

# Mechatronika szigorlat

Vári Gergő

2026. február 18.

# Tartalomjegyzék

<b>1</b>	<b>Mechatronika</b>	<b>1</b>
1.1	Hasonlítsa össze a vezérlést és a szabályozást: a hatáslánc jellege, zavarjelekkel szembeni ellenállás, a mért mennyiség fajtája, reakció idő, illetve az irányításhoz felhasznált eszközök költsége szerint! .	1
1.2	Ismertesse az alábbi fogalmakat: linearitás, statikus/dinamikus rendszer, időinvariáns/idővariáns rendszer, folytonos/diszkrét idejű rendszer, koncentrált/elosztott paraméterű modell! . . . . .	2
1.3	Hasonlítsa össze a rendszereket a leírt állapotváltozók (dimenzió) száma (véges/végtelen), valamint annak diszkrét/folytonos jellege szerint! . . . . .	3
1.4	Írja fel a diszkrét idejű állapotter modell általános algebrai alakját, magyarázó ábrával szemléltesse! Ismertesse az összefüggésben szereplő együtthatók szerepét! . . . . .	4
1.5	Írja fel a diszkrét rendszerek be-kimeneti modellezését reprezentáló ARMA-alakját! . . . . .	5
1.6	Ismertess diszkrét rendszerek z eltolási operátorral való képzését! Írja fel az ARMA-alakból az impulzusátviteli függvény képzését! . . . . .	6
1.7	Ismertesse a diszkrét idejű konvolúció szerepét, összefüggését! . . . . .	7
1.8	Adott két diszkrét idejű átviteli függvény. Vezesse le az eredő átviteli függvény összefüggését, ha a két átviteli függvény sorba, párhuzamosan, illetve visszacsatolva (pozitív és negatív) kapcsolódik egymáshoz. Mutassa be, a hatásvázlat átalakításának szabályait (elágazási pont áthelyezése tag mögé és tag elé, illetve összegzési pont áthelyezése tag mögé és tag elé)! . . . . .	9
1.9	A lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek diszkrét idejű állapotter modell felhasználásával, előre tartó Euler módszer segítségével vezesse le a folytonos idejű lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek állapotter modellt! . . . . .	12
1.10	A z transzformáció összefüggését felhasználva ismertesse a Laplace transzformáció definícióját! . .	13
1.11	Igazolja a Dirac impulzus és az egységugrás függvény Laplace transzformáltjait! . . . . .	14
1.12	Mutassa be, hogy az átviteli mátrix hogyan származtatható a lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek folytonos idejű állapotter modelltől! . . . . .	15
1.13	Ismertesse az egytárolós arányos tag súly és átmeneti függvényeit! Válaszában térjen ki az időállandó fogalmára! . . . . .	16
1.14	Ismertesse az kéttárolós arányos tag súly és átmeneti függvényeit! Válaszában térjen ki a minőségi jellemzőkre! . . . . .	18
1.15	Vezesse le a lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek folytonos idejű állapotter modelljének megoldását Laplace transzformáció segítségével! . . . . .	20
1.16	Mutassa be a lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek esetén folytonos idejű állapotter modell rendszermátrixának sajátértékei és a rendszer átviteli függvényének pólusai közötti összefüggést! . . . .	21
1.17	Ismertesse a frekvencia-átviteli függvény fogalmát, illetve annak megjelenítési módjait (Bode diagram)! .	22
1.18	Vezesse le a Fourier sorfejtésének alakja komplex alakját! . . . . .	25
1.19	A Fourier sorfejtés miként általánosítható nem periodikus (lecsengő) függvényekre? Ismertesse a Fourier transzformáció származtatását! . . . . .	26
1.20	Ismertesse a következő fogalmakat (adja meg a definícióját és rövid értelmezését): extenzív és intenzív fizikai mennyiségek, átmenő és keresztváltozók, energiatárolók (átmenő és keresztváltozóval) és disszipatív elemek (kétpólusok), csatolt kétpólus elem (transzformátor és girátor)! . . . . .	27
1.21	Adja meg az villamos rendszer (kapcsolt elektromechanikai), haladó és forgómozgású mechanikai rendszerek és az áramlástechnikai (pneumatikus és hidraulikai) rendszerek koncentrált paraméterű leírása esetén az átmenő és keresztváltozó típusát, valamint az energiatárolókat (amennyiben léteznek) és disszipatív elemeket. . . . .	29
1.22	Mutassa be, milyen módszerekkel határozható meg a kereszt illetve átmenő változók értékei különféle források figyelembevételére esetén! . . . . .	32
1.23	Egy adott, tanult példa (egyenáramú motor) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is! . . . . .	36
1.24	Egy adott, tanult példa (fogaskerék-hajtómű, fogaskerék-fogasléc) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is! . . . . .	39
1.25	Egy adott, tanult példa (hidraulikus és pneumatikus munkahenger) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is! . . . . .	41

1.26	Egy adott, tanult példa (golyósorsó és vonóelem) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is! . . . . .	43
------	---	----

## 2 Informatika 45

2.1	A számítástudomány alapjai. Turing gép. Eljárások, algoritmusok. . . . .	45
2.2	A számítógép architektúrák alapjai. Boole függvények. Logikai kapuk. Kombinációs és szekvenciális logikai hálózatok. Tárolók: S-R, J-K, D. . . . .	46
2.3	A számítógép felépítése. Memóriák. CPU részei. Utasítás ciklus. Szubrutinhívás. Interrupt. Közvetlen memória hozzáférés. . . . .	50
2.4	Adatszerkezetek. Tömbök, kapcsolt listák, gráf, fa, verem, sor. . . . .	54
2.5	Algoritmusok. Bejárás, keresés, rendezés. Algoritmusok bonyolultsága. Rekurzió. . . . .	58
2.6	Az adatbázisok alapjai. Adatmodellezés. Kapcsolatok típusai. Relációs adatbázismodell. Relációk jellemzői. A relációs algebra műveletei. SQL alapok, lekérdezések. . . . .	59
2.7	Az operációs rendszer céljai, feladatai. Folyamatok kommunikációja. Ütemezési algoritmusok az operációs rendszerben. Termelő-fogyasztó probléma. Postaláda kezelés. Szemaforok. . . . .	60
2.8	Holtpont az operációs rendszerben. Holtpont kezelése. Holtpont észlelése. Holtpont megelőzés. Bankár algoritmus. . . . .	61
2.9	Shannon hírközlési modellje. Forráskódolás, prefix kód. . . . .	62
2.10	Hálózati kommunikáció, OSI/ISO modell. Hálózati elsőbbségi elvek. Az interneten használt kommunikációs protokollok. IP cím, maszkolás, DNS rendszer. . . . .	63
2.11	Az objektum fogalma, objektum-orientált elvek. Az osztály fogalma. Struktúrák. Tagfüggvények. Konstruktor. Destruktor. Statikus tagok. Barátság, friend függvények. . . . .	64
2.12	Operátorok túlterhelése az objektum orientált programozásban. C++ IO, new, delete operátorok túlterhelésének szabályai. Osztály hierarchiák. . . . .	65
2.13	Öröklődés, egységbe záras az objektum-orientált programozásban. Protected osztálytagok. Kompozíció. Aggregáció. Többszörös öröklődés. . . . .	66
2.14	Polimorfizmus az objektum-orientált programozásban. Virtuális alaposztályok. Abstract osztály. Általánosított osztályok. . . . .	67
2.15	Standard Template Library a C++-ban. Tárolók. Bejárók. Algoritmusok. Függvényobjektumok. . . . .	68
2.16	Fuzzy halmazok alapjai, műveletek fuzzy halmazokon. . . . .	69
2.17	Fuzzy következtető módszer, defuzzifikációs módszerek. . . . .	70
2.18	Aggregációs operátorok, általános hatványközep, OWA. . . . .	71
2.19	A .net rendszer részei: GC, CIL, assembly-k. Esemény vezérelt programok felépítése windows alatt. . . . .	72
2.20	Grafikus adattárolás (vektor, raszter), alkatrész modellezési módszerek. . . . .	73
2.21	3D->2D vetítési algoritmusok, a window-viewport transzformáció. . . . .	74
2.22	Görbe közelítési módszerek: természetes spline, Bezier, Catmull-Rohm görbék. . . . .	75
2.23	Láthatóság, árnyalás, megvilágítás, színmodellek, anyagmodellek. . . . .	76
2.24	Képfeldolgozás, konvolúció, élkeresés, szegmentálás, alakfelismerés. . . . .	77
2.25	Neurális hálózatok alapjai, a Perceptron, a Perceptron tanítása. . . . .	78
2.26	Felügyelt és felügyelet nélküli tanulás. Mesterséges neurális hálózatok. . . . .	79
2.27	Evolúciós algoritmusok, evolúció stratégiák, genetikus programozás. . . . .	80
2.28	Az "M" nyelv (Matlab) jellegzetességei: változók, vektorok és mátrixok, feltételes végrehajtás, ciklusok, számtani sorozatok, függvény definíció, diagram rajzolás. . . . .	81
2.29	Ismertesse az alábbi, mechatronikában tanult elvek programmal történő megvalósítását: állapotgép, ARMA modell. . . . .	82

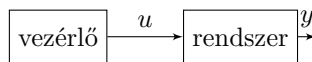
# 1 Mechatronika

## 1.1 Hasonlítsa össze a vezérlést és a szabályozást: a hatáslánc jellege, zavarjelekkel szembeni ellenállás, a mért mennyiség fajtája, reakció idő, illetve az irányításhoz felhasznált eszközök költsége szerint!

### Vezérlés:

- nyílt hatáslánc: nincs visszacsatolás
- a rendszer belső jellemzőit/bemeneteit mérjük, valamint részben függ a külső feltételektől is, de a kimenetet (irányítani kívánt jellemzőt) nem mérjük
- logikai függvényt hozunk létre
- gyors reakció
- csak determinisztikus zavarok kezelésére képes
- vagy egyszerű (olcsó), de így kevés dolgot veszünk figyelembe
- vagy komplex (drága) és sok mindent figyelembe veszünk

### vezérlés hatáslánca:



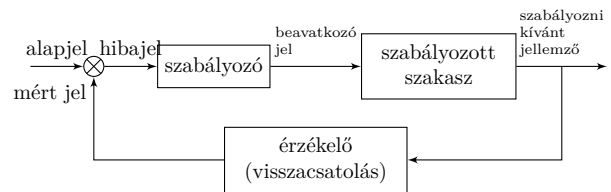
### vezérlés fajtái:

- idővezérlés – pl. lámpa időzített fel-, lekapcsolása
- lefutó vezérlés
  - sorrendi – pl. csomagolás
  - feltétel

### Szabályozás:

- zárt hatáslánc: van visszacsatolás
- az irányítani kívánt jellemző is tudja befolyásolni a folyamatot
- instabil rendszert is képes kezelni (stabilizálni)
- lassabb reakció, pontatlanabb
- képes kiküszöbölni a zavarjeleket
- alacsony műszaki komplexitás:
- mérés
- kivonás
- jelerősítés

### szabályozás hatáslánca:



### szabályozás fajtái:

- értéktartó – pl. hőmérséklet
- követő – pl. pálya
- kaszkád – több hurkú szabályozás
- állapotszabályozás – állapotter modell alapján szabályoz – többváltozós rendszerek – pl. inverz inga egyensúlyban tartása

## 1.2 Ismertesse az alábbi fogalmakat: linearitás, statikus/dinamikus rendszer, időinvariáns/idővariáns rendszer, folytonos/diszkrét idejű rendszer, koncentrált/elosztott paraméterű modell!

### Linearitás:

- érvényes a szuperpozíció elve
- matematikai szemmel 2 feltétel:
  - számmal szorzás
  - hatások összege
- ha a rendszer  $u_i$  gerjesztésre  $y_i$  választ ad és  $u_j$  gerjesztésre  $y_j$  választ ad, akkor  $u_i$  és  $u_j$  lineáris kombinációjára  $y_i$  és  $y_j$  lineáris kombinációját adja

$$u = \lambda_i u_i + \lambda_j u_j \rightarrow y = \lambda_i y_i + \lambda_j y_j$$

- nem linearitás feloldása: munkaponti linearizálás

### Statisztikus/dinamikus rendszer:

- statikus:
  - bármely pillanatban a bemenő jelek pillanatnyi értékei meghatározzák az adott pillanatban kimenő jelek értékeit – pl. lámpa fel-le kapcsolva
- dinamikus:
  - valós fizikai rendszerek működésének időbeli lefolyását is leírják, jellemzően idő szerinti differenciálegyenletek segítségével – pl. rezgéstani példák
  - memória jelleggel rendelkeznek

### Időinvariáns/idővariáns rendszer:

- ha a rendszer  $u(t)$  bemenetre  $y(t)$  kimenetet ad és  $u(t - \tau)$  bemenetre  $y(t - \tau)$  kimenetet ad, akkor a rendszer időinvariáns – pl. fűtőrendszer: ahogy melegszik, változik a sűrűség
- „ma, holnap és két év múlva is ugyanúgy viselkedik”

### Folytonos/diszkrét idejű rendszer:

- folytonos idejű:
  - $u(t)$  és  $y(t)$  egy vizsgált  $[T_a, T_b] \subseteq \mathbb{R}$  időintervallumban minden időpontban értelmezve van:  $t \in [T_a, T_b] \subseteq \mathbb{R}$
- diszkrét idejű:
  - $u(t)$  és  $y(t)$  csak diszkrét  $t = T_k, k \in \mathbb{N}, t \in \{\dots, T_{-k}, \dots, T_{-1}, T_0, T_1, \dots, T_k, \dots\}$  időpontok sorozatában van értelmezve, ahol:  $T_{k-1} < T_k < T_{k+1}$
  - általában  $T_k = k \cdot T_s$ , ahol  $T_s$  a mintavételezési idő
  - $u[k] := u(T_k)$
  - $y[k] := y(T_k)$

### Koncentrált/elosztott paraméterű modell:

- koncentrált paraméterű leírás:
  - a vizsgált valós fizikai rendszer összefüggéseit azok jellegétől függően egy adott térrészben összegezzük, vagy kiábrázoljuk, és egyetlen egyenlettel helyettesítjük

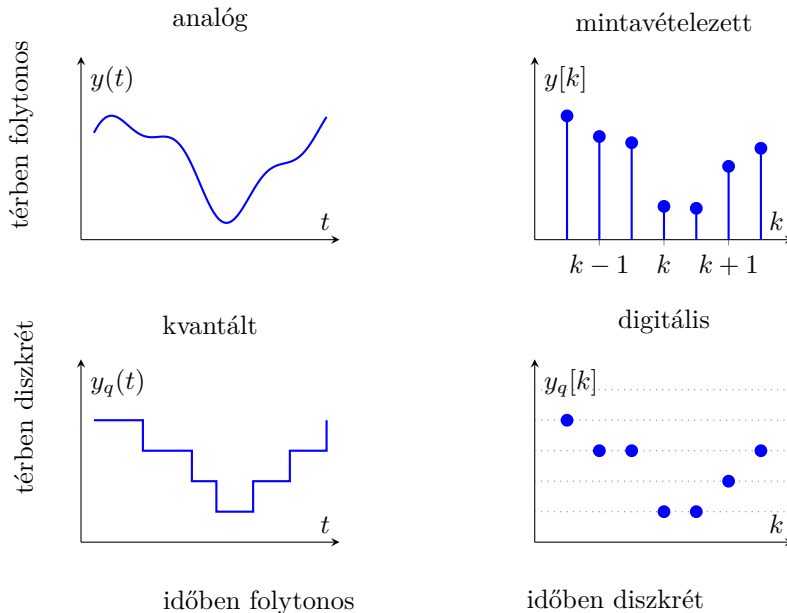
### 1.3 Hasonlítsa össze a rendszereket a leírt állapotváltozók (dimenzió) száma (véges/végtelen), valamint annak diszkrét/folytonos jellege szerint!

#### A rendszer dimenziója:

- a rendszer állapotváltozóinak száma
  - állapotváltozó: az állapot egyértelmű leírására szolgálnak
  - állapot: a múlt összesített hatása
- végtelen: végtelen számú állapotváltozóval írható le a rendszer
- véges: véges számú állapotváltozóval írható le a rendszer
  - $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$

#### Diszkrét/folytonos jelleg:

- diszkrét állapotú:
  - ha egy véges dimenziójú rendszer állapotváltozói véges számú értéket vehetnek fel, akkor a rendszer diszkrét állapotú
  - pl. digitális technika: 0 vagy 1
  - állapotautomaták:
    - \* az állapotbeli változások egy-egy esemény hatására ugrásszerűen mennek végbe
    - \* tipikusan szekvenciális hálózatok
- folytonos állapotú:
  - az állapotváltozók folytonos értéket vesznek fel
  - pl. sebesség



#### Diszkrét idejű folytonos értékű rendszer:

- differencia egyenletekkel írható le  $\underline{x}[k+1] = \underline{\Phi}\underline{x}[k] + \underline{\Gamma}u[k]$
- az állapotváltozók tetszőleges értéket vehetnek fel, de a diszkrét idő miatt ugrásszerűen mennek végbe

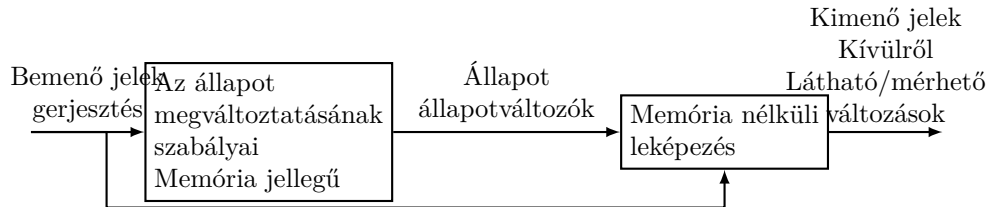
#### Folytonos idejű folytonos értékű rendszer:

- differenciál egyenletekkel írható le  $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}u(t)$
- állapotváltozók tetszőleges értéket vehetnek fel, folytonos idő miatt folyamatosan változnak

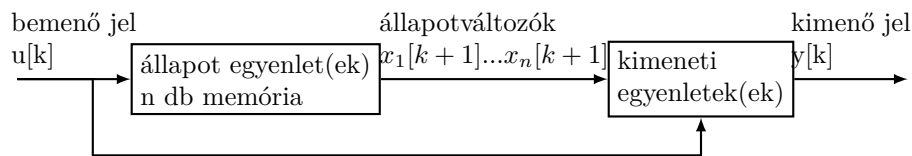
## 1.4 Írja fel a diszkrét idejű állapottér modell általános algebrai alakját, magyarázó ábrával szemléltesse! Ismertesse az összefüggésben szereplő együttthatók szerepét!

