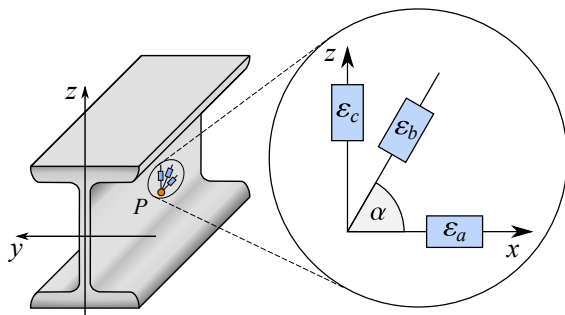
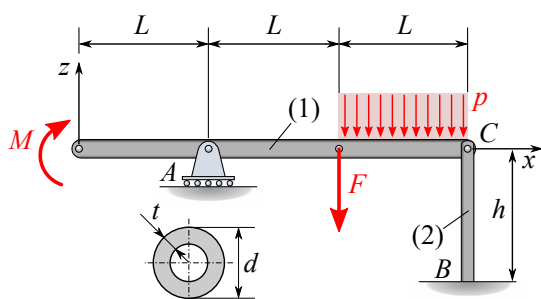


BME Gépészmérnöki Kar	SZILÁRDSÁGTAN	Név: Vári Gergő
Műszaki Mechanikai Tanszék	2. HÁZI FELADAT	Neptun kód: MQHJOH
2024/25 II.	Határidő: lásd Moodle	Késedelmes beadás: <input type="checkbox"/> Javítás: <input type="checkbox"/>
Nyilatkozat: Aláírással igazolom, hogy a házi feladatot saját magam készítettem el, az abban leírtak saját megértésemet tükrözik.		Aláírás: Vári Gergő

Csak a formai követelményeknek megfelelő feladatokat értékeljük! <http://www.mm.bme.hu/targyak/bsc/sziltan>

Feladatkitűzés

Az ábrán vázolt szerkezet két rúdja csuklósan kapcsolódik, anyaguk homogén, izotrop, lineárisan rugalmas (rugalmassági modulusz: $E = 210$ GPa; Poisson-tényező: $\nu = 0,3$). Az (1)-es rúd keresztmetszete az ábrán látható I-szelvény (I-80-MSZ-325), míg a (2)-es rúd d külső átmérőjű körgyűrű.



Adatok

L [m]	h [m]	d [mm]	F [kN]	M [kNm]	p [kN/m]	ε_a [10^{-4}]	ε_b [10^{-4}]	ε_c [10^{-4}]	α [°]
1.50	2.50	58	4	2	1.75	-5.20	-4.50	3	45

(Rész)eredmények

A_z [kN]	x_{\max} [m]	w_{\max} [mm]	t_{\min} [mm]	ε_y [10^{-4}]	γ_{xz} [10^{-4}]	σ_x [MPa]
1.98958	0	60.699	2.5	0.943	-6.8	-99.231
σ_z [MPa]	τ_{xz} [MPa]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]	σ_3 [MPa]	$\Delta\sigma_{\text{e}}$ [MPa]	u_d [J/cm ³]
33.231	-54.923	53.041	0	-119.041	19.445	0.048

e_{1x} [-]	e_{1y} [-]	e_{1z} [-]	e_{2x} [-]	e_{2y} [-]	e_{2z} [-]	e_{3x} [-]	e_{3y} [-]	e_{3z} [-]
0.3393	0	-0.941	0	1	0	0.941	0	0.3393

