

**UNIVERSIDADE CRUZEIRO DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
DOUTORADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**UMA ANÁLISE SOBRE AS ATIVIDADES DE  
PROBABILIDADE PROPOSTAS NOS LIVROS DIDÁTICOS  
DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO  
FUNDAMENTAL**

**ELIZABETH SOARES**

**Orientadora: Prof.<sup>a</sup> D.<sup>ra</sup> Celi Espasandin  
Lopes**

**Tese apresentada ao Doutorado em Ensino  
de Ciências e Matemática, da Universidade  
Cruzeiro do Sul, como parte dos requisitos  
para a obtenção do título de Doutor em  
Ensino de Ciências e Matemática.**

**SÃO PAULO  
2014**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA CENTRAL DA  
UNIVERSIDADE CRUZEIRO DO SUL

**UNIVERSIDADE CRUZEIRO DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

**UMA ANÁLISE SOBRE AS ATIVIDADES DE  
PROBABILIDADE PROPOSTAS NOS LIVROS DIDÁTICOS  
DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO  
FUNDAMENTAL**

**Elizabeth Soares**

**Tese de doutorado defendida e aprovada pela  
Banca Examinadora em 14/03/2014.**

**BANCA EXAMINADORA:**

**Prof.<sup>a</sup> D.<sup>ra</sup> Celi Espasandin Lopes  
Universidade Cruzeiro do Sul  
Presidente**

**Prof.<sup>a</sup> D.<sup>ra</sup> Edda Curi  
Universidade Cruzeiro do Sul**

**Prof.<sup>a</sup> D.<sup>ra</sup> Maria Delourdes Maciel  
Universidade Cruzeiro do Sul**

**Prof.<sup>a</sup> D.<sup>ra</sup> Cileda de Queiroz e Silva Coutinho  
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo**

**Prof.<sup>a</sup> D.<sup>ra</sup> Iole Freitas Druck  
Universidade de São Paulo**

## **AGRADECIMENTOS**

*À Prof.<sup>a</sup> D.<sup>ra</sup> Celi Espasandin Lopes, por acreditar em meu crescimento pessoal, acadêmico e profissional e incentivá-lo.*

*Às Prof.<sup>as</sup> D.<sup>ras</sup> Edda Curi, Maria Delourdes Maciel, Cileda de Queiroz e Silva Coutinho e Iole Freitas Druck, que muito contribuíram em meu exame de qualificação.*

*Aos colegas Alexandre, Antonio Carlos, Célia Maria, Dalbão, Ferreira, Geisiane, Geraldo, Leandro, Luzinete, Martha e Meri do Grupo de Ensino e Pesquisa em Educação Estatística e Matemática (GEPEEM) da Unicsul, por compartilharem aprendizagens e ensinamentos.*

*Aos professores e autores José Jakubovic (in memoriam), Marcelo Lellis, Luiz Márcio Imenes, Scipione Di Pierro Netto (in memoriam) e Vicente Paz Fernandez e aos editores Valdemar Vello e Mizue Jyo, com os quais pude debater por muitas horas sobre o papel do livro didático de matemática.*

*Ao grande amigo Gerson Ferracini, pela amizade, incentivo e competência com que me acompanhou nos diálogos, reflexões e edição desta pesquisa.*

*Às minhas amigas Prof.<sup>a</sup> Magali do Nascimento de Paula e Prof.<sup>a</sup> Cidinha Costa dos Reis e aos ex-alunos do Centro Universitário Sant'Anna, com quem muito aprendi compartilhando este momento de ensino e aprendizagem.*

*Aos funcionários da Unicsul, pela atenção e paciência que expressaram durante estes anos.*

*À Editora Scipione, do grupo Abril Educação, que de 2010 a 2012 apoiou-me financeiramente.*

*À CAPES, pelo apoio financeiro neste último ano.*

*À minha querida mãe e companheira, Irma, e ao meu querido irmão e amigo de todas as horas, Roberto, que me apoiaram e compreenderam minha ausência em diferentes ocasiões.*

*A Deus, por ter me permitido passar por mais esta experiência.*

SOARES, E. **Uma análise sobre as atividades de probabilidade propostas nos livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental**. 2014. 140 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2014.

## RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo analisar como o tema ‘probabilidade’ tem sido abordado em coleções didáticas brasileiras aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático de 2014 (PNLD 2014) e que haviam sido mais adotadas dentre as aprovadas no PNLD 2011. Buscou-se responder à questão: Que indícios teóricos e metodológicos emergem de um processo analítico sobre o ensino de probabilidade, expressos em alguns livros didáticos? Para tanto, procedeu-se a uma pesquisa bibliográfica e documental, adotando a análise de conteúdo como técnica para o processo analítico. Na pré-análise, selecionamos as coleções do PNLD 2014 e na exploração dos materiais selecionamos as seguintes categorias: presença de concepção de probabilidade clássica, presença de concepção de probabilidade frequentista e presença de discussão sobre aleatoriedade. A fim de proporcionar um contraste necessário para ampliar nosso olhar sobre o ensino de probabilidade expresso em livros didáticos nacionais, elegemos uma coleção didática voltada a outro contexto educacional, a qual resultou de um projeto de pesquisa que envolveu professores e pesquisadores de diferentes regiões dos Estados Unidos. No referencial teórico de análise, destacam-se estudos de Azcárate, Batanero, Cardeñoso, Coutinho e Lopes. Concluiu-se que as coleções nacionais analisadas não exploram satisfatoriamente a concepção frequentista de probabilidade e não priorizam a discussão sobre a questão da aleatoriedade. Utilizam a concepção clássica para apresentar a probabilidade como uma razão e exploram o fato de que se trata de uma probabilidade teórica. Pouco apresentam atividades de investigação ou de resolução de problemas multidisciplinares que subsidiem o estudante a melhor compreender sua realidade e familiarizar-se com modos de lidar com a aleatoriedade.

Palavras-chave: Probabilidade clássica, Probabilidade frequentista, Aleatoriedade, Educação estatística, Livro didático, PNLD, PCN.

SOARES, E. **An analysis of probability activities proposed in mathematics textbooks for middle school**. 2014. 140 p. Doctoral dissertation (Graduate Program in Science and Mathematics) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2014.

## **ABSTRACT**

This study examines how the theme 'probability' has been addressed in teaching books approved by the 2014 selection of the Brazilian Textbook Program (Programa Nacional do Livro Didático, PNLD 2014) and which had been the most widely adopted among widely adopted from the program's 2011 selection. We sought to answer the question: What theoretical and methodological indications emerge from an analytical process about teaching probability, expressed in some textbooks? A bibliographic and desk research was conducted, adopting the content analysis as the technique for the analytical process. In the pre-analysis stage, we selected collections from PNLD 2014, and explored the materials according to the following categories: presence of the classical conception of probability, presence of the frequentist conception of probability and presence of discussions on randomness. In order to provide a necessary contrast to our view of the teaching of probability expressed in Brazilian textbooks, we elected a collection aimed at another educational context, which resulted from a research project involving scholars from different regions of the United States. The theoretical framework of analysis was essentially based on Azcárate, Batanero, Cardeñoso, Coutinho, and Lopes. It was concluded that the Brazilian collections do not satisfactorily explore the frequentist conception of probability and do not place priority on discussing randomness. The classical conception was employed to introduce probability as a ratio, exploring it is theoretical probability. Investigative approaches are little employed in Brazilian textbooks, as are multidisciplinary approaches to problem-solving, which might aid student to better understand their reality and become familiar with manners of dealing with activities involving randomness.

Keywords: Classical probability, Frequentist probability, Randomness, Statistics education, Textbook, PNLD, PCN.

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Objetivos do eixo ‘Análise de dados e probabilidade’ do <i>Connected Mathematics Project</i> .....	48
Quadro 2 – Concepções de probabilidade presentes em coleções didáticas de matemática para os anos finais do Ensino Fundamental aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático 2014 (PNLD 2014). ....	101

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Livros didáticos de matemática para os anos finais do Ensino Fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático 2014 (PNLD 2014). ....	66
Tabela 2 – Livros didáticos de matemática para os anos finais do Ensino Fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático 2011 (PNLD 2011). ....	67

## SUMÁRIO

1	DE MINHA TRAJETÓRIA À QUESTÃO DESTA PESQUISA.....	9
1.1	Introdução.....	9
1.2	A Probabilidade nos Parâmetros Curriculares Nacionais .....	17
1.3	A Questão de Pesquisa .....	18
2	A METODOLOGIA DA PESQUISA.....	21
2.1	O Objeto de Estudo e a Questão de Pesquisa .....	21
2.2	Diferenciando a Pesquisa Bibliográfica e a Pesquisa Documental.....	21
2.3	Procedimentos Metodológicos.....	23
2.4	Processo de Análise .....	24
3	O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE .....	27
3.1	Aspectos Históricos da Probabilidade .....	27
3.2	Concepções de Probabilidade .....	30
3.3	Sobre a Aleatoriedade .....	31
3.4	O Ensino e a Aprendizagem.....	33
4	O LIVRO DIDÁTICO E O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO .....	35
4.1	Um Pouco de História.....	35
4.2	Processo de Avaliação .....	38
4.3	Guia do Livro Didático .....	42
4.4	Algumas Considerações.....	44
5	AMPLIANDO OLHARES SOBRE A ABORDAGEM DA PROBABILIDADE .....	46
5.1	<i>Connected Mathematics Project</i> .....	46
5.2	As Atividades Investigativas no Volume <i>How likely Is It?: Probability</i> .....	49
5.2.1	Investigação 1: Um Primeiro Olhar Sobre a Chance .....	50
5.2.2	Investigação 2: Mais Experimentos com a Chance .....	54
5.2.3	Investigação 3: Usando Roletas para Predizer Chances.....	59
5.2.4	Investigação 4: Probabilidades Teóricas .....	62
5.2.5	Algumas Considerações .....	64
6	A ABORDAGEM DE PROBABILIDADE EM TRÊS COLEÇÕES APROVADAS NO PNLD 2014 .....	65
6.1	Critério para Escolha das Três Coleções .....	65
6.2	<i>Projeto Teláris – Dante – Ática</i> .....	67
6.2.1	Comentários dos Avaliadores nos PNLDs .....	67
6.2.2	Atividades Propostas na Versão Avaliada no PNLD 2014 .....	71
6.3	<i>Matemática – Bianchini – Moderna</i> .....	80
6.3.1	Comentários dos Avaliadores nos PNLDs .....	80
6.3.2	Atividades Propostas na Versão Avaliada no PNLD 2014 .....	82
6.4	<i>Matemática: Imenes e Lellis – Moderna</i> .....	89
6.4.1	Comentários dos Avaliadores dos PNLDs .....	89
6.4.2	Atividades Propostas na Versão Avaliada no PNLD 2014 .....	91
6.5	Análise Sobre as Coleções.....	100



7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	105
	REFERÊNCIAS.....	110
	ANEXOS .....	113

# 1 DE MINHA TRAJETÓRIA À QUESTÃO DESTA PESQUISA

*A vida é assim mesmo. É sempre possível deixar o barco atracado ou só navegar nas baías mansas.*

*Aí não há perigo de naufrágio. Mas não há o prazer do calafrio e do desconhecido.*  
(ALVES, 2013, p. 118)

Neste capítulo, relato as experiências profissionais e os estudos que tive a oportunidade de vivenciar e que, gradativamente, me conduziram ao tema desta pesquisa.

Em seguida, são focalizados os objetivos e procedimentos relacionados à probabilidade que estão indicados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998). Por fim, é apresentada a questão condutora desta pesquisa.

## 1.1 Introdução

Meu primeiro contato com a problemática focalizada neste estudo ocorreu bem antes que pudesse imaginá-la imbricada em uma pesquisa.

Quando cursava a então 5ª série do Ginásio (hoje 6º ano do Ensino Fundamental) era, na véspera das provas, frequentemente chamada pelas mães de algumas colegas para dar aulas particulares a suas filhas. Considerava tais oportunidades como festas, pois eram regadas a lanches e sucos. Sentia-me envaidecida por entender a tal da “matemática moderna”, tanto nas aulas dos professores como a apresentada nos livros didáticos. Com o passar do tempo, essa prática didática tornou-se rotina, estendendo-se até o final da 8ª série. Todavia, só bem depois pude constatar que apenas repetia pausadamente os algoritmos, sem ter consciência do que eles significavam.

Em 1977, ano em que ingressei no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, fui contratada por um cursinho pré-vestibular para esclarecer dúvidas dos vestibulandos e ministrar aulas de assuntos básicos de Matemática. Essa atividade profissional reforçou a prática que desenvolvi em explicar detalhadamente a resolução das questões. No final do primeiro ano da

faculdade, escolhi a área de Licenciatura, embora ainda não tivesse certeza se era a que queria.

Em 1979, comecei também a lecionar no 2º grau (hoje Ensino Médio) até que em 1981 passei a ministrar aulas para a 5ª série de outra escola regular do 1º grau (atual Ensino Fundamental) na cidade de São Paulo. Foi uma catástrofe! Eu não conseguia perceber o brilho nos olhos dos alunos de 11 anos, como via nos alunos do cursinho, quando lhes dizia que a uma flor correspondia um vaso, a duas flores, dois vasos, ou que a propriedade comutativa da adição é enunciada na forma “ $a$  mais  $b$  é igual a  $b$  mais  $a$ ”, e assim por diante. Comecei a perceber que não havia sentido em abordar assuntos tão abstratos – pelo menos da forma como eu havia aprendido. Não conseguia convencê-los de que esses conteúdos eram importantes. Os alunos olhavam-me e pareciam sempre expressar uma mesma questão: “E daí?”. Foi então que comecei a perceber que esse seria o meu desafio: explicar a uma geração que nunca tinha vivenciado assuntos abstratos, de tal forma que lhes fizesse sentido. Deixei essa escola no meio do ano. Não me sentia preparada para ensiná-los.

Prosseguindo em meu curso na USP, finalmente tive uma disciplina que abordou metodologia do ensino da Matemática: ‘Seminário de resolução de problemas’, do Prof. Seiji Hariki. Ali conheci a heurística de George Polya para resolver problemas, ou seja, situações novas em que é necessário encontrar um caminho para se chegar a uma ou mais soluções, ou até mesmo concluir que não há solução. Considerei tão importante esse método que até hoje procuro abordá-lo em minhas aulas de Prática de Ensino, no ensino superior, quando focalizo a resolução de problemas.

Voltei a lecionar em 1984 quando, então, pude constatar que a tarefa de lecionar era o que mais gostava de fazer. Nesse tempo, soube que um curso supletivo (hoje Educação de Jovens e Adultos – EJA) estava contratando professores. Não tive dúvidas, e para lá fui. Durante as aulas, comecei a prestar atenção nos diálogos dos alunos e nas orientações dos colegas professores. A mim couberam duas turmas na unidade Santo Amaro: uma matutina e outra noturna. Ambas me trouxeram grande alegria: com elas, comecei a aprender a ensinar.

No matutino, havia uma senhora que fazia o curso para acompanhar o filho. Ela ouvia as aulas e depois as “traduzia” fazendo paralelismo ao cotidiano dele. Curiosamente, algo semelhante ocorria no noturno: um aluno sentava-se à frente, ouvia minhas exposições e então se virava para a classe e informava: “Ela quis dizer...”. Foi dessa forma, usando os exemplos e as palavras dessas turmas que comecei a prestar atenção em como eu deveria explicar o que eles não entendiam, o que faltava dizer-lhes e o que eu dizia a mais e não lhes fazia sentido. contei tal fato a alguns colegas professores do supletivo e eles me sugeriram a leitura de alguns textos de Paulo Freire, como por exemplo *A importância do ato de ler em três artigos que se completam*. Esse texto veio ao encontro do que começava a pensar sobre o ensino de Matemática. Não fazia sentido ignorar o universo dos estudantes e dar conteúdos matemáticos abstratos e sem significado para eles, tão somente para cumprir o programa e depois cobrar, na prova do final do bimestre, o que houvessem memorizado.

Para mim seria impossível engajar-me num trabalho de memorização mecânica dos ba-be-bi-bo-bu, dos la-le-li-lo-lu. Daí que também não pudesse reduzir a alfabetização ao ensino puro da palavra, das sílabas ou das letras. Ensino em cujo processo o alfabetizador fosse “enchendo” com suas palavras as cabeças supostamente “vazias” dos alfabetizados. [...] Daí que sempre tenha insistido em que as palavras com que organizar o programa da alfabetização deveriam vir do universo vocabular dos grupos populares, expressando a sua real linguagem, os seus anseios, as suas inquietações, as suas reivindicações, os seus sonhos. Deveriam vir carregadas da significação de sua experiência existencial e não da experiência do educador. (FREIRE, 2011, p. 28 e 30).

Em 1985, comecei a lecionar no 2º grau de uma conceituada escola privada e, no ano seguinte, ingressei em uma escola estadual técnica do 2º grau, sendo depois transferida para uma escola estadual regular. Em todas as turmas, procurava diversificar as aulas e o processo de avaliação incluindo atividades de livre expressão, que aprendi com o Prof. Vicente Paz Fernandez. Os grupos de alunos escolhiam a forma de expressar os conteúdos matemáticos. Isso poderia ser feito, por exemplo, na forma de poesias, crônicas, letras de música ou peças teatrais. Outras vezes, adaptavam a jogos, como bingo, dominó e trilha. Com esse processo, chegamos até a montar empresas de pipas e de embalagens. Observar o envolvimento dos alunos pela busca de solução às propostas era gratificante. E

assim foi durante 14 anos, quando então comecei a ministrar aulas no ensino superior.

Voltando à cronologia, em 1988 fui contratada por uma editora de livros didáticos, onde permaneci até 2013. A paixão era a mesma e isso me fez permanecer por quase 25 anos.

Na editora, a primeira incumbência que tive foi a de conferir gabaritos e resoluções de exercícios e problemas dos livros de Matemática que estavam em preparo. Também fui escalada para ler originais e “dar palpites” fundamentados pela experiência em sala de aula. Para mim, os livros não explicavam o que precisava ser dito – nem aos alunos, nem aos professores, principalmente àqueles em início de carreira. As obras abrangiam uma sequência enorme de conteúdos e uma lista maior ainda de exercícios, impossíveis de ministrar com compreensão no mero transcurso de um ano letivo. Isso me fazia pensar: quantas outras ideias estariam sendo deixadas de lado em prol de volumosos conteúdos mecânicos? Os editores e divulgadores ressaltavam: “A coleção precisa ter equações irracionais e biquadradas na 8ª série (hoje 9º ano) e todos os casos de fatoração na 7ª série (hoje 8º ano). Sem isso, os professores não adotam”. “Se o sumário não estiver completo, o professor nem olha as páginas seguintes”.

Sentia necessidade de buscar fundamentação teórica para contrargumentar as afirmações dos editores, de entender o currículo da Matemática do ensino básico e os porquês, além de refletir sobre a metodologia e a didática. Por isso, em 1989 e 1990, decidi participar de um curso de aperfeiçoamento para professores de 1º e 2º Graus no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas, onde conheci as professoras Maria Zoraide Martins Costa Soares e Celi Espasandin Lopes, que muito me orientaram (e ainda hoje o fazem) na área da educação. A partir de então, comecei a assistir a eventos relacionados à Educação Matemática para buscar respostas aos meus porquês. Encontrei algumas respostas e, mesmo assim, os porquês não diminuía. Outras questões surgiam.

Tive o privilégio de conhecer Ubiratan D'Ambrosio em um dos eventos e me interessei por suas ideias e críticas, principalmente em relação ao excesso de

conteúdo nas universidades e ao tempo requerido para a formação do cientista. Considerou ele que essas mesmas críticas se aplicavam ao Ensino Básico:

Creio ser absolutamente insustentável a argumentação de que a Matemática deve ser construída como um edifício lógico em que se superpõem conceitos, em que se superpõem resultados, e que a sofisticação atingida depende realmente de quão alto se vai nessa superposição de tijolos para construir o edifício. [...] acelerar a formação de nossos jovens pesquisadores é da mais alta importância para o nosso futuro científico e tecnológico. A grande maioria dos problemas que poderiam melhorar consideravelmente a nossa qualidade de vida, são problemas que poderiam ser atacados por um jovem no início de sua carreira universitária [...]. [...] as mesmas observações podem ser feitas com relação a todos os níveis de escolaridade. Nos primeiros níveis de escolaridade, 1º e 2º graus, o que mais se deveria desenvolver é a sensibilidade pra apreciar esses problemas. É a motivação para esse gênero de raciocínio. (D'AMBROSIO, 1986, p. 21)

Ainda na editora, no início dos anos 1990, chamou-me atenção a coleção *Matemática na medida certa*. Seus autores – José Jakubovic (o “Jakubo”) e Marcelo Lellis –, muito receptivos, deixavam-me à vontade para dizer o que eu pensava sobre livros e ensino. Lembro-me de ouvi-los discutir sobre a teoria dos campos conceituais (de Gérard Vergnaud), questionar a abordagem de conteúdos e – fato para mim inesperado, mas muito aguardado – dizer que pretendiam cortar os excessos de variações sobre um mesmo tema em prol de formas mais eficientes de trabalhar os conteúdos. E isso fazia com que mais e mais eu me envolvesse com essas ideias. Assim, fui percebendo a importância de duas das seções da coleção: a seção ‘Ação’, que explorava os conteúdos de maneira lúdica, solicitando a participação ativa dos alunos, e a seção ‘Desafios e surpresas’ que apresentava problemas e situações curiosas que exigiam criatividade para a resolução.

Foi essa coleção que me permitiu começar a aprender a explicar o cálculo mental; a resolver equações de 1º grau sem dizer “Passa pra lá, passa pra cá”; a mostrar, por meio de dobraduras, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Pensava comigo: “Se tivesse conhecido essa coleção anteriormente, poderia ter tido melhor desempenho com os alunos da 5ª série”.

Vale salientar que, na época, os editores consideravam que a coleção *Matemática na medida certa* tinha características intermediárias entre as mais tradicionais coleções e as inovadoras. Havia receio em publicar uma coleção inovadora e esta não ser aceita pelos professores. Nesse período, era lembrado na

editora o “sucesso de prateleira” da coleção *Matemática aplicada para o 2º grau*, dos autores Jakubo, Imenes, e Trotta, em três volumes, publicada pela Editora Moderna, pois os professores viam-na como “muito boa” para consulta, mas não para adotá-la em sala de aula, uma vez que não era regida pelo programa dos vestibulares e, por isso, não preparava o aluno para essa disputa.

Em 1995 e 1996, fui incumbida, entre outros profissionais, de ler – ou melhor, de “palpitar” sobre – a coleção de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis. Digo “palpitar” porque, para essa tarefa, não usava nenhuma categorização cientificamente testada. A editora contava com minha experiência em sala de aula para fazer as leituras críticas. Essas eram complementadas por entrevistas com coordenadores pedagógicos de algumas escolas, questionários com perguntas específicas para os professores ou leituras críticas em que o professor informava sua impressão: se os alunos gostariam da coleção e se ele a adotaria na escola em que leciona. A coleção trazia diversas ideias e orientações ao professor que, até então, não vira em outras obras da editora aspectos como: explicar a soma de frações com denominadores diferentes; multiplicar dois números decimais e posicionar a vírgula sem dizer simplesmente que “a vírgula anda tantas casas quantas for a quantidade de números depois dela”; ou desenhar a vista frontal e superior de objetos.

No entanto, conjecturava-se que a coleção não seria facilmente adotada pela maioria dos professores por apresentar conteúdos em sequência diferente da tradicionalmente aceita (iniciava a 5ª série com geometria, e não com números e operações) e também por abordar conteúdos pouco comuns, como simetria rotacional e estatística, além de trazer uma sequência didática que levava o aluno à construção de significados. Objeções como essas, no entanto, conduziram os autores a redigir e incluir leituras críticas de alguns pesquisadores em Educação Matemática, após muitas idas e vindas, e, assim, elaborar um riquíssimo manual do professor, que se tornou parâmetro para muitas outras coleções de livros didáticos. Aprendi com essa coleção não somente como apresentar conteúdos matemáticos aos alunos, mas também a observar se os autores estavam explicando ao professor o porquê da sequência de conteúdos abrangidos na coleção, o modo como os autores haviam pensado para chegarem a tais sistematizações, por que determinados problemas (e não outros) figuravam em certo capítulo ou volume e não

em outras seções da coleção e, mais importante, auxiliar o aluno a perceber a criação e o desenvolvimento do conhecimento – não só o matemático.

Em 1997, a coleção *Matemática*, de Imenes e Lellis, destinada aos anos finais do Ensino Fundamental, foi lançada no mercado privado. Muitas escolas a adotaram e algumas solicitavam a presença dos autores para, entre outras questões, explicar a proposta moderna do livro diante do tradicionalismo do vestibular, a mudança de ordem dos capítulos, a forma de avaliar e o porquê da ênfase na geometria e da introdução da estatística.

No ano seguinte, comecei o mestrado em Educação Matemática na Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP). Nesse mesmo ano foram instituídos os PCN (BRASIL, 1998) do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, e a coleção de Imenes e Lellis foi inscrita para avaliação pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 1999. Foi aprovada, entre outras coleções de outras editoras, com três estrelas – classificação que, como explica Zúñiga (2007, p. 86), foi criada nesse PNLD para designar coleções “recomendadas com distinção”. As coleções que recebiam duas estrelas eram “recomendadas”; as que recebiam uma estrela, “recomendadas com ressalvas”.

Finalmente, e ainda seguindo a trajetória, mas agora satisfeita com o rumo do ensino, considerei a possibilidade de os alunos terem acesso a um verdadeiro ensino de Matemática. No entanto, não foi bem o que aconteceu. Muitas críticas chegaram à editora logo no primeiro ano de adoção: “a coleção é muito trabalhosa”, “faltam exercícios”, “há muitos problemas”, “o livro do professor é muito pesado”, “não dá tempo de dar tudo”, “falta concluir o assunto”, “faltam as equações biquadradas”, “a coleção é incompleta”...

Na seleção seguinte do PNLD, de 2002, para os anos finais do Ensino Fundamental, os professores já sabiam que as coleções que recebiam três estrelas eram as melhores, embora as mais trabalhosas de usar em sala de aula, e por isso passaram a escolher coleções com apenas duas ou mesmo uma única (ZÚÑIGA, 2007, p. 27). As vendas das coleções mais estreladas caíram abruptamente e, assim, as editoras deram um passo atrás, passando a investir mais em obras acessíveis ao professor, tanto no que se refere ao conhecimento matemático quanto à sequência dos conteúdos e, principalmente, à prática de abordagens diferenciadas.



Em avaliações de anos posteriores, o Ministério da Educação (MEC) mudou a forma de divulgação das avaliações, sem possibilidade de classificações por meio das estrelas. O professor já sabia o que queria: uma coleção identificada com seu curso, com seu modo de lecionar, contendo algumas novidades, como jogos educativos, uso da calculadora, textos de uma ou no máximo duas páginas ilustradas, versando sobre assuntos tidos como interdisciplinares ou sobre história da Matemática e exercícios cujos enunciados fossem diferentes dos habituais, embora não a forma de resolvê-los. Não se mostravam interessados em problemas abertos – como na concepção de Douaire *et al.* (1999)<sup>1</sup> – ou que contivessem atividades investigativas (que serão abordadas no Capítulo 3).

Na editora, a cada reedição, submetíamos as coleções a enquetes com professores adotantes e com ex-adotantes, para sabermos não somente o que havia “dado certo” em sala de aula, mas, essencialmente, o que não “tinha funcionado”. Tais enquetes eram empreendidas nas praças comerciais de maior desenvoltura da coleção. Buscávamos com isso aprimorar a reformulação, para melhor atender a professores, alunos e divulgadores – sempre, é claro, com a aprovação dos autores. No entanto, tínhamos também de obter aprovação na avaliação do PNLD e, por isso, submetíamos o material a várias leituras críticas de pesquisadores de instituições educacionais renomadas.

Tudo isso me conduzia a estudar ainda mais os PCN, o edital do PNLD e as sucessivas edições de seu *Guia dos livros didáticos*, além de procurar sempre participar dos principais eventos de Educação Matemática e, particularmente, sobre o livro didático.

Esse percurso profissional – de certo modo singular, uma vez que nem todos os editores trabalham da mesma forma ao preparar obras didáticas – permitiu-me adquirir uma ampla bagagem na produção e avaliação desses livros. Foi nesse anseio de estudar, pesquisar e aprimorar os livros didáticos que conheci, pelas mãos da Prof.<sup>a</sup> Celi Espasandin Lopes, o projeto de ensino denominado *Connected Mathematics Project* (CMP) (LAPPAN *et al.*, 2009), que será detalhado no Capítulo

---

<sup>1</sup> Segundo Douaire *et al.* (1999), problemas desse tipo constituem desafios intelectuais que necessitam de cooperação do grupo-classe para a formulação de conjecturas, para críticas e para promover evolução nas produções dos alunos. Essa denominação se refere à possibilidade de usar diferentes procedimentos para se chegar à solução e não necessariamente a existência de soluções múltiplas.

5. Nesse projeto, particularmente, o que mais despertou meu interesse foi o volume que trata de probabilidade. Discutir o que tem sido enfatizado em algumas coleções de livros didáticos de Matemática para o ensino da probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental passou a ser meu objeto de estudo para esta pesquisa.

## **1.2 A Probabilidade nos Parâmetros Curriculares Nacionais**

A Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no 1º Grau do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 1991) não indicava a abordagem de probabilidade para esse nível. Foi a partir da publicação dos PCN de 1997 (que focalizam anos iniciais do Ensino Fundamental) e 1998 (anos finais) que o ensino de probabilidade passou a ser indicado no ensino básico, em nível nacional.

Nos PCN (BRASIL, 1998), esse tema faz parte do bloco de conteúdos ‘Tratamento da informação’ e abrange estudos relativos às noções de estatística, de probabilidade e de problemas de contagem que envolvam o princípio multiplicativo. O objetivo de tratar esses assuntos é evidenciar sua importância frente ao amplo uso que deles se faz em situações práticas na sociedade atual.

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1998, p. 52)

Com esse objetivo, os PCN sugerem para o 3º ciclo (6º e 7º anos) e 4º ciclo (8º e 9º anos) os seguintes conceitos e procedimentos:

- Construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão. (BRASIL, 1998, p. 75)
- Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão. (BRASIL, 1998, p. 90)
- Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas. (BRASIL, 1998, p. 90)

Os PCN também sugerem orientações didáticas, como “investigações que levem o aluno a explorar a noção de probabilidade de maneira informal fazendo

previsões a respeito do sucesso de um evento [...] materiais manipulativos que permitam explorar a propriedade da “simetria” (dados e moedas equilibrados), como também os que não possuem essa “simetria” (roletas com áreas desiguais para os números)” (BRASIL, 1998, p. 137).

Por fim, os PCN resumem que “é fundamental que os alunos compreendam o significado de espaço amostral e sua construção pela contagem dos casos possíveis, utilizando-se do princípio multiplicativo e de representações como uma tabela de dupla entrada ou diagrama de árvore. Desse modo, será possível indicar o sucesso de um evento utilizando-se de uma razão.” (BRASIL, 1998, p. 138).

### **1.3 A Questão de Pesquisa**

Desde os anos 1980, os currículos de Matemática de vários países têm incluído o ensino de probabilidade e estatística já nos anos iniciais. Garfield e Gal (1997) consideram que os currículos de Matemática devem ter por objetivo promover no aluno a compreensão sobre a finalidade e a lógica das investigações estatísticas, o entendimento sobre o processo da investigação estatística, o domínio sobre habilidades processuais, a compreensão sobre relações matemáticas, a compreensão da probabilidade e do acaso, o desenvolvimento de habilidades interpretativas e do letramento estatístico, o desenvolvimento da capacidade de comunicar-se estatisticamente e o desenvolvimento de apreciação do papel da chance e da aleatoriedade no mundo.

Em conformidade com os PCN, o que se espera é que a partir da abordagem da probabilidade o aluno compreenda acontecimentos de natureza aleatória e possa identificar possíveis resultados desses eventos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser explorados na escola por meio de investigações que levem o aluno a fazer previsões a respeito do sucesso de um evento.

O estudo de probabilidade tem por finalidade fazer com que os alunos percebam que por meio de experimentações e simulações podem indicar a possibilidade de ocorrências de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático. Para tanto, terão de construir o espaço amostral como referência para estimar a probabilidade de sucesso, utilizando uma razão. (BRASIL, 1998, p. 86)

Pesquisas realizadas no Brasil vêm apontando o quanto a competência nesses assuntos proporciona aos alunos uma base sólida para desenvolverem estudos em que, por meio de investigações, lidem com o acaso e a incerteza na tomada de decisões e para fazerem previsões, por exemplo, sobre mudanças climáticas, mercado econômico, planos de saúde, desenvolvimento de vírus etc.

Ao considerarmos o mundo em rápida mudança como o que estamos vivendo, é imprescindível o conhecimento estatístico para se fazer uma leitura e um mapeamento da realidade que se vive, da mesma forma que a probabilidade de ocorrência de acontecimentos para agilizarmos a tomada de decisão e fazermos previsões. (LOPES; FERREIRA, 2004, p. 1)

Em contrapartida, o *Guia do livro didático de Matemática* do PNLD 2014 apresenta, para cada coleção aprovada, o gráfico da incidência de cada um dos campos da Matemática escolar, em cada um dos quatro volumes. Apesar de não ter sido esclarecido como o valor percentual foi encontrado, nota-se que o campo ‘Estatística e probabilidade’ é o que apresenta a menor incidência, em todos os volumes, de todas as coleções, quando comparado com ‘Números e operações’, ‘Álgebra’, ‘Geometria’ e ‘Grandezas e medidas’.

Esses aspectos conduziram-nos à questão: *Que indícios teóricos e metodológicos emergem de um processo analítico sobre o ensino de probabilidade, expressos em alguns livros didáticos?*

Para responder a essa questão que conduz esta pesquisa, tomamos para análise três coleções didáticas brasileiras aprovadas no PNLD 2014. A fim de proporcionar um contraste necessário para ampliar nosso olhar sobre o ensino de probabilidade expresso em livros didáticos nacionais, elegemos uma coleção didática voltada a outro contexto educacional, a qual resultou de um projeto de pesquisa que envolveu professores e pesquisadores de diferentes regiões dos Estados Unidos.