### Állapottér modell:

- egyfajta matematikai modell
- állapotváltozók segítségével
- általános állapottér modell:



- lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek diszkrét idejű állapottér modellje:

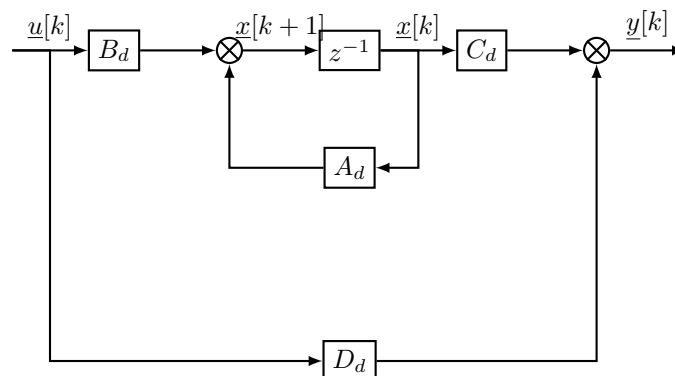


- MIMO (Multiple Input Multiple Output) diszkrét idejű állapotegyenlete:

$$\underline{x}[k+1] = \underline{A_d}\underline{x}[k] + \underline{B_d}u[k]$$

$$\underline{y}[k] = \underline{C_d}\underline{x}[k] + \underline{D_d}u[k]$$

- $\underline{A_d}$ : állapotmátrix – a jelenlegi állapot hatása a következő állapotra
- $\underline{B_d}$ : bemeneti mátrix – a jelenlegi bemenet hatása a következő állapotra
- $\underline{C_d}$ : kimeneti mátrix – az állapot hatása a kimenetre
- $\underline{D_d}$ : segédmátrix – a bemenet hatása közvetlenül a kimenetre
- a mátrixok dimenziója függ a bemenetek és kimenetek számától, pl. egy SISO (Single Input Single Output) rendszernél:  $\underline{B_d} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\underline{C_d} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $\underline{D_d} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$
- hatásvázlat:



## 1.5 Írja fel a diszkrét rendszerek be-kimeneti modellezését reprezentáló ARMA-alakját!

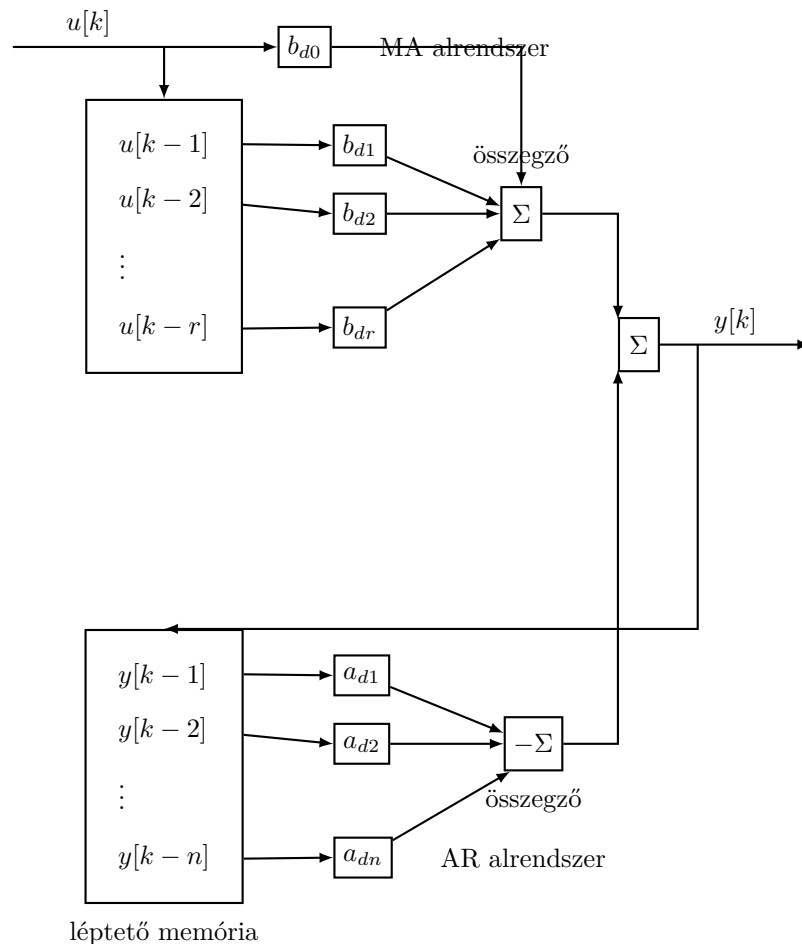
### ARMA-alak:

- diszkrét idejű rendszer:
  - $u(t)$  és  $y(t)$  csak diszkrét  $t = T_k, k \in \mathbb{N}, t \in \{\dots, T_{-k}, \dots, T_{-1}, T_0, T_1, \dots, T_k, \dots\}$  időpontok sorozatában van értelmezve, ahol:  $T_{k-1} < T_k < T_{k+1}$
  - általában  $T_k = k \cdot T_s$ , ahol  $T_s$  a mintavételezési idő
  - $u[k] := u[T_k]$
  - $y[k] := y[T_k]$
- AutoRegresszív Mozgó Átlag
- AR – az  $y[k]$  kimenő jel korábbi értékei hogyan hatnak vissza a kimenő jel aktuális értékeire
- MA – az  $u[k]$  bemenő jel korábbi értékei (mozgó átlaga) milyen hatással bírnak az aktuális kimenetre
- mi a bemenő és kimenő jel összefüggésének felírására használjuk
- előnyös, mert közvetlenül látszik a memória jelleg, mely léptető (shift) memóriával valósítható meg
- általános alak:

$$\sum_{i=0}^n a_{di} y[k-i] = \sum_{i=0}^r b_{di} u[k-i]$$

- ezt átrendezve a kimenet új értékének számítása:

$$y[k] = \sum_{i=0}^r b_{di} u[k-i] - \sum_{i=1}^n a_{di} y[k-i], \text{ ahol } a_{d0} = 1: \text{ az } y[k] \text{ együtthatója}$$

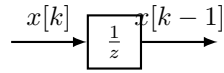




## 1.6 Ismertess diszkrét rendszerek z eltolási operátorral való képzését! Írja fel az ARMA-alakból az impulzusátviteli függvény képzését!

### Eltolási operátor - z:

- egy adatot a jövőbe tol, ezt nem lehet mindig megvalósítani (csak egy múltbeli adatot tudunk a saját jövőjébe tolni), de az inverzének a megvalósítása könnyű
- az eltolási operátor inverze egy időkéseleltető elem:



- az eltolási operátor alkalmazása:

$$\begin{aligned}x[k+i] &= z^i x[k] \\ z^{-i} x[k+i] &= x[k] \\ z^{-i} x[k] &= x[k-i]\end{aligned}$$

- az ARMA-modell algebrai alakja:

$$y[k] = \sum_{i=0}^r b_{di} u[k-i] - \sum_{i=1}^n a_{di} y[k-i]$$

- ARMA-modell az eltolási operátorral:

$$y[k] = \sum_{i=0}^r z^{-i} b_{di} u[k] - \sum_{i=1}^n z^{-i} a_{di} y[k]$$

- átrendezve:

$$\sum_{i=0}^n z^{-i} a_{di} y[k] = \sum_{i=0}^r z^{-i} b_{di} u[k] \quad a_{d0} = 1$$

- be- és kimeneti összefüggés eltolási operátorral, ahol  $w(z)$  az impulzus átviteli függvény:

$$y(z) = \frac{\sum_{i=0}^r z^{-i} b_{di}}{\sum_{i=0}^n z^{-i} a_{di}} u(z) = w(z) u(z) \quad a_{d0} = 1$$

## 1.7 Ismertesse a diszkrét idejű konvolúció szerepét, összefüggését!

### Konvolúció:

- bevezetünk ún. „egységnyi” jeleket – vizsgálójeleket
- ebből tudunk következtetni a rendszer tetszőleges bemenetre adott válaszára
- összetett bemenő jelek válaszának meghatározása komponensekre bontással:
  - a bemenőjelet vizsgálójelekből álló komponensekre bontjuk
  - meghatározzuk az elemi komponensek elemi hatását
  - az időinvariancia és a szuperpozíció elvének kihasználásával az elemi hatásokat összegezzük
- diszkrét idejű egységimpulzus:

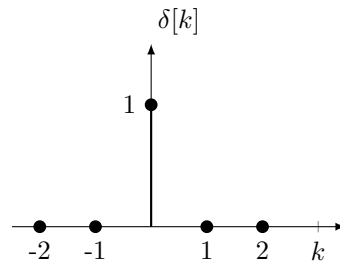
$$\delta[k] = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \neq 0 \\ 1 & \text{ha } k = 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

- eltolás esetén:

$$\delta[k - K] = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \neq K \\ 1 & \text{ha } k = K \end{cases} \quad k, K \in \mathbb{Z}$$

- szorzás esetén

$$Y_0 \delta[k] = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \neq 0 \\ Y_0 & \text{ha } k = 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad Y_0 \in \mathbb{R}$$



- diszkrét idejű egységugrás:

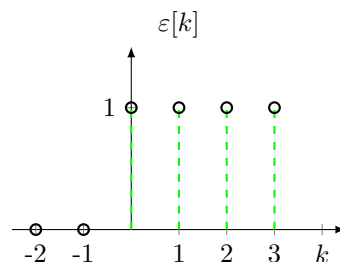
$$\varepsilon[k] = \begin{cases} 0 & \text{ha } k < 0 \\ 1 & \text{ha } k \geq 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

- eltolás esetén:

$$\varepsilon[k - K] = \begin{cases} 0 & \text{ha } k < K \\ 1 & \text{ha } k \geq K \end{cases}$$

- szorzás esetén:

$$Y_0 \varepsilon[k] = \begin{cases} 0 & \text{ha } k < 0 \\ Y_0 & \text{ha } k \geq 0 \end{cases} \quad k, K \in \mathbb{Z} \quad Y_0 \in \mathbb{R}$$



- amikor egy diszkrét idejű rendszernek a bemenő jele egy diszkrét idejű egységimpulzus, akkor a kimenő jelet súlyfüggvénynek (vagy impulzusválasznak) nevezzük
  - jele:  $w[k]$

- vizsgálójelek alapösszefüggései:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[i] = 1$$

- belátható, hogy egy diszkrét idejű függvény konvolúciója az egységimpulzussal egy adott  $K$  érték mellett a függvény  $K$  helyen felvett értékét adja vissza

$$y[K] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y[i]\delta[K-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y[K-i]\delta[i] \quad K \in \mathbb{Z}$$

- az egységugrás értéke a  $k$  helyen kiszámolható az egységimpulzus függvényből

$$\varepsilon[k] = \sum_{i=-\infty}^k \delta[i] \quad k \in \mathbb{Z}$$

- az egységugrás két szomszédos helyen felvett értéknek különbsége megegyezik az egységimpulzus függvény megfelelő helyen felvett értékével

$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1] \quad k \in \mathbb{Z}$$

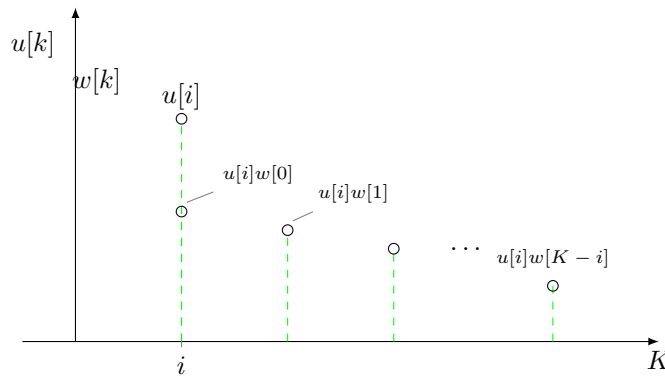
- egy diszkrét idejű rendszer kimenete  $k$ -adik időpillanatban a súlyfüggvénnyel és a bemenettel felírva:

$$y[k] = \sum_{i=0}^k w[k-i]u[i] \quad k \geq 0$$

- mivel  $w[k-i]u[i]$  az  $i$ -edik időpillanat bemenetének a kimenetre való hatása

$$u[k=K] = u[k=K]\delta[(k-K)=0]$$

$$y[k] = \sum_{i=0}^k w[k-i]u[i] \quad k > 0$$

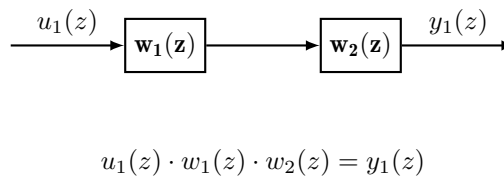


**1.8 Adott két diszkrét idejű átviteli függvény. Vezesse le az eredő átviteli függvény összefüggését, ha a két átviteli függvény sorba, párhuzamosan, illetve visszacsatolva (pozitív és negatív) kapcsolódik egymáshoz. Mutassa be, a hatásvázlat átalakításának szabályait (elágazási pont áthelyezése tag mögé és tag elé, illetve összegzési pont áthelyezése tag mögé és tag elé)!**

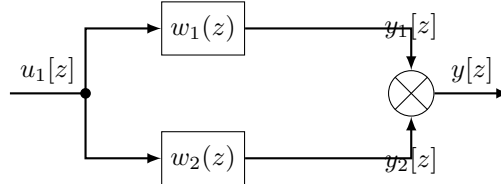
**Hatásvázlat:**

- rendszer működését lehet ábrázolni
- bal oldalt a bemenet(ek), jobb oldalt kimenet(ek)
- grafikus úton kapunk átviteli függvényt
- nyíl irányával jelezzük a jel haladási irányát
- műveletek:
  - elágazás
  - összegzés (negatív esetén az érintett negyed besatírozása)
- az impulzus átviteli függvényeket blokkban ábrázoljuk

**Sorba kapcsolás:**



**Párhuzamosan kapcsolás:**

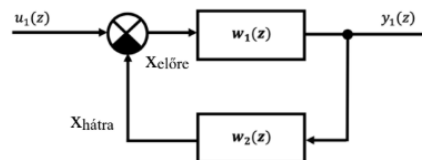


$$y(z) = y_1(z) + y_2(z) = w_1(z)u_1(z) + w_2(z)u_1(z)$$

$$y(z)(w_1(z) + w_2(z))u_1(z) = w_e(z)u_1(z)$$

**Visszacsatolás, elágazási pontok, összegzési pontok:**

- negatív visszacsatolást szoktunk leggyakrabban alkalmazni



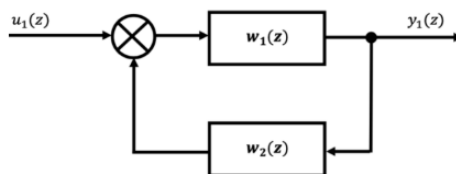
$$x_{\text{előre}}(z) = u_1(z) - x_{\text{hátra}}(z) = u_1(z) - w_2(z)y_1(z)$$

$$y_1(z) = x_{\text{előre}}(z)w_1(z) \rightarrow x_{\text{előre}}(z) = \frac{y_1(z)}{w_1(z)}$$

$$y_1(z) = u_1(z)w_1(z) - w_2(z)w_1(z)y_1(z)$$

$$\frac{y_1(z)}{u_1(z)} = \frac{w_1(z)}{1 + w_1(z)w_2(z)}$$

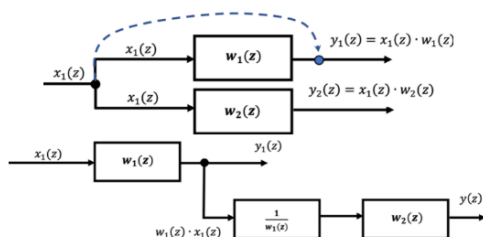
- pozitív visszacsatolás:



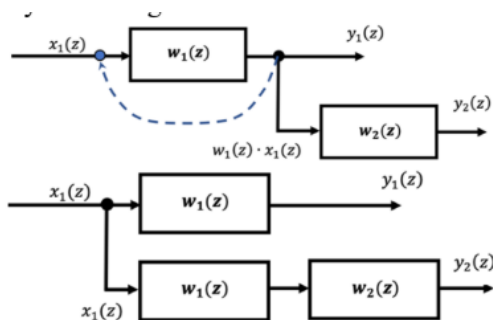
- a negatív visszacsatoláshoz hasonlóan levezethető, az eredmény:

$$\frac{y_1(z)}{u_1(z)} = \frac{w_1(z)}{1 - w_1(z)w_2(z)}$$

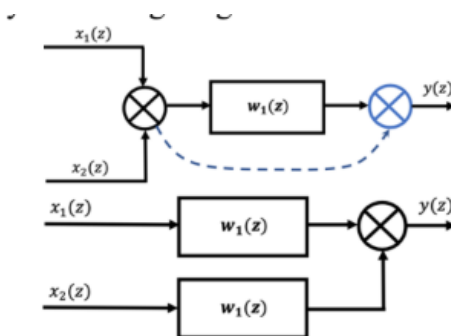
- elágazási pont áthelyezése a tag mögé:



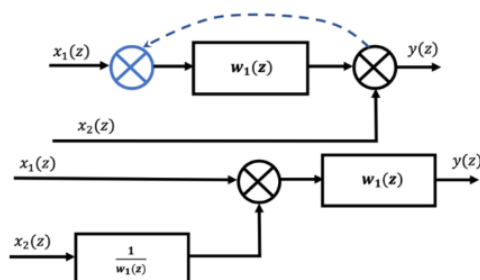
- elágazási pont áthelyezése a tag elé:



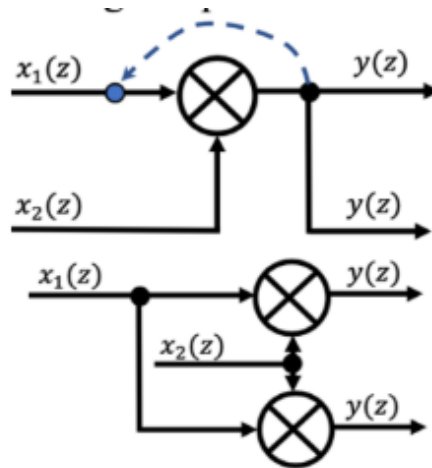
- összegzési pont áthelyezése a tag mögé:



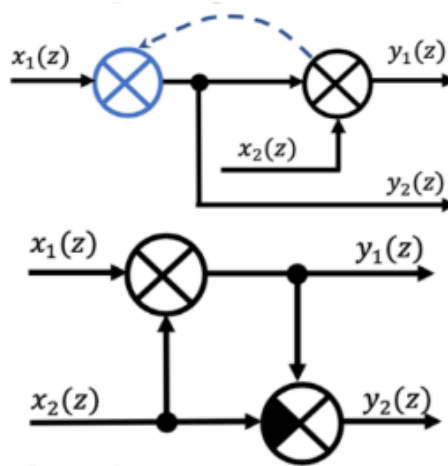
- összegzési pont áthelyezése a tag elé:



- elágazási pont áthelyezése összegzési pont elé:



- összegzési pont áthelyezése elágazási pont elé:



## 1.9 A lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek diszkrét idejű állapotter modell felhasználásával, előre tartó Euler módszer segítségével vezesse le a folytonos idejű lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek állapotter modellt!

Lineáris időinvariáns rendszerek diszkrét idejű állapotter modellje:

$$(1.) \quad \underline{x}[k+1] = \underline{A_d} \underline{x}[k] + \underline{B_d} \underline{u}[k]$$

$$(2.) \quad \underline{y}[k] = \underline{C_d} \underline{x}[k] + \underline{D_d} \underline{u}[k]$$

- az (1.)-es egyenletben vonjunk ki mindkét oldalból  $\underline{x}[k]$ -t (az előretartó Euler miatt):

$$\underline{x}[k+1] - \underline{x}[k] = \underline{A_d} \underline{x}[k] + \underline{B_d} \underline{u}[k] - \underline{x}[k]$$

- összevonás után osszunk le  $\Delta t$ -vel:

$$\frac{\underline{x}[k+1] - \underline{x}[k]}{\Delta t} = \frac{(\underline{A_d} - \underline{I}) \underline{x}[k] + \underline{B_d} \underline{u}[k]}{\Delta t}$$

- a folytonos idejű  $t_k$  diszkrét időben a  $k$ -adik időpillanatot jelenti, így tudunk helyettesíteni:

$$\frac{\underline{x}(t_{k+1}) - \underline{x}(t_k)}{\Delta t} = \frac{(\underline{A_d} - \underline{I}) \underline{x}(t_k) + \underline{B_d} \underline{u}(t_k)}{\Delta t}$$

- szétbontva:

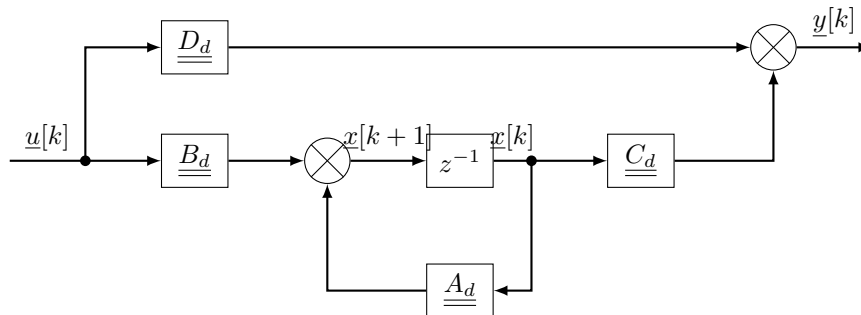
$$\frac{\underline{x}(t_{k+1}) - \underline{x}(t_k)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (\underline{A_d} - \underline{I}) \underline{x}(t_k) + \frac{1}{\Delta t} \underline{B_d} \underline{u}(t_k)$$

- vegyük a kifejezés határértékét, ha  $\Delta t \rightarrow 0$ :

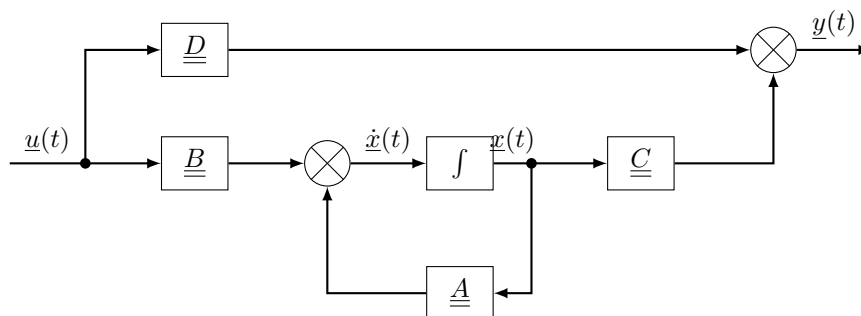
$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t)$$

- diszkrét idejű állapotter modell hatásvázlata:



- folytonos idejű állapotter modell hatásvázlata:

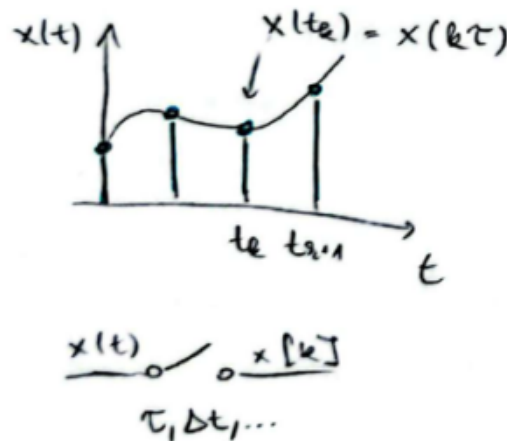


- így a mátrixok:

$$\underline{A} = \frac{1}{\Delta t} (\underline{A_d} - \underline{I}), \quad \underline{B} = \frac{1}{\Delta t} \underline{B_d}, \quad \underline{C} = \underline{C_d}, \quad \underline{D} = \underline{D_d}$$

### 1.10 A z transzformáció összefüggését felhasználva ismertesse a Laplace transzformáció definícióját!

Mintavételezett jel:



- a mintavételezés eredményét **tömbös formában** lehet tárolni:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x(0\tau) & x(1\tau) & x(2\tau) & \dots \\ \hline \end{array}$$

- ebből matematikai számsorozatot tudunk csinálni:

$$\{x_k\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

- állítsunk össze polinomot a sorozat elemeiből:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots = \sum_{k=0}^N a_k x^k$$

- általánosítás:  $N \rightarrow \infty \rightarrow$  számsorozat  $\rightarrow$  sor  $\rightarrow$  hatványsor (függvénysor)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} =: X(z)$$

$$x = z^{-1} \quad \text{Z-transzformáció}$$

- cél:  $\Delta t = \tau \rightarrow 0$

– tudjuk, hogy:  $z = e^{\ln(z)}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k\tau) z^{-k \frac{\tau}{\tau}} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(k\tau) e^{-\ln(z) k \frac{\tau}{\tau}}, \quad s := \ln(z)/\tau$$

- így:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k\tau) e^{-sk\tau}, \quad k\tau \rightarrow t$$

- $\tau \rightarrow 0 (\Delta t \rightarrow 0)$ :

$$\int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt := X(s)$$

Így tehát a Laplace transzformáció:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

- $f(t)$  belépő függvény, tehát  $t \in [0, \infty) \rightarrow f(t)\varepsilon(t)$



### 1.11 Igazolja a Dirac impulzus és az egységugrás függvény Laplace transzformáltjait!

#### Dirac impulzus:

- végtelen nagy impulzus végtelen kicsi idő alatt

$$\delta(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \neq \tau \\ \infty, & \text{ha } t = \tau \end{cases}$$

- MOGI – rendszertechnika jegyzet: 3.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- a Dirac impulzus Laplace-transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

#### Egységugrás:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ 1, & \text{ha } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = 0 - \left( -\frac{1}{s} e^0 \right) = \frac{1}{s}$$

### 1.12 Mutassa be, hogy az átviteli mátrix hogyan származtatható a lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek folytonos idejű állapotter modellből!

Lineáris idő invariáns rendszerek folytonos idejű állapotter modellje:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}\underline{u}(t)$$

- első lépésben Laplace transzformáljuk az egyenleteket:

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) = \underline{A}\underline{X}(s) + \underline{B}\underline{U}(s)$$

$$\underline{Y}(s) = \underline{C}\underline{X}(s) + \underline{D}\underline{U}(s)$$

- az 1. egyenlet átrendezve:

$$(s\underline{I} - \underline{A})\underline{X}(s) = \underline{x}(0) + \underline{B}\underline{U}(s)$$

- $\underline{X}(s)$  kifejezése:

$$\underline{X}(s) = (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{x}(0) + (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B}\underline{U}(s)$$

- $\underline{X}(s)$  visszahelyettesítve a kimeneti egyenletbe, majd rendezve:

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{x}(0)}_{\text{tranziens tag}} + \underbrace{(\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D})}_{\text{átviteli mátrix}}\underline{U}(s)$$

- Így az átviteli mátrix ( $\underline{U}(s)$  együtthatója)

$$\underline{W}(s) = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}$$

– a tranziens tag eltűnik, az állandósult viselkedést az átviteli mátrix írja le

### 1.13 Ismertesse az egytárolós arányos tag súly és átmeneti függvényeit! Válaszában térjen ki az időállandó fogalmára!

Arányos egytárolós tag – PT1:

$$W(s) = \frac{A}{s - p_1} = \frac{K}{1 + sT}$$

Arányos egytárolós tag súlyfüggvénye:

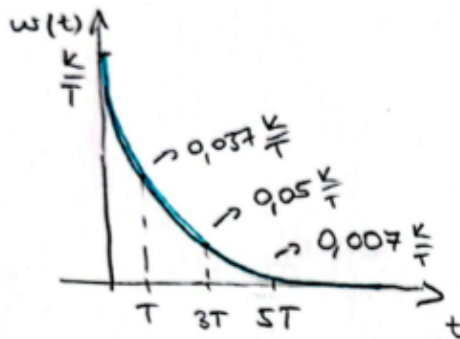
- az egységimpulzusra ( $\delta(t)$ -re) adott válasz
- $u(t) = \delta(t) \rightarrow U(s) = 1$

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{K}{1 + sT} \cdot 1$$

- a kérdés:  $y(t) = w(t) = ?$

$$y(t) = w(t) = \frac{K}{T} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right\} = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \varepsilon(t)$$

- grafikusan ábrázolva:



Arányos egytárolós tag átmeneti függvénye:

- egységugrásra ( $\varepsilon(t)$ -re) adott válasz
- $u(t) = \varepsilon(t) \rightarrow U(s) = 1/s$

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{K}{1 + sT} \frac{1}{s}$$

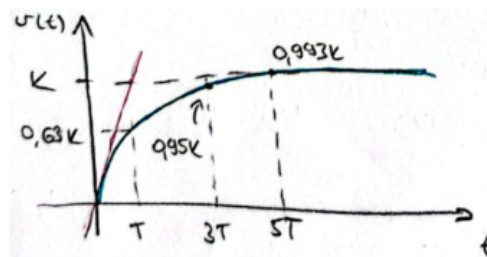
- a kérdés:  $y(t) = v(t) = ?$

$$y(t) = v(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{(1 + sT)s} \right\} = K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{T(s + \frac{1}{T})s} \right\} = \frac{K}{T} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{T}} \right\}$$

$$A = T, \quad B = -T$$

$$v(t) = K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right\} = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \varepsilon(t)$$

- grafikusan ábrázolva:



**T és K változók az átmeneti függvénynél:**

- K meghatározza, hogy hova konvergál a rendszer
- T meghatározza, hogy mennyi idő alatt konvergál

**Időállandó fogalma:**

- Az átviteli függvény időállandós alakjából s együtthatói, melyet az átviteli függvény gyöktényezős alakjából tudunk átalakítani
- így az időállandó(k) a gyöktényezős alak – mely s-re nézve egy valós együtthatójú racionális törtfüggvény – **pólusai** valós részének reciprokának mínusz egyszerese:

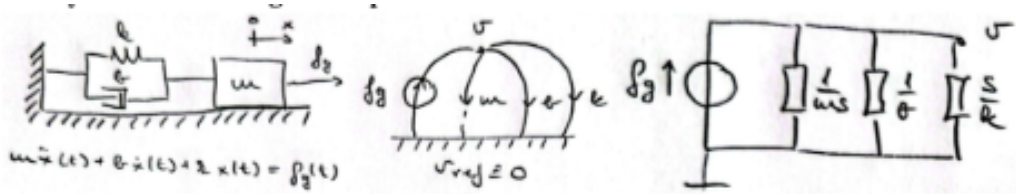
$$W(s) = \frac{b_r (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_r)}{a_n (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

$$W(s) = \frac{b_r (-z_1)(-z_2) \dots (-z_r)}{\underbrace{a_n (-p_1)(-p_2) \dots (-p_n)}_{\text{erősítés}}} \frac{(1 - \frac{1}{z_1}s)(1 - \frac{1}{z_2}s) \dots (1 - \frac{1}{z_r}s)}{(1 - \frac{1}{p_1}s)(1 - \frac{1}{p_2}s) \dots (1 - \frac{1}{p_n}s)}$$

- időállandók:  $T_1 = -\frac{1}{p_1}, T_2 = -\frac{1}{p_2}, \dots, T_n = -\frac{1}{p_n}$

### 1.14 Ismertesse az kéttárolós arányos tag súly és átmeneti függvényeit! Válaszában térjen ki a minőségi jellemzőkre!

Arányos kéttárolós tag – PT2 példával:



$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f_g(t)$$

$$V(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} F_g(s) = \frac{s}{ms^2 + bs + k} F_g(s)$$

- az elmozdulást keressük, Laplace tartományban az integrálási szabály miatt:  $X(s) = \frac{1}{s} V(s)$

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} F_g(s)$$

- átviteli függvény:

$$W(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad \text{általános algebrai alak}$$

- gyöktényezős alak:

$$W(s) = \frac{b_0/a_2}{s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2}} = \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\omega_n$ : csillapítatlan sajátkörfrekvencia,  $\zeta$ : relatív csillapítási tényező

- időállandós alak:

$$W(s) = \frac{b_0/a_0}{\frac{a_2}{a_0}s^2 + \frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{K}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

$T = \frac{1}{\omega_n}$  időállandó,  $K$ : erősítési tényező

átmeneti függvény:

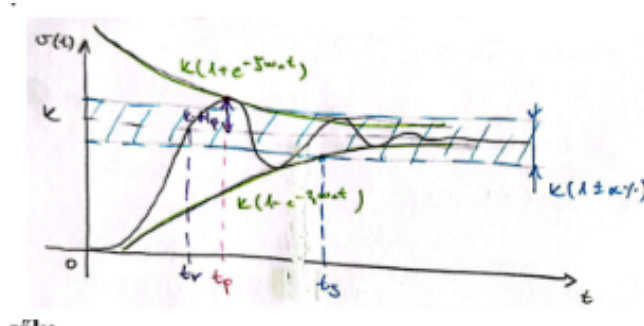
- $u(t) = \varepsilon(t) \rightarrow U(s) = 1/s$

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} U(s) \rightarrow v(t) = y(t) \dots$$

$$v(t) = K \left( 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \right) \varepsilon(t)$$

ahol  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  a csillapított sajátkörfrekvencia.

