UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE DOUTORADO

RITA DE CÁSSIA BATISTA DA SILVA

JUSTIÇA EM JOGOS: COMPREENSÕES DE ESTUDANTES (CRIANÇAS E ADULTOS) E PROFESSORES À LUZ DE DEMANDAS COGNITIVAS DA PROBABILIDADE

RECIFE

2021

RITA DE CÁSSIA BATISTA DA SILVA

JUSTIÇA EM JOGOS: COMPREENSÕES DE ESTUDANTES (CRIANÇAS E ADULTOS) E PROFESSORES À LUZ DE DEMANDAS COGNITIVAS DA PROBABILIDADE

Tese de doutoramento apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito para obtenção do título de doutora.

Orientadora: Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Coorientadora: Profª. Drª. Ana Cláudia Correia Batalha Henriques

RECIFE

2021

Catalogação na fonte
Bibliotecária Natalia Nascimento, CRB-4/1743

S586j Silva, Rita de Cássia Batista da.
Justiça em jogos: compreensões de estudantes (crianças e adultos) e professores à luz de demandas cognitivas da probabilidade. / Rita de Cássia Batista da Silva. – Recife, 2021.
211 f.: il.

Orientadora: Rute Elizabete de Souza Rosa Borba.
Coorientadora: Ana Claudia Correia Batalha Henriques.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2021.
Inclui Referências.

1. Jogos Matemáticos – Justiça. 2. Matemática – Probabilidade - Espaço Amostral. 3. Educação de Jovens e Adultos - Matemática. 4. Matemática – Aleatoriedade. 5. UFPE - Pós-graduação. I. Borba, Rute Elizabete de Souza Rosa. (Orientadora). II. Henriques, Ana Claudia Correia Batalha. (Coorientadora). III. Título.

RITA DE CÁSSIA BATISTA DA SILVA

JUSTIÇA EM JOGOS: COMPREENSÕES DE ESTUDANTES (CRIANÇAS E ADULTOS) E PROFESSORES À LUZ DE DEMANDAS COGNITIVAS DA PROBABILIDADE

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, como requisito para a obtenção do título de Doutora em Educação Matemática e Tecnológica. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

.

Aprovado em: 15/06/2021

BANCA EXAMINADORA

____
Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba (Orientadora e presidente)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

____
Profª. Drª. Gilda Lisbôa Guimarães (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

____
Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

____
Profª. Drª. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho (Examinadora Externa)
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – UFPE

____
Prof. Dr. Lorí Viali (Examinador Externo)
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

DEDICATÓRIA

Para Suellen e Stella
Hoje e sempre.

"*Fizeste-me ver a claridade do mundo e a possibilidade da alegria.*
Tornaste-me indestrutível, porque, graças a ti, não termino em mim mesmo."
Pablo Neruda

AGRADECIMENTOS

Meio século de vida.

32 anos de efetivo e incansável exercício na Educação Básica.

Anos e anos de aprendizado na Academia.

Uma pandemia no meio do caminho. Um longo percurso.

A caminhada exigiu esforços e foi feita a muitas mãos e mentes e sorrisos e lágrimas.

Pouco provável poder listar todos que fizeram parte da minha jornada. Mas, gostaria de explicitar algumas dessas pessoas:

- **Minha família**: marido, filhas, mãe, irmãs e Spike (in memoriam) pelo incentivo e apoio irrestrito;

- Minha maravilhosa orientadora **Rute Borba**, que sempre me motivou, encorajou, provocou e apontou caminhos. Habitualmente vestida com o melhor sorriso e muita doação, desde os estudos do Mestrado;

- Minha coorientadora **Ana Henriques** que me acolheu e orientou em terras do além-Atlântico;

- **Minha banca**, que auxiliou e apontou fissuras para a melhoria permanente da construção de minha tese: Gilda Guimarães, Ivanildo Felisberto, Lovi Viali e Cileda Coutinho;

- **Geração**, o grupo de estudos mais ‘*purpurinado*’ de todo mundo, pelas contribuições, aperreios e risadas durante todo percurso;

- **Participantes da pesquisa**, tantos e plurais, pela disponibilidade e cooperação. Foram 60 pessoas entre brasileiros e portugueses, crianças e adultos. Sem eles, não seria possível chegar aqui;

- O **EDUMATEC** representado por todos os professores, especialmente os da linha de Processos de Ensino e Aprendizagem Matemática, bem como os técnicos que contribuíram nessa trajetória;

- Os **amigos acadêmicos**, que tornaram a caminhada mais leve, com muitos vinhos e piadas e cantorias e viagens e estudos e leituras. E também partilhas de dores e de dissabores, de sucessos e de avanços.

- **Colegas do trabalho**, pelo incentivo e crença permanente no meu potencial e no sucesso da empreitada que é estudar e aprender; arquitetar e desconstruir; pesquisar e analisar. Ousar;

Para esses e todos os demais companheiros de jornada da vida pessoal, profissional e acadêmica, tomarei emprestada palavras de quem poetisa a vida e sabe o valor dela para enfatizar meus agradecimentos.

“Chegar para agradecer e louvar.
Louvar o ventre que me gerou
O orixá que me tomou,
E a mão da doçura de Oxum que me consagrou.
Louvar a água de minha terra
O chão que me sustenta,
O palco, o massapê,
A beira do abismo,
O punhal do susto de cada dia.
Agradecer as nuvens que logo são chuva,
Que sereniza os sentidos
E ensina a vida a reviver.
Agradecer os amigos que fiz
E que mantém a coragem de gostar de mim, apesar de mim…
Agradecer a alegria das crianças,
As borboletas que brincam em meus quintais, reais ou não.
Agradecer a cada folha, a toda raiz,
as pedras majestosas
E as pequeninas como eu, em Aruanda.
Agradecer o sol que raia o dia,
A lua que como o menino Deus
espraia luz
E vira os meus sonhos de pernas pro ar.
Agradecer as marés altas
E também aquelas que levam para outros costados todos os males.
Agradecer a tudo que canta no ar,
Dentro do mato sobre o mar,
As vozes que soam de cordas tênues e partem cristais.
Agradecer os senhores que acolhem e aplaudem esse milagre.
Agradecer,
Ter o que agradecer.
Louvar e abraçar!”

(Maria Bethânia)

RESUMO

A presente pesquisa consubstanciou-se a partir de três estudos que se interconectaram entre si, objetivando analisar compreensões acerca de justiça em jogos à luz de demandas cognitivas da probabilidade concernentes à aleatoriedade, ao espaço amostral e à comparação de probabilidades. O Estudo 1 contou com a participação de 15 crianças do 5º ano e 15 estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA); o Estudo 2 estabeleceu um paralelo entre 15 crianças portuguesas (5º ano) e as crianças brasileiras do Estudo 1; no Estudo 3 foram investigados 15 professores dos anos iniciais, sendo: cinco brasileiros e cinco portugueses do ensino regular e cinco brasileiros da EJA. Utilizou-se seis diferentes jogos, associados a elementos da probabilidade, por meio de entrevista clínica e questionário, analisados a partir de demandas cognitivas da probabilidade, de construtos do pensamento probabilístico e de níveis de crenças em jogos. Os participantes dos distintos estudos apresentaram similitudes em suas compreensões no que tange à justiça em jogos considerando as conexões estabelecidas com elementos da probabilidade, tanto em relação a concepções coerentes do ponto de vista formal, como também a equívocos conceituais. De modo geral, os participantes associaram jogo justo à equiprobabilidade com conexões com sorte, incerteza, regras, uso de artefatos iguais e equilíbrio. As crianças e adultos (Estudo 1) apresentaram aproximação de desempenho, o que indica que a maturidade e a experiência dos estudantes adultos parecem não influenciar as compreensões acerca de jogos justos imbricados nos conceitos probabilísticos explorados. As crianças do Estudo 2, apresentaram compreensões similares em relação à justiça em jogos, evocando conceitos intuitivos análogos, que possibilita inferir que as diferentes culturas dessas crianças parecem também não influir em suas concepções. Os estudantes, sejam adultos ou crianças, em sua maioria, apresentaram compreensões típicas dos níveis mais elementares dos construtos do pensamento probabilístico, que denota fragilidades conceituais em relação a conceitos probabilísticos. Como esses estudantes não tiveram acesso formal a conceitos referentes à probabilidade, reforça-se a convicção de que há elementos probabilísticos que são somente consolidados por meio do ensino. Os professores, apresentaram compreensões pariformes com equívocos e potencialidades observados nos distintos grupos do Estudo 3. Na pesquisa, de forma geral, constatou-se fragilidade de compreensão dos participantes dos três estudos em relação a sequências aleatórias pelo tênue entendimento de independência de eventos, bem como, incompreensões acerca do raciocínio proporcional para comparar eventos de espaços amostrais distintos e equívocos sobre o espaço amostral, que, por conseguinte, implicaram em análises equivocadas de jogos (in)justos. Sinteticamente, pode-se concluir que compreensões e incompreensões acerca de elementos probabilísticos que envolvem demandas cognitivas da probabilidade influenciaram a avaliação dos participantes ao considerar um jogo justo, ou não. Assim sendo, os equívocos e acertos apresentados para avaliar a justiça em jogos possuem relação com conhecimentos de natureza probabilísticas que necessitam ser ensinados nas escolas.

Palavras-chaves: Justiça em jogos. Aleatoriedade. Espaço amostral. Comparação de probabilidades. Adultos e Crianças.

ABSTRACT

This research was based on three studies that interconnected with each other, aiming to analyze understandings about fairness in games in the light of cognitive demands of probability concerning randomness, sample space and comparison of probabilities. Study 1 had the participation of 15 fifth grade children and 15 students from Youth and Adult Education (Educação de Jovens e Adultos - EJA); Study 2 established a parallel between 15 Portuguese children (5th year) and the Brazilian children in Study 1; in Study 3, 15 teachers from the initial school years were investigated, being: five Brazilians and five Portuguese from regular education and five Brazilians from EJA. Six different games were used, associated with elements of probability, through clinical interview and questionnaire, analyzed from cognitive demands of probability, constructs of probabilistic thinking and levels of beliefs in games. The participants in the different studies showed similarities in their understanding of justice in games considering the connections established with elements of probability, both in relation to coherent conceptions from the formal point of view, as well as conceptual misunderstandings. In general, the participants associated fair play with equiprobability with connections with luck, uncertainty, rules, use of equal artifacts and balance. Children and adults (Study 1) showed an approximation of performance, which indicates that the maturity and experience of adult students do not seem to influence understandings about fair games intertwined with the explored probabilistic concepts. The children in Study 2, presented similar understandings in relation to justice in games, evoking similar intuitive concepts, which makes it possible to infer that the different cultures of these children also do not seem to influence their conceptions. Most students, whether adults or children, presented typical understandings of the most elementary levels of the constructs of probabilistic thinking, which denotes conceptual weaknesses in relation to probabilistic concepts. As these students did not have formal access to concepts related to probability, the belief that there are probabilistic elements that are only consolidated through teaching is reinforced. The teachers showed similar understandings with mistakes and potentialities observed in the different groups of Study 3. In the research, in general, weakness of understanding of the participants in the three studies was found in relation to random sequences due to the weak understanding of event independence, as well as, misunderstandings about the proportional reasoning to compare events of distinct sampling spaces and misunderstandings concerning the sampling space, which, consequently, implied in mistaken analyzes of (un)fair games. Synthetically, it can be concluded that understandings and misunderstandings about probabilistic elements that involve cognitive demands of probability influenced the evaluation of the participants when considering a game fair, or not. Therefore, the mistakes and successes presented to assess fairness in games have relationship with knowledge of a probabilistic nature that needs to be taught in schools.

Keywords: Justice in games. Randomness. Sample space. Comparison of probabilities. Adults and Children.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ESQUEMAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

"Terei que correr o sagrado risco do acaso.
e substituir o destino pela probabilidade."
Clarice Lispector

O incentivo ao ensino da Probabilidade tem se ampliado visivelmente no Ensino Fundamental, e especialmente nos anos inicias, como observado em documentos curriculares oficiais como a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000, 2001). Essa ampliação parece ser consenso entre diversos pesquisadores (BOROVCNIK e KAPADIA, 2010; BRYANT e NUNES, 2012, BATANERO, CHERNOFF, ENGEL, LEE e SANCHEZ, 2016; GAL, 2004) que defendem a inserção de objetos matemáticos de natureza probabilística desde os primeiros anos de escolarização para que se construa, de forma processual e contínua, o pensamento probabilístico.

