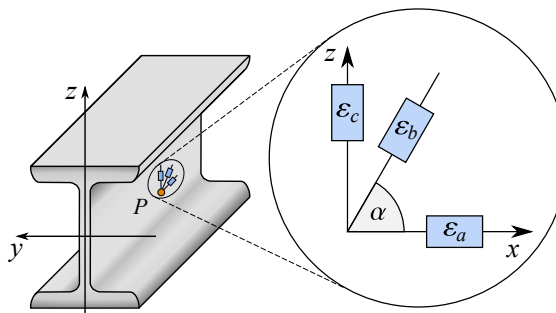
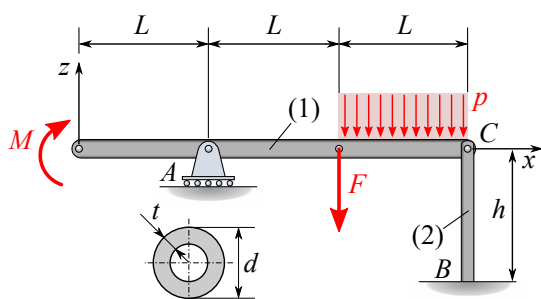


| | | |
|---|-----------------------|---|
| BME Gépészmérnöki Kar | SZILÁRDSÁGTAN | Név: Vári Gergő |
| Műszaki Mechanikai Tanszék | 2. HÁZI FELADAT | Neptun kód: MQHJOH |
| 2024/25 II. | Határidő: lásd Moodle | Késedelmes beadás: <input type="checkbox"/> Javítás: <input type="checkbox"/> |
| Nyilatkozat: Aláírással igazolom, hogy a házi feladatot saját magam készítettem el, az abban leírtak saját megértésemet tükrözik. | | Aláírás: Vári Gergő |

Csak a formai követelményeknek megfelelő feladatokat értékeljük! <http://www.mm.bme.hu/targyak/bsc/sziltan>

Feladatkitűzés

Az ábrán vázolt szerkezet két rúdja csuklósan kapcsolódik, anyaguk homogén, izotrop, lineárisan rugalmas (rugalmassági modulusz: $E = 210$ GPa; Poisson-tényező: $\nu = 0,3$). Az (1)-es rúd keresztmetszete az ábrán látható I-szelvény (I-80-MSZ-325), míg a (2)-es rúd d külső átmérőjű körgyűrű.



Adatok

| L [m] | h [m] | d [mm] | F [kN] | M [kNm] | p [kN/m] | ε_a [10^{-4}] | ε_b [10^{-4}] | ε_c [10^{-4}] | α [°] |
|---------|---------|----------|----------|-----------|------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------|
| 1.50 | 2.50 | 58 | 4 | 2 | 1.75 | -5.20 | -4.50 | 3 | 45 |

(Rész)eredmények

| | | | | | | |
|------------------|-------------------|------------------|------------------|-------------------------------|---------------------------------|----------------------------|
| A_z [kN] | x_{\max} [m] | w_{\max} [mm] | t_{\min} [mm] | ε_y [10^{-4}] | γ_{xz} [10^{-4}] | σ_x [MPa] |
| 1.98958 | 0 | 60.699 | 2.5 | 0.943 | -6.8 | -99.231 |
| σ_z [MPa] | τ_{xz} [MPa] | σ_1 [MPa] | σ_2 [MPa] | σ_3 [MPa] | $\Delta\sigma_{\text{e}}$ [MPa] | u_d [J/cm ³] |
| 33.231 | -54.923 | 53.041 | 0 | -119.041 | 19.445 | 0.048 |

| | | | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| e_{1x} [-] | e_{1y} [-] | e_{1z} [-] | e_{2x} [-] | e_{2y} [-] | e_{2z} [-] | e_{3x} [-] | e_{3y} [-] | e_{3z} [-] |
| 0.3393 | 0 | -0.941 | 0 | 1 | 0 | 0.941 | 0 | 0.3393 |