Nosso objetivo foi discutir como os conceitos de probabilidade são abordados nos anos finais do Ensino Fundamental e quais são as concepções de probabilidade consideradas pelos autores dessas obras.

Assim, a pesquisa foi estruturada da seguinte forma:

- No Capítulo 1 apresento minha trajetória, entrecortada por vivências com estudantes, professores, autores e pesquisadores, até chegar à questão desta pesquisa.
- No Capítulo 2 apresentamos a metodologia da pesquisa.
- O Capítulo 3 focaliza o ensino e a aprendizagem de probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental, ou seja, do 6º ao 9º ano (estudantes de 11 a 14 anos).
- O Capítulo 4 tematiza o livro didático nacional e o PNLD.
- O Capítulo 5 tem como foco ampliar nosso olhar sobre a abordagem da probabilidade, apresentando e discutindo um projeto americano.
- O Capítulo 6 discute a abordagem de probabilidade em três coleções aprovadas no PNLD 2014.

Esses capítulos são sucedidos pelas considerações finais, referências e anexos.

## 2 A METODOLOGIA DA PESQUISA

*Se você quiser descobrir segredos, preste atenção nas coisas pequenas, aquelas que ninguém nota. É nelas que se revelam os segredos.*  
(ALVES, 2013, p. 116)

Neste capítulo apresentaremos o percurso metodológico que viabilizou esta pesquisa, bem como as etapas de coleta e análise de dados, para culminarmos com a escolha das categorias de análise dos dados de nosso estudo.

### 2.1 O Objeto de Estudo e a Questão de Pesquisa

Elegemos empreender uma investigação sobre o ensino e a aprendizagem de probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental, considerando o que está prescrito em alguns livros didáticos. Para tanto, analisamos três coleções didáticas aprovadas pelo PNLD 2014 e também um volume que focaliza especificamente a probabilidade e integra uma coleção de livros didáticos americana. A escolha dessa obra, que detalharemos oportunamente, teve por objetivo nos permitir discutir as possibilidades de uma proposta de ensino e aprendizagem de probabilidade centrada em atividades investigativas.

Assim, por meio desta pesquisa, buscamos responder à seguinte questão central: *Que indícios teóricos e metodológicos emergem de um processo analítico sobre o ensino de probabilidade, expressos em alguns livros didáticos?* Buscando respondê-la, optamos por desenvolver uma pesquisa documental e bibliográfica e, então, proceder à análise de conteúdo dos documentos selecionados.

### 2.2 Diferenciando a Pesquisa Bibliográfica e a Pesquisa Documental

A perspectiva da pesquisa bibliográfica foi adotada por permitir elucidar as principais contribuições teóricas existentes sobre determinado tema, problema ou recorte, considerando-se a produção já existente, como expõem Diez e Horn:

A pesquisa bibliográfica pode ser realizada independente ou como parte de qualquer outra pesquisa. É a que se desenvolve tentando explicar um problema, utilizando o conhecimento disponível a partir de teorias publicadas em livros e obras congêneres [...] o investigador irá levantar o conhecimento disponível na área, identificando as teorias produzidas, analisando e avaliando sua contribuição para auxiliar a compreender ou explicar o problema: objetivo de investigação. (DIEZ; HORN, 2004, p. 26)

Esse tipo de pesquisa fundamenta-se em material já produzido, incluindo livros e artigos de jornais e revistas. Sua vantagem é proporcionar uma cobertura ampla do material disponível, permitindo ao pesquisador verificar com profundidade essas fontes.

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos [...] e a principal vantagem [...] reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. (GIL, 2012, p. 50)

Embora haja semelhança entre a pesquisa documental e a bibliográfica, o que as diferencia é a natureza das fontes. Enquanto a bibliográfica se utiliza da contribuição de diversos autores sobre determinado tema, a documental tem como foco um material que ainda não recebeu tratamento analítico ou que é reelaborável segundo os objetivos de uma nova pesquisa (GIL, 2012).

Conforme Lüdke e André (1986), a pesquisa documental pode constituir-se técnica importante de levantamento de dados qualitativos, seja complementando ou revelando aspectos novos de um tema ou problema, além de ser uma fonte valiosa de onde se podem extrair evidências que fundamentem afirmações de pesquisa e declarações do pesquisador.

Ainda em referência à pesquisa documental, são dois os tipos de fonte de que ela pode valer-se: as de primeira linha – documentos de órgãos oficiais, sindicatos, entidades de classe, igrejas e instituições privadas, entre outros – e as de segunda, em que se destacam, entre outros, os relatórios de pesquisa, os relatórios de empresas e as tabelas estatísticas. As limitações da pesquisa documental e as críticas a ela formuladas, conforme Gil (2012), referem-se à não representatividade e à subjetividade dos documentos apresentados. Sendo assim, ao assumir essa perspectiva de pesquisa, devemos nos preocupar com esses fatores e buscar contornar os problemas deles advindos, embora pesquisas embasadas nesse tipo

de documento muitas vezes proporcionem melhor visão do problema focalizado (GIL, 2012).

Para esta pesquisa, optamos pela análise documental, que busca identificar em documentos – livros didáticos e documentos oficiais – evidências para a problemática de nosso estudo, ao mesmo tempo que pesquisas e teses fornecem nosso aporte teórico.

### **2.3 Procedimentos Metodológicos**

Inicialmente, buscamos o guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2011, para conhecermos e nos valermos das coleções aprovadas. Estávamos analisando as coleções quando foi publicado o guia indicativo das coleções aprovadas no PNLD 2014. Constatamos que algumas coleções que haviam recebido aprovação em 2011 não o receberam em 2014. Resolvemos, então, selecionar, dentre as aprovadas em 2014, as três que haviam sido mais distribuídas em 2011.

Buscamos também uma obra didática estrangeira respaldada por pesquisas em Educação Estatística que pudesse servir de contraste com as obras brasileiras selecionadas, permitindo-nos identificar mais facilmente, à luz desse contraste, indícios de ensino e aprendizagem potencialmente aplicáveis ao estudo da probabilidade no Ensino Fundamental no Brasil.

A escolha da obra estrangeira decorre do fato de ter sido gerada a partir de um projeto de pesquisa que envolveu uma parceria entre pesquisadores e professores de Matemática americanos, que, além de elaborarem, também testaram atividades de probabilidade adequadas à etapa final do equivalente ao Ensino Fundamental brasileiro.

No Capítulo 5 serão descritos os objetivos do projeto que possibilitou a elaboração dessa obra estrangeira.



## 2.4 Processo de Análise

Para análise dos dados coletados nesta pesquisa documental, optamos por uma abordagem qualitativa interpretativa que tem a análise de conteúdo como técnica. Tal abordagem, designada análise de conteúdo, consiste em:

Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (BARDIN, 2010, p. 44),

Segundo Franco (2008, p. 23), trata-se de “um procedimento de pesquisa que se situa em um delineamento mais amplo da teoria da comunicação e tem como ponto de partida a mensagem”.

Para Chizzotti (1998, p. 98), “o objetivo da análise de conteúdo é compreender criticamente o sentido das comunicações, seu conteúdo manifesto ou latente, as significações explícitas ou ocultas”.

A análise de conteúdo trabalha a palavra expressa nos relatórios científicos investigados – a prática da língua realizada por emissores identificáveis – e procura conhecer o que está por trás das palavras sobre as quais se debruça. A palavra como objeto, identificada na mensagem, é o ponto de partida da análise de conteúdo. A mensagem pode ser verbal (oral ou escrita), gestual, silenciosa, figurativa, documental ou diretamente provocada (FRANCO, 2008). Nesta pesquisa, a mensagem a ser analisada é a escrita, presente nas obras didáticas selecionadas.

A análise da documentação foi realizada visando responder à problemática delineada, a fim de identificar elementos que possam ser tomados como indicadores para o ensino e aprendizagem da probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental.

Baseando-nos em Franco (2008) e Bardin (2010), escolhemos como categorias de análise dos dados as concepções de probabilidade e o modo como nelas é enfatizada a questão de aleatoriedade.

Nossa preocupação, em concordância com Bardin (2010), não foi a de alcançar uma compreensão particular dos dados coletados, mas sim a de manter

uma atitude de “vigilância crítica” frente aos dados, de modo a ser possível, por meio das inferências, atribuir-lhes significados.

De uma maneira geral, pode dizer-se que a subtileza dos métodos de análise de conteúdo corresponde aos objectivos seguintes:

– a *superação da incerteza*: o que eu julgo ver na mensagem estará lá efectivamente contido, podendo essa “visão” muito pessoal, ser partilhada por outros?

Por outras palavras, será a minha leitura válida e generalizável?

– e o *enriquecimento* da leitura: se um olhar imediato, espontâneo, é já fecundo, não poderá uma leitura atenta aumentar a produtividade e a pertinência? Pela descoberta de conteúdos e de estruturas que confirmam (ou infirmam) o que se procura demonstrar a propósito das mensagens, ou pelo esclarecimento de elementos de significações susceptíveis de conduzir a uma descrição de mecanismos de que a *priori* não detínhamos a compreensão. (BARDIN, 2010, p. 31)

Percorremos, então, as fases apontadas por Franco (2008) e Bardin (2010): a pré-análise e a exploração do material.

Na pré-análise, todos os documentos a serem incluídos neste estudo foram reunidos: livros didáticos avaliados no último PNLD, guias das obras avaliadas, PCN, pesquisas acadêmicas e também livros e artigos de pesquisadores sobre o tema em questão.

Considerando que a análise pode efetuar-se numa amostra, desde que o material a isso se preste, buscamos obter uma amostra que fosse suficientemente representativa para responder a nosso problema de pesquisa. Assim, escolhemos, dentre as coleções aprovadas no PNLD 2014, as que haviam tido maior distribuição e, portanto, maior adoção no PNLD 2011. Buscamos, dessa forma, atender à regra da homogeneidade por meio de documentos a ela correspondentes, pois “os documentos retidos devem ser homogêneos, quer dizer, devem obedecer a critérios precisos de escolha e não representar demasiada singularidade fora destes critérios de escolha” (BARDIN, 2010, p. 124).

Buscamos atender também à regra de pertinência, utilizando documentos adequados ao objetivo, tanto em termos das obras didáticas selecionadas quando da questão da pesquisa, como será explicitado na análise dos dados. Consideramos, portanto, que “os documentos retidos devem ser adequados, enquanto fonte de informação, de modo a corresponderem ao objetivo que suscita a análise” (BARDIN, 2010, p. 124).

É na fase da “leitura flutuante”, como Bardin (2010) a denomina, que as leituras se tornaram mais precisas, em função de hipóteses emergentes (afirmações provisórias que nos propusemos a verificar).

Para tanto, em cada coleção foram exploradas as atividades que versavam sobre o bloco ‘Estatística e probabilidade’, permitindo-nos assim refinar nosso olhar sobre a aprendizagem de probabilidade. Alguns conceitos, como evento, equiprobabilidade, aleatoriedade, frequência, probabilidade clássica e probabilidade frequentista, foram selecionados. Depois de certa ponderação, os critérios para análise assim foram definidos:

- presença de concepção de probabilidade clássica na perspectiva de como essa abordagem é definida, desenvolvida e em que momento ocorre;
- presença ou não da concepção de probabilidade frequentista e, se for abordada, como esta se dá;
- presença de discussão sobre aleatoriedade e como é enfocada nos textos didáticos.

Concluída a pré-análise e a exploração do material, nos embrenhamos no tratamento dos resultados, registrando e justificando todos os dados, conclusões e observações.

No próximo capítulo focalizaremos o ensino e a aprendizagem de probabilidade, iniciando com uma abordagem histórica e chegando aos enfoques clássico e frequentista e ao conceito de aleatoriedade.

### 3 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE

*A meta da vida não é a perfeição, mas o eterno processo de aperfeiçoamento, amadurecimento, refinamento [...]*  
(John Dewey)

Este capítulo focaliza alguns aspectos históricos e conceituais acerca do surgimento da noção de probabilidade, dela apresentando três enfoques: o clássico (laplaciano), o frequentista e o bayesiano (subjutivo). Para isso, dada a diversidade de contextos em que uma situação pode ocorrer, consideramos necessário, também do ponto de vista histórico, apresentar a ideia de acaso. Por ser uma noção complexa, já que se vincula à visão subjetiva de mundo, optamos por considerar o modo de apreender o acaso a partir da percepção real do sujeito sobre a realidade, conforme Coutinho (2007).

#### 3.1 Aspectos Históricos da Probabilidade

Remonta à Idade Antiga, por volta de 3500 a.C., a manipulação de objetos visando a obtenção de resultados aleatórios. Esses objetos, que consistiam em ossos retirados de tornozelos de animais, eram os astrágalos, com seis faces, apenas quatro das quais são estáveis o suficiente para permitirem que o osso se apoie sobre elas. A partir de 3000 a.C., na Mesopotâmia, no Egito e na Babilônia os jogos eram praticados com dados cúbicos feitos de barro cozido. É possível que, além de finalidade lúdica, a manipulação destes objetos envolvesse um contexto místico. Na época da Roma antiga, a prática de atividades envolvendo o acaso era bastante comum, pois foram encontrados dados preparados para jogos. O que podemos conjecturar é que os jogadores haviam percebido a frequência de obtenção das diferentes faces desses dados. Esse fato supõe a existência de uma noção de equiprobabilidade

O fascínio que os jogos de azar sempre exerceram estimulou mentes perspicazes a descobrir maneiras de vencer que se mostrassem mais seguras. Uma delas consistia em lançar um dado várias vezes e contabilizar o número de possíveis resultados.

O primeiro documento conhecido a mostrar esse tipo de raciocínio é um poema de 1250 chamado “De vetula”, de Richard de Fournival (1200-1250). A obra *A divina comédia*, de Dante Alighieri (1265-1321), também faz referência à probabilidade em jogos de dados (MORGADO *et al.*, 1991).

No entanto, somente bem mais tarde é que as ideias que formam a base do desenvolvimento da probabilidade foram apresentadas, por Girolamo Cardano (1501-1576), Galileu Galilei (1564-1642) e Luca Pacioli (1445-1517).

De Cardano, temos *De ludo aleae* [*Sobre os jogos de azar*], publicado em 1663, que, na seção dedicada à probabilidade, mostra de quantas maneiras se pode obter 10 ao lançar dois dados. Galileu, em *Sulla scoperta dei dadi* [*Sobre a descoberta dos dados*], também se ocupou das probabilidades, estudando jogos de dados para responder à pergunta de um amigo: Por que no lançamento de três dados obtém-se 10 com mais frequência do que 9? (MORGADO *et al.*, 1991).

Já Pacioli, em sua obra *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* [*Súmula de aritmética, geometria, proporções e proporcionalidade*], enuncia um problema que seria mais tarde resolvido por Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665). Tal problema dizia respeito a uma curiosidade de Chevalier de Méré (1607-1684), jogador de cartas e pensador que discutiu com Pascal problemas relativos à probabilidade de vencer certos jogos. O tema despertou o interesse de Pascal, que se correspondeu com Fermat sobre o que hoje chamaríamos de probabilidades finitas. Segundo Coutinho (1996), em carta de junho de 1654 destinada a Fermat, Pascal descreveu a famosa fórmula da probabilidade de um evento A:

$$P(A) = \frac{\text{total de casos favoráveis}}{\text{total de casos possíveis}}$$

Segundo Coutinho (1996), esse fato pode atribuir a Pascal e a Fermat a origem da concepção de probabilidade. Outros matemáticos começaram então a se interessar em focalizá-la teoricamente. Christian Huygens (1629-1695) publicou em 1657 o primeiro tratado de teoria das probabilidades, intitulado *De ratiociniis in ludo aleae* [*Sobre o raciocínio nos jogos de azar*], que introduz a noção de esperança matemática.

Jacques Bernouilli (1654-1705) lança a visão frequentista de probabilidade ao publicar em 1713 a obra *Ars conjectandi* [*A arte de conjecturar*]. Esse livro traz o teorema que recebeu o nome do autor e que também é conhecido como “lei dos grandes números”: a primeira tentativa de deduzir medidas estatísticas a partir de probabilidades. Segundo Ortiz (2002), nesta concepção a probabilidade de um evento é entendida como o valor para o qual a frequência relativa de um evento tende em uma sequência de resultados.

Outro matemático que se dedicou à teoria das probabilidades foi Abraham de Moivre (1667-1754), autor do tratado *The doctrine of chances, or a method for calculating the probabilities of events in plays* [*A doutrina do acaso, ou um método para calcular as probabilidades de eventos em jogos*], em que desenvolve a teoria das sucessões recorrentes e a utiliza para resolver problemas de probabilidade.

Em 1763 foi publicado *La doctrine des chances* (*A doutrina das chances*) de Thomas Bayes (1702-1760), que investigou o problema de achar as probabilidades das causas de um evento observado. Conforme Coutinho (1996), isso constituiu uma nova concepção de probabilidade, matematicamente idêntica à probabilidade da “geometria do acaso<sup>2</sup>”, que depende da análise do observador e da hipótese de equiprobabilidade por simetria. Esse método tem origem na ideia de atribuir uma probabilidade às causas de um evento observado, a partir de um valor tomado *a priori* e recalculado em função dessa observação – daí a classificação como “subjativa”.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) foi o primeiro matemático a elaborar um estudo axiomático do cálculo de probabilidades, em seu *Essai philosophique sur les probabilités* [*Ensaio filosófico sobre as probabilidades*], publicado em 1814, no qual fornece a definição limitada pela hipótese da equiprobabilidade, como segue (MORGADO *et al.*, 1991):

Suponha-se que os experimentos aleatórios (aqueles que, repetidos sob as mesmas condições, produzem resultados geralmente diferentes) tenham as seguintes características:

- a) Há um número finito (digamos  $n$ ) de eventos elementares (casos possíveis), a união de todos os quais é o espaço amostral  $E$ .

---

<sup>2</sup> Proposta por Pascal, significa que podemos raciocinar, especular e fazer cálculos com o acaso, tal como se faz com a geometria.

- b) Os eventos elementares são igualmente prováveis (hipótese da equiprobabilidade).
- c) Todo evento  $A$  é uma união de  $m$  eventos elementares em que  $m \leq n$ .

Define-se então a probabilidade de  $A$  como:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{m}{n}$$

### 3.2 Concepções de Probabilidade

O quadro a seguir resume as três perspectivas sobre probabilidade apresentadas na seção anterior, expondo-as segundo a interpretação de Azcárate (1995).

Concepção de probabilidade	Clássica	Frequentista	Bayesiana
<b>Definição</b>	Sem definição explícita de probabilidade. Associada implicitamente com o grau de crença e com certa base empírica.	Definição como limite da frequência relativa em uma série infinita de eventos iguais. Confere um valor objetivo com uma base empírica.	Definição em função de grau de crença pessoal. Requer coerência no sistema pessoal de crenças.
<b>Quantificação</b>	Quantificação por meio da definição de sua medida como a razão entre casos favoráveis e possíveis.	Quantificação fácil e direta por meio da expressão matemática do limite. Centra-se em estudo da distribuição das frequências.	Quantificação por meio do método da aposta.
<b>Campo de aplicação</b>	Seu desenvolvimento parte do estudo dos jogos de azar e seu significado está ligado ao uso cotidiano do termo.	Acepção utilizada no mundo científico. Possibilidade de relação entre o mundo probabilístico e o estatístico.	Sua base é bayesiana e serve de fundamentação à teoria matemática da decisão.
<b>Problema</b>	Conceito de equiprobabilidade.	A ideia de infinitos eventos.	Aplicação ao evento único.
<b>Representantes</b>	Laplace Bernoulli De Morgan	Venn Von Misses Reinchenbach	Ramsey Savage De Fenetti

Fonte: Azcárate (1995, p. 225).

Essas perspectivas são algumas das que podem ser utilizadas para explicar e resolver problemas probabilísticos. A utilização de modelos probabilísticos como

instrumentos explicativos e de controle é hoje um procedimento cada vez mais generalizado, tanto no mundo científico quanto no das ciências humanas e políticas.

A definição de medida de probabilidade, comumente conhecida como clássica, ou de Laplace, é incompleta e impõe forte restrição a suas aplicações, devido à noção de equiprobabilidade e de espaço finito. Outra objeção é seu caráter circular: a probabilidade é por ela definida em termos de alternativa equiprovável – mas como se pode saber que as probabilidades são iguais antes de se definir o que é probabilidade? (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1988).

O conceito de probabilidade frequentista, ou empírico, emerge do processo de experimentação. Segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), o valor da probabilidade é dado pela frequência relativa de sucessos obtidos na realização de um experimento. Dessa forma, as probabilidades são baseadas em resultados de experiências realizadas, o que é denominado probabilidade a *posteriori*, pois a probabilidade de um evento é estimada depois de os experimentos haverem sido realizados.

Segundo Novaes e Coutinho (2009), não podemos calcular o resultado de um experimento aleatório com precisão, mas podemos determinar o grau de incerteza em sua ocorrência,

Coutinho (2001) investigou o processo de ensino e aprendizagem de probabilidade pela comparação de estratégias desenvolvidas por meio da visão frequentista e da visão clássica, entre alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental e do primeiro ano do Ensino Médio. Evidenciou dessa forma que o estudo de probabilidade pode ser facilitado quando for realizado um trabalho que envolva situações aleatórias.

Em nosso estudo, a probabilidade clássica e a frequentista são tomadas como categorias de análise.

### **3.3 Sobre a Aleatoriedade**

As decisões e previsões têm de se basear em grande número de dados imersos em contextos que abrangem muitas variáveis. Essas decisões ou previsões seriam mais simples se os dados sempre delineassem situações prontamente



identificáveis, mas na maioria das vezes isso não ocorre, devido à variabilidade. A estatística é a ciência que fornece ferramentas para descrever a variabilidade nos dados e, com base nessa descrição, facilitar a tomada de decisões. Ela permite que os dados sejam coletados, exibidos, resumidos, examinados e interpretados para se descobrirem padrões e desvios desses padrões. Os dados quantitativos podem ser descritos em termos de suas características principais: medidas de forma, centro e dispersão.

Isso requer uma compreensão sobre a aleatoriedade, fenômeno que apresenta dois usos importantes na obtenção de conclusões estatísticas. Em primeiro lugar, a coleta de dados de uma amostra aleatória de, por exemplo, uma população torna possível extrair conclusões válidas sobre toda a população, tendo-se em conta a variabilidade. Em segundo lugar, atribuir, por exemplo, indivíduos aleatoriamente a diferentes tratamentos possibilita uma comparação justa da eficácia destes. Um resultado estatisticamente significativo considera a condição de aleatoriedade.

Uma característica importante dos experimentos aleatórios é sua imprevisibilidade: não podemos saber com segurança completa o que resultará em uma experiência particular. São fenômenos atribuídos ao acaso, que não podem ser previstos porque, por assim dizer, se rebelam contra toda lei. Essa é uma ideia fundamental da aleatoriedade: a de que um evento é aleatório quando sua ocorrência não é certa nem tampouco impossível (ORTIZ, 2002).

Os processos aleatórios podem ser descritos matematicamente por meio de um modelo probabilístico: a lista ou a descrição dos resultados possíveis (espaço amostral), a cada um dos quais é atribuída uma probabilidade. Em situações como jogar uma moeda ou lançar um dado, pode ser razoável supor que vários resultados sejam igualmente prováveis. Em um modelo de probabilidade, pontos de amostragem representam resultados e se combinam para se tornarem eventos; a probabilidade de um evento pode ser calculada aplicando-se a adição e as regras de multiplicação. A interpretação dessa probabilidade depende de um entendimento da independência e da probabilidade condicional.

Esses pressupostos remetem à necessidade do reconhecimento da incerteza como característica intrínseca da realidade e à importância da

aprendizagem do gerenciamento de situações dominadas por ela (AZCÁRATE GODED, 1997).

Novaes e Coutinho (2009) também expõem que a Teoria das Probabilidades estuda os fenômenos que envolvem a aleatoriedade, pois estamos cercados de fenômenos que são devido ao acaso, levando-nos a ter de tomar decisões.

Em nossa pesquisa, a aleatoriedade é tomada como uma categoria de análise para que verifiquemos como tal conceito, considerado central no estudo da probabilidade, tem sido tratado em algumas coleções de livros didáticos de Matemática voltadas aos anos finais do Ensino Fundamental.

### **3.4 O Ensino e a Aprendizagem**

A probabilidade proporciona um modo de medir a incerteza na ocorrência de um evento resultante de uma experiência aleatória e de mostrar aos estudantes como matematizar, ou seja, como aplicar a Matemática para resolver problemas reais que envolvam incerteza.

Lopes (2008a) recomenda um ensino das noções probabilísticas a partir de uma metodologia heurística e ativa, por meio da proposição de problemas concretos e da realização de experimentos reais ou simulados.

A formação do educador matemático que atuará na educação básica deve prever um processo de ensino e aprendizagem de conteúdos que ocorra por meio da resolução de problemas, simulações e experimentos, os quais permitam ao professor construir conhecimentos, à medida que estabelece relações com informações adquiridas e com o domínio de diferentes linguagens e formas de expressão. Consideramos que a amplitude do conceito seja mais importante que o conceito formal para o trabalho docente. O conhecimento profissional didático deverá incorporar o domínio de conceitos, representações, procedimentos, resolução de problemas, habilidades de exploração e investigação.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 23) as investigações podem constituir-se em mais uma estratégia de ensino nas aulas de Matemática e são muito semelhantes à resolução de problemas. Diferem no fato de que o problema indica claramente o enunciado, o que é pedido e o que é dado. A solução é sabida pelo

professor e a resposta do aluno estará certa ou errada. Numa investigação, a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental em sua definição.

O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 23)

Segundo as professoras que participaram da pesquisa de Cunha (1998), as tarefas de investigação necessitam de mais tempo para serem concretizadas, mas trazem um ganho para além da resolução de exercícios ou problemas considerados rotineiros por desenvolverem o raciocínio e a perspicácia dos alunos.

Nesse sentido, o conceito de investigação matemática colabora com o processo de ensino e aprendizagem porque traz a discussão para a sala de aula, tanto com o professor quanto entre os alunos.

O envolvimento ativo do aluno é fundamental nesse processo de ensino e aprendizagem: ele aprende quando mobiliza seus recursos cognitivos com vistas a atingir um objetivo. Por isso defendemos ser de suma importância que os livros didáticos tragam atividades que levem o professor e o aluno a fazerem investigações e experimentos. O tema probabilidade é propício a essa prática, como veremos mais adiante.

No próximo capítulo vamos apresentar um pouco da história do Ministério da Educação e Cultura (MEC), para chegarmos ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), voltado a avaliar os livros didáticos, e veremos como este procedimento pode influenciar a estruturação desses livros.

## 4 O LIVRO DIDÁTICO E O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO

*Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão.*  
(Paulo Freire)

Neste capítulo veremos que, embora o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) tenha sido instituído em 1985, o processo de avaliação pedagógica dos livros didáticos empreendido por esse programa só teve início em 1996. Esse processo de avaliação tem se aperfeiçoado a cada ano, visando o aprimoramento dos livros didáticos.

### 4.1 Um Pouco de História

Em 1930, foi criado no Brasil o Ministério da Educação e Saúde Pública, com a incumbência de desenvolver atividades pertinentes a diferentes ministérios, como saúde, esporte, educação e meio ambiente. Em 1932, um grupo de intelectuais preocupados em elaborar um programa amplo e integrado de política educacional lançou o *Manifesto dos pioneiros da educação nova*, redigido por Fernando de Azevedo e assinado, entre outros, por Anísio Teixeira. Esse documento propunha uma escola única, pública, laica, obrigatória e gratuita. No entanto, foi apenas em 1934 que a educação passou a ser vista como um direito de todos, devendo ser ministrada pela família e pelos poderes públicos.

De 1934 a 1945, o ministro da Educação e Saúde Pública, Gustavo Capanema Filho, desempenhou uma gestão marcada pela reforma do ensino secundário e do universitário.

Nesse interim, mais precisamente em 1938, segundo Pitombeira de Carvalho (2008), a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) estabeleceu regras para a importação e produção desses livros, embora a preocupação não fosse a de avaliar a qualidade de seus conteúdos, mas sim verificar se as obras seguiam os programas oficiais brasileiros.

Em 1953, com a autonomia dada à área da saúde, surge o Ministério da Educação e Cultura (MEC).

Nas décadas seguintes, outras instâncias ligadas ao MEC foram criadas para cuidar do livro, dentre elas a Comissão do Livro Técnico e do Livro Didático (Colted), em 1966, cujo objetivo era coordenar as ações referentes à produção, edição e distribuição do livro didático.

Em 1971, o ensino tornou-se obrigatório dos 7 aos 14 anos e previa para os então Primeiro e Segundo Graus um currículo comum, parcialmente diversificado em função de diferenças regionais. Nesse mesmo ano, o Instituto Nacional do Livro (INL) passou a desenvolver o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (Plidef), assumindo assim atribuições administrativas e de gerenciamento de recursos financeiros que até então estavam sob responsabilidade da Colted. A Fundação Nacional do Material Escolar (Fename), em 1976, tornou-se responsável pela execução dos programas do livro didático após a extinção do INL, conforme decreto 77 107, de 4/2/1976.

A qualidade dos conteúdos das obras didáticas, no entanto, somente começou a ser oficialmente focalizada com a criação, em 1983, da Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), que incorporou o Plidef.

Em 1985, foi instituído o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), com expressivas mudanças: adoção de livros reutilizáveis (exceto para 1º ano), escolha do livro pelo conjunto de professores, distribuição gratuita às escolas e aquisição com recursos do governo federal.

Em 1993, foi constituída uma comissão para definir critérios e avaliar livros didáticos, a qual, no ano seguinte, lançou o volume *Definição de critérios para avaliação dos livros didáticos*. Nele, além de uma exposição de critérios, apresentava-se também o resultado da avaliação pedagógica das coleções mais adotadas pelos professores dos quatro primeiros anos escolares. Na área de Matemática, de dez coleções completas e cinco incompletas avaliadas, somente uma coleção completa e um livro isolado receberam aprovação segundo os critérios de avaliação adotados.

Em 1995, o MEC tornou-se responsável apenas pela área de educação. Em 1996, a comissão, com vários dos especialistas que participaram da avaliação-piloto

de 1993, iniciou o processo de avaliação pedagógica dos livros didáticos, com o PNLD 1997.

Embora parte significativa dos critérios para essa avaliação decorresse das especificidades das áreas de conhecimento a que os livros didáticos se destinam, definiram-se como *critérios comuns de análise* a adequação didática e pedagógica, a qualidade editorial e gráfica, a pertinência do manual do professor para uma correta utilização do livro didático e para a atualização do docente. Além disso, definiram-se como *critérios eliminatórios* que os livros não expressassem preconceitos de origem, raça, sexo, cor, idade ou quaisquer outras formas de discriminação, que não induzissem a erro e que não contivessem erros graves relativos ao conteúdo da área, como por exemplo erros conceituais.

Em 1996, foi extinta a FAE, sendo a responsabilidade pela política de execução do PNLD integralmente transferida ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). No mesmo ano, o MEC criou o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do Ensino Fundamental e de Valorização do Magistério (Fundef), para atender o Ensino Fundamental. No entanto, o Fundef vigorou até 2006, quando foi substituído pelo Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação (Fundeb). Dessa forma, toda a educação básica passou a ser beneficiada com recursos federais. Segundo documento disponível no portal do MEC, esse compromisso se estenderá até 2020. No momento não há informação sobre o que acontecerá depois dessa data.

Em 1999, foi criada a Comissão Técnica do Livro Didático, com a missão de supervisionar essas avaliações e assessorar o MEC em assuntos ligados ao livro didático. Em 2001, essa comissão publicou o documento *Recomendações para uma política pública de livros didáticos*, que expressa claramente a orientação do MEC de ampliar a concepção de livro didático, de diversificar a oferta de materiais inscritos e de incentivar programas que envolvessem coleções temáticas, coleções por área de conhecimento e coleções por projetos. Também foram sugeridos programas subsidiários envolvendo incorporação progressiva de materiais didáticos de suporte, como vídeos, áudios, objetos educacionais digitais e materiais didáticos destinados exclusivamente a docentes.

Em outros termos: para que o MEC atue de modo mais significativo na promoção de um ensino de melhor qualidade, é necessário ampliar a concepção de livro didático, possibilitando que a oferta de materiais inscritos se diversifique e se enriqueça. (BATISTA, 2001, p. 31)

Em 2002, o MEC passou a avaliar os livros didáticos em parceria com instituições públicas de educação superior, de acordo com as orientações e diretrizes estabelecidas pelo Ministério da Educação. No caso da Matemática, a coordenação institucional tem sido feita pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).

Atualmente, a cada três anos, o programa avalia os livros didáticos de um mesmo segmento: anos iniciais do Ensino Fundamental (do 1º ao 5º), anos finais do Ensino Fundamental (do 6º ao 9º) e Ensino Médio (do 1º ao 3º ano). São avaliadas apenas coleções completas que tenham sido submetidas por iniciativa das editoras. Os dois últimos programas que avaliaram as coleções dos anos finais do Ensino Fundamental foram o PNLD 2011 e o PNLD 2014.

Na avaliação do PNLD 2014, surgiu a possibilidade de as coleções poderem ser inscritas acompanhadas de conteúdos multimídia, armazenados em DVD-ROM, por volume, além da tradicional possibilidade de ser inscrito apenas o conjunto de livro impressos.

## **4.2 Processo de Avaliação**

Para exemplificar as etapas do processo, consideramos o PNLD 2014, cujo edital foi divulgado em novembro de 2011, e novamente divulgado com alterações em fevereiro de 2012, e o parecer, na forma de um guia sobre as obras aprovadas, dirigido aos professores que foi trazido a público em julho de 2013, publicados no portal [www.fnde.gov.br](http://www.fnde.gov.br).

O edital contém diretrizes para a inscrição das coleções didáticas destinadas a alunos e professores dos anos finais do Ensino Fundamental da rede pública. As diretrizes dizem respeito aos seguintes aspectos:

- prazos (inscrição de 7 a 11 de maio de 2012, no caso exemplificado);

- caracterização das coleções didáticas disciplinares: Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia e Língua Estrangeira Moderna (Inglês e Espanhol);
- composição (somente livro impresso ou livro impresso acompanhado de conteúdos em multimídia);
- disponibilização dos conteúdos multimídia do DVD-ROM;
- condições e procedimentos de participação das editoras;
- entrega da documentação das editoras, dos autores e das coleções didáticas;
- critérios para avaliação pedagógica;
- correção de falhas pontuais após a avaliação pedagógica;
- recursos da avaliação pedagógica;
- *Guia do livro didático*, com resenhas das coleções aprovadas;
- orientações para escolha pelas escolas públicas participantes;
- solicitação às editoras para converterem no formato MecDaisy os livros destinados a alunos e professores cegos.

