Mechatronika szigorlat

Vári Gergő

2026. február 18.

Tartalomjegyzék

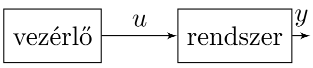
1 Mechatronika

1.1 Hasonlítsa össze a vezérlést és a szabályozást: a hatáslánc jellege, zavarjelekkel szembeni ellenállás, a mért mennyiség fajtája, reakció idő, illetve az irányításhoz felhasznált eszközök költsége szerint!

Vezérlés:

- nyílt hatáslánc: nincs visszacsatolás
- a rendszer belső jellemzőit/bemeneteit mérjük, valamint részben függ a külső feltételektől is, de a kimenetet (irányítani kívánt jellemzőt) nem mérjük
- logikai függvényt hozunk létre
- gyors reakció
- csak determinisztikus zavarok kezelésére képes
- vagy egyszerű (olcsó), de így kevés dolgot veszünk figyelembe
- vagy komplex (drága) és sok mindent figyelembe veszünk

vezérlés hatáslánca:



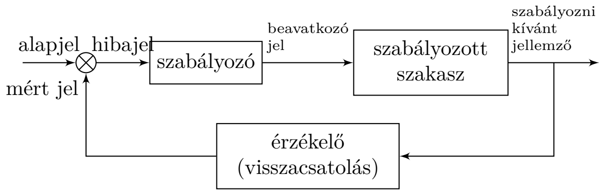
vezérlés fajtái:

- idővezérlés – pl. lámpa időzített fel-, lekapcsolása
- lefutó vezérlés
  - sorrendi – pl. csomagolás
  - feltétel

Szabályozás:

- zárt hatáslánc: van visszacsatolás
- az irányítani kívánt jellemző is tudja befolyásolni a folyamatot
- instabil rendszert is képes kezelni (stabilizálni)
- lassabb reakció, pontatlanabb
- képes kiküszöbölni a zavarjeleket
- alacsony műszaki komplexitás:
- mérés
- kivonás
- jelerősítés

szabályozás hatáslánca:



szabályozás fajtái:

- értéktartó – pl. hőmérséklet
- követő – pl. pálya
- kaszkád – több hurkú szabályozás
- állapotszabályozás – állapottér modell alapján szabályoz – többváltozós rendszerek – pl. inverz inga egyensúlyban tartása

1.2 Ismertesse az alábbi fogalmakat: linearitás, statikus/dinamikus rendszer, időinvariáns/idővariáns rendszer, folytonos/diszkrét idejű rendszer, koncentrált/elosztott paraméterű modell!

Linearitás:

- érvényes a szuperpozíció elve
- matematikai szemmel 2 feltétel:
  - számmal szorzás
  - hatások összege
- ha a rendszer u_i gerjesztésre y_i választ ad és u_j gerjesztésre y_j választ ad, akkor u_i és u_j lineáris kombinációjára y_i és y_j lineáris kombinációját adja

$$u = \lambda_i u_i + \lambda_j u_j \rightarrow y = \lambda_i y_i + \lambda_j y_j$$

- nem linearitás feloldása: munkaponti linearizálás

Statikus/dinamikus rendszer:

- statikus:
  - bármely pillanatban a bemenő jelek pillanatnyi értékei meghatározzák az adott pillanatban kimenő jelek értékeit – pl. lámpa fel-le kapcsolva
- dinamikus:
  - valós fizikai rendszerek működésének időbeli lefolyását is leírják, jellemzően idő szerinti differenciálegyenletek segítségével – pl. rezgéstani példák
  - memória jelleggel rendelkeznek

Időinvariáns/idővariáns rendszer:

- ha a rendszer $u(t)$ bemenetre $y(t)$ kimenetet ad és $u(t-\tau)$ bemenetre $y(t-\tau)$ kimenetet ad, akkor a rendszer időinvariáns – pl. fékrendszer: ahogy melegszik, változik a súrlódás
- „ma, holnap és két év múlva is ugyanúgy viselkedik”

Folytonos/diszkrét idejű rendszer:

- folytonos idejű:
  - $u(t)$ és $y(t)$ egy vizsgált $[T_a, T_b] \subseteq \mathbb{R}$ időintervallumban minden időpontban értelmezve van: $t \in [T_a, T_b] \subseteq \mathbb{R}$
- diszkrét idejű:
  - $u(t)$ és $y(t)$ csak diszkrét $t = T_k, k \in \mathbb{N}, t \in \{..., T_{-k}, ..., T_{-1}, T_0, T_1, ..., T_k, ...\}$ időpontok sorozatában van értelmezve, ahol: $T_{k-1} < T_k < T_{k+1}$
  - általában $T_k = k \cdot T_s$, ahol T_s a mintavételezési idő
  - $u[k] := u(T_k)$
  - $y[k] := y(T_k)$

Koncentrált/elosztott paraméterű modell:

- koncentrált paraméterű leírás:
  - a vizsgált valós fizikai rendszer összefüggéseit azok jellegétől függően egy adott térrészben összegezzük, vagy kiátlagoljuk, és egyetlen egyenlettel helyettesítjük

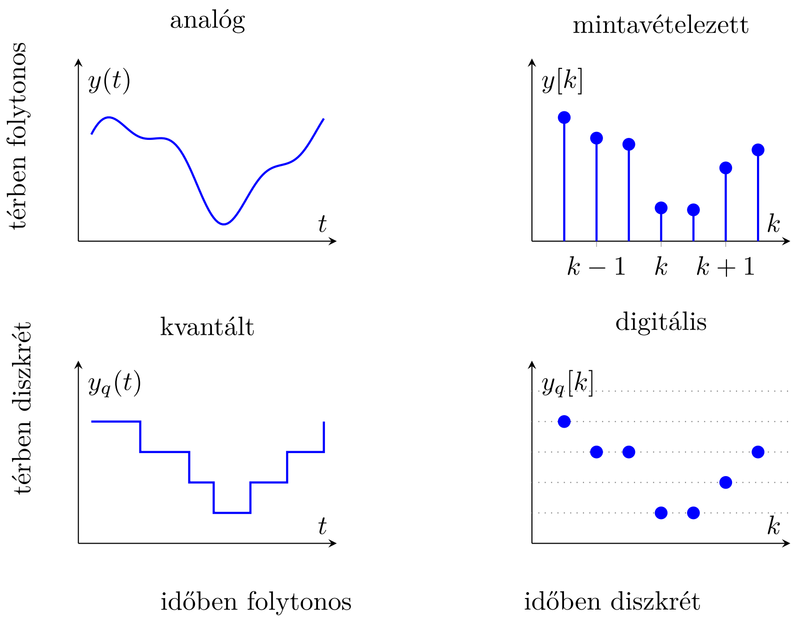
1.3 Hasonlítsa össze a rendszereket a leírt állapotváltozók (dimenzió) száma (véges/végtelen), valamint annak diszkrét/folytonos jellege szerint!

