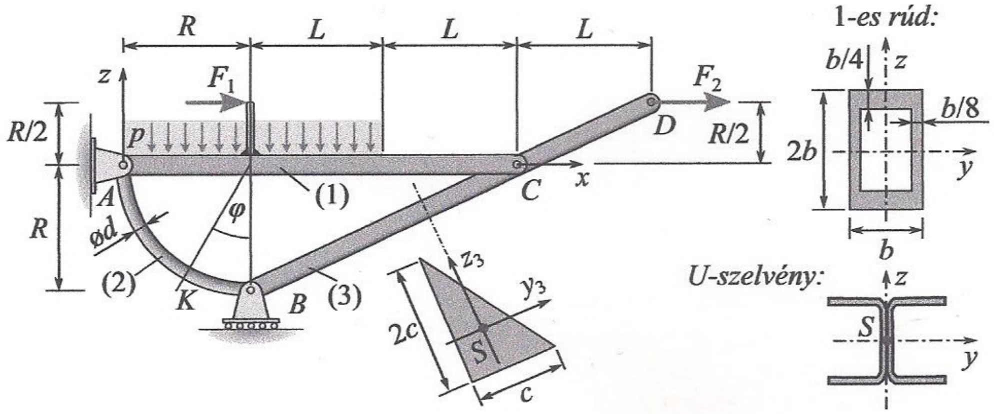
BME Gépészmérnöki Kar	SZILÁRDSÁGTAN	Név: Mikula Gerg? Ádám
Műszaki Mechanikai Tanszék	1. HÁZI FELADAT	Neptun kód: ZPIL4D
2019/20 II.	Határidő: április 6. 14:00	Késedelmes beadás: □ Javítás: □
Nyilatkozat: Aláírásommal igazolom, hogy a házi feladatot saját magam készítettem el, az abban leírtak saját megértésemet tükrözik.		Aláírás: Mikula Gergő Ádám

Csak a formai követelményeknek megfelelő feladatokat értékeljük! `http://www.mm.bme.hu/targyak/bsc/sziltan`

Feladatkitűzés

Az ábrán vázolt szerkezet mindhárom rúdja csuklósan kapcsolódik, anyaguk homogén, izotrop, lineárisan rugalmas. Az (1)-es rúd keresztmetszete az ábrán látható téglalap alakú zárt szelvény, a negyedkörív alakú (2)-es rúdé kör, míg a (3)-as rúdé háromszög. Az (1)-es rúd anyagára megengedett feszültség σ_{meg}.



Adatok

R [m]	L [m]	d [mm]	c [mm]	F_1 [kN]	F_2 [kN]	p [kN/m]	σ_{meg} [MPa]
0.25	0.35	50	36	2	1	4.50	100

(Rész)eredmények

$\|A\|$ [kN]	$\|B\|$ [kN]	$M_{h,max}^{(1)}$ [kNm]	$K_{y,min}$ [cm^3]	b [mm]	Szelv.sorszám
3,628	4,74	-0,529	5,29	23	257
$\sigma_{max}^{(1)}$ [MPa]	$V_{max}^{(1)}$ [kN]	$\|\tau_{max}^{(1)}\|$ [MPa]	$\sigma_{K,max}^{(2)}$ [MPa]	$\sigma_{C,max}^{(3)}$ [MPa]	β_{zerus} [°]
93,153	1,584	7,597	-31,87	32,15	-45

Pontozás

Minimumfeladat	Feladatok						Dokumentáció	Összesen
	4.	5.	6.	7.	8.	9.		
	/4	/2	/3	/4	/3	/4	/5	**/25**

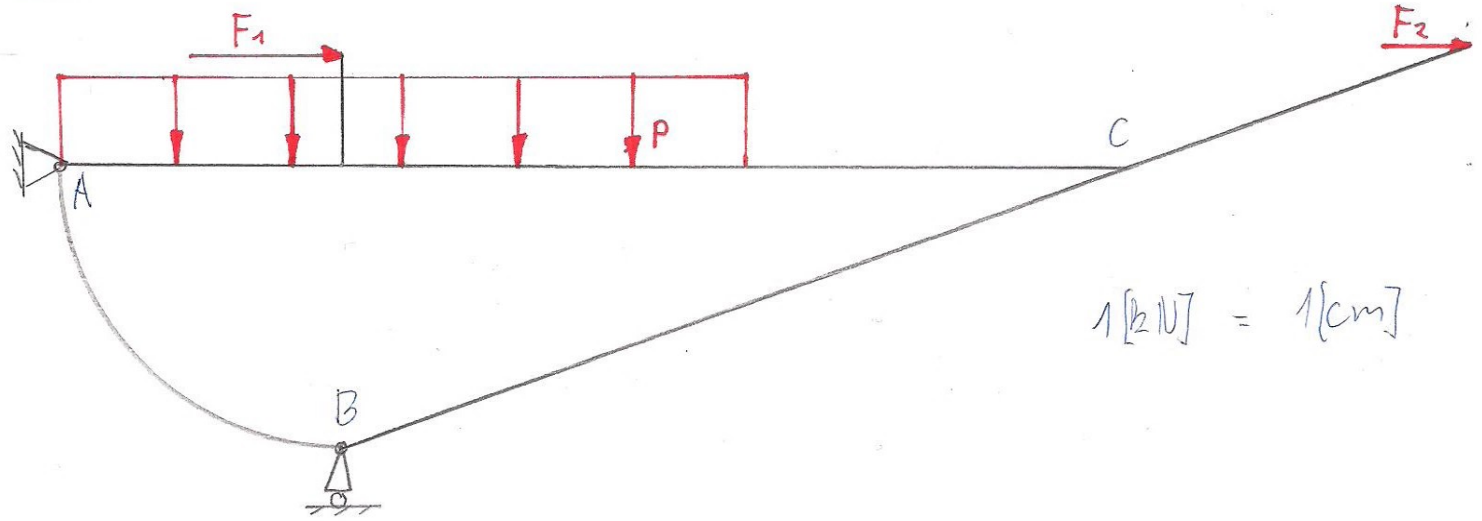
Feladatok

*Az 1-3. feladatok **minimumfeladatok**, helyes megoldásuk előfeltétele a házi feladat elfogadásának!*

1. Készítsen léptékhelyes ábrát a szerkezetről és számítsa ki az A és B kényszerekben ébredő reakció komponenseket! – **Minimumfeladat**
2. Rajzolja meg a csuklók és a rudak szabadtest ábráit, majd ezek alapján határozza meg az egyes rudak terhelését! – **Minimumfeladat**
3. Írja fel az (1)-es rúd igénybevételi függvényeit az x koordináta segítségével és rajzolja fel az igénybevételi ábrákat! – **Minimumfeladat**
4. Méretezze az (1)-es rudat tiszta hajlításra az ábrán jelölt zárt szelvényt alkalmazva:
   - Keresse meg a veszélyes keresztmetszetet és határozza meg az ott fellépő abszolút értékben maximális $M^{(1)}_{\mathrm{h,max}}$ hajlítónyomatékot!
   - Határozza meg a szükséges minimális keresztmetszeti tényezőt és az annak megfelelő b méret egész mm-re felfelé kerekített értékét!
5. A tárgy honlapján található szelvény táblázatból válassza ki azt a legkisebb keresztmetszeti tényezőjű U-szelvényt, amellyel az (1)-es rúdnál alkalmazott zárt szelvény tiszta hajlítás esetén az ábrán jelölt módon helyettesíthető!
6. Ellenőrizze, hogy a vizsgált veszélyes keresztmetszetben a normálerő hatását is figyelembe véve megfelel-e a tartó a választott b méretű zárt szelvénnyel!
   - Amennyiben szükséges, adja meg a keresztmetszet új b^* méretét egész mm-re felfelé kerekítve, hogy a normálerőt is figyelembe véve megfeleljen a tartó!
   - A jellegzetes értékek feltüntetésével ábrázolja a normálfeszültség eloszlását veszélyes keresztmetszetben a módosított b^* mérettel! Adja meg a legnagyobb abszolút értékű $\sigma^{(1)}_{\mathrm{max}}$ feszültséget előjelhelyesen!
7. Az (1)-es rúd nyírás szempontjából legveszélyesebb keresztmetszetében írja fel a nyírásból adódó csúsztató feszültség eloszlást leíró függvényt, és ábrázolja a jellegzetes értékek feltüntetésével! Adja meg a legnagyobb abszolút értékű $|\tau^{(1)}_{\mathrm{max}}|$ feszültséget! Használja az eredeti b méretű zárt szelvényt!
8. Számítsa ki a (2)-es rúd $\varphi = 30°$-nál elhelyezkedő K keresztmetszetében fellépő igénybevételeket és a jellegzetes értékek feltüntetésével rajzolja meg a normálfeszültség eloszlását! Adja meg a legnagyobb abszolút értékű $\sigma^{(2)}_{K,\mathrm{max}}$ feszültséget előjelhelyesen!
9. Számítsa ki a (3)-as rúd C keresztmetszetében a hajlításból ébredő legnagyobb abszolút értékű $\sigma^{(3)}_{C,\mathrm{max}}$ normálfeszültséget, valamint adja meg a zérustengely és az y_3 tengely által bezárt β_{zerus} szöget!
   (A rudak C pontbeli összeszereléséhez szükséges furatok hatásától eltekintünk.)