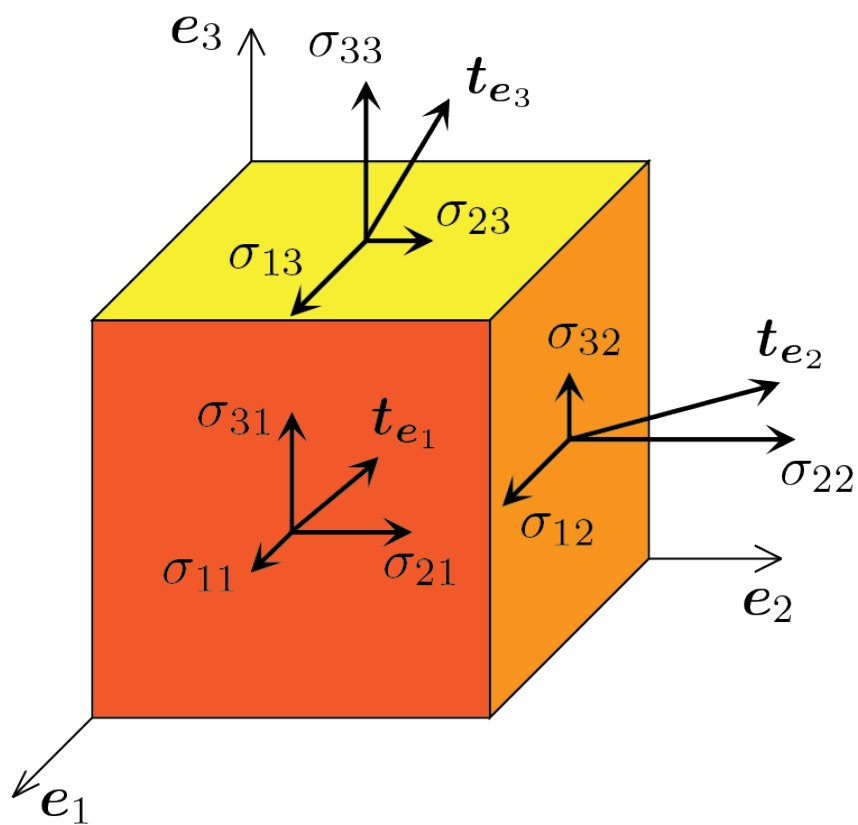
Pontozás

| Minimumfeladat | Feladatok | | | | | | Dokumentáció | Összesen |
|----------------|-----------|----|----|----|----|----|--------------|----------|
| | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | | |
| | /5 | /3 | /4 | /4 | /2 | /2 | /5 | /25 |

Szilárdságtan HF2

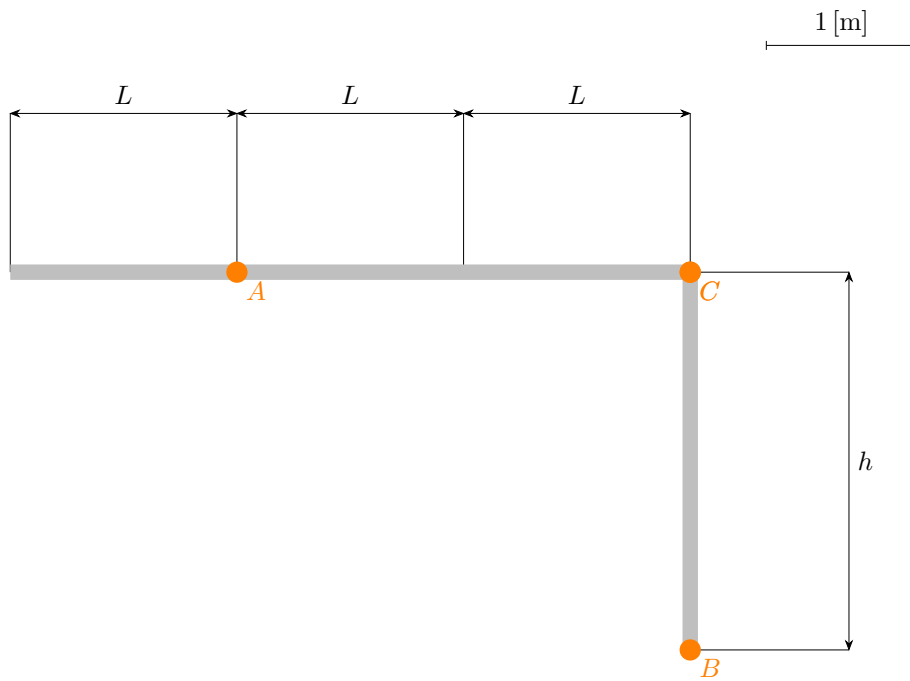
Vári Gergő

2025. április 21.