As especificações para produção das coleções são muitas: das 94 páginas do edital publicadas no portal, cerca de 23 expõem princípios e critérios para a avaliação dos conteúdos e duas focalizam os princípios de avaliação para o componente curricular Matemática. Após a inscrição, ocorre a triagem das coleções, etapa do processo realizada em caráter eliminatório, com o objetivo de examinar aspectos físicos e atributos editoriais das coleções inscritas, em conformidade com os requisitos estipulados no edital. A etapa seguinte é a pré-análise, que também tem caráter eliminatório e consiste no exame de atendimento do objeto e da documentação. A partir de 1998, as especificações técnicas passaram a ser aferidas pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT).

Depois da triagem e da pré-análise, procede-se à avaliação didático-pedagógica, coordenada por instituições públicas de educação superior, de acordo com diretrizes estabelecidas pelo ministério (uma instituição para cada disciplina).

A avaliação das coleções didáticas é calcada em critérios eliminatórios comuns a todos os componentes curriculares e em critérios específicos de cada um deles. Os critérios eliminatórios comuns a todas as áreas, expressos no edital são:



- respeito à legislação, às diretrizes e às normas oficiais relativas ao ensino fundamental;
- observância de princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano;
- coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica assumida pela coleção, no que diz respeito à proposta didático-pedagógica explicitada e aos objetivos visados;
- correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos;
- observância das características e finalidade específicas do manual do professor e adequação da coleção à linha pedagógica nele apresentada;
- adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico aos objetivos didático-pedagógicos da coleção. (Edital de convocação 6/2011, CGPLI, p. 47-48).

Nota-se que apenas o primeiro critério dessa relação não fazia parte dos critérios eliminatórios comuns de análise de 1996.

No caso do componente curricular Matemática, os critérios eliminatórios específicos apresentados no edital são:

- apresentar erro ou indução a erro em conceitos, argumentação e procedimentos matemáticos, no livro do aluno, no manual do professor e quando houver, no glossário;
- deixar de incluir um dos campos da matemática escolar, a saber, números e operações, álgebra, geometria, grandezas e medidas e tratamento da informação;
- dar atenção apenas ao trabalho mecânico com procedimentos, em detrimento da exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas;
- apresentar os conceitos com erro de encadeamento lógico, tais como: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas;
- deixar de propiciar o desenvolvimento, pelo aluno, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização;
- supervalorizar o trabalho individual;
- apresentar publicidade de produtos ou empresas.

Além desses itens relativos ao livro do aluno, o manual do professor, que é parte específica do professor, deve:

- apresentar orientações metodológicas para o trabalho do ensino-aprendizagem da Matemática;
- contribuir com reflexões sobre o processo de avaliação da aprendizagem de Matemática;
- apresentar orientações para a condução de atividades propostas. (Edital de convocação 6/2011, CGPLI, p. 58-60)

Nota-se que os critérios eliminatórios específicos do componente curricular Matemática estão bem mais ampliados e explícitos em relação àqueles da análise de 1996.

As coleções aprovadas são, por fim, divulgadas nos guias de livros didáticos, por componente didático, e publicados no portal [www.fnde.gov.br](http://www.fnde.gov.br) (no exemplo em pauta, lançados em 3/7/2013).

As coleções aprovadas são então escolhidas pelas escolas públicas participantes por meio de seu corpo docente e dirigente. Uma vez selecionados os títulos, o dirigente da escola efetua o registro dessas escolhas no Sistema de Material Didático (SIMAD). O FNDE, por intermédio de comissão especial de negociação, convoca os editores e procede à negociação de preços. Não havendo acordo, o FNDE pode deixar de contratar a aquisição de coleções previstas e contratar a aquisição da segunda opção, ou ainda, na eventualidade de novo impasse, fazer a opção pela obra negociada mais escolhida em cada região.

Por ocasião da produção das coleções, o FNDE ou empresa contratada para este fim poderão realizar controle de qualidade, mediante amostragem definida na NBR 5426/1985, da Associação Brasileira de Normas Técnicas.

Até o início de 2014 (daí a denominação PNLD 2014, embora o edital tenha sido publicado três anos antes), as coleções deverão estar disponíveis nas escolas para utilização no período de 2014 a 2016.

Chama-nos atenção, no processo em vigor, a complexidade logística e de avaliação das coleções. No entanto, apesar dos consideráveis esforços voltados à avaliação das obras, os quais incentivam a melhoria na qualidade destas, há ainda campo para aperfeiçoamentos, o que inclui sugerir conteúdos emergentes (como a probabilidade frequentista), avaliar se de fato o conteúdo é desenvolvido de maneira que o aluno se aproprie do saber e consiga estabelecer relações com outros campos da matemática ou com outras áreas do conhecimento; verificar se as obras estão incorporando resultados de pesquisas acadêmicas; e avaliar se a bibliografia consultada e as sugestões de leitura são atuais e se contemplam todos os blocos de conteúdo da matemática. Também avaliar se apresentam atividades de investigação matemática e sugestões de como se pode dar o processo de avaliação nas aulas de

matemática considerando não só aspectos conceituais, mas também procedimentais e atitudinais. Estes, entre outros aspectos, são necessários, tendo-se em vista o contínuo processo de descobertas e aprimoramento que os pesquisadores de várias universidades vêm desvendando e revelando em diversas revistas eletrônicas.

### 4.3 Guia do Livro Didático

Além de apresentar resenhas das coleções aprovadas, o *Guia do livro didático de Matemática* explica como as resenhas estão estruturadas, apresentando uma visão geral de cada coleção, sua descrição, sumário, análise da linguagem e de aspectos gráfico-editoriais, análise de conteúdos de multimídia (quando existentes) e, análise do manual do professor, além de trazer, na seção *Em sala de aula*, recomendações sobre como utilizar a coleção. Também constam do *Guia* concepções sobre o livro didático, os princípios e critérios que nortearam a avaliação, o estado atual das pesquisas em educação matemática e as fichas usadas pelos avaliadores durante o processo de avaliação.

Segundo o que consta no *Guia*, o livro didático é um interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno. A comissão técnica pauta-se em premissas de Gérard e Roegiers. Segundo o *Guia*, as funções mais importantes do livro didático na relação com o aluno são:

- favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes;
- propiciar o desenvolvimento de competências cognitivas que contribuam para aumentar a autonomia;
- consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos adquiridos;
- auxiliar na autoavaliação da aprendizagem;
- contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania. (BRASIL, 2013, p. 13)

No que diz respeito ao professor, o *Guia* expõe que o livro didático desempenha, entre outras, as importantes funções de:

- auxiliar no planejamento anual do ensino da área do saber, seja por decisões sobre a condução metodológica, seja pela seleção dos conteúdos e, também, pela distribuição deles ao longo do ano escolar;
- auxiliar no planejamento e na gestão das aulas, tanto no que refere à explanação dos conteúdos curriculares quanto no tocante às atividades, exercícios e trabalhos propostos;

- favorecer a aquisição dos conhecimentos assumindo o papel de texto de referência;
- favorecer a formação didático-pedagógica;
- auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno. (BRASIL, 2013, p. 13)

O volume indica também competências matemáticas gerais a serem construídas, mas ressalva que essa lista não esgota todas as possibilidades. Sugere que não sejam encaradas como independentes umas das outras, mas que possam ser adaptadas em função de cada contexto educacional. Tais competências são:

- interpretar matematicamente situações do dia a dia ou de outras áreas do conhecimento;
- usar independentemente o raciocínio matemático para a compreensão do mundo que nos cerca;
- resolver problemas criando estratégias próprias para sua resolução, desenvolvendo a iniciativa, a imaginação e a criatividade;
- avaliar se os resultados obtidos na solução de situações-problema são ou não razoáveis;
- estabelecer conexões entre os campos da matemática e entre essa e as outras áreas do saber;
- raciocinar, fazer abstrações com base em situações concretas, generalizar, organizar e representar;
- compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo a capacidade de argumentação;
- utilizar a argumentação matemática apoiada em vários tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo, probabilístico, por analogia, plausível, entre outros;
- comunicar-se utilizando as diversas formas de linguagem empregadas na matemática;
- desenvolver a sensibilidade para as relações da matemática com as atividades estéticas e lúdicas;
- utilizar as novas tecnologias de computação e de informação. (BRASIL, 2013, p. 16)

Não só no *Guia do livro didático* (BRASIL, 2013), como também nos PCN (BRASIL, 1998), encontramos considerações sobre as competências gerais acima citadas:

As competências gerais já listadas desenvolvem-se de forma articulada com competências específicas associadas aos conteúdos matemáticos visados no ensino do 6º ao 9º anos. Esses conteúdos têm sido organizados em cinco grandes campos: números e operações; álgebra; geometria; grandezas e medidas; e estatística e probabilidade. (BRASIL, 2013)

Em relação ao campo ‘Tratamento da informação’, que no *Guia do livro didático* do PNLD 2014 passou a ser denominado ‘Estatística e probabilidade’, a comissão avaliadora cita as seguintes competências:

Associadas ao campo da estatística e probabilidade são cada vez mais relevantes questões relativas os dados da realidade física ou social que precisam ser coletados, selecionados, organizados, apresentados e interpretados criticamente. Fazer inferências com base em informações qualitativas ou dados numéricos e saber lidar com os conceitos de chance e de incerteza também são competências de grande utilidade. Em muitas aplicações do conceito de probabilidade faz-se necessário recorrer à contagem de um conjunto discreto de elementos. Para resolver tais problemas, além de outros, de modelagem discreta, os conteúdos de combinatória ganham crescente importância na formação matemática. (BRASIL, 2013, p. 17)

Quanto aos aspectos nos quais os avaliadores se detiveram na avaliação das coleções, notamos que a ficha de avaliação utilizada no PNLD 2014 (Anexo A), foi editada e reorganizada com base na do PNLD 2011 (Anexo B). Confrontando o aspecto da metodologia de ensino e aprendizagem, constatamos que na ficha do guia do PNLD 2014 o aspecto investigativo, importante para o desenvolvimento de atividades ligadas à probabilidade, e a comparação de diferentes estratégias não estão devidamente relacionados.

#### **4.4 Algumas Considerações**

Conforme Batista (2001), foi de 1960 a 1970 que se instaurou no Brasil o modelo de livro didático, cuja principal função era *estruturar* o trabalho pedagógico em sala de aula.

A concepção de livro didático como estruturador das práticas docentes está associada, de acordo com diferentes estudos, com a intensa ampliação do sistema de ensino e também a um processo de recrutamento docente mais amplo e menos seletivo. Dessa forma, o livro didático passou a influenciar o trabalho pedagógico, definindo o currículo e cristalizando abordagens metodológicas e quadros conceituais, organizando, enfim, o cotidiano da sala de aula.

Com a participação do MEC na compra de livros didáticos, tornou-se fundamental a avaliação especializada e contínua destes, o que, com esse caráter qualitativo, se iniciou em 1996.

A colaboração de pesquisadores das universidades, por um lado, e a ampla renovação da produção didática brasileira, evidenciada pela participação de novas editoras e novos títulos a cada PNLD, vieram culminar numa notória melhoria na qualidade dos livros didáticos nestes últimos anos.

No entanto, o que se tem notado é certa semelhança entre as coleções aprovadas, já que as editoras procuram atentar para os itens eliminatórios, além de se espelharem nas coleções que tiveram bom desempenho de adoções no PNLD anterior. Por isso, há necessidade de se aumentar o grau de exigência do conjunto de critérios (comuns e de áreas) de análise dos livros didáticos, mesmo porque as alterações no contexto educacional e as atuais exigências sociais são dinâmicas e estão em constante evolução, principalmente, com o advento da internet, cada vez mais cotidiano na vida das pessoas.

No Brasil, já se dispõe de várias pesquisas acadêmicas sobre conteúdos e procedimentos que dão suporte aos critérios de avaliação dos livros didáticos, porém os comentários dos avaliadores, em algumas das resenhas, têm se mostrado tímidos, principalmente em relação ao campo 'Estatística e probabilidade', pois, como veremos no Capítulo 6, as três coleções aprovadas e consideradas nesta pesquisa tratam de maneira incipiente ou pouco satisfatória os conceitos de probabilidade e aleatoriedade.

A seguir descreveremos como uma coleção estrangeira desenvolve a probabilidade por meio de atividades que levam o aluno a investigar, a resolver questões, a fazer conexões com outras áreas do conhecimento, a aprofundar o uso da probabilidade e a sistematizar os conhecimentos matemáticos estudados.

## 5 AMPLIANDO OLHARES SOBRE A ABORDAGEM DA PROBABILIDADE

*Educação e investigação temática, na concepção problematizadora da educação, se tornam momentos de um mesmo processo.*

(FREIRE, 2005, p. 118)

Neste capítulo buscaremos exemplificar o que tem sido proposto em outros países para a abordagem da probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental. Para tanto, consideramos uma coleção americana cuja elaboração decorreu de um projeto de longo prazo, ainda em atividade, envolvendo pesquisadores e professores de educação estatística. Tomamos essa coleção como parâmetro para podermos ampliar a discussão que desejamos fazer sobre o ensino e a aprendizagem de probabilidade no Ensino Fundamental, bem como nos pautarmos nas sugestões de novos critérios para a avaliação de livros didáticos no PNLD e outras perspectivas para os PCN.

### 5.1 *Connected Mathematics Project*

O projeto de ensino denominado *Connected Mathematics Project* (CMP) (LAPPAN *et al.*, 2009) foi financiado pela instituição americana National Science Foundation e envolveu, de 1991 a 1996 e de 2000 a 2006, o desenvolvimento de um currículo de Matemática completo para professores e estudantes, com o objetivo de auxiliar estes últimos a desenvolverem a compreensão de importantes conceitos matemáticos, habilidades, procedimentos e maneiras de pensar e raciocinar sobre número, álgebra, geometria, medição, probabilidade e estatística.

O CMP teve por base pesquisas em Educação Matemática e em Educação Estatística e foi testado, em campo, em diversos locais dos Estados Unidos, abrangendo 390 professores e cerca de 45 000 alunos. Em ambos os períodos de investigação, cada uma das unidades que compõem os volumes passou por no mínimo três momentos de teste de campo. A premissa desse projeto é que todos os

alunos devem ser capazes de raciocinar e comunicar-se eficientemente em Matemática, o que inclui dispor de conhecimento e habilidade no uso de vocabulário, formas de representação, materiais, ferramentas, técnicas e métodos intelectuais da disciplina de Matemática, além da capacidade de definir e resolver problemas, valendo-se de razão, *insight*, criatividade e proficiência.

O projeto ainda está ativo e promove encontros dos pesquisadores com os professores que adotam o material, para discussões regulares e para readequações e reformulações. A meta estabelecida pelos pesquisadores não se limita à publicação de livros com padrões diferentes de aprendizagem e ensino, mas visa também que professores, alunos e pais desempenhem diferentes papéis, trabalhando colaborativamente no processo de aprendizagem.

Os coordenadores defendem a ideia de que nas salas de aula em que se aplicam materiais do CMP os alunos atuem ativamente, investigando problemas, levantando questionamentos, procurando soluções e elaborando sínteses sobre a aprendizagem matemática ocorrida.

O CMP contempla cinco eixos matemáticos: ‘Álgebra’, ‘Geometria’, ‘Medidas’, ‘Números e operações’ e ‘Análise de dados e probabilidade’. Esses eixos se articulam em oito volumes para cada um dos três anos do nível médio (que para nós seriam os anos finais do Ensino Fundamental).

Os volumes podem ser utilizados independentemente, ou seja, por escolha do professor. No caso do 6º ano (7º ano no Brasil), os oito volumes apresentam os seguintes títulos (e temas)<sup>3</sup>:

- *Prime time* : factors and multiples [*Para começar*<sup>4</sup>: *fatores e múltiplos*]
- *Data about us: statistics* [*Dados a nosso respeito: estatística*]
- *Shapes and designs: two-dimensional geometry* [*Formas e desenhos: geometria plana*]
- *Bits and pieces I: understanding rational numbers* [*Miscelânea I: compreendendo os números racionais*]

<sup>3</sup> As traduções de trechos do CMP foram feitas pelo tradutor Gerson Ferracini.

<sup>4</sup> Em inglês, o título deste volume (*Prime time*) é um trocadilho envolvendo as ideias de ‘horário nobre’ e ‘momento dos números primos’. Alguns dos títulos da coleção utilizam linguagem mais próxima à habitualmente encontrada na comunicação publicitária do que a utilizada para nomear obras didáticas no Brasil. Isso reflete diferenças no que é considerado culturalmente familiar.



- *Covering and surrounding: two-dimensional measurements* [Cobrimdo e circundando: medidas bidimensionais]
- *How likely is it?: probability* [Qual é a chance?: probabilidade]
- *Bits and pieces II: using rational numbers* [Miscelânea II: usando números racionais]
- *Ruins of Montarek: spatial visualization* [As ruínas de Montarek: visualização espacial]

Para cada eixo foram estabelecidos os objetivos que os alunos devem ser capazes de alcançar do 6º até o final do 8º ano. O Quadro 1 descreve os objetivos do eixo ‘Análise de dados e probabilidade’.

Quadro 1 – Objetivos do eixo ‘Análise de dados e probabilidade’ do *Connected Mathematics Project*

<p>➤ <u>Formulação de questões</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Formular perguntas que possam ser respondidas por meio da coleta e análise de dados (do 6º ao 8º ano).</li> <li>• Estabelecer estratégias para coletar dados a fim de responder a essas perguntas (do 6º ao 8º ano).</li> <li>• Realizar experimentos e simulações para testar hipóteses sobre situações de probabilidade (8º ano).</li> </ul> <p>➤ <u>Coleta de dados</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Implementar estratégias de coleta de dados para responder às perguntas que foram elaboradas (do 6º ao 8º ano).</li> <li>• Distinguir entre amostra e população (8º ano).</li> <li>• Caracterizar amostras e analisar se são representativas ou não (8º ano).</li> <li>• Utilizar essas caracterizações para avaliar a qualidade dos dados coletados (8º ano).</li> </ul> <p>➤ <u>Análise de dados</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Organizar, analisar e interpretar dados para fazer previsões, construir argumentos e tomar decisões (6º e 7º ano).</li> <li>• Utilizar medidas centrais e de dispersão para descrever e comparar conjuntos de dados (6º e 7º ano).</li> <li>• Ser capaz de ler, criar e escolher as representações de dados, incluindo gráficos de barras/colunas, setores, linhas, caule e folhas, <i>boxplots</i> e histogramas (6º e 7º ano).</li> <li>• Avaliar informalmente a significância das diferenças entre conjuntos de dados (7º e 8º ano).</li> <li>• Usar informações extraídas de amostras para tirar conclusões sobre populações (8º ano).</li> </ul> <p>➤ <u>Probabilidade</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Distinguir entre probabilidades teóricas e experimentais e compreender a relação entre elas (6º ano).</li> <li>• Utilizar conceitos de probabilidade para tomar decisões (6º ano).</li> <li>• Encontrar o valor esperado e interpretá-lo (7º ano).</li> </ul>
--

- Calcular e comparar as chances de vários resultados, incluindo resultados de dois estágios de resultados (7º ano).

Fonte: Elaborado pelos autores do *Connected Mathematics Project*

Podemos observar nesses objetivos que o ensino e a aprendizagem de estatística e de probabilidade se baseiam em investigações e em resolução de problemas, de modo a permitir que o conhecimento matemático e estatístico possibilite ao estudante adquirir habilidades para compreender e lidar adequadamente com sua realidade (LOPES, 1998).

No Brasil, ao tratarem dos objetivos para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico, os PCN (BRASIL, 1998) para o 3º e 4º ciclos (atuais 6º a 9º anos) deixam de focalizar o aspecto investigativo, o que prejudica, principalmente, o estudo das probabilidades experimentais.

## 5.2 As Atividades Investigativas no Volume *How likely Is It?: Probability*

As atividades que iremos apresentar constam no volume *How likely is it?: probability* (LAPPAN *et al.*, 2002), direcionado ao 6º ano, e estão organizadas em sete investigações. As investigações 1, 2 e 3 focalizam probabilidades experimentais e a ideia de chance de ocorrência de um evento. As investigações 4 e 5 introduzem, formalmente, os termos “probabilidade” e “probabilidade teórica”. As investigações 6 e 7 trazem aos alunos oportunidades de aplicar e desenvolver ainda mais seus conhecimentos sobre probabilidade em diferentes situações de interesse. Essas investigações também fazem importantes conexões entre probabilidade e números racionais, geometria, estatística, ciência e negócios.

Cada uma das investigações apresenta ao aluno uma proposta de situação-problema e questões investigativas que, em geral, são sugeridas para serem discutidas em grupos de alunos. A elas seguem-se as seções denominadas “Aplicações”, “Conexões” e “Extensões”, finalizando com a seção “Reflexões matemáticas”.

O livro do professor é bem estruturado, prático e assertivo, pois traz orientações pontuais nas laterais ou embaixo das páginas em que, em tamanho

reduzido, estão reproduzidas as páginas pertinentes do livro do aluno. Essas orientações versam sobre o que abordar nas investigações e como conduzi-las. No início do livro do professor, em 20 páginas inteiras, há comentários sobre a Matemática abordada no volume e os objetivos matemáticos e de resolução de problemas, além de um resumo das investigações. Também há um quadro com estimativa de aulas a serem dedicadas a cada investigação e indicação dos momentos em que as seções *Quiz* [Enigma], *Check-up* [Verificação], *Self-Assessment* [Autoavaliação] e *Unit Test* [Teste sobre o conteúdo da unidade] devem ser focalizadas, totalizando 20 dias.

No final do livro também em página inteira, listam-se os materiais necessários para o desenvolvimento de cada investigação e a indicação de atividades que poderão ser realizadas em casa, atividades extras, respostas das atividades e carta aos pais comunicando o que os filhos estudarão e solicitando a participação e o acompanhamento durante o ano letivo.

Neste capítulo, apresentaremos as quatro primeiras investigações elaboradas pelos pesquisadores do CMP. Para diferenciar visualmente nossos comentários das investigações, indicaremos as atividades dentro de um quadro, em tipografia menor e fundo cinza claro.

### 5.2.1 Investigação 1: Um Primeiro Olhar Sobre a Chance

A primeira investigação proposta no volume apresenta aos alunos a ideia de probabilidades experimentais. O objetivo é construir a intuição de que a probabilidade (ou chance) tem a ver com eventos que, embora incertos, apresentam padrão de regularidade a longo prazo.

#### 1.1. Decidindo o café da manhã

Kalvin, aluno do 8º ano, sempre come cereais no café da manhã. Ele gosta do cereal *Cocoa Blast*. A mãe de Calvin prefere que ele coma *Health Nut Flakes*, por ser mais nutritivo. Eles decidem escolher, de maneira lúdica, o que Calvin comerá no café da manhã. Para tanto, toda manhã ele lançará uma moeda: se der cara, comerá *Cocoa Blast* (sua preferência); se der coroa, *Health Nut Flakes*.

Após a introdução da tarefa, os autores do CMP orientam o professor, por meio de comentários nas laterais do livro, a organizar pequenos grupos de alunos para discutirem, responderem às questões e combinarem como irão coletar e anotar

os dados relacionados à situação proposta, o que é muito oportuno para o desenrolar da investigação.

O sucesso de uma investigação depende também, tal como de qualquer outra proposta do professor, do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula [...] e que o aluno saiba o que é pedido, em termos de produto final. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 28-29)

Segue-se então o primeiro problema proposto aos alunos:

**Problema 1.1**

Quantos dias você acha que Calvin comerá Cocoa Blast em junho?

Explore esta questão jogando uma moeda 30 vezes para determinar o cereal que Calvin comerá a cada manhã de junho. Use a planilha de experimentos 1 [fornecida no volume], que contém o calendário de junho, para anotar seus dados. Para cada dia, marque o resultado do lançamento (cara ou coroa) e o percentual de caras obtido em seu grupo.

Também se solicita que os alunos façam uma representação no plano cartesiano, marcando no eixo x os dias do mês, de 1 a 30, e no eixo y o percentual de caras obtido no grupo. A condução do experimento e a discussão da questão em classe levam os alunos a prever que Calvin comerá *Cocoa Blast* cerca de 15 dos 30 dias desse mês.

A seguir são propostas questões, e os alunos combinam com o professor como registrar o resultado conjunto de toda a classe. Momentos como este permitem que ocorra apropriação do saber por meio da reflexão, do registro e da troca de ideias com a classe.

É somente quando se dispõem a registrar as suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias e estabelecerem consensos em um entendimento comum quanto às suas realizações. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 33)

As questões propostas são:

**1.a.** Que fração dos lançamentos da classe deu cara?

**b.** Se você continuar jogando muitas vezes mais, a fração de caras chegará perto de  $\frac{1}{2}$ ?

**2.a.** Com base no que você encontrou para junho, quantas vezes você espera que Calvin coma Cocoa Blast em julho?

**b.** Quantas vezes você esperaria que Calvin comesse o cereal Cocoa Blast em um ano?

3. A mãe de Calvin disse-lhe que a chance de sair cara num lançamento de moeda é  $\frac{1}{2}$ . Isso significa que toda vez que você jogar uma moeda duas vezes você terá uma vez cara e uma vez coroa? Explique seu raciocínio.

A sequência de problemas leva os alunos a constatar que, quanto mais vezes lançarem a moeda, mais a chance de obterem cara se aproximará de  $\frac{1}{2}$ . Note-se que inicialmente esse percurso é realizado com um número par de dias (30) e que a seguir os alunos são levados a transpor o raciocínio para números ímpares de dias (31 em julho e 365 em um ano). Esse é um raciocínio esperado, principalmente numa investigação em que as primeiras respostas levam a outras indagações.

As conjecturas podem surgir ao aluno de diversas formas, por exemplo, por observação direta dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjecturas. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 33)

A terceira questão estimula os alunos a refletirem sobre o significado de “a chance de sair cara é  $\frac{1}{2}$  quando lançamos uma moeda” e concluírem que essa afirmação não significa que se obterá cara toda vez que a moeda for lançada duas vezes. Em vez disso, os alunos são estimulados a enxergar  $\frac{1}{2}$  como uma *boa estimativa* de se obter cara quando ocorrerem muitos lançamentos. Nesse momento a investigação dá indícios de que irá abordar a ideia de probabilidade frequentista.

A sequência de atividades está focada no objetivo inicial, que é de introduzir a ideia de probabilidade experimental. Uma nova situação é então apresentada para investigar a hipótese de equiprobabilidade.

### 1.2. Analisando eventos

Kalvin encontra uma moeda perto dos trilhos de uma ferrovia. Nota que ela está amassada, mas decide usá-la para determinar seu café da manhã.

A mãe de Calvin suspeita da moeda, pois no fim de junho Calvin tinha comido *Health Nut Flakes* somente sete vezes. Ela sintetiza sua dúvida dizendo: “Se a moeda é honesta, sair cara e coroa são resultados igualmente prováveis”.

Kalvin não tem certeza sobre o significado de *igualmente provável*, que sua mãe lhe disse. Ela então lhe apresenta um exemplo para explicar esse conceito.

Suponha que todos na família escrevam o próprio nome em um cartão e o coloquem dentro de um chapéu. Se você retirar um cartão, lê-lo e colocá-lo de volta, cada nome terá a mesma chance de tornar a sair. Mas suponha que você tenha colocado no chapéu 10 cartões com meu nome. Então

quando você retirar um cartão do chapéu, nossos nomes não terão a mesma chance. O meu terá maior chance de ser escolhido do que os outros.

Esse exemplo aborda o significado de *igualmente provável*. Para tanto, o professor é orientado a fazer com que, de início, os alunos reflitam sobre a situação individualmente e depois a discutam com a classe. Na discussão em grupo, fazem um círculo e ouvem as razões de cada participante.

Na sequência de atividades seguinte, os alunos são convidados a decidir se diferentes eventos apresentados em uma lista são equiprováveis.

<b>Problema 1.2</b>		
De <b>A</b> a <b>H</b> , decida se o resultado de cada evento é igualmente provável e explique brevemente sua resposta. [Os comentários indicados na terceira coluna são os fornecidos no livro do professor.]		
<b>Ação</b>	<b>Possibilidade do resultado do evento</b>	<b>[Comentário]</b>
<b>A.</b> Você lança uma lata de refrigerante.	A lata cai de lado ou virada para cima ou virada para baixo.	[É mais provável que a lata caia de lado do que virada para cima ou para baixo.]
<b>B.</b> Você joga um dado numerado.	1, 2, 3, 4, 5 ou 6.	[Este evento é equiprovável desde que o dado seja honesto.]
<b>C.</b> Você verifica a meteorologia no Alasca em um dia de dezembro.	Neva, chove ou não chove nem neva.	[É mais provável nevar do que chover, pois trata-se de um dia de dezembro (inverno).]
<b>D.</b> O time Pittsburgh Steelers joga uma partida de futebol.	O Pittsburgh Steelers ganha, perde ou empata.	[As chances são diferentes, pois dependem do adversário, da sorte etc.]
<b>E.</b> Nasce um bebê.	O bebê é um menino ou uma menina.	[Evento equiprovável.]
<b>F.</b> Nasce um bebê.	Ele é canhoto ou destro.	[Existem mais pessoas destros.]
<b>G.</b> Você chuta a resposta de uma questão que tem duas alternativas: verdadeira ou falsa.	A resposta está certa ou a resposta está errada.	[Se você chuta, o evento é equiprovável.]
<b>H.</b> Você lança uma bola ao cesto.	Você faz a cesta ou você erra.	[Depende de quem lança.]

Após essa série, é solicitado ao aluno que:

1. Descreva três outras situações em que os resultados dos eventos sejam igualmente prováveis.
2. Descreva três outras possibilidades em que os resultados dos eventos não sejam igualmente prováveis.

A seguir, são apresentados problemas nas seções denominadas ‘Aplicação’, ‘Conexão’ e ‘Extensão’, em que é sugerido o uso da calculadora, sempre que necessário.

Depois dessa série de atividades, os alunos são convidados a pensar sobre as questões que abordaram nessa investigação e a discutir suas ideias com outros colegas e com o professor, a fim de sumarizarem o que estudaram.

O professor deve garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente. Essa fase deve permitir também uma sistematização das principais ideias e uma reflexão sobre o trabalho realizado. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 41)

Para tanto, são propostas aos alunos as seguintes questões:

#### **Reflexões matemáticas**

1. O que significa dizer que a chance de tirar cara no lançamento de uma moeda é  $\frac{1}{2}$ ?
2. Se você experimenta lançar uma moeda e falar do resultado, 30 lançamentos é tão bom quanto 500 lançamentos para prever a chance do lançamento?
- 3 a. O que significa dizer que o resultado de algumas ações é equiprovável?
  - b. Dê um exemplo de uma ação que é equiprovável.
  - c. Dê um exemplo de uma ação que não é equiprovável.
4. Se você tem uma moeda honesta, é possível obter 25 caras seguidas? Qual é a chance de que isso aconteça?

### **5.2.2 Investigação 2: Mais Experimentos com a Chance**

Esta investigação prossegue o trabalho dos alunos em encontrarem probabilidades experimentais. Tal como no problema 1.1, os alunos fazem um experimento que lhes permita perceber de que maneira Calvin terá melhor chance de comer *Cocoa Blast* toda manhã. Desta vez, porém, utilizarão confeitos cilíndricos para esse fim.

No entanto, diferentemente da investigação com a moeda, os alunos não sabem que resultados esperar ao lançarem os confeitos e adquirirão experiência com eventos que não são igualmente prováveis. Este é um dos objetivos desta investigação. Outros objetivos são: entender que a chance (probabilidade) é uma

*estimativa* de comportamento a longo prazo, entender que para tomar boas decisões baseadas em probabilidades experimentais é necessário basear-se em um grande número de tentativas e, finalmente, entender que um jogo de azar é honesto somente se cada jogador tiver a mesma chance de ganhar, e não apenas uma possível chance de vencer.

### 2.1. Lançando confeitos de *marshmallow*

Kalvin vasculhou o armário da cozinha e encontrou um pacote de confeitos cilíndricos de *marshmallow* grandes e um pacote de pequenos. Ele cogitou que um confeito de *marshmallow* poderia ser algo bom para lançar e ficou pensando sobre qual tamanho seria melhor. Já que Calvin quer comer *Cocoa Blast* na maior parte das vezes, precisa encontrar um confeito que caia em uma posição – seja tombado de lado ou em pé sobre uma das faces planas – na maioria das vezes. Uma vez decidido o melhor tipo de confeito, ele perguntará à mãe se ele pode usar um confeito de *marshmallow* em vez de uma moeda para decidir sobre seu cereal a cada manhã.

Após essa introdução, os autores sugerem ao professor que organize pequenos grupos, converse com a classe sobre a diferença entre usar moedas e *marshmallows* para gerar eventos aleatórios e discuta sobre a maneira de lançar *marshmallows*. Orienta também o professor a ajudar as duplas a conduzir o experimento com atenção. No final, com toda a classe, sugere que se reúnam todos os dados coletados em uma tabela, formando um total geral.

[...] o professor deve dar uma atenção cuidadosa à própria tarefa, escolhendo questões ou situações iniciais que, potencialmente, constituam um verdadeiro desafio para os alunos. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 47)

### Problema 2.1

Faça experimentações com confeitos de *marshmallow* grandes e pequenos para ajudá-lo a responder estas questões:

- A. Que tamanho de *marshmallow* Calvin deveria usar para determinar qual cereal comerá? Explique sua resposta.
- B. Qual das posições de queda do confeito – em pé [sobre a extremidade plana] ou deitado [sobre a superfície curva] – Calvin deveria usar para representar o cereal *Cocoa Blast*? Explique sua resposta.