No entanto, no Brasil, na Educação Básica, e, especialmente nos anos iniciais, o ensino da probabilidade foi, por muito tempo, negligenciado (LOPES, 2008; VIALI, 2008; COSTA E NACARATO, 2011; CAMPOS E PIETROPAOLO, 2013, FELISBERTO DE CARVALHO, 2017), apesar dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – documento norteador da educação brasileira até 2017 – apontarem, desde 1997, para a exploração do tema a partir do 4º ano. Em Portugal, as orientações curriculares presentes nos documentos oficiais como o Programa e Metas Curriculares (LISBOA, 2013) e Aprendizagens Essenciais do Ensino Básico (LISBOA, 2018) orientam a exploração da probabilidade apenas no 3º ciclo, especificamente no 7º ano. Dessa forma, nos anos inicias das escolas portuguesas não há trabalho pedagógico com temas probabilísticos. Por conseguinte, o que se pode conjecturar é que o currículo português se distancia, nesse aspecto, do que vem sendo apontado por estudos e por currículos de outros países.

Muitas razões podem ter contribuído para a negligência do ensino da probabilidade no Brasil. No entanto, pesquisas apontam mais fortemente para a falta de conhecimento do professor, em razão da sua formação inicial ou da formação continuada que não foram suficientes para instrumentalizá-lo para o exercício docente de assuntos de natureza probabilística. Costa e Nacarato (2011) alertam que no Brasil, além do fato da probabilidade ter sido introduzida muito tardiamente, em comparação com outros países, a inserção ocorreu sem uma formação prévia dos professores que precisam de um repertório de saberes para desenvolver adequadamente seu trabalho em sala de aula com esse conceito.

Viali (2008) afirma que um fator que influencia o ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Básica é a formação nem sempre adequada, recebida por licenciados em Matemática, para trabalhar com conteúdos dessa área. Corroborando com esta visão, Lopes (2008) advoga que "um dos principais impedimentos ao ensino efetivo de probabilidade e estatística na educação básica refere-se à formação dos professores que ensinam matemática nesses níveis de ensino: educação infantil, ensino fundamental e ensino médio" (LOPES, 2008, p.68). Para esta pesquisadora, a formação de professores não incorpora um trabalho sistemático sobre estocástica, impossibilitando os profissionais de desenvolverem um trabalho significativo em sala de aula. Viali e Cury (2011) complementam defendendo que mesmo com a publicação dos PCN que incentivou o trabalho com conteúdos que envolvem probabilidade, os cursos de licenciatura em geral, não têm proporcionado discussões sobre metodologias adequadas ao ensino de tópicos de Probabilidade e Estatística na Educação Básica.

Em um estudo realizado por Campos e Pietropaolo (2013) com 27 professores dos anos iniciais (4º e 5º anos) que procurou analisar concepções da probabilidade, constatou-se que os participantes da pesquisa "ainda não tinham os conhecimentos necessários para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais" (CAMPOS E PIETROPAOLO, 2013, p. 79).

Semelhante resultado, envolvendo professores dos anos finais, obteve Felisberto de Carvalho (2017) em seu estudo, cuja diagnose inicial identificou conhecimentos probabilísticos (noção de aleatoriedade, nos diferentes significados probabilísticos e na noção de risco) dos participantes. Os resultados indicaram que os professores apresentavam lacunas nos conhecimentos sobre o conteúdo probabilístico e seu ensino: comum, avançado e especializado, possuindo um nível elementar e insuficiente do conhecimento sobre a probabilidade, e, portanto, não dominando os conceitos e noções básicas para o ensino nos anos finais do Ensino Fundamental onde atuam.

Diante do exposto, entende-se que, em função da falta de conhecimento do professor em relação à probabilidade, ele acaba fazendo escolhas pedagógicas limitantes em relação ao tema, procurando explorar os conteúdos com os quais tem maior familiaridade e conhecimento. Por sua vez, o livro didático, aliado do professor, parece não ajudar muito. Numa análise realizada por Santana e Borba (2010) em livros do 5º ano, observou-se que as obras não exploram bem a probabilidade, pois o fazem muitas vezes de forma descontextualizada e fragmentada e que o manual do professor não apresenta orientações para o professor sobre como ajudar as crianças no desenvolvimento dos seus raciocínios probabilísticos.

Os PCN são documentos oficiais que nortearam a Educação Básica do Brasil, desde sua criação em 1997 até a homologação da BNCC (BRASIL, 2017). No entanto, os PCN nunca foram obrigatórios, o que pode ter possibilitado a formação de currículos e de materiais didáticos que não contemplavam integralmente as orientações contidas neles. Tal fato, pode também ter contribuído para o negligenciamento do ensino da probabilidade nas escolas brasileiras até o momento.

Nunes, Bryant, Evans, Gottardis e Terlektsi (2015) apresentam outras justificativas que podem ter influenciado a falta de exploração da probabilidade nas escolas, especialmente nos anos iniciais da Educação Básica. Os pesquisadores alegam que uma visão amplamente aceita é que os conceitos que envolvem a probabilidade são muito difíceis para as crianças e outra é que se pensava que seria necessário mais tempo no currículo para conteúdos matemáticos mais básicos.

No entanto, no cenário brasileiro com a homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em dezembro de 2017, ampliou-se consideravelmente os objetos de conhecimento de natureza probabilística ao longo do Ensino Fundamental, principiando-se no 1º ano. Em consequência, se espera que o quadro em relação ao ensino e à aprendizagem da Probabilidade se amplie, especialmente em função do caráter obrigatório que rege a BNCC (BRASIL, 2017) e abrange todas as escolas públicas e privadas do país. Contudo, somente em 2020, a BNCC foi obrigatoriamente implementada. Assim, pesquisas e dados de que se dispõe no momento, são, provavelmente, fruto de materiais didáticos e curriculares apoiados nos PCN e não na BNCC.

Concorda-se, aqui, com Bryant e Nunes (2012), bem como com diversos outros pesquisadores, tais como Borovnick (2016), Batanero *et al* (2016), Gal (2004), entre outros, que evidenciam a importância da exploração de conhecimentos probabilísticos desde os anos iniciais de escolarização. Esta parece ser a razão pela qual, a BNCC (BRASIL, 2017) adotou de forma gradativa ao longo dos nove anos do Ensino Fundamental, objetos matemáticos que envolvem Probabilidade e que pretendem consolidar conhecimentos que estão relacionados à aleatoriedade, ao espaço amostral, à quantificação e comparação de probabilidades, a fim de ampliar o pensamento probabilístico.

Bryant e Nunes (2012), enquanto pesquisadores, defendem seus interesses em relação à probabilidade por algumas razões, incluindo: i) para investigar se o ensino e o aprendizado de probabilidade levam em conta os conhecimentos prévios das crianças sobre justiça, aleatoriedade e acaso que são conceitos adquiridos desde muito cedo por crianças e jovens e estabelecem as bases do pensamento probabilístico; ii) para verificar e sugerir formas de ampliação das aprendizagens para consolidação dos conhecimentos a partir das mudanças curriculares das últimas décadas que deu mais espaço para probabilidade nos anos iniciais; iii) porque é particularmente interessante em função da literacia estatística necessária à população em geral, pois adultos e crianças muitas vezes acham difícil pensar racionalmente sobre probabilidade e aleatoriedade, portanto, os primeiros encontros dos estudantes com esses conceitos são importantes e devem se iniciar nos primeiros anos do Ensino Fundamental.

As ideias de conhecimentos prévios defendidos por Bryant e Nunes (2012), apesar das diferenças, remetem às intuições advogadas por Fischbein (1987) que considera que muitas vezes, “senso comum”, “raciocínio ingênuo”, “interpretação empírica” são usados em referência a formas de conhecimento, que também podem ser consideradas como equivalentes ao conhecimento intuitivo. Para este estudioso, intuições primárias são ideias, crenças, conhecimentos que as pessoas possuem, independente de instrução formal. E estas ideias iniciais servem de alicerce para o desenvolvimento de intuições mais elaboradas e aceitas formalmente: as intuições secundárias.

Independente das diferenças entre conhecimentos prévios e intuições primárias, concorda-se, aqui, que o ponto de partida para o trabalho com probabilidade é, de fato, analisar as compreensões primeiras das crianças e de adultos para tomar como base estes entendimentos iniciais, que podem ter coerência conceitual ou não, para em seguida, realizar propostas de ensino que viabilizem o redimensionamento destas compreensões, visando aprendizagens que possibilitem a expansão do pensamento probabilístico. A incerteza e a aleatoriedade são componentes da vida e, quanto antes os alunos aprenderem a lidar com o tema, menos propensos eles estarão em acreditar em falsas ideias ou em crenças infundadas.

Para Batanero, Chernoff, Engel, Lee e Sanchez (2016) a probabilidade é, essencialmente, um encapsulamento formal de visões intuitivas de chance que levam à ideia fundamental para atribuir valores a eventos incertos, aleatórios. Assim, ideias intuitivas sobre o acaso emergiram desde muito cedo na história em muitas culturas e estavam ligados a problemas relacionados com o estabelecimento de apostas justas em jogos de azar.

A aleatoriedade, portanto, está ligada de alguma forma à surpresa, no sentido de que, quanto mais surpreendentes forem os eventos, menos prováveis serão julgados, defende Borovnick (2016). Para este pesquisador, em eventos altamente surpreendentes, os indivíduos tendem a pensar em explicações alternativas, como interferência de Deus. Por outro lado, as atribuições formais de probabilidade e elementos estruturais de lidar com o conceito são devidas a uma abordagem intelectual da aleatoriedade. Por isso, os atalhos intuitivos e simplificadores são muito mais convincentes para a maioria das pessoas.

O desenho apresentado do cenário, justifica a presente pesquisa que pretende analisar compreensões de estudantes, sejam eles crianças ou adultos de mesma escolaridade, bem como de professores, acerca de elementos da probabilidade que envolvem a aleatoriedade, o espaço amostral e a comparação de probabilidades, que são consideradas por Bryant e Nunes (2012) como demandas cognitivas necessárias à ampla compreensão do tema. O cerne da investigação aqui proposta repousa sobre a relação entre justiça e jogos, elementos que sempre andaram de mãos dadas na história da probabilidade. Para os antigos, os jogos, com uso de aleatorizadores, eram tão justos, que eram muitas vezes, aceitos como vontade divina (BENNETT, 2003; MLODINOW, 2009). A incerteza e a equiprobabilidade que cercam os jogos (de azar) possibilita que haja justiça, pois, as partes envolvidas têm as mesmas chances de ganharem a disputa e não há como saber, com antecipação quem será o vencedor.

Estas ideias que relacionam jogo e justiça, sorte e vontade dos deuses, permanecem no imaginário de crianças e de adultos até os dias de hoje, como crenças que não encontram uma justificação formal e se baseiam, quase sempre, no senso comum ou em intuições. Bryant e Nunes (2012) defendem que a aleatoriedade é uma boa forma de garantir a justiça em jogos. A presente pesquisa pretende ampliar o olhar acerca de compreensões de estudantes (adultos e crianças) e professores acerca de justiça em jogos estabelecendo conexões com elementos probabilísticos concernentes a demandas cognitivas da probabilidade, não somente em relação à *aleatoriedade*, como também, *espaço amostral e comparação de probabilidades*.

Assim sendo, a pesquisa foi estruturada a partir de três estudos[1] que dialogaram entre si, a fim de analisar compreensões sobre jogos justos e injustos apresentadas por três grupos distintos: i) crianças e adultos de mesma escolaridade; ii) crianças brasileiras e portuguesas; e iii) professores brasileiros e portugueses dos anos inicias do Ensino Fundamental. Questiona-

[1] A pesquisa inicialmente foi idealizada considerando dois estudos: adultos e crianças (Estudo 1) e um estudo interventivo envolvendo o mesmo público (adultos e crianças de mesma escolaridade). Em função da pandemia por Covid-19 (2020-2021), a pesquisa foi redirecionada para o modelo proposto neste documento.

se, por conseguinte: Até que ponto a compreensão da aleatoriedade, do espaço amostral e da comparação de probabilidades permitem que os participantes (adultos e crianças) percebam a justiça (ou não) nos jogos? Há diferença de compreensões entre adultos e crianças que possuem o mesmo nível de escolaridade? A maturidade influencia estas compreensões? Há diferenças de compreensões de crianças brasileiras e portuguesas que estudam o mesmo ano e que não tiveram acesso formal a conteúdos probabilísticos? As diferenças culturais influenciam nas compreensões? Como professores brasileiros e portugueses dos anos iniciais compreendem os elementos probabilísticos explorados na pesquisa? Há diferenças de compreensão entre os grupos de professores estudados?

Observou-se, no levantamento realizado, um tímido número de pesquisas que tratam especificamente de justiça em jogos, assim como são escassos os estudos em probabilidade que estabelecem a comparação entre crianças e adultos e quase não há estudos que tratam de mais de uma demanda cognitiva da probabilidade. Na verdade, nenhum estudo foi encontrado que tratasse de justiça em jogos, comparando crianças e adultos. Assim, considera-se pertinente a pesquisa, como forma de contributo para ampliação da compreensão sobre justiça em jogos, a partir da lente da aleatoriedade, do espaço amostral e da comparação de probabilidades, dos diversos grupos estudados. Os resultados dos estudos podem, portanto, possibilitar um redimensionamento no ensino e na aprendizagem da Probabilidade no Ensino Fundamental, com possíveis implicações, na formação continuada de professores, por exemplo.

