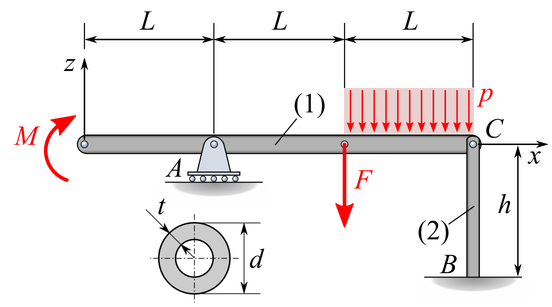
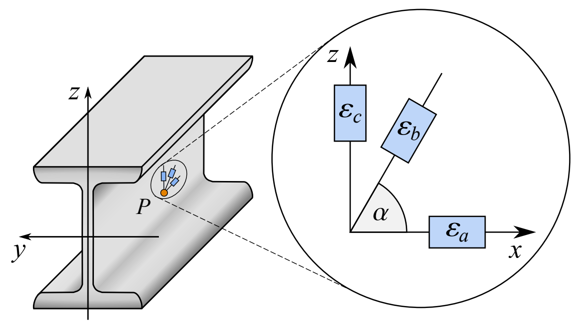
BME Gépészmérnöki Kar	SZILÁRDSÁGTAN	Név: Vári Gergő
Műszaki Mechanikai Tanszék	2. HÁZI FELADAT	Neptun kód: MQHJOH
2024/25 II.	Határidő: lásd Moodle	Késedelmes beadás: ☐ Javítás: ☐
Nyilatkozat: Aláírásommal igazolom, hogy a házi feladatot saját magam készítettem el, az abban leírtak saját megértésemet tükrözik.		Aláírás: Vári Gergő

Csak a formai követelményeknek megfelelő feladatokat értékeljük! `http://www.mm.bme.hu/targyak/bsc/sziltan`

Feladatkitűzés

Az ábrán vázolt szerkezet két rúdja csuklósan kapcsolódik, anyaguk homogén, izotrop, lineárisan rugalmas (rugalmassági modulusz: $E = 210$ GPa; Poisson-tényező: $\nu = 0{,}3$). Az (1)-es rúd keresztmetszete az ábrán látható I-szelvény (I-80-MSZ-325), míg a (2)-es rúdé d külső átmérőjű körgyűrű.





Adatok

L [m]	h [m]	d [mm]	F [kN]	M [kNm]	p [kN/m]	ε_a [10^{-4}]	ε_b [10^{-4}]	ε_c [10^{-4}]	α [°]
1.50	2.50	58	4	2	1.75	-5.20	-4.50	3	45

(Rész)eredmények

A_z [kN]	$x_{\max}$ [m]	$w_{\max}$ [mm]	$t_{\min}$ [mm]	ε_y [10^{-4}]	γ_{xz} [10^{-4}]	σ_x [MPa]
1.98958	0	60.699	2.5	0.943	-6.8	-99.231
σ_z [MPa]	τ_{xz} [MPa]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]	σ_3 [MPa]	$\Delta\sigma_e$ [MPa]	u_d [J/cm^3]
33.231	-54.923	53.041	0	-119.041	19.445	0.048

e_{1x} [-]	e_{1y} [-]	e_{1z} [-]	e_{2x} [-]	e_{2y} [-]	e_{2z} [-]	e_{3x} [-]	e_{3y} [-]	e_{3z} [-]
0.3393	0	-0.941	0	1	0	0.941	0	0.3393

