Mechatronika szigorlat

Vári Gergő

2026. február 18.

Tartalomjegyzék

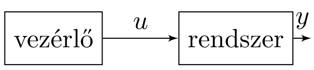
1 Mechatronika

1.1 Hasonlítsa össze a vezérlést és a szabályozást: a hatáslánc jellege, zavarjelekkel szembeni ellenállás, a mért mennyiség fajtája, reakció idő, illetve az irányításhoz felhasznált eszközök költsége szerint!

Vezérlés:

- nyílt hatáslánc: nincs visszacsatolás
- a rendszer belső jellemzőit/bemeneteit mérjük, valamint részben függ a külső feltételektől is, de a kimenetet (irányítani kívánt jellemzőt) nem mérjük
- logikai függvényt hozunk létre
- gyors reakció
- csak determinisztikus zavarok kezelésére képes
- vagy egyszerű (olcsó), de így kevés dolgot veszünk figyelembe
- vagy komplex (drága) és sok mindent figyelembe veszünk

vezérlés hatáslánca:



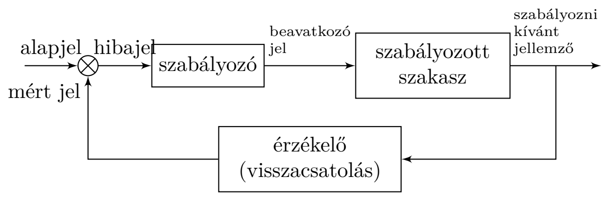
vezérlés fajtái:

- idővezérlés – pl. lámpa időzített fel-, lekapcsolása
- lefutó vezérlés
  - sorrendi – pl. csomagolás
  - feltétel

Szabályozás:

- zárt hatáslánc: van visszacsatolás
- az irányítani kívánt jellemző is tudja befolyásolni a folyamatot
- instabil rendszert is képes kezelni (stabilizálni)
- lassabb reakció, pontatlanabb
- képes kiküszöbölni a zavarjeleket
- alacsony műszaki komplexitás:
- mérés
- kivonás
- jelerősítés

szabályozás hatáslánca:



szabályozás fajtái:

- értéktartó – pl. hőmérséklet
- követő – pl. pálya
- kaszkád – több hurkú szabályozás
- állapotszabályozás – állapottér modell alapján szabályoz – többváltozós rendszerek – pl. inverz inga egyensúlyban tartása

1.2 Ismertesse az alábbi fogalmakat: linearitás, statikus/dinamikus rendszer, időinvariáns/idővariáns rendszer, folytonos/diszkrét idejű rendszer, koncentrált/elosztott paraméterű modell!

Linearitás:

- érvényes a szuperpozíció elve
- matematikai szemmel 2 feltétel:
  - számmal szorzás
  - hatások összege
- ha a rendszer u_i gerjesztésre y_i választ ad és u_j gerjesztésre y_j választ ad, akkor u_i és u_j lineáris kombinációjára y_i és y_j lineáris kombinációját adja

$$u = \lambda_i u_i + \lambda_j u_j \to y = \lambda_i y_i + \lambda_j y_j$$

- nem linearitás feloldása: munkaponti linearizálás

Statikus/dinamikus rendszer:

- statikus:
  - bármely pillanatban a bemenő jelek pillanatnyi értékei meghatározzák az adott pillanatban kimenő jelek értékeit – pl. lámpa fel-le kapcsolva
- dinamikus:
  - valós fizikai rendszerek működésének időbeli lefolyását is leírják, jellemzően idő szerinti differenciálegyenletek segítségével – pl. rezgéstani példák
  - memória jelleggel rendelkeznek

Időinvariáns/idővariáns rendszer:

- ha a rendszer $u(t)$ bemenetre $y(t)$ kimenetet ad és $u(t-\tau)$ bemenetre $y(t-\tau)$ kimenetet ad, akkor a rendszer időinvariáns – pl. fékrendszer: ahogy melegszik, változik a súrlódás
- „ma, holnap és két év múlva is ugyanúgy viselkedik"

Folytonos/diszkrét idejű rendszer:

- folytonos idejű:
  - $u(t)$ és $y(t)$ egy vizsgált $[T_a, T_b] \subseteq \mathbb{R}$ időintervallumban minden időpontban értelmezve van: $t \in [T_a, T_b] \subseteq \mathbb{R}$
- diszkrét idejű:
  - $u(t)$ és $y(t)$ csak diszkrét $t = T_k, k \in \mathbb{N}, t \in \{..., T_{-k}, ..., T_{-1}, T_0, T_1, ..., T_k, ...\}$ időpontok sorozatában van értelmezve, ahol: $T_{k-1} < T_k < T_{k+1}$
  - általában $T_k = k \cdot T_s$, ahol T_s a mintavételezési idő
  - $u[k] := u(T_k)$
  - $y[k] := y(T_k)$

Koncentrált/elosztott paraméterű modell:

- koncentrált paraméterű leírás:
  - a vizsgált valós fizikai rendszer összefüggéseit azok jellegétől függően egy adott térrészben összegezzük, vagy kiátlagoljuk, és egyetlen egyenlettel helyettesítjük

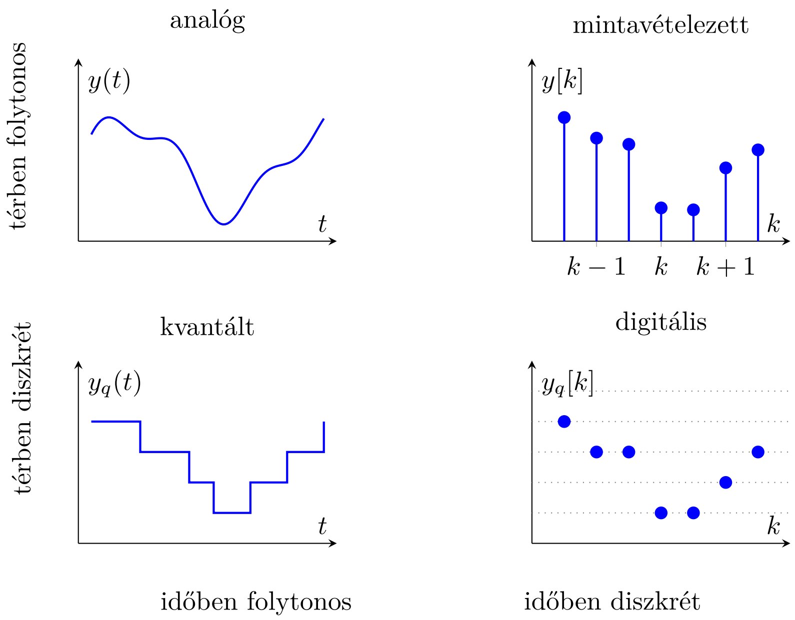
1.3 Hasonlítsa össze a rendszereket a leírt állapotváltozók (dimenzió) száma (véges/végtelen), valamint annak diszkrét/folytonos jellege szerint!

A rendszer dimenziója:

- a rendszer állapotváltozóinak száma
  - állapotváltozó: az állapot egyértelmű leírására szolgálnak
  - állapot: a múlt összesített hatása
- végtelen: végtelen számú állapotváltozóval írható le a rendszer
- véges: véges számú állapotváltozóval írható le a rendszer
  - $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$

Diszkrét/folytonos jelleg:

- diszkrét állapotú:
  - ha egy véges dimenziójú rendszer állapotváltozói véges számú értéket vehetnek fel, akkor a rendszer diszkrét állapotú
  - pl. digitális technika: 0 vagy 1
  - állapotautomaták:
    - az állapotbeli változások egy-egy esemény hatására ugrásszerűen mennek végbe
    - tipikusan szekvenciális hálózatok
- folytonos állapotú:
  - az állapotváltozók folytonos értéket vesznek fel
  - pl. sebesség



Diszkrét idejű folytonos értékű rendszer:

- differencia egyenletekkel írható le $\underline{x}[k+1] = \underline{\Phi x}[k] + \underline{\Gamma u}[k]$
- az állapotváltozók tetszőleges értéket vehetnek fel, de a diszkrét idő miatt ugrásszerűen mennek végbe

Folytonos idejű folytonos értékű rendszer:

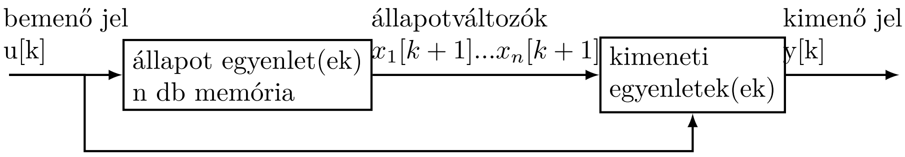
- differenciál egyenletekkel írható le $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{Ax}(t) + \underline{Bu}(t)$
- állapotváltozók tetszőleges értéket vehetnek fel, folytonos idő miatt folyamatosan változnak

1.4 Írja fel a diszkrét idejű állapottér modell általános algebrai alakját, magyarázó ábrával szemléltesse! Ismertesse az összefüggésben szereplő együtthatók szerepét!

Állapottér modell:

- egyfajta matematikai modell
- állapotváltozók segítségével
- általános állapottér modell:

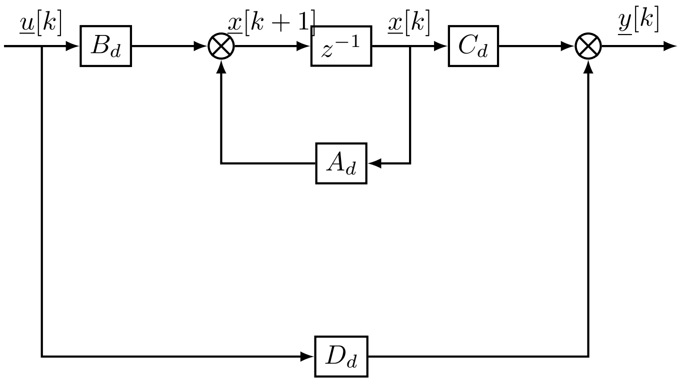
- lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek diszkrét idejű állapottér modellje:



- MIMO (Multiple Input Multiple Output) diszkrét idejű állapotegyenlete:

$$
\begin{aligned}
\underline{x}[k+1] &= \underline{\underline{A}}_d \underline{x}[k] + \underline{\underline{B}}_d \underline{u}[k] \\
\underline{y}[k] &= \underline{\underline{C}}_d \underline{x}[k] + \underline{\underline{D}}_d \underline{u}[k]
\end{aligned}
$$

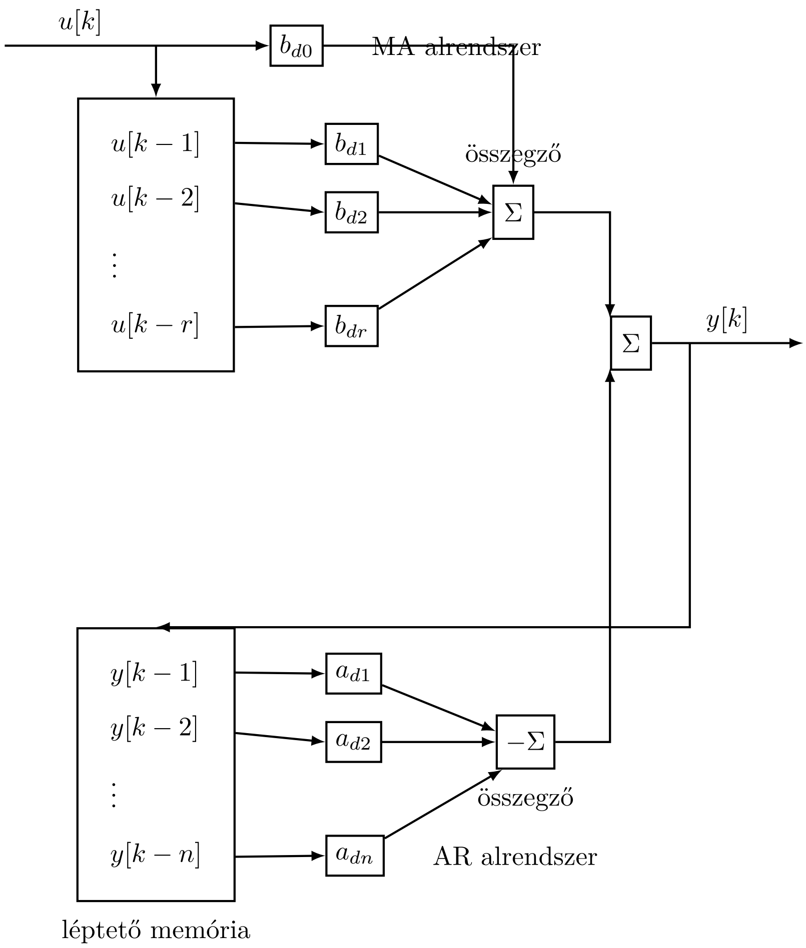
  - $\underline{\underline{A}}_d$: állapotmátrix – a jelenlegi állapot hatása a következő állapotra
  - $\underline{\underline{B}}_d$: bemeneti mátrix – a jelenlegi bemenet hatása a következő állapotra
  - $\underline{\underline{C}}_d$: kimeneti mátrix – az állapot hatása a kimenetre
  - $\underline{\underline{D}}_d$: segédmátrix – a bemenet hatása közvetlenül a kimenetre
  - a mátrixok dimenziója függ a bemenetek és kimenetek számától, pl. egy SISO (Single Input Single Output) rendszernél: $\underline{\underline{B}}_d \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\underline{\underline{C}}_d \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $\underline{\underline{D}}_d \in \mathbb{R}^{1\times 1}$
  - hatásvázlat:



1.5 Írja fel a diszkrét rendszerek be-kimeneti modellezését reprezentáló ARMA-alakját!