- ábrázolva:



**Minőségi jellemzők:**• **belengési idő (peak time):**  $t_p$ 

- az átmeneti függvény első maximumának eléréséhez szükséges idő

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

• **maximális túllövés (max. overshoot):**  $M_p$ 

- az átmeneti függvény első maximumának a  $K$  állandósult értékhez viszonyított értéke

$$M_p = \frac{v(t_p)}{v(\infty)} - 1 = e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

- százalékos túllövés:  $P.O. = M_p \cdot 100[\%]$

• **beállási idő (settling time):**  $t_s$ 

- az az időpillanat, amikor az átmeneti függvény eléri, és ezt követően már nem hagyja el a  $v(\infty) = K$  állandósult érték körül definiált  $K(1 \pm \alpha\%)$  szélességű sávot

$$t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \left( \frac{100}{\alpha} \right)$$

• **felfutási idő (rise time):**  $t_r$ 

- a  $v(\infty) = K$  állandósult érték első eléréséhez szükséges idő

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_d}$$

*A súlyfüggvény nem volt előadáson.*

### 1.15 Vezesse le a lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek folytonos idejű állapotter modelljének megoldását Laplace transzformáció segítségével!

- $u(t)$  bemenet,  $y(t)$  kimenet, valamint az őket összekapcsoló folytonos idejű matematikai modell
- Laplace transzformációt végzünk
- $U(s)$  bemenet,  $Y(s)$  kimenet, valamint az őket összekapcsoló Laplace tartománybeli matematikai modell
- $W(s)$  átviteli függvényt kirendezzük,  $U(s)$ -sel szorozzuk
- Inverz Laplace transzformáció
  - ismert elemekre bontás, melyeknek ismerjük az inverz Laplace transzformáltját
  - parciális törtekre bontás
  - polinomosztás – ha a nevező és a számláló fokszáma azonos

#### Példa:

- az állapottermodellünk egy  $\dot{x}(t)$  differenciálegyenlet,  $x(0)$  kezdeti értékkel
- Laplace transzformáljuk:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0)$$

- fejezzük ki  $X(s)$ -t:

$$X(s) = \dots$$

- behelyettesítjük a kezdeti értékeket, illetve a többi megadott adatot
- inverz Laplace transzformáljuk:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \dots$$

- megkapjuk a megoldást

### 1.16 Mutassa be a lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek esetén folytonos idejű állapotter modell rendszermátrixának sajátértékei és a rendszer átviteli függvényének pólusai közötti összefüggést!

Ez a fejezet mesterséges intelligencia segítségével készült.

Egy folytonos idejű, lineáris időinvariáns (LTI) rendszer állapotter modellje:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

ahol  $\mathbf{A}$  a rendszermátrix,  $\mathbf{B}$  a bemeneti mátrix,  $\mathbf{C}$  a kimeneti mátrix és  $\mathbf{D}$  a közvetlen csatolási mátrix.

Végezzük el a Laplace-transzformációt zérus kezdeti feltételek mellett ( $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ ):

$$\begin{aligned}s\mathbf{x}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \implies (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \\ \mathbf{y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s)\end{aligned}$$

Az első egyenletből kifejezve az állapotvektort:

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

Behelyettesítve a kimeneti egyenletbe:

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{u}(s)$$

Az átviteli függvény mátrix tehát:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Tudjuk, hogy az inverz mátrix a következőképpen számítható ki:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

Az átviteli függvény pólusai azok az  $s$  értékek, ahol a nevező zérus, azaz:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

Ez pontosan az  $\mathbf{A}$  rendszermátrix karakterisztikus egyenlete. Az egyenlet megoldásai az  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértékei ( $\lambda_i$ ).

**Összefüggés:** Az LTI rendszer átviteli függvényének pólusai megegyeznek a rendszermátrix sajátértékeivel (feltéve, hogy a rendszer minimálrealizáció, azaz nem történik pólus-zérus kiejtés az állapotváltozók közötti irányíthatatlanság vagy megfigyelhetetlenség miatt). Ez az összefüggés alapvető a rendszer stabilitásának vizsgálatánál: a rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha az  $\mathbf{A}$  mátrix összes sajátértékének valós része negatív.



### 1.17 Ismertesse a frekvencia-átviteli függvény fogalmát, illetve annak megjelenítési módjait (Bode diagram)!

A kérdés, hogy egy folytonos idejű időinvariáns rendszer milyen választ ad harmonikus gerjesztésre:

- szinuszos vizsgáló jelet használunk:

$$u(t) = A \sin(\omega t) \rightarrow U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- harmonikus gerjesztés esetén a válasz (állandósult értéke):

$$y(t) = \tilde{A}(\omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega))$$

$\tilde{A}(\omega)$ : frekvenciafüggő amplitúdó,  $\varphi(\omega)$ : frekvenciafüggő fáziseltolás

- formális helyettesítés:  $s \rightarrow j\omega$  komplex szám

– **frekvencia-átviteli függvény az átviteli függvényből:**

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}$$

- a komplex szám nagysága:

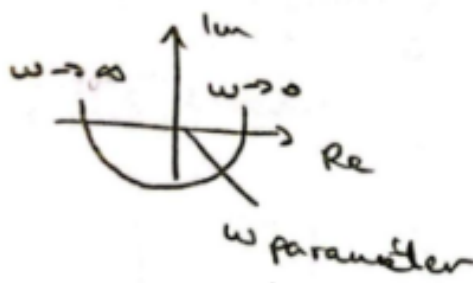
$$|W(j\omega)| = \frac{A_{ki}}{A_{be}} = A_r, \quad \text{ahol } A_{ki} = \tilde{A}, \quad A_{be} = A, \quad A_r : \text{amplitúdó arány}$$

- fáziskülönbség:

$$\Delta\varphi = \varphi_{ki} - \varphi_{be} = \arg(W(j\omega)) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{W(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{W(j\omega)\}}\right)$$

**Frekvencia-átviteli függvény megjelenítése:**

- Nyquist-diagram:**



- Bode diagram(ok):**

a) amplitúdó – körfrekvencia diagram (teljesítmény arány)

b) fázisszög – körfrekvencia diagram (fáziskülönbség)

**Amplitúdó – körfrekvencia diagram:**

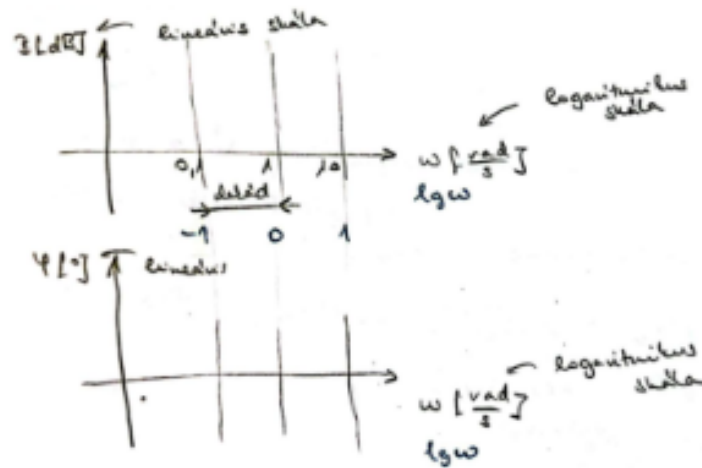
$$A_r \rightarrow P_r = A_r^2$$

$$B = \lg(P_r) = \lg(A_r^2) [B] \text{ (bel)}$$

$$B = 10 \lg(P_r) [dB] \text{ (decibel)}$$

$$B = 10 \lg(A_r^2) = 20 \lg(A_r) [dB]$$

**Diagramok:**



- a frekvencia-átviteli függvény szorzattagokra bontható
- a diagram ezeknek a tagoknak a diagramjának az összegzésével kapható meg, bizonyítás:
  - komplex szám másik alakja:  $W(j\omega) = re^{i\varphi}$
  - szorzatokra bontható:  $W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)$
  - $W(j\omega) = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
  - $\lg(r_1 r_2) = \lg(r_1) + \lg(r_2)$

Az alapelemek (általános alak):

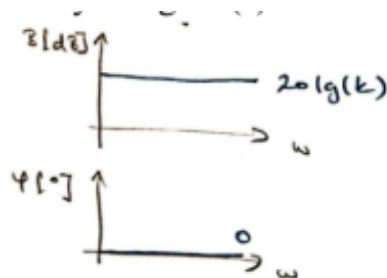
$$W(s) = K \cdot \frac{s^{r_d}}{s^{r_i}} \cdot \frac{\prod (1 + sT_i)}{\prod (1 + sT_j)}$$

↑  
arányos tag  
↑  
általános átviteli függvény alakja

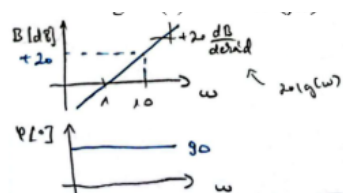
↑  
deriváló tag  
↑  
integráló tag

↑  
tiszta zérus  
↑  
tiszta pólus

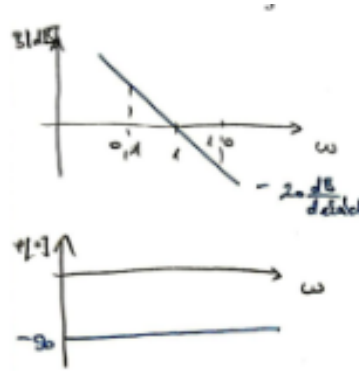
- Arányos tag:  $W(s) = K$



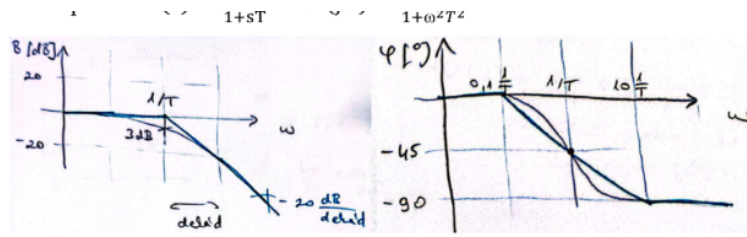
- Deriváló tag:  $W(s) = s \rightarrow W(j\omega) = j\omega$



- **integráló tag:**  $W(s) = \frac{1}{s} \rightarrow W(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega}$



- **tiszta pólus:**  $W(s) = \frac{1}{1+sT} \rightarrow W(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1+\omega^2 T^2}$



- **tiszta zérus:**  $W(s) = 1 + sT \rightarrow W(j\omega) = 1 + j\omega T$

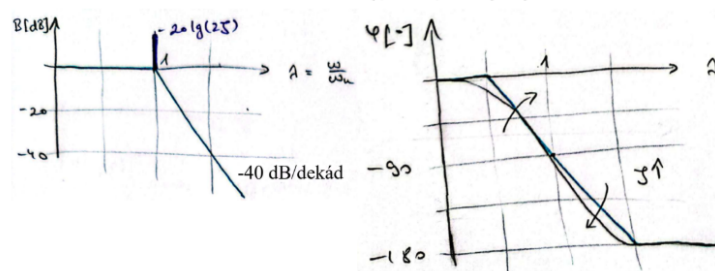
– tiszta pólus esetén kapott eredmények tükrözése y tengelyre

- **komplex póluspár:**  $W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow W(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + 2\zeta\omega_n j + \omega_n^2}$

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta\omega j}{\omega_n}}$$

– frekvenciahányados:  $\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}$

$$W(j\omega) = \frac{1 - \lambda^2 - 2\zeta\lambda j}{((1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2)^{1/2}}$$



### 1.18 Vezesse le a Fourier sorfejtésének alakja komplex alakját!

Ez a fejezet mesterséges intelligencia segítségével készült.

A periodikus  $f(t)$  függvény ( $T$  periódussal) valós alakú Fourier-sora:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))$$

ahol  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ .

Használjuk fel az Euler-formulákat:

$$\cos(k\omega_0 t) = \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2}, \quad \sin(k\omega_0 t) = \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2j} = -j \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2}$$

Behelyettesítve a sorba:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} - j b_k \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2} \right] \\ f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k - j b_k}{2} e^{jk\omega_0 t} + \frac{a_k + j b_k}{2} e^{-jk\omega_0 t} \right] \end{aligned}$$

Definiáljuk a komplex Fourier-együtthatókat ( $c_k$ ): -  $c_0 = a_0$  -  $c_k = \frac{a_k - j b_k}{2}$  ha  $k > 0$  -  $c_{-k} = \frac{a_k + j b_k}{2}$  (ami éppen  $c_k$  konjugáltja, ha  $f(t)$  valós)

Ekkor a szummázás kiterjeszthető a negatív indexekre is:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Az együtthatók kiszámítása: Tudjuk, hogy  $a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(k\omega_0 t) dt$  és  $b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(k\omega_0 t) dt$ . Ebből  $c_k$  ( $k \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2} (a_k - j b_k) = \frac{1}{T} \int_T f(t) (\cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t)) dt \\ c_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

Ez az összefüggés érvényes  $k = 0$  esetén is, hiszen  $c_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) dt$ .

**Végeredmény:** A komplex Fourier-sor alakja és az együtthatók:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

### 1.19 A Fourier sorfejtés miként általánosítható nem periodikus (lecsengő) függvényekre? Ismertesse a Fourier transzformáció származtatását!

*Ez a fejezet mesterséges intelligencia segítségével készült.*

A Fourier-sor periodikus függvények felírására alkalmas. Ha egy függvény nem periodikus (lecsengő), tekinthetjük úgy, mint egy olyan periodikus függvényt, amelynek periódusideje a végtelenbe tart ( $T \rightarrow \infty$ ).

Kiindulva a komplex Fourier-sorból:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Helyettesítsük be  $c_k$ -t a sorba:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jk\omega_0 t}$$

Mivel  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , ezért  $\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ . Jelöljük  $\Delta\omega = \omega_0$ -t:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-j(k\Delta\omega)\tau} d\tau \right] e^{j(k\Delta\omega)t} \Delta\omega$$

Ahogy  $T \rightarrow \infty$ , úgy  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ , a diszkrét frekvenciaértékek ( $k\Delta\omega$ ) pedig folytonos változóvá ( $\omega$ ) válnak. A szumma ekkor integrállá alakul:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega$$

Definiáljuk a belső integrált mint a függvény Fourier-transzformáltját:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ekkor az eredeti függvény visszakapható az inverz Fourier-transzformációval:

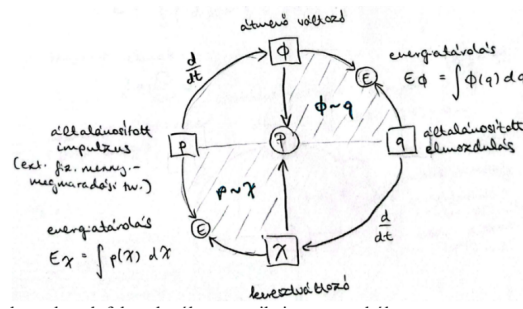
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

**Összefoglalva:** A Fourier-transzformáció a Fourier-sor általánosítása nem periodikus jelekre. Míg a Fourier-sor diszkrét frekvencia-spektrumot (vonalas spektrum) eredményez, addig a Fourier-transzformáció folytonos spektrumot ad. A transzformáció létezésének feltétele a Dirichlet-feltételek teljesülése, legfontosabb ezek közül az abszolút integrálhatóság:  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ .

**1.20** Ismertesse a következő fogalmakat (adja meg a definícióját és rövid értelmezését): extenzív és intenzív fizikai mennyiségek, átmenő és keresztváltozók, energiatárolók (átmenő és keresztváltozóval) és disszipatív elemek (kétpólusok), csatolt kétpólus elem (transzformátor és girátor)!

- **extenzív fizikai mennyiség:** olyan mennyiség, melynek a rendszer egészét jellemző értéke megegyezik az őt alkotó részrendszereket jellemző értékek összegével (pl. tömeg, térfogat, töltés).
- **intenzív fizikai mennyiség:** a rendszer egészét jellemző értéke egyensúly esetén megegyezik a rendszert alkotó részrendszerek értékeivel (pl. hőmérséklet, nyomás).
- **átmenő változók ( $\Phi$ ):** extenzív fizikai mennyiség rátája ( $d/dt$ ), általában megmaradási törvény is tartozik hozzá.
- **keresztváltozók ( $\chi$ ):** intenzív fizikai mennyiségek (különbsége) vagy általános elmozdulás ( $q$ ) rátája.