Para conduzir o experimento, lance cada um dos tamanhos de *marshmallow* 50 vezes. Registre seus



dados com atenção. Eis aqui um exemplo de como você poderia organizar seus dados:

	Cai em pé	Cai deitado
<i>Marshmallow grande</i>		
<i>Marshmallow pequeno</i>		

Use os resultados de seu experimento para ajudá-lo a responder às questões **A** e **B**.

### Prosseguimento do Problema 2.1

Trabalhe com seu professor para reunir os resultados de todos os grupos.

1. **a.** Em que fração de seus 50 lances os confeitos grandes caíram em pé? E deitados?  
**b.** Em que fração dos lances da classe os confeitos grandes caíram em pé? E deitados?  
**c.** Se você lançar um confeito grande uma só vez a cada dia durante um ano, quantas vezes você espera que ele caia deitado?
2. **a.** Em que fração de seus 50 lances os confeitos pequenos caíram em pé? E deitados?  
**b.** Em que fração dos lances da classe os confeitos pequenos caíram em pé? E deitados?  
**c.** Se você lançar um confeito pequeno uma só vez a cada dia durante um ano, quantas vezes você espera que ele caia deitado?
3. Suponha que Calvin use o confeito que você escolheu – grande ou pequeno – para decidir sobre seu cereal a cada manhã. Ele lança o confeito duas vezes e este cai em pé uma vez e deitado uma vez. Ele diz: “Este confeito não é melhor do que a moeda. Ele cai em pé 50% das vezes!”. Como você convenceria Calvin que o confeito de *marshmallow* é melhor para ele do que uma moeda?

As respostas às questões 1 e 2 variarão e, na questão 3, espera-se que o aluno conclua que duas tentativas não são suficientes para se obter uma boa estimativa das chances de que o confeito caia em pé ou deitado. É necessário lançar o confeito muitas vezes para fazer uma boa estimativa.

Na próxima investigação é recomendado ao professor que jogue com a classe algumas partidas do jogo de lançar moedas e que seja discutida a diferença entre jogos de azar e jogos de habilidade. Solicita-se que reúnam todos os resultados e determinem as frequências relativas de obtenção de três faces de um mesmo tipo e de duas de um mesmo tipo. Após essa atividade, solicita-se que os alunos proponham mudanças para que o jogo se torne honesto.

### 2.2. Refletindo sobre o possível e o provável

Jon e Tat Ming estão entretidos em um jogo de lançar moedas. Para esse jogo, eles se revezam lançando três moedas. Se todas as três caírem com o mesmo lado para cima, Jon ganha um ponto. Se apenas duas delas caírem com faces iguais para cima, Tat Ming ganha um ponto. O primeiro jogador a obter 5 pontos vence. Ambos os jogadores ganharam o jogo diversas vezes, mas Tat Ming

parece estar vencendo com maior frequência. Jon diz que acha que o jogo não é honesto. Tat Ming alega que o jogo é honesto porque ambos têm chance de ganhar.  
O que você acha? O jogo é honesto desde que seja possível a cada um dos jogadores vencer?

### Problema 2.2

Faça um experimento para ajudá-lo a responder estas questões:

- A. É possível que Jon ganhe o jogo? É possível que Tat Ming ganhe o jogo? Explique seu raciocínio.
- B. Quem tem maior probabilidade de ganhar? Por quê?
- C. Este é um jogo honesto? Explique.

Para conduzir o experimento, lance três moedas 30 vezes. Registre o número de vezes em que as três moedas caem com o mesmo lado para cima e número de vezes em que apenas duas moedas caem do mesmo lado. Organize seus dados e justifique suas conclusões.

É interessante notar que essas questões são apresentadas e conduzidas de modo a permitir que os alunos concluam que qualquer um dos dois jogadores pode vencer, mas Tat Ming tem maior chance, já que a probabilidade de saírem três faces iguais é  $2 \times 1/8$ , ou seja,  $1/4$ . Portanto, esse jogo de azar não é honesto.

Uma vez alcançada tal conclusão, são propostas questões que envolvem maiores números de lances:

### Prosseguimento do Problema 2.2

Trabalhe com seu professor para reunir os resultados de todos os grupos.

- 1. Se você lançar as moedas 30 vezes mais, quantas vezes espera que as três moedas caiam com o mesmo lado para cima?
- 2. Lance as moedas 30 vezes mais. Compare esse conjunto de resultados com seu primeiro conjunto de resultados. As três moedas caíram com o mesmo lado para cima o mesmo número de vezes em cada experimento?

Essas questões, que envolvem maiores números de lances, favorecem o entendimento da probabilidade de um evento como o número em que a frequência relativa tende a tornar-se estável quando se procede a um grande número de ensaios repetidos sob as mesmas condições.

Esse método não fornece o valor exato da probabilidade, mas apenas uma estimativa. Ele se aplica, por exemplo, a situações em que é impossível dispor de condições idênticas no experimento e em que é difícil saber o número de vezes que se deve repetir o experimento para obter uma estimativa fiável. O significado de probabilidade frequentista é apropriado para o ensino porque tem uma aplicação

mais ampla do que a probabilidade clássica e se conecta com a Estatística. (FERNANDES *et al.*, 2009)

A essas questões seguem-se as atividades das seções “Aplicações”, “Conexões” e “Extensões”.

A atividade se conclui com a seguinte seção contendo questões sumarizadoras dirigidas ao aluno:

#### **Reflexões matemáticas**

Nesta investigação, você fez um experimento que envolveu lançar confeitos de *marshmallow*. Você também experimentou um jogo de lançar moedas para determinar se ele era honesto. Essas questões o ajudarão a resumir o que aprendeu:

1. Quando você lança um confeito de *marshmallow* cilíndrico grande, ele tem a mesma chance de cair em pé ou deitado? Que evidência você pode usar para ajudá-lo a responder esta questão?
2. Como você usaria os resultados de seu trabalho no Problema 2.1 para prever quantas vezes um confeito pequeno cairia deitado se você o lançasse 1 000 vezes?
3. O que significa um jogo de azar de duas pessoas ser honesto?
4. Nos itens a a f, dê um exemplo de um evento que teria aproximadamente as mesmas chances de ocorrer.
 

a. 0%	b. 10%
c. 25%	d. 50%
e. 75%	f. 100%

Pense sobre suas respostas a essas questões, discuta suas ideias com outros alunos e seu professor e então escreva um resumo de suas conclusões, em seu caderno.

Percebe-se que as investigações 1 e 2 tratam não só da probabilidade clássica, mas também da probabilidade frequentista, segundo a definição de Ortiz (2002, p. 89):

[...] nesta concepção, a probabilidade de um evento é entendida como o valor para o qual tende a frequência relativa de um evento em uma sequência de resultados.

De acordo com Coutinho (1996), o aluno deve ter contato com outras abordagens de probabilidade que não só a clássica, na qual a probabilidade é calculada *a priori* e se restringe a situações em que os espaços amostrais são equiprováveis. Tal enfoque pode causar a impressão errônea de que o cálculo da probabilidade não é possível ou pode conduzir ao erro de atribuir equiprobabilidade

aos casos possíveis. Para evitar essa limitação, convém proceder a uma articulação com a visão frequentista, na qual a probabilidade de um evento é calculada *a posteriori*, pois resulta da frequência relativa registrada quando o experimento é realizado um grande número de vezes.

### 5.2.3 Investigação 3: Usando Roletas para Predizer Chances

Esta investigação ainda trata a probabilidade informalmente e de modo experimental, porém apresenta a roleta como uma nova ferramenta de simulação experimental, centrada na premissa de que para se tomar boas decisões é preciso basear-se em um grande número de tentativas.

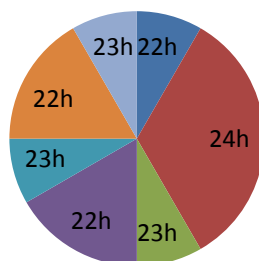
Os professores são orientados a organizar os alunos em grupos pequenos e a questioná-los sobre o que eles acham mais provável encontrar. Também são orientados a verificarem se os alunos compreendem que deverão decidir em que momento já terão coletados dados suficientes.

Para realizar essa investigação, é necessário usar uma das folhas de laboratório (mostradas no livro) e um grampo de cabelo ou clipe.

#### 3.1. Barganhando um melhor horário de ir dormir

Kalvin decidiu fabricar uma roleta na esperança de que seu pai o deixe utilizá-la para determinar seu horário de dormir a cada noite. Para incentivar o pai a aderir a essa ideia, Calvin colocou três setores circulares para as 22 horas e três setores para as 23 horas na roleta. No entanto, ele usou o setor maior para a meia-noite e espera que o ponteiro pare nesse espaço com maior frequência.

**Roleta para escolha das horas**



#### Problema 3.1

Faça um experimento para ajudá-lo a responder estas questões:

- A.** Calvin prefere ir dormir à meia-noite e, por isso, quer que a roleta marque 24 horas mais frequentemente que em qualquer outro lugar. É provável que essa roleta permita a ele alcançar seu objetivo? Explique.
- B.** Suponha que o pai de Calvin o deixe usar essa roleta para determinar o horário de dormir. Quais são as chances de Calvin ir para a cama à meia-noite? Explique como você chegou a essa resposta.

Para realizar o experimento, use a Folha de Laboratório 3.1 e um grampo de cabelo ou clipe para construir uma roleta como a de Calvin. Gire o ponteiro e anote os dados obtidos. Continue girando o ponteiro e anotando os dados até que você tenha confiança em suas respostas às questões acima.

Com essas atividades, os alunos estão sendo estimulados a procurar padrões em seus dados e parar quando as porcentagens correspondentes a cada horário tiverem se nivelado, momento em que dados novos passarão a ter pouco efeito sobre as porcentagens.

#### **Prosseguimento do Problema 3.1**

1. Depois de quantas tentativas você decidiu parar de girar o ponteiro? Por quê? Se você continuasse a girá-lo, você acha que suas respostas ao Problema 3.1 mudariam? Por que sim ou por que não?
2. **a.** Quantas vezes você girou o ponteiro? Quantas vezes o ponteiro marcou 22 horas? E 23 horas? E meia-noite?
- b.** Com base em seus dados, que fração do tempo Calvin irá dormir às 22 horas? E às 23 horas? E à meia-noite?
- c.** As férias de verão duram 90 dias. Se Calvin usar essa roleta toda noite, quantas noites você acha que ele irá dormir às 22 horas? E às 23 horas? E à meia-noite? Explique seu raciocínio.
3. Nas questões de *a* a *c*, use seu transferidor ou outros modos de raciocinar para analisar a roleta que Calvin construiu. Você pode ajustar o transferidor sobre a roleta para medir o ângulo de cada seção.
  - a.** Que fração da área da roleta é ocupada por espaços para 22 horas? E de 23 horas? E de meia-noite?
  - b.** Compare as frações do item *a* com as frações que você encontrou no item *b* da questão 2.
  - c.** Compare as frações do item *a* com as frações obtidas a partir dos dados que sua classe inteira coletou para o Problema 3.1

Ao final dessas atividades, os alunos deverão concluir que a roleta não é um bom recurso para Calvin: as chances de obter 22 horas como horário de dormir são  $5/12$  (42%), as chances de obter 23 horas são  $3/12$  (25%) e as de obter meia-noite são  $4/12$  (33%). As frações calculadas na parte **a** são probabilidades teóricas.

### Conexões

Nos problemas 5 a 8, use os dados abaixo para responder às questões. Se não houver informações suficientes para responder uma questão, explique que informações adicionais você necessitaria.

- Em 1988, 47 093 pessoas morreram em acidentes de carro e 3 486 pessoas morreram em acidentes de motocicleta nos Estados Unidos.
  - Nos Estados Unidos, 40% de todas as mortes de pessoas com 15 a 19 anos de idade resultam de colisões de veículos automotores. O álcool está envolvido em cerca de metade desses acidentes.
  - O número de vítimas fatais masculinas é maior que o de femininas, em uma razão de 2 para 1 em média.
  - 55% das mortes por motocicleta ocorreram em fins de semana.
  - Em 1988, o carro com menor índice de mortalidade foi o Volvo 740/760 de quatro portas, ao passo que o carro com o maior índice de mortalidade foi o Chevrolet Corvette.
5. O que é mais seguro para dirigir: um carro ou uma motocicleta?
  6. Que porcentagem de todas as mortes de pessoas com 15 a 19 anos de idade é resultante de acidentes de veículos automotores relacionados ao álcool?
  7. É mais provável que haja um acidente fatal durante a semana ou durante o fim de semana?
  8. Os homens são piores motoristas que as mulheres?

Seguem-se as respostas a essas questões.

5. Embora mais pessoas tenham morrido em acidentes de carro, de acordo com os dados, as motocicletas não são necessariamente mais seguras. Precisamos de informações sobre quantas pessoas dirigem carros e quantas dirigem motocicletas, e também sobre o número de horas que elas passam em ruas e estradas.
6. Cerca de 20% (metade de 40%).
7. Ocorrem mais mortes relacionadas com motocicletas em fins de semana, de acordo com os dados, mas isso não significa que qualquer pessoa que ande de motocicleta corra maior perigo de morrer no fim de semana do que em dias úteis. Poderia haver mais mortes em fins de semana porque mais pessoas andam de motocicleta no fim de semana.
8. Há mais homens vitimados em acidentes fatais, de acordo com os dados, mas eles não são necessariamente piores motoristas que as mulheres. Para responder a essa questão, precisaríamos saber o número de horas que os homens passam dirigindo e compará-lo com o número de horas que as mulheres passam dirigindo. Além disso, precisaríamos saber a proporção dos acidentes fatais de responsabilidade de homens, porque as informações dadas dizem respeito apenas a vítimas de colisões fatais e não a motoristas que se envolvem em acidentes fatais.

As atividades dessa seção “Conexões” estabelecem importante relação com o pensamento lógico para tomada de decisões nas investigações. Essa perspectiva

tem sido recomendada por algumas pesquisas em Educação Estatística, entre elas a de Lopes e Coutinho (2009, p. 62):

Essa forma de pensar é importante na vida das pessoas, porque lhes permite analisar as situações de decisão quando envolvem mais de uma possibilidade de resultado final do processo e suas possíveis ramificações, como consequência.

#### 5.2.4 Investigação 4: Probabilidades Teóricas

Nesta investigação, as probabilidades experimentais e teóricas (assim definidas no projeto CMP) são introduzidas formalmente. Em nossa perspectiva, trata-se das concepções frequentistas e clássicas de probabilidade. O propósito dessas investigações é levar o aluno a:

- entender as duas maneiras de obter probabilidades: coletando dados a partir de experimentos (probabilidade frequentista) e analisando desfechos possíveis e favoráveis (probabilidade clássica);
- entender a relação entre a probabilidade frequentista e a clássica: quando uma probabilidade experimental se baseia em um grande número de tentativas, ela constitui uma boa estimativa da probabilidade clássica;
- desenvolver estratégias para encontrar probabilidades teóricas, tais como preparar uma lista organizada de todos os possíveis desfechos;
- desenvolver uma compreensão sobre a palavra *aleatório*.

##### 4.1. Predizendo para vencer

Nos últimos 5 minutos de *Gee Whiz Everyone Wins!* [*Que demais! Todo mundo ganha!*], um programa de competição na TV, todos os membros do auditório são chamados ao palco para extraírem, aleatoriamente, um bloco de um balde que contém números desconhecidos de blocos vermelhos, amarelos e azuis. Antes da extração, solicita-se que cada participante prediga a cor do bloco que irá extrair. Se o palpite estiver correto, o participante ganha um prêmio. Após cada extração, o bloco é devolvido ao balde.

##### Pense sobre isso!

Suponha que você seja um membro do auditório. Há vantagem em ser o primeiro a ser chamado ao palco? Há vantagem em ser o último? Por quê?

##### Problema 4.1

Pratique o jogo de adivinhar blocos com sua classe. Seu professor atuará como o apresentador do programa e você e seus colegas serão os competidores. Registre o número de vezes que cada cor é extraída. Pratique o jogo até achar que pode prever com certeza as chances de extrair cada cor.

- A. No experimento com sua classe, quantas vezes foram extraídos blocos azuis? E vermelhos? E amarelos? Qual foi o número total de blocos extraídos?
- B. A probabilidade de extrair um bloco vermelho pode ser escrita como  $P(\text{vermelho})$ . Encontre todas as três probabilidades, baseando-se nos dados que você coletou em seu experimento.  
 $P(\text{vermelho}) =$                        $P(\text{amarelo}) =$                        $P(\text{azul}) =$   
 Agora seu professor vai retirar todos os blocos do recipiente para que você possa vê-los.
- C. Quantos blocos são vermelhos? E amarelos? E azuis? Quantos blocos há no total?
- D. Do total de blocos, determine a fração formada por blocos vermelhos, a fração formada pelos amarelos e a fração formada pelos azuis.

As respostas aos itens A e B variarão. Se, por exemplo, houver na classe 35 alunos e eles em conjunto extraírem 21 blocos vermelhos, a probabilidade experimental de extrair um bloco será de  $\frac{21}{35}$ , ou 60%.

No entanto se houvesse no recipiente 9 blocos vermelhos, 6 amarelos e 3 azuis, 18 no total, teríamos as seguintes probabilidades teóricas:

$$9/18 = \frac{1}{2} \text{ dos vermelhos, } 6/18 = \frac{1}{3} \text{ dos amarelos e } 3/18 = \frac{1}{6} \text{ dos azuis}$$

Cabe ressaltar que só depois de várias investigações e vivências os alunos se deparam com a probabilidade teórica.

#### Prosseguimento do Problema 4.1

As probabilidades que você calculou na parte B são chamadas **probabilidades experimentais** porque você as encontrou fazendo experimentos. As frações que você encontrou na parte D são chamadas **probabilidades teóricas**. Elas são encontradas analisando-se os possíveis desfechos, em vez de fazer experimentos.

Se todos os desfechos de uma ação são igualmente prováveis, então a probabilidade teórica de um evento é calculada com esta fórmula

$$\frac{\text{número de desfechos favoráveis}}{\text{número de desfechos possíveis}}$$

em que os *desfechos favoráveis* são aqueles que interessam a você.

Por exemplo, se você quer encontrar a probabilidade de extrair um bloco vermelho, então um bloco vermelho é um desfecho favorável. Se um balde contém um total de seis blocos e dois deles são vermelhos, a probabilidade teórica de extrair um bloco vermelho é  $\frac{2}{6}$ .

1. Compare as *probabilidades experimentais* que você obteve na parte B com as *probabilidades teóricas* que obteve na parte D. As probabilidades experimentais e as probabilidades teóricas para



cada cor de bloco estão próximas entre si? Você acha que elas devem estar próximas? Por que sim ou por que não?

2. a. Quando você extraiu um bloco do balde, cada *bloco* teve chance igualmente provável de ser escolhido? Explique.
- b. Quando você extraiu um bloco do balde, cada *cor* teve chance igualmente provável de ser escolhida? Explique.
3. Olhe novamente o quadro 'Pense sobre isso!' da página 30. Há vantagem em ser a primeira pessoa a extrair um bloco do balde? E de ser a última?
4. No programa de competição Gee Whiz Everyone Wins!, os participantes selecionam aleatoriamente um bloco contido no balde. O que você acha que *aleatório* significa?

### 5.2.5 Algumas Considerações

A amostra do projeto CMP aqui apresentada foi selecionada de modo a abranger atividades de investigação que potencializam o processo de ensino e aprendizagem sobre as concepções clássica e frequentista de probabilidade e a questão da aleatoriedade. Além dessas concepções, também são discutidas no projeto outras, como eventos, equiprobabilidade e probabilidade geométrica, que não são porém objeto desta pesquisa.

Outro aspecto a enfatizar e que podemos destacar no projeto CMP está relacionado à abordagem da significância dos termos utilizados no estudo de probabilidade, pois, segundo Lopes (2008b), é importante que os alunos entendam conceitos e palavras relacionados a chance, incerteza e aleatoriedade, os quais que aparecem em situações da vida diária e são com frequência enfocados pelos meios de comunicação. Outras ideias importantes contempladas nesse projeto incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos para estimar probabilidades e que, algumas vezes, nossas intuições são incorretas e podem nos levar a conclusões erradas quanto à probabilidade e a eventos de chance.

No capítulo seguinte mostraremos como três coleções aprovadas no PNLD 2014 desenvolvem o tema probabilidade, como são enfocadas as concepções clássica e frequentista e se é discutida a questão da aleatoriedade nos anos finais do Ensino Fundamental.

## 6 A ABORDAGEM DE PROBABILIDADE EM TRÊS COLEÇÕES APROVADAS NO PNLD 2014

*Não estamos preparados para lidar com o aleatório – e, por isso, não percebemos o quanto o acaso interfere em nossas vidas.*  
(MLODINOW, 2009)

Neste capítulo são apresentados os critérios que estabelecemos para a escolha de três coleções a partir dos resultados dos PNLDs 2014 e 2011. Nessas coleções analisamos como é tratado o conteúdo ‘probabilidade’ e focalizamos as categorias de análise de nossa pesquisa.

### 6.1 Critério para Escolha das Três Coleções

Para analisar o tema ‘probabilidade’ em livros didáticos brasileiros, consideramos a lista das coleções aprovadas no PNLD 2014 (Tabela 1) e dela selecionamos as três que haviam sido mais adotadas dentre as aprovadas no PNLD 2011 (Tabela 2). Dessa forma, constatamos que: 1ª, a 2ª, a 5ª, a 8ª e a 9ª colocadas no PNLD 2014 não constam na lista de distribuição do PNLD 2011, e que a 6ª e a 7ª colocadas na lista do PNLD 2014 foram menos distribuídas no PNLD 2011 do que a 10ª colocada.

Aplicando esse critério, consideramos em nossa análise as seguintes coleções aprovadas no PNLD 2014:

- *Projeto Teláris*, Luiz Roberto Dante (DANTE, 2012), editora Ática, que no PNLD 2011 foi inscrita com o nome *Tudo é matemática*;
- *Matemática: Bianchini*, Edwaldo Bianchini (BIANCHINI, 2011), editora Moderna, que no PNLD 2011 foi inscrita com o nome *Matemática*;
- *Matemática: Imenes e Lellis*, Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis (IMENES; LELLIS, 2012), editora Moderna, inscrita com o mesmo nome no PNLD 2011.

Nesta análise, comparamos a sequência dos conteúdos no sumário e, aleatoriamente, algumas atividades de cada coleção, da versão do PNLD 2014, com

a respectiva do PNLD 2011 e constatamos que se trata das mesmas obras, embora reeditadas.

Em 2011 foram distribuídos 3 654 934 exemplares dessas coleções (Tabela 2), perfazendo cerca de 27% do total das coleções de matemática a serem usadas pelos alunos no triênio 2011-2013 em todo o Brasil. Em 2014, 3 890 784 exemplares das coleções dos mesmos autores do programa anterior (Tabela 1) foram distribuídos, correspondendo a cerca de 30% do total das coleções de matemática escolhidas pelos professores das escolas públicas e adquiridas pelo MEC.

Nossa premissa foi a de que são obras com maior tempo contínuo de adoção e maior utilização em sala de aula, o que nos permitiria, considerando o âmbito desta pesquisa, desvelar as concepções de probabilidade expressas nas atividades de livros didáticos nacionais do Ensino Fundamental aprovados nessas avaliações, comparar e perceber se tais coleções contemplam as sugestões dos PCN, verificar se acatam os comentários e sugestões dos avaliadores do PNLD 2011 para aperfeiçoamento na produção de 2014 e se incorporam modificações didáticas e pedagógicas propostas pelos pesquisadores de educação estatística.

As Tabelas 1 e 2 identificam essas obras.

Tabela 1 – Livros didáticos de matemática para os anos finais do Ensino Fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático 2014 (PNLD 2014).

<b>Coleção – Editora</b>	<b>Exemplares distribuídos</b>
1. <i>Praticando matemática</i> – Brasil	2831411
2. <i>Vontade de saber matemática</i> – FTD	2694730
3. <i>Projeto Teláris (ex-Tudo é matemática – Dante)</i> – Ática	2274623
4. <i>Matemática: Bianchini</i> – Moderna	1345301
5. <i>Projeto Araribá</i> – Moderna	1091645
6. <i>Matemática: teoria e contexto (ex-Medida certa)</i> – Saraiva	1026549
7. <i>Matemática: ideias e desafios</i> – Saraiva	468034
8. <i>Projeto Velear</i> – Scipione	324709
9. <i>Descobrimos e aplicamos matemática</i> – Dimensão	319998
10. <i>Matemática: Imenes e Lellis</i> – Moderna	270860
<b>Total</b>	<b>12 647 860</b>

Fonte: FNDE (s.d.). Disponível em: <<http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos>>. Acesso em: 10 nov. 2013.

Tabela 2 – Livros didáticos de matemática para os anos finais do Ensino Fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático 2011 (PNLD 2011).

Coleção – Editora	Exemplares distribuídos
1. <i>A conquista da matemática</i> – FTD	5 133 465
2. <i>Matemática e realidade</i> – Saraiva	2 104 713
3. <i>Matemática</i> (Bianchini) – Moderna	1 505 432
4. <i>Tudo é matemática</i> (Dante) – Ática	1 424 266
5. <i>Projeto Radix</i> – Scipione	1 377 963
6. <i>Matemática: Imenes e Lellis</i> – Moderna	725 236
7. <i>Vontade de saber matemática</i> – FTD	732 787
8. <i>Matemática: ideias e desafios</i> – Saraiva	440 494
9. <i>Matemática na medida certa</i> – Scipione	322 448
10. <i>Aplicando a matemática</i> – Casa Publicadora	68 909
Total	13 835 713

Disponível em: <<http://www.fn-de.gov.br/programas/livro-didatico>>. Acesso em: 10 set. 2010.

## 6.2 Projeto Teláris – Dante – Ática

### 6.2.1 Comentários dos Avaliadores nos PNLDs

Na análise dos avaliadores do PNLD 2014 são identificados os seguintes aspectos em relação ao campo ‘Estatística e probabilidade’:

Dados estatísticos são explorados em atividades que envolvem leitura e construção de gráficos e de tabelas em uma seção intitulada *Tratamento da Informação*, encontrada ao final de todos os capítulos dos quatro volumes. A apresentação dos conceitos relativos a pesquisa e cálculos de medidas estatísticas tem início no livro do 7º ano, com aprofundamento ao longo dos anos seguintes. No entanto, **conceitos fundamentais, como possibilidade e probabilidade são pouco presentes na obra**<sup>5</sup>. Também, o breve tratamento dedicado ao conceito de probabilidade condicional – cuja introdução, aliás, pode ser considerada precoce para essa fase do ensino – não é bem conduzida. Além disso, nos glossários dos volumes 6º e 7º, conceitos relativos a estatística e a probabilidade são apresentados de modo inadequado. (BRASIL, 2013, p. 78)

Quanto à metodologia de ensino e aprendizagem, consideram que:

Na maioria das vezes, a sistematização é apressada, com ênfase na nomenclatura e em procedimentos, e o **estudante não é incentivado, com a frequência desejável, a problematizar, a conjecturar, e a participar**

<sup>5</sup> Grifo nosso.

**mais ativamente do processo de aquisição do conhecimento**<sup>6</sup>. (BRASIL, 2013, p. 79)

No PNLD 2011 destacamos a análise do campo ‘Tratamento da informação’.

Nos três primeiros volumes, há boa articulação entre os conteúdos deste campo e os dos demais. Por exemplo, os gráficos de barra trazem medidas negativas, após a introdução dos números inteiros. O último capítulo do 9º ano é dedicado à construção da pesquisa estatística, com a definição das variáveis, amostras, e também focaliza coleta e organização dos dados. Além disso, é dada atenção às frequências absoluta e relativa, à construção de diferentes tipos gráficos e às medidas de tendência central, entre outros conceitos. **Os temas de combinatória são pouco explorados ao longo da coleção. Já a probabilidade recebe maior atenção**<sup>7</sup>. (BRASIL, 2010, p. 87)

Quanto à metodologia de ensino e aprendizagem, expõem que:

A obra retoma os vários conceitos trabalhados anteriormente na coleção e busca levar o aluno a refletir sobre os conhecimentos já construídos. A metodologia de resolução de problemas é valorizada. **No entanto, nem sempre são dadas oportunidades ao aluno para experimentar, refletir, conjecturar e fazer inferências**<sup>8</sup>, pois os conceitos, definições e procedimentos são apresentados precocemente. (BRASIL, 2010, p. 87)

Comparando essas análises, notamos que ambas concordam que há pouca solicitação de participação do estudante nos processos de investigação do conhecimento. No entanto, percebemos critérios não convergentes em relação ao volume de conteúdos, pois, na avaliação do PNLD 2014, “conceitos fundamentais, como possibilidade e probabilidade são pouco presentes na obra”, enquanto na do PNLD 2011 “a probabilidade recebe maior atenção” do que a combinatória. Não fica claro o que significa “pouco” na concepção dos avaliadores do PNLD 2014 e “maior” para os do PNLD 2011, já que há 33 páginas sobre probabilidade no 9º ano da edição de 2011 e 36 páginas na de 2014, como mostram seus respectivos sumários:

---

<sup>6</sup> Grifo nosso.

<sup>7</sup> Grifo nosso.

<sup>8</sup> Grifo nosso.

<b>capítulo 10</b>	<b>Noções de Estatística e Probabilidade</b>
1. Introdução .....	253
2. Pesquisa estatística e termos relacionados a ela .....	254
População e amostra .....	254
Indivíduo ou objeto da pesquisa .....	255
Variável e valor da variável .....	255
Tipos de variável .....	256
3. Frequência absoluta e frequência relativa de uma variável .....	258
Tabela de frequências por intervalos .....	260
4. Gráficos .....	262
Gráfico de segmentos ou gráfico de linhas .....	262
Gráfico de barras .....	266
Gráfico de setores .....	268
Histograma .....	271
Pictogramas ou gráficos pictóricos .....	273
5. Medidas de tendência central: média, moda e mediana .....	275
Média aritmética .....	275
Média aritmética ponderada .....	276
Moda .....	277
Mediana .....	279
6. Noções de Probabilidade .....	282
Probabilidade: a medida da chance de um evento acontecer .....	282
7. Outras atividades envolvendo Estatística e Probabilidade .....	285
Revisão cumulativa .....	289
Para ler, pensar e divertir-se .....	291

Sumário – 9º ano – PNLD 2011

<b>Grandezas e medidas e Estatística</b>
<b>Capítulo 9 • Estatística, Combinatória e Probabilidade, 268</b>
1. Introdução, 268
2. Estatística, 269
Pesquisa estatística e termos relacionados a ela, 269
Frequência absoluta e frequência relativa de uma variável, 270
Gráficos, 273
3. Combinatória: métodos de contagem, 284
Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem, 284
Outros problemas de contagem, 287
4. Probabilidade, 291
Probabilidade condicional, 292
Distribuição probabilística, 293
5. Estatística e Probabilidade, 294
Estimando probabilidades a partir de dados estatísticos, 296
Tratamento da informação, 298
Outros contextos, 299
Revisão cumulativa, 301

Sumário – 9º ano – PNLD 2014

A avaliação do PNLD 2014 aponta que nos glossários do 6º e 7º anos há inadequações de abordagem nos conceitos relativos a estatística e probabilidade, mas não especifica quais são elas. No entanto, como se pode observar nas reproduções a seguir, os conceitos são os mesmos da edição de 2011:

Glossário – 6º ano – PNLD 2011	Glossário – 6º ano – PNLD 2014
<p><b>ESTATÍSTICA</b></p> <p>Parte da Matemática em que se estudam a coleta, organização, apresentação e interpretação de informações numéricas (dados numéricos) em tabelas e gráficos.</p> <p><b>ESTIMATIVA</b></p> <p>Avaliação de uma medida ou de um resultado. Por meio de uma estimativa obtemos um resultado aproximado. Estima-se que o resultado de R\$ 49,75 mais R\$ 28,90 seja aproximadamente igual a R\$ 80,00 (50 + 30).</p>	<p><b>Estatística.</b> Parte da Matemática em que se estudam a coleta, organização, apresentação e interpretação de informações numéricas (dados numéricos) em tabelas e gráficos.</p> <p><b>Estimativa.</b> Avaliação de uma medida ou de um resultado. Por meio de uma estimativa, obtemos um resultado aproximado.</p> <p>Estima-se que o resultado de R\$ 49,75 mais R\$ 28,90 seja aproximadamente igual a R\$ 80,00 (50 + 30).</p>
<p><b>PROBABILIDADE</b></p> <p>Medida da possibilidade de uma situação ocorrer. Num saco há 2 bolas vermelhas e 3 azuis. O total de bolas é 5. Ao retirar uma bola ao acaso, a probabilidade de a bola ser azul é de 3 em 5, ou seja, <math>\frac{3}{5}</math>.</p>	<p><b>Probabilidade.</b> Ver <i>possibilidade</i>.</p> <p>Medida da possibilidade de uma situação ocorrer.</p> <p>Imagine que num saco há 2 bolas vermelhas e 3 azuis. Ao retirar uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser azul é de 3 em 5 ou <math>\frac{3}{5}</math> ou 60%.</p>
<p><b>POSSIBILIDADE</b></p> <p>Ver <i>probabilidade</i>.</p> <p>Resultado que pode ocorrer em uma dada situação. No lançamento de uma moeda há duas possibilidades de ocorrência: cara ou coroa.</p>	<p><b>Possibilidade.</b></p> <p>Cada resultado que pode ocorrer em uma dada situação.</p> <p>No lançamento de uma moeda, há duas possibilidades de resultado: cara ou coroa.</p>
<p><b>GRÁFICO</b></p> <p>Forma de representar informações.</p> <div><p>Gráfico de colunas</p><p>Gráfico de setores</p><p>Gráfico de colunas</p><p>Gráfico de setores</p><p>Bovinos</p><p>Rio de Janeiro</p><p>São Paulo</p></div>	<p><b>Gráfico.</b> Forma de representar informações.</p> <div><p>Gráfico de colunas</p><p>Gráfico de setores</p><p>Bovinos</p><p>Rio de Janeiro</p><p>São Paulo</p></div>

Chama atenção o fato de não haver convergência entre as equipes de avaliadores dos PNLDs quanto à precisão de abordagem dos conceitos sobre probabilidade. O que percebemos é que não há um acompanhamento das edições das coleções e das avaliações, o que permitiria constatar se os autores aprimoraram as coleções, se corrigiram o que não estava adequado ou se introduziram novas falhas a cada nova avaliação.

