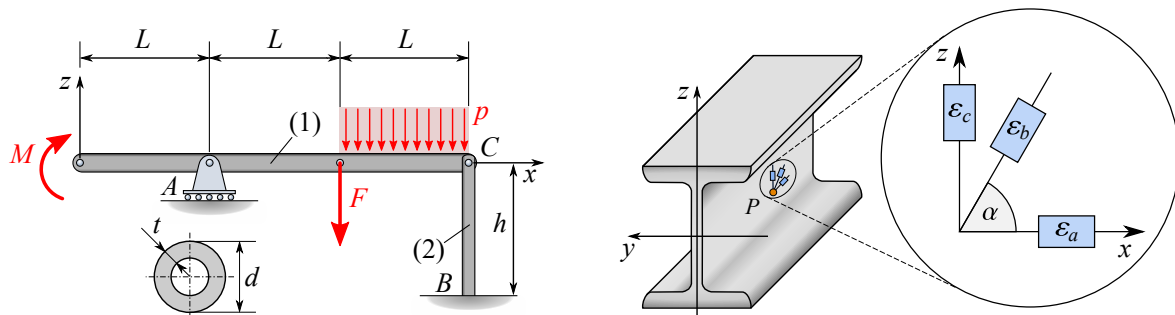


BME Gépészmérnöki Kar	SZILÁRDSÁGTAN	Név: Vári Gergő
Műszaki Mechanikai Tanszék	2. HÁZI FELADAT	Neptun kód: MQHJOH
2024/25 II.	Határidő: lásd Moodle	Késedelmes beadás: <input type="checkbox"/> Javítás: <input type="checkbox"/>
Nyilatkozat: Aláírással igazolom, hogy a házi feladatot saját magam készítettem el, az abban leírtak saját megértésemet tükrözik.		Aláírás: Vári Gergő

Csak a formai követelményeknek megfelelő feladatokat értékeljük! <http://www.mm.bme.hu/targyak/bsc/sziltan>

## Feladatkitűzés

Az ábrán vázolt szerkezet két rúdja csuklósan kapcsolódik, anyaguk homogén, izotrop, lineárisan rugalmas (rugalmassági modulusz:  $E = 210$  GPa; Poisson-tényező:  $\nu = 0,3$ ). Az (1)-es rúd keresztmetszete az ábrán látható I-szelvény (I-80-MSZ-325), míg a (2)-es rúd  $d$  külső átmérőjű körgyűrű.



## Adatok

$L$ [m]	$h$ [m]	$d$ [mm]	$F$ [kN]	$M$ [kNm]	$p$ [kN/m]	$\varepsilon_a$ [ $10^{-4}$ ]	$\varepsilon_b$ [ $10^{-4}$ ]	$\varepsilon_c$ [ $10^{-4}$ ]	$\alpha$ [°]
1.50	2.50	58	4	2	1.75	-5.20	-4.50	3	45

## (Rész)eredmények

$A_z$ [kN]	$x_{\max}$ [m]	$w_{\max}$ [mm]	$t_{\min}$ [mm]	$\varepsilon_y$ [ $10^{-4}$ ]	$\gamma_{xz}$ [ $10^{-4}$ ]	$\sigma_x$ [MPa]
1.98958	0	60.699	2.5	0.943	-6.8	-99.231
$\sigma_z$ [MPa]	$\tau_{xz}$ [MPa]	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$\sigma_3$ [MPa]	$\Delta\sigma_e$ [MPa]	$u_d$ [J/cm <sup>3</sup> ]
33.231	-54.923	53.041	0	-119.041	19.445	0.048

$e_{1x}$ [-]	$e_{1y}$ [-]	$e_{1z}$ [-]	$e_{2x}$ [-]	$e_{2y}$ [-]	$e_{2z}$ [-]	$e_{3x}$ [-]	$e_{3y}$ [-]	$e_{3z}$ [-]
0.3393	0	-0.941	0	1	0	0.941	0	0.3393