Pretendeu-se realizar a pesquisa contemplando três demandas cognitivas da probabilidade (BRYANT e NUNES, 2012), envolvendo compreensões de estudantes (crianças e adultos) e também professores acerca da relação entre justiça e jogo. Dessa forma, apresenta-se, a seguir, os objetivos geral e específicos da presente pesquisa, bem como a tese que se busca defender e, em seguida, pressupostos teóricos referentes à probabilidade e ao seu ensino.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

Analisar compreensões de estudantes (crianças e de adultos) e professores, sobre justiça em jogos, considerando conhecimentos acerca de demandas cognitivas da probabilidade que tratam de aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Mapear compreensões de crianças e de adultos brasileiros (com mesmo nível de escolaridade) referentes à justiça em jogos, em situações que envolvem aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades.
- Identificar compreensões de crianças portuguesas e compará-las às compreensões de crianças brasileiras, referentes à justiça em jogos, em situações que tratam de demandas cognitivas da probabilidade.
- Investigar compreensões de professores brasileiros e portugueses acerca de justiça em jogos, tendo como apoio o entendimento de estudantes sobre o tema.

A partir desses objetivos busca-se defender a tese que segue.

TESE

A avaliação, coerente ou equivocada, de estudantes (crianças e adultos) e professores sobre jogos justos e injustos é fortemente influenciada pelas suas compreensões acerca da aleatoriedade, do espaço amostral e da comparação de probabilidades.

3. A PROBABILIDADE: DA HISTÓRIA AO ENSINO

"Os jogos de azar são o giz com o qual o homem escreveu a probabilidade."[2]
Rita Batista

3.1. BREVE PASSEIO PELA HISTÓRIA

Considerando estudos e leituras realizados e tomando como referência, especialmente Bennett (2003), Eves (2004) e Mlodnow (2009), pode-se dizer que a Probabilidade é um dos campos da Matemática que 'nasceu' por último na história, juntamente com sua irmã quase gêmea, a Estatística. Consequentemente, foi teorizada e vista como ciência muito depois que outras áreas da Matemática, como Aritmética, Álgebra e Geometria.

"Os primórdios da compreensão da probabilidade datam de meados do século XVI, e o assunto só foi discutido seriamente quase um século mais tarde", informa Bennett (2003, p.9). Esse surgimento tardio pode levar à pergunta: por que este distanciamento temporal, se outros ramos da Matemática, como a Geometria, por exemplo, já contavam com regras, teoremas, axiomas bem definidos desde o tempo dos grandes filósofos como Tales de Mileto (624 a.C. e 546 a.C,)? Este é um questionamento que gera muita discussão, mas os historiadores acreditam que a incompreensão acerca da aleatoriedade pode ter contribuído para gerar este distanciamento (BENNETT, 2003).

A Probabilidade busca a quantificação de incertezas de eventos futuros, e esta questão envolve a compreensão e análise do acaso, que era vista pelos antigos como algo relacionado à sorte, aos deuses ou a entidades sobrenaturais. Arqueólogos descobriram diversos dados, feito de ossos (astrágalos) de animais, entre artefatos de várias civilizações primitivas. O hábito de tirar a sorte 'jogando ossos', por exemplo, é descrito em escrituras de antigas religiões. O uso desses e de outros artefatos (aleatorizadores) serviam como forma de adivinhação, para buscar inspiração divina, para tomada de decisão e também para jogos de azar e foram encontrados em toda Mesopotâmia, no vale Indo, no Egito, na Grécia e no Império Romano (BENNETT, 2003). Os dados mais antigos de seis faces foram encontrados no Oriente (antiga Mesopotâmia) e datavam de 2750 a.C., aproximadamente. Assim, "quando as sociedades primitivas precisavam fazer algum tipo de escolha, recorriam frequentemente a aleatorizadores por três razões básicas:

---

[2] Inspirado em Galileu Galilei que afirmava que "A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo."

garantir a justiça, evitar discórdia e obter orientação divina", defende Bennett (2003, p.14).

Os jogos de azar eram largamente utilizados na antiguidade. O imperador romano Augusto costumava jogar dados (*tali*) ou par ou ímpar (*par impar ludere*) com os amigos, durante o jantar. No jogo par ou ímpar, que era muito apreciado pelos romanos, uma pessoa pegava uma determinada quantidade de grãos de feijão, nozes, moedas ou astrágalos na mão e o adversário teria que informar se o número de itens era par ou ímpar para ganhar o jogo.

Muito tempo se passou e a humanidade continuou a usar aleatorizadores ou a fazer sorteios para os mais diversos fins, mas ainda não havia se formulado uma teoria que desse conta da quantificação dos resultados incertos gerados pelo uso desses artefatos ou jogos. Bennett (2003) afirma que no século XVI, Galileu tinha uma ideia clara do que seria chamado hoje de dados honestos, assim como conhecia o conceito de equiprobabilidade. Para Galileu um dado teria seis faces e, quando lançado, poderia cair igualmente qualquer uma das faces.

Um estudo matemático mais consistente sobre a probabilidade ocorreu ainda no século XVI, por volta de 1564, quando Girolamo Cardano escreveu *Liber de ludo aleae* (O livro dos jogos de azar), mas que só foi publicado quase um século depois. Nesta obra, Cardano especifica os 36 resultados possíveis no lançamento de dois dados e as 216 possíveis sequências no lançamento de três dados.

Entre 1613 e 1623, o próprio Galileu escreveu um artigo intitulado *Reflexões a respeito dos jogos de azar* em que explica porque existem 216 resultados possíveis e equiprováveis no lançamento de três dados e a razão pela qual o evento 'soma 10' tem maior probabilidade de ocorrência (27 em 216) enquanto o evento 'soma 9' tem a probabilidade de 25 em 216.

Após Cardano e Galileu, estudos científicos sobre probabilidade só ocorreram por volta de 1654 com Blaise Pascal e Pierre de Fermat. Mlodinow (2009) conta que Pascal se sentiu desafiado quando um nobre – cujo título era Chavalier De Méré, que era um apostador experiente e gostava de grandes riscos, mas costumava ganhar com frequência – solicitou sua ajuda em um problema. A questão levada a Pascal é conhecida como o problema dos pontos:

> Suponha que você e outro jogador estão participando de um jogo no qual ambos têm a mesma chance de vencer, e o vencedor será o primeiro que atingir um certo número de pontos. Em determinado momento, o jogo é interrompido quando um dos jogadores está na liderança. Qual é a maneira mais justa de dividir o dinheiro apostado? A solução, observou De Méré, deveria refletir a chance de vitória de cada jogador com base na pontuação existente no momento em que o jogo é interrompido. Mas como calcular essa probabilidade? Pascal percebeu que, independentemente da resposta, os métodos necessários para calculá-la ainda eram desconhecidos, e tais

> métodos, quaisquer que fossem, teriam importantes implicações para todos os tipos de situação competitiva. (MLODINOW, 2009, p.76-77).

Pascal, então, convidou Fermat para ajudá-lo a solucionar o problema proposto por De Méré, e assim, por meio de diversas cartas, os matemáticos discutiram questões probabilísticas que culminaram nos estudos mais consistentes acerca do tema até àquela data. Eves (2004) menciona que a correspondência Pascal-Fermat levou à fundação da ciência da Probabilidade, embora ambos os correspondentes tenham solucionado a situação de maneira distinta.

Em conformidade com Eves (2004), Fermat utilizou a combinatória da seguinte forma, para analisar a situação proposta:

> Fermat discutiu o caso em que o jogador A precisava de 2 pontos para ganhar e o jogador B de 3. Eis a solução de Fermat para este caso particular. Como é claro que mais quatro partidas decidem o jogo, seja 'a' uma partida ganha por A e seja 'b' uma partida ganha por B; consideremos então os 16 arranjos completos, de ordem 4, das letras a e b: aaaa, aaab, abba, bbab, baaa, bbaa, abab, babb, abaa, baba, aabb, abbb, aaba, baab, bbba, bbbb. Os casos em que 'a' aparece duas ou mais vezes são favoráveis a A e há 11 deles. Os casos em que 'b' aparece três ou mais vezes são favoráveis a B e há cinco deles. Portanto, as apostas devem ser divididas na razão 11: 5. Para o caso geral, em que A precisa de 'm' pontos para ganhar e B precisa de 'n', anotam-se os $2^{m + n - 1}$ arranjos completos, de ordem m + n- 1, das duas letras a e b. Procura-se o número α de casos em que 'a' aparece 'm' ou mais vezes e o número β de casos em que 'b' aparece 'n' ou mais vezes. As apostas devem ser divididas então na razão α : β. (EVES, 2003, p.393).

Já Pascal, resgatou elementos de seu triângulo aritmético (Figura 1) e propôs, a solução apontada a seguir.

> Indicando por C(n, r) o número de combinações simples, de ordem r, de n objetos, pode-se facilmente mostrar que os números ao longo da quinta diagonal do "triângulo aritmético" são, respectivamente, C(4,4) = 1, C(4,3) = 4, C(4,2) = 6, C(4,1) = 4, C(4,0) = 1. Retornando ao particular problema dos pontos considerado acima, como C(4, 4) é o número de maneiras de obter quatro letras 'a', C (4, 3) é o número de maneiras de obter três letras 'a' e assim por diante, segue-se que a solução do problema é dada por [C(4,4) + C(4,3) + C(4,2)] : [C(4,1) + C(4,0)] = (1 + 4 + 6) : (4 + 1) = 11:5. No caso geral, em que A precisa de 'm' pontos para ganhar e B precisa de 'n', escolhe-se a (m + n)-ésima diagonal do triângulo de Pascal. Calculam-se, então, a soma α dos primeiros 'n' números da diagonal considerada e a soma β de seus últimos 'm' números. Então, deve-se dividir as opostas segundo a razão α : β (EVES, 2003, p.393-394).

Figura 1: Triângulo Aritmético

1	1	1	1	1	1	. . .
1	2	3	4	5	6	. . .
1	3	6	10	15	21	. . .
1	4	10	20	35	56	. . .
1	5	15	35	70	126	. . .
1	6	21	56	126	252	. . .
.	.	.	.	.	.	. . .

Fonte: Eves (2003)

Após a contribuição de Pascal-Fermat, Lopes e Meireles (2005) alegam que somente em 1657 o desenvolvimento da Probabilidade teve grande impulso, "com a publicação do primeiro tratado formal sobre probabilidades escrito pelo físico, geômetra e astrônomo holandês Christian Hygens. Esse estudo enfatiza o conceito de esperança matemática, de grande relevância para o Cálculo de Probabilidades e Estatística" (LOPES e MEIRELES, 2005, p. 1). Posteriormente, destacam-se a obra de Jacob Bernoulli denominada Ars Conjectandi de 1713 e a de Abraham de Moivre intitulada The Doctrine of Chances (1718). Estes trabalhos potencializaram os estudos da Probabilidade e a colocaram em um patamar de campo da Matemática. Estas obras apontaram como calcular uma ampla gama de probabilidades mais complexas. Em 1763, foi publicado o teorema de Bayes, que provou que a probabilidade de um evento pode ser revisada à luz dos novos dados disponíveis, usando uma interpretação subjetiva.

Bernoulli mostrou uma versão fundamental da Lei dos Grande Numeros[3]. Já em 1812, Pierre-Simon Laplace publicou sua obra conhecida como *Théorie analytique des probabilités* cuja contribuição consolidou e estabeleceu relações fundamentais, tanto da Probabilidade como também da Estatística. Em 1814, ele refinou o trabalho de Moivre em seu *Ensaio Filosófico sobre Probabilidade,* no qual concebe a probabilidade como simplesmente uma fração do número de casos favoráveis a um determinado evento dividido pelo número de todos os casos possíveis (BATANERO *et al* , 2016).

Para Coutinho (2007), o trabalho de Laplace se configura como primeira apresentação axiomática do cálculo de probabilidades, contendo a definição explícita da probabilidade. Para a pesquisadora, com a definição de Laplace chegou-se a uma compreensão teórica da

[3] A Lei dos Grandes Números considera que a frequência relativa de um evento em um grande número de tentativas tende a se aproximar da probabilidade teórica desse evento. Este tema será retomado posteriormente na seção que trata dos significados da Probabilidade.

probabilidade, enquanto objeto matemático bem definido, uma vez que seu trabalho retoma e desenvolve todos os resultados probabilísticos obtidos por seus predecessores e seus contemporâneos. No entanto, a definição de probabilidade definida por Laplace é limitada pela equiprobabilidade e atende a dois princípios básicos: i) a probabilidade é a relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis; ii) considerando os diversos casos sendo igualmente possíveis. (COUTINHO, 1994)

Coutinho (1994) informa que Henri Poincaré (1824-1912) atribuiu um enfoque mais moderno ao acaso, estabelecendo uma relação com a complexidade dos fenômenos observados, sem, entretanto, mudar os instrumentos essenciais ao cálculo de probabilidades. Ele avalia uma situação envolvendo o equilíbrio de um cone para evidenciar a limitação do determinismo na visão de Laplace que pontua: *um cone repousa sobre sua ponta e sabe-se que ele irá tombar, mas não se sabe para que lado – o acaso irá decidir*. Poincaré faz uma avaliação sobre variáveis que podem influenciar o cone de cair para um lado ou para outro: simetria do eixo do cone, trepidação do apoio, sopro de ar, etc e afirma que, como não levamos em consideração estas pequenas influências, dizemos que o resultado se deveu ao acaso. Assim, o acaso é a medida de nossa ignorância sobre como os fenômenos ocorrem, julgava Poincaré (COUTINHO, 1994).

