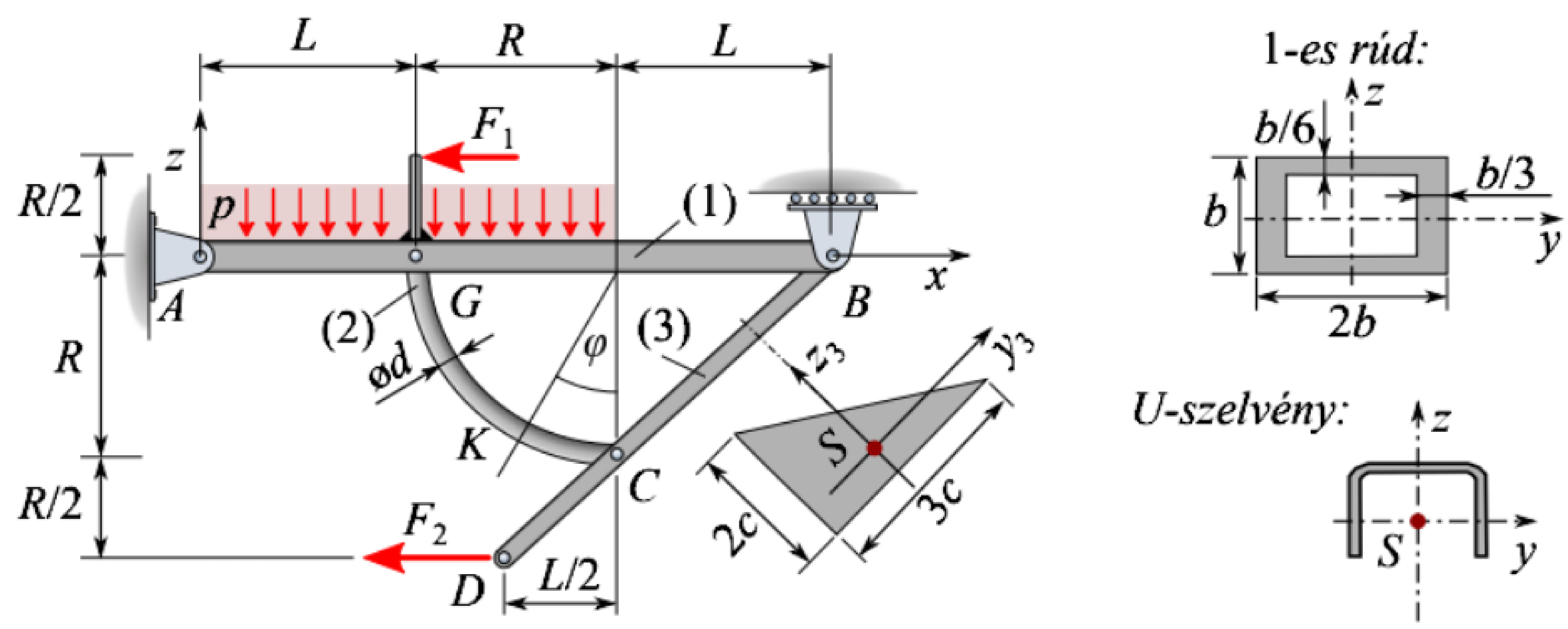
Feladatkitűzés

Az ábrán vázolt szerkezet mindhárom rúdja csuklósan kapcsolódik, anyaguk homogén, izotrop, lineárisan rugalmas. Az (1)-es rúd keresztmetszete az ábrán látható téglalap alakú zárt szelvény, a negyedkörív alakú (2)-es rúdé kör, míg a (3)-as rúdé háromszög. Az (1)-es rúd anyagára megengedett feszültség σ_{meg}.



Adatok

R [m]	L [m]	d [mm]	c [mm]	F_1 [kN]	F_2 [kN]	p [kN/m]	σ_{meg} [MPa]
0.3	0.35	50	30	3	3	4.50	100

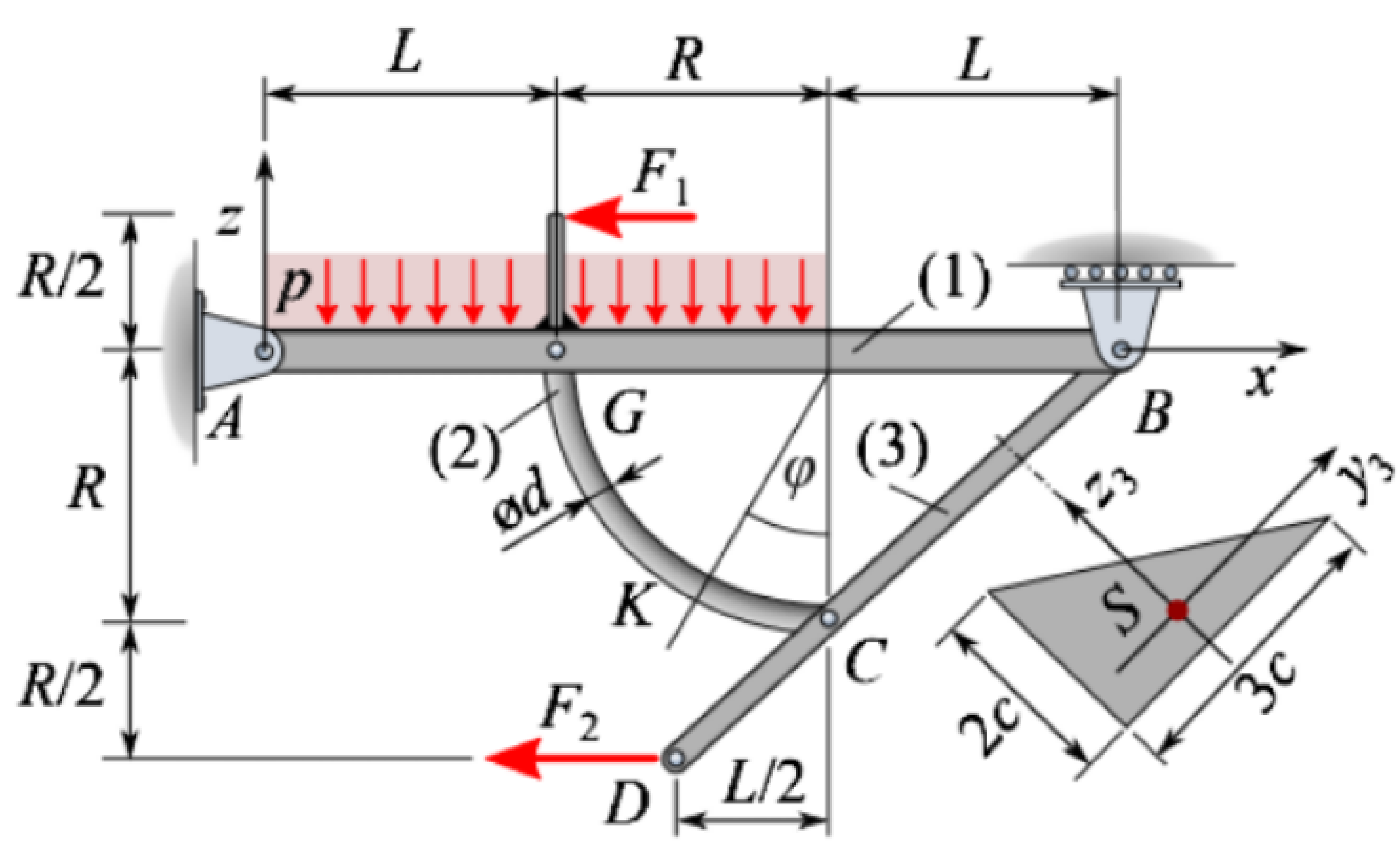
300 [mm] 350 [mm] $4,5 \cdot 10^{-3}$ [kN/mm]

(Rész)eredmények

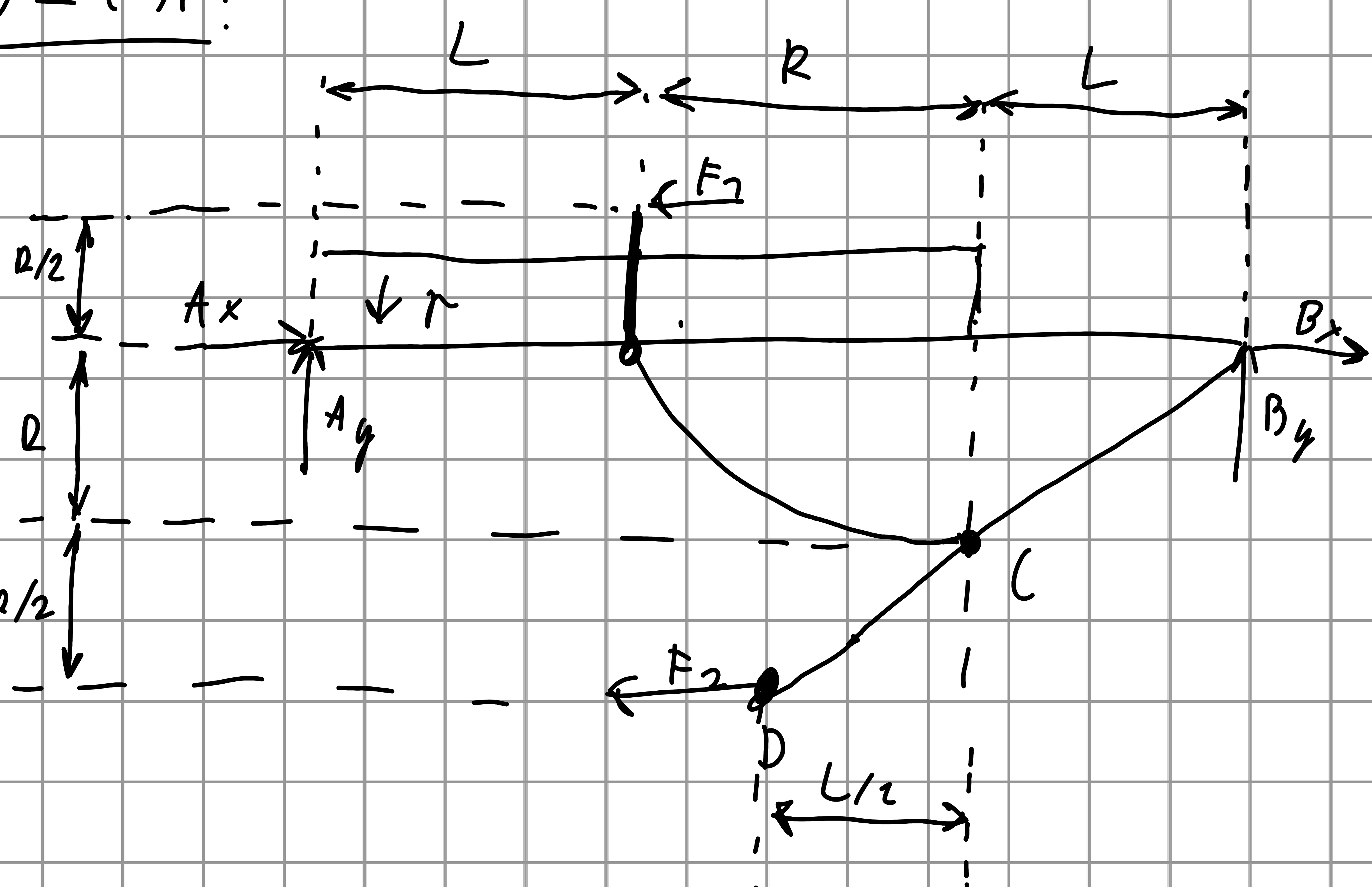
$\|A\|$ [kN]	$\|B\|$ [kN]	$M^{(1)}_{\text{h,max}}$ [kNm]	$K_{y,\text{min}}$ [cm^3]	b [mm]	Szelv.sorszám
6,1	1,85	0,350	3,5	24	166
$\sigma^{(1)}_{\text{max}}$ [MPa]	$\|V^{(1)}_{\text{max}}\|$ [kN]	$\|\tau^{(1)}_{\text{max}}\|$ [MPa]	$\sigma^{(2)}_{K,\text{max}}$ [MPa]	$\|\sigma^{(3)}_{C,\text{max}}\|$ [MPa]	β_{zerus} [°]
−94,66	1,576	5,4	−21,331	33,333	−18,435