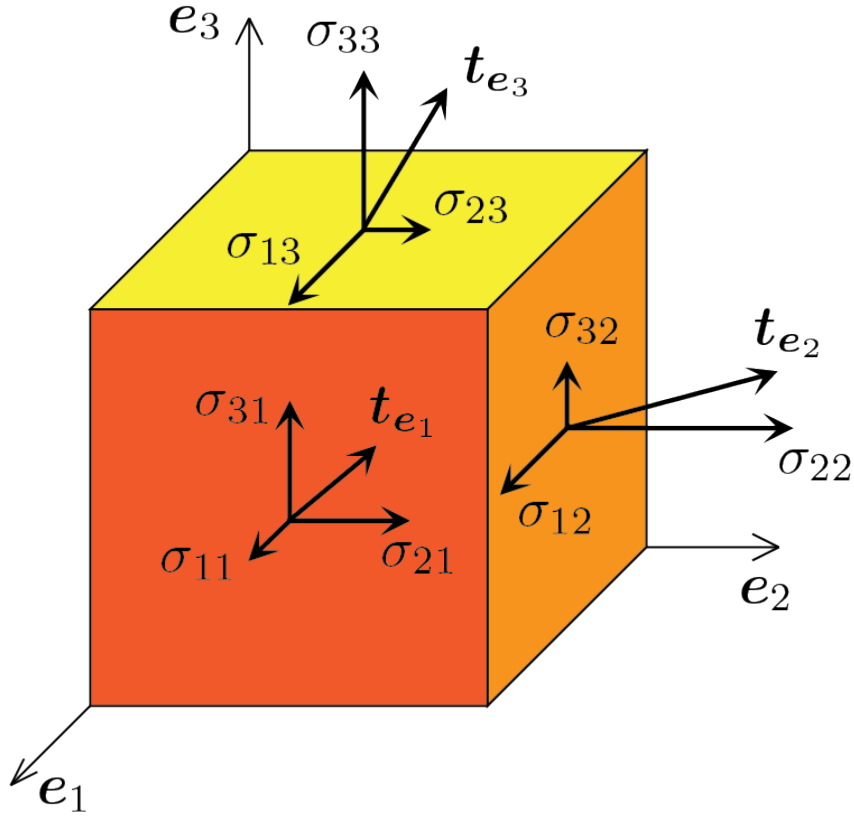
Pontozás

Minimumfeladat	Feladatok						Dokumentáció	**Összesen**
	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
	/5	/3	/4	/4	/2	/2	/5	**/25**

Szilárdságtan HF2

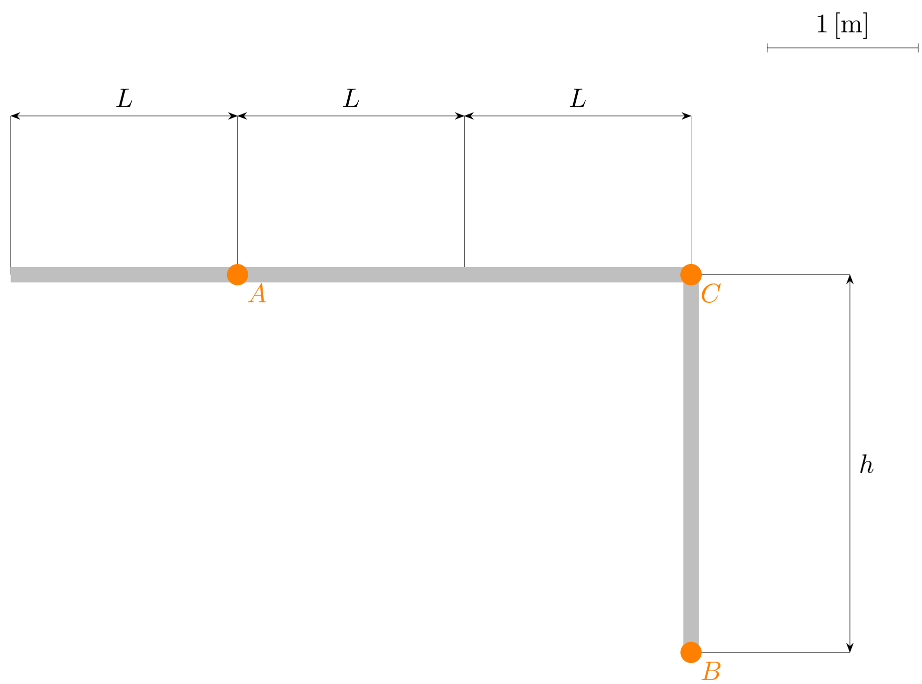
Vári Gergő

2025. április 22.