ARMA-alak:

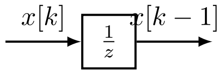
- diszkrét idejű rendszer:
  - $u(t)$ és $y(t)$ csak diszkrét $t = T_k, k \in \mathbb{N}, t \in \{..., T_{-k}, ..., T_{-1}, T_0, T_1, ..., T_k, ...\}$ időpontok sorozatában van értelmezve, ahol: $T_{k-1} < T_k < T_{k+1}$
  - általában $T_k = k \cdot T_s$, ahol T_s a mintavételezési idő
  - $u[k] := u[T_k]$
  - $y[k] := y[T_k]$
- AutoRegresszív Mozgó Átlag
- AR – az $y[k]$ kimenő jel korábbi értékei hogyan hatnak vissza a kimenő jel aktuális értékeire
- MA – az $u[k]$ bemenő jel korábbi értékei (mozgó átlaga) milyen hatással bírnak az aktuális kimenetre
- mi a bemenő és kimenő jel összefüggésének felírására használjuk
- előnyös, mert közvetlenül látszik a memória jelleg, mely léptető (shift) memóriával valósítható meg
- általános alak:
$$\sum_{i=0}^{n} a_{di} y[k-i] = \sum_{i=0}^{r} b_{di} u[k-i]$$
- ezt átrendezve a kimenet új értékének számítása:
$$y[k] = \sum_{i=0}^{r} b_{di} u[k-i] - \sum_{i=1}^{n} a_{di} y[k-i], \text{ ahol } a_{d0} = 1\text{: az } y[k] \text{ együtthatója}$$



1.6 Ismertess diszkrét rendszerek z eltolási operátorral való képzését! Írja fel az ARMA-alakból az impulzusátviteli függvény képzését!

Eltolási operátor - z:

- egy adatot a jövőbe tol, ezt nem lehet mindig megvalósítani (csak egy múltbeli adatot tudunk a saját jövőjébe tolni), de az inverzének a megvalósítása könnyű
- az eltolási operátor inverze egy időkésleltető elem:



- az eltolási operátor alkalmazása:

$$\begin{aligned} x[k+i] &= z^i x[k] \\ z^{-i}x[k+i] &= x[k] \\ z^{-i}x[k] &= x[k-i] \end{aligned}$$

- az ARMA-modell algebrai alakja:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{r} b_{di}u[k-i] - \sum_{i=1}^{n} a_{di}y[k-i]$$

- ARMA-modell az eltolási operátorral:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{r} z^{-i}b_{di}u[k] - \sum_{i=1}^{n} z^{-i}a_{di}y[k]$$

- átrendezve:

$$\sum_{i=0}^{n} z^{-i}a_{di}y[k] = \sum_{i=0}^{r} z^{-i}b_{di}u[k] \quad a_{d0} = 1$$

- be- és kimeneti összefüggés eltolási operátorral, ahol $w(z)$ az impulzus átviteli függvény:

$$y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{r} z^{-i}b_{di}}{\sum_{i=0}^{n} z^{-i}a_{di}}u(z) = w(z)u(z) \quad a_{d0} = 1$$

1.7 Ismertesse a diszkrét idejű konvolúció szerepét, összefüggését!

Konvolúció:

- bevezetünk ún. „egységnyi” jeleket – vizsgálójeleket
- ebből tudunk következtetni a rendszer tetszőleges bemenetre adott válaszára
- összetett bemenő jelek válaszának meghatározása komponensekre bontással:
  - a bemenőjelet vizsgálójelekből álló komponensekre bontjuk
  - meghatározzuk az elemi komponensek elemi hatását
  - az időinvariancia és a szuperpozíció elvének kihasználásával az elemi hatásokat összegezzük
- diszkrét idejű egységimpulzus:

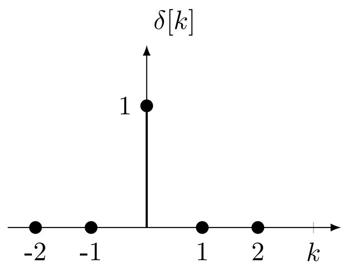
$$\delta[k] = \begin{cases} 0 \text{ ha } k \neq 0 \\ 1 \text{ ha } k = 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

  - eltolás esetén:

$$\delta[k-K] = \begin{cases} 0 \text{ ha } k \neq K \\ 1 \text{ ha } k = K \end{cases} \qquad k, K \in \mathbb{Z}$$

  - szorzás esetén

$$Y_0\delta[k] = \begin{cases} 0 \text{ ha } k \neq 0 \\ Y_0 \text{ ha } k = 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad Y_0 \in \mathbb{R}$$



- diszkrét idejű egységugrás:

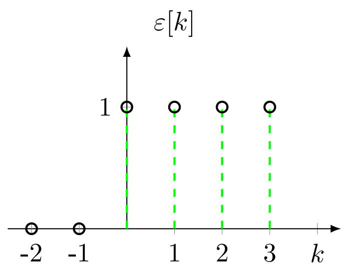
$$\varepsilon[k] = \begin{cases} 0 \text{ ha } k < 0 \\ 1 \text{ ha } k \geq 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

  - eltolás esetén:

$$\varepsilon[k-K] = \begin{cases} 0 \text{ ha } k < K \\ 1 \text{ ha } k \geq K \end{cases}$$

  - szorzás esetén:

$$Y_0\varepsilon[k] = \begin{cases} 0 \text{ ha } k < 0 \\ Y_0 \text{ ha } k \geq 0 \end{cases} \qquad k, K \in \mathbb{Z} \quad Y_0 \in \mathbb{R}$$



- amikor egy diszkrét idejű rendszernek a bemenő jele egy diszkrét idejű egységimpulzus, akkor a kimenő jelet súlyfüggvénynek (vagy impulzusválasznak) nevezzük
  - jele: $w[k]$

- vizsgálójelek alapösszefüggései:
$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[i] = 1$$

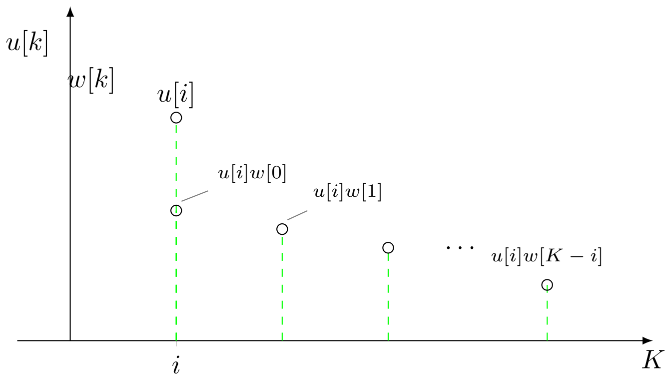
- belátható, hogy egy diszkrét idejű függvény konvolúciója az egységimpulzussal egy adott K érték mellett a függvény K helyen felvett értékét adja vissza
$$y[K] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y[i]\delta[K-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y[K-i]\delta[i] \quad K \in \mathbb{Z}$$

- az egységugrás értéke a k helyen kiszámolható az egységimpulzus függvényből
$$\varepsilon[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta[i] \quad k \in \mathbb{Z}$$

- az egységugrás két szomszédos helyen felvett értéknek különbsége megegyezik az egységimpulzus függvény megfelelő helyen felvett értékével
$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1] \quad k \in \mathbb{Z}$$

- egy diszkrét idejű rendszer kimenete k-adik időpillanatban a súlyfüggvénnyel és a bemenettel felírva:
$$y[k] = \sum_{i=0}^{k} w[k-i]u[i] \quad k \geq 0$$

- mivel $w[k-i]u[i]$ az i-edik időpillanat bemenetének a kimenetre való hatása
$$u[k=K] = u[k=K]\delta[(k-K)=0]$$
$$y[k] = \sum_{i=0}^{k} w[k-i]u[i] \quad k > 0$$

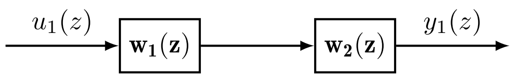


1.8 Adott két diszkrét idejű átviteli függvény. Vezesse le az eredő átviteli függvény összefüggését, ha a két átviteli függvény sorba, párhuzamosan, illetve visszacsatolva (pozitív és negatív) kapcsolódik egymáshoz. Mutassa be, a hatásvázlat átalakításának szabályait (elágazási pont áthelyezése tag mögé és tag elé, illetve összegzési pont áthelyezése tag mögé és tag elé)!

Hatásvázlat:

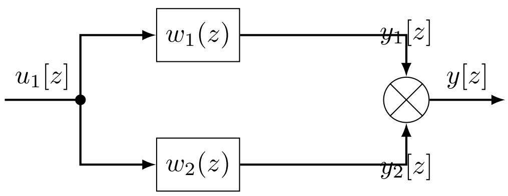
- rendszer működését lehet ábrázolni
- bal oldalt a bemenet(ek), jobb oldalt kimenet(ek)
- grafikus úton kapunk átviteli függvényt
- nyíl irányával jelezzük a jel haladási irányát
- műveletek:
  - elágazás
  - összegzés (negatív esetén az érintett negyed besatírozása)
- az impulzus átviteli függvényeket blokkban ábrázoljuk

Sorba kapcsolás:



$$u_1(z) \cdot w_1(z) \cdot w_2(z) = y_1(z)$$

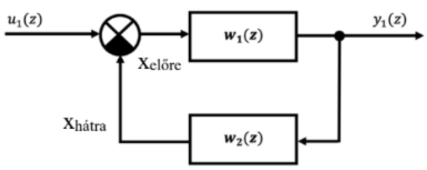
Párhuzamosan kapcsolás:



$$y(z) = y_1(z) + y_2(z) = w_1(z)u_1(z) + w_2(z)u_1(z)$$
$$y(z)(w_1(z) + w_2(z))u_1(z) = w_e(z)u_1(z)$$

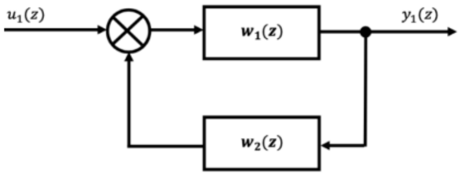
Visszacsatolás, elágazási pontok, összegzési pontok:

- negatív visszacsatolást szoktunk leggyakrabban alkalmazni



$$x_{\text{előre}}(z) = u_1(z) - x_{\text{hátra}}(z) = u_1(z) - w_2(z)y_1(z)$$
$$y_1(z) = x_{\text{előre}}(z)w_1(z) \rightarrow x_{\text{előre}}(z) = \frac{y_1(z)}{w_1(z)}$$
$$y_1(z) = u_1(z)w_1(z) - w_2(z)w_1(z)y_1(z)$$
$$\frac{y_1(z)}{u_1(z)} = \frac{w_1(z)}{1 + w_1(z)w_2(z)}$$

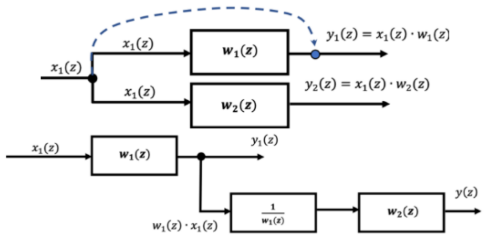
- pozitív visszacsatolás:



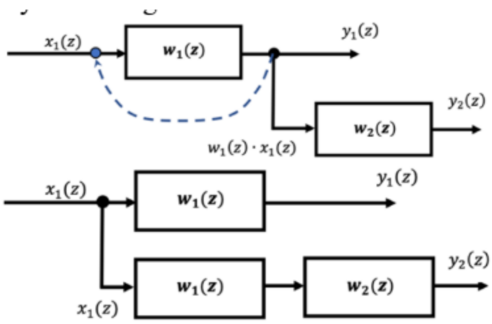
  - a negatív visszacsatoláshoz hasonlóan levezethető, az eredmény:

$$\frac{y_1(z)}{u_1(z)} = \frac{w_1(z)}{1 - w_1(z)w_2(z)}$$

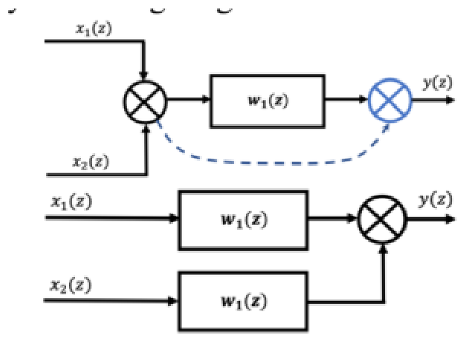
- elágazási pont áthelyezése a tag mögé:



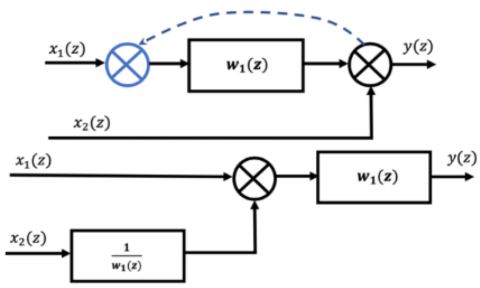
- elágazási pont áthelyezése a tag elé:



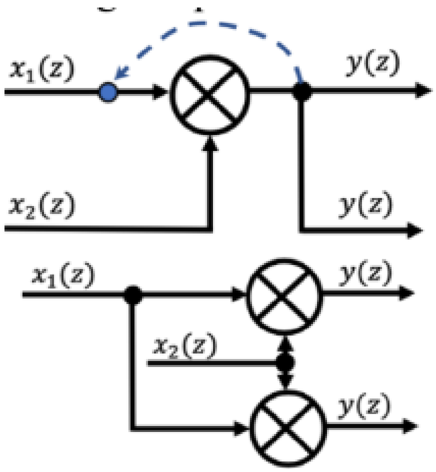
- összegzési pont áthelyezése a tag mögé:



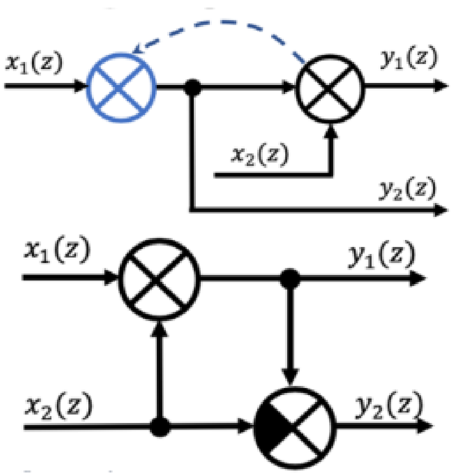
- összegzési pont áthelyezése a tag elé:



- elágazási pont áthelyezése összegzési pont elé:



- összegzési pont áthelyezése elágazási pont elé:



1.9 A lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek diszkrét idejű állapottér modell felhasználásával, előre tartó Euler módszer segítésével vezesse le a folytonos idejű lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek állapottér modellt!