Outros estudiosos se destacaram na teorização e usos da probabilidade nos anos subsequentes, que se ampliou para um enorme número de aplicações em diversas áreas do conhecimento. Ludwig Boltzmann, um dos fundadores da física estatística, fez análise estatística dos processos moleculares responsáveis pelas propriedades dos fluidos, empregando as estruturas matemáticas da Probabilidade e da Estatística para explicar de que modo as propriedades desses fluidos surgiam a partir do movimento dos átomos (MLODNOW, 2009).

Com sua obra 'Le Hasard', de 1914, Émile Borel forneceu uma das primeiras contribuições à axiomatização para o cálculo de probabilidades, retomando considerações epistemológicas sobre a noção de probabilidade e suas aplicações, sob uma ótica subjetiva, alerta Coutinho (1994).

Probabilidade e Estatística tornaram-se intimamente ligadas através de trabalhos em testes de hipóteses por R.A. Fischer[4], um dos maiores estatísticos do século XX. Fisher, em 1920, tratou da função do teste de significância que se configura em um procedimento formal "*para calcular a probabilidade de observarmos o que observamos se a hipótese que estamos*

---

[4] Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) – biólogo e geneticista

testando for verdadeira. Se a probabilidade for baixa, rejeitamos a hipótese. Se for alta, podemos aceitá-la" (MLODNOW, 2009, p.183).

Bennett (2003) afirma que foi somente no século XX que as definições matemáticas mais claras da aleatoriedade começaram a surgir. A autora narra que em 1919, a partir de uma série de conferências, Richard von Mises se inspirou e produziu uma obra em 1928, sobre a teoria da probabilidade, que forneceu uma definição intuitivamente satisfatória da probabilidade com base em um melhor entendimento da aleatoriedade. Von Mises definiu a aleatoriedade em uma sequência de observações em termos da "incapacidade de criar um sistema que possa prever em que ponto de uma sequência uma observação específica irá ocorrer sem prévio conhecimento da sequência" (BENNETT, 2003, p. 183). Assim, a aleatoriedade garante que não exista nenhum esquema, fórmula, regra ou suposição capaz de determinar elementos específicos da sequência, garantindo, por exemplo, a justiça em jogos. Em 1939, Von Mises publica mais uma obra: Probabilidade, Estatística e verdade.

Em consonância com Viali (2008), Andrei Kolmogorov publicou em 1933 uma monografia traduzida para Fundamentos da Teoria da Probabilidade que foi sendo refinada ao longo do tempo e hoje, contempla uma disciplina mais geral – a Teoria da medida.

Em 1963, Kolmogorov, crítico de Von Mises, inicia o trabalho no ramo da teoria da informação, na qual fez avanços na medida de desordem de sequências, criando um método para quantificar a complexidade de uma quantidade de informação. Pela ótica moderna da complexidade da teoria da informação de Kolmogorov, "uma sequência aleatória é uma sequência com complexidade máxima", em outras palavras, nenhuma lei simples, de modo conciso, pode descrever uma sequência aleatória. Assim, em termos dessa medida de complexidade, não seria possível desenvolver uma fórmula que fosse mais curta que o comprimento da própria sequência.

Gregory Chaitin, em 1975, salientou que a definição de Kolmogorov indica graus de aleatoriedade. Para este autor, "uma 'série de números' é aleatória se o menor algoritmo capaz de a especificar para um computador tiver aproximadamente o mesmo número de bits de informação que a própria série" (BENNETT, 2003, p.187).

A teoria proposta por Kolmogorov em 1933, reforça Coutinho (1994), dá uma apresentação axiomática à Teoria das Probabilidades, inserindo-se na Teoria dos Conjuntos e tornando mais clara as limitações da teoria. Kolmogorov percebeu que seria possível, usar os dados conhecidos neste domínio, por meio da associação entre probabilidade e medida, e ainda aplicar a problemas reais. Assim, para este estudioso, seu objetivo foi sistematizar axiomas já existentes e utilizados pela maioria dos teóricos contemporâneos da Probabilidade (COUTINHO, 1994).

No âmbito psicológico com ramificações no campo educacional, destaques como Jean Piaget e Barbel Inhelder com a abra *A origem da ideia do acaso na criança* são referências em estudos e pesquisas desde seu lançamento em 1951. Efrain Fischbein, psicólogo romeno, também se destaca com trabalhos com foco na Psicologia da Educação Matemática e obras com ênfase em probabilidade como *Hazard and Probability in Children's Thinking* (1974).

Hoje, estudos e pesquisas têm sido redimensionados e intensificados em relação à Probabilidade e não apenas no campo educacional, como mencionado anteriormente. Como uma área intimamente ligada à Estatística, a Probabilidade tem se tornado cada vez mais relevante em estudos atuariais, estudos demográficos, no campo psicológico, na biologia, em estudos de doenças, nas ciências sociais, etc. No campo educacional, os currículos, pesquisadores e entidades educacionais e psicológicas têm ampliado e defendido sua inserção desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, como discutido na seção que segue.

3.2. A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DA PROBABILIDADE

Há um movimento mundial de defesa do ensino de conhecimentos probabilísticos desde a escolarização básica no Ensino Fundamental, tanto por parte de entidades matemáticas e documentos oficiais (NCTM, 1991; PCN, 1997; FRANKLIN *et al* , 2007, PCEB-PE, 2012, PORTUGAL, 2013; BNCC, 2018, PERNAMBUCO, 2019), bem como por pesquisadores e estudiosos (BATANERO, 2015, BRYANT E NUNES, 2012; BOROVCNIK E KAPADIA, 2010; LOPES, 2005; GAL, 2004; COUTINHO, 1994). Os estudos apontam a importância da probabilidade para a formação intelectual e cognitiva de crianças, jovens e adultos, e, por conseguinte, justificam sua inclusão nos currículos escolares. Esta tendência de valorização do ensino da probabilidade, validadas por pesquisas sobre o tema, tem alavancado discussões e promovido novos estudos para compreensão acerca de entraves que podem inviabilizar o entendimento de conceitos probabilísticos e sua utilização na prática escolar e na sociedade.

No Brasil, desde 1997, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), defendiam "a importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no fundamental, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos" (BRASIL, 1997, p. 21). Por sua vez, os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), orientam que a partir do 2º ciclo (4º ano) haja a exploração sobre a ideia intuitiva de chance de ocorrência de um resultado, considerando a análise das possibilidades, ou seja, do espaço amostral.

Em relação às habilidades específicas inerentes à Probabilidade, a Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2017) aponta que

> a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral. No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem. (BRASIL, 2017, P.270).

Dessa forma, documentos recentes recomendam o trabalho com a Probabilidade desde os anos inicias de escolarização, tratando a aleatoriedade e o espaço amostral, bem como diferentes visões da probabilidade (a serem discutidas em seção que segue) e defendendo a associação com a Combinatória, ou seja, articulada aos problemas de contagem.

Carvalho e Pietropaolo (2018) advogam que as características da vida contemporânea exigem constantemente a mobilização de conhecimentos estatísticos, combinatórios e probabilísticos. Assim, tomar decisões coerentes na vida cotidiana e interpretar informações com mais fidedignidade para a tomada de decisão levam em conta, muitas vezes, o raciocínio probabilístico. E este raciocínio não se adquire apenas com o passar do tempo, com o amadurecimento e a vivência em sociedade.

"A necessidade em nossa sociedade de entender a probabilidade é indiscutível. Essa compreensão é básica para a alfabetização científica e estatística e também para pensar claramente sobre o risco, um conceito importante na ciência e na vida cotidiana" (NUNES, BRYANT, GOTTARDIS E TERLEKTSI, 2015, p. 1). Compreender a probabilidade envolve conceitos específicos e, para resolver problemas de probabilidade, as pessoas precisam entender a natureza da aleatoriedade, além de perceber que a probabilidade de um resultado particular é uma proporção entre a frequência desse resultado e a frequência combinada de todos os resultados possíveis na situação considerada, advogam Nunes *et al* (2015). Para estes pesquisadores, compreender a probabilidade envolve ainda um raciocínio matemático de natureza mais geral: requer ser sistemático e seguir uma linha de raciocínio até sua conclusão. Assim, outra questão crucial para a educação é se aprender a raciocinar sobre problemas de probabilidade melhora o raciocínio matemático de maneira mais geral.

Iddo Gal (2004) questiona porque os alunos devem aprender probabilidade e porque devemos ensiná-la. Ele destaca duas razões básicas: a primeira é que a probabilidade é parte da Matemática e Estatística, áreas do conhecimento que são importantes para uma educação moderna e serve como plataforma para aprendizagem de assuntos mais avançados, como amostragem e significância estatística; a segunda razão é que a aprendizagem de probabilidade é fundamental para ajudar a preparar os alunos para a vida, uma vez que fenômenos aleatórios permeiam nosso cotidiano.

Nos dias atuais, a probabilidade possui importantes aplicações nos mais variados ramos das atividades humanas, seja na Economia, na Política, na Medicina ou outras áreas, além de garantir a validade nos procedimentos de inferência estatística. É necessário entender probabilidades em nosso cotidiano e como parte de nossa compreensão intelectual do mundo que nos rodeia, afirmam Bryant e Nunes (2012). As crianças também precisam entender probabilidades, pois elas dependem de aleatoriedade em jogos formais e informais, e precisam aprender a lidar com a incerteza. No entanto, alertam os autores que, adultos, bem como crianças têm dificuldades para trabalhar eventos aleatórios com precisão, mesmo em contextos simples sem que haja necessitando de cálculos bem elementares (BRYANT E NUNES, 2012).

Em conformidade com Batanero (2015), estudos de Borovcnik e Kapadia apontam que nossas intuições acerca da probabilidade são pobres e esta questão pode ser justificada pelo nosso desejo de explicações deterministas, mas também pode ser atribuída a uma educação inadequada. Assim, a "probabilidade é o único meio confiável que temos de prever e planejar o futuro; que desempenha um papel enorme em nossas vidas, por isso não podemos ignorá-la, e devemos ensiná-la a todos os cidadãos do futuro" (Devlin, 2014, p. ix *apud* Batanero, 2015).

Borovcnik e Kapadia (2010) defendem a presença da probabilidade nos currículos de Matemática, pois:

1- Equívocos de probabilidade afetam as decisões das pessoas em importantes situações, como exames médicos, vereditos de júri, investimentos, avaliações, etc.;

2- É importante para compreender qualquer procedimento inferencial de estatística;

3- Oferece uma ferramenta para modelagem e ‘criação’ da realidade, assim como a Física;

4- Os conceitos de riscos e confiabilidade estão intimamente relacionados e dependentes da probabilidade;

5- É um assunto interessante em seu próprio direito e digno de ser estudado.

Já Batanero, Chernoff, Engel, Lee e Sánchez (2016) advogam que

> Para atuar adequadamente na sociedade, os cidadãos precisam superar seu pensamento determinista e aceitar a existência fundamental da aleatoriedade na natureza. Ao mesmo tempo, eles precisam adquirir estratégias e formas de raciocínio que os ajudem a tomar decisões adequadas em situações cotidianas e profissionais em que o acaso está presente. Esta necessidade de letramento probabilístico tem sido reconhecida pelas autoridades educacionais em muitos países, incluindo a probabilidade nos currículos em diferentes níveis educacionais e na educação dos professores. No entanto, incluir um tópico no currículo não garante automaticamente seu ensino e aprendizado corretos; as características específicas da probabilidade, como uma visão multifacetada da probabilidade ou a falta de reversibilidade de experimentos aleatórios, não são geralmente encontradas em outras áreas e criarão desafios especiais para professores e alunos. (BATANERO *et al* , 2016, p.8)

Batanero *et al* (2016) defendem o ensino da probabilidade desde os anos iniciais, com o objetivo de redimensionar formas de raciocínio que instrumentalizem o sujeito para tomada de decisões conscientes e alertam para as dificuldades que podem ocorrer em função de algumas compreensões equivocadas de estudantes e até de professores. Na ótica desses autores, estas dificuldades precisam ser estudadas, analisadas para serem propostos mecanismos que minimizem tais entraves.