### **6.2.2 Atividades Propostas na Versão Avaliada no PNLD 2014**

Procedemos a um levantamento de conceitos e atividades sobre estatística e probabilidade, nos quatro volumes da coleção avaliada no PNLD 2014. Consideramos todas as páginas em que continham conceitos e/ou atividades sobre estatística (gráficos, tabelas, pesquisa), contagem e probabilidade (chance, possibilidade, aleatoriedade), como também quando é usado esse conhecimento em outros blocos de conteúdos. A relação completa se encontra no Anexo C.

O *Projeto Teláris* compõe-se de 1 248 páginas, 233 das quais (aproximadamente 18,6%), são dedicadas ao estudo do bloco de conteúdos 'Estatística e probabilidade', assim distribuídas: 16% sobre estatística e 2,6% sobre probabilidade que correspondem a 33 páginas. Classificamos as atividades apresentadas nas seções da coleção quanto à concepção de probabilidade – clássica ou frequentista, ou se o enfoque tinha outro propósito, como especificado a seguir:



Quantidade	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	Total
Páginas sobre probabilidade	2	11	12	8	33
Seção: Tratamento da informação	0	2 – clássica	1 – clássica	1 – clássica	4
Exemplos	3 – clássica	3 – clássica	1 – aleatório 1 – evento 2 – clássica	3 – clássica 1 – frequentista	14
Exercício	0	0	1 – aleatório 2 – evento 1 – clássica	0	4
Exercícios e Problemas	1 – clássica	16 – clássica 2 – frequentista	11 – clássica	14 – clássica	44
Problemas	0	0	0	2 – frequentista	2
Outros contextos	0	0	2 – clássica	2 clássica	4
Oficina de Matemática	0	1 – frequentista	1 – frequentista	0	2
Revisão cumulativa (teste)	0	3 – clássica 2 – frequentista	3 – clássica	2 – clássica	10
<b>Total de atividades</b>	4	29	26	25	84

Resumo do enfoque das atividades:

Conceito envolvido na atividade	Quantidade de atividades na coleção
Clássica	70
Frequentista	9
Aleatório	2
Evento	3
Total	84

A seguir, comentaremos algumas dessas páginas que contêm desenvolvimento teórico e atividades, para verificar a concepção de probabilidade desenvolvida pelo autor nos quatro anos finais do Ensino Fundamental, com base em nossas categorias de pesquisa apresentadas em capítulos anteriores.

No volume do 6º ano, encontramos abordagem sobre probabilidade nas páginas 157 e 282 (glossário: probabilidade).

O item *Fração como comparação de dois números naturais* inicia-se e conclui-se na página 157, com a apresentação de dois exemplos e um exercício:

O senhor João vende balões. Ele tem 7 balões; 3 deles são vermelhos. Podemos também dizer que 3 em 7 dos balões do senhor João são vermelhos. Ou seja, três sétimos dos balões são vermelhos.

$$\frac{3}{7}$$

← número de balões vermelhos  
← número total de balões

A fração  $\frac{3}{7}$  expressa uma comparação dos números naturais e 3 e 7

Veja outros dois exemplos:

1º) Quando lançarmos uma moeda, há duas possibilidades de resultado:

Pode sair cara: [foto da moeda]      pode sair coroa: [foto da moeda]

Por isso, dizemos que a chance ou a probabilidade de sair cara é  $\frac{1}{2}$  (1 em 2).

2º) Quando lançamos um dado, há seis possibilidades quanto à face que ficará voltada para cima: [seis fotos de dado exibindo a face superior]

A probabilidade de sair o número 5 é de 1 em 6, ou seja,  $\frac{1}{6}$ .

A probabilidade de sair um número ímpar é de 3 em 6 ou  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

### Exercícios e problemas

**12.** Atividade em dupla. Responda em seu colega e troque ideias com um colega:

- Quantas faces tem um dado?
- No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de sair a face 4?
- Qual é a probabilidade de sair uma face com número par de pontos?
- Qual é a probabilidade de sair uma face com número de pontos maior do que 1?

Esse item faz parte do capítulo *Frações e porcentagem*, e por isso seu foco é de fração associada a razão. O conceito de probabilidade é abordado informalmente, não explicitando os conceitos de aleatoriedade e equiprobabilidade. Dessa forma, pode estar começando a sedimentar-se a ideia de que a probabilidade é sempre equiprovável. O *Manual do professor* expõe que o assunto faz parte de uma “alfabetização matemática” e que nesse ano escolar tem início o trabalho com probabilidade. Orienta o professor a construir uma roleta e a dispor de caixas e bolas coloridas, cartões, moedas e outros materiais, mas não há no livro do aluno questões que utilizem esses materiais. O manual tampouco propõe uma sequência de atividades para utilização desse material.

No 7º ano, o capítulo *Noções de Estatística e Probabilidade* contém o item *Probabilidade: a medida da chance de um evento acontecer*, no qual apresenta informalmente o conceito de probabilidade. Há uma ilustração em que a professora diz: “É possível medir a chance de algo acontecer. Essa medida é chamada probabilidade e é dada por uma razão entre dois números”. Em seguida, um quadro expõe a definição de probabilidade:

$$\text{probabilidade de um evento} = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Depois, em quatro exercícios, o livro pede aos alunos que conversem sobre o significado de evento e sugere que procurem esse termo no dicionário. Se o aluno consultar, por exemplo, o *Dicionário escolar da língua brasileira*, da Academia Brasileira de Letras, de 2008, o verbete indica que evento depende do acaso. No entanto, não é comentado no livro o significado de acaso, o qual será usado no enunciado do sétimo exercício da lista (o de número 27):

- 27.** Em um estojo, há 6 canetas azuis e 4 vermelhas. Qual a probabilidade de retirarmos desse estojo ao acaso
- a) uma caneta azul?
  - b) uma caneta vermelha?
- 28.** No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de que o resultado seja um número:
- a) par?
  - b) primo?
  - c) menor do que 3?
  - d) menor do que 1?
  - e) menor do que 7?

Até esse ponto, o enfoque da noção de probabilidade é o clássico (laplaciano), mas a seguir são propostas duas atividades de investigação (29 e 30) em que é iniciada a abordagem frequentista de probabilidade. São elas:

#### **29. Atividade em equipe**

Vamos comparar a porcentagem do item c da atividade anterior com o resultado prático de um experimento. Para isso, três equipes devem ser formadas na classe.

- a) Uma equipe lança um dado 10 vezes, anota os números obtidos e calcula a porcentagem dos que são menores do que 3.
- b) Outra equipe faz o mesmo, mas lançando o dado 20 vezes.

- c) A terceira equipe também repete o procedimento, mas lançando o dado 40 vezes.
- d) No final, verifique qual das três equipes chegou a um valor mais próximo da probabilidade do item c da atividade anterior.

### 30. Atividade em dupla

Consiga dois dados e jogue com um colega o jogo “soma 7”. Vence o primeiro que obtiver 5 vezes “soma 7”.

Não há orientação, seja na lateral do livro ou no manual, para que o professor explore essas atividades, pois a perspectiva frequentista de probabilidade não foi trabalhada na coleção até esse momento.

A seguir, constam mais quatro exercícios, em dois dos quais é explorada a probabilidade na roleta, uma situação com espaço amostral equiprovável e outra não. A seguir, reproduzimos o exercício 31:

### 31. Observe as roletas abaixo e responda:

[roleta A dividida igualmente em três setores coloridos em azul, rosa e amarelo]

[roleta B dividida igualmente em seis setores sendo três azuis, dois amarelos e um verde]

- Qual é a probabilidade de a seta parar sobre a cor azul na roleta A?
- Qual é a probabilidade de a seta parar sobre a cor azul na roleta B?
- Em qual das duas roletas há maior chance de a seta parar sobre a cor azul?
- Qual é a probabilidade de a seta não parar sobre a cor verde na roleta B?

Não é dada atenção devida ao fato de que na roleta B há mais chance de se obter a cor azul do que a verde ou a amarela – ou seja, de que o espaço amostral não é equiprovável.

Na página 272, há na seção *Oficina de matemática* uma atividade denominada *Fazendo a gente aprende – experimentos com probabilidade*, que apresenta um pouco mais a noção de probabilidade frequentista.

### Oficina de Matemática - Fazendo a gente aprende

#### Experimentos com probabilidade

De acordo com a definição teórica de probabilidade, quando você lança uma moeda, a probabilidade de sair cara é  $\frac{1}{2}$  ou 0,5. Assim, seria possível pensar que, se a lançarmos 20 vezes, vai sair cara 10

vezes, pois  $20 \times 0,5 = 10$ . Mas, quando se realiza um experimento para testar essa hipótese, isso pode não ocorrer.

1. Suponha que uma moeda vai ser lançada 20 vezes. Quantas vezes você espera que saia cara? E coroa?

2. Agora, pegue uma moeda e reúna-se com seus colegas. Lancem essa moeda 20 vezes e registrem os resultados em uma tabela. Em seguida, escrevam o total de vezes que cada face apareceu. O resultado é igual ao que você deu na questão 1?

3. Lancem a moeda 100 vezes e registrem os resultados. O número de vezes que saiu cara está mais próximo da metade do total de lançamentos do que na questão 2?

4. Suponha que vocês vão lançar a moeda 1 000 vezes.

a) Vocês esperam que saia cara 500 vezes? Expliquem sua resposta.

Resposta pessoal: À medida que aumentamos o número de lançamentos, a tendência é que o número de vezes que aparece uma face vá se aproximando mais da metade do total de lançamentos.

b) Se sair cara 1 000 vezes, o que se pode dizer a respeito dessa moeda?

Resposta pessoal: O aluno pode dizer que a moeda é defeituosa, “é viciada”, não tem as características de uma moeda comum etc.

Sob a perspectiva de experimento, que entendemos ser investigativo, as questões estão direcionando às respostas. Poderiam ser abertas, para conduzirem a um trabalho de investigação e descobertas. Seria oportuno que houvesse uma orientação ao professor para desenvolver e explorar ao máximo esse experimento a fim de que a classe chegue à conclusão de que quanto mais lançamentos houver, mais próximo de  $\frac{1}{2}$  será a probabilidade de se obter cara.

Novamente, o *Manual do professor* do 7º ano informa que no 6º ano iniciou-se um trabalho informal com probabilidade e que agora é apresentada uma primeira sistematização da noção de probabilidade, definindo-a como a razão  $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$ . No final, indica ao professor a leitura de artigos da *Revista do Professor de Matemática* sobre eventos independentes, princípio da casa dos pombos, intuição de probabilidade e outros temas. No entanto, nessa relação de artigos não se notam textos sobre a concepção de probabilidade frequentista.

No 8º ano, o capítulo 9, sobre *Estatística e Probabilidade*, apresenta no item 3, *Probabilidade* (p. 274), uma situação-problema sobre lançamento de dado, para em seguida definir os conceitos de experimento aleatório, espaço amostral e evento:

*Experimento aleatório é aquele que, se for repetido diversas vezes, sob condições idênticas, produz resultados imprevisíveis, entre uma gama de possibilidades.*

*Chamamos de espaço amostral o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.*

*Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de evento.*

Seguem-se três exercícios que exploram esses conceitos:

**18.** Determine o espaço amostral de cada um dos seguintes experimentos aleatórios:

- a) Lançamento de uma moeda;
- b) Sorteio de um número par maior do que zero e menor do que 10;

[...]

**19.** Descreva os eventos abaixo considerando o lançamento de um dado de 6 faces:

- a) Obter um número par;
- b) Obter um número ímpar;

[...]

**20.** Agora, descreva os eventos a seguir considerando o sorteio de um número natural de 1 a 10:

- a) Sair um número par;
- b) Sair um número ímpar;

[...]

Subsequentemente (p. 276), define-se novamente probabilidade, porém ainda não se comenta que a definição clássica, ou de Laplace, é incompleta devido à noção de equiprobabilidade e de espaço finito e seu caráter circular.

Assim, a probabilidade de ocorrer um evento A pode ser indicada por  $P(A)$  (lê-se “P de A”). Esse valor corresponde à razão entre o número de resultados favoráveis (ou seja, o número de elementos do evento, representado por  $n(A)$ , que se lê “n de A”) e o número de resultados possíveis (ou seja, o número de elementos do espaço amostral).

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Seguem-se 14 exercícios sobre probabilidade clássica, porém sem se utilizarem os termos ‘experimento aleatório’, ‘espaço amostral’ e ‘evento’, anteriormente definidos.

Os dois exercícios abaixo poderiam ser desenvolvidos um pouco mais para explorar os eventos não equiprováveis.

- 21.** Cinco bolas numeradas de 1 a 5 são colocadas em uma urna, e uma bola é sorteada. Determine a probabilidade de sair uma bola com um número:
- a) par;
  - b) ímpar;
  - c) primo;
  - d) menos do que 5;
  - e) maior do que 4.
- [...]
- 23.** Uma caixa contém quatro papezinhos amarelos numerados de 1 a 4, e seis papezinhos pretos numerados de 5 a 10. Retirando-se ao acaso um dos papezinhos, determine a probabilidade:
- a) de sair um papelzinho amarelo;
  - b) de sair um papelzinho com números par;
  - c) de sair um papelzinho amarelo com número par.

A essa sequência de exercícios segue-se a seção *Oficina de Matemática – Fazendo a gente aprende*, que focaliza uma investigação sobre o conhecido jogo do par ou ímpar e questiona se quem pede par tem mais chance de ganhar. Depois de 10 rodadas pede aos alunos que troquem ideias a respeito. Novamente, seria possível chamar atenção para o conceito de evento equiprovável e até conduzir com mais etapas, de modo a avançar no enfoque frequentista. Chama atenção o fato de que a probabilidade frequentista só é abordada em uma Oficina de Matemática no 8º ano.

O *Manual do professor* menciona o trabalho com probabilidade iniciado no 6º ano e apresenta um texto sobre a origem dos jogos, sem citação de fonte, e indica outros artigos da *Revista do Professor de Matemática*.

No 9º ano (p. 291), o capítulo *Estatística, Combinatória e Probabilidade*, que retoma a definição de probabilidade, inicia-se exemplificando com o lançamento de moeda e o giro de roleta com as cores amarela, azul, verde, vermelha e rosa, que

não têm a mesma chance de sair, mas perde-se novamente a oportunidade de explorar o conceito de não equiprovável.

Na página 292, o livro focaliza a *Probabilidade condicional* de maneira superficial, apresentando um único exemplo e dois exercícios. Um dos exercícios é o que segue:

**45.** Na classe em que Leandro estuda, 20% dos meninos e 30% das meninas usam óculos.

a) Faça uma tabela como esta em seu caderno e complete-a.

	Não usam óculos	Usam óculos	Total
Meninos			15
Meninas			
Total			35

b) Sorteando ao acaso um aluno que usa óculos, qual a probabilidade de que seja menino?

Na página seguinte, a distribuição probabilística é definida como a organização dos eventos em uma tabela, com sua frequência e probabilidades. Seguem-se cinco exercícios, entre os quais este:

**47.** Faça uma distribuição probabilística da soma de pontos obtidos no lançamento de dois dados, diferentes completando uma tabela como esta em seu caderno.

Soma	Frequência	Probabilidade
2	1	$\frac{1}{36}$
6	5	$\frac{5}{36}$
:	:	:

Nas páginas 294 e 295, há mais um item que informa haver “muitos fenômenos estudados pela Estatística e que são de natureza aleatória. Desse modo a Estatística e a probabilidade complementam-se”. Segue-se uma lista de oito exercícios. A impressão geral é a de que se busca fornecer o máximo de informação, embora sem reflexão sobre os porquês e os objetivos.



Na página seguinte, o item *Estimando probabilidades a partir de dados estatísticos* apresenta um exemplo sobre uma fábrica, indagando sobre a probabilidade de haver canetas defeituosas em meio a uma produção de um milhão. Parte-se da ideia de coletar aleatoriamente, durante 20 dias de trabalho, amostras da produção, a fim de se obter a probabilidade estimada.

A situação problema é pertinente, mas seria apropriado explorá-la mais, para incitar o aluno a encontrar uma solução, em vez de expô-la. Seguem-se apenas dois exercícios para se obter o cálculo de estimativas.

No manual tampouco há comentários que possam ajudar o professor no trabalho de investigação e de estimar a probabilidade a partir de dados estatísticos, em casos como esse, o que poderia ser uma boa maneira de proceder quando não se conhece a probabilidade real.

A coleção apresenta muitas informações e algumas boas situações de investigação para o estudo da probabilidade frequentista, mas não as explora o suficiente e nem orienta o professor como desenvolver esse conteúdo, nem explicita por que essa abordagem está sendo apresentada e nem quando é preciso fazer uso dela. Tampouco ressalta as atividades em que os elementos não são equiprováveis, e a ideia de aleatoriedade só é comentada em dois exercícios.

O que se destaca é a importância que o autor dá à “resolução de problemas”, cuja maioria nos parece consistir em exercícios sobre cálculo de razão, sem reflexão sobre as situações e o porquê de se estar utilizando um método e não outro. No manual do 9º ano (p. 47), o autor justifica essa perspectiva sobre a probabilidade quando cita que “por apresentar situações bastante variadas e por conter poucos padrões, entendemos que deva ser desenvolvida com o maior número possível de problemas”.

### **6.3 Matemática – Bianchini – Moderna**

#### **6.3.1 Comentários dos Avaliadores nos PNLDs**

Na resenha do PNLD 2014 desta obra, são identificados os seguintes aspectos relativos ao campo 'Estatística e probabilidade':

Os conteúdos desse campo são focalizados nos três primeiros volumes, nas seções *Trabalhando com a informação*, em poucas páginas ao final de alguns capítulos. Diferentemente disso, no livro do 9º ano, o campo é explorado em um único capítulo que, em certa medida, contribui para sistematizar os conteúdos estudados nos anos anteriores. Apesar de certa fragmentação nos três primeiros livros, o avanço gradual das discussões de um tratamento mais informal para um trabalho mais organizado contribui para que o estudante faça as conexões necessárias entre os conceitos do campo. Uma ressalva deve ser feita no estudo das medidas de tendência central, que são abordadas de forma rápida, sem muita discussão entre os cálculos e sua interpretação no contexto em que estão inseridos. (BRASIL, 2013, p. 35)

Quanto à metodologia de ensino e aprendizagem, expõe-se que:

Na metodologia adotada, inicia-se com explanações e exemplos que procuram sistematizar o conteúdo a estudar, seguindo-se a seção *Exercícios Propostos*. **Geralmente, são dadas poucas oportunidades para que o aluno elabore, de modo mais autônomo, os conceitos e procedimentos e os articule com outros já adquiridos**<sup>9</sup>. Além disso, os conhecimentos extraescolares dos alunos são pouco valorizados. (BRASIL, 2013, p. 35)

Do PNLD 2011, destacamos a análise dos avaliadores sobre o campo ‘Tratamento da informação’:

Seus conteúdos são focalizados nos três primeiros volumes, nas seções Para saber mais. No entanto, existe pouca conexão com os demais assuntos dos capítulos. No 9º ano, o campo é explorado apenas em um capítulo específico. Nota-se pouco cuidado com a apresentação dos gráficos estatísticos. A maior parte deles não traz o eixo vertical e nem sempre há proporção entre os comprimentos das colunas ou barras e os valores ali representados, o que pode prejudicar o entendimento do aluno. Além disso, não são discutidos critérios para a escolha do tipo de gráfico adequado às características da variável a ser representada. (BRASIL, 2010, p. 39)

Quanto à metodologia de ensino e aprendizagem, consta que:

A obra retoma os vários conceitos trabalhados anteriormente na coleção e **busca levar o aluno a refletir sobre os conhecimentos já construídos**. A metodologia de resolução de problemas é valorizada. No entanto, nem sempre são dadas oportunidades ao aluno para experimentar, refletir, conjecturar e fazer inferências, pois os conceitos, definições e procedimentos são apresentados precocemente. (BRASIL, 2010, p. 87)

O que se nota é que em nenhuma das resenhas há comentários sobre a abordagem de probabilidade, pois, como mostraremos a seguir, esta é superficial,

---

<sup>9</sup> Grifo nosso.

constando em apenas seis das 1 152 páginas da coleção, sem promover discussões sobre aleatoriedade, equiprobabilidade ou probabilidade frequentista.

Em relação à metodologia, a resenha do PNLD 2014 aponta que “são dadas poucas oportunidades para que o aluno elabore, [...] os conceitos e procedimentos e os articule com outros já adquiridos”, ao passo que a do PNLD 2011 informa que “a obra retoma os vários conceitos trabalhados anteriormente na coleção e busca levar o aluno a refletir sobre os conhecimentos já construídos.” – apreciações contrastivas que nos causam estranheza, por sugerir que a versão anterior já focalizasse esses conceitos.

Isso parece reforçar nossa premissa de que não há continuidade nas avaliações de um ano para outro, de modo a se apontar com precisão se os pontos falhos identificados na avaliação anterior foram sanados, se foi introduzida alguma nova falha etc.

### **6.3.2 Atividades Propostas na Versão Avaliada no PNLD 2014**

Procedemos a um levantamento dos conceitos e atividades sobre Estatística e Probabilidade nos quatro volumes da coleção avaliada no PNLD 2014 (Anexo D). Foram consideradas todas as páginas que continham conceitos e/ou atividades sobre estatística (gráficos, tabelas, pesquisa), contagem e probabilidade (chance, possibilidade, aleatoriedade), como também os momentos em que esse conhecimento é usado em outros blocos de conteúdos. A seguir, comentaremos alguns desses levantamentos, para verificar a concepção de probabilidade desenvolvida pelo autor nos quatro anos finais do Ensino Fundamental, com base em nossas perspectivas apresentadas em capítulos anteriores.

A coleção *Matemática: Bianchini* se compõe de 1 152 páginas, 130 das quais (cerca de 11,2%) são dedicadas ao estudo do bloco de conteúdos ‘Estatística e probabilidade’, assim distribuídas: 10,5% sobre estatística e 0,5% sobre probabilidade que correspondem a 6 páginas. Classificamos também as atividades quanto à concepção de probabilidade – clássica ou frequentista, como exposto a seguir:

Quantidade	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	Total
Páginas sobre probabilidade	1	1	0	4	6
<i>Exemplos</i>	1 – clássica	0	0	2 – clássica	3
<i>Exercícios propostos</i>	0	0	0	5 – clássica	5
<i>Exercícios complementares</i>	0	0	0	3 – clássica	3
<i>Trabalhando a informação</i>	2 – clássica	2 – clássica	0	0	4
<b>Total de atividades</b>	3	2	0	10	15

Resumindo, temos apenas 15 atividades cujo enfoque da atividade é a probabilidade clássica.

No volume do 6º ano (p. 198), a seção *Trabalhando a informação* apresenta uma situação em que uma cartela de rifa tem 100 números, dos quais um será sorteado:

#### Calculando probabilidades

Para arrecadar dinheiro, uma instituição de caridade vai rifar um videogame. A cartela tem 100 números e somente um será sorteado. Carlos comprou 2 números dessa rifa e Fabiano, 3 números. Sabendo que todos os números têm a mesma **probabilidade** de serem sorteados, quem tem mais chance de ganhar o *videogame*: Carlos ou Fabiano?

Veja como podemos proceder para responder a essa questão:

Se a cartela da rifa tem 100 números, então há 100 **possibilidades** de um número ser sorteado.

**Probabilidade é a medida da chance de ocorrer um determinado resultado.**<sup>10</sup>

Desse modo, dizemos que a probabilidade de cada número ser sorteado é de 1 em 100, ou seja, de  $\frac{1}{100}$ . Assim, todos os números têm a mesma probabilidade de serem sorteados.

Como Carlos comprou dois números, a probabilidade de ele ser sorteado é de  $\frac{2}{100}$ , ou seja, 2%.

Como Fabiano comprou três números, a probabilidade de ele ser sorteado é de  $\frac{3}{100}$ , ou seja, 3%.

Desse modo, dizemos que Fabiano tem mais chances que Carlos de ganhar o *videogame*, uma vez que  $\frac{3}{100} > \frac{2}{100}$ .

<sup>10</sup> Grifo nosso.

A probabilidade geralmente é indicada por uma fração irredutível ou por um número na forma percentual.

Nessa atividade, define-se probabilidade de forma recorrente, pois probabilidade é o mesmo que chance. Também poderia ter sido ressaltado que todos os números têm a mesma chance de serem sorteados e que essa medida é dada por uma razão.

Após a seção *Trabalhando a informação*, seguem-se dois problemas, um dos quais é bastante semelhante ao da situação-problema, ao passo que o outro requeria mais explanação:

**Agora quem trabalha é você!**

1. A professora de Hugo vai sortear um aluno entre os 20 da classe para fazer a apresentação de um trabalho. Qual é a probabilidade de Hugo ser sorteado, sabendo que todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados? (Resposta:  $1/20 = 5\%$ )
2. Em uma caixa há três bolas brancas e duas bolas verdes. Qual é a probabilidade de tiramos, sem olhar, uma bola verde dessa caixa? (Resposta:  $2/5 = 40\%$ )

No segundo exercício poderia ser destacado que as bolas verdes e brancas não têm a mesma chance de saírem – cuidado este tomado no primeiro exercício, ao se informar que “todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados”.

O *Manual do professor* (p. 49) tampouco amplia a discussão sobre a ideia de aleatoriedade e a de equiprobabilidade, comentando apenas o que transcrevemos a seguir, que nos pareceu exíguo se comparado com o que se tem hoje em pesquisas sobre o tema.

Quanto ao “Trabalhando a informação” da página **198**, lembramos que o ensino de probabilidade ficou, por muito tempo, restrito ao Ensino Médio. Estudos atuais na área de Educação Matemática, porém, possibilitaram trazer esse conhecimento para o Ensino Fundamental, cuidando sempre para que a abordagem seja integrada ao corpo de estudo e significativa ao aluno dessa faixa etária. No segundo exercício do “Agora é com você”, o professor poderá avaliar a compreensão dos alunos em relação ao tema pedindo que, antes de realizarem o cálculo, respondam:

- Essa probabilidade está mais próxima de qual das seguintes porcentagens: 30%, 40%, 50% ou 60%?

Espera-se que excluam as porcentagens 50% e 60%, pois é possível, pelo enunciado, que menos da metade do total das bolinhas é verde.

No 7º ano (p. 151), a seção *Trabalhando a informação* apresenta uma situação-problema em que se perde a oportunidade de levar o aluno a investigar, questionar, refletir:

#### **Possibilidades e probabilidades**

Hugo está jogando trilha com sua irmã. Para andar o número de casas necessárias e vencer o jogo na próxima rodada, ele precisa de uma soma de pelo menos 10 pontos ao lançar dois dados. Qual é a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada?

Para calcular a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada, devemos inicialmente descobrir todas as possibilidades de soma de números que ele pode tirar nos dados.

Ao lançar dois dados, Hugo pode tirar os seguintes pares de números:

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	<b>(6, 4)</b>
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	<b>(5, 5)</b>	<b>(6, 5)</b>
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	<b>(4, 6)</b>	<b>(5, 6)</b>	<b>(6, 6)</b>

Observe que há 36 pares diferentes de números, mas nem todos têm soma igual a 10 ou maior. Por isso, circulamos os pares de números que satisfazem essa condição. Então, entre as 36 possibilidades, há somente 6 pares cuja soma de números é igual a 10 ou maior.

Como há 6 possibilidades em 36 de Hugo obter uma soma igual a 10 ou maior, dizemos que a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada é:

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

A seguir propõem-se exercícios, considerando-se a situação-problema anterior:

#### **Agora quem trabalha é você!**

Considerando o problema de Hugo, responda às questões a seguir em seu caderno.

1. Supondo que Hugo precise obter nos dados uma soma igual a 8 ou maior, a probabilidade de ele ganhar o jogo aumenta? Justifique sua resposta.
2. Se a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada fosse de 100%, quantas casas ele precisaria andar?

O *Manual do professor* tampouco traz discussões sobre o tema, contemplando aspectos menos relevantes para o estudo da probabilidade:

A seção “Para saber mais”, [sic] “Trabalhando a informação” da página **151** permite aos alunos desenvolver diversas habilidades, como:

- Organizar os resultados registrando-os na forma de pares ordenados.
- Interpretar os resultados obtidos em termos de jogadas possíveis.
- Utilizar a notação de números racionais na forma de fração para representar uma probabilidade.

Aproveite a atividade dessa seção para levantar outras questões.

- Se Hugo tirou o número 5 no lançamento do primeiro dado, qual é a probabilidade de que ele vença a partida? ( $2/6$  ou  $1/3$ , pois os números cuja soma perfazem pelo menos 10 são 5 e 6)
- Se Hugo tirou o número 3 no lançamento do primeiro dado, qual é probabilidade de ele vencer a partida nesta rodada? (Zero, pois ele precisaria tirar 7 para somar 10, e 7 não é um número possível.)

O livro do 8º ano não aborda o conteúdo ‘probabilidade’, e por isso passaremos ao capítulo 3 do 9º ano, que na página 102 apresenta a *Situação 1*, que retoma a probabilidade como a medida da chance de um evento acontecer e comenta o que são incerteza, acaso, experiências aleatórias, espaço amostral e evento, apresentando também o cálculo por meio da razão “número de resultados favoráveis do evento/número de total de resultados possíveis”:

### Noções de probabilidade

Acompanhe as situações a seguir.

► *Situação 1*

Para arrecadar dinheiro para a formatura, um grupo de alunos resolveu rifar uma televisão. A rifa é composta de 100 nomes, e apenas um nome é o premiado. Qual é a probabilidade de Joana ganhar a TV se ela comprou 5 nomes dessa rifa?

Você já viu anteriormente que probabilidade é a medida da chance de um evento acontecer, nesse caso, a medida da chance de Joana ganhar a TV.

Essa situação lida com a **incerteza**, pois ao comprar um nome da rifa não é possível saber qual nome é o premiado. Esse tipo de experiência é o objeto da **Teoria das Probabilidades**.

A Teoria das Probabilidades lida com o estudo das leis que regem os fenômenos que dependem do acaso, ou seja, aqueles fenômenos cujos resultados não se podem prover. Nesse caso, interessam a essa teoria as experiências aleatórias, ou seja, aquelas cujo resultado seja imprevisível, mesmo se forem repetidas sob as mesmas condições.

São exemplos de experiências aleatórias:

- escolher um aluno ao acaso para saber qual o seu time preferido;
- lançar um dado e verificar a face superior;
- lançar duas moedas e verificar a face superior, cara ou coroa;
- retirar ao acaso uma carta do baralho;
- lançar dois dados e obter a soma dos pontos de suas faces superiores.

Retornemos ao problema de Joana. Os 100 nomes da rifa forma o espaço amostral dessa experiência aleatória.

O espaço amostral (S) de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

Os cinco nomes da rifa adquiridos por Joana forma um evento dessa experiência aleatória. De forma geral, um evento é tido subconjunto do espaço amostral.

Definidos o espaço amostral e o evento de um experimento aleatório, calculamos a probabilidade da ocorrência desse evento por meio da seguinte razão:

$$\text{Probabilidade de um evento} = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Pelo exposto, notamos que não há uma sequência didática dos conteúdos de forma que o aluno construa o conhecimento. É apresentada uma sistematização simplificada de conceitos que nem mesmo figuraram nos volumes dos anos anteriores.

Na *Situação 2*, imediatamente seguinte, solicita-se o cálculo da probabilidade do lançamento de dois dados, situação essa já resolvida no 7º ano. Na resolução, apresenta o espaço amostral e os casos favoráveis, não fazendo referência ao termo 'evento'. Isso pode dar a impressão de que apenas se introduziram nomes, mas que estes não são necessários para o estudo da probabilidade:



► Situação 2

Qual é a probabilidade de sair a soma 6 no lançamento de dois dados?

Antes de calcularmos a probabilidade, devemos definir o espaço amostral:

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	<b>(6, 4)</b>
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	<b>(5, 5)</b>	<b>(6, 5)</b>
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	<b>(4, 6)</b>	<b>(5, 6)</b>	<b>(6, 6)</b>

Observe que os casos favoráveis são:

(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1)

Desse modo, a probabilidade de sair soma 6 nas faces dos dados é dada pela razão:

$$\frac{5}{36} \cong 0,14 \text{ ou } 14\%$$

Em seguida, são propostos cinco exercícios, dois dos quais se assemelham às situações apresentadas anteriormente e os outros três não são equiprováveis, o que sequer é comentado pelo autor:

**Exercícios Propostos**

**35.** Em uma urna há 9 bolas pretas, 5 bolas amarelas e 3 bolas vermelhas. Em seu caderno responda: se retirarmos uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de sair uma bola amarela?

**36.** A professora irá sortear, ao acaso, um aluno entre os 30 alunos da sala. Sabendo que há 18 meninas na sala, qual é a probabilidade de ser sorteada uma menina? E de ser sorteado um menino?

**37.** Considerando lançamento de dois dados determine no caderno:

- a) a probabilidade de a soma das faces ser 8.
- b) a probabilidade de a soma das faces ser maior que 10.

**38.** Quantos alunos há na sua classe? Quantos são meninos? Calcule, em seu caderno, a probabilidade de que, ao sortear um aluno ao acaso, esse aluno seja um menino.

**Pense mais um pouco...**

Lucas inventou o seguinte jogo com dados: o desafiante lança dois dados, se em pelo menos um dos dados sair o número 1, Lucas ganha o jogo, Se em pelo menos um dos dados sair como menor

número 2 ou 3, o desafiante ganha o jogo. Quem tem maior probabilidade de vencer o jogo: Lucas ou seu desafiante?

Nas páginas 104 e 105 são apresentados na lista de exercícios complementares três exercícios, sendo que dois usam tabelas de distribuição de frequências para solicitar o cálculo de probabilidade e o terceiro utiliza cálculo de área para determinar a probabilidade. Não há, no entanto, qualquer comentário sobre essas situações, nem aqui, nem anteriormente, nem no manual do professor.

Pelo exposto, a coleção, apesar de propor exercícios que contemplem situações de não equiprobabilidade, não comenta essa perspectiva. Tampouco se observam atividades de elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades de um evento por meio de uma razão – ausência essa que contraria a sugestão dos PCN. Os exemplos citados de experiências aleatórias recaem exclusivamente sobre o uso de lançamento de moeda e dado e escolha de cartas de um baralho, ou seja, “jogos de azar”. Não se ampliam com experimentos de investigação para tratar da probabilidade frequentista.