Lineáris időinvariáns rendszerek diszkrét idejű állapottér modellje:

$$(1.)\quad \underline{x}[k+1] = \underline{\underline{A_d}}\,\underline{x}[k] + \underline{\underline{B_d}}\,\underline{u}[k]$$
$$(2.)\quad \underline{y}[k] = \underline{\underline{C_d}}\,\underline{x}[k] + \underline{\underline{D_d}}\,\underline{u}[k]$$

- az (1.)-es egyenletben vonjunk ki mindkét oldalból $\underline{x}[k]$-t (az előretartó Euler miatt):

$$\underline{x}[k+1] - \underline{x}[k] = \underline{\underline{A_d}}\,\underline{x}[k] + \underline{\underline{B_d}}\,\underline{u}[k] - \underline{x}[k]$$

- összevonás után osszunk le Δt-vel:

$$\frac{\underline{x}[k+1] - \underline{x}[k]}{\Delta t} = \frac{(\underline{\underline{A_d}} - \underline{\underline{I}})\,\underline{x}[k] + \underline{\underline{B_d}}\,\underline{u}[k]}{\Delta t}$$

- a folytonos idejű t_k diszkrét időben a k-adik időpillanatot jelenti, így tudunk helyettesíteni:

$$\frac{\underline{x}(t_{k+1}) - \underline{x}(t_k)}{\Delta t} = \frac{(\underline{\underline{A_d}} - \underline{\underline{I}})\,\underline{x}(t_k) + \underline{\underline{B_d}}\,\underline{u}(t_k)}{\Delta t}$$

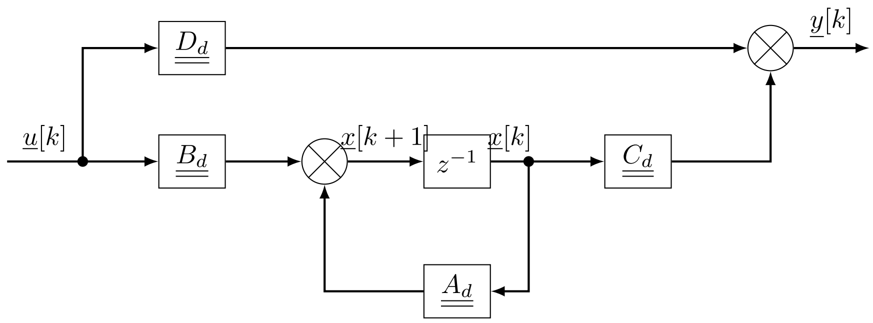
- szétbontva:

$$\frac{\underline{x}(t_{k+1}) - \underline{x}(t_k)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}(\underline{\underline{A_d}} - \underline{\underline{I}})\,\underline{x}(t_k) + \frac{1}{\Delta t}\underline{\underline{B_d}}\,\underline{u}(t_k)$$

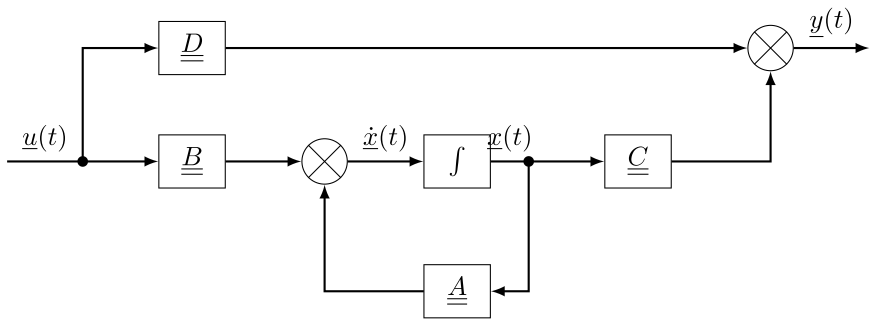
- vegyük a kifejezés határértékét, ha $\Delta t \to 0$:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}(t)$$
$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}\,\underline{u}(t)$$

- diszkrét idejű állapottér modell hatásvázlata:



- folytonos idejű állapottér modell hatásvázlata:

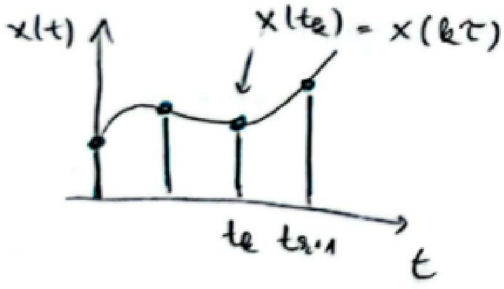


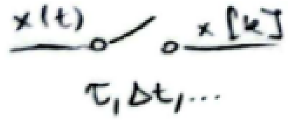
- így a mátrixok:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{\Delta t}(\underline{\underline{A_d}} - \underline{\underline{I}}),\quad \underline{\underline{B}} = \frac{1}{\Delta t}\underline{\underline{B_d}},\quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C_d}},\quad \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D_d}}$$

1.10 A z transzformáció összefüggését felhasználva ismertesse a Laplace transzformáció definícióját!

Mintavételezett jel:





- a mintavételezés eredményét **tömbös formában** lehet tárolni:

$x(0\tau)$	$x(1\tau)$	$x(2\tau)$	...

- ebből matematikai számsorozatot tudunk csinálni:

$$\{x_k\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

- állítsunk össze polinomot a sorozat elemeiből:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$

- általánosítás: $N \to \infty \to$ számsorozat $\to$ sor $\to$ hatványsor (függvénysor)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} \to \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} =: X(z)$$

$$x = z^{-1} \quad \text{Z-transzformáció}$$

- cél: $\Delta t = \tau \to 0$
  - tudjuk, hogy: $z = e^{\ln(z)}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k\tau) z^{-k\frac{\tau}{\tau}} \to \sum_{k=0}^{\infty} x(k\tau) e^{-\ln(z)k\frac{\tau}{\tau}}, \quad s := \ln(z)/\tau$$

- így:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k\tau) e^{-sk\tau}, \quad k\tau \to t$$

- $\tau \to 0\,(\Delta t \to 0)$:

$$\int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt := X(s)$$

Így tehát a Laplace transzformáció:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

- $f(t)$ belépő függvény, tehát $t \in [0, \infty) \to f(t)\varepsilon(t)$

1.11 Igazolja a Dirac impulzus és az egységugrás függvény Laplace transzformáltjait!

Dirac impulzus:

- végtelen nagy impulzus végtelen kicsi idő alatt

$$\delta(t,\tau) = \begin{cases} 0, \text{ ha } t \neq \tau \\ \infty, \text{ ha } t = \tau \end{cases}$$

- MOGI – rendszertechnika jegyzet: 3.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

- a Dirac impulzus Laplace-transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s\cdot 0} = 1$$

Egységugrás:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, \text{ ha } t < 0 \\ 1, \text{ ha } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_{0}^{\infty} \varepsilon(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} 1\cdot e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{0}^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s}e^{0}\right) = \frac{1}{s}$$

1.12 Mutassa be, hogy az átviteli mátrix hogyan származtatható a lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek folytonos idejű állapottér modellből!

Lineáris idő invariáns rendszerek folytonos idejű állapottér modellje:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}(t)\\ \underline{y}(t) &= \underline{\underline{C}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}\,\underline{u}(t)\end{aligned}$$

- első lépésben Laplace transzformáljuk az egyenleteket:

$$\begin{aligned}s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) &= \underline{\underline{A}}\,\underline{X}(s) + \underline{\underline{B}}\,\underline{U}(s)\\ \underline{Y}(s) &= \underline{\underline{C}}\,\underline{X}(s) + \underline{\underline{D}}\,\underline{U}(s)\end{aligned}$$

- az 1. egyenlet átrendezve:

$$(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})\underline{X}(s) = \underline{x}(0) + \underline{\underline{B}}\,\underline{U}(s)$$

- $\underline{X}(s)$ kifejezése:

$$\underline{X}(s) = (s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{x}(0) + (s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{U}(s)$$

- $\underline{X}(s)$ visszahelyettesítve a kimeneti egyenletbe, majd rendezve:

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{\underline{\underline{C}}(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{x}(0)}_{\text{tranziens tag}} + \underbrace{\left(\underline{\underline{C}}(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{D}}\right)}_{\text{átviteli mátrix}}\underline{U}(s)$$

- Így az átviteli mátrix ($\underline{U}(s)$ együtthatója)

$$W(s) = \underline{\underline{C}}(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{D}}$$

  - a tranziens tag eltűnik, az állandósult viselkedést az átviteli mátrix írja le

1.13 Ismertesse az egytárolós arányos tag súly és átmeneti függvényeit! Válaszában térjen ki az időállandó fogalmára!

Arányos egytárolós tag – PT1:

$$W(s) = \frac{A}{s - p_1} = \frac{K}{1 + sT}$$

Arányos egytárolós tag súlyfüggvénye:

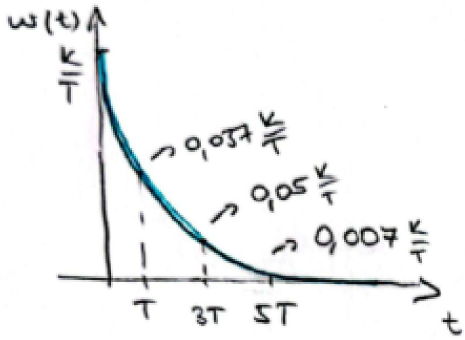
- az egységimpulzusra ($\delta(t)$-re) adott válasz
- $u(t) = \delta(t) \rightarrow U(s) = 1$

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{K}{1 + sT} \cdot 1$$

- a kérdés: $y(t) = w(t) = ?$

$$y(t) = w(t) = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right\} = \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}\varepsilon(t)$$

- grafikusan ábrázolva:



Arányos egytárolós tag átmeneti függvénye:

- egységugrásra ($\varepsilon(t)$-re) adott válasz
- $u(t) = \varepsilon(t) \rightarrow U(s) = 1/s$

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{K}{1 + sT}\frac{1}{s}$$

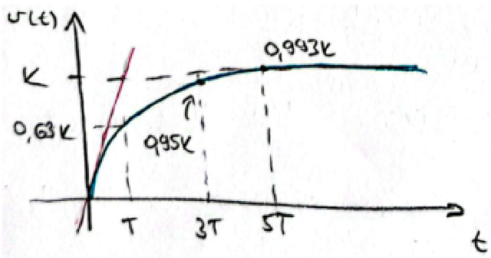
- a kérdés: $y(t) = v(t) = ?$

$$y(t) = v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(1 + sT)s}\right\} = K\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{T(s + \frac{1}{T})s}\right\} = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{T}}\right\}$$

$$A = T, \quad B = -T$$

$$v(t) = K\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right\} = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\varepsilon(t)$$

- grafikusan ábrázolva:



T és K változók az átmeneti függvénynél:

- K meghatározza, hogy hova konvergál a rendszer
- T meghatározza, hogy mennyi idő alatt konvergál

Időállandó fogalma:

- Az átviteli függvény időállandós alakjából s együtthatói, melyet az átviteli függvény gyöktényezős alakjából tudunk átalakítani
- így az időállandó(k) a gyöktényezős alak – mely s-re nézve egy valós együtthatójú racionális törtfüggvény – **pólusai** valós részének reciprokának mínusz egyszerese:

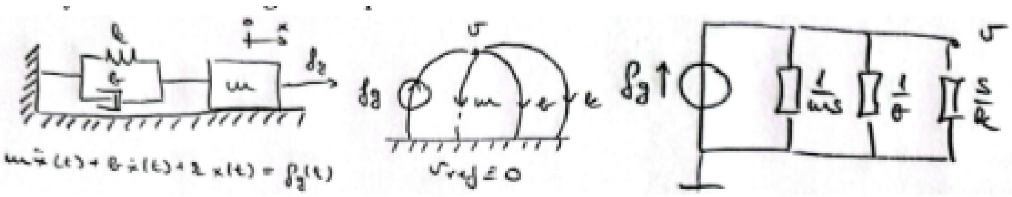
$$W(s) = \frac{b_r}{a_n} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_r)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

$$W(s) = \underbrace{\frac{b_r(-z_1)(-z_2) \dots (-z_r)}{a_n(-p_1)(-p_2) \dots (-p_n)}}_{\text{erősítés}} \frac{(1 - \frac{1}{z_1}s)(1 - \frac{1}{z_2}s) \dots (1 - \frac{1}{z_r}s)}{(1 - \frac{1}{p_1}s)(1 - \frac{1}{p_2}s) \dots (1 - \frac{1}{p_n}s)}$$

