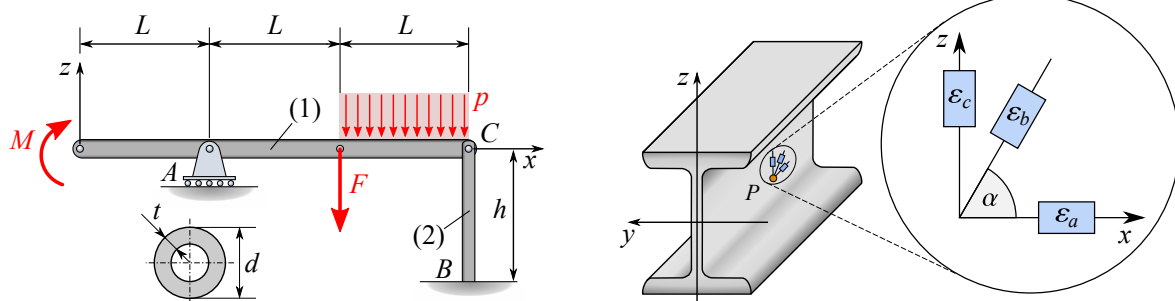


|   |                       |   |
|---|-----------------------|---|
| BME Gépészmérnöki Kar   | SZILÁRDSÁGTAN         | Név: Vári Gergő   |
| Műszaki Mechanikai Tanszék  | 2. HÁZI FELADAT       | Neptun kód: MQHJOH  |
| 2024/25 II.   | Határidő: lásd Moodle | Késedelmes beadás: <input type="checkbox"/> Javítás: <input type="checkbox"/> |
| Nyilatkozat: Aláírással igazolom, hogy a házi feladatot saját magam készítettem el, az abban leírtak saját megértésemet tükrözik. |                       | Aláírás: Vári Gergő   |

Csak a formai követelményeknek megfelelő feladatokat értékeljük! <http://www.mm.bme.hu/targyak/bsc/sziltan>

## Feladatkitűzés

Az ábrán vázolt szerkezet két rúdja csuklósan kapcsolódik, anyaguk homogén, izotrop, lineárisan rugalmas (rugalmassági modulusz:  $E = 210$  GPa; Poisson-tényező:  $\nu = 0,3$ ). Az (1)-es rúd keresztmetszete az ábrán látható I-szelvény (I-80-MSZ-325), míg a (2)-es rúd  $d$  külső átmérőjű körgyűrű.



## Adatok

| $L$ [m] | $h$ [m] | $d$ [mm] | $F$ [kN] | $M$ [kNm] | $p$ [kN/m] | $\varepsilon_a$ [ $10^{-4}$ ] | $\varepsilon_b$ [ $10^{-4}$ ] | $\varepsilon_c$ [ $10^{-4}$ ] | $\alpha$ [°] |
|---------|---------|----------|----------|-----------|------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------|
| 1.50    | 2.50    | 58       | 4        | 2         | 1.75       | -5.20                         | -4.50                         | 3                             | 45           |

## (Rész)eredmények

| $A_z$ [kN]       | $x_{\max}$ [m]    | $w_{\max}$ [mm]  | $t_{\min}$ [mm]  | $\varepsilon_y$ [ $10^{-4}$ ] | $\gamma_{xz}$ [ $10^{-4}$ ] | $\sigma_x$ [MPa]           |
|------------------|-------------------|------------------|------------------|-------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1.98958          | 0                 | 60.699           | 2.5              | 0.943                         | -6.8                        | -99.231                    |
| $\sigma_z$ [MPa] | $\tau_{xz}$ [MPa] | $\sigma_1$ [MPa] | $\sigma_2$ [MPa] | $\sigma_3$ [MPa]              | $\Delta\sigma_e$ [MPa]      | $u_d$ [J/cm <sup>3</sup> ] |
| 33.231           | -54.923           | 53.041           | 0                | -119.041                      | 19.445                      | 0.048                      |

| $e_{1x}$ [-] | $e_{1y}$ [-] | $e_{1z}$ [-] | $e_{2x}$ [-] | $e_{2y}$ [-] | $e_{2z}$ [-] | $e_{3x}$ [-] | $e_{3y}$ [-] | $e_{3z}$ [-] |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0.3393       | 0            | -0.941       | 0            | 1            | 0            | 0.941        | 0            | 0.3393       |