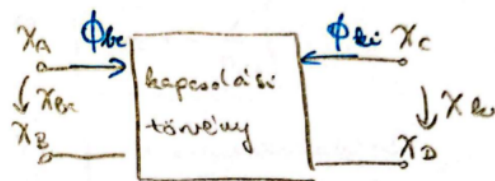
**Állapot-tetraéder (Tetrahedron of state):**



**A rendszerelemek feloszthatók energetikai szempontból:**

- **energiatárolók:** energiát tárolnak, az elem valamilyen extenzív mennyiség energiáját halmozza fel, lehet kapacitív vagy induktív.
- **disszipatív elemek:** veszteséget modellezik, a valós rendszerek modellezéséhez szükségesek.
- **energiaátalakítók:** csatolt kétpólus, négypólus elem.
- **energiaforrások.**

**Energiaátalakítók:**



- **veszteségmentes:**  $P_{be} = P_{ki}$ , előjelkonvenció miatt  $P_{be} + P_{ki} = 0 \implies \chi_{be}\Phi_{be} + \chi_{ki}\Phi_{ki} = 0$
- **lineáris, statikus rendszer**  $\rightarrow$  algebrai egyenlet:

$$\begin{bmatrix} \chi_{be} \\ \Phi_{be} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{ki} \\ \Phi_{ki} \end{bmatrix}$$

$$\chi_{be} = c_{11}\chi_{ki} + c_{12}\Phi_{ki}$$

$$\Phi_{be} = c_{21}\chi_{ki} + c_{22}\Phi_{ki}$$

- **behelyettesítve a teljesítmény-egyenletbe:**

$$(c_{11}\chi_{ki} + c_{12}\Phi_{ki})(c_{21}\chi_{ki} + c_{22}\Phi_{ki}) + \chi_{ki}\Phi_{ki} = 0$$

$$c_{11}c_{21}\chi_{ki}^2 + (1 + c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21})\chi_{ki}\Phi_{ki} + c_{12}c_{22}\Phi_{ki}^2 = 0$$

- **2 nem triviális megoldás:**

**1. lehetőség:**  $c_{12} = c_{21} = 0$ , ekkor  $(1 + c_{11}c_{22}) = 0 \implies c_{22} = -\frac{1}{c_{11}}$

- energiaátalakító: **transzformátor**
- azonos típusú változók között teremt kapcsolatot (pl. villamos transzformátor, hatómű, DC motor)

$$\begin{bmatrix} \chi_{be} \\ \Phi_{be} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{ki} \\ \Phi_{ki} \end{bmatrix}$$

**2. lehetőség:**  $c_{11} = c_{22} = 0$ , ekkor  $(1 + c_{12}c_{21}) = 0 \implies c_{21} = -\frac{1}{c_{12}}$

- energiaátalakító: fordítóváltó, **girátor**
- eltérő típusú változók között teremt kapcsolatot (pl. giroszkóp, munkahenger)

$$\begin{bmatrix} \chi_{be} \\ \Phi_{be} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ -\frac{1}{c_{12}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{ki} \\ \Phi_{ki} \end{bmatrix}$$

**1.21** Adja meg az villamos rendszer (kapcsolt elektromechanikai), haladó és forgómozgású mechanikai rendszerek és az áramlástechnikai (pneumatikus és hidraulikai) rendszerek koncentrált paraméterű leírása esetén az átmenő és keresztváltozó típusát, valamint az energiatárolókat (amennyiben léteznek) és disszipatív elemeket.

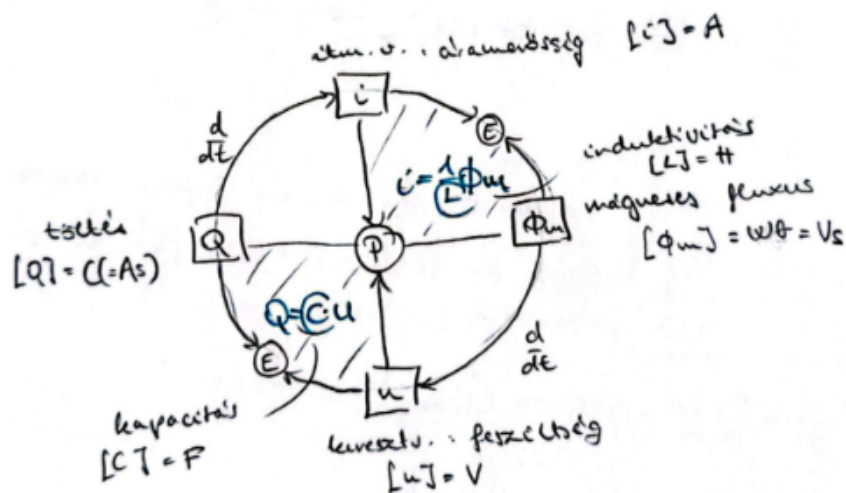
Villamos rendszer:

- $\phi$ :  $i$  – áramerősség [A]
- $\chi$ :  $u$  – feszültség [V]
- energiatárolók:

$$E_\chi = \int Q du = \int C u du = \frac{1}{2} C u^2$$

$$E_\phi = \int i d\phi_m = \int \frac{1}{L} \phi_m d\phi_m = \frac{1}{2L} \phi_m^2 = \frac{1}{2} L i^2$$

- disszipatív elem:
  - ellenállás
  - $i = \frac{1}{R} u$
  - $[R] = \Omega$
- további elemek:
  - $L$  – induktivitás [H]
  - $C$  – kapacitás [F]
  - $\phi_m$  – mágneses fluxus [Wb] = [Vs]
  - $Q$  – töltés [C] = [As]





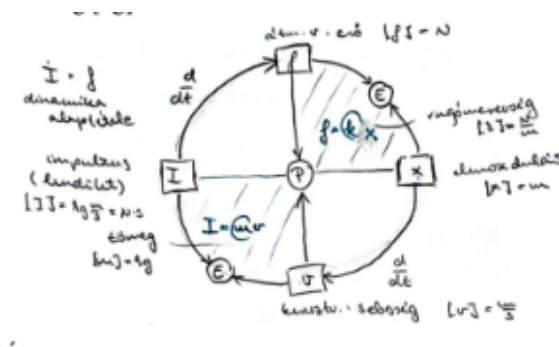
**Mechanikai haladó:**

- $\phi$ :  $f$  – erő [N]
- $\chi$ :  $v$  – sebesség [m/s]
- energiatárolók:

$$E_\chi = \int I dv = \int m v dv = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_\phi = \int f dx = \int k x dx = \frac{1}{2} k x^2$$

- disszipatív elem:
  - viszkózus csillapítási tényező
  - $f = b v$
  - $[b] = \text{Ns/m}$
- további elemek:
  - $I$  – lendület [Ns] = [kg m/s]
  - $x$  – elmozdulás [m]
  - $k$  – rugómerevség [N/m]
  - $m$  – tömeg [kg]

**Mechanikai forgó:**

- $\phi$ :  $M$  – nyomaték [Nm]
- $\chi$ :  $\omega$  – szögsebesség [rad/s]
- energiatárolók:

$$E_\chi = \int \pi d\omega = \int J \omega d\omega = \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$E_\phi = \int M d\varphi = \int k \varphi d\varphi = \frac{1}{2} k \varphi^2$$

- disszipatív elem:
  - viszkózus csillapítási tényező
  - $M = B \omega$
  - $[B] = \text{Nms/rad}$
- további elemek:
  - $\pi$  – perdület [Nms]
  - $\varphi$  – szögelfordulás [rad]
  - $k$  – torziós rugómerevség [Nm/rad]
  - $J$  – tehetetlenségi nyomaték [kgm<sup>2</sup>]

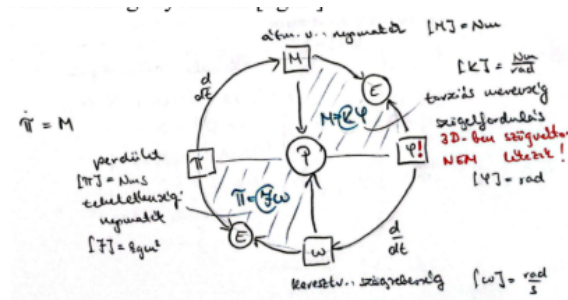
$$\dot{\pi} = M$$

$$[J] = \text{kgm}^2$$

$$[k] = \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

3D-ben szögvektor NEM létezik!

$$[\varphi] = \text{rad}$$



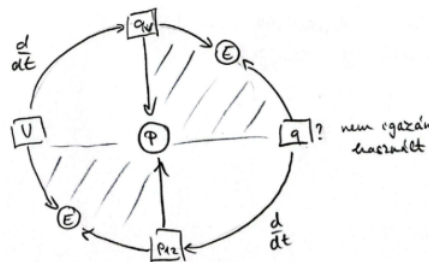
### Áramlástechnikai:

- $\phi$ :  $q_v$  – tömegáram/térfogatáram
- $\chi$ :  $p_{12}$  – nyomás
- energiatárolók:

$$\text{fluid kapacitás: } q_v = C_f \frac{dp_{12}}{dt}$$

$$\text{fluid induktivitás: } q_v = \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{L_f} p dt$$

- disszipatív elem:
  - fluid ellenállás
  - $q_v = \frac{1}{R_f} p_{12}$
- áramlástechnikai (fluid) rendszerek:
  - hidraulikus: nem összenyomható közeg
  - pneumatikus: összenyomható közeg, légköri nyomásnál nagyobb nyomás
  - akusztikus: összenyomható közeg, légköri nyomás



nem igazán használt  $[q_v]$

### hidraulikus rendszer kapacitás:

- nyitott tartály
- tápnyomás:  $p_t = \rho g h$
- $q_v = \frac{dV}{dt} = A v \rightarrow V = A h \rightarrow \frac{dV}{dt} = A \frac{dh}{dt}$   
 $\frac{dp}{dt} = \rho g \frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dp}{dt} = \rho g \frac{1}{A} \frac{dV}{dt}$   
 $q_v = \frac{A}{\rho g} \frac{dp_{12}}{dt}$  hidraulikus kapacitás  $C_f$



	Pneumatikus	Hidraulikus
kapacitás	$C_f = \frac{V}{\kappa p_1}$	$C_f = \frac{A}{\rho g}$
induktivitás	nincs	$L_f = \frac{\rho l}{A}$
disszipatív elem	$R_f$	$R_f$

## 1.22 Mutassa be, milyen módszerekkel határozható meg a kereszt illetve átmenő változók értékei különféle források figyelembevételére esetén!

### Feladatmegoldás:

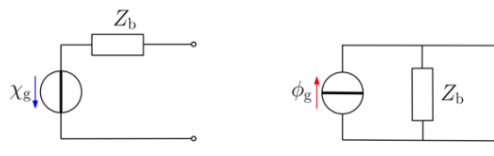
- ha kapunk egy rendszert, hogy oldjuk meg a feladatot?
- első lépés: struktúragráfot készítünk
- a struktúragráf alapján elkészítjük az impedanciahálózatot (itt már Laplace tartományban vagyunk)
- a struktúragráfot redukáljuk
- miután a legegyszerűbb alakra hoztuk, felmerül a kérdés, hogy mit is kell kiszámolnunk, és ez milyen módszerrel lehetséges
- több módszer van, a forrás és a keresett változó típusától függ, hogyan tudjuk megoldani a feladatot

### A lehetséges módszerek:

Forrás	Keresett mennyiség	Számítás módja
$\phi_g$	$\chi_i$	a) csomóponti potenciálok módszere b) feszültségosztó + forráscsere (Thevenin tétel)
$\phi_g$	$\phi_i$	a) hurokáramok módszere b) áramosztó
$\chi_g$	$\chi_i$	a) csomóponti potenciálok módszere b) feszültségosztó
$\chi_g$	$\phi_i$	a) hurokáramok módszere b) áramosztó + forráscsere (Norton tétel)

### Forráscsere:

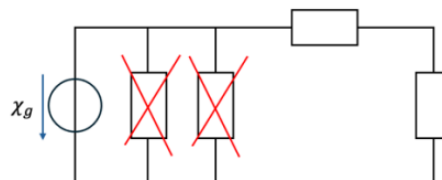
- akkor lehet szükség rá, ha a keresett mennyiség és a forrás típusa különböző
- a Thevenin illetve Norton ekvivalens képe egy tetszőleges hálózatnak:



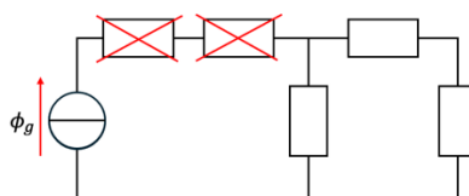
- forráscserénél az általánosított Ohm-törvény alapján a belső ellenállással tudjuk kiszámolni a forráscsere utáni forrásokat ( $\chi_g = Z_b \phi_g$ )

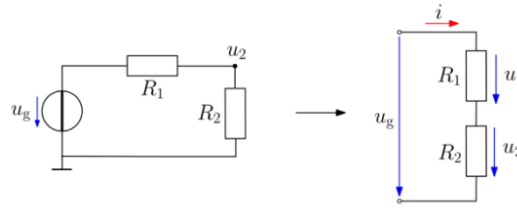
### Elanyagolható impedanciák:

- keresztváltozó forrással párhuzamosan kapcsolt impedanciák:



- átmenő változó forrással sorosan kapcsolt impedanciák:



**Feszültségosztó:**

- $u_2$ -t keressük
- tudjuk, hogy ugyanaz az áram folyik  $R_1$ -en és  $R_2$ -n:  $i = i_1 = i_2$
- a feszültség pedig megoszlik az ellenállásokon:  $u_g = u_1 + u_2$
- az Ohm-törvényt alkalmazva ezekre az egyenletekre:

$$\frac{u_1}{R_1} = \frac{u_2}{R_2}$$

- rendezzük át az egyenletet

$$u_1 = \frac{R_1}{R_2} u_2$$

- helyettesítsünk be  $u_g$ -be:

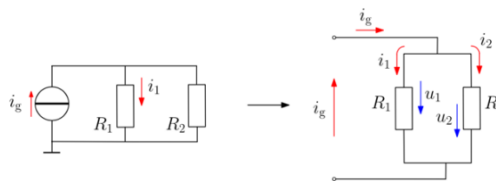
$$u_g = \frac{R_1}{R_2} u_2 + u_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} u_2$$

- átrendezve a keresett  $u_2$  feszültség:

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_g$$

- ez felírható az általánosított Ohm-törvénnyel is:

$$\chi_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \chi_g$$

**Áramosztó:**

- ismert a forrás, az ellenállások értékei és keressük  $i_1$ -et
- tudjuk, hogy a párhuzamosan kapcsolt ellenállásokon ugyanaz a feszültség esik:

$$u = u_1 = u_2$$

- az áram pedig az ellenállásoknak megfelelően megoszlik:

$$i_g = i_1 + i_2$$

- felírva az Ohm-törvényt:

$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \rightarrow i_2 = \frac{R_1}{R_2} i_1$$

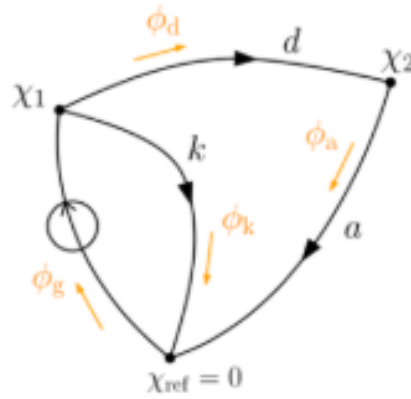
- $i_g$ -be való behelyettesítés és rendezés:

$$i_g = i_1 + \frac{R_1}{R_2} i_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} i_1 \rightarrow i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_g$$

- általános Ohm-törvénnyel:

$$\phi_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \phi_g$$

### Csomóponti potenciálok módszere:



- minden csomópontra felírjuk a Kirchhoff csomóponti törvényt:  $\sum i = 0$

$$\chi_1 : \phi_d + \phi_k - \phi_g = \frac{\chi_1 - \chi_2}{Z_d} + \frac{\chi_1 - \chi_3}{Z_k} - \phi_g = 0$$

$$\chi_2 : \phi_a - \phi_d = \frac{\chi_2 - \chi_3}{Z_a} - \frac{\chi_1 - \chi_2}{Z_d} = 0$$

$$\chi_3 : \phi_g - \phi_a - \phi_k = \phi_g - \frac{\chi_2 - \chi_3}{Z_a} - \frac{\chi_1 - \chi_3}{Z_k} = 0$$

- tudjuk, hogy a referencia 0, így leegyszerűsödik az egyenletünk
- az egyenletet átalakítva, majd megoldva:

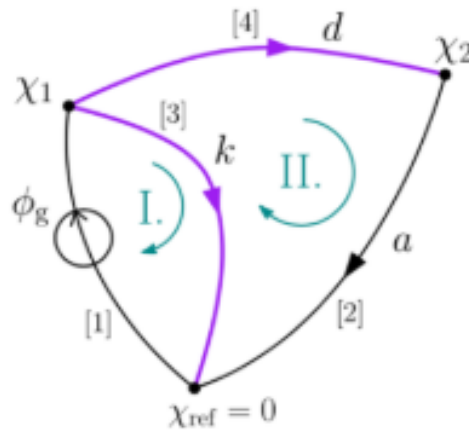
$$(Z_d + Z_a) \cdot \chi_2 = Z_a \cdot \chi_1$$

$$\chi_1 = \frac{Z_d + Z_a}{Z_a} \cdot \chi_2$$

- innen már csak vissza kell helyettesíteni és kifejezni a keresett változót:

$$\chi_2 = \frac{Z_k \cdot Z_a}{Z_a + Z_k + Z_d} \cdot \phi_g \quad \chi_1 = \frac{Z_d + Z_a}{Z_a} \cdot \frac{Z_k \cdot Z_a}{Z_a + Z_k + Z_d} \cdot \phi_g = \frac{Z_k(Z_a + Z_d)}{Z_a + Z_k + Z_d} \cdot \phi_g$$

### Hurokáramok módszere:



- feszítőfát kell választani: olyan hurokmentes részgráf, mely minden csomópontot tartalmaz
- a feszítőfa ágai és a kötőágak hurkokat határoznak meg, melyek irányait az irányított kötőágak szabnak meg
- minden hurokra felírjuk a Kirchhoff huroktörvényt: miszerint az egy hurkon belül a feszültségek előjeles összege 0:  $\sum u = 0$