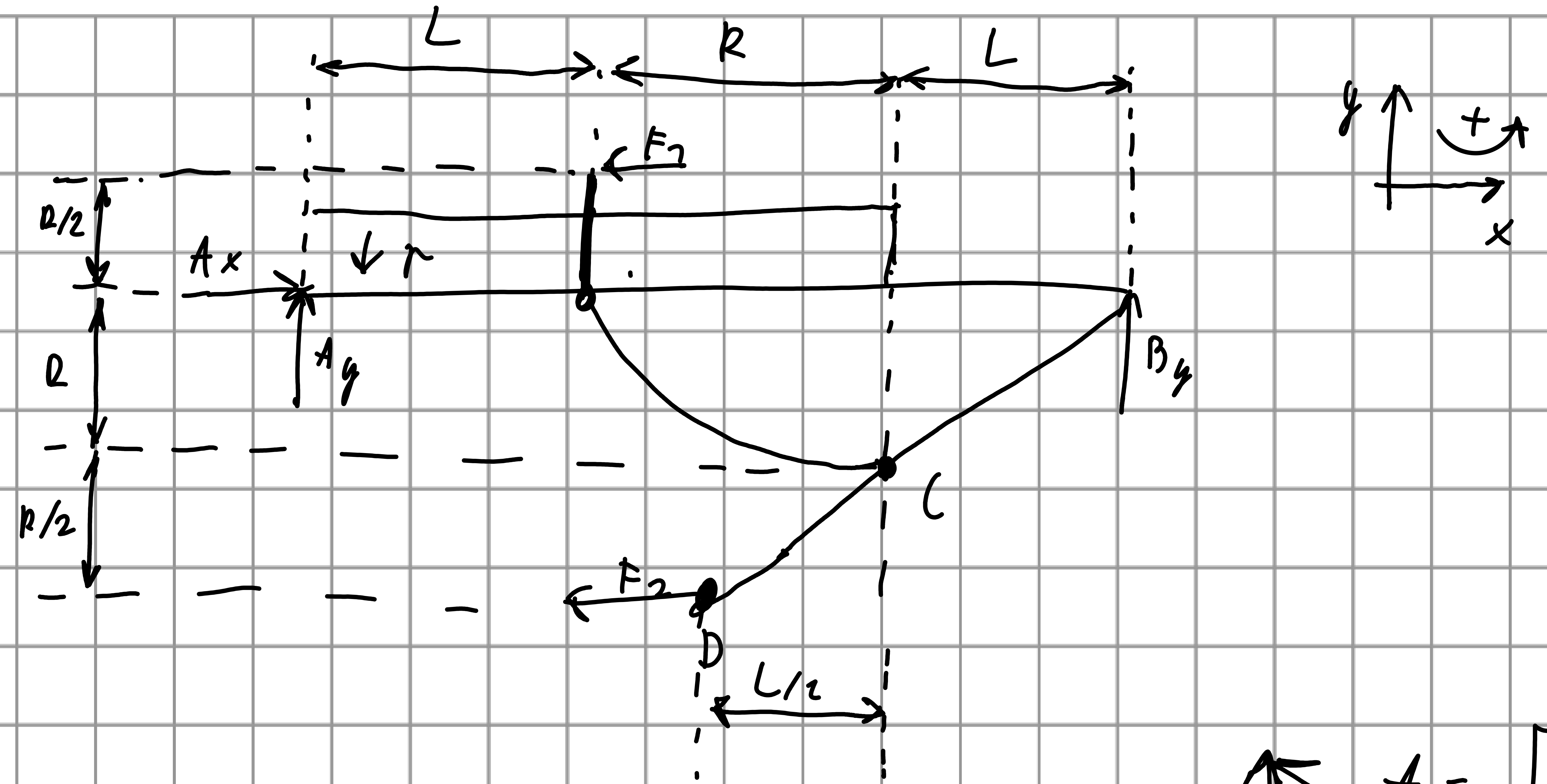
1. Készítsen léptékhelyes ábrát a szerkezetről és számítsa ki az A és B kényszerekben ébredő reakció komponenseket! – **Minimumfeladat**
2. Rajzolja meg a csuklók és a rudak szabadtest ábráit, majd ezek alapján határozza meg az egyes rudak terhelését! – **Minimumfeladat**
3. Írja fel az (1)-es rúd igénybevételi függvényeit az x koordináta segítségével és rajzolja fel az igénybevételi ábrákat! – **Minimumfeladat**
4. Méretezze az (1)-es rudat tiszta hajlításra az ábrán jelölt zárt szelvényt alkalmazva:
   - Keresse meg a veszélyes keresztmetszetet és határozza meg az ott fellépő abszolút értékben maximális $M^{(1)}_{\mathrm{h,max}}$ hajlítónyomatékot!
   - Határozza meg a szükséges minimális keresztmetszeti tényezőt és az annak megfelelő b méret egész mm-re felfelé kerekített értékét!
5. A tárgy honlapján található szelvény táblázatból válassza ki azt a legkisebb keresztmetszeti tényezőjű U-szelvényt, amellyel az (1)-es rúdnál alkalmazott zárt szelvény tiszta hajlítás esetén az ábrán jelölt módon helyettesíthető!
6. Ellenőrizze, hogy a vizsgált veszélyes keresztmetszetben a normálerő hatását is figyelembe véve megfelel-e a tartó a választott b méretű zárt szelvénnyel!
   - Amennyiben szükséges, adja meg a keresztmetszet új b^* méretét egész mm-re felfelé kerekítve, hogy a normálerőt is figyelembe véve megfeleljen a tartó!
   - A jellegzetes értékek feltüntetésével ábrázolja a normálfeszültség eloszlását veszélyes keresztmetszetben a módosított b^* mérettel! Adja meg a legnagyobb abszolút értékű $\sigma^{(1)}_{\mathrm{max}}$ feszültséget előjelhelyesen!
7. Az (1)-es rúd nyírás szempontjából legveszélyesebb keresztmetszetében írja fel a nyírásból adódó csúsztató feszültség eloszlást leíró függvényt, és ábrázolja a jellegzetes értékek feltüntetésével! Adja meg a legnagyobb abszolút értékű $|\tau^{(1)}_{\mathrm{max}}|$ feszültséget! Használja az eredeti b méretű zárt szelvényt!
8. Számítsa ki a (2)-es rúd $\varphi = 30°$-nál elhelyezkedő K keresztmetszetében fellépő igénybevételeket és a jellegzetes értékek feltüntetésével rajzolja meg a normálfeszültség eloszlását! Adja meg a legnagyobb abszolút értékű $\sigma^{(2)}_{K,\mathrm{max}}$ feszültséget előjelhelyesen!
9. Számítsa ki a (3)-as rúd C keresztmetszetében a hajlításból ébredő legnagyobb abszolút értékű $\sigma^{(3)}_{C,\mathrm{max}}$ normálfeszültséget, valamint adja meg a zérustengely és az y_3 tengely által bezárt β_{zerus} szöget! (A rudak C pontbeli összeszereléséhez szükséges furatok hatásától eltekintünk.)

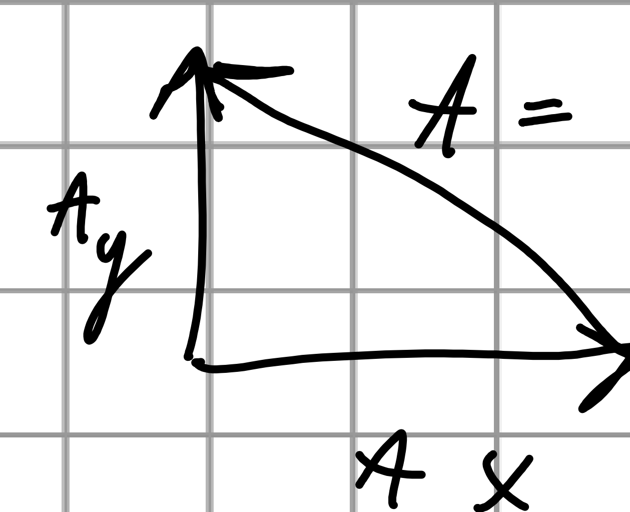
1. Készítsen léptékhelyes ábrát a szerkezetről és számítsa ki az A és B kényszerekben ébredő reakció komponenseket! – **Minimumfeladat**



SZTÁ:







$A = \sqrt{A_y^2 + A_x^2} = 6,7\ (kN)$

– Egyensúly:

$$(1)\quad \Sigma F_x := 0 = A_x - F_1 - F_2$$

$$(2)\quad \Sigma F_y := 0 = A_y + B_y - p(L+R)$$

$$(3)\quad \Sigma M^A := 0 = B_y \cdot (2L+R) + F_1 \cdot \frac{R}{2} - F_2 \cdot \left(R + \frac{R}{2}\right) - p\frac{(L+R)^2}{2}$$

$$(1) \Rightarrow A_x = F_1 + F_2 = 6\ (kN)$$

$$(3) \Rightarrow B_y = \frac{F_2\left(R + \frac{R}{2}\right) - F_1\left(\frac{R}{2}\right) + p\frac{(L+R)^2}{2}}{2L+R} \Rightarrow \boxed{B_y = 1,85\ (kN)}$$

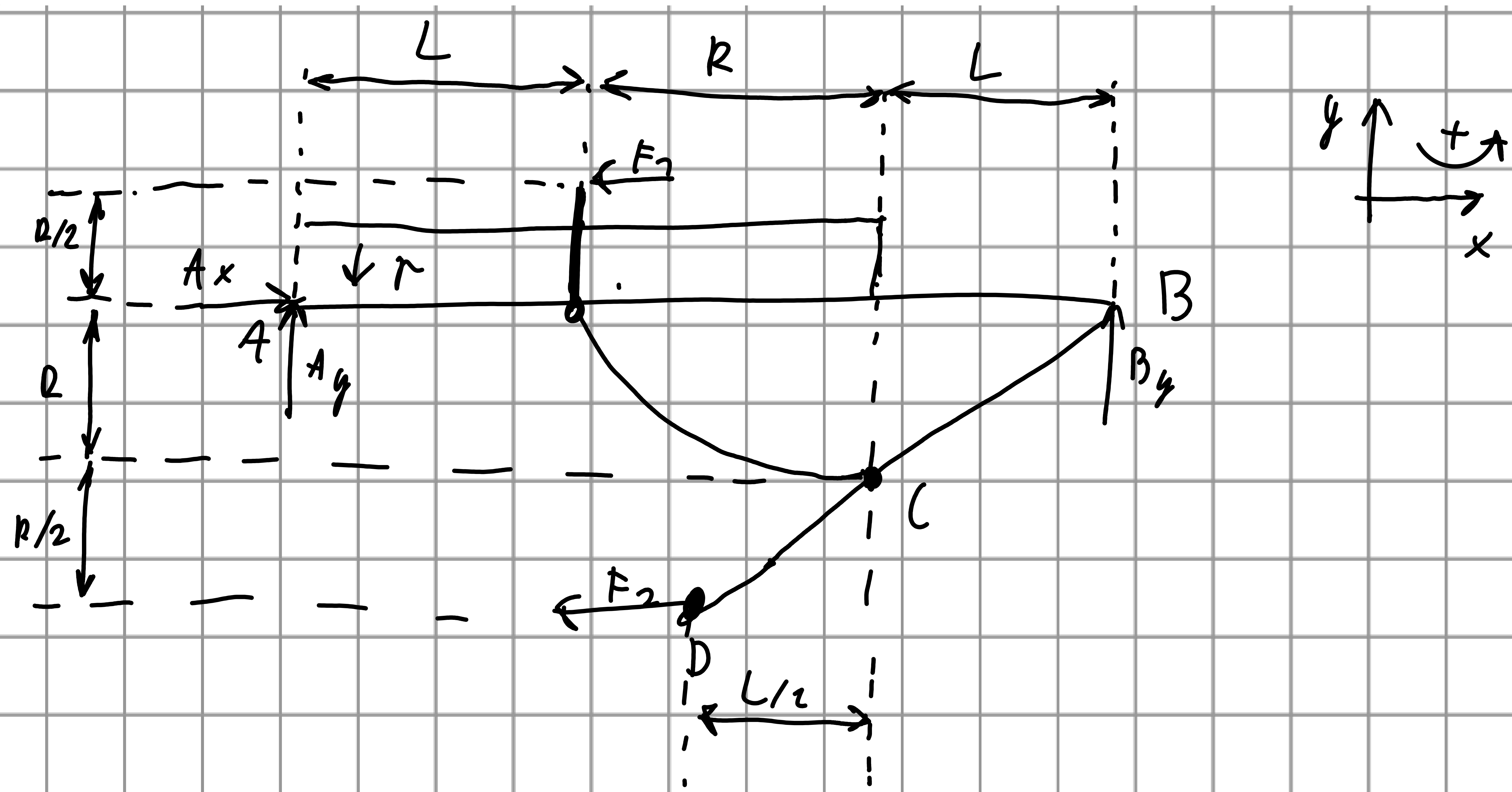
$$(2) \Rightarrow A_y = p(L+R) - B_y = 1,074\ (kN)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 6,7\ (kN)}$$