Por sua vez, Batanero (2015) faz uma reflexão sobre os estudos de Johnston-Wilder e Pratt (2007) que sugerem que o trabalho visando a compreensão da aleatoriedade deve envolver ferramentas (no caso, desses autores, um micromundo baseado em um jogo de computador) que auxiliem as crianças a verem a aleatoriedade como um processo dinâmico, promovendo, assim, uma compreensão progressiva das seguintes caraterísticas do fenômeno aleatório:

• Em uma situação aleatória há incerteza; qualquer resultado é possível.

• O resultado real, o que vai ocorrer, é imprevisível (variabilidade local de processos aleatórios).

• Podemos analisar tanto o processo (gerador aleatório) ou a sequência de resultados aleatórios. Estes dois aspectos podem ser separados.

• Em algumas situações (por exemplo, jogos de azar), podemos analisar o processo antes do experimento. Esta análise irá informar-nos sobre a probabilidade de possíveis resultados.

• Comumente, existe a possibilidade, pelo menos na imaginação, de repetir a experiência (ou observação) muitas vezes em (quase) condições semelhantes.

• Neste caso, a sequência dos resultados obtidos por meio da repetição carece de um padrão; não podemos controlar ou prever cada resultado (variabilidade local).

• Nesta desordem aparente, uma multiplicidade de regularidades globais pode ser descoberta, sendo a mais óbvia a estabilização das frequências relativas de cada resultado possível. Essa regularidade global é a base que nos permite estudar os fenômenos aleatórios utilizando a teoria da probabilidade.

• Em situações pontuais de incerteza ainda se pode aplicar probabilidade se nossos graus iniciais de crenças são consistentes (têm propriedades razoáveis).

• Para concluir, a aleatoriedade é um fenômeno que se aplica a algumas situações, sendo útil para prever ou controlar as situações.

Borovnick (2016) alerta que é necessário considerar questões psicológicas e formais ao lidar com a probabilidade. A capacidade de equilibrar elementos psicológicos e formais da probabilidade, afirma o pesquisador, dizem respeito, por exemplo, a uma determinada escolha que envolve risco, cujos fatores emocionais são acionados. No entanto, não se deve abandonar as questões formais de conhecimentos probabilísticos. Em situações aleatórias, o sucesso obtido em determinado momento não é garantia de sucesso em outro momento do mesmo contexto. Não há garantias, por exemplo, que ao sonhar com números e jogá-los obtendo sucesso, em outro momento esta estratégia terá o mesmo resultado. Assim, não há critérios de sucesso em situações aleatórias. É importante ressaltar que estas questões precisam ser observadas durante o processo de ensino.

Para concluir, retoma-se Batanero *et al* (2016) que consideram que a “Probabilidade oferece um modo de pensamento importante por si só, não apenas como um precursor inferencial da Estatística. A importante contribuição da Probabilidade para resolver problemas reais justifica sua inclusão no currículo escolar” (BATANERO *et al* , 2016, p. 17).

Diante do exposto, contata-se a importância do ensino da probabilidade desde os anos iniciais da Educação Básica, seja para instrumentalizar o sujeito para tomada consciente de decisões num mundo pós-moderno impregnado de dados, seja por servir de suporte para conhecimentos mais avançados, para prever e planejar o futuro numa ótica de incertezas e escassez de determinismos ou para ampliar compreensão do raciocínio matemático de uma maneira mais geral. Por todos esses motivos, os conhecimentos de natureza probabilística precisam ser ensinados. Embora, como apontado por Fischbein (1987), as pessoas carreguem intuições primárias sobre o tema, não se observa, nos estudos, como alguns discutidos a seguir, a ampliação dessas intuições senão por meio de intervenção promovida pelo ensino.

4. REVISÃO DA LITERATURA

“Uma probabilidade razoável
é a única certeza.”
Samuel Howe

A revisão da literatura foi focada em expressões de busca que se relacionaram com ‘conhecimentos probabilísticos’ ou ‘ensino da probabilidade’ associado aos públicos crianças e adultos, incluindo professores. A seleção dos textos considerou ainda similitudes e aproximações com demandas da probabilidade, ou seja, pesquisas que tratavam de aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades. Inicialmente, a revisão foi idealizada procurando focar mais detidamente nos últimos 10 anos de pesquisa, se iniciando em 2010 e sendo concluída em 2020. No entanto, em alguns casos específicos, foi necessária ampliação do período de busca, em função da escassez de resultados.

Foram mapeados e realizados refinamentos dos estudos encontrados com o objetivo de avaliar a relevância dos textos para a pesquisa aqui proposta. Dessa forma, os estudos foram organizados em quatro categorias, envolvendo: 1) pesquisas que tratam de compreensões probabilísticas de crianças e adolescentes; 2) estudos envolvendo adultos (que podem incluir professores, futuros professores ou estudantes da Educação de Jovens e Adultos - EJA); 3) pesquisas considerando a comparação entre crianças e adultos e 4) estudos que tratam de justiça em jogos.

4.1. ESTUDOS DE PROBABILIDADE ENVOLVENDO COMPREENSÕES DE CRIANÇAS E ADOLESCENTES

Dentre as quatro categorias de estudos, observou-se um volume mais acentuado de pesquisas envolvendo a compreensão da probabilidade de crianças e de adolescentes, ou seja, estudantes de uma forma geral, de vários níveis de escolarização. A seguir, são apontados alguns estudos que se relacionam mais estreitamente com a presente pesquisa em função de tratarem de jogos e ou se relacionarem a alguma demanda cognitiva. Os resultados estão sintetizados no Quadro 1 (com indicação dos autores dos estudos, os participantes das pesquisas realizadas e os focos das mesmas). As pesquisas deste bloco foram organizadas cronologicamente da mais antiga para a mais recente.

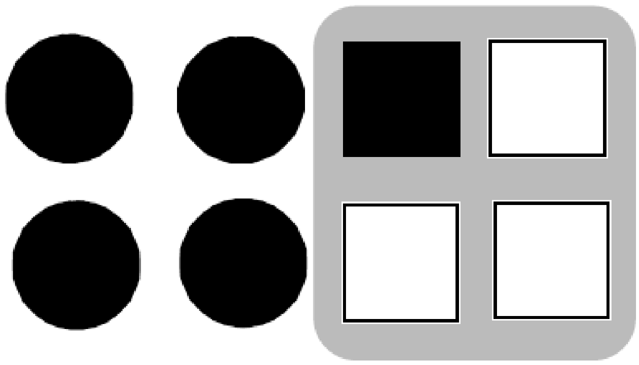
Quadro 1: Pesquisas sobre compreensão da probabilidade de crianças e de adolescentes

Ano	Pesquisadores	Público/Participantes	Foco
2008	Girotto e Gonzalez	Crianças de 4 a 10 anos	Atualizações de julgamentos por novas evidências probabilísticas
2010	Bayles e Schlottmann	Crianças de 5 e 7 anos	Compreensão intuitiva de probabilidade com base na destreza ou habilidade
2013	Nikiforidou, Pange e Chadjipadelis	Crianças de 4 a 6 anos	Compreensões intuitivas de probabilidades num jogo de roleta
2013	Antonopoulos e Zacharo	Crianças: média de 5 anos	Espaço amostral, probabilidade de um evento e comparação de probabilidades
2013	Marocci e Nacarato	Adolescentes do 1º ano do Ensino Médio	O papel da linguagem na resposta a problemas de probabilidade
2015	Deodato e David	Crianças do 4º e 5º anos	Estudo interventivo: aleatoriedade e comparação de probabilidades
2016	Girotto, Fontanari, Gonzalez, Vallortigara e Blaye	Crianças de 3 a 5 anos	Compreensões probabilísticas (mais e menos provável) por meio de julgamentos verbais
2016	Batista e Borba	Crianças do 1º, 3º e 5º anos	Compreensão em jogos de aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Girotto e Gonzalez (2008) consideraram a seguinte questão em sua pesquisa: as crianças são capazes de mudar seus julgamentos e escolhas iniciais, diante de novas evidências que alteram as probabilidades? A pesquisa envolveu entrevistas individuais com crianças de 4 a 10 anos de idade. A Figura 2, juntamente com as perguntas que se seguem ilustram a situação.

Figura 2: Espaço amostral com figuras e subconjunto destacado - quadrados



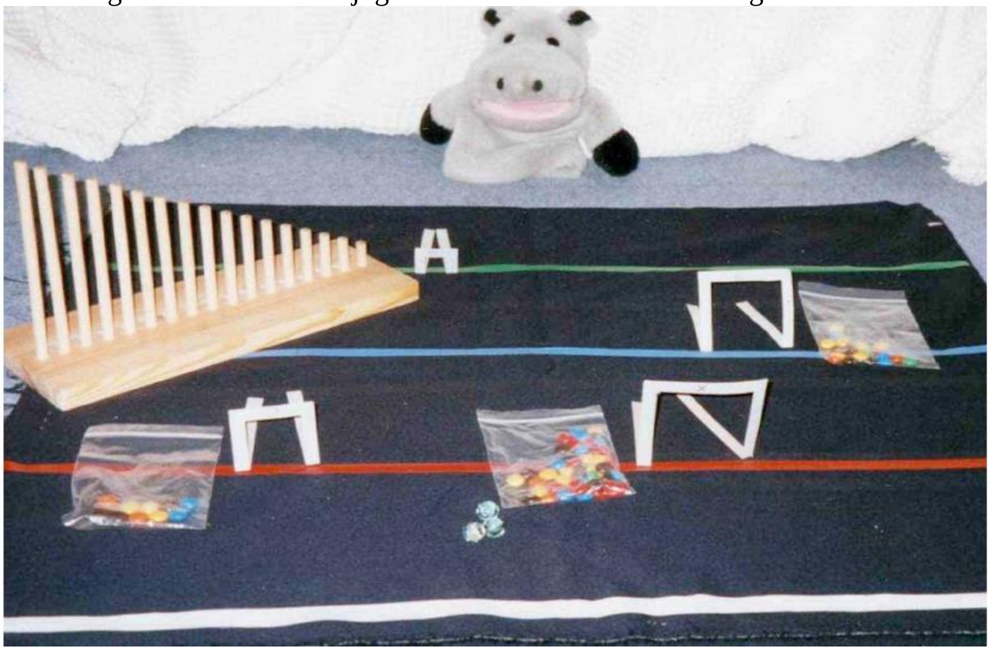
Fonte: Girotto e Gonzalez (2008)

Perguntou-se às crianças inicialmente: *Se eu pegar uma figura deste conjunto, é mais provável que seja de que cor?* Posteriormente, foi alterada a pergunta com a intenção de verificar se os estudantes mudam suas opiniões diante de novas evidências (informações posteriores) que alteram as probabilidades iniciais. Assim, questionou-se em seguida: *Eu peguei uma figura e é um quadrado. É provável que a figura que eu peguei seja de que cor?*

Os resultados da pesquisa apontaram que, quando confrontados com eventos incertos, as crianças, de forma intuitiva, são capazes de integrar uma nova informação para responder sobre probabilidades posteriores. Para os pesquisadores, a partir da idade de cinco anos, as crianças são capazes de usar informações posteriores para atualizar suas apostas e seus julgamentos iniciais sobre resultados aleatórios. Assim, o estudo indica que as crianças em idade pré-escolar revisam corretamente suas decisões e julgamentos iniciais, com base em inferências intuitivas obtidas por meio de novos dados (informações posteriores), isto é, elas conseguem associar informações específicas a um subconjunto de possibilidades evocadas por informações prévias. Para esses pesquisadores, intuições probabilísticas emergem, nas crianças, por volta dos cinco ou seis anos de idade, e a escola as moldam, mas, a realidade é que na maioria das escolas o raciocínio probabilístico não é desenvolvido nos primeiros anos do Ensino Fundamental (GIROTTO e GONZALEZ, 2008).

Bayless e Schlottmann (2010) realizaram uma pesquisa que envolveu 32 crianças, sendo 16 com 5 anos e 16 com 7 anos de idade. Eles consideram que a experiência de incerteza relacionada à habilidade (no sentido de destreza) pode fornecer uma oportunidade naturalística de desenvolver uma compreensão intuitiva da probabilidade. Ou seja, acertar ou não num determinado alvo tem relação com habilidade ou destreza, mas ainda é um evento incerto, aleatório e que pode possibilitar discussões sobre elementos da probabilidade. Assim, eles propuseram às crianças, um jogo de rolamento com bolinhas de gude, cujos alvos (como barras de futebol) e distâncias mudavam (Figura 3). As crianças teriam que ajudar a ‘hipopótama’ Hilda a rolar as bolinhas para passar entre as barras que ficavam em distâncias diferentes (nas linhas coloridas) e também tinham tamanhos diferentes. Quando acertavam, as crianças eram premiadas com chocolates M&M. Na visão das autoras, a capacidade de avaliar a probabilidade de sucesso pessoal é importante para o comportamento eficiente em situações de incerteza. Por isso, eles investigaram como crianças pequenas avaliam as probabilidades de sucesso em situações que dependem de destreza, a fim de aprender mais sobre as fontes naturais de início de compreensão intuitiva de probabilidade. Observou-se, por exemplo: considerando a destreza e habilidade pessoal, é mais provável acertar qual barra: a menor ou maior? A que está mais perto ou mais distante? Qual o julgamento intuitivo das crianças sobre as probabilidades de acertos?