- időállandók: $T_1 = -\frac{1}{p_1}, T_2 = -\frac{1}{p_2}, \dots, T_n = -\frac{1}{p_n}$

1.14 Ismertesse az kéttárolós arányos tag súly és átmeneti függvényeit! Válaszában térjen ki a minőségi jellemzőkre!

Arányos kéttárolós tag – PT2 példával:



$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f_g(t)$$

$$V(s) = \frac{1}{ms + b + \frac{k}{s}} F_g(s) = \frac{s}{ms^2 + bs + k} F_g(s)$$

- az elmozdulást keressük, Laplace tartományban az integrálási szabály miatt: $X(s) = \frac{1}{s} V(s)$

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} F_g(s)$$

- **átviteli függvény:**

$$W(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad \text{általános algebrai alak}$$

- **gyöktényezős alak:**

$$W(s) = \frac{b_0/a_2}{s^2 + \frac{a_1}{a_2} s + \frac{a_0}{a_2}} = \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

  ω_n: csillapítatlan sajátkörfrekvencia, ζ: relatív csillapítási tényező

- **időállandós alak:**

$$W(s) = \frac{b_0/a_0}{\frac{a_2}{a_0} s^2 + \frac{a_1}{a_0} s + 1} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$$

  $T = \frac{1}{\omega_n}$ időállandó, K: erősítési tényező

átmeneti függvény:

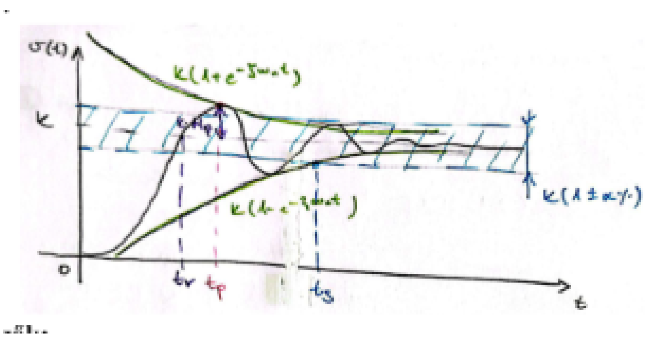
- $u(t) = \varepsilon(t) \to U(s) = 1/s$

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} U(s) \to v(t) = y(t) \ldots$$

$$v(t) = K \left(1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \right) \varepsilon(t)$$

  ahol $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ a csillapított sajátkörfrekvencia.

- **ábrázolva:**



Minőségi jellemzők:

- **belengési idő (peak time):** t_p
  - az átmeneti függvény első maximumának eléréséhez szükséges idő

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

- **maximális túllövés (max. overshoot):** M_p
  - az átmeneti függvény első maximumának a K állandósult értékhez viszonyított értéke

$$M_p = \frac{v(t_p)}{v(\infty)} - 1 = e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

  - százalékos túllövés: $P.O. = M_p \cdot 100[\%]$

- **beállási idő (settling time):** t_s
  - az az időpillanat, amikor az átmeneti függvény eléri, és ezt követően már nem hagyja el a $v(\infty) = K$ állandósult érték körül definiált $K(1 \pm \alpha\%)$ szélességű sávot

$$t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln\left(\frac{100}{\alpha}\right)$$

- **felfutási idő (rise time):** t_r
  - a $v(\infty) = K$ állandósult érték első eléréséhez szükséges idő

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_d}$$

A súlyfüggvény nem volt előadáson.

1.15 Vezesse le a lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek folytonos idejű állapottér modelljének megoldását Laplace transzformáció segítségével!

- $u(t)$ bemenet, $y(t)$ kimenet, valamint az őket összekapcsoló folytonos idejű matematikai modell
- Laplace transzformációt végzünk
- $U(s)$ bemenet, $Y(s)$ kimenet, valamint az őket összekapcsoló Laplace tartománybeli matematikai modell
- $W(s)$ átviteli függvényt kirendezzük, $U(s)$-sel szorozzuk
- Inverz Laplace transzformáció
  - ismert elemekre bontás, melyeknek ismerjük az inverz Laplace transzformáltját
  - parciális törtekre bontás
  - polinomosztás – ha a nevező és a számláló fokszáma azonos

Példa:

- az állapottérmodellünk egy $\dot{x}(t)$ differenciálegyenlet, $x(0)$ kezdeti értékkel
- Laplace transzformáljuk:
$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0)$$
- fejezzük ki $X(s)$-t:
$$X(s) = \dots$$
- behelyettesítjük a kezdeti értékeket, illetve a többi megadott adatot
- inverz Laplace transzformáljuk:
$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \dots$$
- megkapjuk a megoldást

1.16 Mutassa be a lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek esetén folytonos idejű állapottér modell rendszermátrixának sajátértékei és a rendszer átviteli függvényének pólusai közötti összefüggést!

Ez a fejezet mesterséges intelligencia segítségével készült.

Egy folytonos idejű, lineáris időinvariáns (LTI) rendszer állapottér modellje:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

ahol **A** a rendszermátrix, **B** a bemeneti mátrix, **C** a kimeneti mátrix és **D** a közvetlen csatolási mátrix.

Végezzük el a Laplace-transzformációt zérus kezdeti feltételek mellett ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$):

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \quad \Longrightarrow \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$
$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s)$$

Az első egyenletből kifejezve az állapotvektort:

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

Behelyettesítve a kimeneti egyenletbe:

$$\mathbf{y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{u}(s)$$

Az átviteli függvény mátrix tehát:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Tudjuk, hogy az inverz mátrix a következőképpen számítható ki:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

Az átviteli függvény pólusai azok az s értékek, ahol a nevező zérus, azaz:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

Ez pontosan az **A** rendszermátrix karakterisztikus egyenlete. Az egyenlet megoldásai az **A** mátrix sajátértékei (λ_i).

Összefüggés: Az LTI rendszer átviteli függvényének pólusai megegyeznek a rendszermátrix sajátértékeivel (feltéve, hogy a rendszer minimálrealizáció, azaz nem történik pólus-zérus kiejtés az állapotváltozók közötti irányíthatatlanság vagy megfigyelhetetlenség miatt). Ez az összefüggés alapvető a rendszer stabilitásának vizsgálatánál: a rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha az **A** mátrix összes sajátértékének valós része negatív.

1.17 Ismertesse a frekvencia-átviteli függvény fogalmát, illetve annak megjelenítési módjait (Bode diagram)!

A kérdés, hogy egy folytonos idejű időinvariáns rendszer milyen választ ad harmonikus gerjesztésre:

- szinuszos vizsgáló jelet használunk:

$$u(t) = A\sin(\omega t) \rightarrow U(s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

- harmonikus gerjesztés esetén a válasz (állandósult értéke):

$$y(t) = \tilde{A}(\omega)\sin(\omega t - \varphi(\omega))$$

  $\tilde{A}(\omega)$: frekvenciafüggő amplitúdó, $\varphi(\omega)$: frekvenciafüggő fáziseltolás

- formális helyettesítés: $s \rightarrow j\omega$ komplex szám
  - **frekvencia-átviteli függvény az átviteli függvényből:**

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}$$

- a komplex szám nagysága:

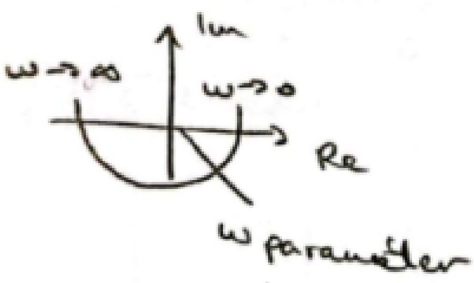
$$|W(j\omega)| = \frac{A_{ki}}{A_{be}} = A_r, \quad \text{ahol } A_{ki} = \tilde{A},\ A_{be} = A,\ A_r : \text{amplitúdó arány}$$

- fáziskülönbség:

$$\Delta\varphi = \varphi_{ki} - \varphi_{be} = \arg(W(j\omega)) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{W(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{W(j\omega)\}}\right)$$

Frekvencia-átviteli függvény megjelenítése:

- **Nyquist-diagram:**



- **Bode diagram(ok):**
  a) amplitúdó – körfrekvencia diagram (teljesítmény arány)
  b) fázisszög – körfrekvencia diagram (fáziskülönbség)

Amplitúdó – körfrekvencia diagram:

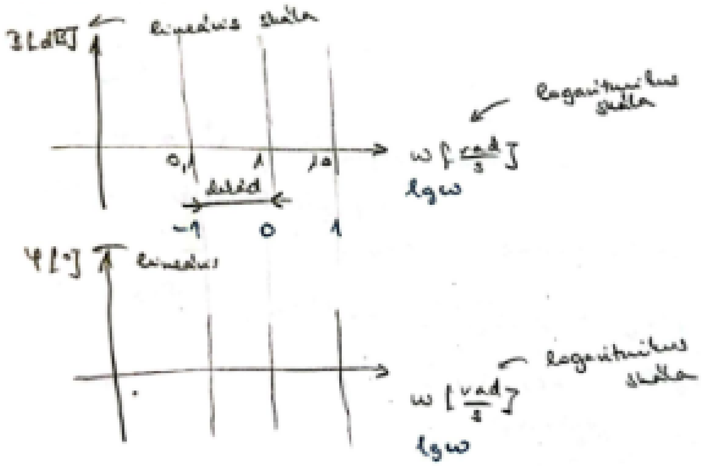
$$A_r \rightarrow P_r = A_r^2$$

$$B = \lg(P_r) = \lg(A_r^2)\ [B]\ \text{(bel)}$$

$$B = 10\lg(P_r)\ [dB]\ \text{(decibel)}$$

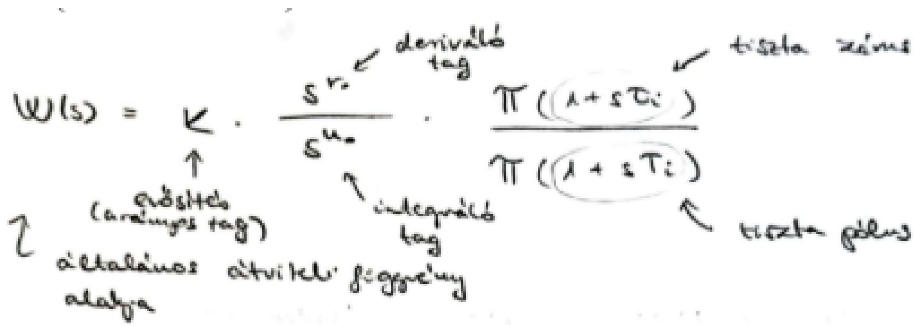
$$B = 10\lg(A_r^2) = 20\lg(A_r)\ [dB]$$

Diagramok:

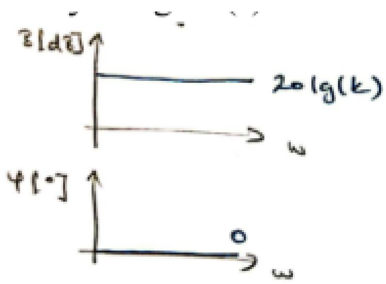


- a frekvencia-átviteli függvény szorzattagokra bontható
- a diagram ezeknek a tagoknak a diagramjának az összegzésével kapható meg, bizonyítás:
  - komplex szám másik alakja: $W(j\omega) = re^{i\varphi}$
  - szorzatokra bontható: $W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)$
  - $W(j\omega) = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
  - $\lg(r_1 r_2) = \lg(r_1) + \lg(r_2)$

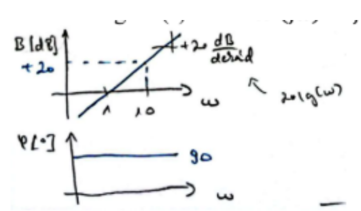
Az alapelemek (általános alak):



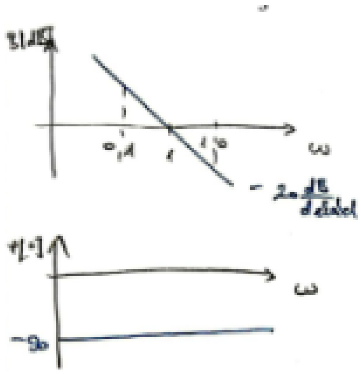
- **Arányos tag:** $W(s) = K$



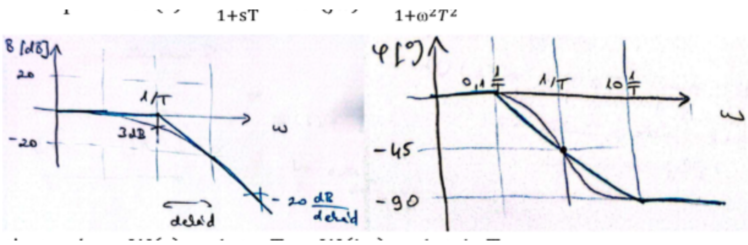
- **Deriváló tag:** $W(s) = s \rightarrow W(j\omega) = j\omega$



- **integráló tag:** $W(s) = \frac{1}{s} \rightarrow W(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega}$



- **tiszta pólus:** $W(s) = \frac{1}{1+sT} \rightarrow W(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1+\omega^2 T^2}$

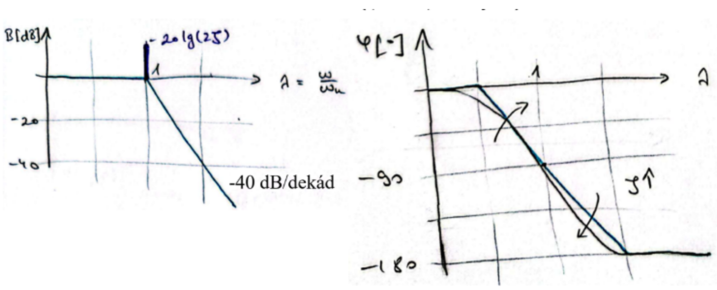


- **tiszta zérus:** $W(s) = 1 + sT \rightarrow W(j\omega) = 1 + j\omega T$
  - tiszta pólus esetén kapott eredmények tükrözése y tengelyre
- **komplex póluspár:** $W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \rightarrow W(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2+2\zeta\omega_n\omega j+\omega_n^2}$

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta\omega j}{\omega_n}}$$

  - frekvenciahányados: $\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}$

$$W(j\omega) = \frac{1 - \lambda^2 - 2\zeta\lambda j}{((1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2)^2}$$



1.18 Vezesse le a Fourier sorfejtésének alakja komplex alakját!

Ez a fejezet mesterséges intelligencia segítségével készült.