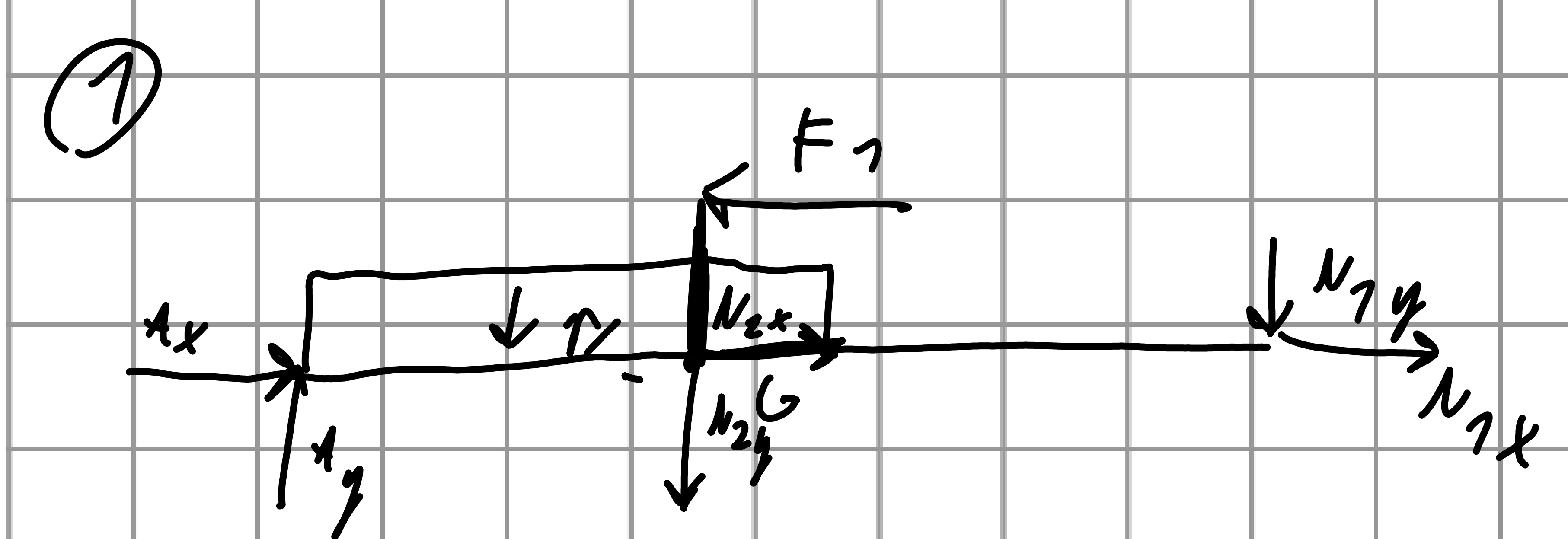
R [m]	L [m]	d [mm]	c [mm]	F_1 [kN]	F_2 [kN]	p [kN/m]	σ_{meg} [MPa]
0.3	0.35	50	30	3	3	4.50	100

$= 300$ $\quad 350$ $\qquad 4,5 \cdot 10^{-3}$

2. Rajzolja meg a csuklók és a rudak szabadtest ábráit, majd ezek alapján határozza meg az egyes rudak terhelését! – **Minimumfeladat**



TFH húzott rudak



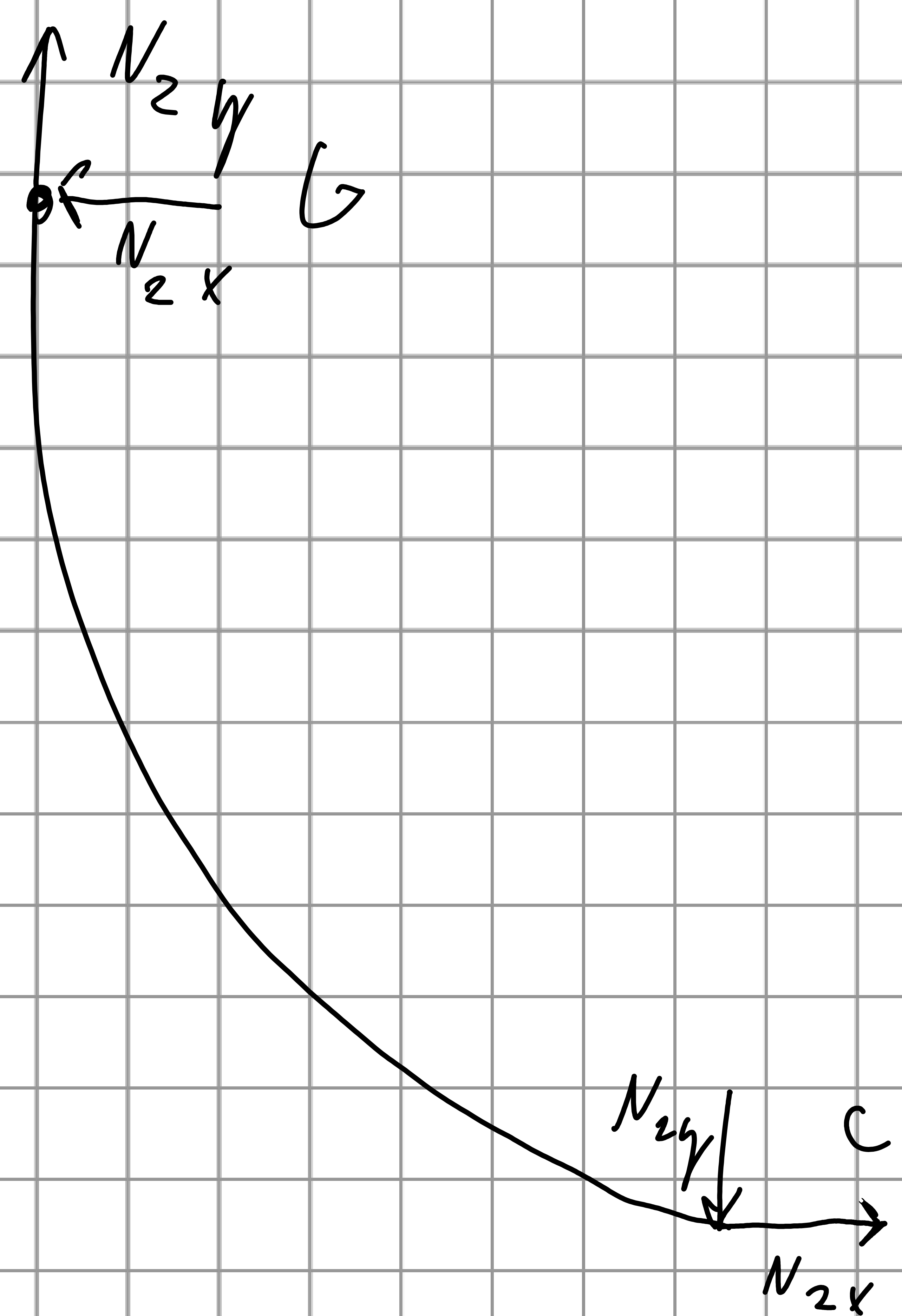
(3) $\Sigma F_x := 0 = A_x - F_1 + N_{2x} + N_{1x}$

(4) $\Sigma F_y := 0 = A_y - r(L+R) - N_{2y} - N_{1y}$ $\overset{(4)}{\Rightarrow} \boxed{N_{1y} = A_y - r(L+R) - N_{2y} = 0{,}2265\,(kN)}$

(5) $\Sigma M_B := 0 = N_{2y}(L+R) + F_1(R/2) + r(L+R)\left(L+\frac{L+R}{2}\right) - A_y(2L+R)$

$$(5) \Rightarrow N_{2y} = \frac{A_y(2L+R) - F_1(R/2) - r(L+R)\left(L+\frac{L+R}{2}\right)}{L+R} = -2{,}0775\,(kN)$$