No *Manual do professor*, chamam-nos atenção as sugestões de leitura dirigidas ao docente, que incluem artigos e dissertações, inclusive quanto ao bloco ‘Tratamento da informação’. Há, porém, de se notar que algumas indicações, inclusive de outros blocos, dizem respeito ao ciclo que se estende do 1º ano ao 5º. Na bibliografia consultada, no entanto, não há nenhuma fonte sobre estatística e probabilidade

## 6.4 **Matemática: Imenes e Lellis – Moderna**

### 6.4.1 **Comentários dos Avaliadores dos PNLDs**

Na análise dos avaliadores do PNLD 2014 são identificados os seguintes aspectos pertinentes ao campo ‘Estatística e probabilidade’:

No estudo das noções estatísticas é dada atenção a contextos sociais relevantes e a temas que contribuem para a formação da cidadania, o que é positivo. Apresentam-se boas explicações sobre pesquisa estatística e uma articulação adequada entre o cálculo de medidas estatísticas e o raciocínio estatístico. Os registros em tabelas, gráficos de colunas, de segmentos e de setores são bem explorados. Juntamente com dados estatísticos, **a probabilidade é utilizada em bons contextos para desenvolver os**

**conceitos de amostra, população e para fazer previsões**<sup>11</sup>. Discute-se adequadamente a utilidade das médias aritmética e ponderada por meio da comparação de desempenhos de grupos diferentes. (BRASIL, 2013, p. 50)

Quanto à metodologia de ensino e aprendizagem, aponta-se que:

Os conteúdos da obra são apresentados por meio de explicações teóricas, seguidas de exemplos, de algumas sistematizações e de atividades. A seção *Conversar para aprender* oferece a oportunidade de reflexão sobre os conteúdos, ao solicitar que o aluno argumente por escrito ou oralmente sobre determinado tema estudado. A sistematização feita no desenvolvimento dos conteúdos é adequada e, além disso, há um resumo da matéria estudada na seção *Para não esquecer*, ao final dos capítulos. Há ênfase na resolução de problemas, com **destaque para atividades de investigação, de experiências no mundo físico e de desafios intelectuais**<sup>12</sup>. As atividades de demonstração são, igualmente, bem conduzidas. O aluno é orientado a utilizar várias estratégias para resolver os problemas, além de ser incentivado a comparar resultados e a trabalhar em duplas ou em pequenos grupos. [...] O trabalho dos alunos em casa é incentivado e são propostas tarefas especificamente para esse fim. A obra contribui para a formação do cidadão ao estimular hábitos de estudo e ao destacar o papel da Matemática na vida em sociedade, no cotidiano e no mundo do trabalho. (BRASIL, 2013, p. 50)

Do PNLD 2011, destacamos a análise dos avaliadores sobre o campo 'Tratamento da informação'.

Desde o 6º ano, propõem-se atividades de verificação e contagem de possibilidades, construção e leitura de tabelas e gráficos. O cálculo **da probabilidade é abordado nos dois últimos volumes, bem articulado ao estudo de possibilidades**<sup>13</sup> realizado anteriormente. Apresentam-se muitas oportunidades para o aluno coletar e lidar com informações estatísticas, além de tomar decisões com base em dados. O conceito de amostra é mencionado no 6º ano e, a partir do 8º ano, discute-se adequadamente sua importância para tirar conclusões sobre determinada população. Com bastante frequência, o trabalho com dados é aproveitado para estimular debates sobre questões sociais relevantes. (BRASIL, 2010, p. 63)

Quanto à metodologia de ensino e aprendizagem:

Na obra, a exploração de textos matemáticos parte sempre de questões a serem discutidas oralmente, que são apresentadas na seção *Conversando sobre o texto*. Algumas vezes, o próprio aluno é solicitado, já nesse momento, a realizar formalizações parciais dos conceitos e procedimentos em estudo. Em seguida, há atividades propostas para serem feitas individualmente ou em grupo. A seção chamada *Ação* traz **principalmente investigações a serem realizadas em grupo**<sup>14</sup>. A coleção valoriza e

---

<sup>11</sup> Grifo nosso.

<sup>12</sup> Grifo nosso.

<sup>13</sup> Grifo nosso.

<sup>14</sup> Grifo nosso.

incentiva o uso de conhecimentos trabalhados anteriormente e de temas extraescolares.

O desenvolvimento de competências, tais como generalizar e visualizar é bastante estimulado. [...]

A contextualização dos conhecimentos é feita de maneira apropriada, com base nas práticas sociais atuais e na história da Matemática. Enfatizam-se ligações da Matemática com outras áreas, particularmente com as Artes. Há inúmeras oportunidades de discussão de questões importantes para a construção da cidadania e o manual do professor traz orientações que contribuem para seu bom aproveitamento em sala de aula. A abordagem adotada favorece a autonomia intelectual do aluno, por incentivar sistematicamente seu envolvimento na compreensão dos conceitos e procedimentos. (BRASIL, 2010, p. 63)

Comparando-se as resenhas notamos que elas são bem próximas, principalmente quanto à metodologia, porém na de 2014 fica claro que a coleção enfoca o uso de probabilidade para fazer previsões, enquanto na de 2011 este aspecto não foi citado, apesar da presença de alguns exemplos.

#### **6.4.2 Atividades Propostas na Versão Avaliada no PNLD 2014**

Procedemos a um levantamento dos conceitos e atividades sobre estatística e probabilidade, nos quatro volumes da coleção avaliada no PNLD 2014 (Anexo E), usando o mesmo princípio das outras duas coleções. A seguir, comentaremos alguns aspectos levantados, para verificar a concepção de probabilidade desenvolvida pelos autores para os quatro anos finais do Ensino Fundamental, com base em nossas perspectivas apresentadas em capítulos anteriores.

A coleção *Matemática: Imenes e Lellis* se compõe de 1 288 páginas, 280 das quais (cerca de 21,7%) são dedicadas ao estudo do bloco de conteúdos 'Estatística e probabilidade' (19,6% e 2,1%, respectivamente). Em termos absolutos, são 32 páginas dedicadas ao estudo da probabilidade, como segue:

Quantidade	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	Total
Páginas sobre probabilidade	0	9	14	9	32
Exemplos	0	3 – clássica	2 – clássica 2 – frequentista	3 – clássica	10
Problemas	0	2 – clássica – equiprobabilidade	5 – clássica 6 – frequentista	3 – clássica 3 – frequentista	19
Problemas para casa	0	3 – clássica	8 – clássica 4 – frequentista	4 – clássica 5 – frequentista	24
Ação (experimental)	0	1 – investigação simulação estatística – probabilidade frequentista	1 – clássica (sem equiprobabilidade) 1 – frequentista	1 – clássica 1 – frequentista	5
Testes	0	1 – clássica 1 – frequentista	3 – clássica	6 – clássica	11
<b>Total de atividades</b>	0	11	32	26	69

Resumo do enfoque das atividades:

Conceito envolvido na atividade	Quantidade de atividades na coleção
Clássica	42
Frequentista	24
Equiprobabilidade	3
Total	69

O volume do 6º ano não aborda o tema ‘probabilidade’, e por isso passaremos ao capítulo 13 do 7º ano (p. 281, item *Chance ou probabilidade*).

Como todos os outros itens, este se inicia com uma situação-problema contendo perguntas de personagens (homem, mulher grávida e médico), para introduzir a questão da probabilidade.

Homem: Qual é a minha chance de ganhar na Mega-Sena?

Mulher grávida: Será um menino ou uma menina?

Médico: Qual medicamento apresentará maior probabilidade de cura: A ou B?

Quem pode fornecer previsões confiáveis nesses casos? Um matemático? Um obstetra? Um cientista? Vamos ver o que a Matemática tem a dizer a respeito.

Inicialmente, analisam-se dois casos simples: lançamento de moeda e lançamento de dado. No caso da moeda simétrica, informa-se que a estatística

confirma que, “se lançarmos a moeda 100 vezes, em aproximadamente metade das vezes vamos obter cara”. Também no caso do dado, informa-se que a probabilidade de se obter resultado “6”, por exemplo, é  $1/6$ , ou 16,666...%, resultado esse confirmado estatisticamente.

Cabe aqui uma observação sobre o número de vezes que os autores citam para o lançamento da moeda. Essa quantidade de repetições deveria ser bem maior, pois nesse caso a probabilidade é o valor em que a frequência relativa se estabiliza após um número muito grande de ensaios. O erro relativo da estimativa dessa probabilidade vai-se tornando cada vez menor, à medida que o número de repetições do experimento aumenta.

No fim dessa abordagem é exposta a seguinte conclusão:

Os dois exemplos mostraram que, quando conhecemos o total de possibilidades de resultados em certa situação e sabemos que as chances de ocorrência desses resultados são iguais, podemos obter a **probabilidade** (ou **chance**) de um determinado resultado calculando a razão entre o número de **possibilidades desse resultado** e o número **total de possibilidades** naquela situação.

Ressaltamos que a obra apresenta a definição informando que a razão só é obtida se soubermos o total de possibilidades e se os resultados forem equiprováveis:

[...] quando conhecemos o total de possibilidades de resultados em certa situação e sabemos que as chances de ocorrência desses resultados são iguais, podemos obter a probabilidade (ou chance) de um determinado resultado calculando a razão entre o número de possibilidades desse resultado e o número total de possibilidades naquela situação.

Voltam-se a discutir as situações menos simples do início do capítulo:

Vamos tentar responder às perguntas do início deste texto.

- É um pouco complicado calcular a probabilidade de acertar a sena na Mega-Sena. Discutiremos isso em outros anos. Por enquanto, basta saber que essa probabilidade é 1 em 50 milhões, aproximadamente. Para avaliar esse número, saiba que é bem mais provável jogar um dado 9 vezes e obter 6 pontos em todas elas que ganhar na Mega-Sena.

- Para calcular a chance de nascer menino ou menina ou a probabilidade de cura de um medicamento, não podemos aplicar raciocínios semelhantes aos de lançamentos de uma moeda ou de um dado. Nessas situações, são necessárias pesquisas estatísticas.

No *Guia do professor*, os autores comentam que nem sempre é possível encontrar essa razão. Nesse caso, a probabilidade é estimada por meios estatísticos, ou seja, pela frequência com que o fato ocorre.

Após essa introdução apresentam a seção *Conversar para aprender*, em que propõem questões sobre o texto introdutório, para serem respondidas em sala pelos alunos. É o momento em que são verbalizadas as ideias matemáticas. Seguem-se então dois problemas e uma Ação-Investigação:

#### Problemas

**19.** Em uma classe, há 16 meninos e 18 meninas. Dois meninos são xarás, ambos se chamam Roberto. Há apenas três meninas que são loiras. Um menino e uma menina serão sorteados para representar a turma nos preparativos da festa junina.

- Qual é a probabilidade de um certo menino ser sorteado?
- Qual é a probabilidade de ser sorteado um Roberto?
- Qual é a probabilidade de ser sorteada uma menina loira?

**20.** Quando podemos determinar quantas são as possibilidades de uma situação ocorrer e sabemos que, para todas elas, as chances são iguais, é fácil determinar a probabilidade de ocorrência de uma ou de algumas dessas possibilidades. Observe os quatro cartões numerados:

**3**

**4**

**5**

**6**

Suponha que serão sorteados dois desses cartões – primeiro um, depois o outro – de maneira que forme um número de dois algarismos. As chances para a formação de todos os números possíveis são iguais.

- Quantos números diferentes podem ser formados nessa situação?
- Qual é a probabilidade de o número sorteado ser 34?
- Qual é a probabilidade de o número sorteado ser maior que 63?
- Qual é a probabilidade de o número sorteado ser maior que 65?

#### Ação – Investigação

##### Uma simulação estatística

Fazendo uma simulação com moedas, você vai pesquisar, estatisticamente, qual é a possibilidade mais frequente para um casal que tem dois filhos:

dois meninos

duas meninas

um menino e uma menina

### Simulação

- ✓ Pegue duas moedas.
- ✓ Vamos combinar que a face “cara” indicará o sexo feminino, e a face “coroa”, o masculino.
- ✓ Lance as duas moedas, juntas, 40 vezes e anote os resultados em uma tabela parecida com a da ilustração.

Sexo dos dois filhos de 40 casais		
Possibilidade	Frequência	Porcentagem
dois meninos		
duas meninas		
um menino e uma menina		

- ✓ Cada lançamento equivale a entrevistar um casal com dois filhos. Portanto, sua amostra corresponderá a 40 casais.

Ao preencher a tabela, você deve ter percebido um padrão. Compare o padrão que percebeu com o de seus colegas. Com base na comparação, verifique se o padrão se mantém e tire suas conclusões, que serão registradas em um relatório.

### Relatório

Para finalizar, faça um relatório explicando:

1. Qual questão foi estudada nesse experimento estatístico.
2. Como foi realizada a pesquisa para resolver a questão.
3. Qual a solução obtida.

Seguem-se a essa investigação três *Problemas para casa* e, na página 287, a seção *Para não esquecer*, que traz uma síntese dos conteúdos abordados no capítulo.

Notamos que os autores trazem uma abordagem adequada sobre probabilidade: comentam as condições para se usar a fórmula clássica e introduzem a ideia de probabilidade frequentista fazendo uso de investigações. Sentimos falta, porém, de ênfase na noção aleatoriedade.



No 8º ano, o capítulo 8 desenvolve-se da página 168 à 188. Inicia-se com o item *Possibilidades e probabilidades*, em que são retomadas situações envolvendo o modo de calcular a chance de um evento ocorrer quando as possibilidades têm todas a mesma chance, ou seja, calcular a razão entre o número de possibilidades de ocorrência do evento e o número total de possibilidades. Seguem-se a seção *Conversar para aprender*, cinco *Problemas* e, depois, sete *Problemas e exercícios para casa*.

A abordagem de probabilidade é clássica, e ainda não é dada ênfase à aleatoriedade.

O item seguinte, *Tirando conclusões com estatística*, traz a noção de probabilidade junto com dados estatísticos. Para verificar se uma moeda é viciada ou não, propõem-se sete lançamentos. Aqui também chamamos atenção para a quantidade de vezes em que o experimento é repetido, muito inferior a necessária para estimar a tendência de tal fato. Os autores concluem informando que:

Se obtivermos sete caras, é muito provável que a moeda seja viciada.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128} \approx 0,008 = 0,8\%$$

Ou seja, essa chance é menor do que 1%. Com base nesse cálculo, um estatístico teria quase certeza de que a moeda é viciada.

Depois apresentam outro exemplo, agora tratando de prever resultados de uma eleição a partir de uma amostra da população. Segue-se uma atividade de investigação, sucedida por 10 problemas e exercícios, quatro dos quais são para casa. Na seção *Para não esquecer* há um resumo da teoria apresentada sobre estatística, probabilidade de um acontecimento e pesquisas estatísticas. A seguir destacamos o resumo sobre probabilidade:

#### **Probabilidade de um acontecimento**

A probabilidade (ou chance) é um número entre 0 e 1, ou entre 0% e 100%, que nos informa sobre a expectativa de um acontecimento (evento). Se a probabilidade é zero, o evento nunca ocorrerá (exemplo: obter 7 pontos lançando um dado comum); se é 100%, o evento sempre ocorrerá (exemplo: obter menos de 7 pontos lançando um dado comum).

Se conhecermos todas as possibilidades de uma situação, e se todas ocorrem em igualdade de condições, a probabilidade de um acontecimento é a razão entre as possibilidades que levam ao acontecimento e o total de possibilidades. Exemplo: o sorteio de uma cédula em uma caixa na qual há três cédulas de 10 reais e uma só de 100 reais; há 1 possibilidade de pegar a cédula de 100 reais e 4 possibilidades de sorteio no total; nesse caso, a probabilidade de sortear a cédula de maior valor é a razão entre 1 e 4, ou 25%.

Nesse resumo, assim como na definição anterior, poderia ter sido mais comentada a frase “se todas ocorrem em igualdade de condições”. Faltou uma maior explanação, para que não houvesse dúvida de que, no caso, todas as cédulas têm a mesma chance de serem sorteadas, pois não são falsas.

No 9º ano, capítulo 5, item *Probabilidades ou chance*, os autores retomam situações para calcular a probabilidade clássica e apresentam novamente a definição de probabilidade. Em um dos exemplos, diferentemente do que foi feito nos anos anteriores, reforçam a ideia de que deve haver muitíssimas tentativas quando dizemos que a probabilidade de certo evento é  $\frac{1}{6}$ :

#### **Teoria e prática**

Precisamos fazer um alerta. Quando dizemos que a probabilidade de certo evento é  $\frac{1}{6}$ , isso significa que, em muitíssimas tentativas, o evento ocorrerá em, aproximadamente,  $\frac{1}{6}$  delas.

Assim, se você lançar o dado apenas 6 vezes, não espere obter exatamente um resultado 5. E, se você lançar o dado 600 vezes, também não espere obter exatamente 100 vezes o resultado 5. No entanto, fique certo de que o resultado 5 quase sempre aparecerá entre 85 e 115 vezes, ou seja, em aproximadamente  $\frac{1}{6}$  dos casos.

A seguir apresentam-se situações em que são necessárias informações estatísticas para se obter a probabilidade, como é o caso do furto de um determinado carro no decorrer de um ano:

Por exemplo, qual é a probabilidade de o proprietário de um automóvel da marca X ter seu carro furtado no decorrer do ano que vem?

[...]

Em situações como essa, usamos informações estatísticas. Por exemplo, a chance de ocorrer furto do automóvel X em certa cidade seria calculada com base em dados como estes:

#### **Furtos do automóvel X em Piraranguá**

Ano	Número de automóveis da marca X em circulação	Número de furtos
2008	10 001	10
2009	22 151	21
2010	31 201	38

Com base nos dados da tabela, percebemos que a probabilidade de furto foi:

$10/10\,001 \approx 0,001$  em 2008;

$21/22\,151 \approx 0,00099 \approx 0,001$  em 2009; e

$38/31\,201 \approx 0,012 \approx 0,001$  em 2010.

Como há um padrão que não muda, concluímos que a probabilidade de furto é praticamente igual a 0,1% em geral.

Nesse caso, calculamos a probabilidade com base em informações estatísticas. O caso do duplo seis foi bem diferente, pois usamos apenas o raciocínio.

Os dois tipos de cálculo tem importância prática. Por exemplo:

- A Mega-Sena é um tipo de loteria em que há sorteio de números. Basta o raciocínio para calcular a chance de cada apostador. Esses cálculos foram feitos com todo o cuidado antes de a Mega-Sena ser anunciada pelo governo, pois era preciso garantir que haveria poucos vencedores e grandes prêmios, para tornar a loteria atraente.
- A probabilidade de furto de um veículo é importante para companhias de seguro. Se uma companhia avalia que terá 3 000 veículos de marca X segurados em Piraranguá, sabendo que a probabilidade de furto é aproximadamente 0,001 (ou seja, 3 em 3000), ela deverá se prevenir contra esses 3 furtos para cobrir seus gastos. Aliás, deverá se prevenir contra mais que 3 furtos, para garantir contra o azar e ter lucro. Uma parte do que recebe a companhia de seguros serve para compor o prêmio de seguro que ela pagará se houver, digamos 6 furtos.

Depois desse texto, seguem as seções *Conversar para aprender* e *Ação-Investigação – Possibilidade na teoria e na prática*:

### **Ação-Investigação**

#### **Probabilidade na teoria e na prática**

Forme grupo com mais dois ou três colegas para realizar estes experimentos.

1. Lance um dado 24 vezes e anote quantas vezes foram obtidos 5 pontos. Calcule a chance estatística de obter 5 (isto é, a razão entre o número de sucessos e o número de lançamentos), compare com a chance teórica e escreva suas conclusões.

2. Agora, lance um dado 60 vezes e refaça as comparações. O aumento no número de lançamentos aproximou a chance estatística da chance teórica? Registre suas conclusões.
3. Cole pedacinhos de fita adesiva sobre a face que marca 5 pontos, causando uma saliência bem sensível sobre ela. Essa modificação deve alterar as chances de todos os resultados. Em particular, a chance teórica de se obter 5 torna-se desconhecida. Ela será obtida experimentalmente: faça 60 lançamentos e tire suas conclusões.
4. Escreva um relatório com todas as suas conclusões.
5. Sob coordenação do professor, alguns grupos apresentarão suas conclusões para a classe. Prepare seu grupo para essa apresentação!

Essa investigação propicia distinguir a probabilidade teórica da experimental, além de estimular a compreensão da relação entre elas (quanto maior o número de lançamentos, mais próxima da chance teórica fica a chance experimental.) Também é proposto um experimento em que as chances não são iguais, pois é colado papeizinhos na face 5.

Na lateral do livro, o comentário ao professor chama atenção para essas ideias.

Há aqui uma atividade importante, que relaciona duas ideias de probabilidade:

- 1) razão entre casos favoráveis e casos possíveis;
  - 2) medida da frequência de um evento;
- Veja comentários no Guia do professor.

O Guia do professor (p. 50) comenta a investigação e ressalta o significado de haver um maior número de lançamentos para que se obtenha maior proximidade à chance teórica – o que é conhecido como Lei dos Grandes Números. Essa explicação é satisfatória, mas talvez não seja suficiente para o professor que a desconheça se aproprie desse conhecimento:

Na atividade **2**, a maioria dos grupos constatará que o aumento de experiências faz a chance estatística aproximar-se de  $1/6 \approx 17\%$ , ou seja, da razão entre casos favoráveis e casos possíveis (ou **chance teórica**).

Sugerimos que, no quadro de giz, sejam somados os números de lançamentos dos vários grupos e as frequências do resultado **5**. Havendo 10 grupos na classe, serão 600 lançamentos. Calculando a porcentagem do resultado 5, fica evidente que, quanto maior o número de lançamentos, mais próximo se fica da chance teórica – o que é conhecido como **Lei dos Grandes Números**.

Já na atividade **3**, os resultados não obedecerão a um padrão, pois cada grupo terá “adulterado” o dado de maneira diferente.

Esse item se conclui com 15 problemas, oito dos quais se destinam a resolução em casa.

Concordamos com os avaliadores do PNLD 2014 quando comentam que esta coleção focaliza a probabilidade em bons contextos para desenvolver os conceitos de amostra e população e para fazer previsões. Os autores desenvolvem adequadamente a probabilidade clássica, definindo-a claramente, e tratam também da probabilidade frequentista.

A coleção difere das anteriores na abordagem dos teores, pois deixa claro o conteúdo teórico e seus objetivos, e apresenta a relevância da probabilidade no mundo do trabalho. Os problemas e exercícios contemplam situações do cotidiano, além daquelas sobre lançamento de moeda e de dado.

Notamos que no *Guia do professor* há poucas referências sobre o processo de ensino e aprendizagem da probabilidade. Poderia ser relevante haver indicações e referências sobre produções científicas em Educação Matemática e Educação Estatística que têm priorizado este foco de estudo.

## 6.5 Análise Sobre as Coleções

Analisando as três coleções dos anos finais do Ensino Fundamental aprovadas no PNLD 2014, pudemos constatar certa homogeneidade na condução do tema ‘probabilidade’ nas coleções *Projeto Teláris*, de Luiz Roberto Dante, e *Matemática*, de Edwald Bianchini.

O *Projeto Teláris* traz a concepção frequentista, porém só em duas das nove atividades há indicação para investigação, sem orientação suficiente ao professor. Também não discute o significado dessa ideia.

A coleção *Matemática*, de Imenes e Lellis, avança um pouco mais sobre as concepções de probabilidade, pois, além de tratar da clássica, apresenta a frequentista por meio de atividades de investigação, mostrando também aplicações no mundo do trabalho.

Em nenhuma das três coleções se prioriza uma discussão sobre a aleatoriedade, talvez por a considerarem um conceito óbvio, que não requer análise nesse estágio do ensino.

O Quadro 2 resume as categorias que identificamos quanto às concepções de probabilidade clássica e frequentista e o conceito de aleatoriedade nas coleções analisadas.

Quadro 2 – Concepções de probabilidade presentes em coleções didáticas de matemática para os anos finais do Ensino Fundamental aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático 2014 (PNLD 2014).

Ano	Coleção – Editora	Concepção clássica de probabilidade	Concepção frequentista de probabilidade	Conceito de aleatoriedade
6º	<i>Teláris – Ática</i>	Apresenta informalmente como fração. (A probabilidade de sair “cara” no lançamento de moedas é de 1 (cara) para 2 (cara ou coroa), ou $\frac{1}{2}$ ).	Não promove	Não discute
7º	<i>Teláris – Ática</i>	Sistematiza a fórmula, mas não discute a equiprobabilidade e nem a aleatoriedade. É possível medir a chance de algo acontecer. Essa medida é chamada probabilidade e é dada por uma razão entre dois números.  $\text{probabilidade de um evento} = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$	Inicia com as atividades 29 e 30, mas não comenta o porquê do experimento. Igualmente na seção <i>Oficina de Matemática, experimentos com probabilidade</i> , conduz a experiência, o que poderia ser feito pelo professor em sala de aula, dando-lhe subsídios suficientes sobre o objetivo da experiência.	Não discute
8º	<i>Teláris – Ática</i>	Retoma a fórmula sistematizada no 7º ano.	Na seção <i>Oficina de Matemática</i> , trás uma atividade sobre o conhecido jogo do par ou ímpar, mas não discute o suficiente.	Define, mas só chama a atenção na questão 18, que é imediatamente seguinte.

				( <i>Experimento aleatório é aquele que, se repetido diversas vezes sob condições idênticas, produz resultados imprevisíveis, entre uma gama de possibilidades.</i> )
9º	<i>Teláris – Ática</i>	Retoma a fórmula sistematizada no 7º ano	Apresenta no item <i>Estimando probabilidades a partir de dados estatísticos.</i>	Menciona também no item <i>Estimando probabilidades a partir de dados estatísticos.</i>
6º	<i>Bianchini – Moderna</i>	Define de forma recorrente que “probabilidade é a medida da chance de ocorrer um determinado resultado”, pois chance é o mesmo que probabilidade.	Não aborda	Não discute
7º	<i>Bianchini – Moderna</i>	Retoma como fração irredutível	Não aborda	Não discute
8º	<i>Bianchini – Moderna</i>	Não aborda	Não aborda	Não aborda
9º	<i>Bianchini – Moderna</i>	Define espaço amostral e evento de um experimento aleatório para calcular a probabilidade da ocorrência desse evento por meio da razão:  $\text{Probabilidade de um evento} = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$	Não aborda	Define experiências aleatórias como aquelas cujo resultado seja imprevisível, mesmo se forem repetidas sob as mesmas condições.
6º	<i>Imenes e Lellis – Moderna</i>	Não aborda	Não aborda	Não aborda
7º	<i>Imenes e Lellis – Moderna</i>	Define como a razão entre o número de possibilidades de um resultado e o número total de possibilidades da situação, sabendo que as possibilidades têm a mesma chance.	Introduz com uma investigação – simulação estatística. No Guia do professor comentam que nem sempre é possível encontrar a razão. Nesse caso, a probabilidade é estimada por meios estatísticos, ou seja, pela frequência com que o fato ocorre.	Não promove
8º	<i>Imenes e Lellis – Moderna</i>	Retoma com situações-problema, relembra que as possibilidades têm todas a mesma chance e calcula a chance como a razão entre o número de possibilidades de ocorrência do evento e o número total de possibilidades.	Promove no experimento “ <i>Conclusões a partir de uma amostra</i> ”.	Não promove
9º	<i>Imenes e</i>	Tratam em situações-problema o cálculo	Apresentam situação	Não promove

	Lellis – Moderna	da probabilidade clássica	em que são necessárias informações estatísticas para se obter a probabilidade do furto de um determinado carro no decorrer de um ano. Também em outra investigação sobre probabilidade na teoria e na prática	
--	---------------------	---------------------------	--	--

A concepção clássica, ou de Laplace, é a mais explorada nas coleções analisadas, porém nenhuma das duas primeiras coleções comenta que essa definição é incompleta e impõe forte restrição a suas aplicações, devido à noção de equiprobabilidade, de espaço amostral e seu caráter circular.

A concepção clássica de probabilidade é definida como a razão entre o número de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, desde que todos os resultados sejam admitidos como igualmente prováveis de ocorrer. Os jogos de azar baseados em dados, moedas, extração de bolas em urnas, enquadram-se nessa perspectiva teórica por tratar de fenômenos cuja variável é discreta e porque se supõe possível selecionar, como espaço amostral, um conjunto finito de sucessos elementares que garantam a equiprobabilidade.

O enfoque frequentista emerge do processo de experimentação, os cálculos se apoiam na frequência com que os fatos, eventos e experimentos ocorrem. O conceito matemático mobilizado no modelo com enfoque frequentista de probabilidade é o de limite. Talvez seja este o entrave por não ser tratado nos anos finais do ensino fundamental, porém Coutinho (1996) sugere o enfoque frequentista como sendo mais adequado e vantajoso para o ensino dos primeiros conceitos de probabilidade, uma vez que se podem utilizar experimentos ligados à realidade dos alunos, não precisando necessariamente estar limitado à hipótese de equiprobabilidade.

Outro entrave poderia ser o de obter um grande número de lançamentos, mas segundo Teodoro, Lopes e Mourão (2014) dispõe-se hoje de *softwares*, além do Excel, que permitem solucionar problemas para estimar o número de lançamentos, dependendo da opção do usuário, e cujo tempo de execução varia de acordo com o *hardware* utilizado. Após optar por uma quantidade de lançamentos, o *software* os



simula e apresenta quantas vezes cada resultado aparece, ou seja, as frequências relativas dos eventos.

Os resultados apontam a necessidade de revisão na abordagem do tema probabilidade nas coleções analisadas, principalmente na segunda, para inclusão do enfoque frequentista, e, nas duas primeiras coleções, a necessidade de se articular com a elaboração de experimentos para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas. Também é necessário deixar claro qual dos enfoques utilizar para o cálculo da probabilidade.

A seguir, apresentamos as considerações finais desta pesquisa.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

*Você verá que é mesmo assim:  
que a história não tem fim;  
continua sempre que você  
responde sim  
à sua imaginação...*  
(Guilherme Arantes)

Nesta pesquisa investigamos atividades envolvendo probabilidade propostas nos livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, buscando responder à seguinte questão central: *Que indícios teóricos e metodológicos emergem de um processo analítico sobre o ensino de probabilidade, expressos em alguns livros didáticos?*

Para respondê-la, optamos por desenvolver uma pesquisa documental e bibliográfica e, então, proceder à análise de conteúdo dos documentos selecionados. Entre as várias concepções e conceitos relacionados ao tema da pesquisa, elegemos as seguintes categorias para o processo de análise:

- presença de concepção de probabilidade clássica na perspectiva de como essa abordagem é definida, desenvolvida e em que momento ocorre;
- presença ou não da concepção de probabilidade frequentista e, se abordada, como essa abordagem se dá;
- presença de discussão sobre aleatoriedade e o modo como esse conceito é enfocado nos textos didáticos.

Pudemos constatar, no que se refere ao ensino de probabilidade, alguns indícios teóricos e metodológicos em três coleções de livros didáticos aprovadas no último programa nacional de avaliação de obras didáticas voltadas aos anos finais do Ensino Fundamental (PNLD 2014).

Embora a concepção clássica de probabilidade seja a mais abordada, as coleções *Projeto Teláris*, de Luiz Roberto Dante e *Matemática*, de Edwald Bianchini, não enfatizam o aspecto da equiprobabilidade. A concepção frequentista é tratada nas coleções *Matemática*, de Imenes e Lellis, e no *Projeto Teláris*, porém esta última

não a explora o suficiente nas investigações. As situações de natureza aleatória, que permitem identificar possíveis resultados desses eventos, são esparsas. As noções de acaso e incerteza raramente são explorados por meio de investigações que levem o aluno a fazer previsões a respeito do sucesso de um evento.

Embora na avaliação anterior dessas obras (PNLD 2011) já se houvesse evidenciado certa carência, não se notam mudanças em seu enfoque sobre probabilidade na versão do PNLD 2014, principalmente na coleção de Bianchini, que limita a abordagem às situações de equiprobabilidade. Não basta ao aluno, futuro cidadão, entender quantas são as possibilidades de que dispõe para acertar no lançamento de uma moeda ou de um dado. É preciso compreender que em muitas situações a probabilidade de um evento depende da frequência dos resultados desse evento ao longo de um grande número de repetições.

A bibliografia indicada por essas coleções, como fonte de consulta do autor para a elaboração da obra, ou não inclui texto atual sobre probabilidade ou, quando chega a indicá-lo, não coloca seu conteúdo em prática ou deixa de empregar satisfatoriamente suas ideias principais para abordar a concepção frequentista de probabilidade. Isso nos permite inferir que os autores ainda não conseguiram formular uma maneira de tratar a concepção frequentista de probabilidade que permita ensiná-la nos livros didáticos destinados aos anos finais do Ensino Fundamental.

No Capítulo 5, focalizamos as sugestões de atividades de investigação contidas no projeto *Connected Mathematics Project* (CMP) (LAPPAN *et al.*, 2009), para promover uma oportunidade de reflexão sobre esse tema, em que são destacados o foco nos conceitos, o pleno entendimento de termos como ‘chance’, ‘incerteza’ e ‘aleatoriedade’ e a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza.

Desse projeto, ressaltamos os seguintes objetivos de concepção de ensino e aprendizagem de probabilidade que não estão suficientemente comentados e exemplificados nos PCN:

- distinguir entre probabilidades teóricas e experimentais e compreender a relação entre elas;
- utilizar conceitos de probabilidade para tomar decisões;

- encontrar o valor esperado e interpretá-lo;
- calcular e comparar as chances de vários resultados, incluindo resultados de dois estágios de resultados;
- realizar experimentos e simulações para testar hipóteses sobre situações de probabilidade.

É preciso cuidar para que esse bloco de conteúdos dos PCN seja atualizado com novas perspectivas, tanto em termos conceituais quanto metodológicos, propiciando claramente sua utilização em outras áreas do conhecimento, que vão além da matemática determinística, para a tomada de decisões e resolução de problemas.