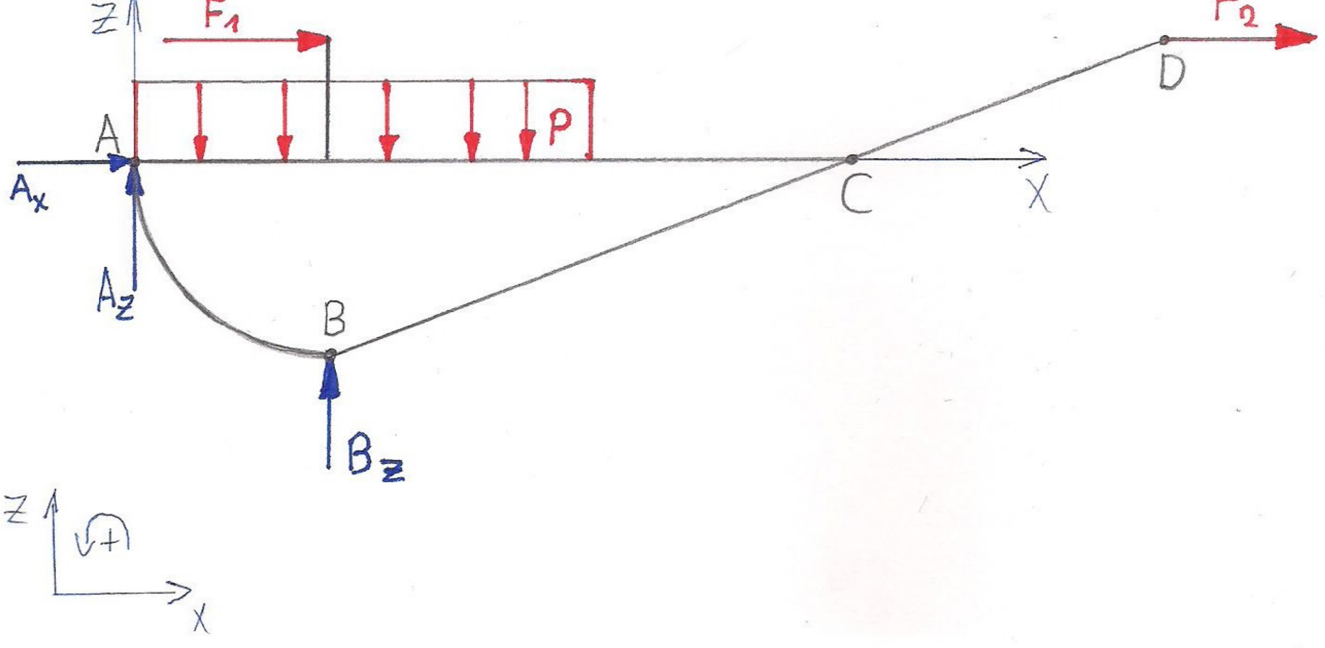
MIKULA GERGŐ ÁDÁM
ZPIL4D

1. Feladat:



Az A és B kényszerekben ébredő reakció erők kiszámolása:

A szerkezet szabad test ábrája:



MIKULA GERGŐ ÁDÁM
ZPIL40

A reakcióerők kiszámításához a három egyensúlyi egyenletet fogom felírni.

$\sum F_x = 0$

$$A_x + F_1 + F_2 = 0$$

$$A_x = -F_1 - F_2 = -2 - 1 = -3\ [kN]$$

$\sum M_B = 0$

$$-A_x \cdot R - A_z \cdot R - F_1 \cdot \frac{3R}{2} - F_2 \cdot \frac{3R}{2} - p \cdot (R+L)\left(\frac{R+L}{2} - R\right) = 0$$

$$A_z = \frac{-A_x \cdot R - F_1 \cdot \frac{3R}{2} - F_2 \cdot \frac{3R}{2} - p(R+L)\left(\frac{R+L}{2} - R\right)}{R} =$$

$$= \frac{3 \cdot 0{,}25 - 2 \cdot \frac{3 \cdot 0{,}25}{2} - 1 \cdot \frac{3 \cdot 0{,}25}{2} - 4{,}5\,(0{,}25 + 0{,}35)\left(\frac{0{,}6}{2} - 0{,}25\right)}{0{,}25} =$$

$$A_z = -2{,}04\ [kN]$$

$\sum F_z = 0$

$$A_z + B_z - p \cdot (R+L) = 0$$

$$B_z = -A_z + p(R+L) = 2{,}04 + 4{,}5 \cdot 0{,}6 = 4{,}74\ [kN]$$

A reakcióerők nagysága:

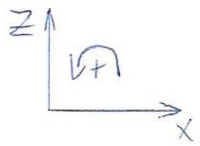
$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2{,}04)^2} = 3{,}628\ [kN]$$

$$|B| = \sqrt{B_z^2} = \sqrt{4{,}74^2} = 4{,}74\ [kN]$$

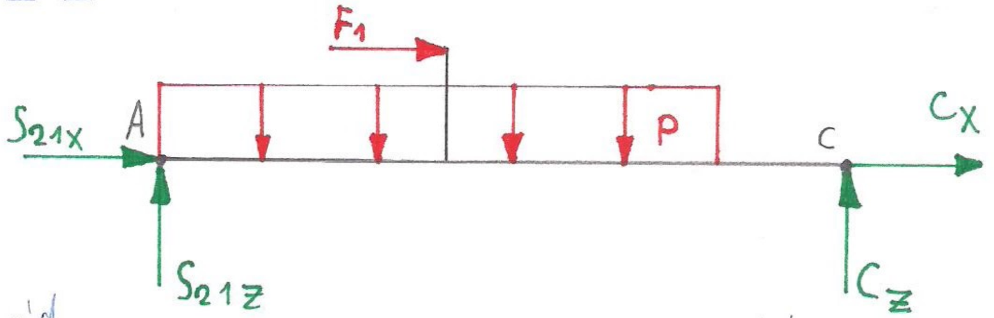
MIKULA GERGŐ ÁDÁM
ZPIL4D

2. Feladat

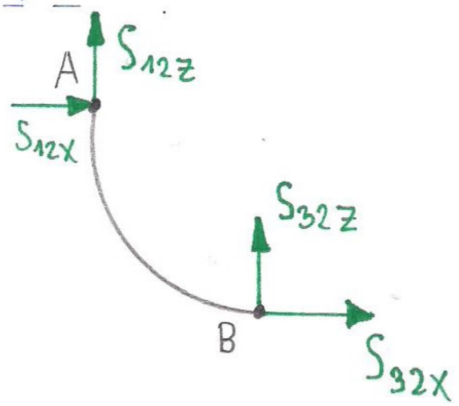
A rudak szabadtest ábrái:



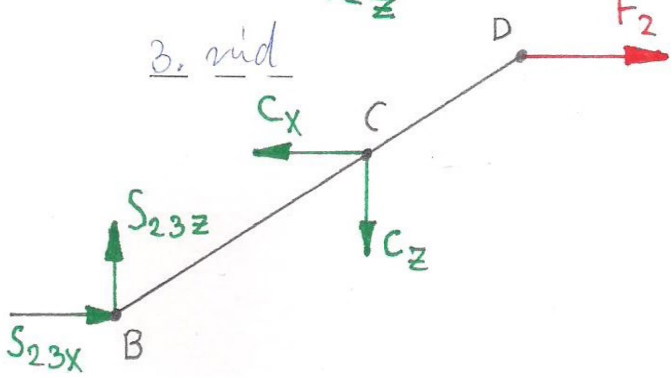
1. rúd



2. rúd

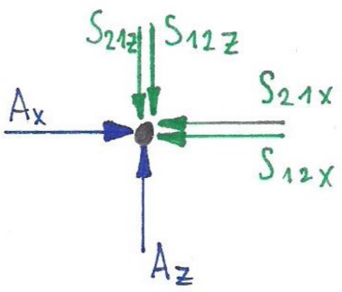


3. rúd

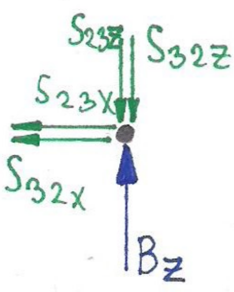


A csuklók szabadtest ábrái:

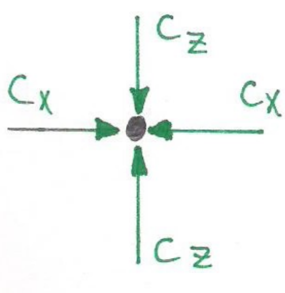
A



B



C



A rúderőket pozitív irányba vettem fel és a számítások kiadják majd a valós irányukat. Kivéve a C csuklónál, mert ott biztosan tudjuk, hogy ellentétes irányúak.

MIKULA GERGŐ ÁDÁM
ZPIL4D
Mikula Gergő Ádám

Az ismeretlen rúderők meghatározásához felírom az egyensúlyi egyenleteket mind a három rúd esetében.
A csuklókban nyomatékok nem adódnak át!

1-es rúd:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$S_{21x} + F_1 + C_x = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$S_{21z} - p \cdot (R+L) + C_z = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-F_1 \cdot \frac{R}{2} - p \cdot \frac{(R+L)^2}{2} + C_z (R+2L) = 0 \qquad (3)$$

2-es rúd:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$S_{12x} + S_{32x} = 0 \qquad (4)$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$S_{32z} + S_{12z} = 0 \qquad (5)$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$S_{32z} \cdot R + S_{32x} \cdot R = 0 \qquad (6)$$

MIKULA GERGŐ ÁDÁM
ZPIL4D
Mikula Gergő Ádám

3-as rúd:

$\sum F_x = 0$

$$S_{23x} - C_x + F_2 = 0 \quad (7)$$

$\sum F_z = 0$

$$S_{23z} - C_z = 0 \quad (8)$$

$\sum M_B = 0$

$$-C_z \cdot 2L + C_x \cdot R - F_2 \cdot \frac{3R}{2} = 0 \quad (9)$$

‚A' és ‚B' csukló egyensúlyi egyenletei:

A csukló

$$S_{12x} + S_{21x} = A_x \quad (10)$$

$$S_{12z} + S_{21z} = A_z \quad (11)$$

B csukló

$$-S_{23x} - S_{32x} = 0 \quad (12)$$

$$S_{23z} + S_{32z} = B_z \quad (13)$$

A felírt egyenleteket átrendeztem és az ismert adatokat behelyettesítettem, így megkaptam a rúderőket.

$$(3) \quad C_z = \frac{F_1 \cdot \frac{R}{2} + \frac{p \cdot (R+L)^2}{2}}{(R+2L)} = \frac{2 \cdot \frac{0,25}{2} + \frac{4,5 \cdot (0,25+0,35)^2}{2}}{0,25 + 2 \cdot 0,35}$$

$$C_z = 1,116 \; [kN]$$

$$(2) \quad S_{21z} = p(R+L) - C_z = 4,5(0,25+0,35) - 1,116$$

$$S_{21z} = 1,584 \; [kN]$$

MIKULA GERGŐ ÁDÁM
ZPIL4D

(8) $S_{23z} = C_z = 1,116\ [kN]$

(13) $S_{32z} = B_z - S_{23z} = 4,74 - 1,116 = 3,624\ [kN]$

(11) $S_{12z} = A_z - S_{21z} = -2,04 - 1,584 = -3,624\ [kN]$

(9) $$C_x = \frac{C_z \cdot 2L + F_2 \cdot 3\frac{R}{2}}{R} =$$

$$= \frac{1,116 \cdot 2 \cdot 0,35 + 1 \cdot 3 \cdot \frac{0,25}{2}}{0,25} = 4,625\ [kN] = C_x$$

(1) $S_{21x} = -F_1 - C_x = -2 - 4,625 = -6,625\ [kN]$

(7) $S_{23x} = C_x - F_2 = 4,625 - 1 = 3,625\ [kN]$

(10) $S_{12x} = A_x - S_{21x} = -3 - (-6,625) = 3,625\ [kN]$

(4) $S_{32x} = -S_{12x} = -3,625\ [kN]$

<u>A kapott rúderők:</u>

$S_{21x} = -6,625\ [kN]$ $\quad S_{21z} = 1,584\ [kN]$ $\quad C_x = 4,625\ [kN]$

$S_{12x} = 3,625\ [kN]$ $\quad S_{12z} = -3,624\ [kN]$ $\quad C_z = 1,116\ [kN]$

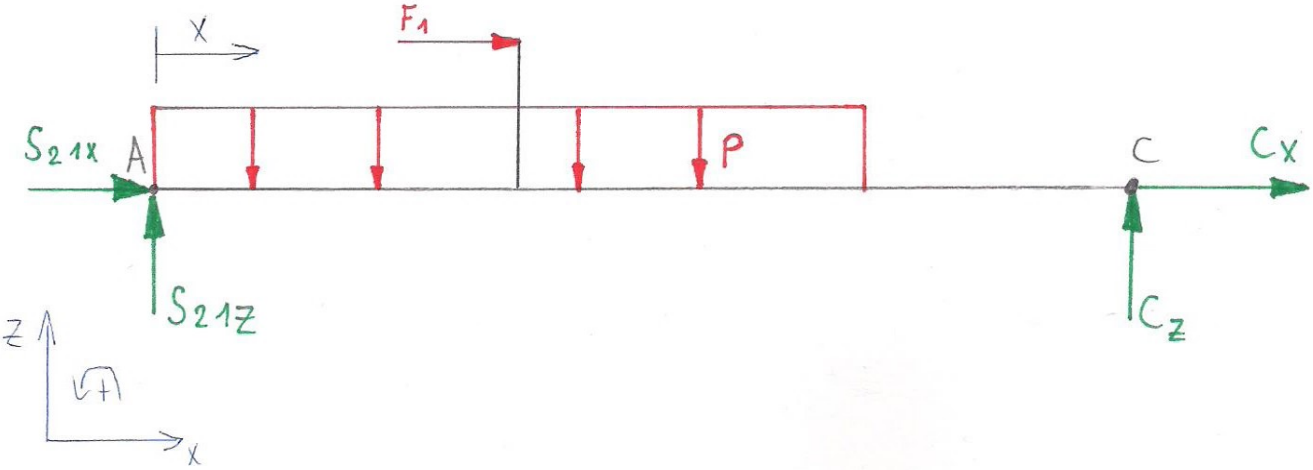
$S_{32x} = -3,625\ [kN]$ $\quad S_{32z} = 3,624\ [kN]$

$S_{23z} = 1,116\ [kN]$ $\quad S_{23x} = 3,625\ [kN]$

MIKULA GERGŐ
Z PILUD

3. Feladat:

Az egyes rúd terhelését az előző feladatban kiszámoltam. Ezek alapján meghatározhatóak az igénybevételi függvények. Először felrajzoljuk a rúd szabad test ábráját, majd 3 szakaszra osztjuk fel.