②

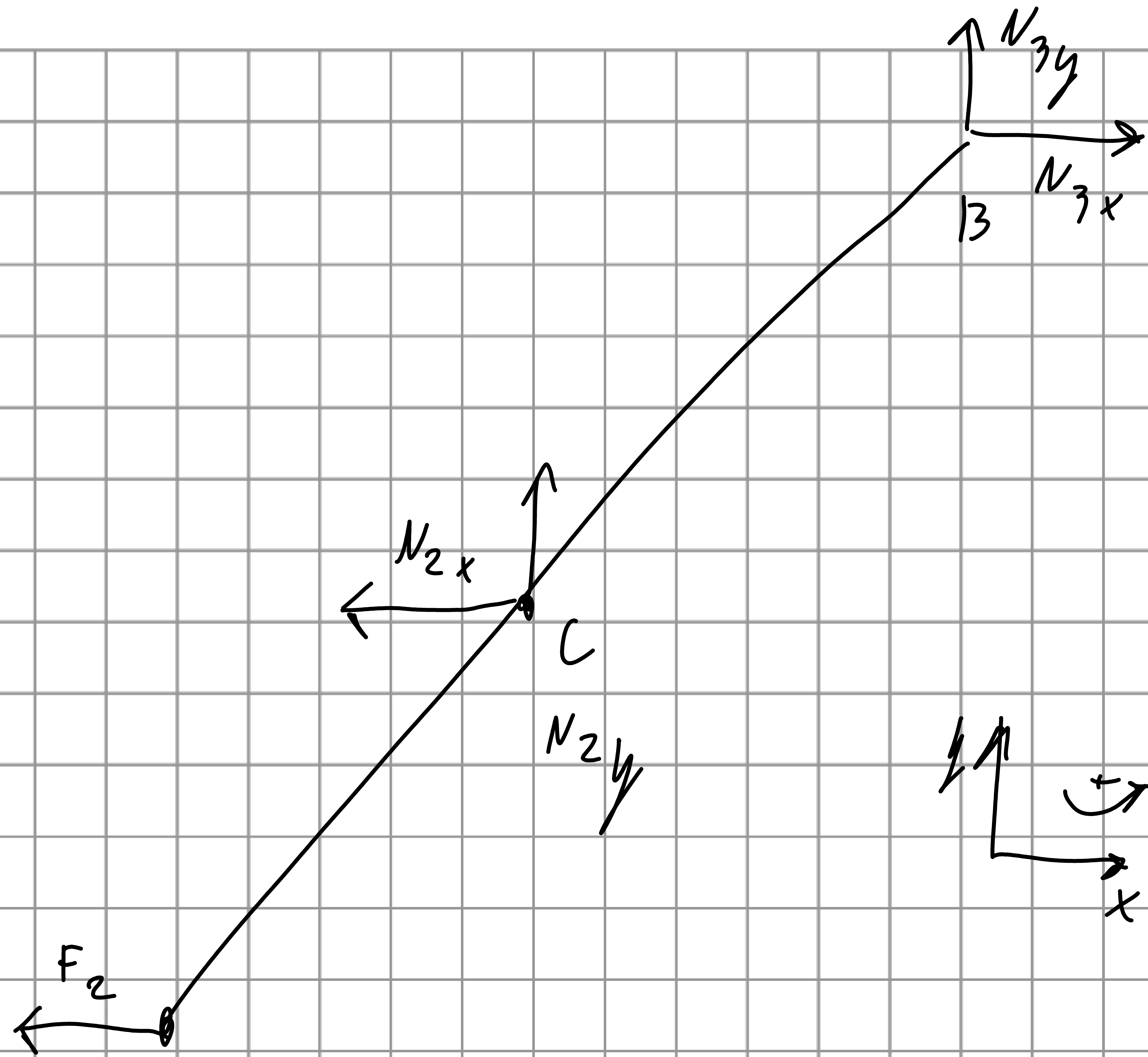


$\Sigma F_{xi} = 0 = -N_{2x} + N_{2x}$

$\Sigma F_{yi} = 0 = -N_{2y} + N_{2y}$

$\Sigma M_i = 0$

③



(6) $\Sigma F_x := 0 = -F_2 + N_{3x} - N_{2x}$

(7) $\Sigma F_y := 0 = +N_{2y} + N_{3y}$

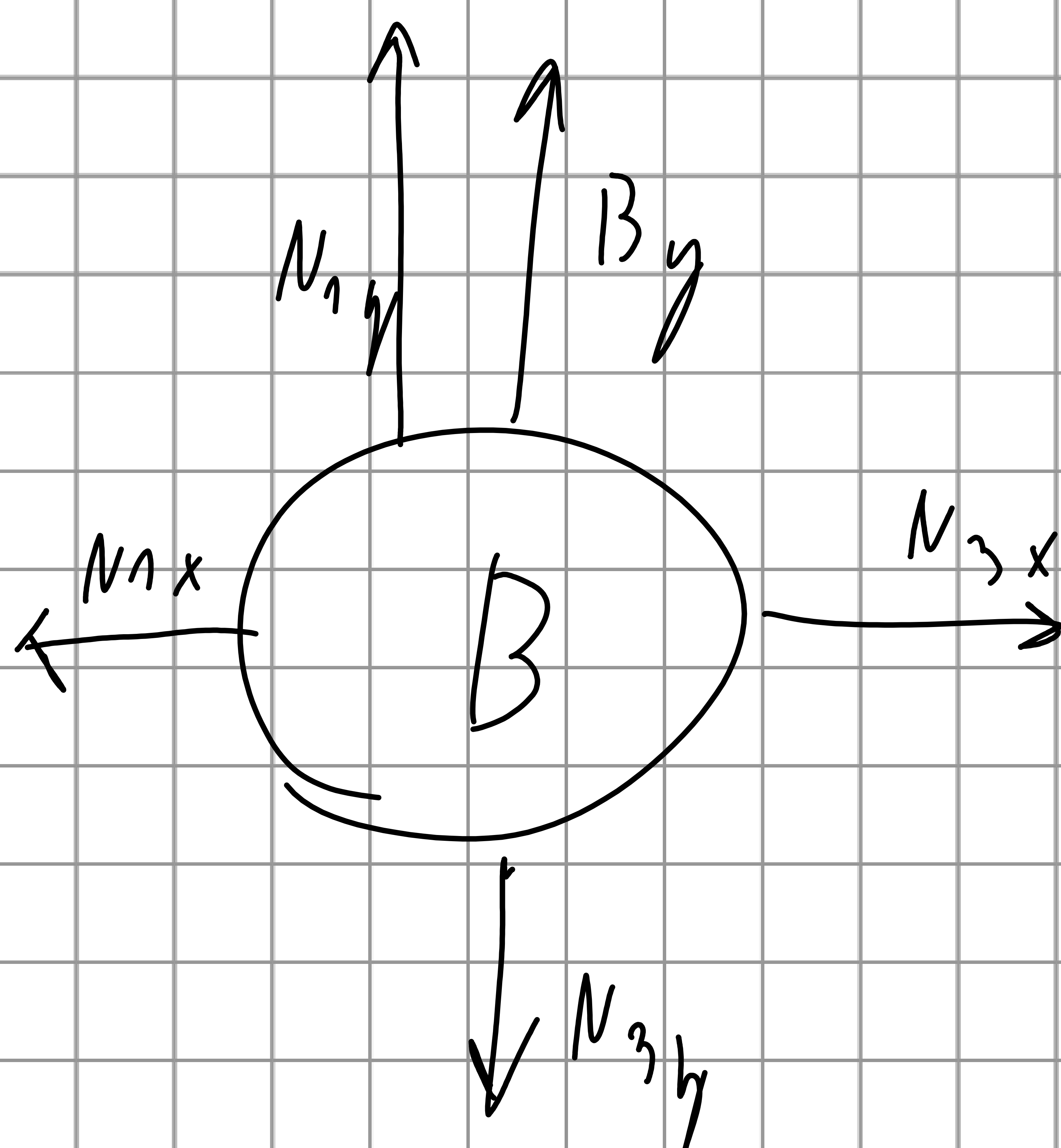
(8) $\Sigma M_C := 0 = -F_2(R/2) - N_{3x}(R) + N_{3y}(L)$

(7) $\Rightarrow$ $N_{3y} = -N_{2y} = 2{,}07775\,(kN)$

(8) $\Rightarrow$ $N_{3x} = \dfrac{N_{3y}(L) - F_2(R/2)}{R} = 0{,}92375\,(kN)$

(6) $\Rightarrow$ $N_{2x} = N_{3x} - F_2 = -2{,}07625$

B



(9) $\sum F_x := 0 = -N_{1x} + N_{3x} = 0$

(10) $\sum F_y := 0 = N_{1y} + B_y - N_{3y} = 0$

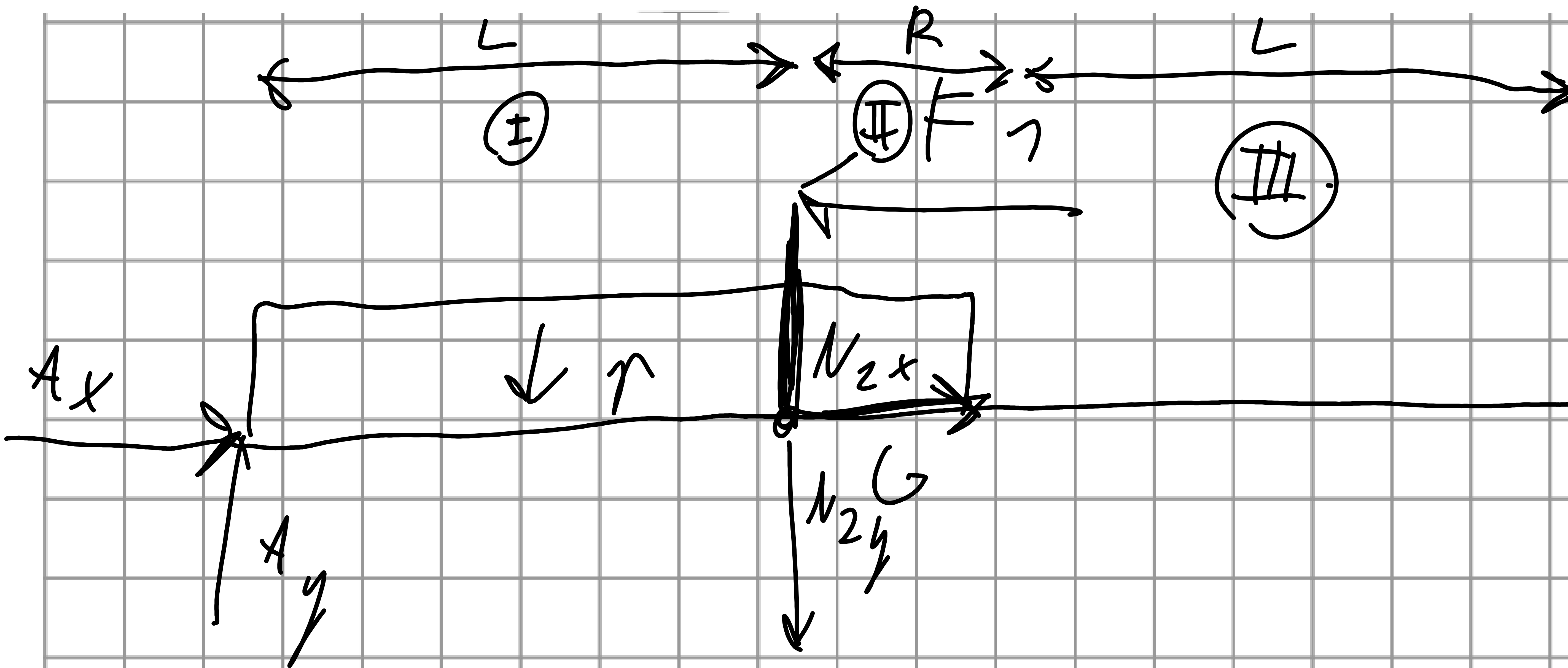
(8) $\Rightarrow \boxed{N_{1x} = N_{3x} = 0{,}92375 \text{ (kN)}}$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0{,}92375 \\ 0{,}2265 \end{bmatrix} \checkmark \qquad (kN)$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} -2{,}0775 \\ -2{,}0775 \end{bmatrix} \checkmark \qquad (kN)$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0{,}92375 \\ 20{,}775 \end{bmatrix} \checkmark \qquad (kN)$$

6. Írja fel az (1)-es rúd igénybevételi függvényeit az x koordináta segítségével és rajzolja fel az igénybevételi ábrákat! – **Minimumfeladat**