1. ábra: Cauchy feszültségi tenzor

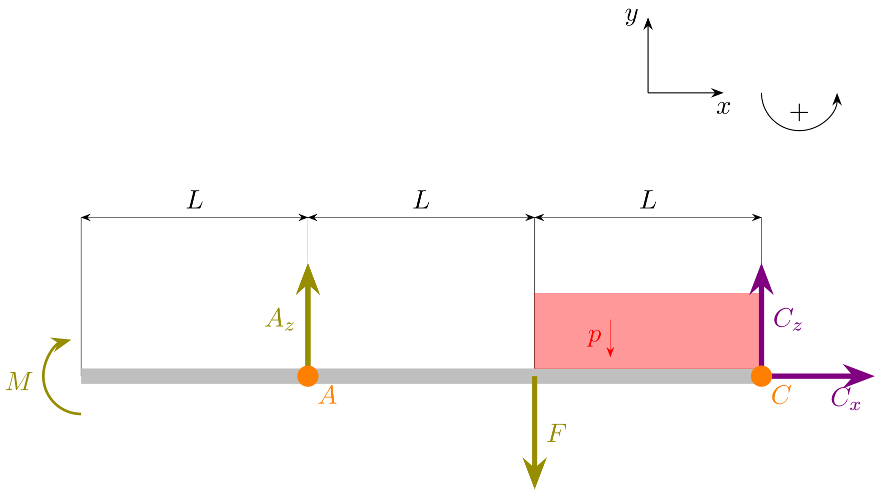
1 Reakció komponensek



2. ábra: Léptékhelyes ábra

1.1 Egyensúlyi egyenletek

1.1.1 1-es rúd

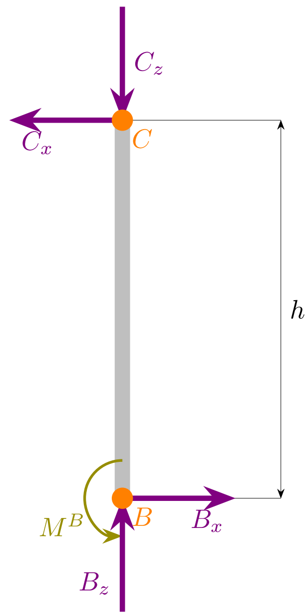


3. ábra: 1-es rúd SZTÁ

$$\sum F_x := 0 = C_x$$
$$\sum F_z := 0 = A_z - F - pL + C_z$$
$$\sum M^A := 0 = -M - F(L) - pL\left(\frac{3}{2}L\right) + C_z(2L)$$

$$A_z = 1.989\,58\,[\mathrm{kN}]$$
$$C_x = 0\,[\mathrm{kN}]$$
$$C_z = 4.635\,42\,[\mathrm{kN}]$$

1.1.2 2-es rúd



4. ábra: 2-es rúd SZTÁ

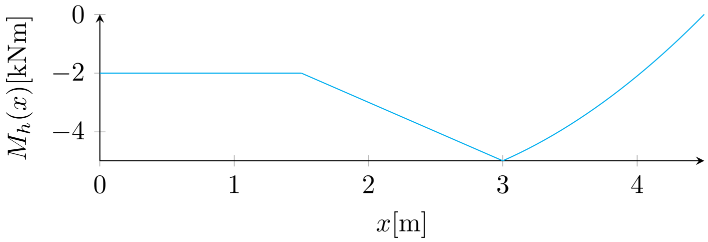
$$\sum F_x := 0 = -C_x + B_x$$
$$\sum F_z := 0 = B_z - C_z$$
$$\sum M^B := 0 = C_x(h)$$

$$B_x = C_x = 0\,[\mathrm{kN}]$$
$$B_z = C_z = 4.635\,42\,[\mathrm{kN}]$$

2 Lehajlásfüggvény

2.1 Hajlítónyomatéki igénybevételi függvény

x	$0 < x < L$	$L < x < L + R$	$L + R < x < 2L + R$
M_h	$-M$	$-M - A_z(x - L)$	$-C_z(3L - x) + p\frac{(3L-x)^2}{2}$



2.2 Rugalmas szál differenciálegyenlete

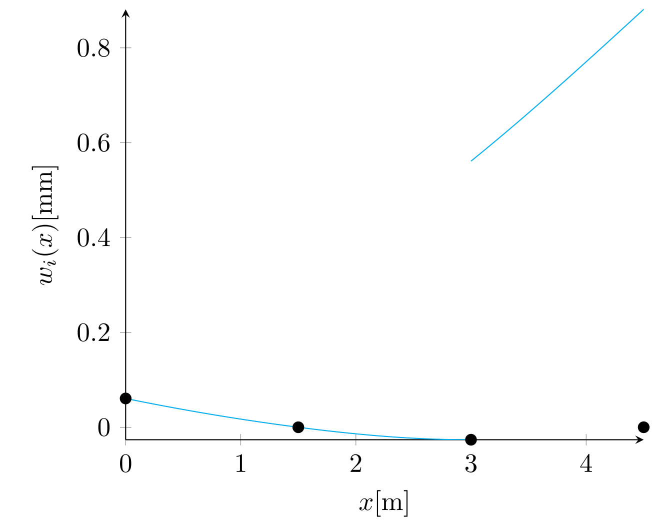
$$w_i^{''}(x) = -\frac{M_{h_i}(x)}{IE}$$