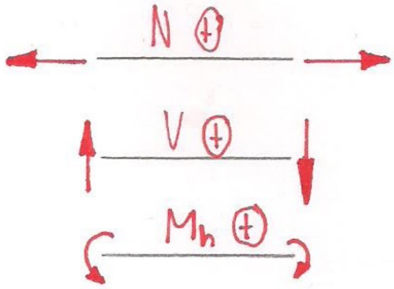


Előjel konvenciók:

Normál igénybevétel:

Nyíró igénybevétel:

Hajlító igénybevétel:



I. szakasz: $0 < x \leq R$

$$N_1(x) = -S_{21x} = 6,625\,[kN]$$

$$V_1(x) = S_{21z} - p \cdot x = 1,584\,[kN] - 4,5\left[\frac{kN}{m}\right] \cdot x\,[m]$$

$$M_{h1}(x) = -S_{21z} \cdot x + p \cdot \frac{x^2}{2} = -1,584\,[kN] \cdot x\,[m] + 4,5\left[\frac{kN}{m}\right] \cdot \frac{(x\,[m])^2}{2} =$$

$$= -1,584\,[kN] \cdot x\,[m] + 9,0\left[\frac{kN}{m}\right] \cdot (x\,[m])^2$$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

II. szakasz: $R < x \leq L+R$

$$N_2(x) = -S_{21x} - F_1 = 6{,}625 - 2 = 4{,}625\ [kN]$$

$$V_2(x) = S_{21z} - p \cdot x = 1{,}584\ [kN] - 4{,}5 \left[\frac{kN}{m}\right] \cdot x\ [m]$$

$$M_{h_2}(x) = -S_{21z} \cdot x + p \cdot \frac{x^2}{2} - F_1 \cdot \frac{R}{2} =$$

$$= -1{,}584\ [kN] \cdot x\ [m] + 4{,}5 \left[\frac{kN}{m}\right] \cdot \frac{(x\ [m])^2}{2} - 0{,}25\ [kNm]$$

III. szakasz: $R+L < x \leq R+2L$

$$N_3(x) = -S_{21x} - F_1 = 4{,}625\ [kN]$$

$$V_3(x) = S_{21z} - p(R+L) = 1{,}584 - 4{,}5 \cdot 0{,}6 = -1{,}116\ [kNm]$$

$$M_{h_3}(x) = -S_{21z} \cdot x + p(R+L)\left(x - \frac{R+L}{2}\right) - F_1 \cdot \frac{R}{2} =$$

$$= -1{,}584\ [kN] \cdot x + 2{,}7\ [kN] \cdot (x\ [m] - 0{,}3\ [m]) - 0{,}25\ [kNm]$$

Ezek után kiszámoljuk a jellegzetes helyeken a függvények értékét, melyek segítségével megrajzolhatóak lesznek az igénybevételi ábrák.

$N_1(0) = 6{,}625\ [kN]$ $\quad N_2(0{,}6) = 4{,}625\ [kN]$ $\quad N_3(0{,}95) = 4{,}625\ [kN]$

$V_1(0) = 1{,}584\ [kN]$ $\quad V_2(0{,}6) = -1{,}116\ [kN]$ $\quad V_3(0{,}95) = -1{,}116\ [kN]$

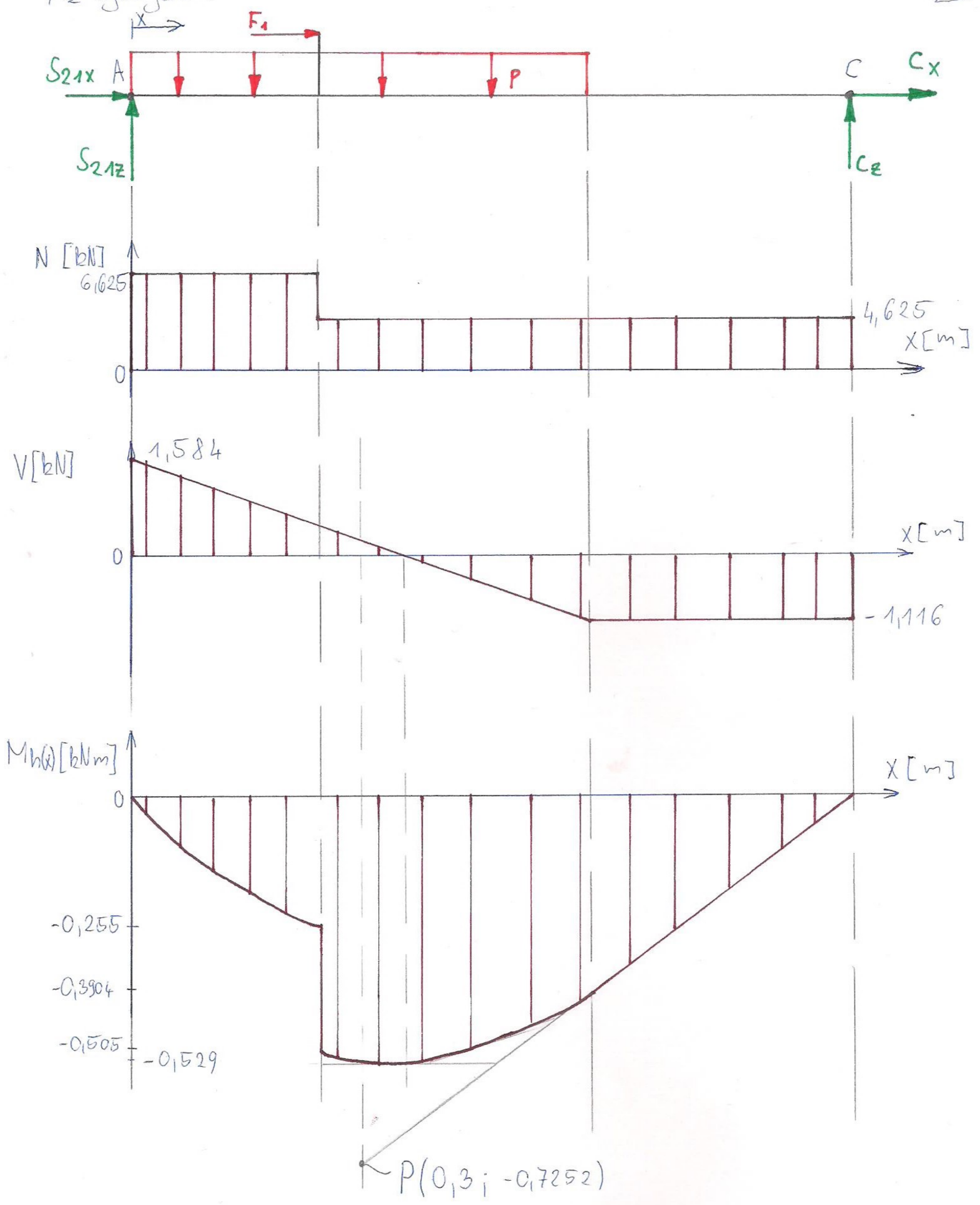
$M_{h_1}(0) = 0\ [kNm]$ $\quad M_{h_1}(0{,}25) = -0{,}255\ [kNm]$

$M_{h_2}(0{,}25) = -0{,}505\ [kNm]$ $\quad M_{h_2}(0{,}6) = -0{,}3904\ [kNm]$

$M_{h_3}(0{,}95) = 0\ [kNm]$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

Az igénybevételi ábrák:



MIKULA GERGŐ
ZPILLD

4. Feladat

a) A maximális hajlítónyomaték meghatározása:

1. Deriváljuk az $M_{h_2}(x)$ függvényt x szerint.:

$$\left[M_{h_2}(x)\right]' = \left[-S_{21z} \cdot x - F_1 \cdot \frac{R}{2} + p \cdot \frac{x^2}{2}\right]' =$$

$$= -S_{21z} + p \cdot x$$

2. Az eredményt egyenlővé tesszük nullával, és meghatározzuk az ‚x' értékét.:

$$-S_{21z} + p \cdot x = 0$$

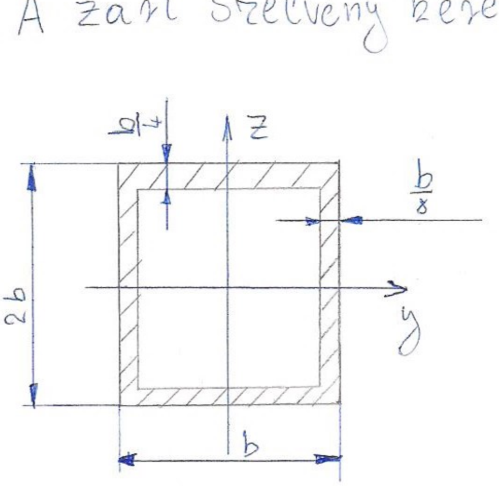
$$x = \frac{S_{21z}}{p} = \frac{1{,}584\,[kN]}{4{,}5\,\left[\frac{kN}{m}\right]} = 0{,}352\,[m]$$

3. A kapott x-et visszahelyettesítjük az eredeti függvénybe. Így megkapjuk az 1-es rúdra ható maximális hajlítónyomaték nagyságát.:

$$M_{h_2}(0{,}352) = -1{,}584 \cdot 0{,}352 - 2 \cdot \frac{0{,}25}{2} + 4{,}5 \cdot \frac{0{,}352^2}{2} =$$

$$M^{(1)}_{h,max} = -0{,}529\,[kNm]$$

b) A zárt szelvény keresztmetszeti jellemzői:



Jelen esetben az y a hajlítás tengelye. Ezért az y tengelyre kell másodrendű nyomatékot számolni, amely két téglalap egymásból való kivonásából adódik. Téglalap másodrendű nyomatéka általánosan:

$$I_y = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D
Mikula Gergő

Összevonva a két téglalap esetére a másodrendű nyomaték tehát:

$$I_y = \frac{(2b)^3 \cdot b}{12} - \frac{\left(2b - \frac{2b}{4}\right)^3 \cdot \left(b - \frac{2b}{8}\right)}{12} =$$

$$I_y = \frac{8b^4}{12} - \frac{27b^4}{128} = \frac{175}{384} b^4 ;$$

Ezután meghatározzuk a minimális keresztmetszeti tényezőt:

$$\sigma = \frac{M_h}{K_y} \Longrightarrow K_{y,min} = \frac{|M_{h,max}^{(1)}|}{\sigma_{meg}} = \frac{5,29 \cdot 10^5\,[Nmm]}{100\,[MPa]} =$$

$$K_{y,min} = 5290\,[mm^3]$$

A keresztmetszeti tényezőt egy másik képlettel is ki tudjuk számolni. Ezt felhasználva fogom kiszámolni a keresztmetszet kérdéses b méretét.

$K_y = \frac{I_y}{e}$, ahol e a hajlítás tengelyére merőleges szélső szál távolsága. $(e = b)$

$$K_{y,min} = \frac{I_y}{b} = \frac{\frac{175}{384} b^4}{b} = \frac{175}{384} b^3$$, átalakítva ‚b'-re:

$$b = \sqrt[3]{\frac{K_{y,min}}{\frac{175}{384}}} = \sqrt[3]{\frac{5290 \cdot 384}{175}} = 22,64\,[mm]$$

A szükséges b méret felfelé egészre kerekítve: $b = 23\,[mm]$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

5. Feladat:

A szelvény táblázat alapján kiválasztottam a megfelelő sorszámú U-szelvényt.
A táblázatban a 'K_x' adat felel meg az előző feladatban számolt 'K_y' tényezőnek.
Azonban mivel nekem 2 db U-szelvényem van ezért a 'K_y' keresztmetszeti tényező felét kell venni.

$$\frac{K_{y,min}}{2} = 2{,}645\ [cm^3]$$

Majd megkerestem azt a legkisebb 'K_x' tényezőt, amely a kapott tényezőnél éppen nagyobb volt.

$$K_x = 2{,}7397\ [cm^3] > 2{,}645\ [cm^3]$$

Ennek a szelvénynek a sorszáma: 257

6. Feladat

A keresztmetszet jellemzői:

$b = 23\ [mm]$

$$A = 2b \cdot b - \frac{3}{2}b \cdot \frac{3}{4}b = 2 \cdot 23^2 - \frac{9}{8} \cdot 23^2 = 462{,}875\ [mm^2]$$

A veszélyes keresztmetszetet terhelő normál igénybevétel (leolvasható az igénybevételi ábráról):

$$N = 4625\ [N]$$

MIKULA GERGŐ
ZPK4D

A normál igénybevételből adódó feszültség:

$$\sigma^{(N)}(z) = \frac{|N|}{A} = \frac{4\,625}{462{,}875} = 9{,}992\ [MPa]$$

A hajlító igénybevételből adódó feszültség:

$$\sigma^{(Mh)}(z) = \frac{M^{(1)}_{h,max}}{I_y} \cdot z$$

$$I_y = \frac{175}{384} \cdot b^4 = \frac{175}{384} \cdot 23^4 = 127\,531{,}7\ [mm^4]$$

$$\sigma^{(Mh)}(z) = \frac{5{,}29 \cdot 10^5 [Nmm]}{127\,531{,}7\ [mm^4]} \cdot z\ [mm] = 4{,}148 \cdot z\ [MPa]$$

A kapott feszültségeket összegezve megkapjuk az eredő feszültségeloszlást:

$$\sigma(z) = \sigma^{(N)}(z) + \sigma^{(Mh)}(z) = 9{,}992 + 4{,}148 \cdot z\ [MPa]$$

A feszültségeket kiszámoljuk a szélső pontokban:

$$\sigma(b) = \sigma(23) = 9{,}992 + 4{,}148 \cdot 23 = 105{,}396\ [MPa]$$

Itt meg is állhatunk ugyanis látszódik, hogy a kapott érték nagyobb a megengedett feszültségnél. $\sigma(b) = 105{,}396 [MPa] > \sigma_{meg} = 100\ [MPa]$

Emiatt új ‚b' értéket kell keresnünk, ez lesz a b^*.

MIKULA GERGŐ
ZPIK4D

A ,b*' nagyságát iterációval fogom meghatározni. Megnövelem eggyel a ,b' értékét majd elvégzem az ellenőrzést b^*-ra.

$$b^* = b+1 = 24 \, [mm]$$

$$A^* = 2(b^*)^2 - \frac{9}{8}(b^*)^2 = 2 \cdot 24^2 - \frac{9}{8} \cdot 24^2 = 504 \, [mm^2]$$

$$\sigma^{(N)}(z) = \frac{|N|}{A^*} = \frac{4625}{504} = 9{,}177 \, [MPa]$$

$$\sigma^{(Mh)}(z) = \frac{M^{(1)}_{h,max}}{I^*_y} \cdot z$$

$$I^*_y = \frac{175}{384}(b^*)^4 = \frac{175}{384} \cdot 24^4 = 151\,200 \, [mm^4]$$

$$\sigma^{(Mh)}(z) = \frac{5{,}29 \cdot 10^5 \, [Nmm]}{151\,200 \, [mm^4]} \cdot z \, [mm] = 3{,}499 \cdot z \quad [MPa]$$

Eredő feszültség:

$$\sigma(z) = \sigma^{(N)}(z) + \sigma^{(Mh)}(z) = 9{,}177 + 3{,}499 \cdot z \quad [MPa]$$

A feszültségek a szélső szálakban:

$$\sigma(b^*) = \sigma(24) = 9{,}177 + 3{,}499 \cdot 24 = 93{,}153 \, [MPa]$$

$$\sigma(-b^*) = \sigma(-24) = 9{,}177 + 3{,}499 \cdot (-24) = -74{,}8 \, [MPa]$$