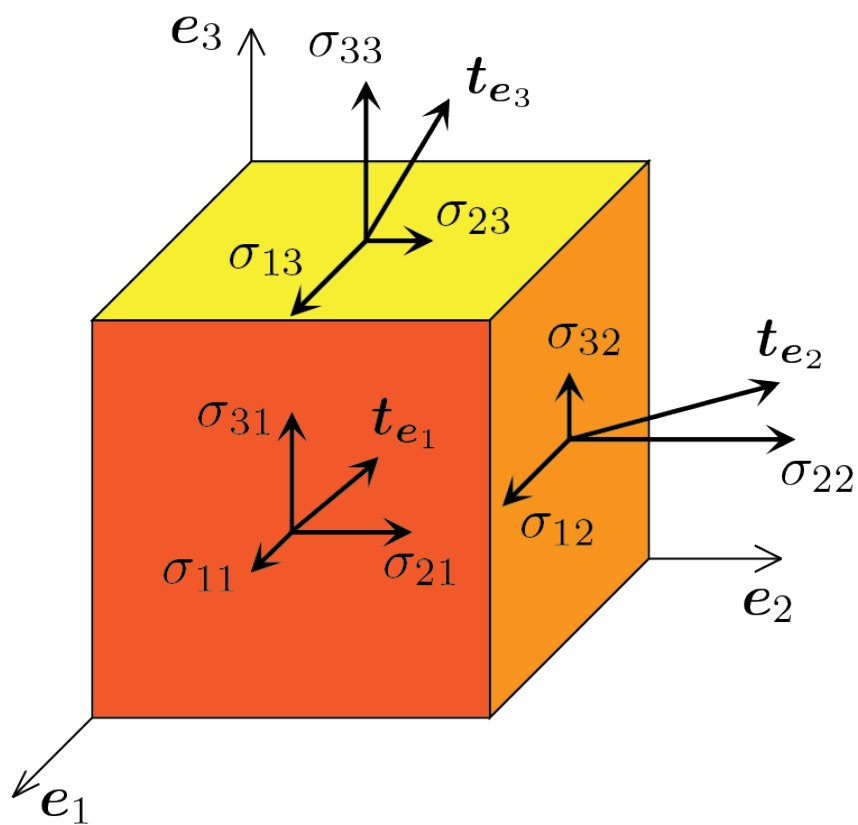
Pontozás

Minimumfeladat	Feladatok						Dokumentáció	Összesen
	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
	/5	/3	/4	/4	/2	/2	/5	/25

Szilárdságtan HF2

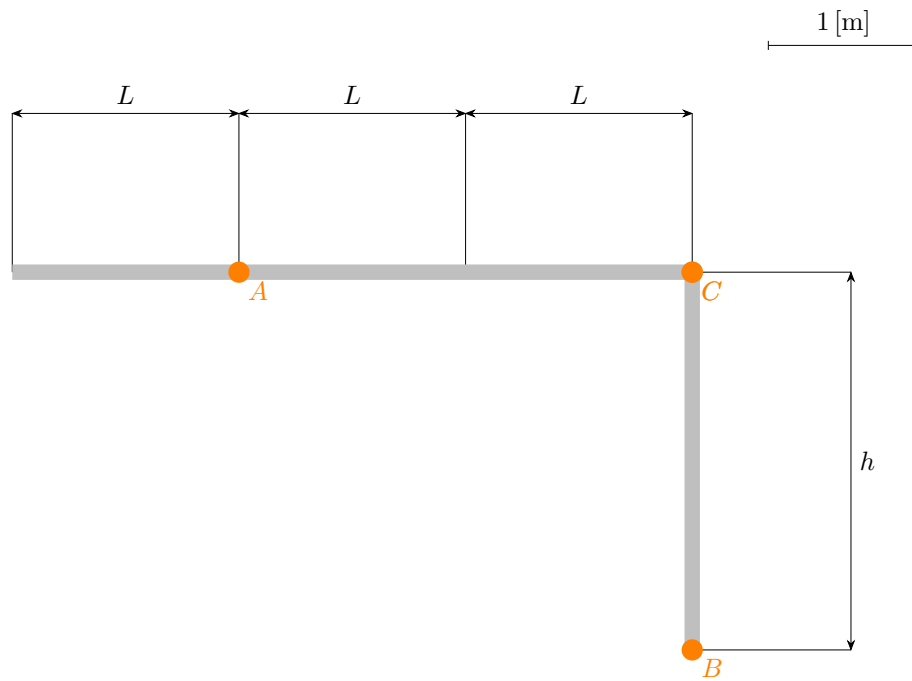
Vári Gergő

2025. április 22.