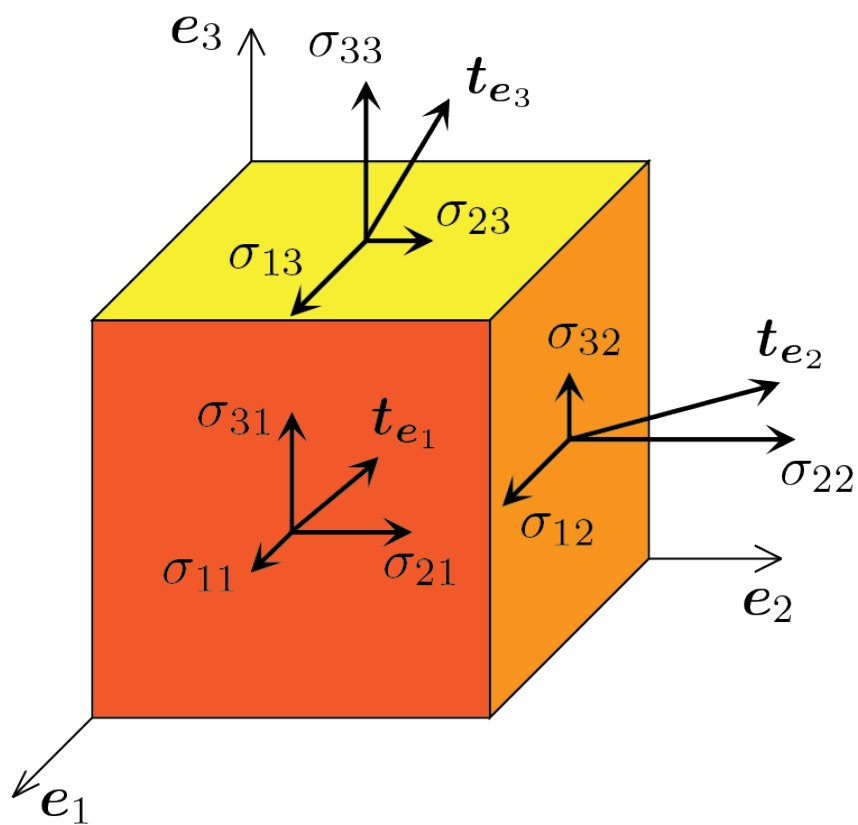
## Pontozás

Minimumfeladat	Feladatok						Dokumentáció	Összesen
	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
	/5	/3	/4	/4	/2	/2	/5	/25

# Szilárdságtan HF2

Vári Gergő

2025. április 20.



1. ábra: Cauchy feszültségi tenzor

## 1 Reakció komponensek

### 1.1 Léptékhelyes ábra

### 1.2 SZTÁ

### 1.3 Egyensúlyi egyenletek

#### 1.3.1 Szerkezet

$$\begin{aligned}\sum F_x &:= 0 = C_x \\ \sum F_z &:= 0 = A_z - F - pL + C_z \\ \sum M^A &:= 0 = -M - F(L) - pL\left(\frac{3}{2}L\right) + C_z(2L)\end{aligned}$$

$$A_z = 1.989\,58 \text{ [kN]}$$

$$C_x = 0 \text{ [kN]}$$

$$C_z = 4.635\,42 \text{ [kN]}$$

#### 1.3.2

$$\begin{aligned}\sum F_x &:= 0 = -C_x + B_x \\ \sum F_z &:= 0 = B_z - C_z \\ \sum M^B &:= 0 = C_x(h)\end{aligned}$$

$$B_x = C_x = 0 \text{ [kN]}$$

$$B_z = C_z = 4.635\,42 \text{ [kN]}$$

## 2 Lehajlásfüggvény

### 2.1 Hajlítónyomatéki igénybevételi függvény

$x$	$0 < x < L$	$L < x < L + R$	$L + R < x < 2L + R$
$M_h$	$-M$	$-M - A_z(x - L)$	$-M - A_z(x - L) + F(x - 2L) + p(x - 2L)\frac{x - 2L}{2}$

### 2.2 Rugalmas szál differenciálegyenlete

$$w_i''(x) = -\frac{M_{h_i}(x)}{IE}$$

#### 2.2.1 Peremfeltételek

$$\begin{aligned} w_1(L) &= 0 \\ w_2(L) &= 0 \\ w_3(3L) &= 0 \\ w_1'(L) &= w_2'(L) \\ w_2'(2L) &= w_3'(2L) \\ w_2(2L) &= w_3(2L) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.049647 \\ c_2 &= 0.0606989 \\ c_3 &= -0.0359472 \\ c_4 &= 0.053849 \\ c_5 &= 0.0979194 \\ c_6 &= 0.127812 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(L) &= 0.0606989 \\ w_1(L) &= 0 \\ w_2(L) &= 0 \\ w_2(2L) &= -0.0263059 \\ w_3(2L) &= -0.0263059 \\ w_3(3L) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{\max} &= 0.06 \text{ [m]} = 60 \text{ [mm]} \\ x_{\max} &= 0 \text{ [m]} \end{aligned}$$