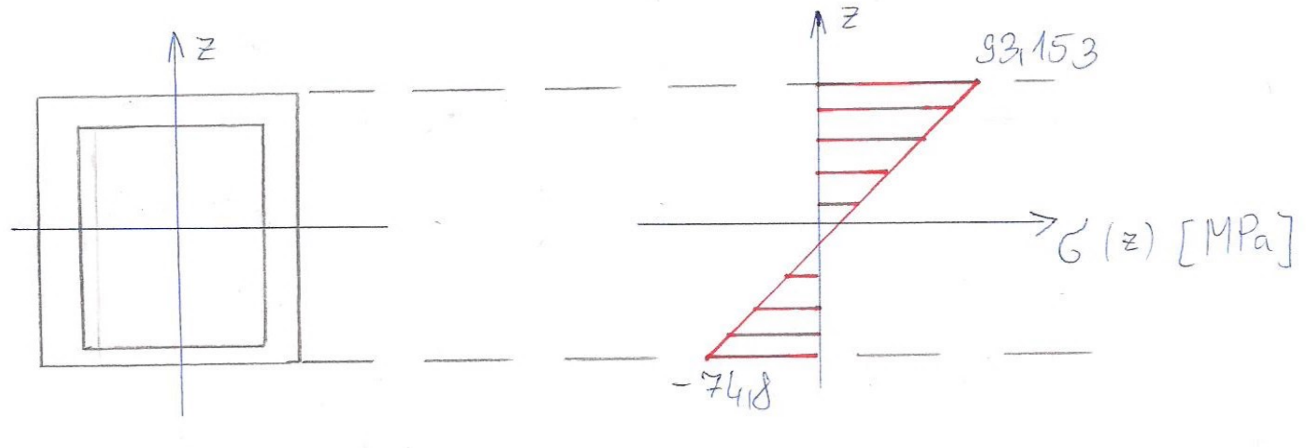
$$\sigma(b^*) = \sigma^{(1)}_{max} = 93{,}153 \, [MPa]$$

Látszik, hogy $\sigma^{(1)}_{max} < \sigma_{meg}$ teljesül, azaz a ,b*'-nak választott érték megfelelő. $b^* = 24 \, [mm]$

Így már megfelel a szelvényünk a normál igénybevétel figyelembe vételével is.

MIKULA GERGŐ
ZDILLD

A feszültségeloszlás ábrázolása:



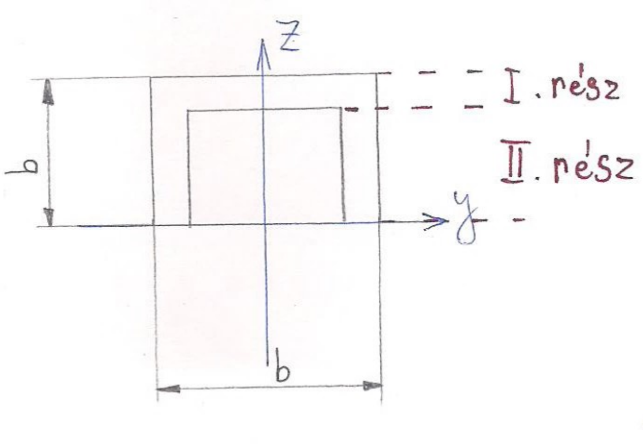
7. Feladat

Nyírás szempontjából a veszélyes keresztmetszet ott van, ahol a nyíró erő (V(x)) értéke abszolút értékben véve a legnagyobb. Ez $X = 0$ [m] -nél van, ahol $|V(0)| = 1{,}584$ [kN].

A keresztmetszet szimmetrikus az y tengelyre, ezért elég lesz csak a felét vizsgálni a csúsztató feszültség szempontjából.

Mivel a húsvastagság nem állandó, ezért két részre kell osztani a fél keresztmetszetet.

Ábrával szemléltetve:



Keresztmetszeti jellemzők:

$b = 23$ [mm]

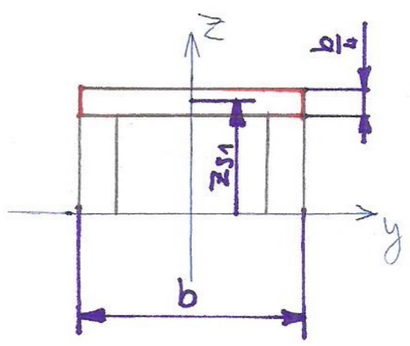
$V = 1584$ [N]

$I_y = \frac{175}{384} \cdot b^4 = 127\,531{,}7$ [mm^4]

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

A csúsztató feszültséget a kövekező képlettel tudjuk megadni:

$$\tau(z) = \frac{|V|}{I_y} \cdot \frac{S(z)}{a(z)}$$



I. rész: $\frac{3}{4} b < z_1 < b$

/z koordináta mm-ben behelyettesítve/

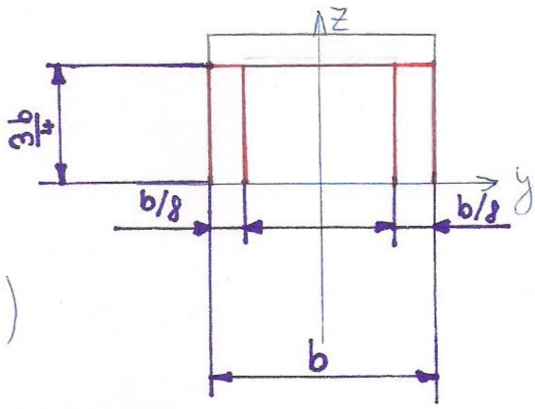
$$a_1(z_1) = b = 23\ [mm]$$

$$z_{S1} = \frac{b + z_1}{2} \qquad A_1 = b(b - z_1)$$

$$S_1(z_1) = A_1 \cdot z_{S1} = (b^2 - z_1 b)\left(\frac{b + z_1}{2}\right) =$$

$$= \frac{b^3 + b^2 \cdot z_1 - b^2 \cdot z_1 - z_1^2 b}{2} = \frac{b^3 - z_1^2 b}{2} = \frac{b}{2}(b^2 - z_1^2)\ [mm^3]$$

$$\tau_1(z_1) = \frac{1584\ [N]}{127531{,}7\ [mm^4]} \cdot \frac{\frac{23}{2}(23^2 - z_1^2)}{23} = 3{,}285 - 0{,}00621 z_1^2\ [MPa]$$



II. rész: $0 < z_2 < \frac{3}{4} b$

$$a_2(z_2) = \frac{b}{4} = \frac{23}{4}\ [mm]$$

$$z_{S2} = \frac{\frac{3}{4} b + z_2}{2} \ ; \ A_2(z_2) = \frac{b}{4}\left(\frac{3b}{4} - z_2\right)$$

$$S_2(z_2) = A_2 \cdot z_{S2} + S_1\left(\frac{3b}{4}\right) = \frac{b}{4}\left(\frac{3b}{4} - z_2\right) \cdot \left(\frac{\frac{3}{4} b + z_2}{2}\right) + 2661{,}5\ [mm^3] =$$

$$= \frac{b}{8}\left(\frac{9b^2}{16} - z_2^2\right) + 2661{,}5\ [mm^3]$$

$$\tau_2(z_2) = \frac{1584\ [N]}{127531{,}7\ [mm^4]} \cdot \frac{\frac{23}{8}\left(\frac{23^2 \cdot 9}{16} - z_2^2\right) + 2661{,}5}{\frac{23}{4}} = 7{,}597 - 0{,}00621 \cdot z_2^2\ [MPa]$$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D
[signature]

τ_1, τ_2 a jellegzetes helyeken:

$$\tau_1(b) = \tau_1(23) = 3{,}285 - 0{,}00621 \cdot 23^2 = 0 \; [MPa]$$

$$\tau_1\left(\frac{3b}{4}\right) = \tau_1\left(\frac{3\cdot 23}{4}\right) = 3{,}285 - 0{,}00621 \cdot \left(\frac{69}{4}\right)^2 = 1{,}437 \; [MPa]$$