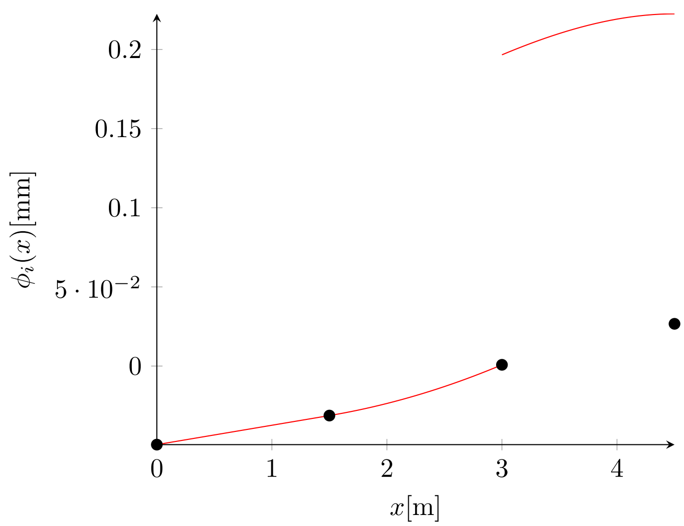
Mivel a hajlítónyomatéki függvényünk három részből áll, itt is követnünk kell ezt.

$$w_1^{''}(x) = 0.0122414$$
$$w_2^{''}(x) = -0.0602503 + 0.0121776x$$
$$w_3^{''}(x) = 0.0192229 + 0.0198285x - 0.00535561x^2$$

$$w_1^{'}(x) = c_1 + 0.0122414x$$
$$w_2^{'}(x) = c_3 - 0.00602503x + 0.00608881x^2$$
$$w_3^{'}(x) = c_5 + 0.0192229x + 0.00991425x^2 - 0.0017852x^3$$

$$w_1(x) = c_2 + c_1x + 0.0061207x^2$$
$$w_2(x) = c_4 + c_3x - 0.00301252x^2 + 0.0020296x^3$$
$$w_3(x) = c_6 + c_5x + 0.00961146x^2 + 0.00330475x^3 - 0.000446301x^4$$





2.2.1 Peremfeltételek

Tudjuk hogy $x = L$ és $x = 3L$-ben a lehajlás értéke zérus, valamint a rúd folytonossága miatt feltételezzük hogy az egybeeső pontok érték az elhajlásnál és szögelfordulásnál megegyezik

$$
\begin{aligned}
w_1(L) &= 0 \\
w_2(L) &= 0 \\
w_3(3L) &= 0 \\
w_1^{'}(L) &= w_2^{'}(L) \\
w_2^{'}(2L) &= w_3^{'}(2L) \\
w_2(2L) &= w_3(2L)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -0.049647 \\
c_2 &= 0.0606989 \\
c_3 &= -0.0359472 \\
c_4 &= 0.053849 \\
c_5 &= 0.0979194 \\
c_6 &= 0.127812
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_1(0) &= 0.0606989 \\
w_1(L) &= 0 \\
w_2(L) &= 0 \\
w_2(2L) &= -0.0263059 \\
w_3(2L) &= -0.0263059 \\
w_3(3L) &= 0
\end{aligned}
$$

Lehajlásfüggvény szélsőértéke ott lehet ahol a szögelfordulás nulla: a rúd szélén.

$$
\begin{aligned}
w_{\max} &= 0.06\,[\mathrm{m}] = 60\,[\mathrm{mm}] \\
x_{\max} &= 0\,[\mathrm{m}]
\end{aligned}
$$

2.2.2 Szögelfordulás

$$
\phi_i(x) = w_i^{'}(x)
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_1(0) &= -0.049647 \\
\phi_2(L) &= -0.0312849 \\
\phi_2(2L) &= 0.000777027 \\
\phi_3(3L) &= 0.0266705
\end{aligned}
$$