A periodikus $f(t)$ függvény (T periódussal) valós alakú Fourier-sora:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))$$

ahol $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Használjuk fel az Euler-formulákat:

$$\cos(k\omega_0 t) = \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2}, \quad \sin(k\omega_0 t) = \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2j} = -j\frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2}$$

Behelyettesítve a sorba:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} - jb_k \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2} \right]$$
$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_0 t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_0 t} \right]$$

Definiáljuk a komplex Fourier-együtthatókat (c_k): - $c_0 = a_0$ - $c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}$ ha $k > 0$ - $c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}$ (ami éppen c_k konjugáltja, ha $f(t)$ valós)

Ekkor a szummázás kiterjeszthető a negatív indexekre is:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Az együtthatók kiszámítása: Tudjuk, hogy $a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(k\omega_0 t)dt$ és $b_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(k\omega_0 t)dt$. Ebből c_k ($k \neq 0$):

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{T}\int_T f(t)\left(\cos(k\omega_0 t) - j\sin(k\omega_0 t)\right)dt$$
$$c_k = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Ez az összefüggés érvényes $k = 0$ esetén is, hiszen $c_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)dt$.

Végeredmény: A komplex Fourier-sor alakja és az együtthatók:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

1.19 A Fourier sorfejtés miként általánosítható nem periodikus (lecsengő) függvényekre? Ismertesse a Fourier transzformáció származtatását!

Ez a fejezet mesterséges intelligencia segítségével készült.

A Fourier-sor periodikus függvények felírására alkalmas. Ha egy függvény nem periodikus (lecsengő), tekinthetjük úgy, mint egy olyan periodikus függvényt, amelynek periódusideje a végtelenbe tart ($T \to \infty$).

Kiindulva a komplex Fourier-sorból:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Helyettesítsük be c_k-t a sorba:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jk\omega_0 t}$$

Mivel $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, ezért $\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$. Jelöljük $\Delta\omega = \omega_0$-t:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-j(k\Delta\omega)\tau} d\tau \right] e^{j(k\Delta\omega)t} \Delta\omega$$

Ahogy $T \to \infty$, úgy $\Delta\omega \to d\omega$, a diszkrét frekvenciaértékek ($k\Delta\omega$) pedig folytonos változóvá (ω) válnak. A szumma ekkor integrállá alakul:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega$$

Definiáljuk a belső integrált mint a függvény Fourier-transzformáltját:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ekkor az eredeti függvény visszakapható az inverz Fourier-transzformációval:

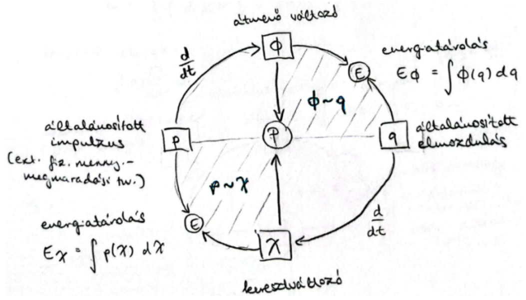
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Összefoglalva: A Fourier-transzformáció a Fourier-sor általánosítása nem periodikus jelekre. Míg a Fourier-sor diszkrét frekvencia-spektrumot (vonalas spektrum) eredményez, addig a Fourier-transzformáció folytonos spektrumot ad. A transzformáció létezésének feltétele a Dirichlet-feltételek teljesülése, legfontosabb ezek közül az abszolút integrálhatóság: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$.

1.20 Ismertesse a következő fogalmakat (adja meg a definícióját és rövid értelmezését): extenzív és intenzív fizikai mennyiségek, átmenő és keresztváltozók, energiatárolók (átmenő és keresztváltozóval) és disszipatív elemek (kétpólusok), csatolt kétpólus elem (transzformátor és girátor)!

- **extenzív fizikai mennyiség:** olyan mennyiség, melynek a rendszer egészét jellemző értéke megegyezik az őt alkotó részrendszereket jellemző értékek összegével (pl. tömeg, térfogat, töltés).
- **intenzív fizikai mennyiség:** a rendszer egészét jellemző értéke egyensúly esetén megegyezik a rendszert alkotó részrendszerek értékeivel (pl. hőmérséklet, nyomás).
- **átmenő változók (Φ):** extenzív fizikai mennyiség rátája (d/dt), általában megmaradási törvény is tartozik hozzá.
- **keresztváltozók (χ):** intenzív fizikai mennyiségek (különbsége) vagy általános elmozdulás (q) rátája.

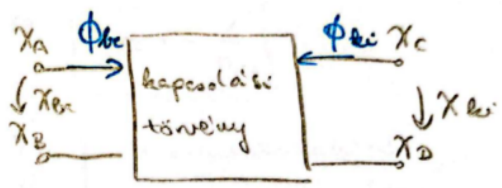
Állapot-tetraéder (Tetrahedron of state):



A rendszerelemek feloszthatók energetikai szempontból:

- **energiatárolók:** energiát tárolnak, az elem valamilyen extenzív mennyiség energiáját halmozza fel, lehet kapacitív vagy induktív.
- **disszipatív elemek:** veszteséget modellezik, a valós rendszerek modellezéséhez szükségesek.
- **energiaátalakítók:** csatolt kétpólus, négypólus elem.
- **energiaforrások**.

Energiaátalakítók:



- **veszteségmentes:** $P_{be} = P_{ki}$, előjelkonvenció miatt $P_{be} + P_{ki} = 0 \implies \chi_{be}\Phi_{be} + \chi_{ki}\Phi_{ki} = 0$
- **lineáris, statikus rendszer** $\rightarrow$ algebrai egyenlet:

$$\begin{bmatrix} \chi_{be} \\ \Phi_{be} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{ki} \\ \Phi_{ki} \end{bmatrix}$$

$$\chi_{be} = c_{11}\chi_{ki} + c_{12}\Phi_{ki}$$

$$\Phi_{be} = c_{21}\chi_{ki} + c_{22}\Phi_{ki}$$

- **behelyettesítve a teljesítmény-egyenletbe:**

$$(c_{11}\chi_{ki} + c_{12}\Phi_{ki})(c_{21}\chi_{ki} + c_{22}\Phi_{ki}) + \chi_{ki}\Phi_{ki} = 0$$

$$c_{11}c_{21}\chi_{ki}^2 + (1 + c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21})\chi_{ki}\Phi_{ki} + c_{12}c_{22}\Phi_{ki}^2 = 0$$

- **2 nem triviális megoldás:**

1. lehetőség: $c_{12} = c_{21} = 0$, ekkor $(1 + c_{11}c_{22}) = 0 \implies c_{22} = -\frac{1}{c_{11}}$

- energiaátalakító: **transzformátor**
- azonos típusú változók között teremt kapcsolatot (pl. villamos transzformátor, hatómű, DC motor)

$$\begin{bmatrix} \chi_{be} \\ \Phi_{be} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{ki} \\ \Phi_{ki} \end{bmatrix}$$

2. lehetőség: $c_{11} = c_{22} = 0$, ekkor $(1 + c_{12}c_{21}) = 0 \implies c_{21} = -\frac{1}{c_{12}}$

- energiaátalakító: fordítóváltó, **girátor**
- eltérő típusú változók között teremt kapcsolatot (pl. giroszkóp, munkahenger)

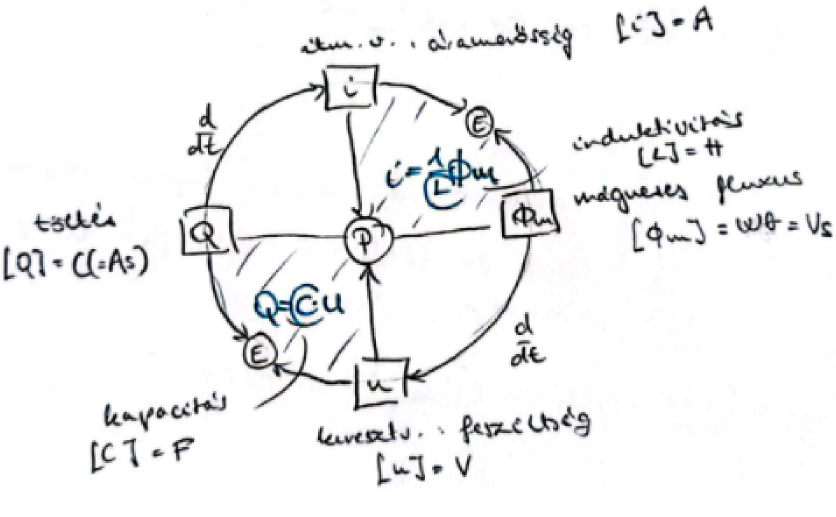
$$\begin{bmatrix} \chi_{be} \\ \Phi_{be} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ -\frac{1}{c_{12}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{ki} \\ \Phi_{ki} \end{bmatrix}$$

1.21 Adja meg az villamos rendszer (kapcsolt elektromechanikai), haladó és forgómozgású mechanikai rendszerek és az áramlástechnikai (pneumatikus és hidraulikai) rendszerek koncentrált paraméterű leírása esetén az átmenő és keresztváltozó típusát, valamint az energiatárolókat (amennyiben léteznek) és disszipatív elemeket.

Villamos rendszer:

- ϕ: i – áramerősség [A]
- χ: u – feszültség [V]
- energiatárolók:

  $E_\chi = \int Qdu = \int Cudu = \frac{1}{2}Cu^2$
  $E_\phi = \int id\phi_m = \int \frac{1}{L}\phi_m d\phi_m = \frac{1}{2L}\phi_m^2 = \frac{1}{2}Li^2$
- disszipatív elem:
  - ellenállás
  - $i = \frac{1}{R}u$
  - $[R] = \Omega$
- további elemek:
  - L – induktivitás [H]
  - C – kapacitás [F]
  - ϕ_m – mágneses fluxus [Wb] = [Vs]
  - Q – töltés [C] = [As]

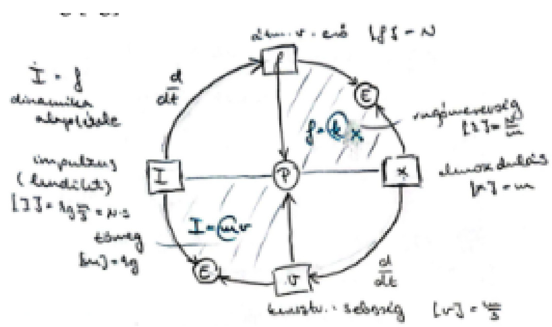


Mechanikai haladó:

- ϕ: f – erő [N]
- χ: v – sebesség [m/s]
- energiatárolók:

$$E_\chi = \int I dv = \int mv dv = \frac{1}{2}mv^2$$
$$E_\phi = \int f dx = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2$$

- disszipatív elem:
  - viszkózus csillapítási tényező
  - $f = bv$
  - $[b] = \text{Ns/m}$
- további elemek:
  - I – lendület [Ns] = [kg m/s]
  - x – elmozdulás [m]
  - k – rugómerevség [N/m]
  - m – tömeg [kg]



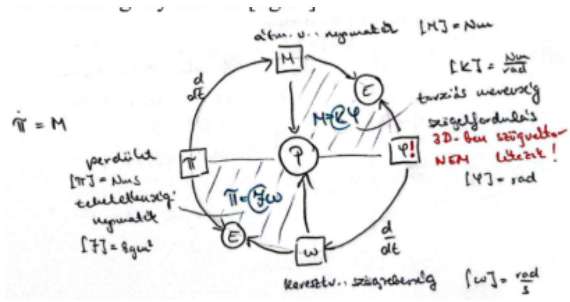
Mechanikai forgó:

- ϕ: M – nyomaték [Nm]
- χ: ω – szögsebesség [rad/s]
- energiatárolók:

$$E_\chi = \int \pi d\omega = \int J\omega d\omega = \frac{1}{2}J\omega^2$$
$$E_\phi = \int M d\varphi = \int k\varphi d\varphi = \frac{1}{2}k\varphi^2$$

- disszipatív elem:
  - viszkózus csillapítási tényező
  - $M = B\omega$
  - $[B] = \text{Nms/rad}$
- további elemek:
  - π – perdület [Nms]
  - φ – szögelfordulás [rad]
  - k – torziós rugómerevség [Nm/rad]
  - J – tehetetlenségi nyomaték [kgm^2]

$\dot{\pi} = M$ $[J] = \text{kgm}^2$ $[k] = \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$ 3D-ben szögvektor NEM létezik! $[\varphi] = \text{rad}$