1. ábra: Cauchy feszültségi tenzor

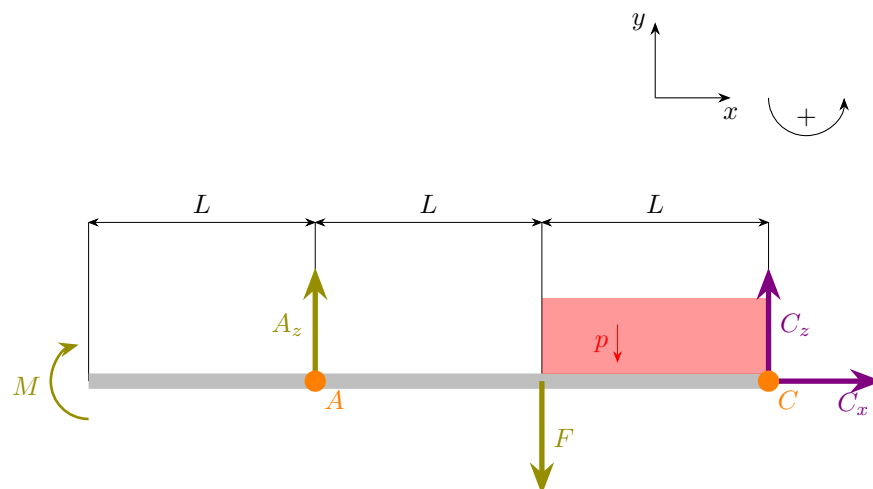
1 Reakció komponensek



2. ábra: Léptékhelyes ábra

1.1 Egyensúlyi egyenletek

1.1.1 1-es rúd



3. ábra: 1-es rúd SZTÁ

$$\sum F_x := 0 = C_x$$

$$\sum F_z := 0 = A_z - F - pL + C_z$$

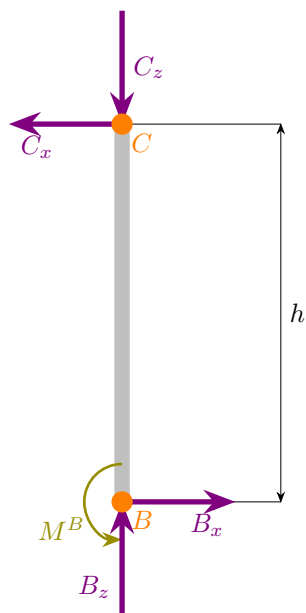
$$\sum M^A := 0 = -M - F(L) - pL\left(\frac{3}{2}L\right) + C_z(2L)$$

$$A_z = 1.989\,58 \text{ [kN]}$$

$$C_x = 0 \text{ [kN]}$$

$$C_z = 4.635\,42 \text{ [kN]}$$

1.1.2 2-es rúd



4. ábra: 2-es rúd SZTÁ

$$\sum F_x := 0 = -C_x + B_x$$

$$\sum F_z := 0 = B_z - C_z$$

$$\sum M^B := 0 = C_x(h)$$

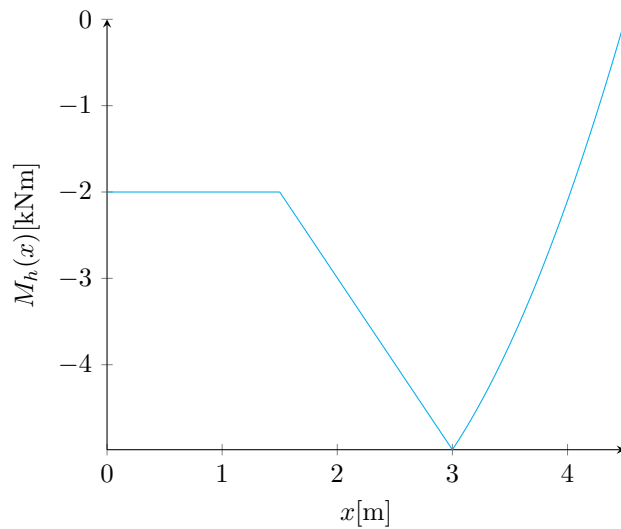
$$B_x = C_x = 0 \text{ [kN]}$$

$$B_z = C_z = 4.635\,42 \text{ [kN]}$$

2 Lehajlásfüggvény

2.1 Hajlítónyomatéki igénybevételi függvény

x	$0 < x < L$	$L < x < L + R$	$L + R < x < 2L + R$
M_h	$-M$	$-M - A_z(x - L)$	$-C_z(3L - x) + p \frac{(3L - x)^2}{2}$