A rendszer dimenziója:

- a rendszer állapotváltozóinak száma
  - állapotváltozó: az állapot egyértelmű leírására szolgálnak
  - állapot: a múlt összesített hatása
- végtelen: végtelen számú állapotváltozóval írható le a rendszer
- véges: véges számú állapotváltozóval írható le a rendszer
  - $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$

Diszkrét/folytonos jelleg:

- diszkrét állapotú:
  - ha egy véges dimenziójú rendszer állapotváltozói véges számú értéket vehetnek fel, akkor a rendszer diszkrét állapotú
  - pl. digitális technika: 0 vagy 1
  - állapotautomaták:
    * az állapotbeli változások egy-egy esemény hatására ugrásszerűen mennek végbe
    * tipikusan szekvenciális hálózatok
- folytonos állapotú:
  - az állapotváltozók folytonos értéket vesznek fel
  - pl. sebesség



Diszkrét idejű folytonos értékű rendszer:

- differencia egyenletekkel írható le $\underline{x}[k+1] = \underline{\Phi x}[k] + \underline{\Gamma u}[k]$
- az állapotváltozók tetszőleges értéket vehetnek fel, de a diszkrét idő miatt ugrásszerűen mennek végbe

Folytonos idejű folytonos értékű rendszer:

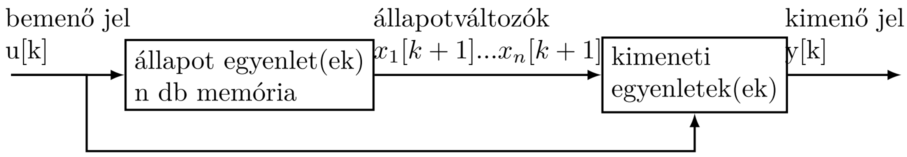
- differenciál egyenletekkel írható le $\underline{\dot{x}}(t) = \underline{Ax}(t) + \underline{Bu}(t)$
- állapotváltozók tetszőleges értéket vehetnek fel, folytonos idő miatt folyamatosan változnak

1.4 Írja fel a diszkrét idejű állapottér modell általános algebrai alakját, magyarázó ábrával szemléltesse! Ismertesse az összefüggésben szereplő együtthatók szerepét!

Állapottér modell:

- egyfajta matematikai modell
- állapotváltozók segítségével
- általános állapottér modell:

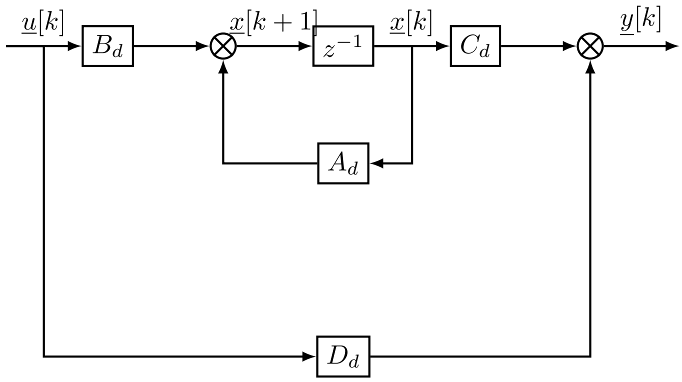
- lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek diszkrét idejű állapottér modellje:



- MIMO (Multiple Input Multiple Output) diszkrét idejű állapotegyenlete:

$$\begin{aligned}\underline{x}[k+1] &= \underline{\underline{A}}_d\underline{x}[k] + \underline{\underline{B}}_d\underline{u}[k]\\ \underline{y}[k] &= \underline{\underline{C}}_d\underline{x}[k] + \underline{\underline{D}}_d\underline{u}[k]\end{aligned}$$

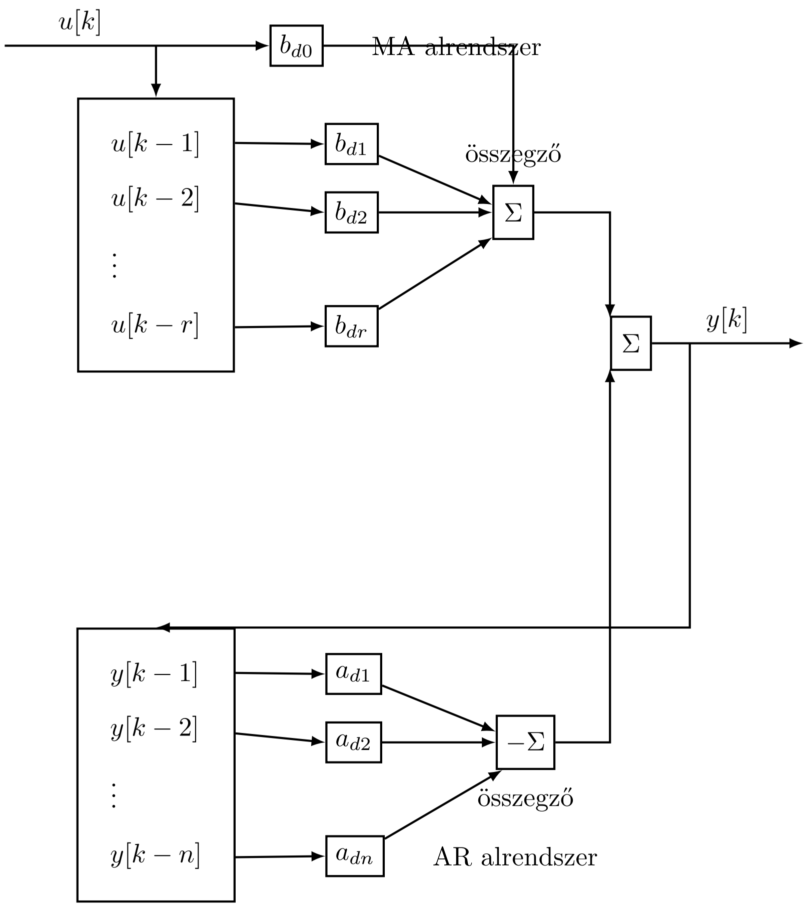
  - $\underline{\underline{A}}_d$: állapotmátrix – a jelenlegi állapot hatása a következő állapotra
  - $\underline{\underline{B}}_d$: bemeneti mátrix – a jelenlegi bemenet hatása a következő állapotra
  - $\underline{\underline{C}}_d$: kimeneti mátrix – az állapot hatása a kimenetre
  - $\underline{\underline{D}}_d$: segédmátrix – a bemenet hatása közvetlenül a kimenetre
  - a mátrixok dimenziója függ a bemenetek és kimenetek számától, pl. egy SISO (Single Input Single Output) rendszernél: $\underline{\underline{B}}_d \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\underline{\underline{C}}_d \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $\underline{\underline{D}}_d \in \mathbb{R}^{1\times 1}$
  - hatásvázlat:



1.5 Írja fel a diszkrét rendszerek be-kimeneti modellezését reprezentáló ARMA-alakját!

ARMA-alak:

- diszkrét idejű rendszer:
  - $u(t)$ és $y(t)$ csak diszkrét $t = T_k, k \in \mathbb{N}, t \in \{..., T_{-k}, ..., T_{-1}, T_0, T_1, ..., T_k, ...\}$ időpontok sorozatában van értelmezve, ahol: $T_{k-1} < T_k < T_{k+1}$
  - általában $T_k = k \cdot T_s$, ahol T_s a mintavételezési idő
  - $u[k] := u[T_k]$
  - $y[k] := y[T_k]$
- AutoRegresszív Mozgó Átlag
- AR – az $y[k]$ kimenő jel korábbi értékei hogyan hatnak vissza a kimenő jel aktuális értékeire
- MA – az $u[k]$ bemenő jel korábbi értékei (mozgó átlaga) milyen hatással bírnak az aktuális kimenetre
- mi a bemenő és kimenő jel összefüggésének felírására használjuk
- előnyös, mert közvetlenül látszik a memória jelleg, mely léptető (shift) memóriával valósítható meg
- általános alak:
$$\sum_{i=0}^{n} a_{di} y[k-i] = \sum_{i=0}^{r} b_{di} u[k-i]$$
- ezt átrendezve a kimenet új értékének számítása:
$$y[k] = \sum_{i=0}^{r} b_{di} u[k-i] - \sum_{i=1}^{n} a_{di} y[k-i], \text{ ahol } a_{d0} = 1\text{: az } y[k] \text{ együtthatója}$$



1.6 Ismertess diszkrét rendszerek z eltolási operátorral való képzését! Írja fel az ARMA-alakból az impulzusátviteli függvény képzését!

Eltolási operátor - z:

- egy adatot a jövőbe tol, ezt nem lehet mindig megvalósítani (csak egy múltbeli adatot tudunk a saját jövőjébe tolni), de az inverzének a megvalósítása könnyű
- az eltolási operátor inverze egy időkésleltető elem:

$$x[k] \longrightarrow \boxed{\tfrac{1}{z}} \longrightarrow x[k-1]$$

- az eltolási operátor alkalmazása:

$$\begin{aligned} x[k+i] &= z^i x[k] \\ z^{-i} x[k+i] &= x[k] \\ z^{-i} x[k] &= x[k-i] \end{aligned}$$

- az ARMA-modell algebrai alakja:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{r} b_{di} u[k-i] - \sum_{i=1}^{n} a_{di} y[k-i]$$

- ARMA-modell az eltolási operátorral:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{r} z^{-i} b_{di} u[k] - \sum_{i=1}^{n} z^{-i} a_{di} y[k]$$

- átrendezve:

$$\sum_{i=0}^{n} z^{-i} a_{di} y[k] = \sum_{i=0}^{r} z^{-i} b_{di} u[k] \quad a_{d0} = 1$$

- be- és kimeneti összefüggés eltolási operátorral, ahol $w(z)$ az impulzus átviteli függvény:

$$y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{r} z^{-i} b_{di}}{\sum_{i=0}^{n} z^{-i} a_{di}} u(z) = w(z) u(z) \quad a_{d0} = 1$$

1.7 Ismertesse a diszkrét idejű konvolúció szerepét, összefüggését!

Konvolúció:

- bevezetünk ún. „egységnyi” jeleket – vizsgálójeleket
- ebből tudunk következtetni a rendszer tetszőleges bemenetre adott válaszára
- összetett bemenő jelek válaszának meghatározása komponensekre bontással:
  - a bemenőjelet vizsgálójelekből álló komponensekre bontjuk
  - meghatározzuk az elemi komponensek elemi hatását
  - az időinvariancia és a szuperpozíció elvének kihasználásával az elemi hatásokat összegezzük
- diszkrét idejű egységimpulzus:

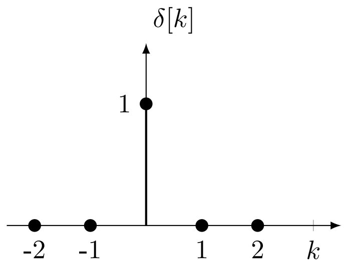
$$\delta[k] = \begin{cases} 0 \text{ ha } k \neq 0 \\ 1 \text{ ha } k = 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

  - eltolás esetén:

$$\delta[k-K] = \begin{cases} 0 \text{ ha } k \neq K \\ 1 \text{ ha } k = K \end{cases} \qquad k, K \in \mathbb{Z}$$

  - szorzás esetén

$$Y_0\delta[k] = \begin{cases} 0 \text{ ha } k \neq 0 \\ Y_0 \text{ ha } k = 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad Y_0 \in \mathbb{R}$$



- diszkrét idejű egységugrás:

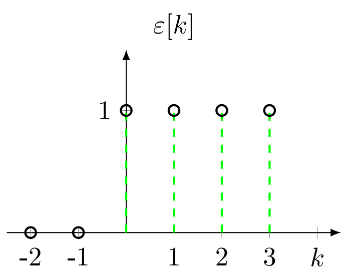
$$\varepsilon[k] = \begin{cases} 0 \text{ ha } k < 0 \\ 1 \text{ ha } k \geq 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

  - eltolás esetén:

$$\varepsilon[k-K] = \begin{cases} 0 \text{ ha } k < K \\ 1 \text{ ha } k \geq K \end{cases}$$