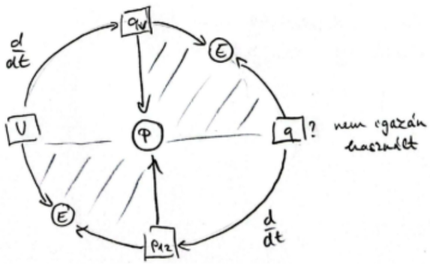


Áramlástechnikai:

- ϕ: q_v – tömegáram/térfogatáram
- χ: p_{12} – nyomás
- energiatárolók:

  fluid kapacitás: $q_v = C_f \frac{dp_{12}}{dt}$

  fluid induktivitás: $q_v = \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{L_f} p dt$
- disszipatív elem:
  - fluid ellenállás
  - $q_v = \frac{1}{R_f} p_{12}$
- áramlástechnikai (fluid) rendszerek:
  - hidraulikus: nem összenyomható közeg
  - pneumatikus: összenyomható közeg, légköri nyomásnál nagyobb nyomás
  - akusztikus: összenyomható közeg, légköri nyomás



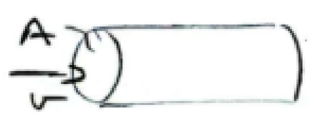
nem igazán használt [q?]

hidraulikus rendszer kapacitás:

- nyitott tartály
- tápnyomás: $p_t = \rho g h$
- $q_v = \frac{dV}{dt} = Av \rightarrow V = Ah \rightarrow \frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt}$

  $\frac{dp}{dt} = \rho g \frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dp}{dt} = \rho g \frac{1}{A}\frac{dV}{dt}$

  $\boxed{q_v = \frac{A}{\rho g}\frac{dp_{12}}{dt}}$ hidraulikus kapacitás C_f



	Pneumatikus	Hidraulikus
kapacitás	$C_f = \frac{V}{\kappa p_1}$	$C_f = \frac{A}{\rho g}$
induktivitás	nincs	$L_f = \frac{\rho l}{A}$
disszipatív elem	R_f	R_f

1.22 Mutassa be, milyen módszerekkel határozható meg a kereszt illetve átmenő változók értékei különféle források figyelembevétele esetén!

Feladatmegoldás:

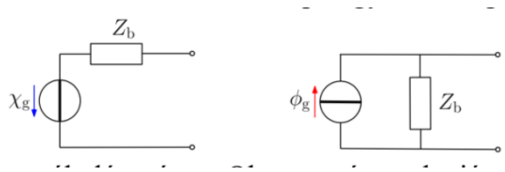
- ha kapunk egy rendszert, hogy oldjuk meg a feladatot?
- első lépés: struktúragráfot készítünk
- a struktúragráf alapján elkészítjük az impedanciahálózatot (itt már Laplace tartományban vagyunk)
- a struktúragráfot redukáljuk
- miután a legegyszerűbb alakra hoztuk, felmerül a kérdés, hogy mit is kell kiszámolnunk, és ez milyen módszerrel lehetséges
- több módszer van, a forrás és a keresett változó típusától függ, hogyan tudjuk megoldani a feladatot

A lehetséges módszerek:

Forrás	Keresett mennyiség	Számítás módja
ϕ_g	χ_i	a) csomóponti potenciálok módszere b) feszültségosztó + forráscsere (Thevenin tétel)
ϕ_g	ϕ_i	a) hurokáramok módszere b) áramosztó
χ_g	χ_i	a) csomóponti potenciálok módszere b) feszültségosztó
χ_g	ϕ_i	a) hurokáramok módszere b) áramosztó + forráscsere (Norton tétel)

Forráscsere:

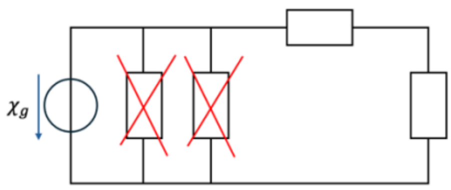
- akkor lehet szükség rá, ha a keresett mennyiség és a forrás típusa különböző
- a Thevenin illetve Norton ekvivalens képe egy tetszőleges hálózatnak:



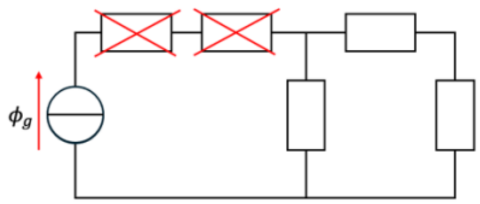
- forráscserénél az általánosított Ohm-törvény alapján a belső ellenállással tudjuk kiszámolni a forráscsere utáni forrásokat ($\chi_g = Z_b \phi_g$)

Elanyagolható impedanciák:

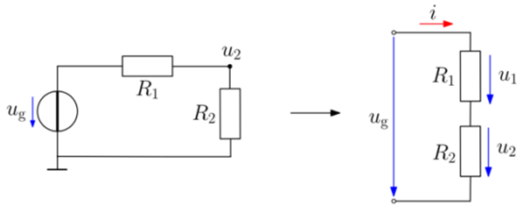
- keresztváltozó forrással párhuzamosan kapcsolt impedanciák:



- átmenő változó forrással sorosan kapcsolt impedanciák:



Feszültségosztó:



- u_2-t keressük
- tudjuk, hogy ugyanaz az áram folyik R_1-en és R_2-n: $i = i_1 = i_2$
- a feszültség pedig megoszlik az ellenállásokon: $u_g = u_1 + u_2$
- az Ohm-törvényt alkalmazva ezekre az egyenletekre:

$$\frac{u_1}{R_1} = \frac{u_2}{R_2}$$

- rendezzük át az egyenletet

$$u_1 = \frac{R_1}{R_2}u_2$$

- helyettesítsünk be u_g-be:

$$u_g = \frac{R_1}{R_2}u_2 + u_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}u_2$$

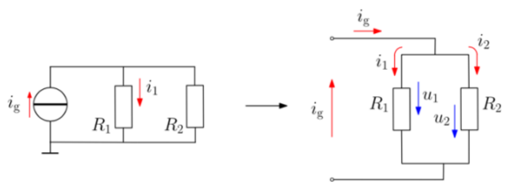
- átrendezve a keresett u_2 feszültség:

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}u_g$$

- ez felírható az általánosított Ohm-törvénnyel is:

$$\chi_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\chi_g$$

Áramosztó:



- ismert a forrás, az ellenállások értékei és keressük i_1-et
- tudjuk, hogy a párhuzamosan kapcsolt ellenállásokon ugyanaz a feszültség esik:

$$u = u_1 = u_2$$

- az áram pedig az ellenállásoknak megfelelően megoszlik:

$$i_g = i_1 + i_2$$

- felírva az Ohm-törvényt:

$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \rightarrow i_2 = \frac{R_1}{R_2}i_1$$

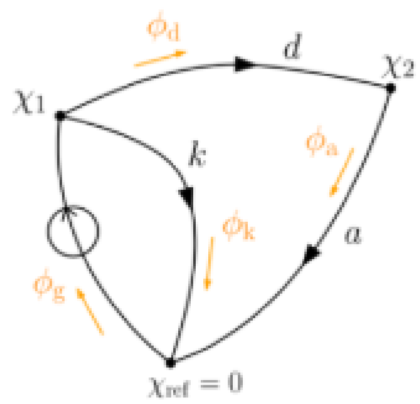
- i_g-be való behelyettesítés és rendezés:

$$i_g = i_1 + \frac{R_1}{R_2}i_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}i_1 \rightarrow i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}i_g$$

- általános Ohm-törvénnyel:

$$\phi_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\phi_g$$

Csomóponti potenciálok módszere:



- minden csomópontra felírjuk a Kirchhoff csomóponti törvényt: $\sum i = 0$

$$\chi_1 : \phi_d + \phi_k - \phi_g = \frac{\chi_1 - \chi_2}{Z_d} + \frac{\chi_1 - \chi_3}{Z_k} - \phi_g = 0$$

$$\chi_2 : \phi_a - \phi_d = \frac{\chi_2 - \chi_3}{Z_a} - \frac{\chi_1 - \chi_2}{Z_d} = 0$$

$$\chi_3 : \phi_g - \phi_a - \phi_k = \phi_g - \frac{\chi_2 - \chi_3}{Z_a} - \frac{\chi_1 - \chi_3}{Z_k} = 0$$

- tudjuk, hogy a referencia 0, így leegyszerűsödik az egyenletünk
- az egyenletet átalakítva, majd megoldva:

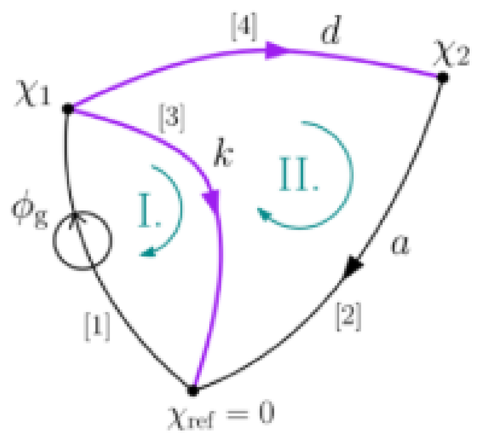
$$(Z_d + Z_a) \cdot \chi_2 = Z_a \cdot \chi_1$$

$$\chi_1 = \frac{Z_d + Z_a}{Z_a} \cdot \chi_2$$

- innen már csak vissza kell helyettesíteni és kifejezni a keresett változót:

$$\chi_2 = \frac{Z_k \cdot Z_a}{Z_a + Z_k + Z_d} \cdot \phi_g \qquad \chi_1 = \frac{Z_d + Z_a}{Z_a} \cdot \frac{Z_k \cdot Z_a}{Z_a + Z_k + Z_d} \cdot \phi_g = \frac{Z_k(Z_a + Z_d)}{Z_a + Z_k + Z_d} \cdot \phi_g$$

Hurokáramok módszere:



- feszítőfát kell választani: olyan hurokmentes részgráf, mely minden csomópontot tartalmaz
- a feszítőfa ágai és a kötőágak hurkokat határoznak meg, melyek irányait az irányított kötőágak szabnak meg
- minden hurokra felírjuk a Kirchhoff huroktörvényt: miszerint az egy hurkon belül a feszültségek előjeles összege 0: $\sum u = 0$

- felírjuk a hurokegyenleteket (pozitív irány: az ág iránya egyezik a hurokéval):

$$\mathrm{I}: \chi_g + \chi_k = 0$$

$$\mathrm{II}: \chi_a - \chi_k + \chi_d = 0$$

- kifejezzük a feszültségeket a hurokáramok segítségével, az általános Ohm-törvény felírásával:

$$Z = \frac{\chi}{\phi}$$

$$\chi_d = Z_d \cdot \phi_d = Z_d \cdot \phi_{\mathrm{II}}$$

$$\chi_a = Z_a \cdot \phi_a = Z_a \cdot \phi_{\mathrm{II}}$$

$$\chi_k = Z_k \cdot \phi_k = Z_k \cdot (\phi_{\mathrm{I}} - \phi_{\mathrm{II}})$$

- visszaírva a hurokegyenletbe a 2-es ág esetén:

$$\mathrm{II}: Z_a \cdot \phi_{\mathrm{II}} - Z_k \cdot (\phi_{\mathrm{I}} - \phi_{\mathrm{II}}) + Z_d \cdot \phi_{\mathrm{II}} = Z_a \cdot \phi_{\mathrm{II}} - Z_k \cdot \phi_{\mathrm{I}} + Z_k \cdot \phi_{\mathrm{II}} + Z_d \cdot \phi_{\mathrm{II}} = 0$$

$$(Z_a + Z_k + Z_d) \cdot \phi_{\mathrm{II}} = Z_k \cdot \phi_{\mathrm{I}}$$

- az 1-es ágban a forrás előírja az abban az ágban folyó áramot, $\phi_{\mathrm{I}} = \phi_g$, így:

$$\phi_{\mathrm{II}} = \frac{Z_k}{Z_a + Z_k + Z_d} \cdot \phi_g$$

- mivel a hurokáramok ismertek, kiszámolhatók belőlük a feszültségek az általános Ohm-törvénnyel

$$\chi_2 = \chi_a = \frac{Z_a \cdot Z_k}{Z_a + Z_k + Z_d} \cdot \phi_g$$

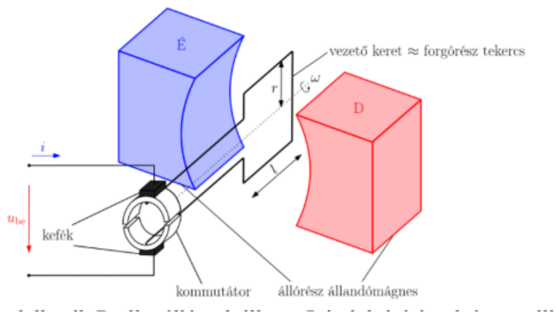
$$\chi_1 = \chi_k = Z_k \cdot \left(1 - \frac{Z_k}{Z_a + Z_k + Z_d}\right) \cdot \phi_g = \frac{Z_k(Z_a + Z_d)}{Z_a + Z_k + Z_d} \cdot \phi_g$$

- az éleken folyó áramok pedig kiszámolhatók a már ismert hurokáramok előjeles összegeiből

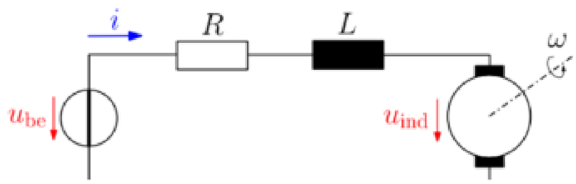
1.23 Egy adott, tanult példa (egyenáramú motor) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is!