2.2 Rugalmas szál differenciálegyenlete

$$w_i''(x) = -\frac{M_{h_i}(x)}{IE}$$

Mivel a hajlítónyomatéki függvényünk három részből áll, itt is követnünk kell ezt.

$$w_1''(x) = 0.0122414$$

$$w_2''(x) = -0.0602503 + 0.0121776x$$

$$w_3''(x) = 0.0192229 + 0.0198285x - 0.00535561x^2$$

$$w_1'(x) = c_1 + 0.0122414x$$

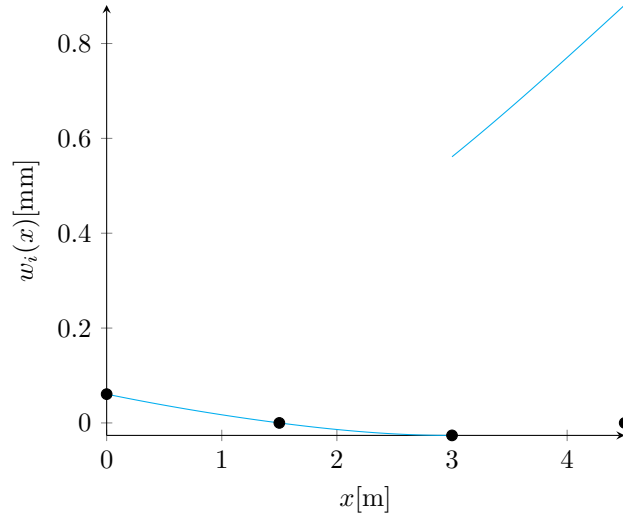
$$w_2'(x) = c_3 - 0.00602503x + 0.00608881x^2$$

$$w_3'(x) = c_5 + 0.0192229x + 0.00991425x^2 - 0.0017852x^3$$

$$w_1(x) = c_2 + c_1x + 0.0061207x^2$$

$$w_2(x) = c_4 + c_3x - 0.00301252x^2 + 0.0020296x^3$$

$$w_3(x) = c_6 + c_5x + 0.00961146x^2 + 0.00330475x^3 - 0.000446301x^4$$



2.2.1 Peremfeltételek

Tudjuk hogy $x = L$ és $x = 3L$ -ben a lehajlás értéke zérus, valamint a rúd folytonossága miatt feltételezzük hogy az egybeeső pontok érték az elhajlásnál és szögelfordulásnál megegyezik

$$\begin{aligned}w_1(L) &= 0 \\w_2(L) &= 0 \\w_3(3L) &= 0 \\w_1'(L) &= w_2'(L) \\w_2'(2L) &= w_3'(2L) \\w_2(2L) &= w_3(2L)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_1 &= -0.049647 \\c_2 &= 0.0606989 \\c_3 &= -0.0359472 \\c_4 &= 0.053849 \\c_5 &= 0.0979194 \\c_6 &= 0.127812\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_1(0) &= 0.0606989 \\w_1(L) &= 0 \\w_2(L) &= 0 \\w_2(2L) &= -0.0263059 \\w_3(2L) &= -0.0263059 \\w_3(3L) &= 0\end{aligned}$$

Lehajlásfüggvény szélsőértéke ott lehet ahol a szögelfordulás nulla: a rúd szélén.

$$\begin{aligned}w_{\max} &= 0.06 \text{ [m]} = 60 \text{ [mm]} \\x_{\max} &= 0 \text{ [m]}\end{aligned}$$