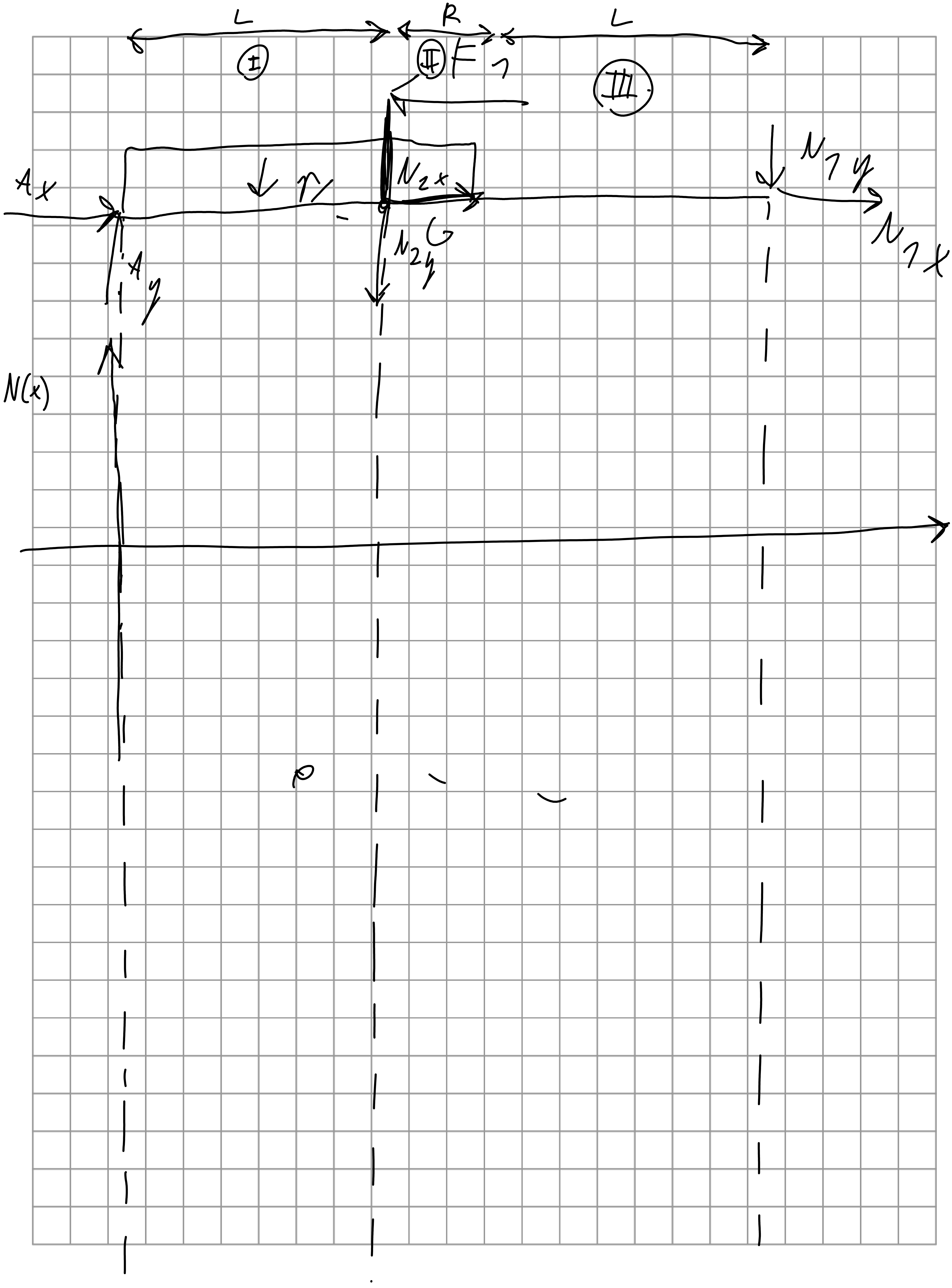
N ⊕
V ⊕
M_h ⊕

	$0 < x < L$	$L < x < L+R$	$L+R < x < 2L+R$
N	$-A_x$	$-A_x - N_{2x} + F_1$	$-A_x - N_{2x} + F_1$
V	$(0{,}0045x - 1{,}074)$ $-A_y + p \cdot x$	$(0{,}0045x - 3{,}1515)$ $p x - A_y + N_{2y}$	$(-0{,}2265)$ $-A_y + p(L+R) + N_{2y}$
M_h	$-A_y \cdot x + p \cdot \frac{x^2}{2}$	$-A_y \cdot x + p\frac{x^2}{2} + N_{2y}(x-L) + F_1\left(\frac{R}{2}\right)$	$-A_y \cdot x + p(L+R)\left(x - \frac{L+R}{2}\right) + N_{2y}(x-L) + F_1\left(\frac{R}{2}\right)$
$M_t(x)$		0	

$$\boxed{\left(M_h\right)_{max} = 0{,}350\ kNm}$$

	$0 < x < L$	$L < x < L+R$	$L+R < x < 2L+R$
N	$-A_x$	$-A_x - N_{2_x} + F_1$	$-A_x - N_{2_x} + F_1$
V	$-A_y + r \cdot x$	$-A_y + r x + N_{2y}$	$-A_y + r(L+R) + N_{2y}$
M_h	$-A_y \cdot x + r \cdot \frac{x^2}{2}$	$-A_y \cdot x + r \frac{x^2}{2} + N_{2y}(x-L) + F_1\left(\frac{R}{2}\right)$	$-A_y \cdot x + r(L+R)\left(x - \frac{L+R}{2}\right) + N_{2y}(x-L) + F_1\left(\frac{R}{2}\right)$

numerieren ...

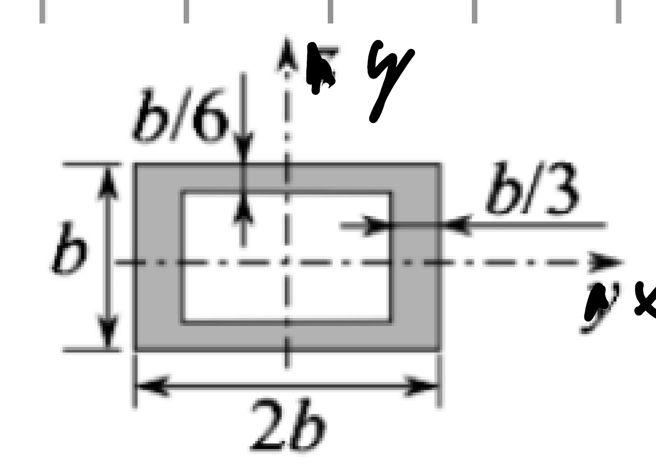


L
R
L
I
II
F 1
III
A_x
N_{2x}
N_{1y}
N_{1x}
G
N_{2y}
A_y
N(x)

4. Méretezze az (1)-es rudat tiszta hajlításra az ábrán jelölt zárt szelvényt alkalmazva:

- Keresse meg a veszélyes keresztmetszetet és határozza meg az ott fellépő abszolút értékben maximális $M_{\mathrm{h,max}}^{(1)}$ hajlítónyomatékot! 3/
- Határozza meg a szükséges minimális keresztmetszeti tényezőt és az annak megfelelő b méret egész mm-re felfelé kerekített értékét!

$$\sigma = \frac{(M_h)_{max}}{I_x} \cdot y \qquad \text{(Navier)}$$



$$\boxed{(K_x)_{min} = \frac{(M_h)_{max}}{\sigma_{meg}} = \frac{3{,}5 \cdot 10^5 \, \mathrm{Nmm}}{100 \, \mathrm{N/mm^2}} = 3{,}5 \cdot 10^3 \, \mathrm{mm}^3 = 3{,}5 \, \mathrm{cm}^3}$$

$$e = b/2$$

(K y min)

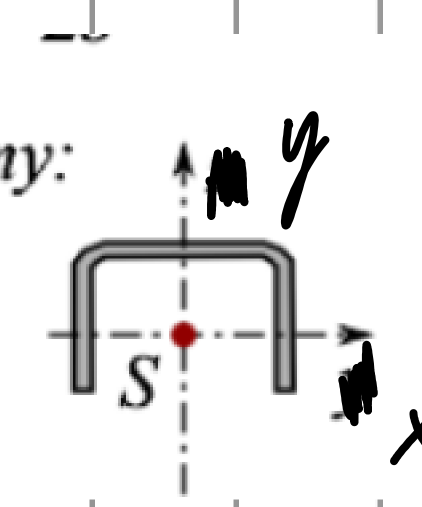
$$(K_x)_{min} = \frac{I_x}{e} = \frac{65}{243} b^3$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{243}{65} (K_x)_{min}} = 2{,}36 \, \mathrm{cm} = 23{,}56 \, \mathrm{mm}$$

$$\boxed{b \approx 24 \, \mathrm{mm}}$$

5. A tárgy honlapján található szelvény táblázatból válassza ki azt a legkisebb keresztmetszeti tényezőjű U-szelvényt, amellyel az (1)-es rúdnál alkalmazott zárt szelvény tiszta hajlítás esetén az ábrán jelölt módon helyettesíthető!

U-szelvény:



166

6. Ellenőrizze, hogy a vizsgált veszélyes keresztmetszetben a normálerő hatását is figyelembe véve megfelel-e a tartó a választott b méretű zárt szelvénnyel!

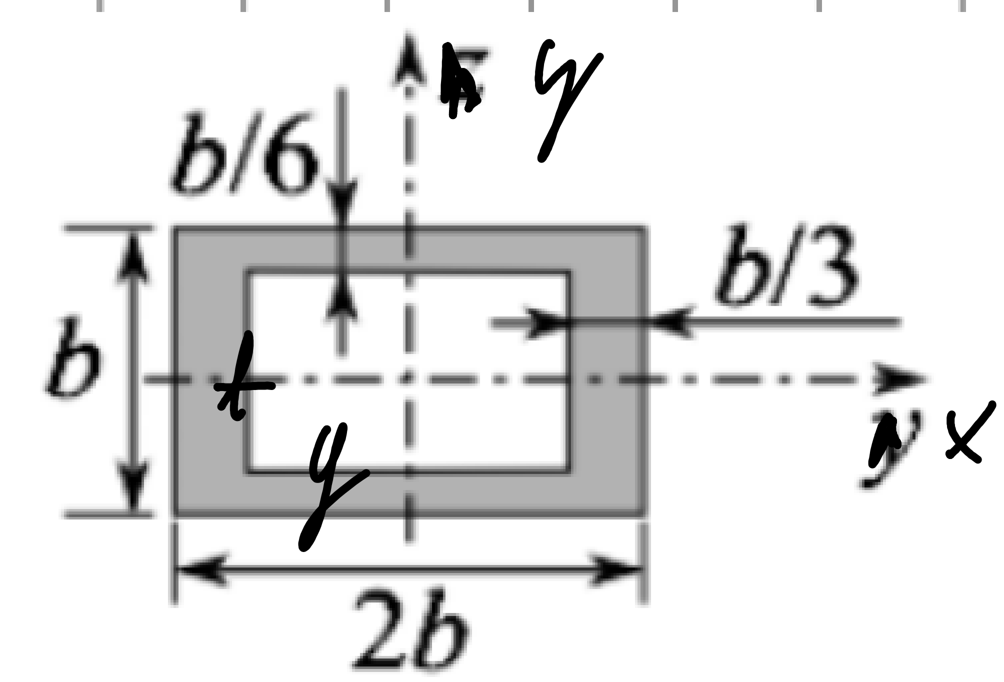
- Amennyiben szükséges, adja meg a keresztmetszet új b^* méretét egész mm-re felfelé kerekítve, hogy a normálerőt is figyelembe véve megfeleljen a tartó!
- A jellegzetes értékek feltüntetésével ábrázolja a normálfeszültség eloszlását veszélyes keresztmetszetben a módosított b^* mérettel! Adja meg a legnagyobb abszolút értékű $\sigma_{\max}^{(1)}$ feszültséget előjelhelyesen!

veszélyes km.:

$$N(L) = -6\ (kN)$$

$$x = L$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{(M_h)_{max}}{I_x} \cdot y$$



$$a = b - 2\frac{b}{6} = \frac{2}{3}b$$

$$y = 2b - \frac{2}{3}b = \frac{4}{3}b$$

$$A = (2b)\cdot(b) - a\cdot y = b^2\left[2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\right]$$

$$A_T = \frac{10}{9}b^2$$

$$I_x = \frac{(2b)(b)^3}{12} - \frac{y\cdot a^3}{12} = b^4\left(\frac{1}{6} - \frac{\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3}{12}\right)$$

$$I_x = \frac{65}{486}b^4$$

$\sigma_{mey} = 100\,(MPa)$

$e = h/2$

$\sigma_e = \dfrac{|N|}{A} + \dfrac{(M_x)_{max}}{I_x} \cdot e = 94{,}66\,(MPa)$

$\sigma_e > \sigma_{mey}$ ✓ X

$h' = h + 1 = h^*$

$e' = h^*/2$

$\sigma_{e'} = \dfrac{|N|}{A} + \dfrac{(M_x)_{max}}{I_x} \cdot e' = 83{,}75\,(MPa)$

$\sigma_{e'} < \sigma_{mey}$ ✓

$h^* = h$

$\sigma^{(1)}_{max} = -\sigma_e = -94{,}66\,(MPa)$

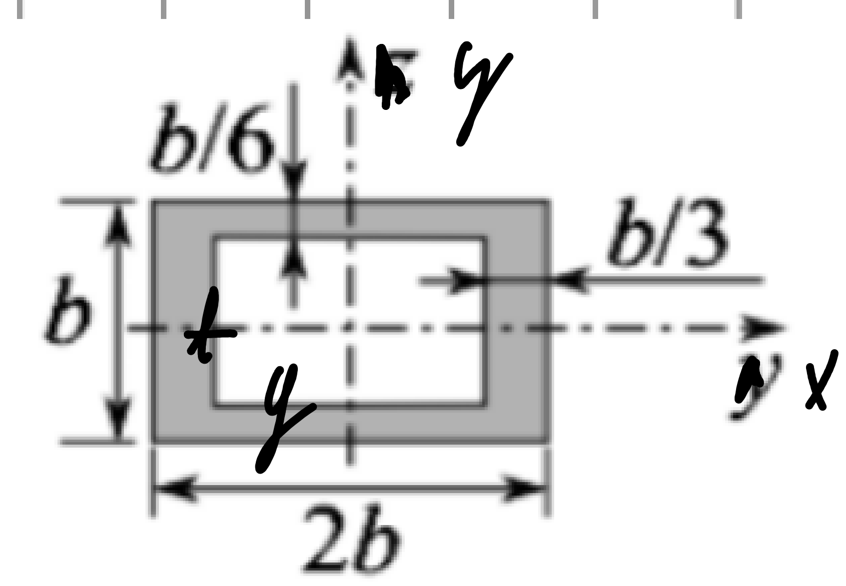
7. Az (1)-es rúd nyírás szempontjából legveszélyesebb keresztmetszetében írja fel a nyírásból adódó csúsztató feszültség eloszlást leíró függvényt, és ábrázolja a jellegzetes értékek feltüntetésével! Adja meg a legnagyobb abszolút értékű $|\tau_{\max}^{(1)}|$ feszültséget! Használja az eredeti b méretű zárt szelvényt!