Egyenáramú motor:

- villamos energiát mechanikus energiává képes alakítani, vagy fordítva: generátor
- leggyakrabban állómágnest tartalmaz, az ez által létrehozott mezőben: tekercselt forgórész



- a tekercs rendelkezik R ellenállással, illetve L induktivitással, így a villamos hálózattal a következő módon írható le a rendszer:



- a huroktörvényt alkalmazva felírható a rendszerre a következő egyenlet:

$$u_{\mathrm{be}}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u_{\mathrm{ind}}(t)$$

- a fizikai összefüggésekből levezethető, hogy:

$$u_{\mathrm{ind}} = k_e\omega(t), \quad \text{valamint} \quad M_{\mathrm{vill}}(t) = k_m i(t)$$

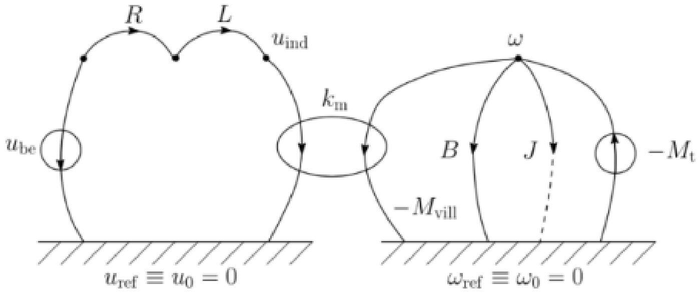
  - ahol k_e a motor sebességállandója, k_m pedig a nyomatékállandó
  - a két mennyiség értéke SI-ben azonos

- írjuk fel a motorra a dinamika alaptételét:

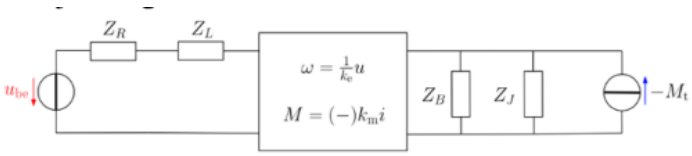
$$J\frac{d\omega(t)}{dt} = M_{\mathrm{vill}}(t) - B\omega(t) - M_t(t)$$

  - J: a motor tehetetlenségi nyomatéka
  - B: viszkózus csillapítási tényező
  - $M_t(t)$: terhelő nyomaték

DC motor struktúragráfja és impedanciahálózata:



- M_t nyomaték előjele negatív, mivel a terhelés csökkenti a fordulatszámot



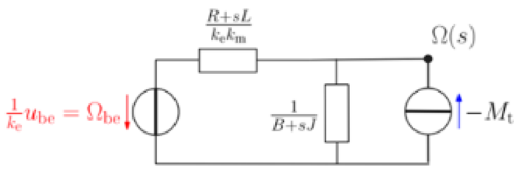
- az impedanciák értékei (Laplace tartományban):
  - $Z_R = R$
  - $Z_L = sL$
  - $Z_B = \frac{1}{B}$
  - $Z_J = \frac{1}{Js}$
- akkor lehet a kapcsolt kétpólus oldalait redukálni, ha:
  - veszteségmentes: $P_{\mathrm{be}} = P_{\mathrm{ki}}$, előjelkonvenció miatt $P_{\mathrm{be}} + P_{\mathrm{ki}} = 0$
  - lineáris, statikus rendszer – algebrai egyenletekkel leírható
  - a transzformátor egyenletei:

$$\begin{bmatrix} \chi 12 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi 34 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} u_{\mathrm{ind}} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_e & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ M_{\mathrm{vill}} \end{bmatrix}$$

  - impedanciák:

$$Z_{\mathrm{mech}} = \frac{\Omega(s)}{M(s)} = \frac{\frac{1}{k_e}U(s)}{k_m I(s)} = \frac{1}{k_e k_m}\frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{k_e k_m} Z_{\mathrm{vill}}$$

- a soros és párhuzamos impedanciákat össze tudjuk vonni:
  - $Z_{e,RL} = R + sL$
  - $Z_{e,BJ} = \frac{1}{B+Js}$
- redukálás:



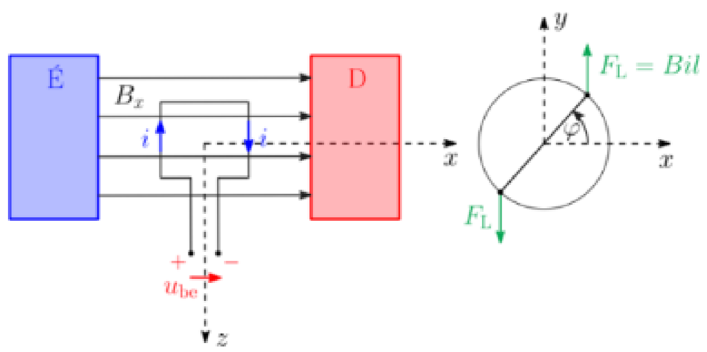
- innen már a tanult módszerek segítségével tudunk számolni

Fizikai összefüggések:

- **indukált feszültség:**
  - a mágneses fluxus változásából írhatjuk le - **Faraday törvény:**

$$u_{\mathrm{ind}}(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = B_x \frac{dA(t)}{dt} = B_x \frac{d(l \cdot 2r \sin\varphi(t))}{dt} = (B_x l \cdot 2r \cos\varphi(t))\omega(t)$$

  - az indukált feszültséget és a szögsebességet összekötő tagot elnevezzük sebességállandónak, jele: k_e
- **motor villamos nyomatéka:**
  - a Lorentz-erőből adódó forgatónyomatékkal számolható
  - arányos az áramerősséggel



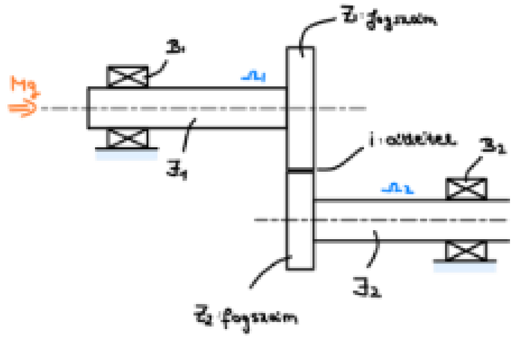
- a Lorentz-erő:
$$\underline{F} = i(\underline{l} \times \underline{B}) = i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -iB_x l \\ 0 \end{bmatrix}$$

- a Lorentz-erőből számolt nyomaték:
$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ rF\cos\varphi \end{bmatrix}$$

- $M_{\text{vill}} = 2M = (2B_x l \cdot r\cos\varphi(t))i$
- az áramot és a nyomatékot összekötő tagot elnevezzük nyomatékállandónak, jele: k_m

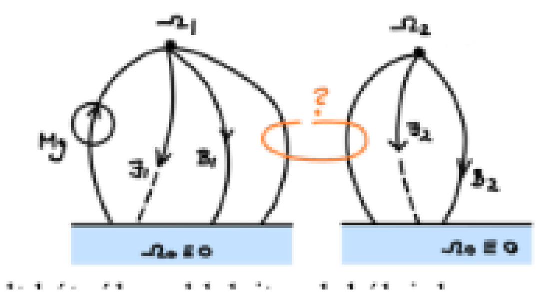
1.24 Egy adott, tanult példa (fogaskerékhajtómű, fogaskerék-fogasléc) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is!

Fogaskerék-hajtómű:

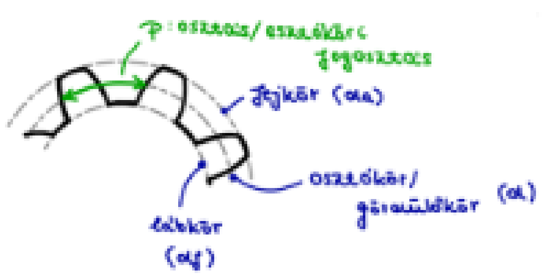


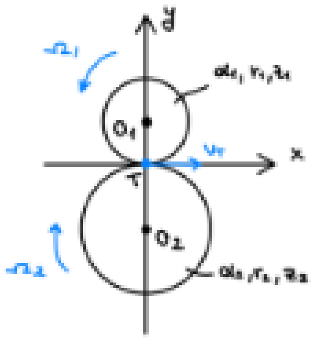
Ide már azt rakunk, amit akarunk. (pl. tengelykapcsoló stb.)

- **struktúragráf:**

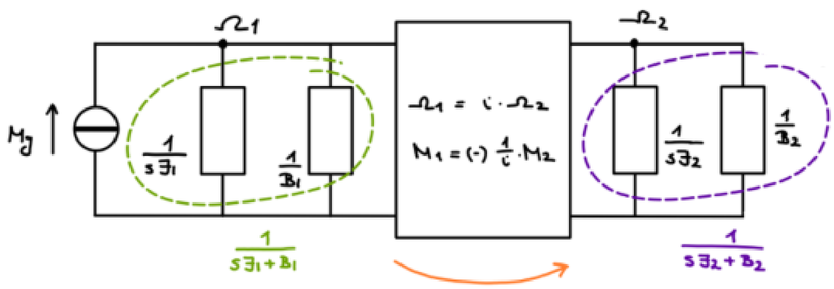


- akkor lehet a kapcsolt kétpólus oldalait redukálni, ha:
  - veszteségmentes: $P_{\text{be}} = P_{\text{ki}}$, előjelkonvenció miatt $P_{\text{be}} + P_{\text{ki}} = 0$
  - lineáris, statikus rendszer - algebrai egyenletekkel leírható
- **fizikai összefüggések a kapcsolóegyenlethez:**
  - $d\pi = pz \to d = \frac{p}{\pi} z$
  - a kerületi sebességek: $v_T = \Omega_1 r_1 = \Omega_2 r_2 \to \Omega_1 = \frac{r_2}{r_1}\Omega_2 = \frac{z_2}{z_1}\Omega_2 = i\Omega_2$
  - nyomaték: $M = fr \to \left.\begin{matrix} M_1 = f_T r_1 \\ M_2 = -f_T r_2 \end{matrix}\right\} M_1 = -\frac{r_1}{r_2} M_2 = -\frac{1}{i} M_2$





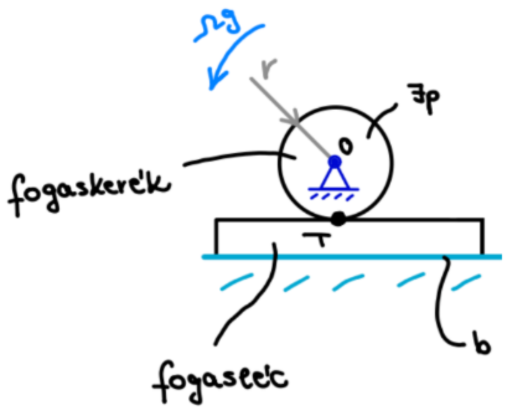
- ezek lesznek a kapcsolóegyenleteink, így az impedanciahálózat:



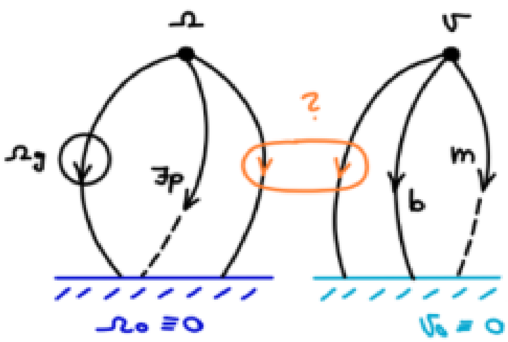
- **redukált impedanciák:**

$$Z_{\text{forg}1} = \frac{\Omega_1}{M_1} = \frac{i\Omega_2}{\frac{1}{i}M_2} = i^2\frac{\Omega_2}{M_2} = i^2 Z_{\text{forg}2}$$

Fogaskerék – fogasléc:



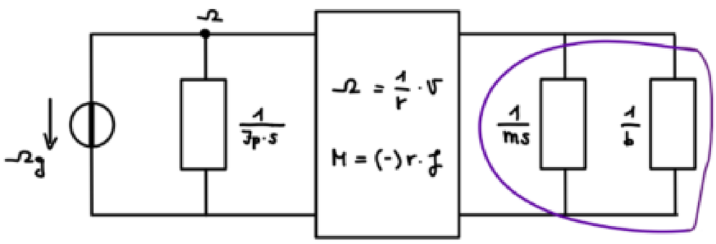
- **struktúragráf:**



- **fizikai összefüggés:**

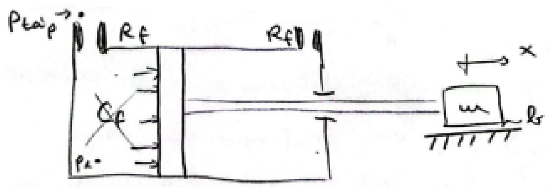
$$\Omega_g = \frac{1}{r}v_T, \quad M = -rf_T$$

- **így az impedanciahálózatunk:**

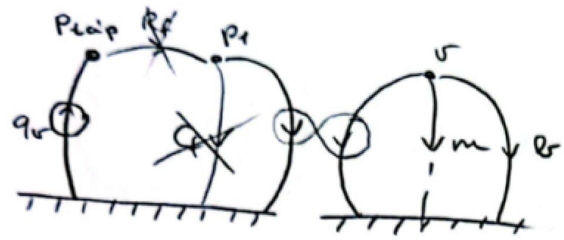


1.25 Egy adott, tanult példa (hidraulikus és pneumatikus munkahenger) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is!

