma_{xz}\cdot 2 + \sigma_z\cdot\varepsilon_z\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(-57{,}692)(-3{,}4\cdot10^{-4}) + 2\left(101{,}77\cdot 6{,}3\cdot10^{-4}\right) + 45{,}692\cdot3\cdot10^{-4}\right] =$$

$$u = 0{,}08078\left[\frac{J}{cm^3}\right]$$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D
Mikula G.

A térfogatváltozásra forduló rész:

$\underline{\underline{\varepsilon}}_V = \frac{1}{3}\varepsilon_V \underline{\underline{E}}$ és $\underline{\underline{\sigma}}_h = \frac{1}{3}\sigma_I \underline{\underline{E}}$ mátrixok diagonális alakúak, valamint minden főátlóbeli elemük megegyezik, azaz kettős skalár szorzatuk számolható 1-1 főátlóbeli elemük szorzatának háromszorosaként.

$$\underline{u_h} = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}_h : \underline{\underline{\varepsilon}}_V = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot \frac{1}{9}\sigma_I \cdot \varepsilon_V = \frac{1}{6}\cdot(-12)\cdot(-2{,}286\cdot 10^{-5}) =$$

$$\underline{u_h} = \underline{4{,}572\cdot 10^{-5}}\left[\frac{J}{cm^3}\right]$$

Az alakváltozási energiasűrűség a térfogatváltozásra és az alaktorzulásra forduló részek összege.

Tehát:

$$u = u_h + u_d \longrightarrow u_d = u - u_h = 0{,}08078 - 4{,}5714\cdot 10^{-5}$$

$$u_d = 0{,}08073\left[\frac{J}{cm^3}\right]$$