$$V_{max} = V_x(L+R) = -1{,}5765 \ (kN)$$

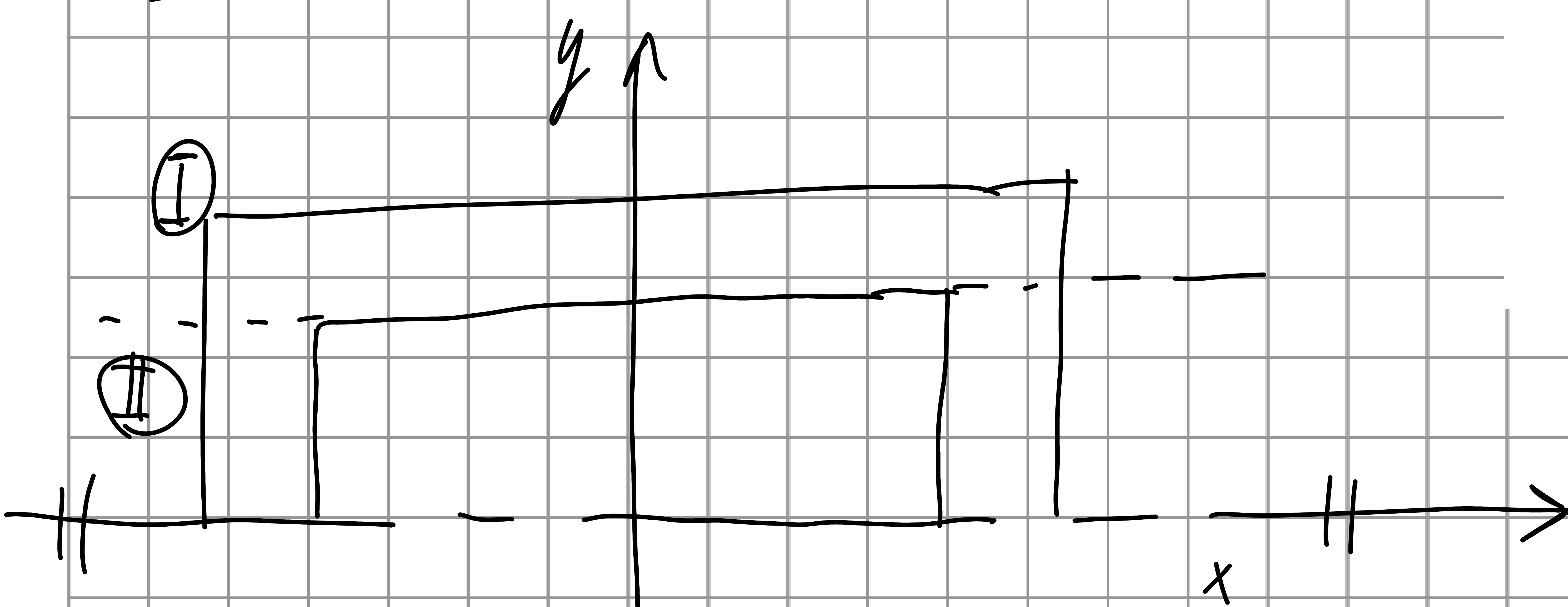
$x_1 = L+R$

$x_2 = 2L+R$

$$\tau_z(y) = \frac{V_{max} \cdot S(y)}{I_x \cdot a(y)}$$



kettébontás



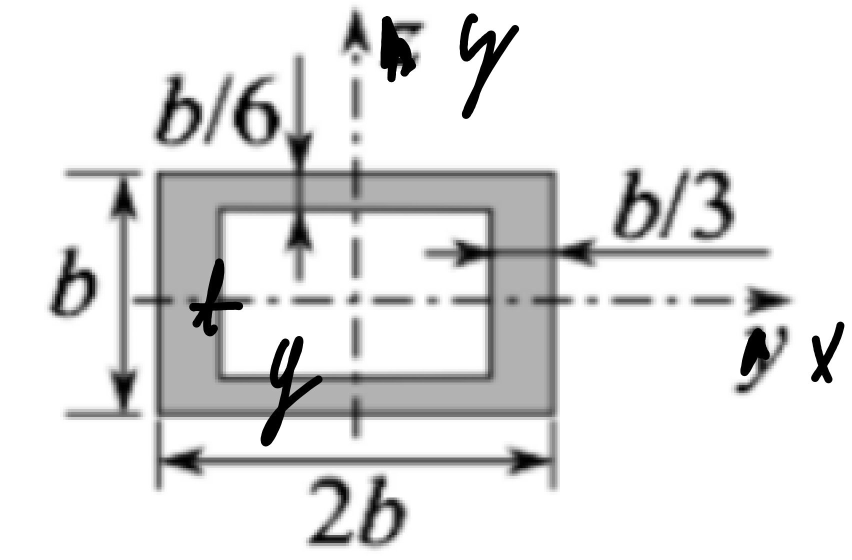
I $\quad a_1 = 2b$

$$S_1(y) = A_1(y) \cdot k_1(y)$$

$$A_1(y) = \left[\frac{b}{6} - \left(y - \left[\frac{b}{2} - \frac{b}{6}\right]\right)\right] \cdot 2b = \left[\frac{1}{6}b - \left(y - \frac{1}{3}b\right)\right] \cdot 2b$$

$$= 2b\left[\frac{1}{2}b - y\right] = b^2 - 2by \Longrightarrow A_1(y) = b^2 - 2by$$

$$k_1(y) = \frac{\frac{b}{2} + y}{2} = \frac{\frac{b}{2} + y}{2} = \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}y \Longrightarrow k_1(y) = \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}y$$



II.

$$a_2 = 2\frac{b}{3} = \frac{2}{3}b$$

$$S_2(y) = S_1\left(\frac{1}{3}b\right) + A_2(y)\cdot k_2(y)$$

$$A_2(y) = 2\left(\frac{b}{3}\cdot\left[\left(\frac{b}{2}-\frac{b}{6}\right)-y\right]\right)$$

$$= \frac{2}{3}b\left(\frac{1}{3}b - y\right) \Rightarrow A_2(y) = \frac{2}{9}b^2 - \frac{2}{3}by$$

$$k_2(y) = \frac{y + \left(\frac{b}{2}-\frac{b}{6}\right)}{2} = \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}y$$

$$\Rightarrow k_2(y) = \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}y$$

2

$$(\tau_z)_1(y) = \frac{(-V_{max})(b^2 - 2by)\left(\frac{1}{4}b + \frac{1}{2}y\right)}{\frac{65}{486}b^2 \cdot 2b}$$

$$= \frac{(1{,}5765)(576 - 48y)\left(6 + \frac{1}{2}y\right)}{2129920}$$

$$= \frac{1{,}5765}{2129920}\left(3456 - 24y^2\right)$$

$$(\tau_z)_1(y) = (-1{,}775841346 \cdot 10^{-5})\,y^2 + (2{,}557211538 \cdot 10^{-3})$$

//

$$(\tau_z)_2(y) = \frac{(-V_{max})\left[\left(h^2 - 2h\left[\frac{1}{3}h\right]\right)\left(\frac{1}{4}h + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}h\right]\right) + \left(\frac{2}{9}h^2 - \frac{2}{3}hy\right)\left(\frac{1}{6}h + \frac{1}{2}y\right)\right]}{\frac{65}{486}h^2 \cdot \frac{2}{3}h}$$

$$= \frac{(1,5765)(2432 - 8y^2)}{2129920/3}$$

$$(\tau_z)_2(y) = (-1,776404748 \cdot 10^{-5})y^2 + 5,400270433 \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{\tau_{max}^{(1)} = (\tau_z)_2(0) = 5,4 (MPa)}$$

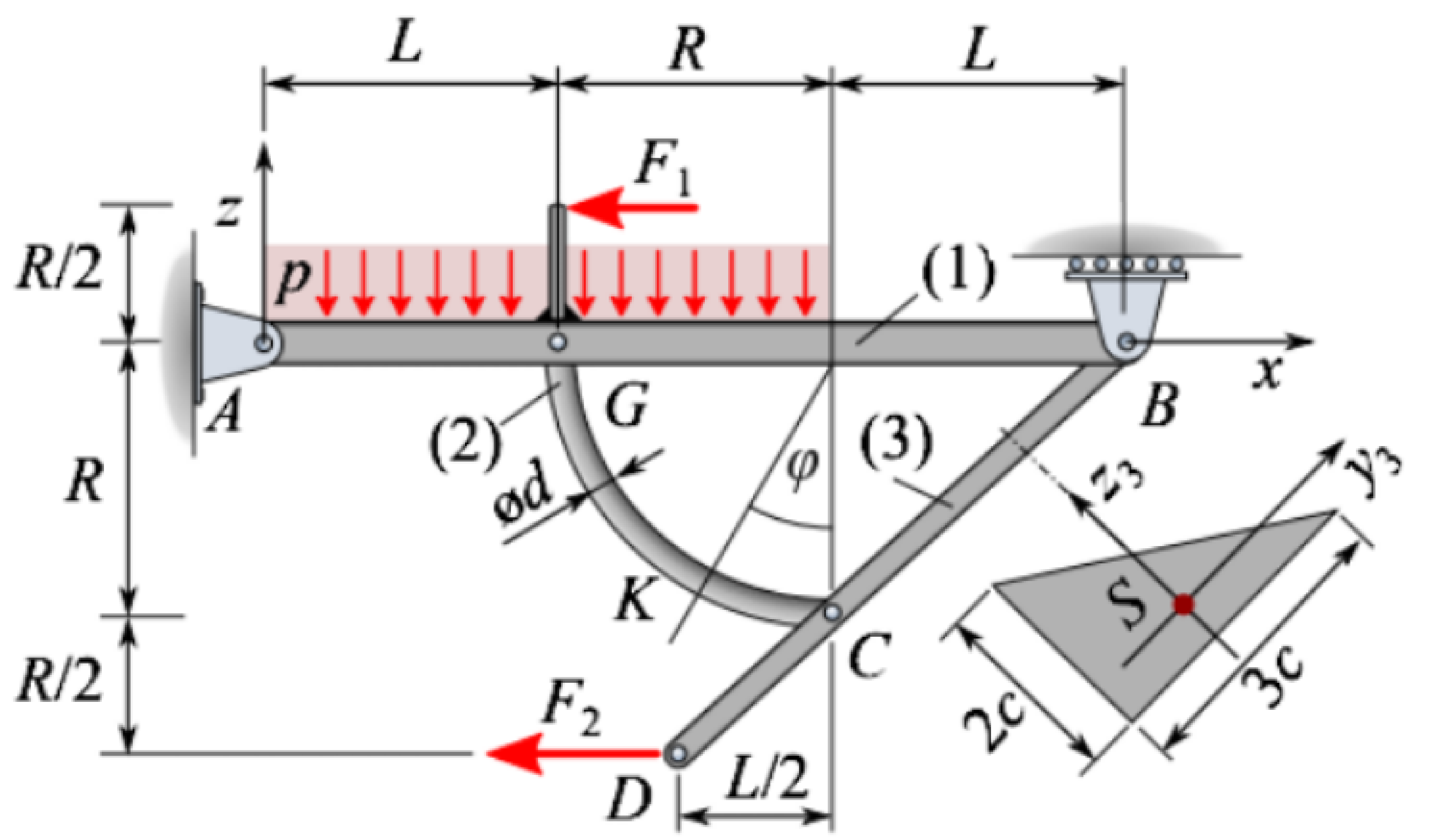
$$= \left(-5{,}533306415 \cdot 10^{-6}\right)\left[1920 + \frac{(128 - 16y)}{\left(4 + \frac{1}{2}y\right)}\right]$$