A desatualização dos PCN quanto ao tema ‘probabilidade’ pode ser o motivo pelo qual esse conteúdo não tenha sido incorporado de forma plena às coleções didáticas. Cabe também observar que os PCN não discutem como entendem a investigação, nem como esta deva ser explorada pelo professor em sala de aula para abordar a questão da probabilidade. Talvez seja necessário aguardar pela disponibilidade de outros materiais voltados à formação continuada dos professores, o que poderia ser feito na forma de distribuição de livros, revistas e artigos das instituições de pesquisa, e que poderiam fazer parte em um programa de formação inicial, como o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid), ou outro que agregasse a formação inicial e continuada dos professores.

Quanto aos critérios de avaliação dos livros didáticos de matemática utilizados pelo PNLD, sugerimos, com o intuito de aprimorar adicionalmente o processo de avaliação, que se inclua na ficha de avaliação um item que permita aos autores justificarem a estrutura da obra e mostrarem, por meio de mapa conceitual, como os conteúdos da matemática e as outras áreas do conhecimento se articulam, para que professores e alunos tenham clareza sobre a razão de estarem estudando tais conceitos, sobre a implicação destes para a abordagem em outros conteúdos, sobre sua utilidade etc. Outra sugestão é a de se incluírem questões investigativas como metodologia de ensino, de modo a fomentar uma participação de fato ativa e colaborativa dos alunos. Não é suficiente que, antecedendo a atividade proposta no livro, constem instruções como “Faça este exercício com seu colega”, se a questão não instigar a planejar, a levantar questionamentos, a buscar soluções, a reconhecer

a necessidade de cogitar em argumentos sensatos e a elaborar sínteses sobre a aprendizagem ocorrida. É também oportuno que a avaliação considere a resenha de PNLD anterior, para que se perceba uma continuidade no processo de avaliação.

O livro digital, que já se torna realidade, poderá atender a uma demanda constante dos professores às editoras, demanda essa que inclui expectativas e interesses sociais e regionais quanto à organização escolar dos projetos pedagógicos. Ele também facilitará o uso dos objetos educacionais digitais (OEDs), tanto pelos professores como pelos alunos. Os atuais egressos dos cursos de licenciatura, habituados a navegar pela internet, poderão utilizar *softwares* para construção de gráficos, tabelas e simuladores, com melhores condições e resultados.

É imprescindível que o livro didático seja um instrumento que favoreça a aprendizagem do aluno, no sentido do domínio do conhecimento, bem como da reflexão para ampliar sua compreensão da realidade, e que o instigue a pensar em perspectiva, estimulando a formulação de hipóteses de solução para os problemas atuais.

Dessa forma, faz-se necessário que a escola proporcione ao estudante, desde os primeiros anos da escola básica, a formação de conceitos que o auxiliem no exercício de sua cidadania. Entendemos que cidadania inclua também a capacidade de atuação reflexiva, ponderada e crítica de um indivíduo em seu grupo social. Isso significa colocar o livro didático como subsídio da escola para a consecução do objetivo de promover o exercício da cidadania — vale dizer, a serviço de sua proposta pedagógica, que é, em última instância, o projeto coletivo necessário à constituição da identidade da unidade escolar.

Concordamos com Pitombeira de Carvalho (2008) quando afirma ser preocupante o avanço que os grandes sistemas particulares de ensino estão vivenciando. Incluímos nessa preocupação também os materiais disponíveis na internet que não estão vinculados a nenhuma instituição fidedigna. Em geral, ao menos em matemática, a qualidade do material disseminado é bastante baixa, dada a ausência de compromisso com as avaliações do PNLD.

Tornam-se necessárias, pelas razões apresentadas, atualizações ao processo de avaliação do PNLD para que este contribua com o desenvolvimento de novas concepções de livro didático, como já ocorre com o PNLD-Campo, incluindo coleções elaboradas por temas ou projetos, e que esse programa nacional seja

receptivo a novas propostas sobre a relação do manual do professor com o trabalho docente, bem como à inserção de novos conhecimentos que permitam ampliar os saberes da área.

Em outra perspectiva, é necessário que o MEC incentive a atenção ao livro didático nos cursos de licenciatura e apoie as pesquisas das universidades para a elaboração de materiais didáticos destinados ao ensino básico, bem como promova a formação de autores especialistas. Outra medida oportuna é que os editais de concursos públicos indiquem livros didáticos avaliados e aprovados nos PNLD, e que as provas desses concursos estejam alinhadas com as atuais pesquisas relacionadas aos campos conceituais e procedimentais. Este aspecto poderia ser investigado quanto ao alinhamento entre o que o PNLD aprova e o que é sugerido em editais de concursos públicos.

Outro aspecto que não pode ser ignorado é que o PNLD desenvolva ações, em parceria com as editoras, para garantir padrões de qualidade para o livro didático. Talvez seja oportuno incluir recomendações, aos autores das coleções aprovadas, sobre o que deve ser melhorado, acrescentado ou removido dos livros didáticos, para que em uma avaliação subsequente se possa observar se aspectos ausentes, falhos ou incompletos foram supridos ou aprimorados pelos autores.

O livro didático é instrumento de ensino e de aprendizagem formal e, muito embora não seja o único material que professores e alunos utilizam no processo de ensino e aprendizagem, pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares. É por isso importante dispor de mecanismos que estimulem o aprimoramento não só do livro didático, mas também de sua avaliação, bem como atualização dos PCN, como elementos imprescindíveis do processo contínuo de aperfeiçoamento dos materiais didáticos e dos próprios educadores e autores.

## REFERÊNCIAS

ALVES, R. *Se eu pudesse viver minha vida novamente*. Rio de Janeiro: Pegue & Leve, 2013.

AZCÁRATE, P. *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad: su estudio en el caso de la educación primaria*, 1995. Tese (Doutorado em didática) – Universidad de Cádiz, Cádiz, 1995.

AZCÁRATE GODED, P. ¿Qué matemáticas necesitamos para comprender el mundo actual? *Investigación en la Escuela*, n. 32, p. 77-85, 1997.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. 4 ed. Lisboa: Edições 70, 2010.

BATISTA, A. A. G.. *Recomendações para uma política pública de livros didáticos*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental, 2001.

BIANCHINI, E. *Matemática: Bianchini*. 7. ed. São Paulo: Moderna. 2011.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática: ensino de 5.<sup>a</sup> a 8.<sup>a</sup> série*. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos: PNLD 2011: matemática*. Brasília: Ministério da Educação, 2010. Disponível em: <<http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/item/2349-guia-pnld-2011---anos-finais-do-ensino-fundamental>>. Acesso em: 17 maio 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos: PNLD 2014: matemática*. Brasília: Ministério da Educação, 2013. Disponível em: <<http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/item/2349-guia-pnld-2014---anos-finais-do-ensino-fundamental>>. Acesso em: 3 jul. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. *História*. [s.d.]. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=2&Itemid=1175](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=2&Itemid=1175)>. Acesso em: 8 fev. 2014.

CHIZZOTTI, A. *Pesquisa em ciências humanas e sociais*. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

COUTINHO, C.Q.S. *Introdução ao conceito de probabilidade: uma visão frequentista*. São Paulo: EDUC, 1996.

COUTINHO, C.Q.S. *Introduction aux situations aléatoires dès le collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II*. (Tese de doutorado) - Université Joseph Fourier, Grenoble I, França, 2001.

COUTINHO, C.Q.S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? *Revemat*, v. 2.3, p. 50-67, UFSC: 2007.

CUNHA, M.H. *Saberes profissionais de professores de matemática: dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação*. 1998. Dissertação (Mestrado em educação na especialidade de didática da matemática), Departamento de Educação, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 1998.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo: Summus; Campinas: Unicamp, 1986.

DANTE, L.R. *Projeto Teláris: matemática*. São Paulo: Ática, 2012.

DIEZ, C.L.F.; HORN, G.B. *Orientações para elaboração de projetos e monografias*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2004.

DOUAIRE, J.; BOËT, J.; BOUCULAT, N.; HUBERT, C. *Vrai? ... Faux? ... On en débat! de l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*. Paris: INRP, 1999. (Collection Ermel.)

FERNANDES, J. A., BATANERO, C., CONTRERAS, J. M., DÍAZ, C. A simulação em probabilidades e estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante*, v. 18(1,2), p. 161-183, 2009.

FNDE – FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO. *História*. [s.d.]. Disponível em: <<http://www.fnde.gov.br/fnde/institucional>>. Acesso em: 11 nov. 2013.

FRANCO, M.L.P.B. *Análise de conteúdo*. 3. ed. Brasília: Líber Livro, 2008.

FREIRE, P. *Pedagogia do oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

FREIRE, P. *A importância do ato de ler em três artigos que se completam*. 51. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

GARFIELD, J.; GAL, I. *The assessment challenge in statistics education*. Amsterdam: IOS; International Statistical Institute, 1997.

GIL, A.C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

GODINO, J. D.; BATANERO, M.C.; CAÑIZARES, M.J. *Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis, 1988.

GODINO, J. D.; BATANERO, M.C.; CAÑIZARES, M.J. *Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuesta curriculares*. Madri, Espanã: Editorial Síntesis, 1996.

IMENES, L.M.; LELLIS, M. *Matemática: Imenes e Lellis*. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2012.

LAPPAN, G.; FEY, J.T.; FITZGERALD, W.M.; FRIEL, S.N.; PHILLIPS, E.D. *How likely is it?: probability*. Glenview, IL, USA: Prentice Hall, 2002. (Connected Mathematics.)

LAPPAN, G.; FEY, J.T.; FITZGERALD, W.M.; FRIEL, S.N.; PHILLIPS, E.D. *Connected mathematics project*. 2009. Disponível em: <[www.connectedmath.msu.edu](http://www.connectedmath.msu.edu)>. Acesso em: 7 jul. 2013.

LOPES, C.E. A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular. Dissertação (Mestrado em educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

LOPES, C.E. Reflexões teórico-metodológicas para a educação estatística. In: LOPES, C.E.; CURI, E. (Orgs.). *Pesquisas em educação matemática: um encontro entre a teoria e a prática*. São Carlos: Pedro & João, 2008a.

LOPES, C.E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cad. Cedes*, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, 2008b. Disponível em: <<http://www.cedes.unicamp.br>>. Acesso em: 10 fev. 2014.



LOPES, C.E.; COUTINHO, C.Q.S. *Leitura e escrita em educação estatística.. Educação matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidade*. Campinas (SP): Mercado de Letras, 2009.

LOPES, C.E.; FERREIRA, A.C. A estatística e a probabilidade no currículo de matemática da escola básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. *Anais...* Recife: ENEM, 2004. p. 1.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. *Pesquisas em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

MLODINOW, L. *O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas*. Tradução de Diego Alfaro; consultoria de Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

MORGADO, A.C.O.; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J.B.; CARVALHO, P.C.P.; FERNANDEZ, P.J. *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: IMPA; Vitae, 1991.

NOVAES, D.; COUTINHO, C. *Estatística para a educação profissional*. São Paulo: Atlas, 2009.

ORTIZ, J. J. *La probabilidad en los libros de texto*. Granada: Universidad de Granada, 2002.

PITOMBEIRA DE CARVALHO, J.B. Políticas públicas e o livro didático de matemática. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 21, n. 29, p. 1-11, 2008.

PONTE, J.P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SÃO PAULO (estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino de Matemática: 1º grau*. 4. ed. São Paulo: SE/CENP, 1991.

TEODORO, J.V.; LOPES, J.M.; MOURÃO, G.B. *O ensino sobre a concepção frequentista de probabilidade estruturado na simulação computacional*. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/sinape/sites/default/files/O%20ENSINO%20SOBRE%20A%20CONCEP%C3%A7%C3%A3O%20FREQUENTISTA%20DE%20PROBABILIDADE%20ESTRUTURADO%20NA%20SIMULA%C3%A7%C3%A3O%20COMPUTAC>>. Acesso em: 15 fev. 2014.

ZÚÑIGA, N.O.C. *Uma análise das repercussões do programa nacional do livro didático no livro didático de matemática*. 2007. Tese (Doutorado em educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.

## **ANEXOS**

## Anexo A

**FICHA DE AVALIAÇÃO [PNLD 2014]****Coleção:** (Código)**Menção:** (Aprovada, Aprovada sob condição ou Excluída)**PARTE I – DESCRIÇÃO DA COLEÇÃO**

1. Organização da obra
2. Conteúdo por volume
3. Conteúdo multimídia

**PARTE II – ABORDAGEM DOS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS**

Para cada item a seguir indique (P) plenamente, (S) satisfatoriamente ou (R) raramente, e justifique.

1. Seleção e distribuição dos campos de conteúdos matemáticos P/S/R

## 2. Números e operações

A abordagem do campo de números e operações contribui para a compreensão dos conteúdos matemáticos, considerando:

- 2.1. o processo de sistematização; P/S/R
- 2.2. a articulação entre o conhecimento novo e o já abordado; P/S/R
- 2.3. o equilíbrio entre conceitos, algoritmos e procedimentos; P/S/R
- 2.4. a articulação entre diferentes significados de um mesmo conceito; P/S/R
- 2.5. a articulação com outros campos da Matemática; P/S/R
- 2.6. o desenvolvimento de cálculo por estimativa; P/S/R
- 2.7. o desenvolvimento de cálculo mental. P/S/R

## 3. Álgebra

A abordagem do campo da álgebra contribui para a compreensão dos conteúdos matemáticos, considerando:

- 3.1. o processo de sistematização; P/S/R
- 3.2. a articulação entre o conhecimento novo e o já abordado; P/S/R
- 3.3. os diferentes significados dos objetos algébricos; P/S/R
- 3.4. o equilíbrio entre modelização e cálculo algébrico; P/S/R
- 3.5. a articulação entre diferentes representações de um mesmo conceito; P/S/R
- 3.6. a articulação com outros campos da Matemática. P/S/R

## 4. Geometria

A abordagem do campo da geometria contribui para a compreensão dos conteúdos matemáticos, considerando:

- 4.1. o processo de sistematização; P/S/R
- 4.2. a articulação entre o conhecimento novo e o já abordado; P/S/R
- 4.3. a articulação entre conceitos e procedimentos; P/S/R
- 4.4. o equilíbrio entre diferentes modos de validação (experimental e dedutivo); P/S/R
- 4.5. a articulação com outros campos da Matemática. P/S/R

## 5. Grandezas e medidas

A abordagem do campo das grandezas e medidas contribui para a compreensão dos conteúdos matemáticos, considerando:

- 5.1. o processo de sistematização; P/S/R
- 5.2. a articulação entre o conhecimento novo e o já abordado; P/S/R
- 5.3. a articulação entre conceitos e procedimentos; P/S/R
- 5.4. as relações entre diferentes grandezas; P/S/R
- 5.5. as estimativas envolvendo medidas de grandezas; P/S/R
- 5.6. a articulação com outros campos da Matemática. P/S/R

## 6. Estatística e probabilidade

A abordagem do campo da estatística e probabilidade contribui para a compreensão dos conteúdos matemáticos, considerando:

6.1. o processo de sistematização;	P/S/R
6.2. a articulação entre o conhecimento novo e o já abordado;	P/S/R
6.3. os diferentes conceitos e etapas da pesquisa estatística;	P/S/R
6.4. o cálculo das medidas estatísticas em articulação com o raciocínio estatístico;	P/S/R
6.5. a articulação com outros campos da Matemática.	P/S/R

Para cada item a seguir indique (S) sim ou (N) não, e justifique.

7. A coleção, incluindo o *Livro do Aluno*, glossário e *Manual do Professor*, apresenta os conteúdos sem:

7.1. erro conceitual;	S/N
7.2. indução ao erro;	S/N
7.3 erro de informações básicas;	S/N
7.4. erro e imprecisão pontual.	S/N

### **PARTE III – METODOLOGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM**

1. A metodologia adotada na coleção caracteriza-se predominantemente por (marque ou explicita outra):

- 1.1. apresentar os conteúdos por explanação teórica seguida de atividades resolvidas e propostas de cunho aplicativo.
- 1.2. apresentar o conteúdo por meio de um ou poucos exemplos, seguidos de alguma sistematização e, depois, de atividades de aplicação;
- 1.3. propor um projeto a partir do qual conteúdos da Matemática são estudados.
- 1.4. iniciar por atividades propostas, seguidas da sistematização, sem dar oportunidade ao aluno de tirar conclusões próprias;
- 1.5. constituir-se de uma lista de atividades propostas, e deixar a sistematização dos conteúdos a cargo do professor;
- 1.6. outras modalidades (explicitar).

Para cada item a seguir indique (P) plenamente, (S) satisfatoriamente ou (R) raramente, e justifique.

2. Na coleção, observa-se o desenvolvimento de capacidades básicas do pensamento autônomo e crítico, como:

2.1. classificação;	P/S/R
2.2. argumentação;	P/S/R
2.3. síntese	P/S/R
2.4. formulação de hipóteses;	P/S/R
2.5. generalização;	P/S/R
2.6. demonstração.	P/S/R

3. A coleção apresenta situações que envolvem:

3.1. questões desafiadoras;	P/S/R
3.2. questões com falta ou excesso de dados;	P/S/R
3.3. utilização de diferentes estratégias na resolução de problemas;	P/S/R
3.4. verificação de processos e resultados pelo aluno;	P/S/R
3.5. formulação de problemas pelo aluno.	P/S/R

4. Na coleção, os conhecimentos matemáticos são contextualizados de forma significativa, no que diz respeito:

4.1. as práticas sociais atuais;	P/S/R
4.2. a história da Matemática;	P/S/R
4.3. a outras áreas do conhecimento;	P/S/R
4.4. a verificação de processos e resultados pelo aluno;	P/S/R
4.5. a formulação de problemas pelo aluno.	P/S/R

5. A coleção estimula a utilização de recursos didáticos diversificados, como:

5.1. materiais concretos;	P/S/R
5.2. jogos;	P/S/R
5.3. calculadora;	P/S/R
5.4. outros recursos tecnológicos;	P/S/R
5.5. leituras complementares.	P/S/R

## 6. A coleção incentivada:

6.1. a interação entre os alunos;

P/S/R

6.2. o uso de conhecimentos extraescolares.

P/S/R

Para cada item a seguir indique (S) sim ou (N) não, e justifique.

1. A coleção não veicula informações que contrariem, de alguma forma, a legislação vigente, respeitando-a.

S/N

2. A coleção é livre de estereótipos e de preconceitos de condição social, regional, étnico-racial, de gênero, de orientação sexual, de idade ou de linguagem, assim como de qualquer outra forma de discriminação ou de violação de direitos.

S/N

3. A coleção é isenta de doutrinação religiosa e/ou política, respeitando o caráter laico e autônomo do ensino público.

S/N

4. A coleção não traz publicidade e não difunde marcas, produtos ou serviços comerciais.

S/N

Para cada item a seguir indique (P) plenamente, (S) satisfatoriamente ou (R) raramente, e justifique.

5. A coleção contribui para a formação do cidadão consciente de seus direitos e deveres, com respeito a diversidade cultural e de comportamentos humanos.

P/S/R

6. A coleção contribui para a formação do cidadão consciente de seus direitos e deveres, com respeito a formação de condutas que levem a superação das desigualdades sociais e a sustentabilidade da sociedade humana.

P/S/R

Para cada item a seguir indique (S) sim, (P) parcialmente ou (N) não e justifique.

## 1. Parte textual:

1.1. a estrutura da coleção e hierarquizada (títulos, subtítulos, etc.), o que é evidenciado por meio de recursos gráficos;

S/P/N

1.2. a coleção apresenta um sumário que auxilia na localização dos conteúdos matemáticos.

S/P/N

1.3. Na coleção, a revisão é isenta de erros.

S/P/N

## 2. Linguagem

2.1. A linguagem utilizada na coleção é adequada ao aluno a que se destina, quanto:

2.1.1. ao vocabulário;

S/P/N

2.1.2. a clareza na apresentação dos conteúdos e na formulação das instruções;

S/P/N

2.1.3. ao emprego de vários tipos de texto.

S/P/N

2.2. A coleção articula adequadamente as diferentes representações Matemáticas (língua materna, simbolismo matemático, desenhos, gráficos, tabelas, esquemas, imagens, etc.)

S/P/N

## 3. Qualidade visual:

3.1. os textos e as ilustrações da coleção são distribuídos nas páginas de maneira adequada e equilibrada;

S/P/N

3.2. na coleção os textos mais longos são apresentados de modo que estimulem a leitura;

S/P/N

3.3. as ilustrações enriquecem a leitura dos textos, auxiliando a compreensão.

S/P/N

Para cada item a seguir indique (S) sim ou (N) não, e justifique.

1. O *Manual do Professor* explicita os pressupostos teóricos e os objetivos que nortearam a elaboração da coleção.

S/N

2. Há coerência entre os pressupostos teóricos explicitados no *Manual do Professor* e o *Livro do Aluno*.

S/N

Para cada item a seguir indique (S) sim, (P) parcialmente ou (N) não, e justifique.

3. O *Manual do Professor* emprega uma linguagem clara.

S/P/N

4. O *Manual do Professor* traz subsídios para a atuação do professor em sala de aula:4.1. apresentando orientações metodológicas para o trabalho com o *Livro do Aluno*;

S/P/N

4.2. sugerindo atividades diversificadas (projetos, pesquisas, jogos, etc.) além das contidas no livro do aluno;	S/P/N
4.3. apresentando resoluções das atividades propostas aos alunos;	S/P/N
4.4. contribuindo para reflexões sobre o processo de avaliação do aluno.	S/P/N
5. O Manual favorece a formação e a atualização do professor:	
5.2. sugerindo leituras complementares;	S/P/N
5.3. apresentando a bibliografia utilizada pelo autor;	S/P/N
5.4. indicando fontes de informação.	S/P/N
<b>PARTE VII – OUTRAS OBSERVAÇÕES</b>	

(BRASIL, 2013, p. 95-99)

## Anexo B

### FICHA DE AVALIAÇÃO [PNLD 2011]

**Coleção:** código

**Menção:** (Aprovada ou Excluída)

#### PARTE I – IDENTIFICAÇÃO GERAL

1 – Descrição da obra

2 – Conteúdos por volume

#### PARTE II – ANÁLISE AVALIATIVA

(Para cada item abaixo indique sim, parcialmente, ou não e justifique)

##### **1 – Respeito à legislação, às diretrizes e às normas oficiais relativas ao Ensino Fundamental.**

1.1 – A coleção respeita a proibição de trazer informações que contrariem, de alguma forma, a legislação vigente, como o Estatuto da Criança e do Adolescente e o Estatuto do Idoso.

##### **2 – Observância de princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano.**

2.1 – Os textos e as ilustrações da coleção são livres de preconceitos ou estereótipos que levem a discriminações de qualquer tipo.

2.2 – A coleção é isenta de doutrinação política ou religiosa.

2.3 – A coleção apresenta-se sem publicidade de artigos, serviços ou organizações comerciais.

##### **3 – Coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica assumida pela coleção, no que diz respeito à proposta didático-pedagógica explicitada e aos objetivos visados.**

3.1 – A metodologia adotada contribui para o desenvolvimento de capacidades básicas do pensamento autônomo e crítico (a compreensão, a memorização, a análise, a síntese, a formulação de hipóteses, o planejamento, a argumentação).

3.2 – Há adequação e coerência metodológica entre os diferentes volumes.

##### **Metodologia do ensino e aprendizagem**

3.3 – A metodologia adotada na coleção caracteriza-se predominantemente por:

3.3.1 – Introduzir os conteúdos por explanação teórica seguida de atividades resolvidas e propostas de cunho aplicativo.

3.3.2 – Introduzir o conteúdo apresentando um ou poucos exemplos, seguidos de alguma sistematização e, depois de atividades de aplicação.

3.3.3 – Partir de atividades propostas para só depois sistematizar os conteúdos.

3.3.4 – Iniciar por atividades propostas, seguidas da sistematização, sem dar oportunidade ao aluno de tirar conclusões próprias.

3.3.5 – Constituir-se de uma lista de atividades propostas, e deixar a sistematização dos conteúdos a cargo do professor.

3.3.6 – Outras modalidades, explicitar:

3.4 – A coleção valoriza e incentiva:

3.4.1 – o uso de conhecimentos já trabalhados na coleção;

3.4.2 – o uso de conhecimentos extraescolares;

3.4.3 – a interação entre alunos.

3.5 – A coleção favorece o desenvolvimento de competências complexas, como:

- 3.5.1 – *observar, explorar e investigar*<sup>15</sup>;
- 3.5.2 – estabelecer relações, classificar e generalizar;
- 3.5.3 – argumentar, tomar decisões e criticar;
- 3.5.4 – visualizar;
- 3.5.5 – utilizar a imaginação e a criatividade;
- 3.5.6 – conjecturar e provar;
- 3.5.7 – expressar e registrar ideias e procedimentos.

3.6 – A coleção apresenta situações que envolvem:

- 3.6.1 – questões com falta ou excesso de dados;
- 3.6.2 – desafios;
- 3.6.3 – problemas com nenhuma solução ou com várias soluções;
- 3.6.4 – utilização de diferentes estratégias na resolução de problemas;
- 3.6.5 – comparação de diferentes estratégias na resolução de problemas;
- 3.6.6 – verificação de processos e resultados pelo aluno;
- 3.6.7 – formulação de problemas pelo aluno;

3.7 – A coleção valoriza o desenvolvimento de habilidades relativas ao:

- 3.7.1 – cálculo mental;
- 3.7.2 – cálculo por estimativa

3.8 – A coleção estimula a utilização de recursos didáticos diversificados:

- 3.8.1 – materiais concretos;
- 3.8.2 – instrumentos de desenho geométrico;
- 3.8.3 – calculadora;
- 3.8.4 – outros recursos tecnológicos;
- 3.8.5 – leituras complementares.

#### **Contextualização**

3.9 – Na coleção, os conhecimentos matemáticos são contextualizados, de forma significativa, no que diz respeito a:

- 3.9.1 – a própria matemática;
- 3.9.2 – as práticas sociais atuais;
- 3.9.3 – a história da Matemática;
- 3.9.4 – outras áreas do conhecimento.

#### **Formação da cidadania**

3.10 – A coleção contribui para a construção da cidadania.

#### **4 – Correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos**

**A coleção, incluindo livro do aluno, glossário e manual do professor, apresenta os conteúdos sem:**

- 4.1 – erro conceitual;
- 4.2 – indução ao erro;
- 4.3 – erro de informações básicas.

#### **Seleção e distribuição dos conteúdos matemáticos**

4.4 – A coleção apresenta adequadamente os conhecimentos relativos a números e operações; álgebra; geometria; grandezas e medidas; tratamento da informação, quanto a:

- 4.4.1 – seleção;
- 4.4.2 – distribuição;
- 4.4.3 – articulação entre o conhecimento novo e o já abordado;
- 4.4.4 – articulação entre os diversos campos da Matemática;

#### **Abordagem dos conteúdos**

4.5 – A coleção contribui para a compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos, favorecendo a atribuição de significados aos conteúdos do campo:

<sup>15</sup> Grifo nosso.



4.5.1 – Números e operações;

4.5.2 – Álgebra;

4.5.3 – Geometria;

4.5.4 – Grandezas e medidas (incluindo as grandezas geométricas);

4.5.5 – Tratamento da informação (estatística, probabilidade e combinatória).

4.6 – A coleção articula os diferentes significados de um mesmo conceito;

4.7 – A coleção articula as diferentes representações matemáticas (língua materna, linguagem simbólica, desenhos, gráficos, tabelas, diagramas, ícones, etc.);

4.8 – Na coleção há equilíbrio e articulação entre conceitos, algoritmos e procedimentos.

## **5 – Observância das características e finalidades específicas do manual do professor e adequação da coleção à linha pedagógica nele apresentada**

5.1 – O manual do professor explicita os pressupostos teóricos e os objetivos que nortearam a elaboração da coleção.

5.2 – Há coerência entre os pressupostos teóricos explicitados no manual do professor e o livro do aluno.

5.3 – O manual do professor emprega uma linguagem clara.

5.4 – O manual do professor traz subsídios para a atuação do professor em sala de aula:

5.4.1 – apresentando orientações metodológicas para o trabalho com o livro do aluno;

5.4.2 – sugerindo atividades diversificadas (projetos, pesquisas, jogos etc.) além das contidas no livro do aluno;

5.4.3 – apresentando resoluções das atividades propostas aos alunos;

5.4.4 – contribuindo para reflexões sobre o processo de avaliação do aluno.

5.5 – O manual do professor favorece a formação e a atualização do professor:

5.5.1 – sugerindo leituras complementares;

5.5.2 – apresentando a bibliografia utilizada pelo autor;

5.5.3 – indicando fontes de informação.

## **6 – Adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico aos objetivos didático-pedagógicos da coleção**

6.1 – A coleção apresenta as ilustrações sem erros ou indução a erro que comprometam a compreensão do conteúdo matemático.

### **Parte textual**

6.2 – A estrutura da coleção é hierarquizada (títulos, subtítulos etc.), sendo evidenciada por meio de recursos gráficos.

6.3 – A coleção apresenta um sumário que auxilia na localização dos conteúdos matemáticos.

6.4 – A coleção apresenta índice remissivo.

6.5 – Na coleção, a revisão é isenta de erros.

### **Linguagem**

6.6 – A linguagem utilizada na coleção é adequada ao aluno a que se destina quanto:

6.6.1 – ao vocabulário;

6.6.2 – à clareza na apresentação dos conteúdos e na formulação das instruções;

6.6.3 – ao emprego de vários tipos de texto.

### **Qualidade visual**

6.7 – Os textos e ilustrações da coleção são distribuídos nas páginas de forma adequada e equilibrada.

6.8 – Na coleção os textos mais longos são apresentados de forma a não desencorajar a leitura.

### **Ilustrações**

6.9 – As ilustrações enriquecem a leitura dos textos, auxiliando a compreensão.

**OUTRAS OBSERVAÇÕES**

Acrescente observações adicionais, se julgar necessário.

(BRASIL, 2010, p. 26-31)

*Anexo C – Atividades sobre estatística e probabilidade presentes em Projeto Teláris, Editora Ática, avaliado no PNLD 2014*

**Projeto Teláris, 6º ano**

<b>Página</b>	<b>Descrição da atividade</b>
10	Abertura da unidade 1 – gráfico de barras. Aumento da população mundial
14	Questão 1 – envolvendo quadro. Sistema de numeração.
17	Teoria – envolvendo quadro de dupla entrada. Sistema de numeração indo-arábico.
28	Questão 44 – gráfico, localização de pares ordenados (sistema cartesiano).
29	Números naturais e raciocínio combinatório.
30	Seção: Tratamento da Informação; questões 53 e 54 envolvendo tabelas, quadros e gráficos de barras verticais.
31	Seção: Outros contextos – questão 55 envolvendo tabela.
32	Questão 57 – envolvendo quadro. Capacidades das arenas de alguns Estados.
36	Questão 5 – envolvendo quadro de dupla entrada.
47	Seção: Curiosidade matemática envolvendo combinações.
48	Questão 32: quadro de dupla entrada.
53	Divisão pelo método das estimativas.
63	Seção: Tratamento da informação – questão 77 envolvendo quadro sobre quantidade de animais em extinção por classe e exercício 78 envolvendo gráfico de barras verticais sobre número de veículos vendidos por mês.
64	Seção: Outros contextos – questão 79 – envolvendo mapa e quadro.
65	Questões: 1 e 2 sobre quadro com resolução no manual do professor; 6 sobre possibilidades (diagrama de árvore); 9 sobre gráfico de barras.
91	Quadro sobre o número de lados de figuras geométricas
98	Gráfico: localizar pontos no ponto cartesiano.
99	Questão 86 sobre interpretação de gráfico de linhas.
101	Seção Cumulativa - Questão 3 envolvendo quadro.
106	Introdução do capítulo – árvore das possibilidades.
111	Teoria sobre Diferença entre produto e potência utilizando quadro e gráfico de barras múltiplas.
112	Questão 22 envolvendo quadro.
112	Questão 23 sobre possibilidade.
119	Seção: Tratamento da Informação; Questões: 46 sobre construção de gráfico de barras em papel quadriculado; 47 sobre construção de quadro e gráfico de barras em papel quadriculado.
140	Questão 54 envolvendo quadro sobre o número de lápis e preço.

145	Seção: Tratamento da informação - questão 71 sobre interpretação de quadro e de gráfico de barras verticais.
146	Seção: outros contextos - questão 72 sobre tabela.
147	Questão 12 – envolvendo quadro.
157	Teoria: Fração como comparação de dois números naturais. Probabilidade (moeda e dado). Questão: 12 sobre probabilidade (dado)
174	Questão 72 – gráfico de setores (não usa esse nome), porém aborda cada pedaço como setor.
187	Seção: Tratamento da Informação; interpretação de gráfico de setores. Exercícios 119, 120 e 121.
193	Questão 6 – envolve estimativa.
211	Questão 62 – envolve quadro sobre consumo e valor.
213	Gráfico de linha.
217	Seção: Tratamento da Informação; interpretação de gráfico de barras. Questão 84 com resolução no manual do professor, p. 88.
218	Seção: Outros contextos – envolve quadro.
222	Abertura de unidade- gráfico pictórico na forma de colunas
230	Teoria – Quadro sobre intensidade sonora.
231	Questão 14 – envolve quadro.
249	Seção: Tratamento da Informação; Interpretação de pictogramas. Exercício 68.
250	Seção outros contextos - questão 70 sobre quadros.
257	Questão 13 – envolve quadro.
267	Questão 49 – envolve quadro.
271	Seção: Tratamento da Informação; interpretação de gráficos de barras e de segmentos. – questões 62 e 63.
273	Seção: Revisão cumulativa – Questões: 1 sobre gráfico de setores; 7 sobre gráfico de barras.
278	Glossário – Estatística, Estimativa .
280	Glossário – Média aritmética.
282	Glossário – Possibilidade, Probabilidade.

### **Manual do professor, 6º ano**

<b>Página</b>	<b>Descrição da atividade</b>
47	Comentário: Diz que trabalha intuitivamente a probabilidade, porém notamos que só há uma página com uma atividade.
65	Resposta do exercício 23 da página 112.
78	Traz comentário genérico sobre probabilidade.