3 2-es rúd méretezése kihajlásra

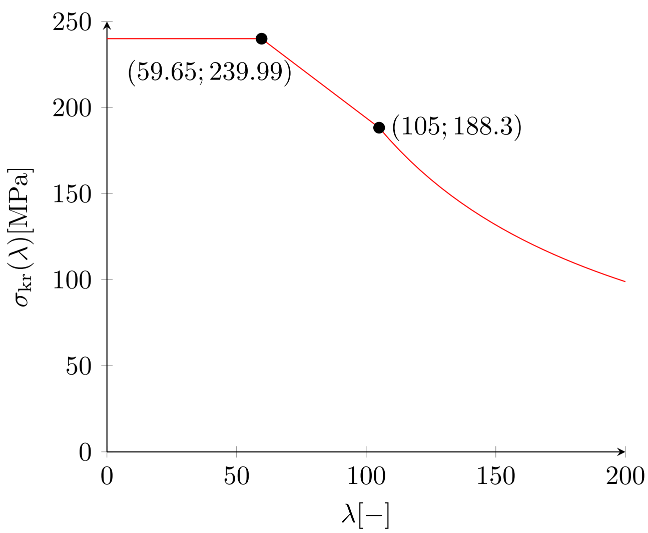
3.1 Kritikusfeszültség - karcsúság diagram

$$\sigma_{\text{F}} = 240\,[\text{MPa}]$$
$$\lambda_0 = 150$$

$$\sigma_{\text{kr}}(\lambda) = 308 - 1.14\lambda$$

$$\sigma_{\text{kr}}(\lambda_0) = 188.3$$
$$\sigma_{\text{kr}}(\lambda_1) = \sigma_{\text{F}} \Rightarrow \lambda_1 = 59.65$$

A kezdeti szakaszon λ-tól független konstans σ_{F} a kritikusfeszültség. A Tetmajer-egyenes két szélsőértéke az Euler kezdetét jelentő λ_0 valamit λ_1 ahol az előbbi egyenessel számolt feszültség eléri a folyáshatárt.



3.2 Minimális falvastagság

A minimális falvastagság számítása függ attól épp melyik tartományba esik a rúd amit csak a falvastagságból tudnánk, ezért feltételezzük hogy a rúd az Euler-tartományba esik karcsúság szempontjából. A c szorzó az egyenértékű hosszhoz abból származik hogy a rúd alul be van fogva, felül pedig nincs akadályozva a kihajlás.

$$
\begin{aligned}
c &= 2 \\
h_0 &= ch = 5\,[\mathrm{m}] \\
F_t = 3\,|B_z| &= \left(\frac{\pi}{h_0}\right)^2 I_2 E
\end{aligned}
$$

A keresztmetszet másodrendű nyomatéka függ a geometriától.

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{d^4\pi}{64} - \frac{(d-2t_{\min})^4\pi}{64} \\
t_{\min} &= 2.49254 \approx 2.5\,[\mathrm{mm}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\left[d^2 - (d-2t_{\min})^2\right]\pi}{4} \\
i_2 &= \sqrt{\frac{I_2}{A}}
\end{aligned}
$$

$$
\lambda = \frac{h_0}{i_2} = 254.886
$$

A karcsúság az Euler-tartományba esik, tehát feltételezésünk beigazolódott.

4 Nyúlásmérés

4.1 Alakváltozási tenzor

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= \epsilon_a \\
\epsilon_z &= \epsilon_c \\
\epsilon_y &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_x + \epsilon_z)
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.2\times10^{-4} & 0 & -3.4\times10^{-4} \\ 0 & 9.428\,57\times10^{-5} & 0 \\ -3.4\times10^{-4} & 0 & 3\times10^{-4} \end{bmatrix}$$

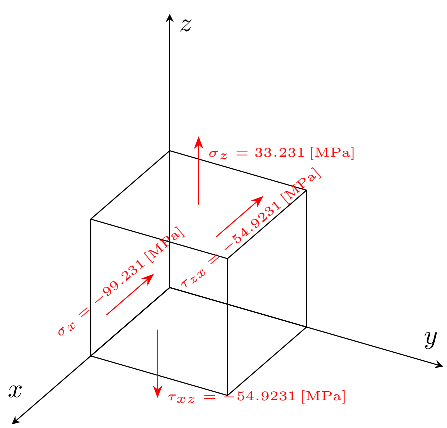
$$\epsilon_{\mathrm{I}} = \frac{\Delta V}{V} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = -1.257\,143\times10^{-4}$$