Figura 3: Materiais do jogo de rolamento de bolinhas de gude



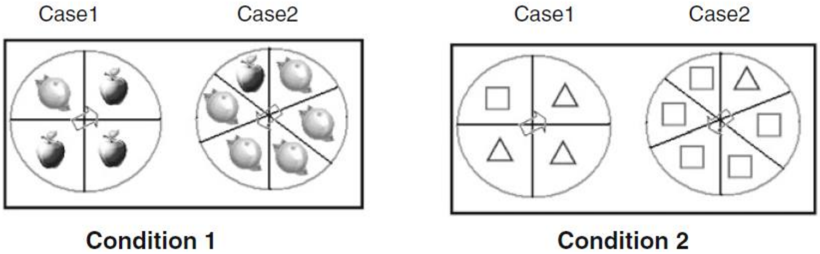
Fonte: Bayless e Schlottmann (2010)

Os resultados apontaram que crianças de 5 e 7 anos fizeram julgamentos realistas da dificuldade dos jogos com diferentes combinações de tamanho de portão / distância antes da experiência prática com os jogos. A comparação dos julgamentos com o desempenho, mostrou que as crianças eram realistas quanto aos efeitos da distância, mas não do tamanho das barras, na dificuldade da tarefa: superestimaram seu sucesso para o maior portão e o subestimaram para o menor portão. O ponto principal da pesquisa é que os julgamentos de dificuldade das crianças eram qualitativamente consistentes com a estrutura da tarefa física e, no geral, bem calibrados com o desempenho real.

Um estudo envolvendo 90 crianças de 4 a 6 anos de idade procurou investigar compreensões intuitivas da probabilidade por meio de um jogo de roleta. Os pesquisadores responsáveis pelo estudo, Nikiforidou, Pange e Chadjipadelis (2013) acreditam que crianças nesta faixa etária (4 a 6 anos) desenvolvem uma ampla gama de conhecimentos matemáticos informais e pensamentos intuitivos antes de iniciarem estudos com objetivos formais.

O estudo foi realizado em duplas de crianças que teriam que avaliar e comparar as probabilidades de um jogo de roleta. Considerando-se as probabilidades de ocorrência em dois casos: frutas (laranjas e maçãs) e formas geométricas (triângulos e quadrados). Havia diferenças no espaço amostral, considerando os eventos, como pode ser observado na Figura 4.

Figura 4: Jogo de roleta



Fonte: Nikiforidou *et al* (2013)

Entre as Condições 1 e 2, foi realizada uma sessão instrucional, em que os participantes discutiam e tentavam explicar as ocorrências oralmente. O pesquisador intervinha apenas com perguntas abertas, a fim de incentivar o pensamento crítico das crianças.

Nikiforidou *et al* (2013) concluíram que de uma forma geral, com o estudo, pode-se observar que as crianças com idade entre 4 e 6 anos expressaram compreensão da previsão de um resultado como mais provável. Antes de qualquer justificação ou exploração, as crianças fizeram estimativas sensatas sobre a probabilidade de eventos e houve ampliação no desempenho após intervenção. Dessa forma, os pesquisadores acreditam que as crianças nessas idades parecem possuir intuições prévias de conceitos probabilísticos. Tais achados sustentam que os pré-escolares possuem capacidade e intuições para acessar noções básicas de probabilidades. Assim, engajamento pessoal, experiência sensorial com a argumentação oral, manipulação sobre o que acontece com as roletas, motivação para ganhar e experimentação entre atividades levaram as crianças a estimativas mais altas sobre eventos incertos dentro de uma situação problematizadora contextualizada.

Um estudo realizado com a intenção de explorar o grau em que crianças com média de idade de pouco mais de 5 anos entendem conceitos-chave do pensamento probabilístico – como espaço amostral, probabilidade de um evento e comparações de probabilidade – foi desenvolvido por Antonopoulos e Zacharo (2013). Eles realizaram um pré-teste, uma intervenção e um pós-teste com 29 crianças da Educação Infantil. Nos testes, as crianças participaram de entrevistas individuais para responder 10 tarefas de dificuldade crescente nas seguintes categorias matemáticas: (a) espaço amostral, (b) a probabilidade de um evento e (c) comparações de probabilidade que envolvem contextos de cartas coloridas e bolas na caixa. A intervenção foi realizada em duas sessões semanais de 40 minutos por meio da exploração e discussão de quatro atividades.

De uma forma geral, os pesquisadores observaram que o efeito da intervenção de ensino provocou melhoria do pensamento probabilístico entre as crianças, fato observado, comparando-se os dados do pré e pós-teste. Houve um aumento de justificativas com base em dados quantitativos e uma diminuição correspondente a julgamentos idiossincráticos e subjetivos.

Assim, com o estudo interventivo, as crianças conseguiram definir o espaço amostral de um experimento probabilístico de uma fase[5], justificando suficientemente suas predições relativas. No entanto, permaneceram com dificuldades significativas na definição de espaço amostral em um experimento probabilístico de duas fases[6]. As crianças são influenciadas pelo valor absoluto da quantidade de objetos que compõem o evento, sem levar em conta a proporção entre os valores, para avaliar se o jogo é justo ou não. Por exemplo, se na caixa A tem uma bola verde e duas vermelhas e na caixa B duas verdes e quatro vermelhas, não é visto pelas crianças como justo se tiver que tirar a bola verde, pois a caixa B tem mais quantidade de bolas verdes.

Observou-se grandes aproximações entre o estudo de Antonopoulos e Zacharo (2103) e a pesquisa aqui em curso, especialmente porque ambas envolvem algumas demandas cognitivas (espaço amostral e comparação de probabilidades), além de utilizarem entrevista como método.

Marocci e Nacarato (2013) realizaram um estudo envolvendo adolescentes do Ensino Médio com foco na discussão sobre linguagem, resolução de problemas e ensino de Probabilidade, a fim de conhecer o movimento das significações probabilísticas de alunos do 1º ano deste nível de ensino. As autoras consideram que por meio da linguagem a pessoa se insere no meio social. Por isso, a linguagem se constitui no principal sistema simbólico que media as relações sociais, pois é essencial na comunicação e no estabelecimento de significados compartilhados que permitem interpretações dos objetos, eventos e situações do mundo real. Para analisar o papel da linguagem, foi realizada uma sequência de tarefas de resolução de problemas pela professora da turma investigada e por uma das pesquisadoras (a 1ª autora do estudo), em um trabalho colaborativo. Uma das tarefas probabilísticas contava com a análise de eventos para avaliar cada um como *certo, possível* ou *impossível.*

As pesquisadoras concluíram que para provocar, no ambiente da sala de aula, uma interação entre os alunos que seja promotora de movimentação de significações e, consequentemente, de aprendizagem, o fator mais importante é a ação pedagógica, tanto no

---

[5] Experimento de uma fase: a contagem do espaço amostral é direta, como por exemplo, no lançamento de uma moeda. Também nomeado por alguns pesquisadores como *evento simples*.

[6] Experimentos de duas fases: necessita combinação entre elementos para a contagem das possibilidades do espaço amostral, como por exemplo, o lançamento de duas moedas. Também nomeado por alguns pesquisadores como *evento composto*.

momento da escolha da tarefa, quanto durante a socialização e que mais importante que a atividade proposta é a discussão. Dessa forma, o trabalho com tarefas que envolvem a linguagem probabilística é de fundamental importância para o desenvolvimento do pensamento probabilístico, pois a apropriação de um vocabulário adequado se constituirá em ferramenta para esse pensamento (MAROCCI E NACARATO, 2013). Vale salientar que, embora o vocabulário específico da probabilidade seja importante para a formação do pensamento probabilístico, a aquisição dele apenas não parece suficiente para a compreensão de conceitos probabilísticos. Por esta razão, concorda-se com Bryant e Nunes (2012) que defendem a apropriação de demandas cognitivas para o entendimento da probabilidade.

Deodato e David (2015) propuseram uma oficina destinada a alunos do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental e usaram a Atividade Situada[7] e Teoria da Atividade[8] para avaliar os impactos da oficina na aprendizagem dos alunos sobre conteúdos probabilísticos. A oficina foi realizada ao longo de três dias com o uso de um jogo denominado 'Corrida de cavalos' que consistia em um tabuleiro numerado de dois a doze e dois dados de seis faces, além de bonequinhos que iriam avançar nas raias conforme saíam os resultados no lançamento dos dois dados. Ao decorrer do jogo foram realizadas perguntas aos alunos sobre sorte, azar, chances e probabilidades. No último dia da oficina, foi utilizado um dado em forma de um dodecaedro (12 faces) no lugar dois dados em forma de hexaedro (6 faces cada um, resultando em soma 12, no máximo). Como resultados, os pesquisadores observaram que foi possível identificar e descrever as interações de diversos estudantes e que houve reformulação de hipóteses iniciais sobre a ocorrência de um evento. Por exemplo, passou-se a perceber que um evento não ocorria simplesmente por uma questão de sorte ou azar e, sim, por uma razão matemática, poia havia maior probabilidade de sair determinadas somas do que outras. As atividades e questionamentos propostos no estudo de Deodato e David (2015) possibilitam reflexões sobre a compreensão da aleatoriedade, comparação de probabilidades e outros elementos probabilísticos e possuem aproximação com a presente pesquisa em função do uso de jogos.

Uma equipe de pesquisadores (GIROTTO, FONTANARI, GONZALEZ, VALLORTIGARA e BLAYE, 2016) realizou um estudo envolvendo crianças de 3 a 5 anos em

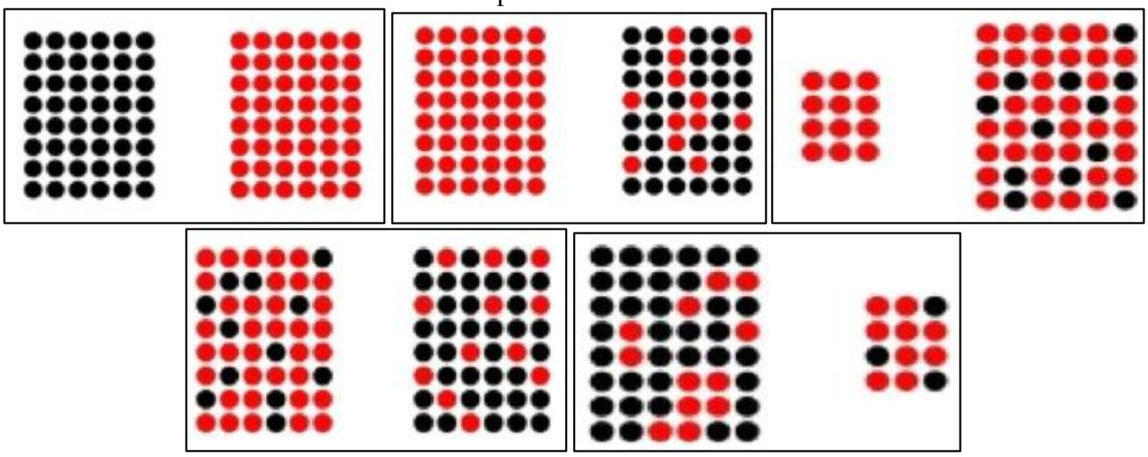
[7] Teoria baseada nos fundamentos filosóficos em Marx e Engels, liderada pela antropóloga Jean Lave que caracterizam a aprendizagem como mudança de participação, do sujeito, na prática. A prática, portanto, é vista como uma intencionalidade e uma reflexão (DEODATO E DAVID, 2015).

[8] Teoria Histórico-Cultural da Atividade ou simplesmente Teoria da Atividade possui raízes filosóficas assentadas em Marx e Engels. Com contribuições de Vygotsky, especialmente com o conceito de atividade mediada por artefatos, de Leontiev, que introduz uma estrutura, em diferentes níveis, para explicar a atividade e Engeström que expande a unidade de análise para um sistema de atividades e inclui novos componentes. Trata-se, portanto, de uma teoria cuja unidade de análise é a atividade humana. (DEODATO E DAVID, 2015).

tarefas de escolha, para verificar se a capacidade de realizar julgamentos verbais revela compreensão probabilística. Foram realizados 3 estudos: o Estudo 1 contou com 93 crianças, o Estudo 2 teve a participação de 48 crianças e o Estudo 3 contou com 21 crianças. As atividades foram realizadas individualmente com cada criança e um pesquisador. Os participantes foram informados explicitamente que, se sua escolha fosse bem-sucedida, eles iriam obter uma recompensa.

Com a ajuda das crianças, os examinadores colocaram bolas pretas e vermelhas em duas caixas. Em seguida, uma imagem (Figura 5) era apresentada às crianças para que elas não esquecessem as bolas que estavam em cada caixa. O examinador, então, retirava uma bola de cada caixa e colocava num recipiente opaco. Depois, perguntava à criança: *Qual recipiente você escolhe para encontrar a bola vermelha?* As teriam que efetuar um julgamento verbal sobre suas escolhas e seriam recompensadas se acertassem.