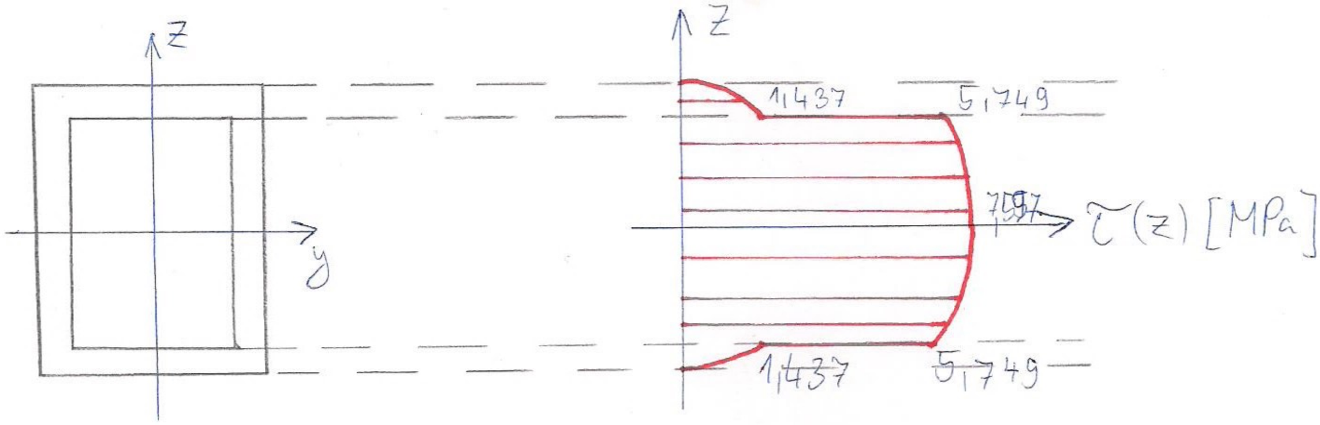
$$\tau_2\left(\frac{3b}{4}\right) = \tau_2\left(\frac{69}{4}\right) = 7{,}597 - 0{,}00621 \cdot \left(\frac{69}{4}\right)^2 = 5{,}749 \; [MPa]$$

$$\tau_2(0) = 7{,}597 - 0{,}00621 \cdot 0 = 7{,}597 \; [MPa] = \tau_{max}$$

$$\left|\tau_{max}^{(1)}\right| = 7{,}597 \; [MPa]$$

Feszültségeloszlás ábrázolása:

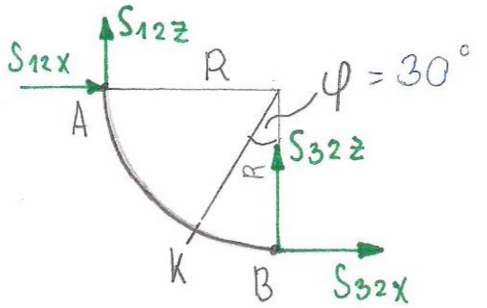
Mivel a keresztmetszet szimmetrikus, ezért a feszültségeloszlás is az lesz.:



MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

8. Feladat:

A (2)-es rúd igénybevételei:



A B pontból redukáljuk az erőket a K keresztmetszetbe.

$d = 50$ [mm]

$$N(\varphi) = S_{32x} \cdot \cos(\varphi) - S_{32z} \cdot \sin(\varphi) =$$
$$= -3{,}625 \cdot \cos(30°) - 3{,}624 \cdot \sin(30°) = -4{,}951 \text{ [kN]}$$

$$V(\varphi) = -S_{32x} \cdot \sin(\varphi) - S_{32z} \cdot \cos(\varphi) =$$
$$= +(-3{,}624 \cdot \cos(30°)) + 3{,}625 \cdot \sin(30°) = -1{,}326 \text{ [kN]}$$

$$M_h(\varphi) = S_{32z} \cdot R \cdot \sin(\varphi) + S_{32x} \cdot (R - R \cdot \cos(\varphi)) =$$
$$= 3{,}624 \cdot 0{,}25 \cdot \sin(30°) + (-3{,}625) \cdot (0{,}25 - 0{,}25 \cdot \cos 30°) =$$
$$M_h(30°) = 0{,}331586 \text{ [kNm]} = 331\,586 \text{ [Nmm]}$$

A keresztmetszet jellemzői:

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 625\pi \text{ [mm}^2\text{]}$$

$$I_y = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{50^4 \cdot \pi}{64} = 306\,796{,}2 \text{ [mm}^4\text{]}$$

MIKULA GERGŐ
ZPICUD

Síkgörbe rudak normálfeszültség eloszlását a Grashof-féle képlettel tudjuk meghatározni.

A képlet:

$$\sigma(z) = \frac{M_h}{R \cdot A} + \frac{M_h}{I_0} \cdot z \cdot \frac{R}{R+z}$$

Az I_0 másodrendű nyomaték közelíthető a hajlítás tengelyére számolt másodrendű nyomatékkal, ha $2 < \frac{R}{h} < 8$ teljesül.

Jelen esetben:

$$\frac{R}{h} = \frac{R}{d} = \frac{250\,[mm]}{50\,[mm]} = 5 \qquad 2 < 5 < 8 \Rightarrow I_0 \approx I_y$$

$$\sigma^{(M_h)}(z) = \frac{M_h(30°)}{R \cdot A} + \frac{M_h(30°)}{I_y} \cdot z \cdot \frac{R}{R+z} =$$

$$= \frac{331\,586\,[Nmm]}{250\,[mm] \cdot 625\pi\,[mm^2]} + \frac{331\,586\,[Nmm]}{306\,796{,}2\,[mm^4]} \cdot \frac{250\,[mm]}{250\,[mm] + z\,[mm]} \cdot z\,[mm]$$

$$\sigma^{(M_h)}(z) = 0{,}6755 + \frac{270{,}201 \cdot z}{250 + z} \quad [MPa]$$

Azonban a keresztmetszetet normál igénybevétel is terheli, ezért az abból származó feszültségeloszlást hozzá kell adni.

$$\sigma^{(N)} = \frac{N}{A} = \frac{-4{,}951 \cdot 10^3\,[N]}{625\pi\,[mm^2]} = -2{,}5215\,[MPa]$$

Az eredő feszültség eloszlás

$$\sigma(z) = \sigma^{(N)} + \sigma^{(M_h)}(z) = -1{,}846 + \frac{270{,}201 \cdot z}{250 + z} \quad [MPa]$$

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

A normál feszültség eloszlás a jellegzetes helyeken:

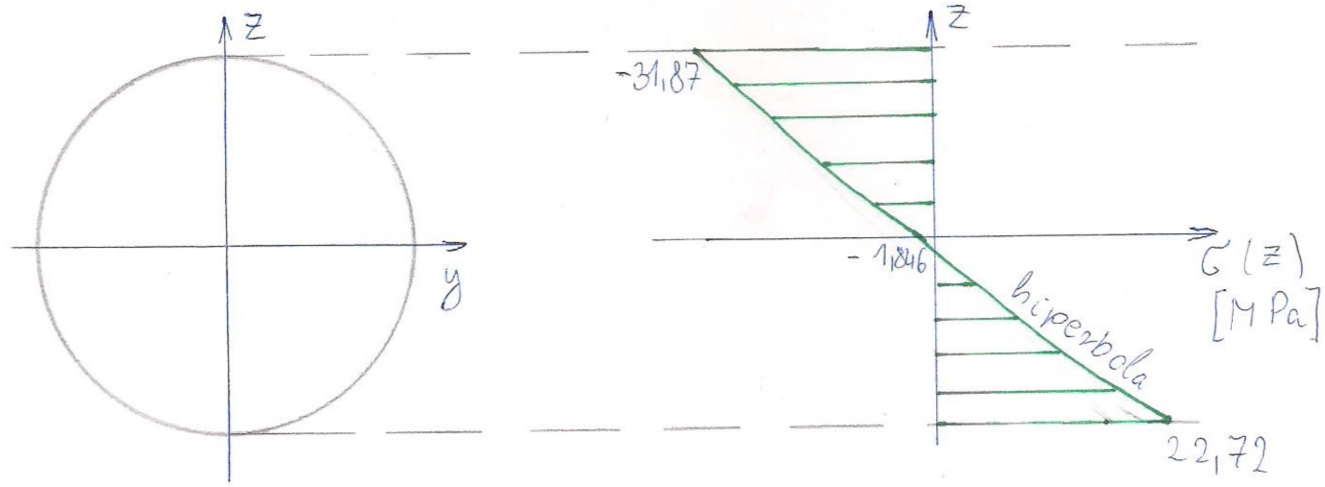
$$\sigma\left(\frac{d}{2}\right) = -1,846 + \frac{270,201 \cdot 25}{250+25} = 22,72 \, [MPa]$$

$$\sigma(0) = -1,846 + \frac{270,201 \cdot 0}{250+0} = -1,846 \, [MPa]$$

$$\sigma\left(-\frac{d}{2}\right) = -1,846 + \frac{270,201 \cdot (-25)}{250-25} = -31,87 \, [MPa]$$

$$\sigma\left(-\frac{d}{2}\right) = \sigma^{(2)}_{K,max} = -31,87 \, [MPa]$$

A feszültség eloszlás ábrázolása:



MIKULA GERGŐ
ZPKUD

9. Feladat:

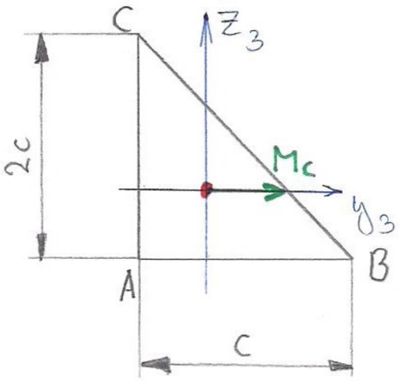
Szükségünk van a 'C' pontra ható hajlítónyomatékra.