  - szorzás esetén:

$$Y_0\varepsilon[k] = \begin{cases} 0 \text{ ha } k < 0 \\ Y_0 \text{ ha } k \geq 0 \end{cases} \qquad k, K \in \mathbb{Z} \quad Y_0 \in \mathbb{R}$$



- amikor egy diszkrét idejű rendszernek a bemenő jele egy diszkrét idejű egységimpulzus, akkor a kimenő jelet súlyfüggvénynek (vagy impulzusválasznak) nevezzük
  - jele: $w[k]$

- vizsgálójelek alapösszefüggései:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[i] = 1$$

- belátható, hogy egy diszkrét idejű függvény konvolúciója az egységimpulzussal egy adott K érték mellett a függvény K helyen felvett értékét adja vissza

$$y[K] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y[i]\delta[K-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y[K-i]\delta[i] \quad K \in \mathbb{Z}$$

- az egységugrás értéke a k helyen kiszámolható az egységimpulzus függvényből

$$\varepsilon[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta[i] \quad k \in \mathbb{Z}$$

- az egységugrás két szomszédos helyen felvett értéknek különbsége megegyezik az egységimpulzus függvény megfelelő helyen felvett értékével

$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1] \quad k \in \mathbb{Z}$$

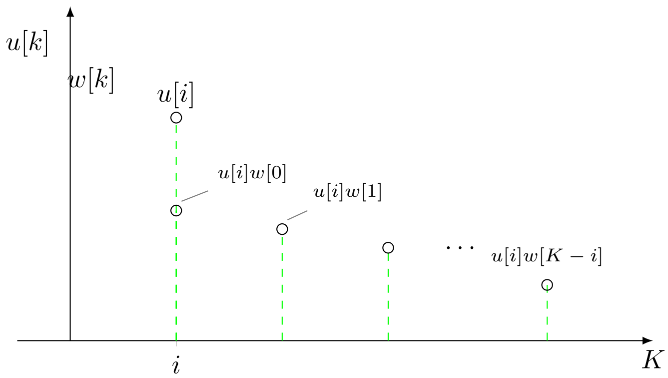
- egy diszkrét idejű rendszer kimenete k-adik időpillanatban a súlyfüggvénnyel és a bemenettel felírva:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{k} w[k-i]u[i] \quad k \geq 0$$

- mivel $w[k-i]u[i]$ az i-edik időpillanat bemenetének a kimenetre való hatása

$$u[k=K] = u[k=K]\delta[(k-K)=0]$$

$$y[k] = \sum_{i=0}^{k} w[k-i]u[i] \quad k > 0$$

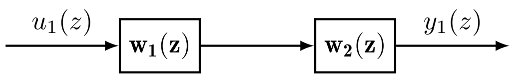


1.8 Adott két diszkrét idejű átviteli függvény. Vezesse le az eredő átviteli függvény összefüggését, ha a két átviteli függvény sorba, párhuzamosan, illetve visszacsatolva (pozitív és negatív) kapcsolódik egymáshoz. Mutassa be, a hatásvázlat átalakításának szabályait (elágazási pont áthelyezése tag mögé és tag elé, illetve összegzési pont áthelyezése tag mögé és tag elé)!

Hatásvázlat:

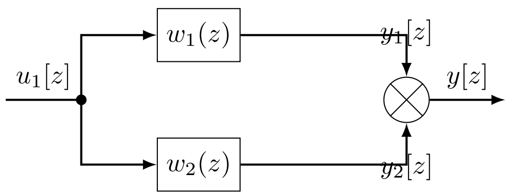
- rendszer működését lehet ábrázolni
- bal oldalt a bemenet(ek), jobb oldalt kimenet(ek)
- grafikus úton kapunk átviteli függvényt
- nyíl irányával jelezzük a jel haladási irányát
- műveletek:
  - elágazás
  - összegzés (negatív esetén az érintett negyed besatírozása)
- az impulzus átviteli függvényeket blokkban ábrázoljuk

Sorba kapcsolás:



$$u_1(z) \cdot w_1(z) \cdot w_2(z) = y_1(z)$$

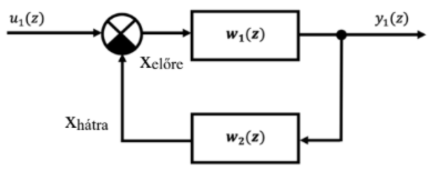
Párhuzamosan kapcsolás:



$$y(z) = y_1(z) + y_2(z) = w_1(z)u_1(z) + w_2(z)u_1(z)$$
$$y(z)(w_1(z) + w_2(z))u_1(z) = w_e(z)u_1(z)$$

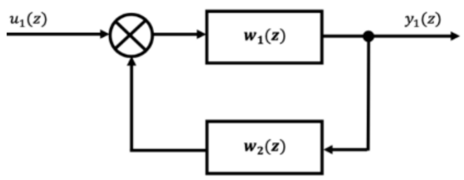
Visszacsatolás, elágazási pontok, összegzési pontok:

- negatív visszacsatolást szoktunk leggyakrabban alkalmazni



$$x_{\text{előre}}(z) = u_1(z) - x_{\text{hátra}}(z) = u_1(z) - w_2(z)y_1(z)$$
$$y_1(z) = x_{\text{előre}}(z)w_1(z) \rightarrow x_{\text{előre}}(z) = \frac{y_1(z)}{w_1(z)}$$
$$y_1(z) = u_1(z)w_1(z) - w_2(z)w_1(z)y_1(z)$$
$$\frac{y_1(z)}{u_1(z)} = \frac{w_1(z)}{1 + w_1(z)w_2(z)}$$

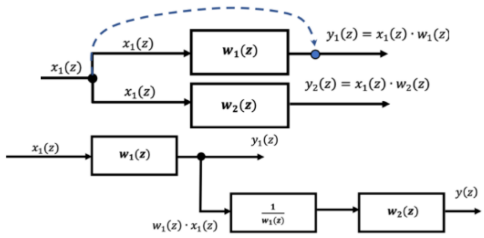
- pozitív visszacsatolás:



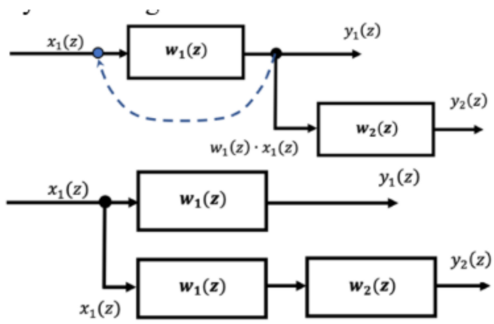
  – a negatív visszacsatoláshoz hasonlóan levezethető, az eredmény:

$$\frac{y_1(z)}{u_1(z)} = \frac{w_1(z)}{1 - w_1(z)w_2(z)}$$

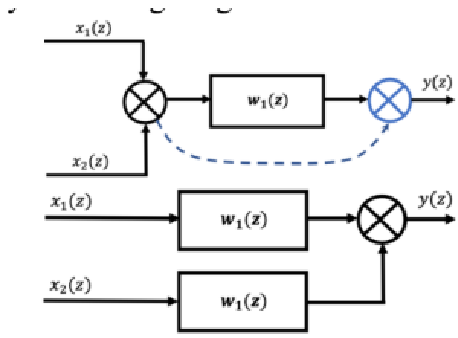
- elágazási pont áthelyezése a tag mögé:



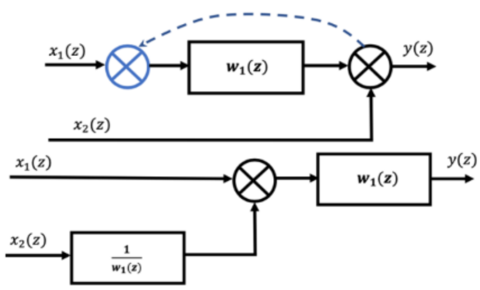
- elágazási pont áthelyezése a tag elé:



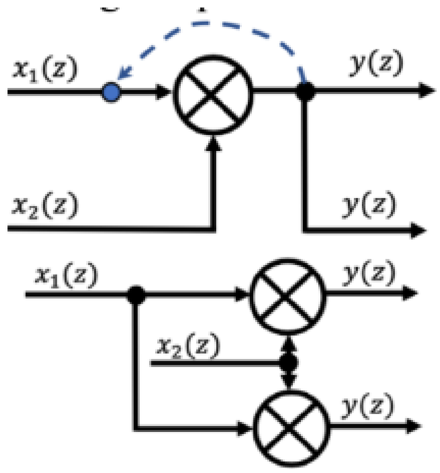
- összegzési pont áthelyezése a tag mögé:



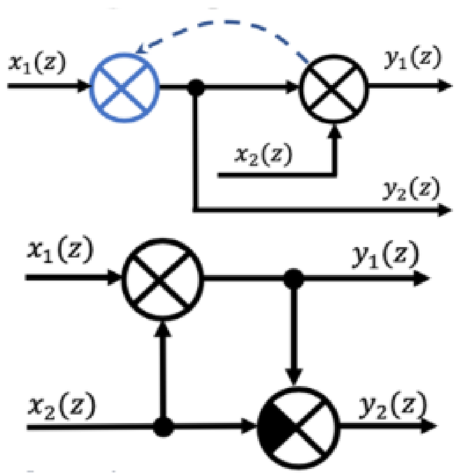
- összegzési pont áthelyezése a tag elé:



- elágazási pont áthelyezése összegzési pont elé:



- összegzési pont áthelyezése elágazási pont elé:



1.9 A lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek diszkrét idejű állapottér modell felhasználásával, előre tartó Euler módszer segítésével vezesse le a folytonos idejű lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek állapottér modellt!

Lineáris időinvariáns rendszerek diszkrét idejű állapottér modellje:

$$(1.)\quad \underline{x}[k+1] = \underline{\underline{A_d}}\,\underline{x}[k] + \underline{\underline{B_d}}\,\underline{u}[k]$$
$$(2.)\quad \underline{y}[k] = \underline{\underline{C_d}}\,\underline{x}[k] + \underline{\underline{D_d}}\,\underline{u}[k]$$

- az (1.)-es egyenletben vonjunk ki mindkét oldalból $\underline{x}[k]$-t (az előretartó Euler miatt):

$$\underline{x}[k+1] - \underline{x}[k] = \underline{\underline{A_d}}\,\underline{x}[k] + \underline{\underline{B_d}}\,\underline{u}[k] - \underline{x}[k]$$

- összevonás után osszunk le Δt-vel:

$$\frac{\underline{x}[k+1] - \underline{x}[k]}{\Delta t} = \frac{(\underline{\underline{A_d}} - \underline{\underline{I}})\,\underline{x}[k] + \underline{\underline{B_d}}\,\underline{u}[k]}{\Delta t}$$

- a folytonos idejű t_k diszkrét időben a k-adik időpillanatot jelenti, így tudunk helyettesíteni:

$$\frac{\underline{x}(t_{k+1}) - \underline{x}(t_k)}{\Delta t} = \frac{(\underline{\underline{A_d}} - \underline{\underline{I}})\,\underline{x}(t_k) + \underline{\underline{B_d}}\,\underline{u}(t_k)}{\Delta t}$$

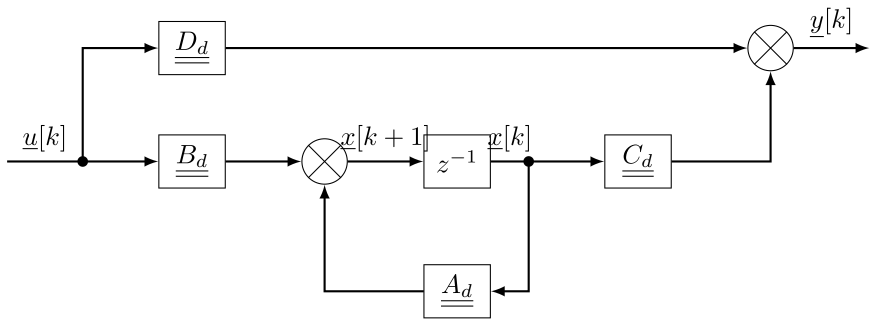
- szétbontva:

$$\frac{\underline{x}(t_{k+1}) - \underline{x}(t_k)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}(\underline{\underline{A_d}} - \underline{\underline{I}})\,\underline{x}(t_k) + \frac{1}{\Delta t}\underline{\underline{B_d}}\,\underline{u}(t_k)$$