Figura 5: Representação de bolas nas caixas das tarefas A1, B1, B2, C1 e C2 – ordenado da esquerda para a direita



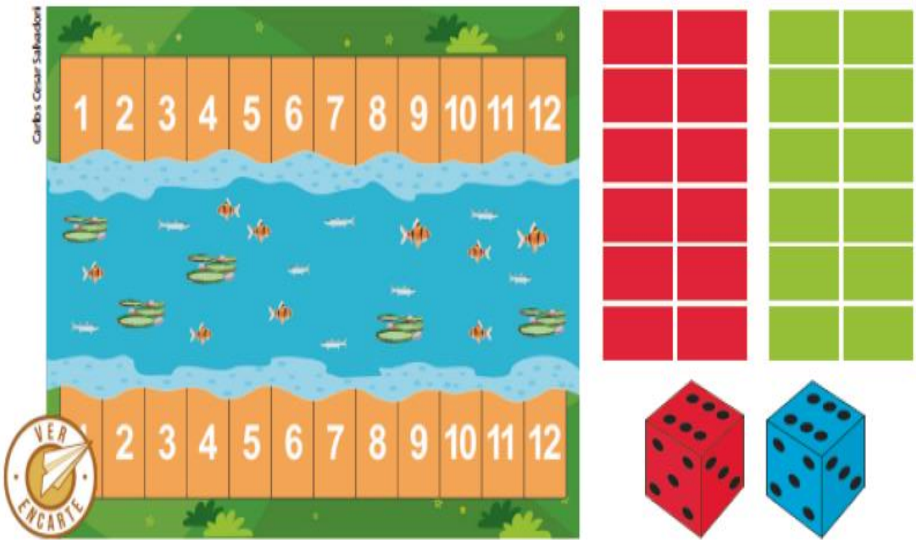
Fonte: Girotto *et al* (2016)

Os pesquisadores concluíram que crianças de 3 a 4 anos de idade falham em tarefas simples que exigem previsão de ocorrência de resultados aleatórios. Os estudiosos julgaram que, se as crianças pudessem fazer estimativas de probabilidade corretas, elas escolheriam o recipiente que estaria relacionado ao conjunto de bolas que provavelmente produziria um resultado favorável (bolas vermelhas). As crianças entenderam a lógica da tarefa de certeza (Tarefa A1), em que um conjunto continha apenas fichas vermelhas e o outro continha apenas fichas pretas, as crianças de todas as faixas etárias escolheram o recipiente do conjunto favorável. No entanto, nas tarefas restantes (B1, B2, C1 e C2), que exigem a formação de expectativas probabilísticas, apenas as crianças de 5 anos fizeram ótimas escolhas. As crianças realizam julgamentos verbais, mas falham numa variedade de condições, inclusive em fazer escolhas baseando-se na quantidade de elementos sem se preocupar com a proporcionalidade deles no conjunto.

O olhar sobre como pensam as crianças acerca da probabilidade é muito importante para que se possam efetivar intervenções em pesquisas futuras e no âmbito escolar. Os estudos de Girotto *et al* (2016) apontam que a partir dos 5 anos as crianças já possuem compreensões ou base para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico, e tal fato permite pensar: *as crianças mais velhas e os adultos com baixa escolarização, mantém ou ampliam suas compreensões probabilísticas se não tiverem influência da escola*?

Batista e Borba (2016) realizaram uma pesquisa cujo objetivo foi analisar compreensões de crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental no que concerne a três exigências cognitivas necessárias ao entendimento da probabilidade: compreender a aleatoriedade, formar o espaço amostral e comparar e quantificar probabilidades (BRYANT E NUNES, 2012). Foram realizadas entrevistas clínicas com 36 crianças do 1º, 3º e 5º anos. Para o estudo foram usados dois jogos: Travessia do Rio e Passeios Aleatórios da Rute (PAR). O jogo Travessia do Rio (Figura 6), consiste em um tabuleiro que simula um rio com as margens numeradas de 1 a 12. Cada jogador escolhe onde deverá colocar suas 12 fichas, (pode-se colocar mais de uma ficha em cada número da margem). São lançados dois dados e, se a soma coincidir com os números escolhidos, o jogador faz a travessia para a outra margem do rio. Ganha a partida quem realizar a travessia de todas as suas fichas.

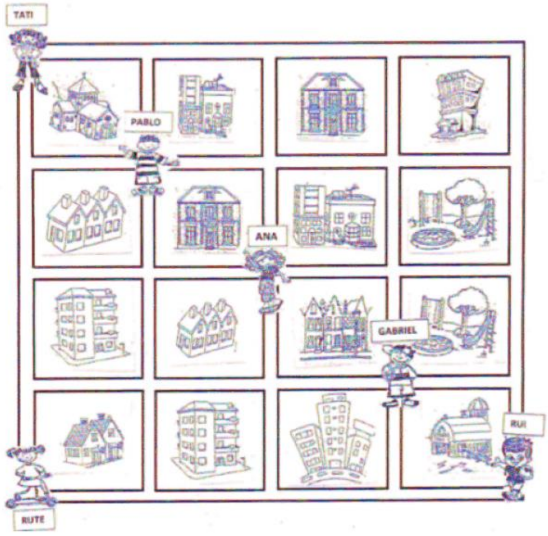
Figura 6: Travessia do rio



Fonte: BRASIL (2014, p.40)

No jogo Passeios Aleatórios da Rute[9] (Figura 7) Rute pretende visitar seus amigos: Tati, Pablo, Ana, Gabriel e Rui e para tal, ela criou um jogo com moedas: quando ela sai de casa, lança uma moeda: se sair 'cara' ela anda um quarteirão para direita (em frente, sentido leste) e se sair 'coroa' ela anda um quarteirão para cima (sentido norte). Em cada esquina de quarteirão ela para e lança a moeda novamente. Ela sempre consegue chegar na casa de um amigo após lançar a moeda quatro vezes. Rute só não sabe qual amigo será contemplado com sua visita.

Figura 7: Jogo PAR



Fonte: SILVA (2016)

As entrevistas para discutir as demandas cognitivas a partir da apreciação dos jogos foram realizadas individualmente, após cada criança conhecer as regras dos jogos e ter a oportunidade de jogar algumas rodadas. Durante a entrevista, em conformidade com as perguntas norteadoras, novas perguntas, argumentações e questionamentos foram realizados pela pesquisadora com a intencionalidade de que as crianças externassem suas compreensões com maior convicção a partir de reflexões propostas. As análises dos jogos exigiam que as crianças respondessem perguntas que versavam sobre chances (igual e diferente), evento impossível, equiprobabilidade, independência de eventos, levantamento de possibilidades e eventos aleatórios.

Os principais resultados do estudo apontaram que o significado intuitivo da probabilidade (BATANERO E DIAZ, 2007) foi evidenciado pelas crianças, em especial por meio da linguagem natural baseada em crenças e opiniões. As compreensões intuitivas nem sempre coerentes apresentadas pelas crianças podem servir de base para um aprendizado mais adequado dos conceitos, desde que haja instrução. Constatou-se avanços de compreensão das

[9] O jogo PAR é uma adaptação do jogo Passeios Aleatórios da Mônica proposto por Fernandez e Fernandez (1999) para o Ensino Superior e adaptado por Cazorla e Santana (2006) para a Educação Básica.

crianças mais velhas, em comparação com as mais novas. Apesar de nenhum conceito estar consolidado, as crianças apresentaram potencial para o desenvolvimento e aprendizagem deles. Os participantes não apresentaram compreensão adequada de independência de eventos e tiveram dificuldades em fazer uma lista exaustiva dos elementos de um evento. Houve maior facilidade na identificação de evento impossível e evento pouco provável. Em contrapartida, a maioria das crianças não conseguiu estabelecer a comparação de probabilidades considerando a análise dos elementos que compõem os eventos (o espaço amostral).

4.2. ESTUDOS DE PROBABILIDADE ENVOLVENDO COMPREENSÕES DE ADULTOS

Não foi localizada uma quantidade substancial de estudos que envolvem a compreensão de adultos sobre a probabilidade, considerando, prioritariamente, os últimos 10 anos. Os sujeitos das pesquisas, quase sempre, repousam em professores ou futuros professores. Poucas pesquisas, com foco em probabilidade, foram localizadas, cujos participantes fossem estudantes adultos de baixa escolarização (alunos da EJA, por exemplo) ou adultos não escolarizados.

No texto introdutório desta pesquisa, vários estudos envolvendo professores e futuros professores foram evidenciados (CAMPOS E PIETROPAOLO, 2013; VIALI E CURY, 2011; LOPES, 2008; VIALI, 2008, FELISBERTO DE CARVALHO, 2017), mostrando a fragilidade de compreensão dos participantes das pesquisas. Os estudiosos apontam, de uma forma geral, que a formação inicial e ou continuada dos professores parece não contribuir para a ampliação dos saberes probabilísticos dos professores, prejudicando dessa forma, o exercício de docência no que concerne à probabilidade em diferentes níveis da Educação Básica. Assim, para estes estudiosos, os professores e futuros professores envolvidos nas respectivas pesquisas não possuem conhecimentos necessários e suficientes para ensinar probabilidade. A seguir, cada um desses estudos, será mais detidamente explorado, com exceção de Lopes (2008) e Viali (2008) que propuseram análise documental.

Um dos centros de interesse desta pesquisa é o adulto com baixa escolarização, especialmente os estudantes que fazem parte da EJA, razão pela qual, evidenciam-se a seguir, alguns estudos que apresentam proximidade e interesse por envolverem este público e o ensino-aprendizagem da probabilidade. Mais um estudo envolvendo professores é discutido em seguida, em especial por se tratar de uma pesquisa que não envolve professores brasileiros e cujos resultados apresentam similitudes com os estudos nacionais. Os estudos aqui apresentados estão em ordem crescente de ano de publicação, explicitados no Quadro 2.

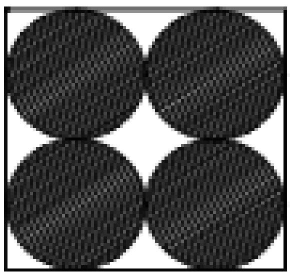
Quadro 2: Pesquisas probabilísticas envolvendo adultos

Ano	Pesquisadores	Público/Participantes	Foco
2011	Viali e Cury	Professores de Matemática em formação continuada	Resolução de problemas envolvendo probabilidade geométrica e clássica
2013	Ribeiro e Goulart	Estudantes da EJA (8º e 9º anos)	Intervenção por meio de sequência didática envolvendo acaso e experimento aleatório
2013	Campos e Pietropaolo	Professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental	Concepções acerca de noções probabilísticas (fenômenos aleatórios, espaço amostral, quantificação de probabilidades)
2015	Chernoff e Mamolo	Professores do Ensino Fundamental	Análise de sequências aleatórias no lançamento de moedas
2015	Batista e Francisco	Estudantes da EJA (Ensino Médio)	Avaliação de evento certo, impossível, provável e improvável
2017	Felisberto de Carvalho	Professores de Matemática dos anos finais	Aleatoriedade, espaço amostral e quantificação de probabilidades
2019	Lima de Borba	Estudantes da EJA de diversos níveis com média de idade de 36 anos	Relação entre raciocínios combinatório e probabilístico

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Viali e Cury (2011) realizaram uma pesquisa com 50 professores em formação continuada (Especialização ou Mestrado), utilizando um questionário para coletar compreensões dos docentes acerca de conhecimentos matemáticos, dos quais o artigo ressalta e discute as duas principais perguntas de natureza probabilística:

1- Pergunta 7: *Uma pessoa tem quatro chaves aparentemente iguais das quais apenas uma abre uma porta chaveada. Qual a probabilidade de que sejam necessárias mais do que três tentativas para abrir a porta se as chaves: a) são misturadas após cada tentativa falha? b) são separadas após cada tentativa falha?*
2- Pergunta 8: *A figura ao lado representa uma parede quadrada, na qual estão pintados discos de raio r. Se uma bola é lançada totalmente ao acaso contra a parede, calcule a probabilidade de ela tocar fora dos discos e explique como chegou à resposta.*



Foram feitas algumas perguntas abertas, entre elas, qual os conteúdos que os professores mais gostam ou menos gostam de ensinar e os resultados apontaram que dos 50 pesquisados, 44 eram indiferentes à Estatística e Probabilidade e apenas 3 informaram que gostavam de Probabilidade e 2 de Estatística.