4.2 Hooke-törvény

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu}\epsilon_I \boldsymbol{E}\right)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-2\nu}\left(\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\epsilon_I\right) \\
\sigma_z &= \frac{E}{1-2\nu}\left(\epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\epsilon_I\right) \\
\tau_{xz} &= \tau_z x = \frac{E}{1+\nu}\frac{1}{2}\gamma_x z
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -99.231 & 0 & -54.9231 \\ 0 & 0 & 0 \\ -54.9231 & 0 & 33.231 \end{bmatrix} [\mathrm{MPa}]$$



$$
\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{I}} &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = -66\,[\mathrm{MPa}] \\
\sigma_{\mathrm{II}} &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \\
&= -6314.092\,275\,[\mathrm{MPa}^2] \\
\sigma_{\mathrm{III}} &= \det(\boldsymbol{\sigma}) = 0
\end{aligned}
$$

5 Főfeszültségek

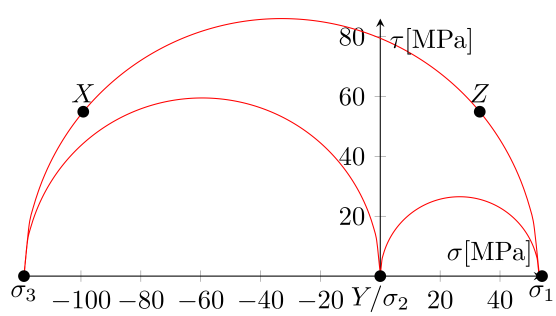
5.1 Mohr-féle diagram

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \sigma_y = 0$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \sigma_2 = 0$$

$$X(\sigma_x; [\tau_{xz}]) = (-99.231; 54.9231)$$
$$Y(\sigma_y; 0) = (0; 0)$$
$$Z(\sigma_z; [\tau_{xz}]) = (33.231; 54.9231)$$

$$\sigma_{\mathrm{K}} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = -33\,[\mathrm{MPa}]$$
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 86.041\,22\,[\mathrm{MPa}]$$

$$\sigma_{1;3} = \sigma_{\mathrm{K}} \pm R = \begin{cases} 53.04122 \\ -119.04122 \end{cases}$$



5.2 Főirányok

$$\phi_1 = \mathrm{arctg}(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}) = 70.166^\circ$$

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 \\ 0 \\ -\sin\phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3393 \\ 0 \\ -0.941 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0.941 \\ 0 \\ 0.3393 \end{bmatrix}$$

5.3 Ellenőrzés

5.3.1 Sajátérték

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda\boldsymbol{E}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \lambda_z - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\lambda)\left[(\sigma_x - \lambda)(\sigma_z - \lambda) - \tau_{xz}^2\right] = 0$$

$$\lambda_{1;2;3} = \begin{cases} 53.04122 \\ 0 \\ -119.04122 \end{cases}$$

$$= \sigma_{1;2;3} \checkmark$$

5.3.2 Sajátvektor

A főírányok merőlegessége miatt írható fel a következő egyenlet.

$$\boldsymbol{\sigma} - \lambda_1\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z - \sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi \\ 0 \\ \sin\phi \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$(\sigma_x - \sigma_1)\cos\alpha + \tau_{xz}\sin\alpha = 0$$

$$\tau_{xz}\cos\alpha + (\sigma_z - \sigma_1)\sin\alpha = 0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} &= -\frac{\sigma_z - \sigma_1 + \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_1 + \tau_{xz}} \\
\alpha &= 70.1661^\circ = \phi \checkmark
\end{aligned}
$$

6 Pontbeli feszültségi állapot

$$\sigma_e^{\mathrm{Mohr}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 172.082\,44\,[\mathrm{MPa}]$$

$$\sigma_e^{\mathrm{HMH}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2\right]} = 152.6377\,[\mathrm{MPa}]$$

$$\Delta\sigma_e = \sigma_e^{\mathrm{Mohr}} - \sigma_e^{\mathrm{HMH}} = 19.445\,[\mathrm{MPa}]$$

7 Pontbeli alakváltozási energiasűrűség

$$u = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} = 0.049\,46\,[\mathrm{J/cm^3}]$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon_I} &= \frac{1}{3}\epsilon_I \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{3}\sigma_I \boldsymbol{E} \\
u_h = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma_I} : \boldsymbol{\epsilon_I} &= \frac{1}{6}\sigma_I \epsilon_I = 1.382\,857\,3 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$u_d = u - u_h = 0.0481\,[\mathrm{J/cm^3}]$$