Hidraulikus munkahenger:



- nincs C_f mert a tartály zárt, valamint nem összenyomható a közeg
- **struktúragráf:**



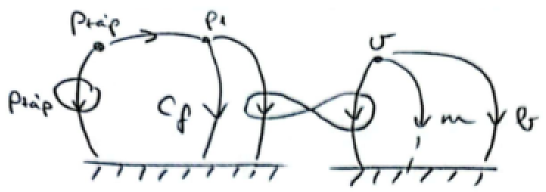
- **Megjegyzés:** átmenő változó generátorral sorosan kapcsolt impedancia elhanyagolható: R_f
- akkor lehet a kapcsolt kétpólus oldalait redukálni, ha:
  - veszteségmentes: $P_{\text{be}} = P_{\text{ki}}$, előjelkonvenció miatt $P_{\text{be}} + P_{\text{ki}} = 0$
  - lineáris, statikus rendszer – algebrai egyenletekkel leírható
- **fizikai összefüggések:** $p_{12} = (-)\frac{f}{A}, q_v = Av$
- **így a girátor:**

$$\begin{bmatrix} p_{12} \\ q_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-)\frac{1}{A} \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ f \end{bmatrix}$$

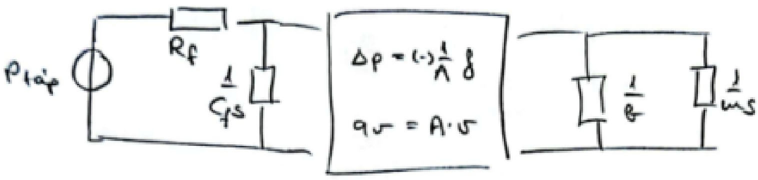
 Vári Gergő

Pneumatikus munkahenger:

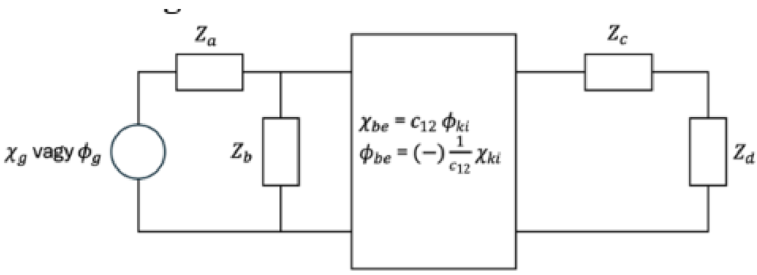
- mivel a gáz összenyomható: van C_f
- a kompresszor tápnyomást állít elő → keresztváltozó forrás
- **struktúragráf:**



- a fizikai összefüggések ugyanazok, mint a hidraulikus rendszernél
- **impedanciahálózat:**



Impedanciahálózat redukálása girátorral:



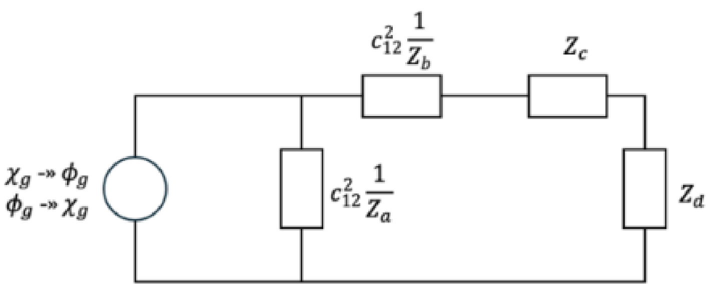
- **forrás redukálása:**

$$\left.\begin{array}{l}\chi_{\text{ki}} = c_{12}\phi_{\text{be}} \\ \phi_{\text{ki}} = \frac{1}{c_{12}}\chi_{\text{be}}\end{array}\right\} \text{a forrás típusa is megváltozik}$$

- **impedanciák redukálása:**

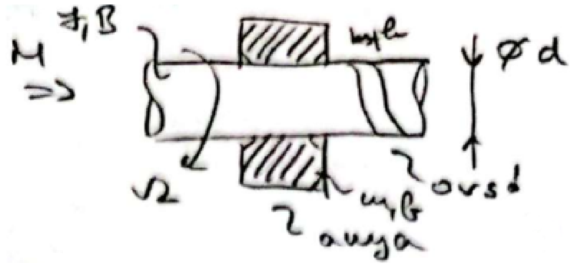
$$Z_{\text{ki}} = \frac{\chi_{\text{ki}}}{\phi_{\text{ki}}} = \frac{c_{12}\phi_{\text{be}}}{\frac{1}{c_{12}}\chi_{\text{be}}} = c_{12}^2\frac{1}{Z_{\text{be}}}$$

  - az impedanciák kapcsolása is megváltozik: soros ↔ párhuzamos



1.26 Egy adott, tanult példa (golyóorsó, vonóelem) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is!

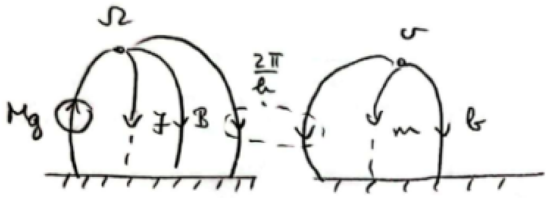
Golyóorsó:



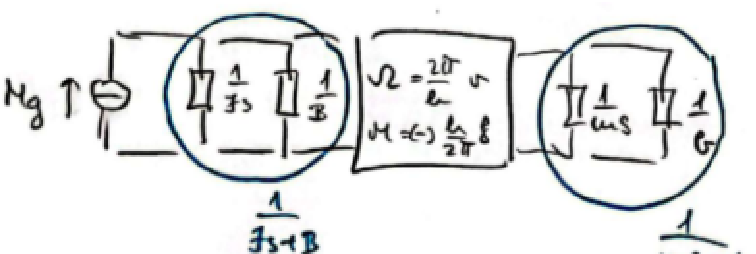
- **fizikai összefüggés:** amíg az orsó egy teljes fordulatot (2π radián) megtesz, addig az anya h-t halad rajta: $\varphi = \frac{2\pi}{h}x \to \frac{d}{dt} \to \omega = \frac{2\pi}{h}v$
- akkor lehet a kapcsolt kétpólus oldalait redukálni, ha:
  - veszteségmentes: $P_{\text{be}} = P_{\text{ki}}$, előjelkonvenció miatt $P_{\text{be}} + P_{\text{ki}} = 0$
  - lineáris, statikus rendszer – algebrai egyenletekkel leírható
- **így a transzformátor kapcsolóegyenletei:**

$$\omega = \frac{2\pi}{h}v, \quad M = (-)\frac{h}{2\pi}f$$

- **struktúragráf:**



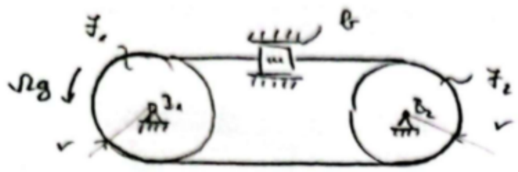
- **impedanciahálózat:**

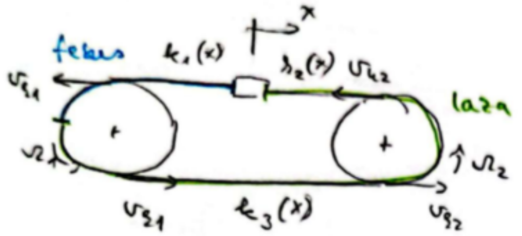


- **impedanciák redukálása:**

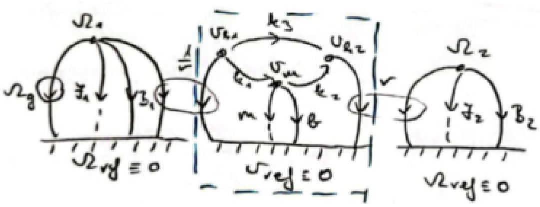
$$Z_{\text{forgó}} = \frac{\Omega}{M} = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \frac{v}{f} = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 Z_{\text{haladó}}$$

Vonóelem:

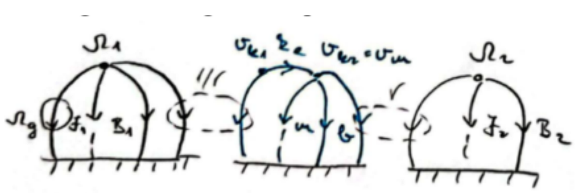




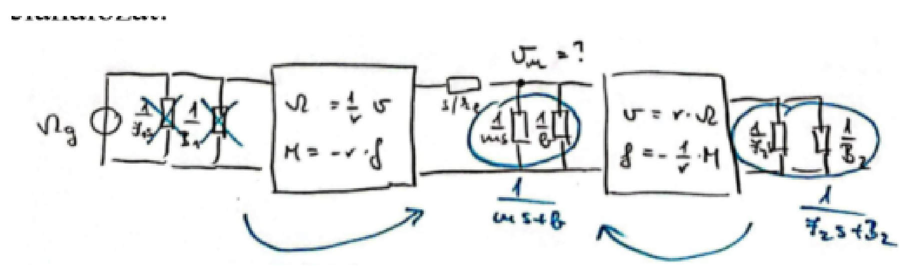
- **fizikai összefüggés:**
- de mivel az ágaknak van rugómerevségük, muszáj két transzformátorral dolgozni: $\Omega_1 = \frac{1}{r_1} v_1$, majd $v_2 = r_2 \Omega_2$
- a húzott ág rugómerevségét megkülönböztetjük a tehetetlentől, de ezek a struktúragráfon összevonhatók: $k_e = k_T + k_{\text{sz}}$ (párhuzamos rugók eredője)
- **struktúragráf:**



- v_m-et közelítsük v_{k2}-vel



- így lesz egy eredő rugómerevségünk: k_3 párhuzamosan van kötve soros k_1 és k_2-vel
- **impedanciahálózat:**



- **impedanciák redukálása:**

$$Z_{\text{haladó}} = \frac{r\Omega}{\frac{1}{r} M} = r^2 Z_{\text{forgó}}$$

2 Informatika

2.1 A számítástudomány alapjai. Turing gép. Eljárások, algoritmusok.

2.2 A számítógép architektúrák alapjai. Boole függvények. Logikai kapuk. Kombinációs és szekvenciális logikai hálózatok. Tárolók: S-R, J-K, D.

2.3 A számítógép felépítése. Memóriák. CPU részei. Utasítás ciklus. Szubrutinhívás. Interrupt. Közvetlen memória hozzáférés.

2.4 Adatszerkezetek. Tömbök, kapcsolt listák, gráf, fa, verem, sor.

2.5 Algoritmusok. Bejárás, keresés, rendezés. Algoritmusok bonyolultsága. Rekurzió.

2.6 Az adatbázisok alapjai. Adatmodellezés. Kapcsolatok típusai. Relációs adatbázismodell. Relációk jellemzői. A relációs algebra műveletei. SQL alapok, lekérdezések.

2.7 Az operációs rendszer céljai, feladatai. Folyamatok kommunikációja. Ütemezési algoritmusok az operációs rendszerben. Termelő-fogyasztó probléma. Postaláda kezelés. Szemaforok.

2.8 Holtpont az operációs rendszerben. Holtpont kezelése. Holtpont észlelése. Holtpont megelőzés. Bankár algoritmus.

2.9 Shannon hírközlési modellje. Forráskódolás, prefix kód.

2.10 Hálózati kommunikáció, OSI/ISO modell. Hálózati elsőbbségi elvek. Az interneten használt kommunikációs protokollok. IP cím, maszkolás, DNS rendszer.

2.11 Az objektum fogalma, objektum-orientált elvek. Az osztály fogalma. Struktúrák. Tagfüggvények. Konstruktor. Destruktor. Statikus tagok. Barátság, friend függvények.

2.12 Operátorok túlterhelése az objektum orientált programozásban. C++ IO, new, delete operátorok túlterhelésének szabályai. Osztály hierarchiák.

2.13 Öröklődés, egységbe zárás az objektum-orientált programozásban. Protected osztálytagok. Kompozíció. Aggregáció. Többszörös öröklődés.

2.14 Polimorfizmus az objektum-orientált programozásban. Virtuális alaposztályok. Abstract osztály. Általánosított osztályok.

2.15 Standard Template Library a C++-ban. Tárolók. Bejárók. Algoritmusok. Függvényobjektumok.

2.16 Fuzzy halmazok alapjai, műveletek fuzzy halmazokon.

2.17 Fuzzy következtető módszer, defuzzifikációs módszerek.

2.18 Aggregációs operátorok, általános hatványközép, OWA.

2.19 A .net rendszer részei: GC, CIL, assembly-k. Esemény vezérelt programok felépítése windows alatt.

2.20 Grafikus adattárolás (vektor, raszter), alkatrész modellezési módszerek.

2.21 3D->2D vetítési algoritmusok, a window-viewport transzformáció.

2.22 Görbe közelítési módszerek: természetes spline, Bezier, Catmull-Rom görbék.

2.23 Láthatóság, árnyalás, megvilágítás, színmodellek, anyagmodellek.

2.24 Képfeldolgozás, konvolúció, élkeresés, szegmentálás, alakfelismerés.

2.25 Neurális hálózatok alapjai, a Perceptron, a Perceptron tanítása.

2.26 Felügyelt és felügyelet nélküli tanulás. Mesterséges neurális hálózatok.

2.27 Evolúciós algoritmusok, evolúció stratégiák, genetikus programozás.

2.28 Az "M" nyelv (Matlab) jellegzetességei: változók, vektorok és mátrixok, feltételes végrehajtás, ciklusok, számtani sorozatok, függvény definíció, diagram rajzolás.

2.29 Ismertesse az alábbi, mechatronikában tanult elvek programmal történő megvalósítását: állapotgép, ARMA modell.