### 2.2.2 Szögelfordulás

$$\phi_i(x) = w_i'(x)$$

$$\phi_1(0) = -0.049647$$

$$\phi_2(L) = -0.0312849$$

$$\phi_2(2L) = 0.000777027$$

$$\phi_3(3L) = 0.0266705$$

### 3 2-es rúd méretezése kihajlásra

#### 3.1 Kritikus feszültség - karcsúság diagram

$$\sigma_F = 240 \text{ [MPa]}$$

$$\lambda_0 = 150$$

$$\sigma_{kr}(\lambda) = 308 - 1.14\lambda$$

$$\sigma_{kr}(\lambda_0) = 188.3$$

$$\sigma_{kr}(\lambda_1) = \sigma_F \Rightarrow \lambda_1 = 59.65$$

#### 3.2 Minimális falvastagság

$$c = 2$$

$$h_0 = ch = 5 \text{ [m]}$$

$$F_t = 3 |B_z| = \left( \frac{\pi}{h_0} \right)^2 I_2 E$$

$$I_2 = \frac{d^4 \pi}{64} - \frac{(d - 2t_{\min})^4 \pi}{64}$$

$$t_{\min} = 2.49254 \approx 2.5 \text{ [mm]}$$

$$A = \frac{[d^2 - (d - 2t_{\min})^2] \pi}{4}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$

$$\lambda = \frac{h_0}{i_2} = 254.886$$

## 4 Nyúlásmérés

### 4.1 Alakváltozási tenzor

$$\epsilon_x = \epsilon_a$$

$$\epsilon_z = \epsilon_c$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_x + \epsilon_z)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.2 \times 10^{-4} & 0 & -3.4 \times 10^{-4} \\ 0 & 9.42857 \times 10^{-5} & 0 \\ -3.4 \times 10^{-4} & 0 & 3 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_I = \frac{\Delta V}{V} = \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -1.257143 \times 10^{-4}$$

### 4.2 Hooke-törvény

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \left( \boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \mathbf{E} \right)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-2\nu} \left( \epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \right)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-2\nu} \left( \epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} \gamma_{xz}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -99.231 & 0 & -54.9231 \\ 0 & 0 & 0 \\ -54.9231 & 0 & 33.231 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

$$\sigma_I = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = -66 [\text{MPa}]$$

$$\begin{aligned} \sigma_{II} &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \\ &= -6314.092275 [\text{MPa}^2] \end{aligned}$$

$$\sigma_{III} = \det(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

## 5 Főfeszültségek

### 5.1 Mohr-féle diagram

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 &\Rightarrow \sigma_y = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \sigma_2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(\sigma_x; [\tau_{xz}]) &= (-99.231; 54.9231) \\ y(\sigma_y; 0) &= (0; 0) \\ z(\sigma_z; [\tau_{xz}]) &= (33.231; 54.9231)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_K &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = -33 \text{ [MPa]} \\ R &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 86.04122 \text{ [MPa]}\end{aligned}$$

$$\sigma_{1;3} = \sigma_K \pm R = \begin{cases} 53.04122 \\ -119.04122 \end{cases}$$

### 5.2 Főirányok

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \arctg\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = 70.166^\circ \\ \mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \\ 0 \\ -\sin \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3393 \\ 0 \\ -0.941 \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0.941 \\ 0 \\ 0.3393 \end{bmatrix}\end{aligned}$$



## 5.3 Ellenőrzés

### 5.3.1 Sajátérték

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \lambda_z - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\lambda) [(\sigma_x - \lambda)(\sigma_z - \lambda) - \tau_{xz}^2] = 0$$

$$\lambda_{1;2;3} = \begin{cases} 53.04122 \\ 0 \\ -119.04122 \end{cases}$$

$$= \sigma_{1;2;3} \checkmark$$

### 5.3.2 Sajátvektor

$$\boldsymbol{\sigma} - \lambda_1 \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z - \sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ \sin \phi \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(\sigma_x - \sigma_1) \cos \alpha + \tau_{xz} \sin \alpha = 0$$

$$\tau_{xz} \cos \alpha + (\sigma_z - \sigma_1) \sin \alpha = 0$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\sigma_z - \sigma_1 + \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_1 + \tau_{xz}}$$

$$\alpha = 70.1661^\circ = \phi \checkmark$$

## 6 Pontbeli feszültségi állapot

$$\sigma_e^{\text{Mohr}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 172.082\,44 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_e^{\text{HMH}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = 152.6377 \text{ [MPa]}$$

$$\Delta\sigma_e = \sigma_e^{\text{Mohr}} - \sigma_e^{\text{HMH}} = 19.445 \text{ [MPa]}$$

## 7 Pontbeli alakváltozási energiasűrűség

$$u = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} = 0.049\,46 \text{ [J/cm}^3\text{]}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_I = \frac{1}{3} \epsilon_I \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma_I \boldsymbol{E}$$

$$u_h = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_I : \boldsymbol{\epsilon}_I = \frac{1}{6} \sigma_I \epsilon_I = 1.382\,857\,3 \times 10^{-3}$$

$$u_d = u - u_h = 0.0481 \text{ [J/cm}^3\text{]}$$