$$= -0{,}01062394832 + (\cdots)\left(512 - 8y^2\right)$$

$$\boxed{(\tau_z)_2(y) = 4{,}1426645132 \cdot 10^{-5}\, y^2 - 7{,}790895436 \cdot 10^{-3}}$$

$$\boxed{(\tau_z)_{max} = (\tau_z)_2(0) = 5{,}4 \ (MPa)} \quad //$$

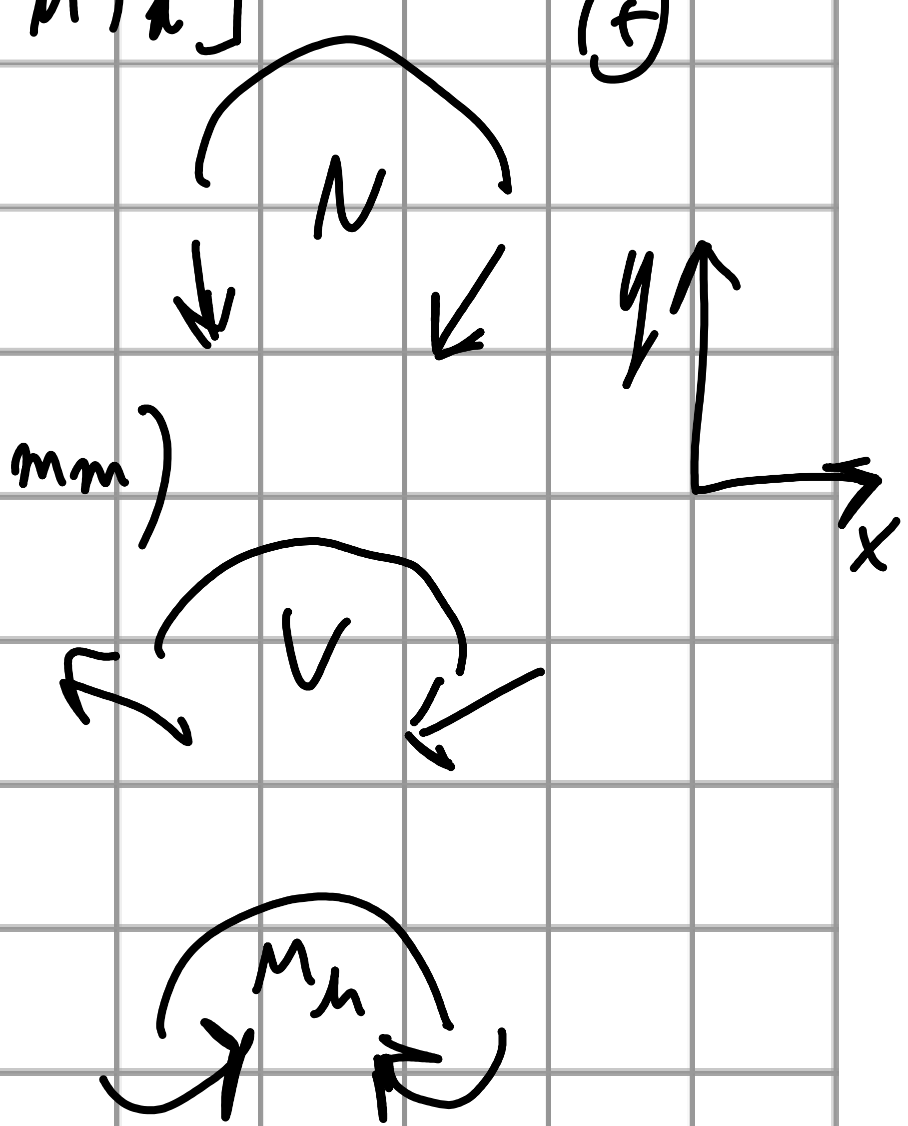
8. Számítsa ki a (2)-es rúd $\varphi = 30°$-nál elhelyezkedő K keresztmetszetében fellépő igénybevételeket és a jellegzetes értékek feltüntetésével rajzolja meg a normálfeszültség eloszlását! Adja meg a legnagyobb abszolút értékű $\sigma^{(2)}_{K,\max}$ feszültséget előjelhelyesen!

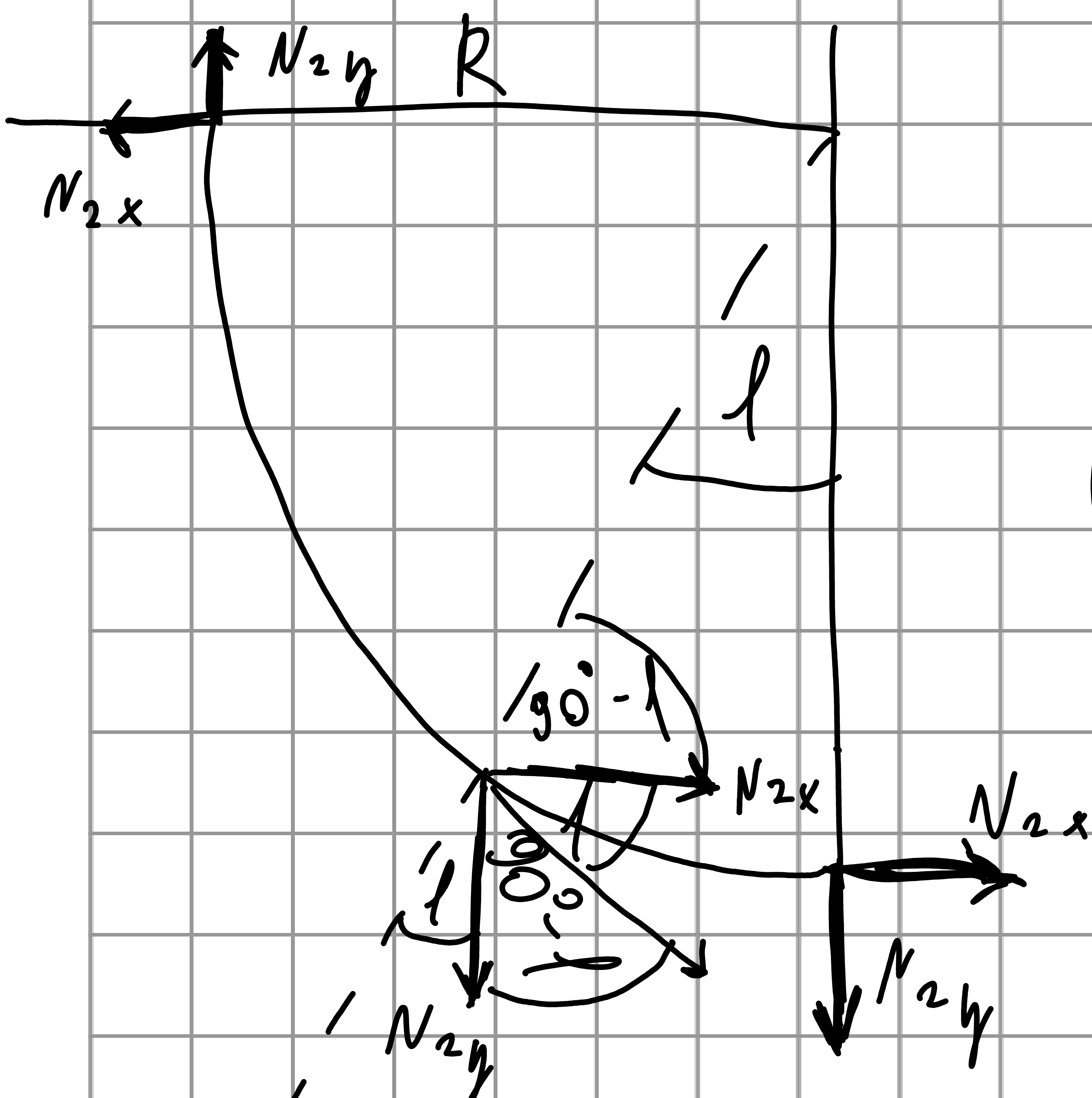


[mm; MPa]

$\varphi = 30°$

$d = 50\,(mm)$





?

$$N(\varphi) = N_{2x} \cdot \cos\varphi + N_{2y} \cdot \cos(90° - \varphi) = N_{2x} \cdot \cos\varphi + N_{2y} \cdot \sin\varphi$$

$$V(\varphi) = -N_{2x} \cdot \sin\varphi + N_{2y} \cdot \cos\varphi$$

$$M_h(\varphi) = N_{2x} \cdot R(1 - \cos\varphi) - N_{2y} \cdot R(\sin\varphi)$$

$N_{2x} = -2077{,}5\,(N)$

$N_{2y} = N_{2x}$

$$\boxed{\begin{aligned} N(30°) &= -2837{,}92\,(N) \\ V(30°) &= -760{,}42\,(N) \\ M_h(30°) &= 228125{,}3329\,(Nmm) \end{aligned}}$$

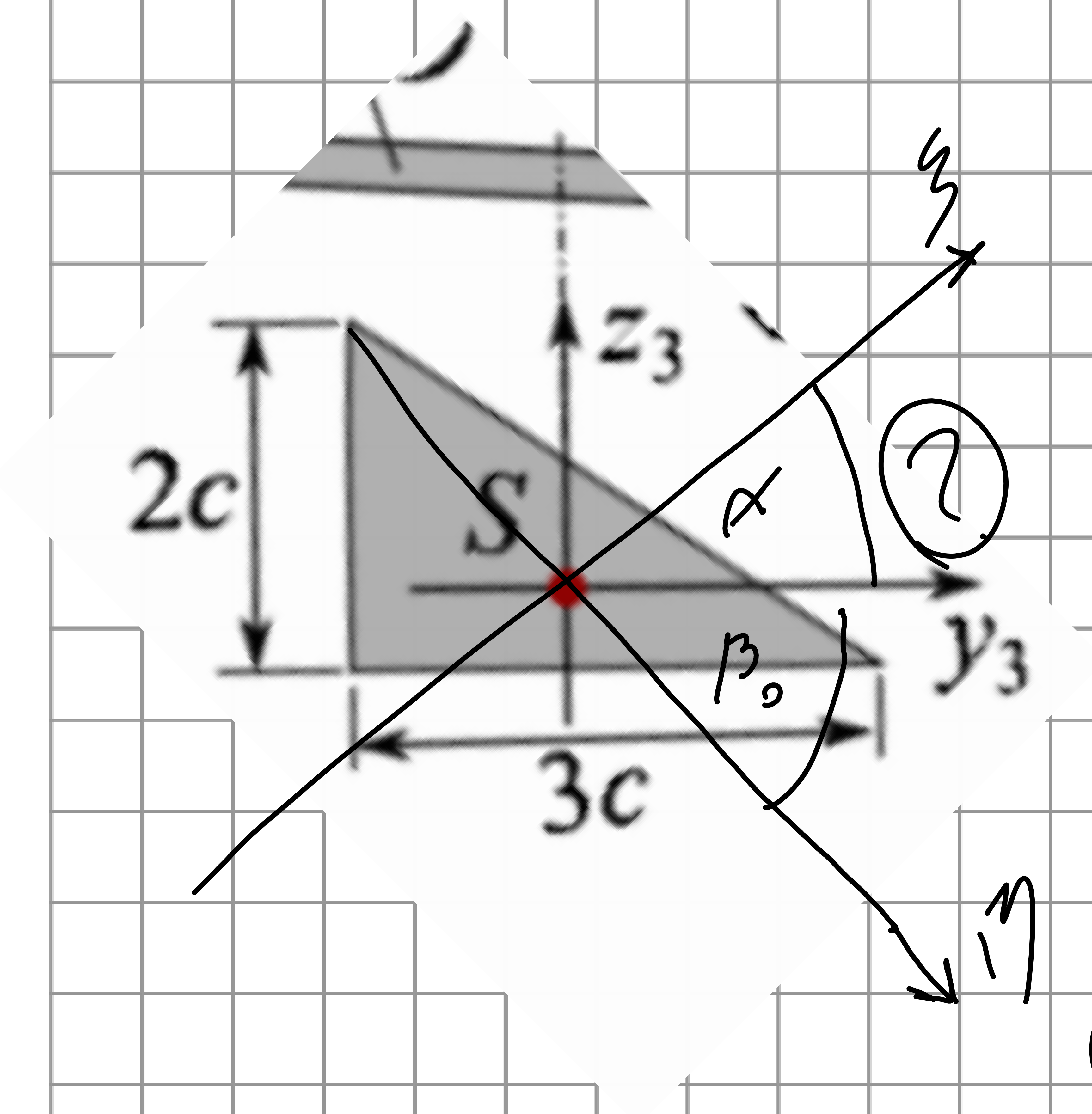
$$\frac{R}{d} = 6 \Rightarrow \underline{\text{Grashof}}: \underset{-}{\sigma}(y) = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{R \cdot A} + \frac{M_h}{I_x} \cdot \frac{R \cdot y}{R + y}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma(d/2) &= 76,7 \text{ (MPa)} \\ \sigma(0) &= -1,058 \text{ (MPa)} \\ \sigma(-d/2) &= -21,34 \text{ (MPa)} \end{aligned}\right\} \boxed{\begin{aligned} \sigma^{(2)}_{H,max} &= \sigma(-d/2) \\ &= -21,337 \text{ (MPa)} \end{aligned}}$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 625\pi$$