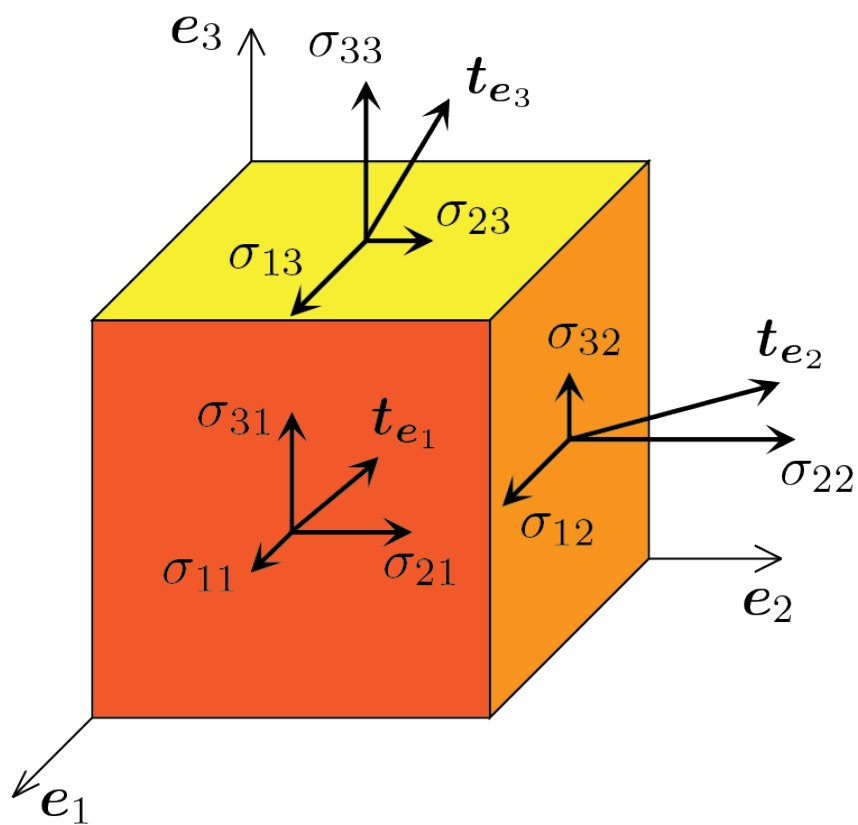
## Pontozás

| Minimumfeladat | Feladatok |    |    |    |    |    | Dokumentáció | Összesen |
|----------------|-----------|----|----|----|----|----|--------------|----------|
|                | 2.        | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |              |          |
|                | /5        | /3 | /4 | /4 | /2 | /2 | /5           | /25      |

# Szilárdságtan HF2

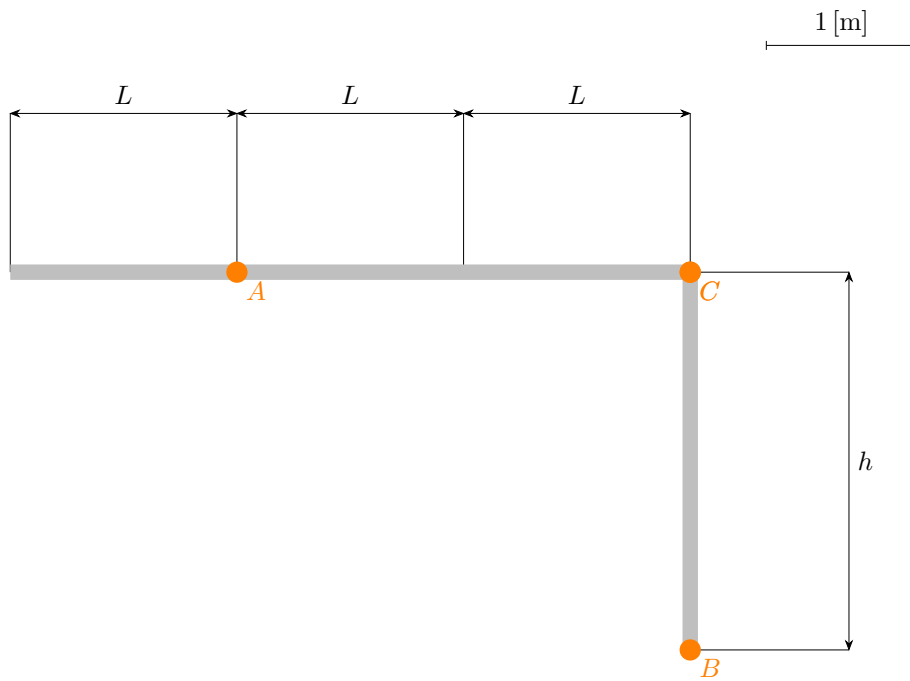
Vári Gergő

2025. április 20.