**Projeto Teláris, 7º ano**

<b>Página</b>	<b>Descrição da atividade</b>
14	Texto na seção leitura – quadro – leitura e interpretação de dados.
15	Questão: 6 sobre gráfico de segmentos e construção de tabela com resolução no manual do professor
16	Questão 7 envolvendo quadro – interpretação de dados
31	Questão 48 envolvendo quadro.
32	Texto na seção leitura – gráfico de barras verticais
39	Questão 72 – gráfico de barras verticais.
41	Teoria envolvendo gráfico (coordenadas cartesianas).
42	Questão 76 envolvendo gráfico.
45	Seção: Tratamento da Informação; sobre interpretação de gráficos e tabelas.
46	Seção: Outros contextos – questão: 92 sobre gráfico de barras verticais.
47	Questão 93 – sobre completar quadro.
59	Questões 19 e 21 – quadro de dupla entrada.
61	Questão 27 –localização no plano cartesiano.
77	Seção: Tratamento da Informação; interpretação de gráfico de linhas e de quadro.
87	Questão 5 envolvendo quadro.
106	Teoria envolvendo quadro.
112	Seção: Tratamento da Informação: questões 79 e 80 - sobre interpretação de gráfico de colunas.
113	Seção: Outros contextos - questão: 81 quadro.
114	Questão 82 – sobre interpretação de gráficos de barras verticais múltiplas.
118	Teoria envolvendo quadro.
140	Seção: Tratamento da Informação - sobre interpretação de informações pictográficas.
141	Seção: Outros contextos – questão 64 envolvendo quadro para análise de dados com resolução no Manual do Professor.
149	Análise de dados em quadro.
163	Seção: Tratamento da Informação – interpretação de quadros e construção de gráficos.
165	Seção: Outros contextos – questão 56 envolvendo quadro.
192	Questão 72 envolvendo quadro.
199	Seção: Tratamento da informação – questão 88 quadro e questão 89 sobre estimativa.

204	Introdução da unidade 4 envolvendo tabela.
216	Teoria envolvendo quadro.
223	Questão 51 envolvendo quadro.
227	Questão 60 envolvendo quadro.
230	Teoria envolvendo quadros.
236	Seção leitura envolvendo quadro e gráfico.
238	Seção: Tratamento da Informação – Questões 93 e 94; sobre interpretação de gráfico de colunas
240	Seção: Outros contextos - questão: 96 sobre quadro de dupla entrada, com resolução no manual do professor.
243	Teoria envolvendo quadro.
244	Questão 5 envolvendo quadro.
250	Teoria envolvendo gráfico de linha e porcentagem.
252	Questão 39 para completar quadro.
257	Seção: Tratamento da Informação – questão 48 sobre interpretação de dados com porcentagem
260 a 277	Capítulo 9: Noções de Estatística e Probabilidade – população e amostra, objeto de pesquisa, variável e valor da variável, frequência absoluta e frequência relativa, média aritmética, média ponderada, probabilidade – teoria e exercícios
271	Seção oficina de matemática, com 4 experimentos sobre probabilidade.
275	Seção: Tratamento da Informação – questão 39 interpretação de gráfico de colunas e questão 40 sobre árvore de possibilidades.
276	Questões 41 e 42 – média aritmética
277	Seção: Revisão Cumulativa: Questões: 1 e 9 sobre probabilidade frequentista, 4 sobre probabilidade clássica . Questões: 3 e 4 com resolução no manual do professor.
279	Verifique o que estudou – Solicita que seja elaborada uma questão sobre probabilidade.
281	Glossário – Dado estatístico, Estatística
282	Glossário – Gráfico de barras ou colunas.
283	Glossário – Indivíduo em estatística
285	Glossário – Média aritmética, Média aritmética ponderada
287	Glossário – População, Probabilidade, Teoria das Probabilidades, Variável em estatística,

### **Manual do professor, 7º ano**

<b>Página</b>	<b>Descrição da atividade</b>
50	Recomendação ao professor para estimular o aluno a preencher quadros e

	observar regularidades.
53	Exercícios e problemas suplementares – questão 3 envolvendo quadro.

### **Projeto Teláris, 8º ano**

<b>Página</b>	<b>Descrição da atividade</b>
10	Introdução Unidade 1 – gráfico (pictograma)
16	Teoria envolvendo quadro de dupla entrada.
21	Questão 18 envolvendo quadro.
27	Seção: Oficina de matemática envolvendo quadro.
38	Seção: Tratamento da Informação; sobre interpretação de quadro e gráficos de barras horizontais.
43	Questão 1 envolvendo quadros.
44	Questão 4 – atividade em dupla envolvendo quadro.
57	Questão 40 para completar quadro.
62	Seção: Tratamento da Informação; sobre interpretação de gráfico de linhas.
63	Seção: Outros Contextos – questão 58 envolvendo quadro.
65	Seção: Revisão Cumulativa: Questão: 8 sobre gráfico de barras verticais.
85	Questão 39 – completar dados num quadro.
115	Seção: Tratamento da Informação – sobre interpretação de gráfico de colunas (barras verticais).
117	Questão 8 sobre probabilidade – dado, sorteio de letras e de bolinhas.
148	Seção: Tratamento da Informação – questão 69 sobre interpretação de gráfico de segmentos (resolução no manual do professor).
149	Seção: Outros contextos – questão 70 item b para completar quadro.
178	Seção: Tratamento da Informação – questão 51 sobre interpretação de gráfico de colunas (barras verticais)
179	Seção: Outros contextos – questão 52 envolvendo tabela com resolução no Manual do professor.
180	Seção: Revisão cumulativa – questão 10 envolvendo gráfico de barras.
187	Teoria sobre gráfico de setores, gráfico de colunas e gráfico de segmentos.
188	Teoria de como determinar o ângulo de cada setor do gráfico.
189	Questão 12 envolvendo gráfico de setores.
190	Questão 15 sobre gráficos de setores e quadro e questão 16 gráfico de coluna para transformar em gráfico de setores.
203	Seção: Tratamento da Informação – questão 52 sobre gráfico de setores com resolução no Manual do professor.
205	Seção: Revisão cumulativa: Questão 8 sobre possibilidades e questão 11 sobre probabilidades.
233	Questão 61 para completar dados em um quadro.
234	Questões 63 e 64 para completar dados em um quadro.
237	Questão 67 para completar dados em um quadro.
242 e 243	Seção: Tratamento da Informação – questões 80 e 81 envolvendo gráficos de linha.
250	Questão para completar dados em um quadro

261	Seção: Tratamento da Informação – questão 34 sobre análise de gráfico, resolvida no manual do professor
263	Seção Revisão cumulativa – questão 2 sobre média aritmética e questão 11 sobre possibilidades.
264 a 280	Capítulo 9 – Estatística e Probabilidades: Sobre medidas de tendência central – teoria e exercícios envolvendo quadro, gráficos de setor e barras. Exercícios 6 e 8 com resolução no manual do professor. Desafio contendo gráfico (p. 273) com resolução no Manual do Professor. Probabilidade – experimento aleatório e p. 274 espaço amostral, evento, cálculo de probabilidade, evento impossível e evento certo, teoria e exercícios. Questões: 21 (p. 277) e 26 e 27 (p.279) com resolução no manual do professor.
281	Seção: Oficina da matemática – Jogo sobre probabilidade frequentista.
282	Seção: Tratamento da Informação – questão 33 sobre interpretação de gráfico, elaboração de quadro, construção de gráfico de setores média aritmética, mediana e probabilidade com resolução dos itens a e b no Manual do professor
283 e 284	Seção: Outros contextos – questão 34 envolvendo gráfico de barras verticais. Questão 35 sobre probabilidade com resolução no manual do professor. Questão 36 envolvendo quadro, média aritmética e média aritmética ponderada (resolução dos itens b e c no Manual do Professor e, item e sobre construção de gráfico de barras com sugestão no Manual do professor.
285	Seção: Revisão cumulativa – questão 1 envolvendo tabela, média, mediana e moda com resolução no Manual do professor. Questões 4 e 9 sobre probabilidade.
287	Verifique o que estudou: exercício 5
292	Glossário: Experimento aleatório, espaço amostral, evento
294	Média aritmética, média aritmética ponderada, mediana, moda.

### **Projeto Teláris, 9º ano**

<b>Página</b>	<b>Descrição da atividade</b>
26	Seção Tratamento da informação: Questão 27 – gráfico de barras verticais com resolução na Manual do Professor. Questão 28 sobre análise de gráfico de barras verticais. Questão 29 (Enem – adaptado) envolvendo quadro.
29	Seção: Revisão Cumulativa: Questão: 8 –gráfico de setores
61	Seção: Tratamento da Informação: Questão 64 sobre gráfico de segmentos
72	Questão 1 envolvendo quadro
73	Questão 3 envolvendo quadro e gráfico de reta
74	Questão 4 envolvendo quadro
75	Questão 8 envolvendo gráfico de função utilizando linha e barras verticais.
81	Questão 16 envolvendo tabela.
90	Questão 40 envolvendo quadro
95	Teoria envolvendo gráfico de parábola, Questão 48 para completar quadro
103	Seção: Tratamento da Informação – questão 57 sobre interpretação de gráficos relacionados a funções. Itens b e c com resolução no manual do professor.
104	Questão 60 envolvendo quadro.



105	Questão 62 sobre tabela.
106	Seção: Revisão cumulativa --questão 4 sobre análise de gráfico, questão 6 para completar quadro e escolha de gráfico que melhor expressa a quadro e questão 10 envolvendo média aritmética
128	Seção: Tratamento da informação: questão 43 envolvendo quadro, média aritmética, moda e construção de gráfico de colunas com resolução dos itens b e d no manual do professor
131	Seção: Revisão cumulativa – questão 3 envolvendo possibilidades
156	Questão 58 para completar quadro
171	Seção: Tratamento da informação – questão: 89 sobre porcentagem e gráfico de setores
171	Seção: Outros contextos – questão 92 análise de gráfico de setores envolvendo uma encuesta
200	Seção: Tratamento da informação – questões: 45 sobre gráfico de barras verticais e média ponderada, 46 sobre quadro, gráfico de barras verticais e média ponderada, 47 sobre quadro e média ponderada, 48 sobre gráfico de setores. Questões 45 a 47 com resolução no manual do professor
205	Questão 6 para completar quadro.
214	Questão 26 para completar quadro.
218	Questão 40 para completar quadro.
221	Questão 44 para completar quadro.
222 e 223	Questão: 50 sobre quadro, média aritmética, moda, mediana, porcentagem, gráfico de barras, gráfico de setores e gráfico de segmentos em papel quadriculado, com resolução no manual do professor.
254	Questão 56 para completar quadro.
261	Questão 89 envolvendo quadro e construção de gráfico.
264	Seção: Tratamento da informação --questão 91 sobre quadro, gráfico e probabilidade
268 a 297	Capítulo 9: Estatística, combinatória e probabilidade, sobrevalor variável e não variável, frequência absoluta e frequência relativa (p. 271 questão 3 e 4), quadro de frequência por intervalos (p. 272 questões 5 a 9 com resolução no manual do professor), gráfico de segmentos, gráfico de barras horizontais ou barras verticais, gráfico de setores, histograma (p.281 exercícios 20 e 22 com resolução no manual do professor) e pictogramas,
284 a 297	Continuação do capítulo 9: Estatística, combinatória e probabilidade - teoria sobre Combinatória: métodos de contagem – princípio multiplicativo. Problemas de contagem (p. 289 questões 39 e 40 com resolução no manual do professor), probabilidade condicional, distribuição probabilística (p. 293 – questão 47 com resolução no manual do professor), Estatística e Probabilidade (p.295 questões 55 e 56 com resolução no manual do professor) e Estimando probabilidades envolvendo tabelas.
298	Questões do Enem: sobre quadro, sobre gráfico de barras verticais – questão 61 com resolução no manual do professor, sobre gráfico de barras horizontais.
299 e 300	Seção: Outros contextos – questões 63 e 64 envolvendo quadro, variáveis qualitativas e quantitativas, média, probabilidade e probabilidade geométrica (questão 64 com resolução no manual do professor). Questões 65 e 66 envolvendo quadros, porcentagem, construção de gráficos de barras horizontais com resoluções no manual do professor.
301	Seção: Revisão cumulativa: Questão 1 envolvendo quadro de frequência, construção de histograma, questão 4 sobre medidas de tendência central e quadro de frequências com resoluções no manual do professor. Questão 7 sobre probabilidade e questão 8 sobre possibilidades.
306	Glossário – Estatística

307	Glossário – Frequência absoluta e frequência relativa
308	Glossário – Histograma
309	Glossário – Princípio multiplicativo
310	Glossário – Probabilidade
311	Glossário –Teoria das probabilidades

*Anexo D – Atividades sobre estatística e probabilidade presentes em Matemática: Bianchini, Editora Moderna, avaliado no PNLD 2014*

**Matemática: Bianchini, 6º ano**

<b>Página</b>	<b>Descrição da atividade</b>
26 e 27	Seção: Trabalhando a informação; sobre construção de tabelas – com exemplos e exercícios.
29	Seção: Diversificando envolvendo quadro.
39	Teoria envolvendo quadro.
42 e 43	Seção: Trabalhando a informação; Interpretando gráfico de colunas – teoria e exercícios.
49	Questão 47 envolvendo quadro.
50 e 51	Princípio multiplicativo e árvore de possibilidades – teoria e exercícios.
52	Questões 48 a 54 sobre possibilidades.
72	Seção: Trabalhando a informação – Interpretando gráfico de barras
73	Questão 125 envolvendo quadro.
74	Questão 127 envolvendo gráfico de barras verticais.
89 e 90	Seção: Trabalhando a informação; Construindo gráfico de colunas – teoria e exercícios envolvendo quadro e construção de gráfico em papel quadriculado.
109	Teoria envolvendo tabela.
115 e 116	Seção: Trabalhando a informação; Construindo gráfico de barras horizontais – teoria e exercícios envolvendo quadro e construção de gráfico.
151	Questão 21 envolvendo tabela.
153 e 154	Seção: Trabalhando a informação; Dados em forma percentual – exemplo com gráfico de barras verticais – teoria e exercícios percentual, quadro e construção de gráfico.
155	Exercícios: 26 sobre princípio multiplicativo e 27 sobre gráfico e porcentagem.
160 e 161	Seção: Trabalhando a informação; Interpretando um gráfico de setores – teoria e exercícios.
167	Exercício: 68 sobre gráfico de setores
168 e 169	Introdução do capítulo 9 envolvendo gráficos.
182	Questão 23 envolvendo gráfico de barras horizontais e porcentagens.
198	Seção: Trabalhando a informação; Calculando probabilidades – teoria e exercícios.
216	Exercício 35 sobre gráfico de barras verticais
230	Seção: Trabalhando a informação; Trabalhando com média – teoria e exercícios.
237	Exercício sobre gráficos de barras horizontais e seta.
238	Exercício 88 sobre gráfico de barras verticais e porcentagem
287	Exercício 35 sobre gráfico de barras verticais e porcentagem.
288	Exercício 36 sobre gráfico de setores.
289	Teoria envolvendo gráfico de colunas.
290	Exercício 42 sobre tabela.

313 e 314	Exercício 31 sobre gráfico de barras verticais.
316	Exercício 39 sobre gráfico de barras verticais (pictograma).
317	Exercício 40 sobre tabela.
321	Tabelas de informação nutricional.
328	Questão 63 envolvendo gráfico de barras verticais.

**Matemática: Bianchini, 7º ano**

Página	Descrição da atividade
12	Introdução do capítulo 1 – situação 4 envolvendo tabela.
13	Exercício 4 envolvendo tabela.
16	Exercício 14 envolvendo tabela.
23 e 24	Seção: Trabalhando a informação; Análise de tabelas – teoria e exercícios.
30	Exercício 53 envolvendo gráfico de barras verticais.
31	Exercício 55 envolvendo gráfico de barras horizontais.
43	Exercício 101 sobre gráfico de barras verticais.
59	Exercício 24 sobre gráfico de barras horizontais.
74	Construindo um gráfico de dupla coluna.
75	Exercício 1 sobre tabela e construção de gráfico de colunas duplas
92 e 93	Seção: Trabalhando a informação; Gráfico de setores – teoria e exercícios.
123	Seção: Trabalhando a informação; Médias e estimativas – teoria e exercícios.
141 e 142	Seção: Trabalhando a informação; Gráfico de barras verticais e tabela – teoria e exercícios.
151	Seção: Trabalhando a informação; Possibilidade e probabilidade – teoria e exercícios.
160 e 161	Seção: Trabalhando a informação; Gráficos de colunas e de linha – teoria e exercícios.
185	Seção: Pense mais um pouco envolvendo quadro.
197	Seção: Trabalhando a informação; Gráfico de barras horizontais – teoria e exercícios.
199	Exercício: 34 sobre gráfico de barras verticais
206	Exercício 3 envolvendo quadro
211	Teoria envolvendo tabela
216 e 217	Seção: Trabalhando a informação; Construção de gráficos de barras e de colunas – teoria e exercícios.(Dados em um infográfico)
226	Exercício 33 sobre gráfico de barras horizontais
229	Exercícios 43 sobre gráfico de barras verticais.
230	Exercício 47 sobre gráfico de setores.
231 a 233	Seção: Trabalhando a informação; Construção de gráfico de setores – teoria e exercícios.
241	Seção: Trabalhando a informação; Estimativa – teoria e exercícios.
259 e 260	Seção: Trabalhando a informação; Pictograma – teoria e exercícios.

263	Seção: Diversificando; Gráfico de barras verticais – teoria e exercícios.
-----	---

**Matemática: Bianchini, 8º ano**

Página	Descrição da atividade
25 e 26	Seção: Trabalhando a informação; Construção de gráfico de setores – teoria e exercícios.
57 e 58	Seção: Trabalhando a informação; Construindo e interpretando gráfico de linhas – teoria e exercícios.
89 e 90	Seção: Trabalhando a informação; Interpolação e extrapolação gráfica – gráficos de colunas e de linhas duplas – teoria e exercícios.
102	Seção: Pense mais um pouco envolvendo tabela e construção de setores
205 e 206	Seção: Trabalhando a informação; Construção de gráficos de barras – teoria e exercícios.
213 e 214	Seção: Trabalhando a informação; Composição com gráfico de linhas – teoria e exercícios envolvendo gráficos, tabela e média.
246	Exercício 34 envolvendo gráfico de setores

**Matemática: Bianchini, 9º ano**

Página	Descrição da atividade
17	Exercícios 9 e 14 para completar quadro
22	Exercício 27 sobre gráfico de dupla coluna
78 a 107	Capítulo: Estatística e probabilidade; Origem da estatística, obtenção, organização e apresentação de dados, apresentação de resultados – gráficos de colunas, barras, setores, linhas, múltiplas entradas, pictograma, cartograma, infográfico, frequência relativa, medida de tendência central, estimativa, probabilidade – teoria e exercícios.
136 e 137	Seção: Trabalhando a informação; Leitura de mapa, anamorfose geográfica – teoria e exercícios.
154 e 155	Seção: Trabalhando a informação; Gráfico usado em geografia – pirâmide – teoria e exercícios.
176	A representação de um relevo – gráfico de linha
231	Seção: Trabalhando a informação; Gráficos de semicorôa circular – teoria e exercícios.

*Anexo E – Atividades sobre estatística e probabilidade presentes em Matemática:  
Imenes e Lellis, Editora Moderna, PNLD 2014*

**Matemática: Imenes e Lellis, 6º ano**

<b>Página</b>	<b>Descrição da atividade</b>
15	Problemas para casa: exercício 6 para completar quadro.
22 e 23	Tratamento da informação: organização e apresentação de dados; teoria sobre representação de números, arredondamentos, tabelas e gráficos de barras verticais.
24 a 26	Seção: Conversar para aprender; Problemas e exercícios sobre gráfico de barras verticais (exercício 22), gráfico de linha (exercício 24) e completar tabela (exercício 29) com comentários para o professor.
27 e 28	Tratamento da informação: contagem de possibilidades; Seção Conversar para aprender; Problemas com comentários e resolução no guia do professor.(Problemas 31 a 36).
29 e 30	Seção: Ação; sobre criação de problema sobre possibilidades com resolução no guia do professor; Problemas: sobre contagem de possibilidades. Comentários e respostas no guia do professor (problemas 37 ao 43).
34 e 35	Seção: Para não esquecer; sobre gráficos e quadros.
35 e 36	Testes: sobre possibilidades e gráficos. Exercício 7 – sobre gráfico de barras verticais e exercício 9 – sobre possibilidades.
41	Exercício 2 para completar quadro.
42	Exercício 9 para completar quadro.
57	Exercício 4 para completar quadro.
58	Exercício 6 para completar quadro (comentários no guia do professor).
69	Exercício 46 envolvendo quadro (comentários no guia do professor).
72	Exercício 55 envolvendo quadro.
73	Exercício 60 envolvendo quadro (comentários no guia do professor).
75	Seção: Supertestes – teste 6 para completar quadro.
111	Exercício 26 envolvendo quadro de dupla entrada (comentários no guia do professor).
114	Exercício 34 para completar quadro.
116	Exercícios 44 e 45 para completar quadros. (comentários no guia do professor).
119	Exercício 54 para completar quadros (comentários no guia do professor).
143	Exercício 10 para completar quadro (porcentagens).
154	Seção: Tratamento da informação - sobre construção de gráficos de barras em papel quadriculado dada.
155	Seção: Atividades de construção Exercícios 15 (comentários no guia do professor) e 16 sobre atividades envolvendo gráficos de barras em papel quadriculado dada uma tabela
156	Seção: Atividades de construção para casa sobre pesquisa acerca do tempo semanal dedicado ao estudo em casa – coleta de dados (por estimativa), tabela de frequências e construção do gráfico de barras em papel quadriculado.
157 e 158	Seção Tratamento da informação: sobre construção de gráficos de setores.
159	Seção: Atividades de construção para completar tabela. (porcentagem)

161	Seção: Para não esquecer sobre construção de gráfico de barras verticais (papel quadriculado) e gráfico de setores (dobradura).
175 e 177	Exercícios 32, 33 p e 40 para completar quadros.
182	Exercício 8 sobre análise de dados num quadro.
193	Exercício 42 sobre análise de tabela (comentários no guia do professor)
195	Seção: Tratamento da informação sobre média aritmética.
196	Seção: conversar para aprender – com comentários no guia do professor, Questão: 49 – sobre gráfico de barras verticais e média aritmética.
197	Questões: s 50 e 55– sobre média ponderada, Questão: 56 – sobre média.
211	Exercício 17 sobre média (comentários no guia do professor).
212	Exercício 24 sobre média ponderada.
214 e 215	Exercício 31 e 35 para completar quadros, exercício 34 para observar regularidades.
221 e 222	Exercício 3 para completar tabela (comentários no guia do professor) e Exercícios 6 e 8 para completar tabelas.
231	Exercício 28 para completar quadro.
241	Seção: Ação – exercício 4 para completar quadro.
255 e 258	Exercícios 3, 5 e Problema 13 para completar quadro.
280	Dicionário – Dados estatísticos, Estatística.
283	Dicionário – Frequência
285	Dicionário – Gráfico de barras
287	Dicionário – Média aritmética, Média aritmética ponderada
291	Dicionário – Pesquisa Estatística
293	Dicionário – Possibilidades.

### **Matemática: Imenes e Lellis, 7º ano**

<b>Página</b>	<b>Descrição da atividade</b>
14	Teoria envolvendo quadros.
22	Exercício 23 para completar quadros.
27	Exercício 35 para completar quadro.
49	Exercício 36 para completar quadro.
59	Exercício 5 para completar quadro.
61 e 62	Exercício 13 para completar quadro (comentários no guia do professor).
70, 71 e 72	Seção: Tratamento da informação - sobre padrões e possibilidades
72	Seção: conversar para aprender sobre possibilidades – itens f, g – comentários no guia do professor.
72 e 73	Problemas 36 ao 40 envolvendo padrões e possibilidades.
74	Seção Ação/ investigação – possibilidades no jogo da velha (comentários no guia do professor)
75	Problemas 41 ao 47 envolvendo padrões e possibilidades.
77	Seção: Supertestes - testes 1 ao 10 – sobre princípio multiplicativo (possibilidades).
83	Exercício 4 para completar quadro.

84	Seção: Ação – jogo de estimativas.
89	Problema 28 para completar quadro (comentários no guia do professor).
93	Exercício 34 sobre cálculo de porcentagens.
103	Exercício 12 sobre estimativas (comentários no guia do professor).
106	Exercício 16 para completar quadro.
107	Exercício 21 para completar quadro.
108	Problema 24 para completar quadro.
111	Teoria envolvendo quadro.
115	Problema 48 envolvendo quadro.
122 a 124	Problema 1, 4 e 8 envolvendo quadro e 6, gráfico.
126	Teoria envolvendo quadro.
127	Exercício 15 para completar quadro.
128	Exercício 18 envolvendo quadro (comentários no guia do professor).
129	Exercício 23 envolvendo gráfico de barras verticais.
133	Exercício 28 para completar quadro (comentários no guia do professor).
142	Superteste 5 –quadro
145	Teoria envolvendo quadro
146	Exercício 2 envolvendo quadro (comentários no guia do professor) e exercício 3 para completar quadro.
148	Problema 7 envolvendo quadro.
150 e 151	Teoria envolvendo quadro.
152	Problema 12 e 13 (comentários no guia do professor) para completar quadro.
154, 155 e 156	Seção: Tratamento da informação aplicando a ideia de proporcionalidade: escalas, gráfico de setores, pesquisas estatísticas.
156	Seção: Conversar para aprender: itens d, e envolvendo cálculos com porcentagens. Item e com comentários no guia do professor.
157	Problemas 25 –pesquisa estatística e 26 – gráfico de setores, Problema 29 – sobre porcentagem e Problema 30 sobre gráfico de setores.
158	Teoria envolvendo quadro.
159	Exercício 31 para completar tabela.
160	Problema 33 para completar quadro (comentários no guia do professor)e problema 35 para completar tabela
162 e 163	Teoria envolvendo quadro.
164	Exercícios 4 e 6 envolvendo quadro. Exercício 8 envolvendo análise de gráfico de setores.
187, 188 e 189	Teoria sobre gráficos de segmentos.
189, 190 e 191	Problemas 36 e 37 envolvendo gráfico de segmentos, com comentários no guia do professor. Problema 38 envolvendo tabela. Problemas 39 e 40 envolvendo gráfico de segmentos com comentários no guia do professor. Problema 41 envolvendo construção de gráfico de segmentos em papel quadriculado.
194	Seção: Supertestes – testes 7 e 10 envolvendo gráfico de segmentos.
198, 199 e 201	Teoria envolvendo quadro e exercício 5 e 10 para completar quadro.
205	Exercícios 15 e 16 (comentários no guia do professor) envolvendo gráficos de barras verticais.



207	Exercício 21 para completar quadro (comentários no guia do professor).
210	Exercício 32 para completar quadro
216 e 217	Problema 1, 5 e 7 para completar quadro (comentários no guia do professor).
218 e 219	Problema 8, 14 e 15 para completar quadro. Problema 14 com comentários no guia do professor
244, 245 e 246	Teoria envolvendo quadro. Item a da seção Conversar para aprender envolvendo quadro. Problema 43 envolvendo quadro.
254	Seção: Ação – completar quadro.
255 e 257	Exercício 2, 11 e 14 para completar quadro.
263	Problema 25 envolvendo quadro com comentários no guia do professor.
270 e 271	Capítulo 13 – Tratamento da informação - sobre um pouco de estatística, informações estatísticas (população, estimativa, pesquisa de amostragem), gráficos de setores e barras verticais .
272	Seção: Conversar para aprender sobre estatística com comentários no guia do professor.
273 a 276	Exercícios 1 a 4 e Problemas 5 a 9 envolvendo os assuntos de tratamento da informação.
281 a 283	Teoria sobre chance ou probabilidade.
284	Seção: Conversar para aprender e Problemas 19 e 20 sobre chance e probabilidade.
285	Seção: Ação sobre investigação – simulação estatística (possibilidade).
286	Problemas 21 a 23 sobre probabilidade. Problema 23 com comentário no guia do professor.
287	Para não esquecer – Estatística, Razão, Chances de um acontecimento.
288 e 289	Seção: Supertestes -testes 1 a 10 envolvendo chance e probabilidade, tabela e gráficos de barras verticais e setores.
292	Dicionário – Árvore de possibilidades.
295	Dicionário – Dados estatísticos, Estatística, Estimativa.
298	Dicionário – Frequência, Gráfico de barras.
300	Dicionário – Segmentos e setores.
302	Dicionário – Média aritmética, Média aritmética ponderada.
306	Dicionário – Pesquisa estatística.
307	Dicionário – Possibilidades.

### **Matemática: Imenes e Lellis, 8º ano**

<b>Página</b>	<b>Descrição da atividade</b>
17	Seção: Ação – para completar quadro.
21	Exercício 16 envolvendo quadro.
25 e 26	Problemas 32, 33 e 34 para completar quadro. Problema 33 com demonstração no guia do professor.
31	Exercício 6 para completar quadro.
37, 41 e 46	Exercício 27, 39 e 55 para completar quadro.
53	Exercício 2 envolvendo quadro.
69	Seção: Um pouco da Matemática do dia a dia sobre gráfico de segmentos.
71	Exercício 4– sobre gráfico de segmentos.

72	Exercício 6 – sobre gráfico de setores.
75	Exercício 17 – sobre gráfico de segmentos.
76 e 77	Teoria sobre noções de porcentagem.
77	Seção: conversar para aprender – porcentagem
78	Problemas e exercícios 18 a 24 envolvendo porcentagem e tabelas.
79 e 80	Problemas e exercícios 25 a 33– sobre porcentagem e 34– sobre gráfico de setores.
82	Seção: Supertestes: testes: 5– sobre gráfico de segmentos, 6, 7 e 8 – sobre porcentagem.
87	Exercício 2 para completar quadro.
88	Problema 10 envolvendo quadro com comentário no guia do professor.
95	Seção: Resolvendo problemas envolvendo quadro.
102	Seção: Supertestes: teste 9 envolvendo quadro e gráfico de setores.
118, 121 e 128	Exercícios 34, 40 e 54 para completar quadro.
152	Exercício 23 envolvendo tabela com comentário no guia do professor.
159 e 160	Exercício 46 envolvendo gráficos de segmentos e transformação em linha curva, com comentário no guia do professor.
165	Exercício 60 para completar quadro.
168 a 170	Capítulo 8 – Tratamento da informação sobre organizando e interpretando dados – gráficos de setores, de barras verticais e de segmentos; razões.
171	Sobre Estatística: de onde vem? – leitura
172	Seção Conversar para aprender envolvendo o conteúdo de tratamento da informação.
172 a 175	Exercícios 1 ao 11 envolvendo o conteúdo de tratamento da informação. Exercício 4 com comentários no guia do professor.
176 a 178	Sobre possibilidades e probabilidades.
179 a 181	Seção: conversar para aprender e Problemas 12 a 24 envolvendo o conteúdo sobre possibilidade e probabilidades. Problema 16 com comentários no guia do professor.
182 e 183	Seção: Tirando conclusões com estatística e seção: conversar para aprender envolvendo o conteúdo de possibilidades e probabilidades.
184 a 186	Problemas 25 a 34 e seção: Ação sobre possibilidades e probabilidades . Seção: Ação com orientações e comentários no guia do professor.
188	Seção: Supertestes testes: 1, 2, 3 4, 5– sobre possibilidade, probabilidade; 6 – sobre média; 7 – sobre gráfico de setores e estimativa com porcentagem.
189	Teoria envolvendo quadro.
191	Exercício 4 e para completar quadro.
207	Exercícios 42 e 44 para completar quadros.
272 a 276	Exercícios 1, 2 , 3, 4, 5e 11 para completar tabelas.
286	Dicionário – Árvore de possibilidades.
289	Dicionário – Dados estatísticos, Estatística.
291	Dicionário –Gráfico de barras, de segmentos e de setores.
293	Dicionário – Média aritmética.
299	Dicionário – Pesquisa estatística.
300	Dicionário – Possibilidades, Probabilidades.

**Matemática: Imenes e Lellis, 9º ano**

<b>Página</b>	<b>Descrição da atividade</b>
41	Teoria envolvendo quadro
45 e 46	Exercícios 10 e 17 (comentário no guia do professor) envolvendo tabela.
47	Seção: Ação para completar quadro.
78, 81 e 84	Teoria e exercício 14 envolvendo quadros.
96 a 98	Estatística, chances e possibilidades (árvore de possibilidades).
99	Seção: Conversar para aprender envolvendo o conteúdo de possibilidades – itens c, e, e, f com comentários no guia do professor.
99 a 102	Problemas 1 ao 12 envolvendo o conteúdo de possibilidades Problema 12 com comentários no guia do professor.
102 e 103	Teoria sobre probabilidade ou chance.
104	Teoria sobre Probabilidade e Estatística.
105	Seção Conversar para aprender envolvendo probabilidade. Itens d, g com comentários no guia do professor. Seção Ação/Investigação – probabilidade na teoria e na prática
106 a 108	Problemas 13 ao 27 sobre o conteúdo possibilidades, probabilidades, estatísticas.
108 a 111	Teoria sobre estatística – pesquisa estatística – populações envolvendo gráfico de setores.
111	Seção: Conversar para aprender, envolvendo o conteúdo de estatística e probabilidades.
112	Seção: Ação: amostragem funciona?, envolvendo quadros
113 a 115	Problemas 28 a 38 envolvendo o conteúdo de estatística e probabilidades.
116 e 117	Seção: Supertestes: testes 1 a 11 o conteúdo chance, estatística e probabilidades.
161 a 163	Teoria envolvendo quadros.
167	Problema 8 envolvendo tabela com comentários no guia do professor.
171 a 174	Teoria envolvendo organização de dados em quadros. Problema 24 envolvendo quadro com comentário no guia do professor. Problemas 26, 27 e 29 para completar tabelas.
200	Exercício 46 para completar quadro.
207, 208, 211, 213, 215, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223	Quadros – leitura, completar, interpretação.
272	Exercício 5 envolvendo tabela com comentário no guia do professor.
281	Dicionário – Amostra.
283	Dicionário – Árvore de possibilidades
284	Dicionário – Dados estatísticos, Estatística.
287	Dicionário –Gráfico de barras, de segmentos e de setores.
290	Dicionário – Média aritmética.
292	Dicionário – Pesquisa estatística.
293	Dicionário – Possibilidades, Probabilidades.
297	Dicionário – Média aritmética, mediana.

301	Pesquisa estatística.
303	Probabilidade.