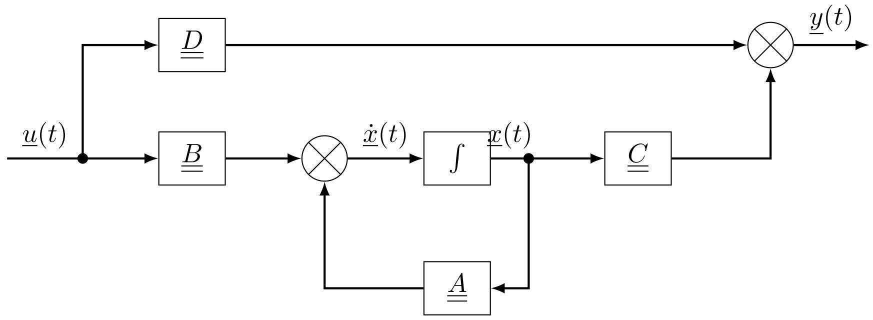
- vegyük a kifejezés határértékét, ha $\Delta t \to 0$:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}(t)$$
$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}\,\underline{u}(t)$$

- diszkrét idejű állapottér modell hatásvázlata:



- folytonos idejű állapottér modell hatásvázlata:

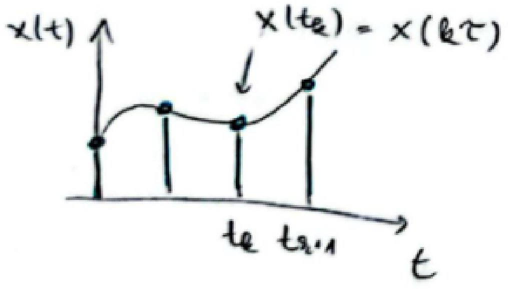


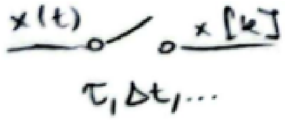
- így a mátrixok:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{\Delta t}(\underline{\underline{A_d}} - \underline{\underline{I}}),\quad \underline{\underline{B}} = \frac{1}{\Delta t}\underline{\underline{B_d}},\quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C_d}},\quad \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D_d}}$$

1.10 A z transzformáció összefüggését felhasználva ismertesse a Laplace transzformáció definícióját!

Mintavételezett jel:





- a mintavételezés eredményét **tömbös formában** lehet tárolni:

$x(0\tau)$	$x(1\tau)$	$x(2\tau)$	...

- ebből matematikai számsorozatot tudunk csinálni:

$$\{x_k\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

- állítsunk össze polinomot a sorozat elemeiből:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$

- általánosítás: $N \to \infty \to$ számsorozat $\to$ sor $\to$ hatványsor (függvénysor)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} \to \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} =: X(z)$$

$$x = z^{-1} \quad \text{Z-transzformáció}$$

- cél: $\Delta t = \tau \to 0$
  - tudjuk, hogy: $z = e^{\ln(z)}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k\tau) z^{-k\frac{\tau}{\tau}} \to \sum_{k=0}^{\infty} x(k\tau) e^{-\ln(z)k\frac{\tau}{\tau}}, \quad s := \ln(z)/\tau$$

- így:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k\tau) e^{-sk\tau}, \quad k\tau \to t$$

- $\tau \to 0\, (\Delta t \to 0)$:

$$\int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt := X(s)$$

Így tehát a Laplace transzformáció:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

- $f(t)$ belépő függvény, tehát $t \in [0, \infty) \to f(t)\varepsilon(t)$

1.11 Igazolja a Dirac impulzus és az egységugrás függvény Laplace transzformáltjait!

Dirac impulzus:

- végtelen nagy impulzus végtelen kicsi idő alatt

$$\delta(t,\tau) = \begin{cases} 0, \text{ ha } t \neq \tau \\ \infty, \text{ ha } t = \tau \end{cases}$$

- MOGI – rendszertechnika jegyzet: 3.15:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

- a Dirac impulzus Laplace-transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s\cdot 0} = 1$$

Egységugrás:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, \text{ ha } t < 0 \\ 1, \text{ ha } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_0^{\infty} \varepsilon(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} 1\cdot e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s}e^0\right) = \frac{1}{s}$$

1.12 Mutassa be, hogy az átviteli mátrix hogyan származtatható a lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek folytonos idejű állapottér modellből!

Lineáris idő invariáns rendszerek folytonos idejű állapottér modellje:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}(t)\\ \underline{y}(t) &= \underline{\underline{C}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}\,\underline{u}(t)\end{aligned}$$

- első lépésben Laplace transzformáljuk az egyenleteket:

$$\begin{aligned}s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) &= \underline{\underline{A}}\,\underline{X}(s) + \underline{\underline{B}}\,\underline{U}(s)\\ \underline{Y}(s) &= \underline{\underline{C}}\,\underline{X}(s) + \underline{\underline{D}}\,\underline{U}(s)\end{aligned}$$

- az 1. egyenlet átrendezve:

$$(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})\underline{X}(s) = \underline{x}(0) + \underline{\underline{B}}\,\underline{U}(s)$$

- $\underline{X}(s)$ kifejezése:

$$\underline{X}(s) = (s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{x}(0) + (s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{U}(s)$$

- $\underline{X}(s)$ visszahelyettesítve a kimeneti egyenletbe, majd rendezve:

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{\underline{\underline{C}}(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{x}(0)}_{\text{tranziens tag}} + \underbrace{\left(\underline{\underline{C}}(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{D}}\right)}_{\text{átviteli mátrix}}\underline{U}(s)$$

- Így az átviteli mátrix ($\underline{U}(s)$ együtthatója)

$$W(s) = \underline{\underline{C}}(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{D}}$$

  - a tranziens tag eltűnik, az állandósult viselkedést az átviteli mátrix írja le

1.13 Ismertesse az egytárolós arányos tag súly és átmeneti függvényeit! Válaszában térjen ki az időállandó fogalmára!

Arányos egytárolós tag – PT1:

$$W(s) = \frac{A}{s - p_1} = \frac{K}{1 + sT}$$

Arányos egytárolós tag súlyfüggvénye:

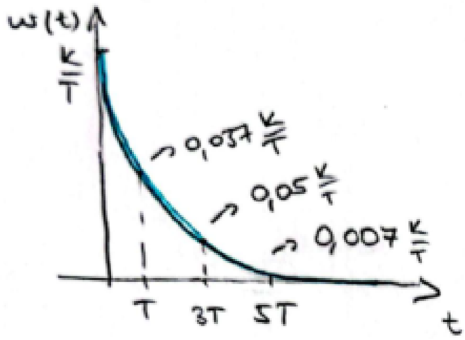
- az egységimpulzusra ($\delta(t)$-re) adott válasz
- $u(t) = \delta(t) \rightarrow U(s) = 1$