- felírjuk a hurokegyenleteket (pozitív irány: az ág iránya egyezik a hurokéval):

$$\text{I} : \chi_g + \chi_k = 0$$

$$\text{II} : \chi_a - \chi_k + \chi_d = 0$$

- kifejezzük a feszültségeket a hurokáramok segítségével, az általános Ohm-törvény felírásával:

$$Z = \frac{\chi}{\phi}$$

$$\chi_d = Z_d \cdot \phi_d = Z_d \cdot \phi_{\text{II}}$$

$$\chi_a = Z_a \cdot \phi_a = Z_a \cdot \phi_{\text{II}}$$

$$\chi_k = Z_k \cdot \phi_k = Z_k \cdot (\phi_{\text{I}} - \phi_{\text{II}})$$

- visszaírva a hurokegyenletbe a 2-es ág esetén:

$$\text{II} : Z_a \cdot \phi_{\text{II}} - Z_k \cdot (\phi_{\text{I}} - \phi_{\text{II}}) + Z_d \cdot \phi_{\text{II}} = Z_a \cdot \phi_{\text{II}} - Z_k \cdot \phi_{\text{I}} + Z_k \cdot \phi_{\text{II}} + Z_d \cdot \phi_{\text{II}} = 0$$

$$(Z_a + Z_k + Z_d) \cdot \phi_{\text{II}} = Z_k \cdot \phi_{\text{I}}$$

- az 1-es ágban a forrás előírja az abban az ágban folyó áramot,  $\phi_{\text{I}} = \phi_g$ , így:

$$\phi_{\text{II}} = \frac{Z_k}{Z_a + Z_k + Z_d} \cdot \phi_g$$

- mivel a hurokáramok ismertek, kiszámolhatók belőlük a feszültségek az általános Ohm-törvénnyel

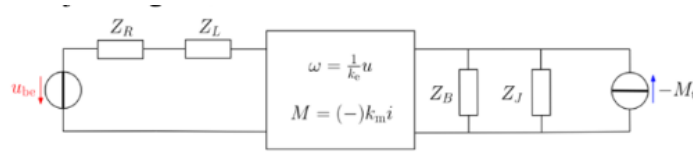
$$\chi_2 = \chi_a = \frac{Z_a \cdot Z_k}{Z_a + Z_k + Z_d} \cdot \phi_g$$

$$\chi_1 = \chi_k = Z_k \cdot \left(1 - \frac{Z_k}{Z_a + Z_k + Z_d}\right) \cdot \phi_g = \frac{Z_k(Z_a + Z_d)}{Z_a + Z_k + Z_d} \cdot \phi_g$$

- az éleken folyó áramok pedig kiszámolhatók a már ismert hurokáramok előjeles összegeiből



- $M_t$  nyomaték előjele negatív, mivel a terhelés csökkenti a fordulatszámot



- az impedanciák értékei (Laplace tartományban):

- $Z_R = R$
- $Z_L = sL$
- $Z_B = \frac{1}{B}$
- $Z_J = \frac{1}{Js}$

- akkor lehet a kapcsolt kétpólus oldalait redukálni, ha:

- veszteségmentes:  $P_{be} = P_{ki}$ , előjelkonvenció miatt  $P_{be} + P_{ki} = 0$
- lineáris, statikus rendszer – algebrai egyenletekkel leírható
- a transzformátor egyenletei:

$$\begin{bmatrix} \chi_{12} \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{34} \\ \phi_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{ind} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_e & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ M_{vill} \end{bmatrix}$$

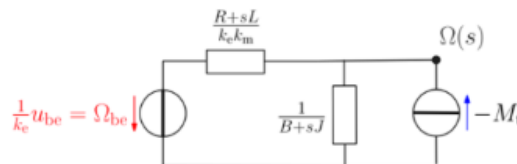
- impedanciák:

$$Z_{mech} = \frac{\Omega(s)}{M(s)} = \frac{\frac{1}{k_e} U(s)}{k_m I(s)} = \frac{1}{k_e k_m} \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{k_e k_m} Z_{vill}$$

- a soros és párhuzamos impedanciákat össze tudjuk vonni:

- $Z_{e,RL} = R + sL$
- $Z_{e,BJ} = \frac{1}{B + Js}$

- redukálás:



- innen már a tanult módszerek segítségével tudunk számolni

### Fizikai összefüggések:

- indukált feszültség:

- a mágneses fluxus változásából írhatjuk le - **Faraday törvény:**

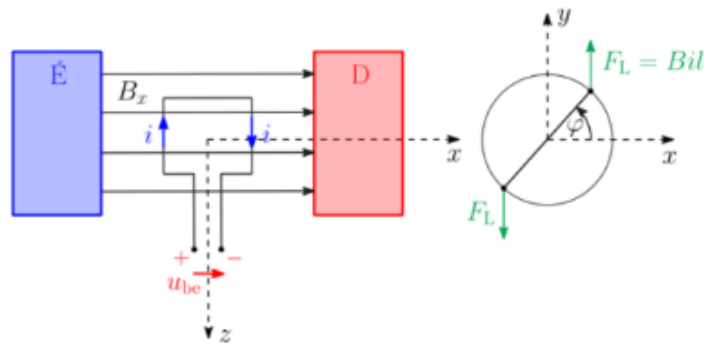
$$u_{ind}(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = B_x \frac{dA(t)}{dt} = B_x \frac{d(l \cdot 2r \sin \varphi(t))}{dt} = (B_x l \cdot 2r \cos \varphi(t)) \omega(t)$$

- az indukált feszültséget és a szögsebességet összekötő tagot elnevezzük sebességállandónak, jele:  $k_e$

- motor villamos nyomatéka:

- a Lorentz-erőből adódó forgatónyomatékkal számolható
- arányos az áramerősséggel





- a Lorentz-erő:

$$\underline{F} = i(\underline{l} \times \underline{B}) = i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -iB_x l \\ 0 \end{bmatrix}$$

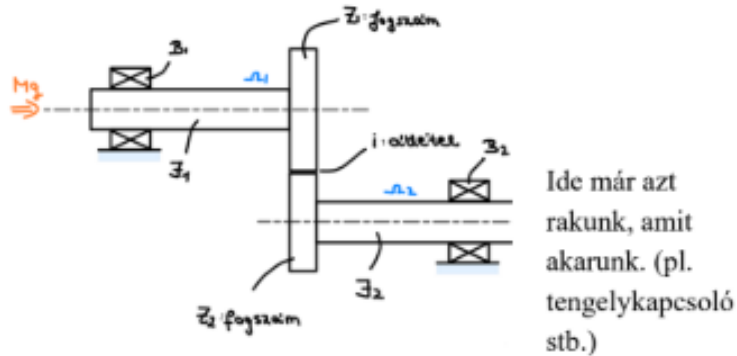
- a Lorentz-erőből számolt nyomaték:

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ rF \cos \varphi \end{bmatrix}$$

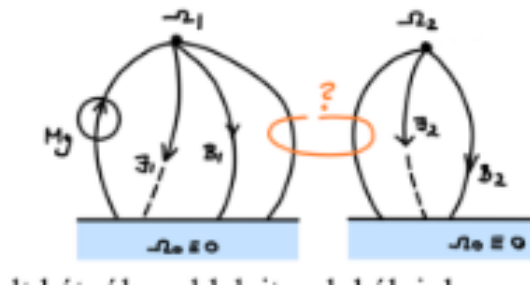
- $M_{\text{vill}} = 2M = (2B_x l \cdot r \cos \varphi(t))i$
- az áramot és a nyomatékot összekötő tagot elnevezzük nyomatékállandónak, jele:  $k_m$

- 1.24 Egy adott, tanult példa (fogaskerék-hajtómű, fogaskerék-fogasléc) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is!

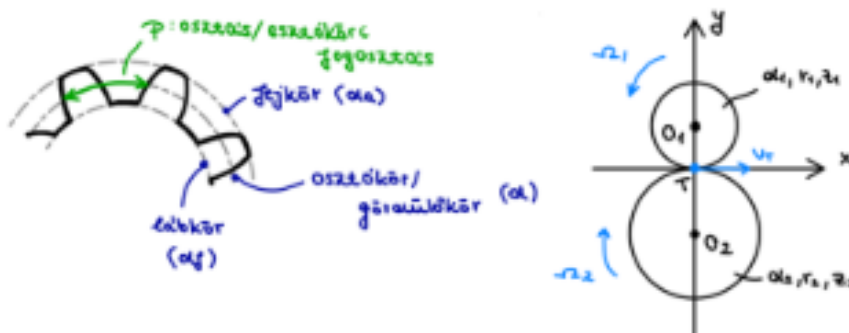
Fogaskerék-hajtómű:



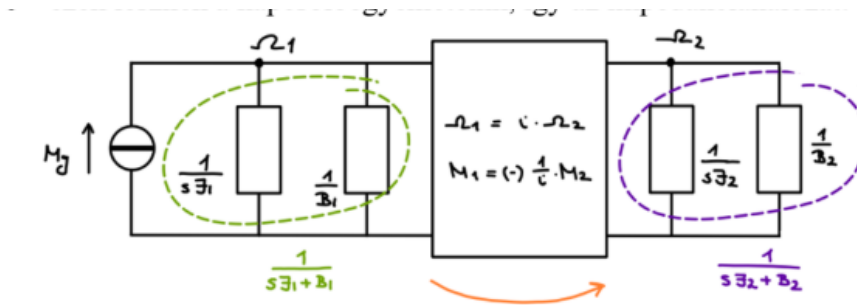
- struktúragráf:



- akkor lehet a kapcsolt kétpólus oldalait redukálni, ha:
  - veszteségmentes:  $P_{be} = P_{ki}$ , előjelkonvenció miatt  $P_{be} + P_{ki} = 0$
  - lineáris, statikus rendszer - algebrai egyenletekkel leírható
- fizikai összefüggések a kapcsolóegyenlethez:
  - $d\pi = pz \rightarrow d = \frac{p}{\pi}z$
  - a kerületi sebességek:  $v_T = \Omega_1 r_1 = \Omega_2 r_2 \rightarrow \Omega_1 = \frac{r_2}{r_1} \Omega_2 = \frac{z_2}{z_1} \Omega_2 = i \Omega_2$
  - nyomaték:  $M = f r \rightarrow \begin{cases} M_1 = f_T r_1 \\ M_2 = -f_T r_2 \end{cases} \rightarrow M_1 = -\frac{r_1}{r_2} M_2 = -\frac{1}{i} M_2$



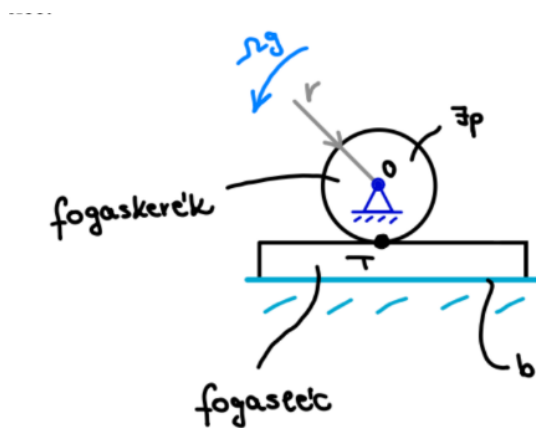
- ezek lesznek a kapcsolóegyenleteink, így az impedancia hálózat:



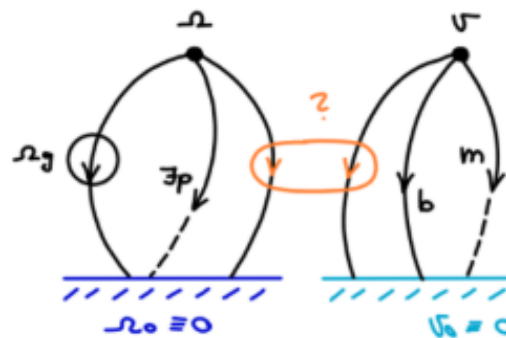
- redukált impedanciák:

$$Z_{\text{forg1}} = \frac{\Omega_1}{M_1} = \frac{i\Omega_2}{\frac{1}{i}M_2} = i^2 \frac{\Omega_2}{M_2} = i^2 Z_{\text{forg2}}$$

Fogaskerék – fogasléc:



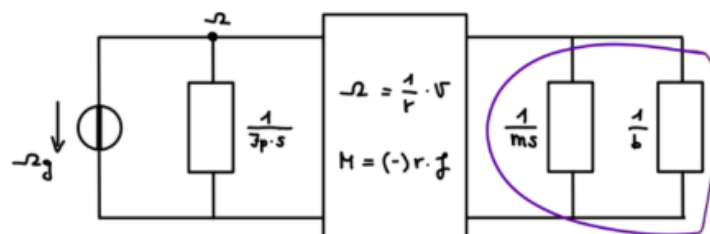
- struktúragráf:



- fizikai összefüggés:

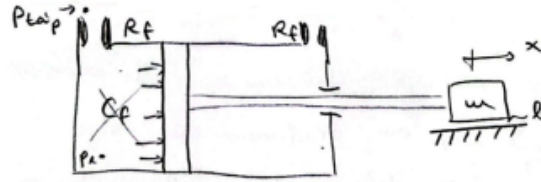
$$\Omega_g = \frac{1}{r} v_T, \quad M = -r f_T$$

- így az impedanciahálózatunk:

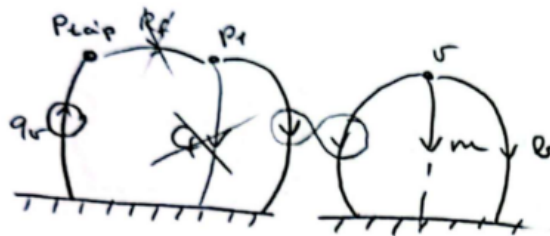


1.25 Egy adott, tanult példa (hidraulikus és pneumatikus munkahenger) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is!

Hidraulikus munkahenger:



- nincs  $C_f$  mert a tartály zárt, valamint nem összenyomható a közeg
- struktúragráf:



- **Megjegyzés:** átmenő változó generátorral sorosan kapcsolt impedancia elhanyagolható:  $R_f$
- akkor lehet a kapcsolt kétpólus oldalait redukálni, ha:
  - veszteségmentes:  $P_{be} = P_{ki}$ , előjelkonvenció miatt  $P_{be} + P_{ki} = 0$
  - lineáris, statikus rendszer – algebrai egyenletekkel leírható

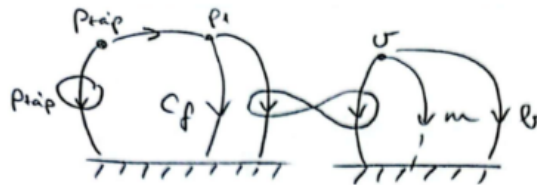
- **fizikai összefüggések:**  $p_{12} = (-)\frac{f}{A}$ ,  $q_v = Av$

- így a girátor:

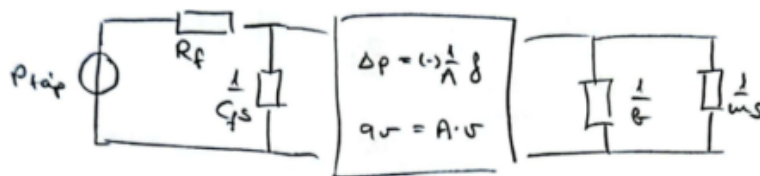
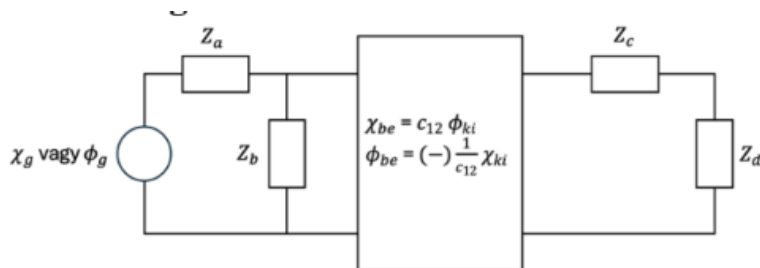
$$\begin{bmatrix} p_{12} \\ q_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-)\frac{1}{A} \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ f \end{bmatrix}$$

**Pneumatikus munkahenger:**

- mivel a gáz összenyomható: van  $C_f$
- a kompresszor tápnyomást állít elő  $\rightarrow$  keresztváltozó forrás
- **struktúragráf:**



- a fizikai összefüggések ugyanazok, mint a hidraulikus rendszernél
- **impedanciahálózat:**

**Impedanciahálózat redukálása girátorral:**

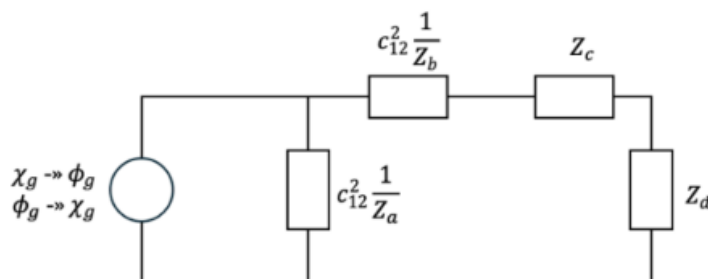
- **forrás redukálása:**

$$\left. \begin{aligned} \chi_{ki} &= c_{12} \phi_{be} \\ \phi_{ki} &= \frac{1}{c_{12}} \chi_{be} \end{aligned} \right\} \text{a forrás típusa is megváltozik}$$

- **impedanciák redukálása:**

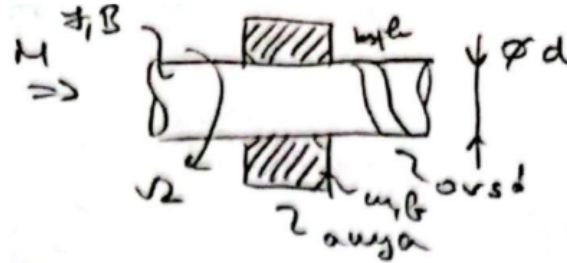
$$Z_{ki} = \frac{\chi_{ki}}{\phi_{ki}} = \frac{c_{12} \phi_{be}}{\frac{1}{c_{12}} \chi_{be}} = c_{12}^2 \frac{1}{Z_{be}}$$

– az impedanciák kapcsolása is megváltozik: soros  $\leftrightarrow$  párhuzamos



- 1.26 Egy adott, tanult példa (golyósorsó és vonóelem) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is!