Ehhez az 'F₂' erőt redukáljuk a 'C' pontba.

$$F_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [kN] \quad ; \quad r_{CD} = \begin{bmatrix} L \\ 0 \\ \frac{R}{2} \end{bmatrix} [m] = \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0 \\ 0,125 \end{bmatrix} [m]$$

$$M_C = r_{CD} \times F_2 = \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0 \\ 0,125 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,25 \\ 0 \end{bmatrix} [kNm]$$

A keresztmetszet jellemzői:



Másodrendű nyomatékok:

$$I_{y_3} = \frac{(2c)^3 \cdot c}{36} = \frac{72^3 \cdot 36}{36} = 373\,248 \,[mm^4]$$

$$I_{z_3} = \frac{c^3 \cdot 2c}{36} = \frac{36^3 \cdot 2 \cdot 36}{36} = 93\,312 \,[mm^4]$$

$$I_{y_3 z_3} = -\frac{c^2 \cdot (2c)^2}{72} = -\frac{36^2 \cdot 72^2}{72} = -93\,312 \,[mm^4]$$

A hajlítás tengelye nem esik egybe egyik fő másodrendű nyomaték tengelyével sem, azaz jelenleg nem tiszta hajlításról van szó.

Meg kell határozni a fő tengelyeket és szöghelyzetüket.

MIKULA GERGŐ
ZPIL4D

A fő másodrendű nyomatéki tengelyek:

$$I_{1,2}=\frac{I_{y_3}+I_{z_3}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{y_3}-I_{z_3}\right)^2+4\,I_{y_3z_3}^2}=$$

$$=\frac{373\,248+93312}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(93\,312-373\,248\right)^2+4\cdot 93\,312^2}$$

$I_1=401\;501\;[mm^4]$; $I_2=65\,059{,}4\;[mm^4]$

Az „I_1” „y_3” tengellyel bezárt „α” szöge:

$$\alpha=\arctan\left(\frac{I_{y_3}-I_1}{I_{y_3z_3}}\right)=\arctan\left(\frac{373\,248-401\,501}{-93\,312}\right)$$

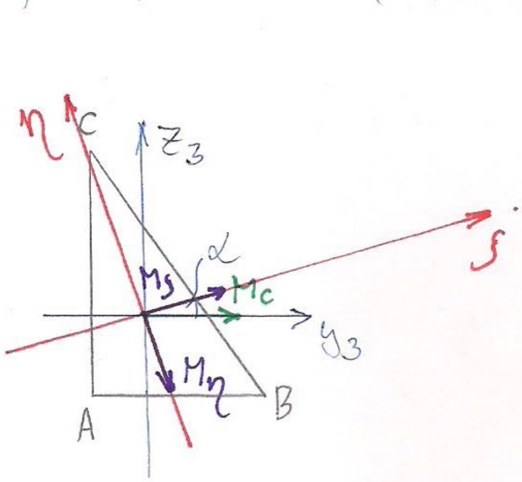
$\alpha=16{,}845°$

Felbontjuk az „M_c” nyomatékot a két főtengellyel párhuzamos komponensekre.

$M_\xi=M_c\cdot\cos(\alpha)=0{,}25\cdot\cos(16{,}845°)=0{,}23927\,[kNm]$

$M_\eta=-M_c\cdot\sin(\alpha)=-0{,}25\cdot\sin(16{,}845°)=-0{,}072467\,[kNm]$

Ábrázolva:



MIKULA GERGŐ
ZPILKO

Ezek után felírhatók az η és a ξ tengely körüli hajlítások feszültség eloszlásai:

ξ körüli hajlítás:

$$\sigma_1(\eta) = \frac{M_\xi}{I_1} \cdot \eta = \frac{0{,}23927 \cdot 10^6\,[Nmm]}{401\,501\,[mm^4]} \cdot \eta\,[mm] =$$

$$\sigma_1(\eta) = 0{,}5959 \cdot \eta \quad [MPa]$$

$$\sigma_2(\xi) = -\frac{M_\eta}{I_2} \cdot \xi = \frac{-(-0{,}072467 \cdot 10^6\,[Nmm])}{65\,059{,}4\,[mm^4]} \cdot \xi\,[mm] =$$

$$\sigma_2(\xi) = 1{,}1139 \cdot \xi \quad [MPa]$$

A szuperpozíció elve alapján:

$$\sigma(\eta;\xi) = \sigma_1(\eta) + \sigma_2(\xi) = 0{,}5959 \cdot \eta + 1{,}1139 \cdot \xi \quad [MPa]$$

Ezek után meg tudjuk határozni a zérustengely szöghelyzetét.:

A zérus tengely egy olyan tengely, amelynek minden pontjában zérus a feszültség értéke.

A feszültség eloszlást egyenlővé tesszük nullával.

$$\sigma(\eta;\xi) = 0{,}5959\,\eta + 1{,}1139 \cdot \xi = 0$$

Ezt rendezzük η-ra:

$$\eta = -\frac{1{,}1139}{0{,}5959} \cdot \xi$$

MIKULA GERGŐ
ZPK4D

Ebből:

$$\beta = arctg\left(\frac{-1,1139}{0,5959}\right) = -61,584^\circ$$

Azonban ez a szög jelenleg a zérustengely és a ξ tengely által bezárt szög.

A zérustengely és az y_3 tengely által bezárt szög:

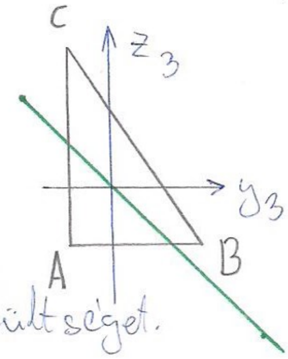
$$\beta_{zérus} = \alpha + \beta = 16,845^\circ - 61,854^\circ \approx -45^\circ$$

$$\beta_{zérus} = -45^\circ$$

A maximális feszültség a zérustengelytől legtávolabbi pontban fog ébredni.

Könnyen belátható, hogy ez a pont jelenleg a ,C' vagy ,A' pont lesz.

Az A és C pont egyenlő távolságra van a zérustengelytől. (ezt szerkesztéssel meghatároztam)



Ezért a C pontban fogom kiszámolni a feszültséget.

(y_3, z_3) koordinátákról át kell térni $(\xi ; \eta)$ koordinátákra.

$$\xi = y_3 \cdot \cos(\alpha) + z_3 \cdot \sin(\alpha) = -12 \cdot \cos(16,845^\circ) + 48 \cdot \sin(16,845^\circ)$$

$$\xi = 2,4245 \text{ [mm]}$$

$$\eta = z_3 \cdot \cos(\alpha) - y_3 \cdot \sin(\alpha) = 48 \cdot \cos(16,845^\circ) + 12 \cdot \sin(16,845^\circ)$$

$$\eta = 49,418 \text{ [mm]}$$

Behelyettesítve: $\sigma(\eta ; \xi) = 0,5959 \cdot 49,418 + 1,1139 \cdot 2,4245 =$

$$\sigma^{(3)}_{C,max} = 32,15 \text{ [MPa]}$$