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{K}{1 + sT} \cdot 1$$

- a kérdés: $y(t) = w(t) = ?$

$$y(t) = w(t) = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right\} = \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}\varepsilon(t)$$

- grafikusan ábrázolva:



Arányos egytárolós tag átmeneti függvénye:

- egységugrásra ($\varepsilon(t)$-re) adott válasz
- $u(t) = \varepsilon(t) \rightarrow U(s) = 1/s$

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{K}{1 + sT}\frac{1}{s}$$

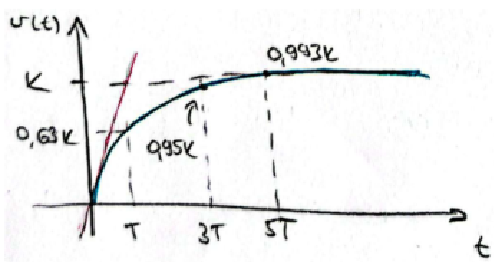
- a kérdés: $y(t) = v(t) = ?$

$$y(t) = v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(1 + sT)s}\right\} = K\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{T(s + \frac{1}{T})s}\right\} = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{T}}\right\}$$

$$A = T, \quad B = -T$$

$$v(t) = K\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right\} = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\varepsilon(t)$$

- grafikusan ábrázolva:



T és K változók az átmeneti függvénynél:

- K meghatározza, hogy hova konvergál a rendszer
- T meghatározza, hogy mennyi idő alatt konvergál

Időállandó fogalma:

- Az átviteli függvény időállandós alakjából s együtthatói, melyet az átviteli függvény gyöktényezős alakjából tudunk átalakítani
- így az időállandó(k) a gyöktényezős alak – mely s-re nézve egy valós együtthatójú racionális törtfüggvény – **pólusai** valós részének reciprokának mínusz egyszerese:

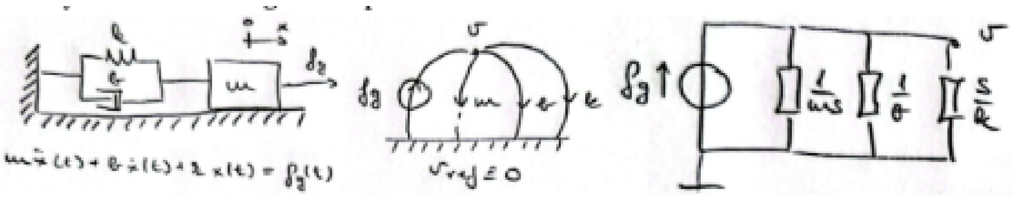
$$W(s) = \frac{b_r}{a_n} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_r)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

$$W(s) = \underbrace{\frac{b_r(-z_1)(-z_2) \dots (-z_r)}{a_n(-p_1)(-p_2) \dots (-p_n)}}_{\text{erősítés}} \frac{(1 - \frac{1}{z_1}s)(1 - \frac{1}{z_2}s) \dots (1 - \frac{1}{z_r}s)}{(1 - \frac{1}{p_1}s)(1 - \frac{1}{p_2}s) \dots (1 - \frac{1}{p_n}s)}$$

- időállandók: $T_1 = -\frac{1}{p_1}, T_2 = -\frac{1}{p_2}, \dots, T_n = -\frac{1}{p_n}$

1.14 Ismertesse az kéttárolós arányos tag súly és átmeneti függvényeit! Válaszában térjen ki a minőségi jellemzőkre!

Arányos kéttárolós tag – PT2 példával:



$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f_g(t)$$

$$V(s) = \frac{1}{ms + b + \frac{k}{s}} F_g(s) = \frac{s}{ms^2 + bs + k} F_g(s)$$

- az elmozdulást keressük, Laplace tartományban az integrálási szabály miatt: $X(s) = \frac{1}{s}V(s)$

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} F_g(s)$$

- **átviteli függvény:**

$$W(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad \text{általános algebrai alak}$$

- **gyöktényezős alak:**

$$W(s) = \frac{b_0/a_2}{s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2}} = \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

  ω_n: csillapítatlan sajátkörfrekvencia, ζ: relatív csillapítási tényező

- **időállandós alak:**

$$W(s) = \frac{b_0/a_0}{\frac{a_2}{a_0}s^2 + \frac{a_1}{a_0}s + 1} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$$

  $T = \frac{1}{\omega_n}$ időállandó, K: erősítési tényező

átmeneti függvény:

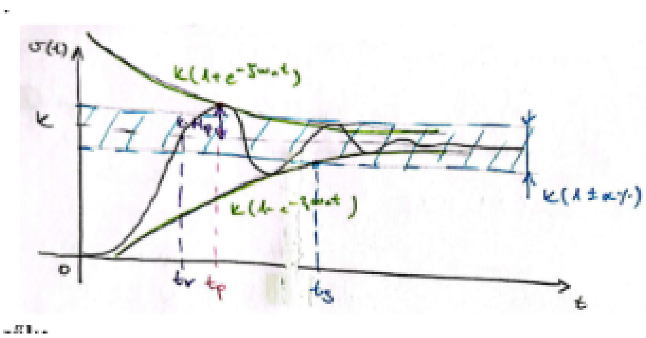
- $u(t) = \varepsilon(t) \to U(s) = 1/s$

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} U(s) \to v(t) = y(t) \ldots$$

$$v(t) = K\left(1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right)\right)\varepsilon(t)$$

  ahol $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ a csillapított sajátkörfrekvencia.

- **ábrázolva:**



Minőségi jellemzők:

- **belengési idő (peak time):** t_p
  - az átmeneti függvény első maximumának eléréséhez szükséges idő

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

- **maximális túllövés (max. overshoot):** M_p
  - az átmeneti függvény első maximumának a K állandósult értékhez viszonyított értéke

$$M_p = \frac{v(t_p)}{v(\infty)} - 1 = e^{-\frac{\zeta\omega_n\pi}{\omega_d}} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

  - százalékos túllövés: $P.O. = M_p \cdot 100[\%]$

- **beállási idő (settling time):** t_s
  - az az időpillanat, amikor az átmeneti függvény eléri, és ezt követően már nem hagyja el a $v(\infty) = K$ állandósult érték körül definiált $K(1 \pm \alpha\%)$ szélességű sávot

$$t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln\left(\frac{100}{\alpha}\right)$$

- **felfutási idő (rise time):** t_r
  - a $v(\infty) = K$ állandósult érték első eléréséhez szükséges idő

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_d}$$

A súlyfüggvény nem volt előadáson.