1. ábra: Cauchy feszültségi tenzor

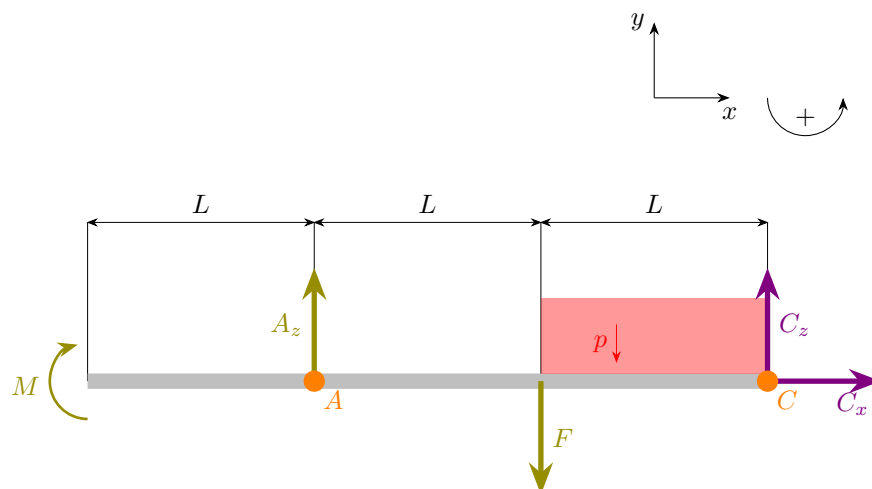
1 Reakció komponensek



2. ábra: Léptékhelyes ábra

1.1 Egyensúlyi egyenletek

1.1.1 1-es rúd



3. ábra: 1-es rúd SZTÁ

$$\sum F_x := 0 = C_x$$

$$\sum F_z := 0 = A_z - F - pL + C_z$$

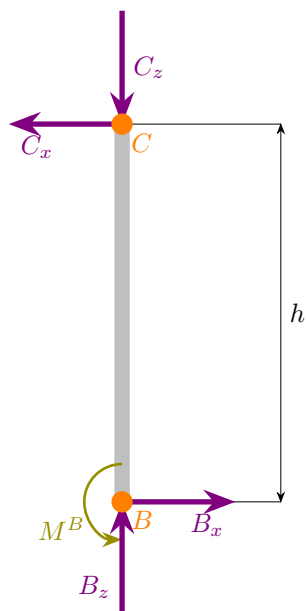
$$\sum M^A := 0 = -M - F(L) - pL\left(\frac{3}{2}L\right) + C_z(2L)$$

$$A_z = 1.989\,58 \text{ [kN]}$$

$$C_x = 0 \text{ [kN]}$$

$$C_z = 4.635\,42 \text{ [kN]}$$

1.1.2 2-es rúd



4. ábra: 2-es rúd SZTÁ

$$\sum F_x := 0 = -C_x + B_x$$

$$\sum F_z := 0 = B_z - C_z$$

$$\sum M^B := 0 = C_x(h)$$

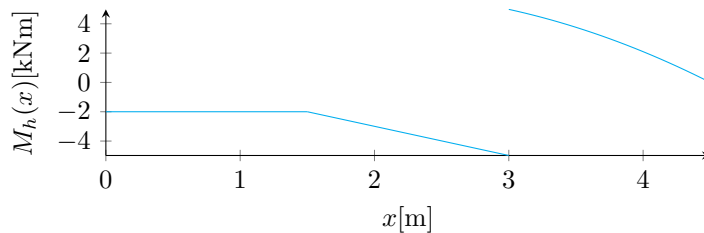
$$B_x = C_x = 0 \text{ [kN]}$$

$$B_z = C_z = 4.635\,42 \text{ [kN]}$$

2 Lehajlásfüggvény

2.1 Hajlítónyomatéki igénybevételi függvény

| x | $0 < x < L$ | $L < x < L + R$ | $L + R < x < 2L + R$ |
|-------|-------------|------------------|--|
| M_h | $-M$ | $-M - Az(x - L)$ | $-M - Az(x - L) + F(x - 2L) + p(x - 2L)\frac{x - 2L}{2}$ |