1. ábra: Cauchy feszültségi tenzor

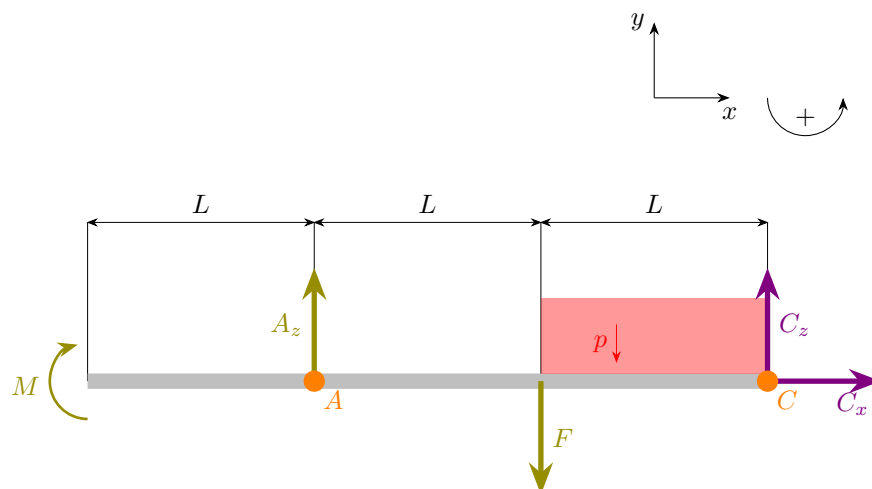
## 1 Reakció komponensek



2. ábra: Léptékhelyes ábra

## 1.1 Egyensúlyi egyenletek

### 1.1.1 1-es rúd



3. ábra: 1-es rúd SZTÁ

$$\sum F_x := 0 = C_x$$

$$\sum F_z := 0 = A_z - F - pL + C_z$$

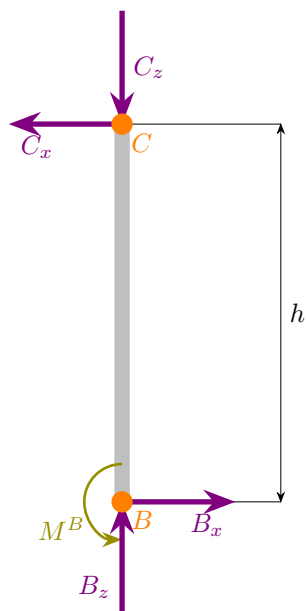
$$\sum M^A := 0 = -M - F(L) - pL\left(\frac{3}{2}L\right) + C_z(2L)$$

$$A_z = 1.989\,58 \text{ [kN]}$$

$$C_x = 0 \text{ [kN]}$$

$$C_z = 4.635\,42 \text{ [kN]}$$

### 1.1.2 2-es rúd



4. ábra: 2-es rúd SZTÁ

$$\sum F_x := 0 = -C_x + B_x$$

$$\sum F_z := 0 = B_z - C_z$$

$$\sum M^B := 0 = C_x(h)$$

$$B_x = C_x = 0 \text{ [kN]}$$

$$B_z = C_z = 4.63542 \text{ [kN]}$$

## 2 Lehajlásfüggvény

### 2.1 Hajlítónyomatéki igénybevételi függvény

| $x$   | $0 < x < L$ | $L < x < L + R$   | $L + R < x < 2L + R$                                      |
|-------|-------------|-------------------|---|
| $M_h$ | $-M$        | $-M - A_z(x - L)$ | $-M - A_z(x - L) + F(x - 2L) + p(x - 2L)\frac{x - 2L}{2}$ |

### 2.2 Rugalmas szál differenciálegyenlete

$$w_i''(x) = -\frac{M_{h_i}(x)}{IE}$$

#### 2.2.1 Peremfeltételek

$$\begin{aligned} w_1(L) &= 0 \\ w_2(L) &= 0 \\ w_3(3L) &= 0 \\ w_1'(L) &= w_2'(L) \\ w_2'(2L) &= w_3'(2L) \\ w_2(2L) &= w_3(2L) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.049647 \\ c_2 &= 0.0606989 \\ c_3 &= -0.0359472 \\ c_4 &= 0.053849 \\ c_5 &= 0.0979194 \\ c_6 &= 0.127812 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(L) &= 0.0606989 \\ w_1(L) &= 0 \\ w_2(L) &= 0 \\ w_2(2L) &= -0.0263059 \\ w_3(2L) &= -0.0263059 \\ w_3(3L) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{\max} &= 0.06 \text{ [m]} = 60 \text{ [mm]} \\ x_{\max} &= 0 \text{ [m]} \end{aligned}$$