2.2.2 Szögelfordulás

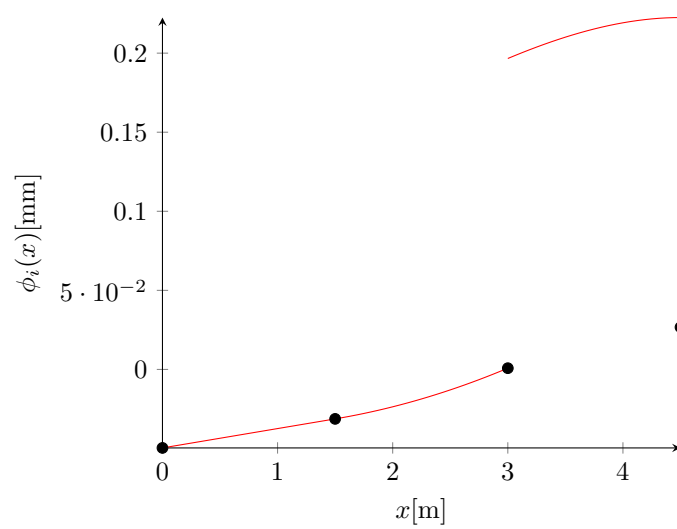
$$\phi_i(x) = w_i'(x)$$

$$\phi_1(0) = -0.049647$$

$$\phi_2(L) = -0.0312849$$

$$\phi_2(2L) = 0.000777027$$

$$\phi_3(3L) = 0.0266705$$



3 2-es rúd méretezése kihajlásra

3.1 Kritikusfeszültség - karcsúság diagram

$$\sigma_F = 240 \text{ [MPa]}$$

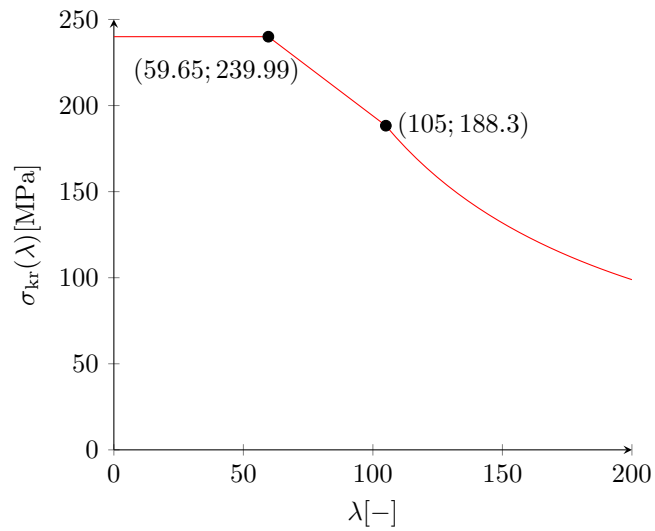
$$\lambda_0 = 150$$

$$\sigma_{kr}(\lambda) = 308 - 1.14\lambda$$

$$\sigma_{kr}(\lambda_0) = 188.3$$

$$\sigma_{kr}(\lambda_1) = \sigma_F \Rightarrow \lambda_1 = 59.65$$

A kezdeti szakaszon λ -tól független konstans σ_F a kritikusfeszültség. A Tetmajer-egyenes két szélsőértéke az Euler kezdetét jelentő λ_0 valamint λ_1 ahol az előbbi egyenessel számolt feszültség eléri a folyáshatárt.



3.2 Minimális falvastagság

A minimális falvastagság számítása függ attól épp melyik tartományba esik a rúd amit csak a falvastagságból tudnánk, ezért feltételezzük hogy a rúd az Euler-tartományba esik karcsúság szempontjából. A c szorzó az egyenértékű hosszhoz abból származik hogy a rúd alul be van fogva, felül pedig nincs akadályozva a kihajlás.

$$\begin{aligned} c &= 2 \\ h_0 &= ch = 5 \text{ [m]} \\ F_t &= 3 |B_z| = \left(\frac{\pi}{h_0} \right)^2 I_2 E \end{aligned}$$

A keresztmetszet másodrendű nyomatéka függ a geometriától.

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{d^4 \pi}{64} - \frac{(d - 2t_{\min})^4 \pi}{64} \\ t_{\min} &= 2.49254 \approx 2.5 \text{ [mm]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{[d^2 - (d - 2t_{\min})^2] \pi}{4} \\ i_2 &= \sqrt{\frac{I_2}{A}} \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{h_0}{i_2} = 254.886$$

A karcsúság az Euler-tartományba esik, tehát feltételezésünk beigazolódott.