2.2 Rugalmas szál differenciálegyenlete

$$w_i''(x) = -\frac{M_{hi}(x)}{IE}$$

2.2.1 Peremfeltételek

$$w_1(L) = 0$$

$$w_2(L) = 0$$

$$w_3(3L) = 0$$

$$w_1'(L) = w_2'(L)$$

$$w_2'(2L) = w_3'(2L)$$

$$w_2(2L) = w_3(2L)$$

$$c_1 = -0.049647$$

$$c_2 = 0.0606989$$

$$c_3 = -0.0359472$$

$$c_4 = 0.053849$$

$$c_5 = 0.0979194$$

$$c_6 = 0.127812$$

$$\begin{aligned}
w_1(L) &= 0.0606989 \\
w_1(L) &= 0 \\
w_2(L) &= 0 \\
w_2(2L) &= -0.0263059 \\
w_3(2L) &= -0.0263059 \\
w_3(3L) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{\max} &= 0.06 \text{ [m]} = 60 \text{ [mm]} \\
x_{\max} &= 0 \text{ [m]}
\end{aligned}$$

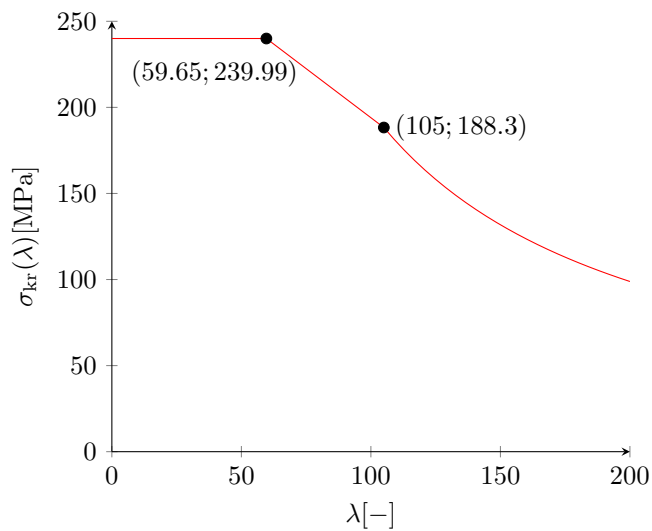
2.2.2 Szögelfordulás

$$\phi_i(x) = w_i'(x)$$

$$\begin{aligned}
\phi_1(0) &= -0.049647 \\
\phi_2(L) &= -0.0312849 \\
\phi_2(2L) &= 0.000777027 \\
\phi_3(3L) &= 0.0266705
\end{aligned}$$

3 2-es rúd méretezése kihajlásra

3.1 Kritikus feszültség - karcsúság diagram



$$\sigma_F = 240 \text{ [MPa]}$$

$$\lambda_0 = 150$$

$$\sigma_{kr}(\lambda) = 308 - 1.14\lambda$$

$$\sigma_{kr}(\lambda_0) = 188.3$$

$$\sigma_{kr}(\lambda_1) = \sigma_F \Rightarrow \lambda_1 = 59.65$$

3.2 Minimális falvastagság

$$c = 2$$

$$h_0 = ch = 5 \text{ [m]}$$

$$F_t = 3 |B_z| = \left(\frac{\pi}{h_0} \right)^2 I_2 E$$

$$I_2 = \frac{d^4 \pi}{64} - \frac{(d - 2t_{\min})^4 \pi}{64}$$

$$t_{\min} = 2.49254 \approx 2.5 \text{ [mm]}$$

$$A = \frac{[d^2 - (d - 2t_{\min})^2] \pi}{4}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$

$$\lambda = \frac{h_0}{i_2} = 254.886$$

4 Nyúlásmérés

4.1 Alakváltozási tenzor

$$\epsilon_x = \epsilon_a$$

$$\epsilon_z = \epsilon_c$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_x + \epsilon_z)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.2 \times 10^{-4} & 0 & -3.4 \times 10^{-4} \\ 0 & 9.42857 \times 10^{-5} & 0 \\ -3.4 \times 10^{-4} & 0 & 3 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_I = \frac{\Delta V}{V} = \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -1.257143 \times 10^{-4}$$