### 2.2.2 Szögelfordulás

$$\phi_i(x) = w_i'(x)$$

$$\phi_1(0) = -0.049647$$

$$\phi_2(L) = -0.0312849$$

$$\phi_2(2L) = 0.000777027$$

$$\phi_3(3L) = 0.0266705$$

### 3 2-es rúd méretezése kihajlásra

#### 3.1 Kritikus feszültség - karcsúság diagram

$$\sigma_F = 240 \text{ [MPa]}$$

$$\lambda_0 = 150$$

$$\sigma_{kr}(\lambda) = 308 - 1.14\lambda$$

$$\sigma_{kr}(\lambda_0) = 188.3$$

$$\sigma_{kr}(\lambda_1) = \sigma_F \Rightarrow \lambda_1 = 59.65$$

#### 3.2 Minimális falvastagság

$$c = 2$$

$$h_0 = ch = 5 \text{ [m]}$$

$$F_t = 3 |B_z| = \left( \frac{\pi}{h_0} \right)^2 I_2 E$$

$$I_2 = \frac{d^4 \pi}{64} - \frac{(d - 2t_{\min})^4 \pi}{64}$$

$$t_{\min} = 2.49254 \approx 2.5 \text{ [mm]}$$

$$A = \frac{[d^2 - (d - 2t_{\min})^2] \pi}{4}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$

$$\lambda = \frac{h_0}{i_2} = 254.886$$



## 4 Nyúlásmérés

### 4.1 Alakváltozási tenzor

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_z &= \epsilon_c \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_x + \epsilon_z)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.2 \times 10^{-4} & 0 & -3.4 \times 10^{-4} \\ 0 & 9.428\,57 \times 10^{-5} & 0 \\ -3.4 \times 10^{-4} & 0 & 3 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_I = \frac{\Delta V}{V} = \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -1.257\,143 \times 10^{-4}$$

### 4.2 Hooke-törvény

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \left( \boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \mathbf{E} \right)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-2\nu} \left( \epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \right)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-2\nu} \left( \epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} \gamma_{xz}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -99.231 & 0 & -54.9231 \\ 0 & 0 & 0 \\ -54.9231 & 0 & 33.231 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

$$\sigma_I = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = -66 [\text{MPa}]$$

$$\begin{aligned}\sigma_{II} &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \\ &= -6314.092\,275 [\text{MPa}^2]\end{aligned}$$

$$\sigma_{III} = \det(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

## 5 Főfeszültségek

### 5.1 Mohr-féle diagram

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 &\Rightarrow \sigma_y = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \sigma_2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(\sigma_x; [\tau_{xz}]) &= (-99.231; 54.9231) \\ y(\sigma_y; 0) &= (0; 0) \\ z(\sigma_z; [\tau_{xz}]) &= (33.231; 54.9231)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_K &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = -33 \text{ [MPa]} \\ R &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 86.04122 \text{ [MPa]}\end{aligned}$$

$$\sigma_{1;3} = \sigma_K \pm R = \begin{cases} 53.04122 \\ -119.04122 \end{cases}$$

### 5.2 Főirányok

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \arctg\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = 70.166^\circ \\ \mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \\ 0 \\ -\sin \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3393 \\ 0 \\ -0.941 \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0.941 \\ 0 \\ 0.3393 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

## 5.3 Ellenőrzés

### 5.3.1 Sajátérték

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \lambda_z - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\lambda) [(\sigma_x - \lambda)(\sigma_z - \lambda) - \tau_{xz}^2] = 0$$

$$\lambda_{1;2;3} = \begin{cases} 53.04122 \\ 0 \\ -119.04122 \end{cases}$$

$$= \sigma_{1;2;3} \checkmark$$

### 5.3.2 Sajátvektor

$$\boldsymbol{\sigma} - \lambda_1 \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z - \sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ \sin \phi \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(\sigma_x - \sigma_1) \cos \alpha + \tau_{xz} \sin \alpha = 0$$

$$\tau_{xz} \cos \alpha + (\sigma_z - \sigma_1) \sin \alpha = 0$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\sigma_z - \sigma_1 + \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_1 + \tau_{xz}}$$

$$\alpha = 70.1661^\circ = \phi \checkmark$$

## 6 Pontbeli feszültségi állapot

$$\sigma_e^{\text{Mohr}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 172.082\,44 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_e^{\text{HMH}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = 152.6377 \text{ [MPa]}$$

$$\Delta\sigma_e = \sigma_e^{\text{Mohr}} - \sigma_e^{\text{HMH}} = 19.445 \text{ [MPa]}$$

## 7 Pontbeli alakváltozási energiasűrűség

$$u = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} = 0.049\,46 \text{ [J/cm}^3\text{]}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_I = \frac{1}{3} \epsilon_I \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma_I \boldsymbol{E}$$

$$u_h = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_I : \boldsymbol{\epsilon}_I = \frac{1}{6} \sigma_I \epsilon_I = 1.382\,857\,3 \times 10^{-3}$$

$$u_d = u - u_h = 0.0481 \text{ [J/cm}^3\text{]}$$