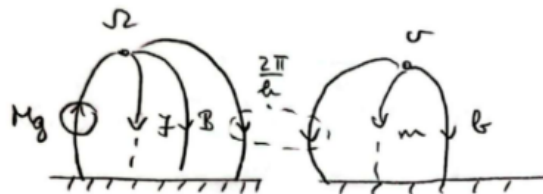
Golyósorsó:



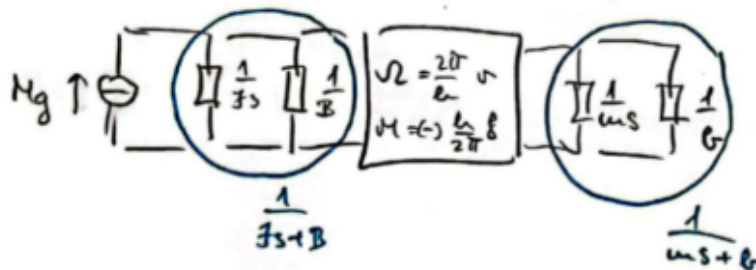
- **fizikai összefüggés:** amíg az orsó egy teljes fordulatot ( $2\pi$  radián) megtesz, addig az anya  $h$ -t halad rajta:  
 $\varphi = \frac{2\pi}{h}x \rightarrow \frac{d}{dt} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{h}v$
- akkor lehet a kapcsolt kétpólus oldalait redukálni, ha:
  - veszteségmentes:  $P_{be} = P_{ki}$ , előjelkonvenció miatt  $P_{be} + P_{ki} = 0$
  - lineáris, statikus rendszer – algebrai egyenletekkel leírható
- így a transzformátor kapcsolóegyenletei:

$$\omega = \frac{2\pi}{h}v, \quad M = (-)\frac{h}{2\pi}f$$

- **struktúragráf:**



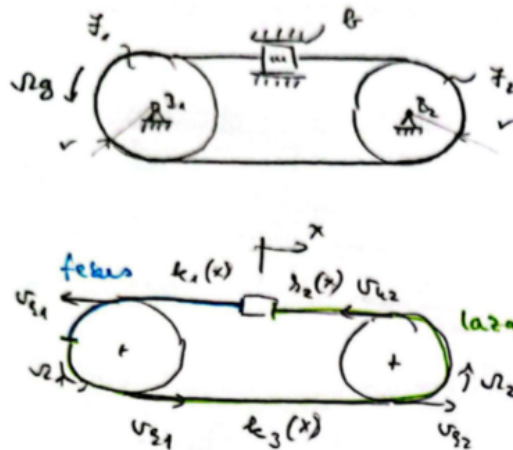
- **impedanciahálózat:**



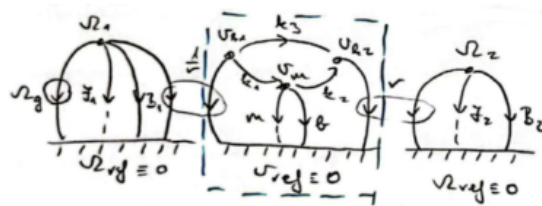
- **impedanciák redukálása:**

$$Z_{\text{forgó}} = \frac{\Omega}{M} = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \frac{v}{f} = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 Z_{\text{haladó}}$$

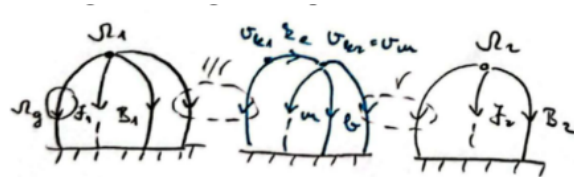
Vonóelem:



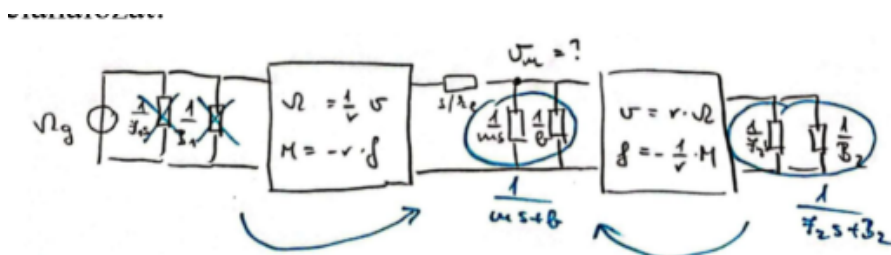
- fizikai összefüggés:
- de mivel az ágaknak van rugómerevségük, muszáj két transzformátorral dolgozni:  $\Omega_1 = \frac{1}{r_1} v_1$ , majd  $v_2 = r_2 \Omega_2$
- a húzott ág rugómerevségét megkülönböztetjük a tehetetlentől, de ezek a struktúragráfon összevonhatók:  $k_e = k_T + k_{sz}$  (párhuzamos rugók eredője)
- struktúragráf:



- $v_m$ -et közelítsük  $v_{k2}$ -vel



- így lesz egy eredő rugómerevségünk:  $k_3$  párhuzamosan van kötve soros  $k_1$  és  $k_2$ -vel
- impedanciahálózat:



- impedanciák redukálása:

$$Z_{\text{haladó}} = \frac{r\Omega}{\frac{1}{r}M} = r^2 Z_{\text{forgó}}$$

## 2 Informatika

### 2.1 A számítástudomány alapjai. Turing gép. Eljárások, algoritmusok.

**Elméleti számítástudomány:** matematikai

**Számítástechnika:** elméleti és gyakorlati megvalósítás, technológia

**Turing gép:** elméleti „számítógép”. Részei:

- **végtelen, cellákra osztott szalag**
  - egy cellában lehet szimbólum, vagy lehet üres
  - az adatok, műveletek, illetve eredmények cellái véges számúak, ezeken túl a szalag üres
- **Író/olvasó fej:**
  - egyszerre egy cellával foglalkozik
  - írhat, olvashat, törölhet
  - a szalagon jobbra/balra lépkedhet (változtatás nélkül)
- **Vezérlőegység:**
  - állapotai számozva
  - véges állapot (véges állapotú automata)
  - helyettesítési táblázat adja meg a működést
    - \* állapot + művelet + adat  $\rightarrow$  új állapot + eredmény + fejmozgás

**Turing gép:**

- matematikailag 5-10 elemből álló szabályhalmaz
- informatikailag:
  - szalag = memória
  - vezérlőegység = CPU
  - fej = busz
- alkalmas rekurzióra  $\rightarrow$  veremtár (stack)

**Eljárások, algoritmusok:**

- emberi nyelven megfogalmazott feladat, cselekménysorozat
- megoldási eljárás („algoritmus jelölt”), program írható
- egy megoldási eljárás akkor **algoritmus**, ha **bármilyen** bemenet esetén **véges számú lépés** után eredményt kapunk (A Turing-gép megáll)
- az algoritmusra nem létezik formális matematikai definíció



## 2.2 A számítógép architektúrák alapjai. Boole függvények. Logikai kapuk. Kombi-nációs és szekvenciális logikai hálózatok. Tárolók: S-R, J-K, D.

### Neumann elvek (1945):

- teljesen elektronikus működés
- kettes számrendszer használata
- szekvenciális művelet végrehajtás
- adatok és programok a belső memóriában
- univerzális felhasználás: Turing-gép
- öt funkcionális egység:
  - aritmetikai egység
  - központi vezérlőegység
  - memóriák
  - bemeneti-,
  - és kimeneti egységek

### Boole függvények:

- olyan matematikai függvények, melyek vagy 1, vagy 0 értéket vesznek fel
- bemenetei és kimenetei is logikai változók
- két független bemenet (A és B) esetén:

A	B	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

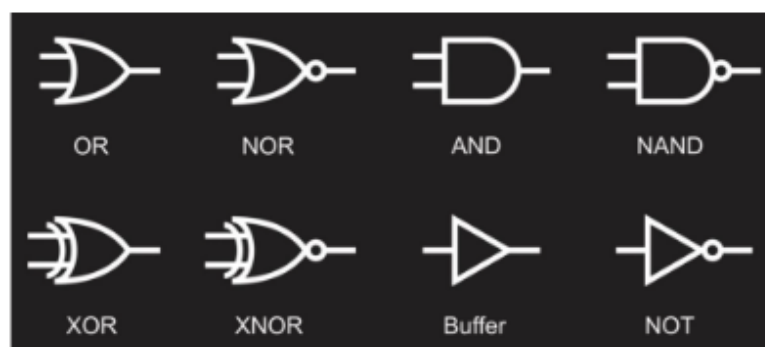
- ismert logikai műveletek: negálás, és, vagy, kizáró vagy (ezekre van műveleti jel is C-ben)
- $f_1$ : „és”,  $f_7$ : „vagy”,  $f_6$ : „kizáró vagy”,  $f_8$ : „nem vagy”,  $f_{14}$ : „nem és”,  $f_0$ : „azonosan 0”,  $f_{15}$ : „azonosan 1”.
- $n$  bemenet esetén  $n$  db változó van, mindegyiknek 2 értéke, szóval a  $2^n$  bemeneti kombinációhoz 2 elemet rendelünk, így  $2^{2^n}$  db függvény lesz
- **De Morgan azonosságok:**

$$\overline{(A \wedge B)} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$\overline{(A \vee B)} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

### Logikai kapuk:

- logikai „építőkövek”, melyek alpműveleteket valósítanak meg
- összekapcsolásukkal jöhet létre az aritmetikai művelet



### Kombinációs logikai hálózat:

- kimenete(i) csak a bemenet(ek)től függenek
- minden kimenetet egy függvény ír le:  $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$



#### Példa: 1 bites fél összeadó

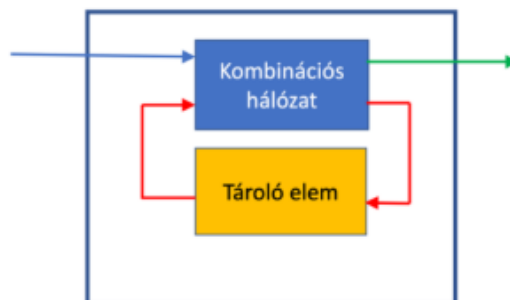
- bemenetek: A és B
- kimenet: Y és C (carry)-átvitel

A	B	Y	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

- Függvények:
- $Y = A \text{ xor } B$
- $C = A \text{ and } B$

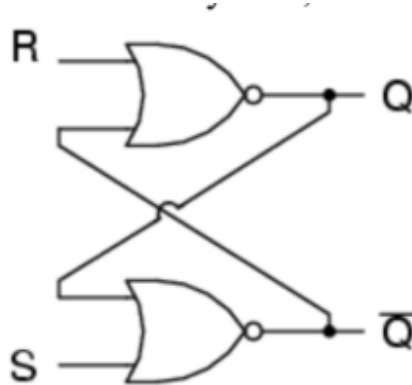
#### Szekvenciális logikai hálózat:

- függ a **bemenetektől** és a **hálózat belső állapotától**
- aszinkron: nincs ütemező órajel
- szinkron: csak órajelnél vált állapotot (CPU)



**S-R tároló:**

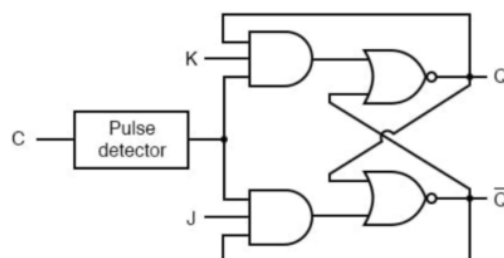
- S: set, 1-re állítja a kimenetet
- R: reset, 0-ra
- $S = 0$  és  $R = 0$ , akkor tartja az értékét (memória)
- $S = 1$  és  $R = 1$  érvénytelen, mert kimenet és a kimenet negáltja is 0



S	R	Q	$\bar{Q}$
0	0	latch	latch
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

**J-K tároló:**

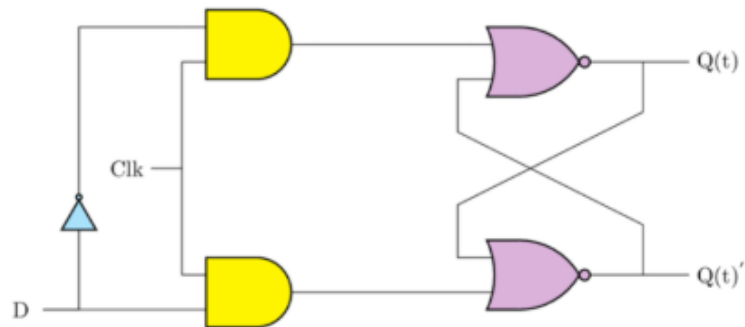
- működése az S-R tárolóéhoz hasonló, viszont ez egy szinkron működésű szekvenciális logikai hálózat
- J: set, 1-re állít
- K: reset, 0-ra állít
- $S = 0$ ,  $R = 0$ , tartja az értékét (memória)
- $S = 1$ ,  $r = 1$ , megváltoztatja az értékét az előző kimenet negáltjára



C	J	K	Q	$\bar{Q}$
↑	0	0	latch	latch
↑	0	1	0	1
↑	1	0	1	0
↑	1	1	toggle	toggle
x	0	0	latch	latch
x	0	1	latch	latch
x	1	0	latch	latch
x	1	1	latch	latch

**D tároló:**

- Az S-R tárolót kiegészítjük „és” kapukkal, valamint egy léptető órajellel: Clk
- Az egyetlen bemenetet kettéágaztatjuk, egyik felét negáljuk  $\rightarrow$  nem lehet S és R egyszerre 1
- „statikus RAM”
- gyors elérés
- bonyolult felépítés
- CPU regiszterei, cache



## 2.3 A számítógép felépítése. Memóriák. CPU részei. Utasítás ciklus. Szubrutinhívás. Interrupt. Közvetlen memória hozzáférés.