4.2 Hooke-törvény

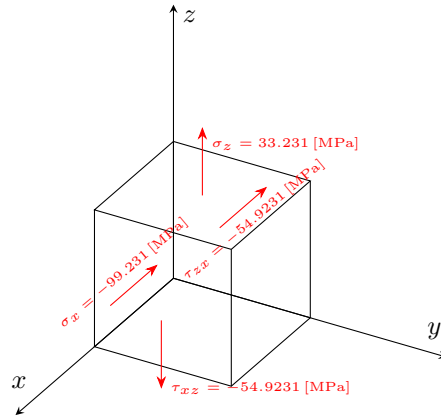
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \mathbf{E} \right)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-2\nu} \left(\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \right)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-2\nu} \left(\epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} \gamma_{xz}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -99.231 & 0 & -54.9231 \\ 0 & 0 & 0 \\ -54.9231 & 0 & 33.231 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$



$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{I}} &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = -66 \text{ [MPa]} \\
\sigma_{\text{II}} &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \\
&= -6314.092\,275 \text{ [MPa}^2\text{]} \\
\sigma_{\text{III}} &= \det(\boldsymbol{\sigma}) = 0
\end{aligned}$$

5 Főfeszültségek

5.1 Mohr-féle diagram

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \sigma_y = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = 0$$

$$X(\sigma_x; [\tau_{xz}]) = (-99.231; 54.9231)$$

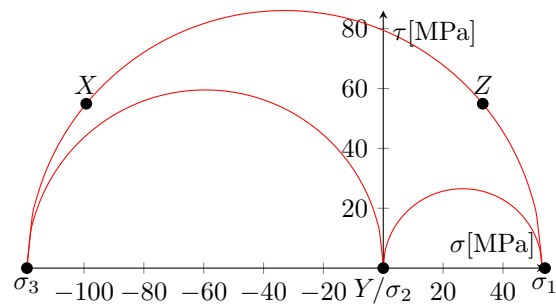
$$Y(\sigma_y; 0) = (0; 0)$$

$$Z(\sigma_z; [\tau_{xz}]) = (33.231; 54.9231)$$

$$\sigma_K = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = -33 \text{ [MPa]}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 86.04122 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{1;3} = \sigma_K \pm R = \begin{cases} 53.04122 \\ -119.04122 \end{cases}$$



5.2 Főirányok

$$\phi_1 = \arctg\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = 70.166^\circ$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \\ 0 \\ -\sin \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3393 \\ 0 \\ -0.941 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0.941 \\ 0 \\ 0.3393 \end{bmatrix}$$

5.3 Ellenőrzés

5.3.1 Sajátérték

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{E}) &= 0 \\ \begin{bmatrix} \sigma_x - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \lambda_z - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (-\lambda) [(\sigma_x - \lambda)(\sigma_z - \lambda) - \tau_{xz}^2] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1;2;3} &= \begin{cases} 53.04122 \\ 0 \\ -119.04122 \end{cases} \\ &= \sigma_{1;2;3} \quad \checkmark \end{aligned}$$

5.3.2 Sajátvektor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} - \lambda_1 \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z - \sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ \sin \phi \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1) \cos \alpha + \tau_{xz} \sin \alpha &= 0 \\ \tau_{xz} \cos \alpha + (\sigma_z - \sigma_1) \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\sigma_z - \sigma_1 + \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_1 + \tau_{xz}}$$

$$\alpha = 70.1661^\circ = \phi \checkmark$$

6 Pontbeli feszültségi állapot

$$\sigma_e^{\text{Mohr}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 172.082\,44 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_e^{\text{HMH}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = 152.6377 \text{ [MPa]}$$

$$\Delta\sigma_e = \sigma_e^{\text{Mohr}} - \sigma_e^{\text{HMH}} = 19.445 \text{ [MPa]}$$

7 Pontbeli alakváltozási energiasűrűség

$$u = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} = 0.049\,46 \text{ [J/cm}^3\text{]}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_I = \frac{1}{3} \epsilon_I \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma_I \boldsymbol{E}$$

$$u_h = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_I : \boldsymbol{\epsilon}_I = \frac{1}{6} \sigma_I \epsilon_I = 1.382\,857\,3 \times 10^{-3}$$

$$u_d = u - u_h = 0.0481 \text{ [J/cm}^3\text{]}$$