$$I_x = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{390625}{4}\pi$$

9. Számítsa ki a (3)-as rúd C keresztmetszetében a hajlításból ébredő legnagyobb abszolút értékű $\sigma_{C,\max}^{(3)}$ normálfeszültséget, valamint adja meg a zérustengely és az y_3 tengely által bezárt β_{zerus} szöget! (A rudak C pontbeli összeszereléséhez szükséges furatok hatásától eltekintünk.)



$c = 30\ (mm)$

$I_{x_3} = 5{,}4 \cdot 10^5\ (mm^4)$

$I_{y_3} = 1{,}215 \cdot 10^6\ (mm^4)$

$I_{xy_3} = -4{,}05 \cdot 10^5\ (mm^4)$

$I_1 = 1404691{,}853\ (mm^4)$

$\alpha = 64{,}9^\circ$

$I_2 = 350308{,}1469\ (mm^4)$

$$I_{x_3} = \frac{(3c)(2c)^3}{36}$$

$$I_{y_3} = \frac{(2c)(3c)^3}{36}$$

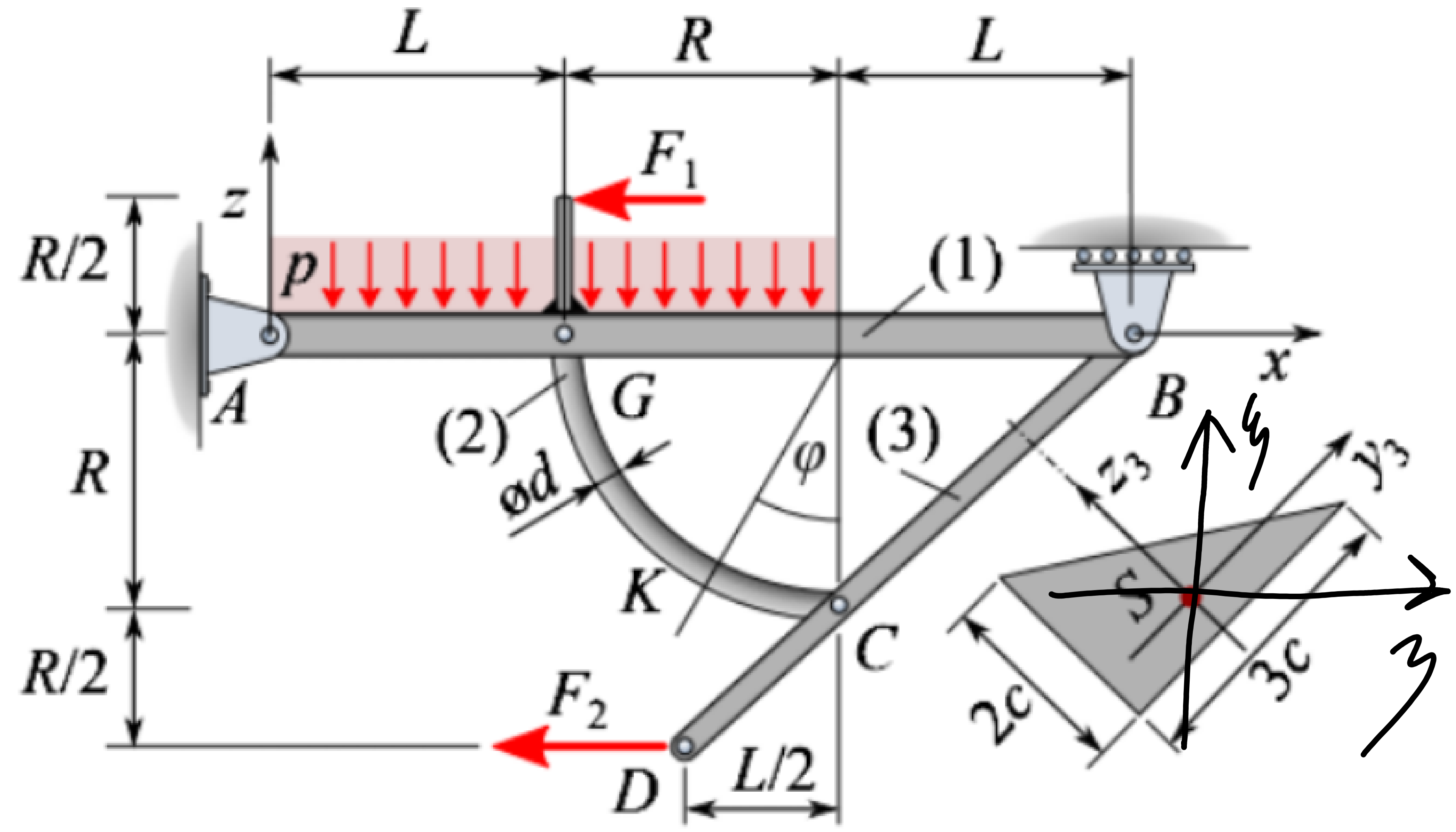
$$I_{xy_3} = -\frac{(2c)^2(3c)^2}{72}$$

?

$$I_{1;2} = \frac{I_{x_3} + I_{y_3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{x_3} - I_{y_3}\right)^2 + 4 I_{xy_3}^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{I_{x_3} - I_1}{I_{xy_3}}\right)$$



M_u

$M_u = -F_2 \cdot \frac{R}{2}$

?

$M_{u\xi} = |M_u| \cdot \cos\alpha$

$M_{u\eta} = -|M_u| \cdot \sin\alpha$

$\beta = \arctan\left(\frac{M_{u\eta} \cdot I_1}{M_{u\xi} \cdot I_2}\right)$

$\beta_0 = \alpha + \beta$

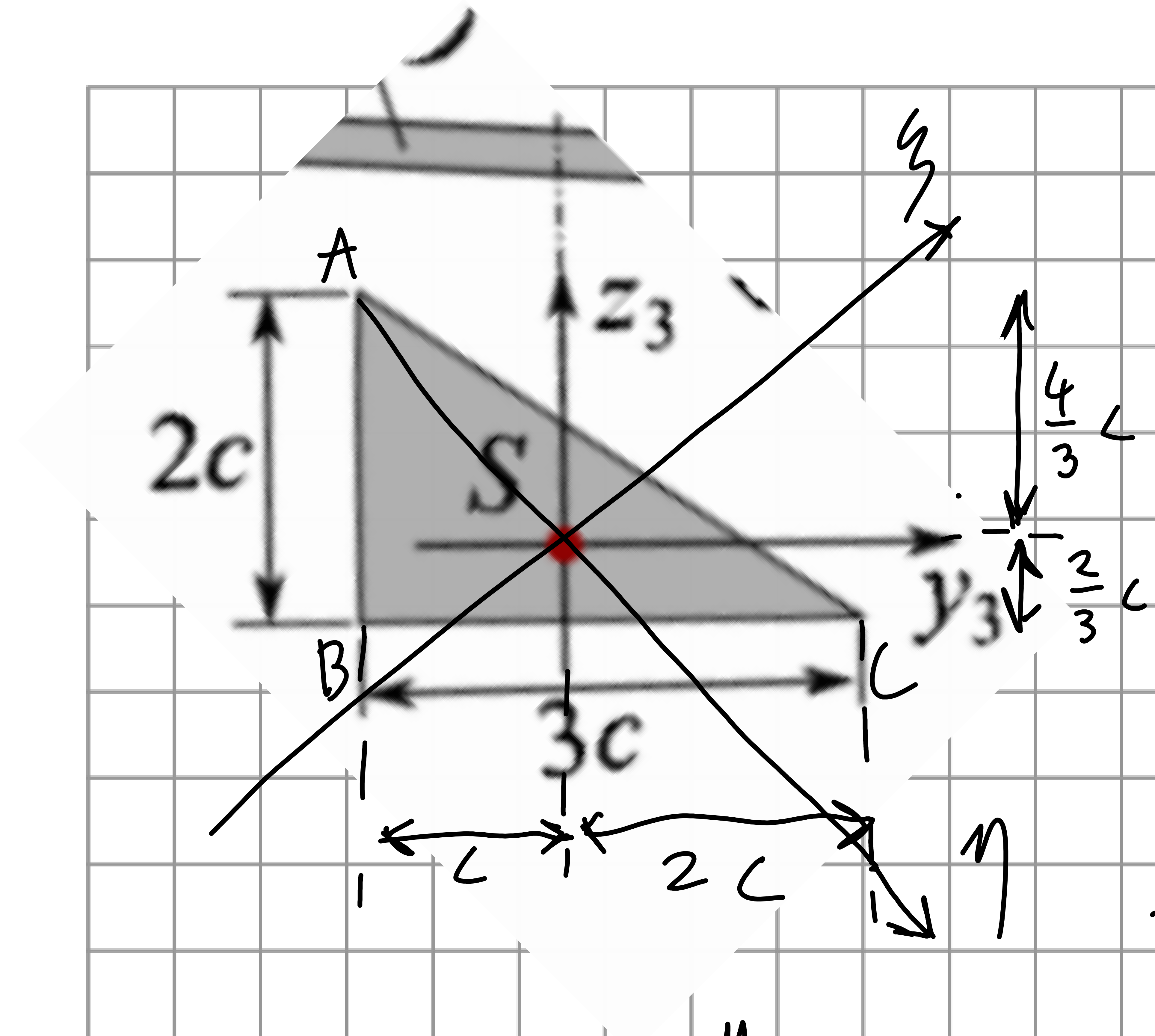
$M_u = -9/20\ (kNm)$

$M_{u\xi} = 190889{,}7402\ (Nmm)$

$M_{u\eta} = -4075\ 0519596\ (Nmm)$

$\beta = -83{,}3367^\circ$

$\boxed{\beta_0 = -18{,}437^\circ}$



$\xi(x;y) = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha$

?

$\eta(x;y) = y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha$

? $\sigma(x;y) = \frac{M_{h\xi}}{I_1}\eta(x;y) - \frac{M_{h\eta}}{I_2}\xi(x;y)$

$\sigma_A = \sigma(-c; \frac{4}{3}c) = 33{,}337\ (MPa)$

$\sigma_B = \sigma(-c; -\frac{2}{3}c) = -33{,}334\ (MPa)$

$\sigma_C = \sigma(2c; -\frac{2}{3}c) = 2{,}52080420 \cdot 10^{-3}\ (MPa)$

$\boxed{\sigma_{max} = \sigma_B = -33{,}334\ (MPa)}$