1.15 Vezesse le a lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek folytonos idejű állapottér modelljének megoldását Laplace transzformáció segítségével!

1.16 Mutassa be a lineáris idő invariáns (LTI) rendszerek esetén folytonos idejű állapottér modell rendszermátrixának sajátértékei és a rendszer átviteli függvényének pólusai közötti összefüggést!

1.17 Ismertesse a frekvencia-átviteli függvény fogalmát, illetve annak megjelenítési módjait (Bode diagram)!

1.18 Vezesse le a Fourier sorfejtésének alakja komplex alakját!

1.19 A Fourier sorfejtés miként általánosítható nem periodikus (lecsengő) függvényekre? Ismertesse a Fourier transzformáció származtatását!

1.20 Ismertesse a következő fogalmakat (adja meg a definícióját és rövid értelmezését): extenzív és intenzív fizikai mennyiségek, átmenő és keresztváltozók, energiatárolók (átmenő és keresztváltozóval) és disszipatív elemek (kétpólusok), csatolt kétpólus elem (transzformátor és girátor)!

1.21 Adja meg az villamos rendszer (kapcsolt elektromechanikai), haladó és forgómozgású mechanikai rendszerek és az áramlástechnikai (pneumatikus és hidraulikai) rendszerek koncentrált paraméterű leírása esetén az átmenő és keresztváltozó típusát, valamint az energiatárolókat (amennyiben léteznek) és disszipatív elemeket.

1.22 Mutassa be, milyen módszerekkel határozható meg a kereszt illetve átmenő változók értékei különféle források figyelembevétele esetén!

1.23 **Egy adott, tanult példa (egyenáramú motor) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is!**

1.24 Egy adott, tanult példa (fogaskerékhajtómű, fogaskerék-fogasléc) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is!

1.25 Egy adott, tanult példa (hidraulikus és pneumatikus munkahenger) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is!

1.26 Egy adott, tanult példa (golyósorsó és vonóelem) kapcsán ismertesse a struktúra gráf és az impedancia hálózat felrajzolásának lépéseit. Milyen feltételek teljesülése esetén és hogyan lehet csatolt kétpólus elemmel összekapcsolt rendszereket egy oldalra redukálni? Válaszában térjen ki a rendszerek közötti átjárásokat biztosító fizikai összefüggésekre is!

2 Informatika

2.1 A számítástudomány alapjai. Turing gép. Eljárások, algoritmusok.

2.2 A számítógép architektúrák alapjai. Boole függvények. Logikai kapuk. Kombinációs és szekvenciális logikai hálózatok. Tárolók: S-R, J-K, D.

2.3 A számítógép felépítése. Memóriák. CPU részei. Utasítás ciklus. Szubrutinhívás. Interrupt. Közvetlen memória hozzáférés.

2.4 Adatszerkezetek. Tömbök, kapcsolt listák, gráf, fa, verem, sor.

2.5 Algoritmusok. Bejárás, keresés, rendezés. Algoritmusok bonyolultsága. Rekurzió.

2.6 Az adatbázisok alapjai. Adatmodellezés. Kapcsolatok típusai. Relációs adatbázismodell. Relációk jellemzői. A relációs algebra műveletei. SQL alapok, lekérdezések.

2.7 Az operációs rendszer céljai, feladatai. Folyamatok kommunikációja. Ütemezési algoritmusok az operációs rendszerben. Termelő-fogyasztó probléma. Postaláda kezelés. Szemaforok.

2.8 Holtpont az operációs rendszerben. Holtpont kezelése. Holtpont észlelése. Holtpont megelőzés. Bankár algoritmus.

2.9 Shannon hírközlési modellje. Forráskódolás, prefix kód.

2.10 Hálózati kommunikáció, OSI/ISO modell. Hálózati elsőbbségi elvek. Az interneten használt kommunikációs protokollok. IP cím, maszkolás, DNS rendszer.

2.11 Az objektum fogalma, objektum-orientált elvek. Az osztály fogalma. Struktúrák. Tagfüggvények. Konstruktor. Destruktor. Statikus tagok. Barátság, friend függvények.

2.12 Operátorok túlterhelése az objektum orientált programozásban. C++ IO, new, delete operátorok túlterhelésének szabályai. Osztály hierarchiák.

2.13 Öröklődés, egységbe zárás az objektum-orientált programozásban. Protected osztálytagok. Kompozíció. Aggregáció. Többszörös öröklődés.

2.14 Polimorfizmus az objektum-orientált programozásban. Virtuális alaposztályok. Abstract osztály. Általánosított osztályok.

2.15 Standard Template Library a C++-ban. Tárolók. Bejárók. Algoritmusok. Függvényobjektumok.

2.16 Fuzzy halmazok alapjai, műveletek fuzzy halmazokon.

2.17 Fuzzy következtető módszer, defuzzifikációs módszerek.

2.18 Aggregációs operátorok, általános hatványközép, OWA.

2.19 A .net rendszer részei: GC, CIL, assembly-k. Esemény vezérelt programok felépítése windows alatt.

2.20 Grafikus adattárolás (vektor, raszter), alkatrész modellezési módszerek.

2.21 3D->2D vetítési algoritmusok, a window-viewport transzformáció.

2.22 Görbe közelítési módszerek: természetes spline, Bezier, Catmull-Rom görbék.

2.23 Láthatóság, árnyalás, megvilágítás, színmodellek, anyagmodellek.

2.24 Képfeldolgozás, konvolúció, élkeresés, szegmentálás, alakfelismerés.

2.25 Neurális hálózatok alapjai, a Perceptron, a Perceptron tanítása.

2.26 Felügyelt és felügyelet nélküli tanulás. Mesterséges neurális hálózatok.

2.27 Evolúciós algoritmusok, evolúció stratégiák, genetikus programozás.

2.28 Az "M" nyelv (Matlab) jellegzetességei: változók, vektorok és mátrixok, feltételes végrehajtás, ciklusok, számtani sorozatok, függvény definíció, diagram rajzolás.

2.29 Ismertesse az alábbi, mechatronikában tanult elvek programmal történő megvalósítását: állapotgép, ARMA modell.