4 Nyúlásmérés

4.1 Alakváltozási tenzor

$$\epsilon_x = \epsilon_a$$

$$\epsilon_z = \epsilon_c$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_x + \epsilon_z)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.2 \times 10^{-4} & 0 & -3.4 \times 10^{-4} \\ 0 & 9.428\,57 \times 10^{-5} & 0 \\ -3.4 \times 10^{-4} & 0 & 3 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{\text{I}} = \frac{\Delta V}{V} = \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -1.257\,143 \times 10^{-4}$$

4.2 Hooke-törvény

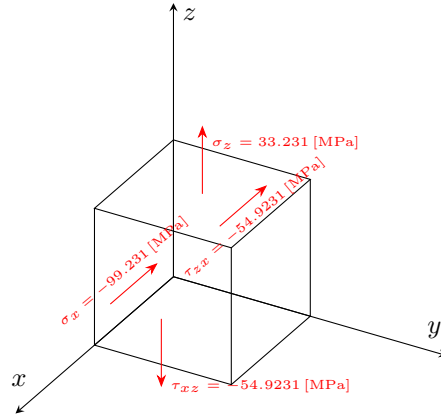
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \mathbf{E} \right)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-2\nu} \left(\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \right)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-2\nu} \left(\epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} \gamma_{xz}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -99.231 & 0 & -54.9231 \\ 0 & 0 & 0 \\ -54.9231 & 0 & 33.231 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$



$$\sigma_I = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = -66 [\text{MPa}]$$

$$\begin{aligned} \sigma_{II} &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \\ &= -6314.092275 [\text{MPa}^2] \end{aligned}$$

$$\sigma_{III} = \det(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

5 Főfeszültségek

5.1 Mohr-féle diagram

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \sigma_y = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = 0$$

$$X(\sigma_x; [\tau_{xz}]) = (-99.231; 54.9231)$$

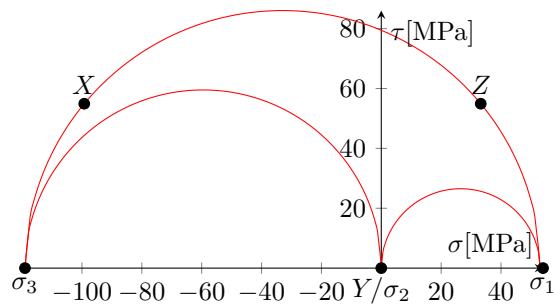
$$Y(\sigma_y; 0) = (0; 0)$$

$$Z(\sigma_z; [\tau_{xz}]) = (33.231; 54.9231)$$

$$\sigma_K = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = -33 \text{ [MPa]}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 86.04122 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{1;3} = \sigma_K \pm R = \begin{cases} 53.04122 \\ -119.04122 \end{cases}$$



5.2 Főirányok

$$\phi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = 70.166^\circ$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \\ 0 \\ -\sin \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3393 \\ 0 \\ -0.941 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0.941 \\ 0 \\ 0.3393 \end{bmatrix}$$

5.3 Ellenőrzés

5.3.1 Sajátérték

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \lambda_z - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\lambda) [(\sigma_x - \lambda)(\sigma_z - \lambda) - \tau_{xz}^2] = 0$$

$$\lambda_{1;2;3} = \begin{cases} 53.04122 \\ 0 \\ -119.04122 \end{cases}$$

$$= \sigma_{1;2;3} \checkmark$$

5.3.2 Sajátvektor

A főirányok merőlegessége miatt írható fel a következő egyenlet.

$$\boldsymbol{\sigma} - \lambda_1 \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z - \sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ \sin \phi \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(\sigma_x - \sigma_1) \cos \alpha + \tau_{xz} \sin \alpha = 0$$

$$\tau_{xz} \cos \alpha + (\sigma_z - \sigma_1) \sin \alpha = 0$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\sigma_z - \sigma_1 + \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_1 + \tau_{xz}}$$

$$\alpha = 70.1661^\circ = \phi \checkmark$$

6 Pontbeli feszültségi állapot

$$\sigma_e^{\text{Mohr}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 172.082\,44 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_e^{\text{HMH}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = 152.6377 \text{ [MPa]}$$

$$\Delta\sigma_e = \sigma_e^{\text{Mohr}} - \sigma_e^{\text{HMH}} = 19.445 \text{ [MPa]}$$

7 Pontbeli alakváltozási energiasűrűség

$$u = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} = 0.049\,46 \text{ [J/cm}^3\text{]}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_I = \frac{1}{3} \epsilon_I \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma_I \boldsymbol{E}$$

$$u_h = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_I : \boldsymbol{\epsilon}_I = \frac{1}{6} \sigma_I \epsilon_I = 1.382\,857\,3 \times 10^{-3}$$

$$u_d = u - u_h = 0.0481 \text{ [J/cm}^3\text{]}$$