### Hardver:

- elektronikus/mechanikus alkatrészek összessége
- kézbe vehető
- szoftver nélkül nem üzemképes

### Szoftver:

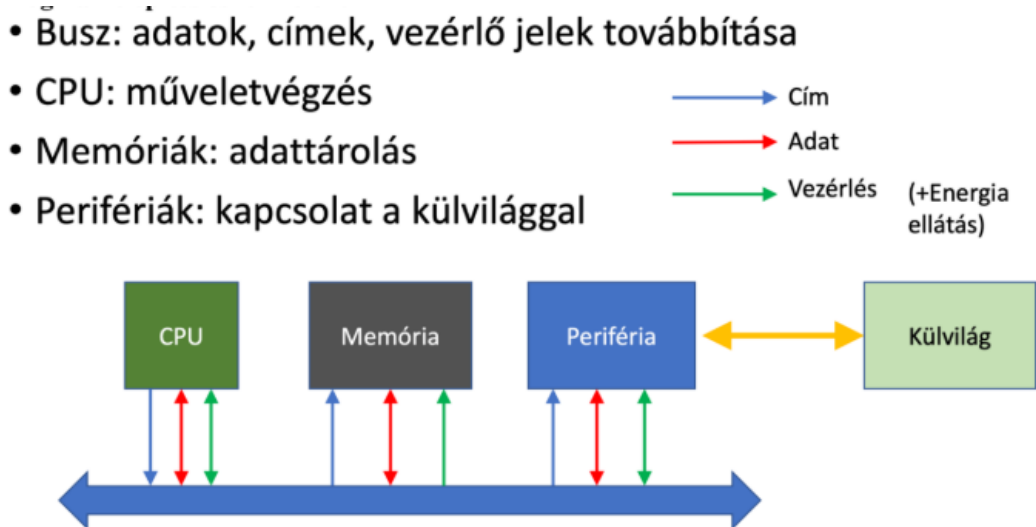
- számítógépet működtető programok

### Firmware:

- a kettő együtt
- olyan szoftver, mely egy hardverben található
- pl PC-nél bekapcsoláskor elinduló ROM-BIOS az alaplap egyik integrált áramkörébe töltött program

### Logikai felépítés és funkciók:

- **Busz:** adatok, címek, vezérlő jelek továbbítása
- **CPU:** műveletvégzés
- **Memóriák:** adattárolás
- **Perifériák:** kapcsolat a külvilággal



- busz: párhuzamos (manapság soros) jelköteg
- busz szélességek: egyszerre átvihető adat mérete
- adatbusz: 8, 16, 32, 64 bit, szinte mindig akkumulátor regiszter mérete
- címbusz: memória max méretét adja meg

**Memóriák – tárolók hierarchia szintjei:**

- **regiszterek:**

- a CPU belső tárolói
- nagyon gyors hozzáférés az adatokhoz
- közvetlenül a CPU-ban találhatóak
- utasítások végrehajtása
- adatok köztes tárolása

- **cache:**

- kis méretű, gyors, közel a processzorhoz
- az aktuálisan leggyakrabban használt adatokat, utasításokat tárolja
- cél: memória-hozzáférési idő csökkentése, rendszer teljesítményének javítása

- **operatív tár** (RAM – random access memory):

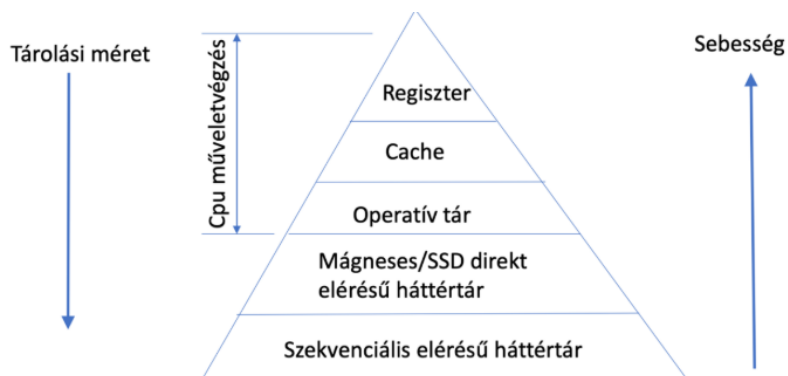
- adatok, utasítások átmeneti tárolása
- nagyobb kapacitás, mint a cache és regiszterek, de lassabb hozzáférés
- a futó programok számára ideiglenesen tárolódnak itt adatok

- **Mágneses / SSD direkt elérésű háttértár:**

- mágneses lemezeket (merevlemezeket) vagy szilárdtest meghajtókat (SSD) használ
- nagyobb kapacitás
- adatok hosszútávú tárolása

- **Szekvenciális elérésű háttértár**

- szalag típusú adathordozók
- adatok egymás után találhatóak
- ilyen sorrendben történik a hozzáférés
- lassabb



**CPU:**

- központi feldolgozó egység
- operatív memóriából olvassa be a program utasításait és az adatokat
- az utasításokat dekódolja, végrehajtja
- eredmények operatív memóriában
- buszok vezérlése: címek kiküldése, vezérlőjelek, memória/periféria címzése, adat bekérése/kiküldése buszon (olvasás/írás)
- órajel működteti → szekvenciális
- gyorsítani lehet: cache, utasítás végrehajtó egység számának növelése

**CPU részei:**

- regiszterek:
  - processzoron belüli memória
  - adatok, címek, műveletek eredményei
  - az utasítások a busz nélkül elérik
- ALU
  - aritmetikai-logikai egység
  - aritmetikai műveletek: összeadás, kivonás, a++, a-, 2-es komplement képzés, néha egész számok szorzása/osztása, bitek eltolása
    - \* lebegőpontos műveletekhez szoftver, vagy társ(-, vagy co)processzor
  - logikai műveletek: negálás, és, vagy, kizáró vagy, összehasonlítás: kivonás, eredménye csak flag-ekben jelenik meg

**Utasítás ciklus:**

- végrehajtandó utasítás címe programszámláló regiszterben
- utasítás beolvasása a memóriából (fetch)
- utasítás dekódolása, ha vannak, akkor paraméterek beolvasása memóriából
- utasítás végrehajtása, eredmény tárolása (ha van)
- következő utasítás címének megadása: programszámláló regiszter a végrehajtott utasítás hosszával inkrementálódik

**Szubrutinhívás:**

- egy korábbi kódrészlet újraahívása
- a következő utasítás címe veremtarba kerül, a program oda fog visszatérni
- újra használható a kód

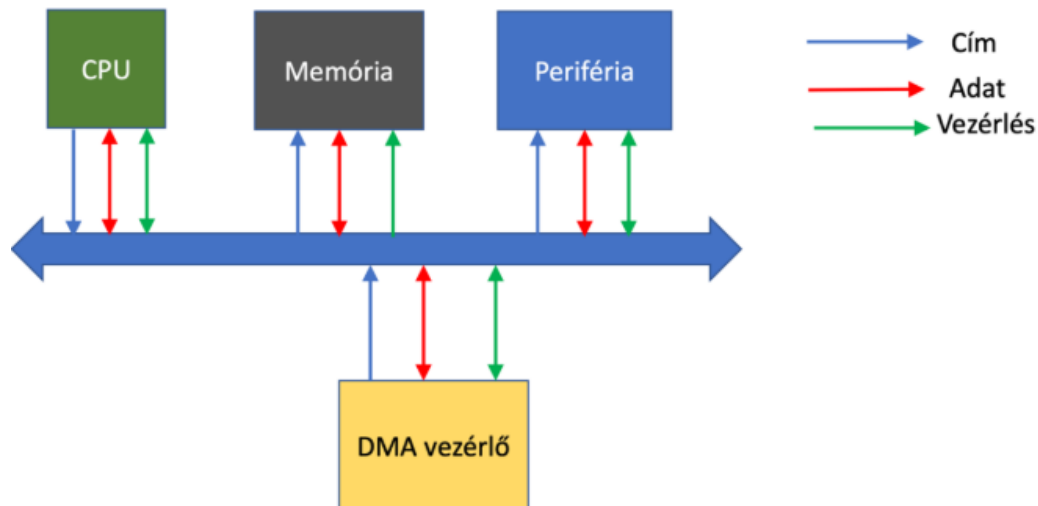
**Interrupt:**

- megszakítja az adott utasítást
- eltárolja, hogy hova kell visszatérjen
- megszakítás kezelése (ISR – interrupt service routine)
- visszatérés oda, ahol félbe lett szakítva

**Közvetlen memória hozzáférés:**

- DMA – direct memory access
- a művelet közben nincs nagy számítási igény: buszt kell vezérelni, címet növelni 1-gyel
- speciális áramkör: DMA vezérlő

- a CPU megmondja a DMA vezérőnek, hogy honnan, hova, hány bájtot
- a DMA vezérő elkéri a buszt a CPU-tól, ha annak épp nincs szüksége rá
- DMA vezérő átvisz 1 bájtot a perifériából a saját adatregiszterébe
- a DMA vezérő által elkért buszon átvisz 1 bájtot a memóriába (írás esetén fordítva)
- DMA vezérő visszaadja a buszt
- DMA újra elkéri a buszt
- az utolsó bájt átvitele után nem kéri el a buszt, IRQ (interrupt request) -val jelzi, hogy az átvitel kész
- busz arbitáció: busz elkérése





## 2.4 Adatszerkezetek. Tömbök, kapcsolt listák, gráf, fa, verem, sor.

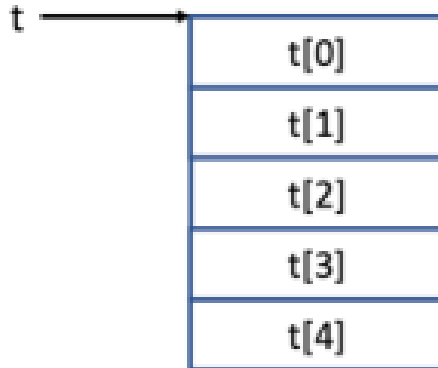
### Pointer:

- nem adatot, hanem címet tárol
- az adatot indirekt módon tudjuk elérni
- típusa: ilyen típusú adatot tartalmaz a cím, amire a pointer mutat

Adatokat különböző adattárolókban lehet tárolni, melyek más-más módon működnek, attól függően érdemes kiválasztani, melyiket szeretnénk használni, hogy mire használjuk őket.

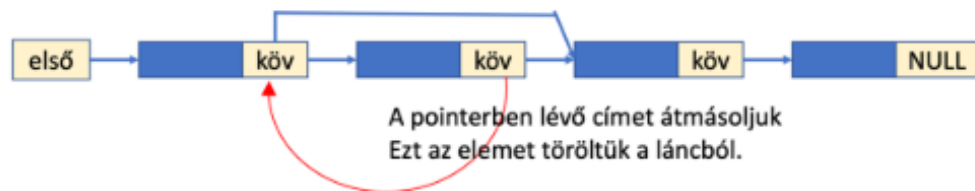
### Tömb:

- azonos típusú adatok
- az adatok indexelve vannak (számozva)
- az index segítségével férhetünk hozzá bármelyik adathoz (**kicímzés** lehetséges!!!!)
- egymást követő memóriacímeken van tárolva
- deklarálásnál meg van szabva, hány elemű
- egy adott elemhez konstans idővel, bejárás nélkül férünk hozzá
- beszúrás/törlés nem hatékony
- vannak lineárisak és többdimenziósak is: mátrixok
- rendezetlen tömbben lineáris keresés:  $O(n)$
- rendezett tömbben bináris keresés (intervallumfelezés):  $O(\log_2 n)$

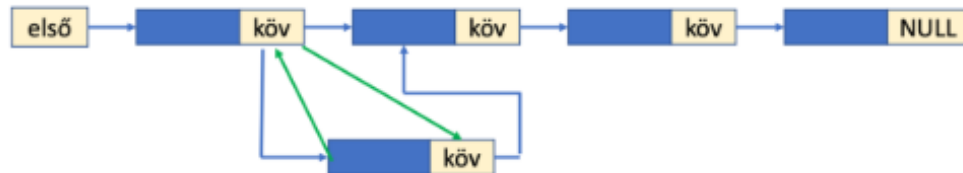


### Kapcsolt lista:

- Adatok olyan sorrendje, ahol a sorrendet a pointerok határozzák meg
- beszúrás/törlés hatékony
- bejárás, valamint **egy elem keresése** is lineáris bonyolultságú
- lehet egy,- és kétirányú lánc
- végjel: NULL pointer
- az adatok sorrendje a memóriában tetszőleges, csak a pointereket változtatjuk

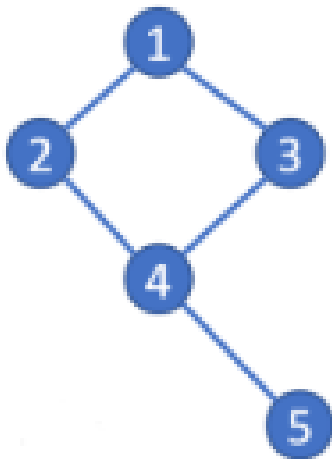


### Beszúrás:



**Gráf:**

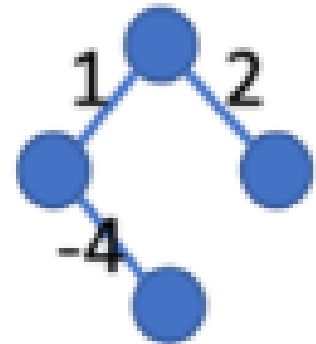
- sorszámozott csomópontok és az azokat összekötő élek halmaza
- szomszédok: összekötött csomópontok
- $\deg(u)$ : egy adott csomópont foka a befutó élek száma
- ha  $\deg(u) = 0$ , akkor a csomópont izolált pont
- egyik csomópontból ( $v_0$ ) egy másikba ( $v_n$ ) haladó élek halmaza az út
- $P(v_0, \dots, v_n)$  út zárt, ha  $v_0 = v_n$
- egy út egyszerű, ha minden pontja különböző
- kör: 3-nál hosszabb egyszerű, zárt út
- összefüggő: olyan gráf, melynek bármelyik 2 pontja közt létezik út
- teljes: minden csomópont mindegyik másikkal össze van kötve
- címkézett: az élekhez súlyokat rendelünk
- súlyozott: nemnegatív címkék
- irányított: az éleknek iránya van
- tárolásuk: szomszédsági mátrix:  $a_{ij} = 1$ , ha i-ből j-be halad él, egyébként 0



1. ábra: \*  
Egyszerű gráf



2. ábra: \*  
Teljes gráf

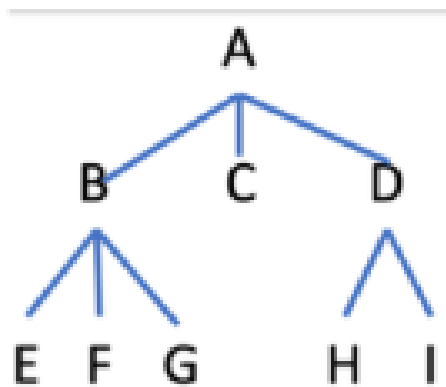


3. ábra: \*  
Súlyozott gráf

**Fa:**

- Köröket nem tartalmazó gráf
- elemek véges ( $T$ ) halmaza, mely
  - tartalmaz egy kitüntetett gyökérelemet
  - a többi elem nemnulla diszjunkt részfája  $T$ -nek
- tárolás:
  - $\text{info}(k)$  – az elem adatai
  - $\text{gyermek}$  – az első gyermek indexe
  - $\text{testvér}$  – az első testvér indexe

- bináris fa: egy szülőnek max 2 leszármazottja lehet

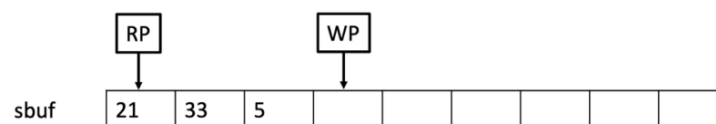


### Veremtár/stack:

- LIFO: Last In First Out
- Push: elemet a verembe rak
- Pop: elemet leemel a verem tetejéről
- alkalmazások: függvényhívás, rekurzió, böngésző „vissza”, szövegszerkesztő „undo” gombja
- SP: stack pointer: a verem tetejét mutatja

### Sor/Queue:

- FIFO: First In First Out
- 2 mutató: WP, RP (write, read)
- írás/olvasás előtt/után a mutatót növelni kell



## 2.5 Algoritmusok. Bejárás, keresés, rendezés. Algoritmusok bonyolultsága. Rekurzió.

**2.6 Az adatbázisok alapjai. Adatmodellezés. Kapcsolatok típusai. Relációs adatbázismodell. Relációk jellemzői. A relációs algebra műveletei. SQL alapok, lekérdezések.**

- 2.7** Az operációs rendszer céljai, feladatai. Folyamatok kommunikációja. Ütemezési algoritmusok az operációs rendszerben. Termelő-fogyasztó probléma. Postaláda kezelés. Szemaforok.

**2.8** Holtpont az operációs rendszerben. Holtpont kezelése. Holtpont észlelése. Holtpont megelőzés. Bankár algoritmus.



## 2.9 Shannon hírközlési modellje. Forráskódolás, prefix kód.

## 2.10 Hálózati kommunikáció, OSI/ISO modell. Hálózati elsőbbségi elvek. Az interneten használt kommunikációs protokollok. IP cím, maszkolás, DNS rendszer.

- 2.11** Az objektum fogalma, objektum-orientált elvek. Az osztály fogalma. Struktúrák. Tagfüggvények. Konstruktor. Destruktor. Statikus tagok. Barátság, friend függvények.

## 2.12 Operátorok túlterhelése az objektum orientált programozásban. C++ IO, new, delete operátorok túlterhelésének szabályai. Osztály hierarchiák.

## 2.13 Öröklődés, egységbe záras az objektum-orientált programozásban. Protected osztálytagok. Kompozíció. Aggregáció. Többszörös öröklődés.

## 2.14 Polimorfizmus az objektum-orientált programozásban. Virtuális alaposztályok. Abstract osztály. Általánosított osztályok.

## 2.15 Standard Template Library a C++-ban. Tárolók. Bejárók. Algoritmusok. Függvényobjektumok.

## 2.16 Fuzzy halmazok alapjai, műveletek fuzzy halmazokon.



## 2.17 Fuzzy következtető módszer, defuzzifikációs módszerek.

## 2.18 Aggregációs operátorok, általános hatványközep, OWA.

**2.19 A .net rendszer részei: GC, CIL, assembly-k. Esemény vezérelt programok felépítése windows alatt.**

## 2.20 Grafikus adattárolás (vektor, raster), alkatrész modellezési módszerek.

## 2.21 3D->2D vetítési algoritmusok, a window-viewport transzformáció.

## 2.22 Görbe közelítési módszerek: természetes spline, Bezier, Catmull-Rohm görbék.

## 2.23 Láthatóság, árnyalás, megvilágítás, színmodellek, anyagmodellek.

## 2.24 Képfeldolgozás, konvolúció, élkeresés, szegmentálás, alakfelismerés.



## 2.25 Neurális hálózatok alapjai, a Perceptron, a Perceptron tanítása.

## 2.26 Felügyelt és felügyelet nélküli tanulás. Mesterséges neurális hálózatok.

## 2.27 Evolúciós algoritmusok, evolúció stratégiák, genetikus programozás.

- 2.28** Az "M" nyelv (Matlab) jellegzetességei: változók, vektorok és mátrixok, feltételes végrehajtás, ciklusok, számtani sorozatok, függvény definíció, diagram rajzolás.

**2.29** Ismertesse az alábbi, mechatronikában tanult elvek programmal történő megvalósítását: állapotgép, ARMA modell.