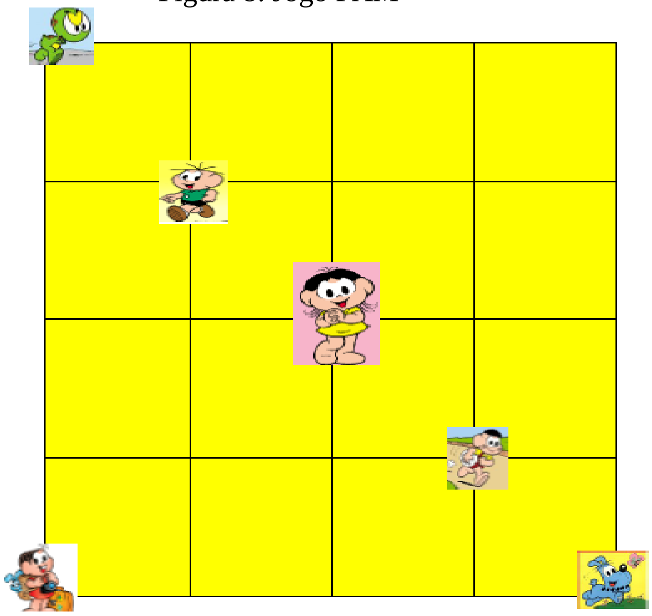
Em relação à pergunta 7 apenas quatro participantes (8%) acertaram plenamente e sete (14%), parcialmente. A questão exigia basicamente o conceito geométrico de probabilidade, que é análogo ao conceito clássico, mas aplicado a espaços não enumeráveis. Em relação à questão 8, o número de respostas totalmente corretas corresponde a 20 respondentes ou 40% da amostra investigada. Analisando-se a resolução correta das duas questões simultaneamente, verifica-se que apenas dois respondentes acertaram integralmente as duas questões.

Os autores consideraram bastante preocupante o fato de 70% da amostra pesquisada, formada por professores que ensinam Matemática e, em sua maioria possuem licenciatura plena em Matemática (3/4), não terem respondido ou terem se equivocado em suas respostas. Assim, a pesquisa supõe que a formação inicial desses docentes, em termos de conteúdos de Probabilidade, é deficitária, indicando que os mesmos possuem pouco conhecimento sobre o tema. Por conseguinte, os pesquisadores sugerem novas pesquisas sobre erros cometidos por docentes, visando ampliar discussões sobre grades curriculares dos cursos de Graduação ou Pós-Graduação.

Uma pesquisa realizada com 36 estudantes da EJA do 8º e 9º anos foi realizada por Ribeiro e Goulart (2013) com a intenção de analisar resultados de uma sequência didática destinada à compreensão de conceitos básicos da probabilidade. Os autores se basearam em Coutinho (2001) que considera que a construção de conceitos probabilísticos deve ser feita a partir da compreensão de três noções básicas: a percepção do acaso, a ideia de experimento aleatório e a noção de probabilidade.

Neste estudo, Ribeiro e Goulart (2013) utilizaram o jogo Passeios Aleatórios da Mônica (PAM), adaptado por Cazorla e Santana (2006) e a sequência didática proposta por estas mesmas autoras. O jogo PAM é semelhante ao jogo PAR, que foi adaptado por Silva (2016) em pesquisa mencionada anteriormente. Assim, o jogo consiste num tabuleiro com personagens da turma da Mônica (Figura 8). A Mônica pretende visitar os colegas e lança uma moeda: se sair cara ela anda para o leste se sair coroa, ela anda no sentido norte.

Figura 8: Jogo PAM



Fonte: Ribeiro e Goulart (2013)

O cerne da discussão da atividade são as possibilidades no lançamento da moeda quatro vezes. Por esta razão, os alunos fizeram uma atividade para avaliar as frequências, por meio de experimentos para responder, por exemplo, qual seria o personagem mais e menos visitado ou quantos e quais caminhos existiriam.

Os pesquisadores concluíram que é possível introduzir conceitos probabilísticos para estudantes da EJA por meio de jogos, pois com a atividade foi observado que alguns grupos desenvolveram a percepção do acaso e a ideia de experimento aleatório. Assim, esses alunos estariam aptos a aprenderem probabilidade de forma mais significativa. Os autores sugerem que mais atividades de mesma natureza auxiliarão os grupos que não desenvolveram as noções básicas propostas no estudo.

Campos e Pietropaolo (2013) realizaram um estudo que contou com a participação de 27 professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os professores responderam a um questionário com 13 questões que versavam sobre fenômenos aleatórios, diferentes definições da probabilidade, significado e quantificação de espaços amostrais, quantificação de probabilidades, conexão com outros conteúdos, entre outros. O que se pretendeu com o estudo foi delinear a imagem conceitual constituída pelos professores a partir do repertório de seus conhecimentos relativos à probabilidade e seu ensino para propor mecanismos formativos.

Com os resultados, os autores observaram que a maioria dos professores associou aleatoriedade a jogos de azar e quase sempre evocaram o conceito da probabilidade clássica, desconhecendo a existência de outros significados. Constatou-se que os professores demonstravam equívoco ao julgar que a probabilidade se resume a um número e não a uma razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis. Considerando a compreensão do conceito de espaço amostral, apenas 6 de 27 demonstraram entendimento de que se tratava de resultados possíveis de um evento, enquanto somente nove dos professores pesquisados conseguiram responder adequadamente quantos resultados diferentes são possíveis no lançamento de dois dados comuns.

De forma geral, a imagem conceitual dos participantes sobre a probabilidade em relação ao ensino se referia a um campo de problemas para aplicação de razão como um significado de fração e não faziam parte os pontos de vista da probabilidade considerando as definições geométricas e frequentista. A noção de espaço amostral não constava no repertório de conhecimentos do conteúdo específico e pedagógico dos professores. Assim, os pesquisadores concluíram que os participantes do estudo não possuíam os conhecimentos necessários para ensinar probabilidade nos anos iniciais.

A partir dos resultados, os autores propuseram uma formação continuada por meio de sequências de atividades considerando aleatoriedade, espaço amostral e quantificação de probabilidades – baseados em Bryant e Nunes (2012). As atividades foram lidas e discutidas coletivamente, durante os seis encontros formativos de três horas cada. Os resultados dessa etapa apontaram para um certo ceticismo dos professores em relação à importância ensino da probabilidade nos anos iniciais, por outro lado os docentes se mostraram mais propositivos em relação ao tema quando descobriram conexões com outros conteúdos, como proporcionalidade. A base de conhecimento para o ensino foi ampliada, no que diz respeito à aleatoriedade, ao espaço amostral e a quantificação de probabilidades, bem como a imagem conceitual da probabilidade.

Chernoff e Mamolo (2015) promoveram um estudo com 265 professores do Ensino Fundamental que faziam parte de um curso de metodologia projetado para o ensino de Matemática, mas que ainda não tinham trabalhado com probabilidade neste curso. Os professores teriam que avaliar e justificar qual ou quais sequências do lançamento de moedas teriam menos probabilidade de ocorrência ou se todas teriam probabilidades iguais. A questão proposta pelos pesquisadores era basicamente a seguinte:

- Qual das seguintes sequências é menos provável de ocorrer, considerando cinco lançamentos de uma moeda justa. Justifique suas respostas.

a) THHTH[10]

b) HTHTH

c) THHHT

d) HHTTH

e) HHHTT

f) Todas as sequências têm as mesmas probabilidades de ocorrência.

Os pesquisadores destacaram que a maioria dos participantes apontaram corretamente que qualquer uma das sequências teria as mesmas probabilidades de ocorrência, no entanto, nem sempre as justificativas apresentavam coerência. Se nas sequências fossem incluídas as opções TTTTT e HHHHH, talvez os resultados positivos fossem menores. Do grupo estudado, 11% julgou que a sequência HTHTH possuía menor probabilidade de ocorrência, por aparentar uma certa ordenação ou padrão. As justificativas deste grupo foram o foco da discussão no artigo por parte dos estudiosos.

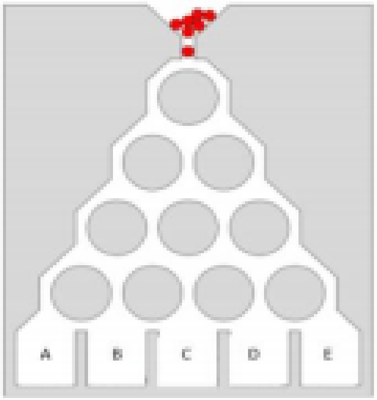
Foi observado que as justificativas desses professores se referiam à probabilidade relativa de outras propriedades alternativas associadas às sequências de moedas, denominado aqui de atributos heurísticos. Os atributos heurísticos que foram evidenciados nas respostas dos participantes incluíram: i) padrão; ii) aleatoriedade; iii) alternância (o número de interruptores, de mudança entre cara e coroa); iv) o comprimento das sequências (uma ocorrência repetida de uma cara ou uma coroa). Para alguns professores, a aparência padronizada e 'não misturada' da sequência HTHTH denota ausência de aleatoriedade, por exemplo.

De forma global, Chernoff e Mamolo (2015) concluíram que a pesquisa sugere que alguns indivíduos, quando apresentados a uma questão específica, respondem a uma questão diferente, usando argumentos que distam do objetivo central da situação. Mais especificamente, os participantes em vez de fazer a comparação de probabilidade relativa pretendida, substituem por atributos particulares associados a sequências de moedas (por exemplo, equiprobabilidade da moeda, padrões percebidos, aleatoriedade observada, interruptores ou alternâncias entre uma cara e uma coroa e corridas (a recorrência de um lado particular da moeda para um número de viradas seguidas).

[10] H – head (cabeça) – equivalente a CARA.
T – tail (cauda) – equivalente a COROA.

Batista e Francisco (2015) investigaram um grupo de 32 alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), formado por adultos do Módulo II e do Módulo III correspondentes às duas últimas etapas do Ensino Médio regular. O estudo buscou analisar o desempenho de alunos acerca de conhecimentos probabilísticos, especialmente no que se refere às chances de ocorrências de eventos (probabilidades) e à comparação de probabilidade em contextos de bolas na caixa e de rolamento de bolinhas (Figura 9).

Figura 9: Jogo de rolamentos de bolinhas



Fonte: Batista e Francisco (2015)

Para o estudo foram aplicados um questionário e um teste que contou com questões de múltipla escolha, mas com a exigência da justificativa para as escolhas feitas. Nas questões, havia ainda um quadro que solicitava que os alunos avaliassem eventos certos, impossíveis, muito prováveis ou pouco prováveis.

Os resultados da pesquisa indicaram que a maioria dos alunos nunca tinham tido aula de Probabilidade, não sabiam ou não lembravam do conteúdo. Para os autores a vivência num mundo letrado e estatístico, a experiência no mundo do trabalho e a maturidade não dão conta do desenvolvimento do pensamento probabilístico. Os alunos avaliaram coerentemente os eventos certos, impossíveis, prováveis e improváveis. No entanto, embora alguns alunos tenham acertado a opção nas questões de múltipla escolha, as justificativas apontavam para incompreensões, especialmente quando a comparação de probabilidades exigia análise proporcional dos dados. As escolhas, consideravam basicamente os valores absolutos, corroborando com dados observados em pesquisas com crianças (GIROTTO *et al* , 2016).

Lima e Borba (2019) discutem as contribuições que a exploração de problemas combinatórios pode trazer para o raciocínio probabilístico e vice-versa. A pesquisa foi realizada com 24 estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA) de diferentes níveis de escolarização, com média de idade de 36 anos. As autoras utilizaram a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud para realizar as análises do estudo, considerando as estruturas multiplicativas. Os testes versaram de quatro problemas combinatórios de diferentes naturezas (envolvendo produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação) e 16 problemas probabilísticos referentes às diferentes exigências cognitivas da probabilidade relacionados a uma situação combinatória.

Os resultados do estudo de Lima e Borba (2019) apontaram defasagem no que diz respeito aos conhecimentos combinatórios e probabilísticos dos estudantes. As dificuldades apresentadas se relacionaram a incompreensões dos invariantes dos problemas combinatórios, ao não desprendimento de preferências pessoais ao levantar possibilidades e à dificuldade em justificar as respostas dadas aos problemas probabilísticos. Foram constatadas contribuições aos raciocínios combinatório e probabilístico que surgem da resolução de problemas que articulam Combinatória e Probabilidade e que essa forma de articulação se mostrou positiva para os desempenhos apresentados pelos participantes ao resolverem os diversos problemas propostos.

Em sua tese, Felisberto de Carvalho (2017) descreve uma experiência formativa que objetivou desenvolver conhecimentos didático-matemáticos acerca da probabilidade com 40 professores de matemática em exercício nos anos finais, durante sete encontros formativos que envolveu uma sequência de atividades baseadas em Bryant e Nunes (2012).

A partir do estudo preliminar dos conhecimentos prévios dos participantes, o pesquisador concluiu que os docentes pesquisados demonstraram não possuir conhecimentos iniciais suficientes para ensinar probabilidade aos estudantes do Ensino Fundamental. Assim, observou-se lacunas nos conhecimentos sobre o conteúdo e seu ensino: comum, avançado e especializado. Com base nessas incompreensões, foram organizados os encontros formativos que culminaram na ampliação do repertório probabilísticos dos professores, em especial em relação à aleatoriedade, ao espaço amostral e à quantificação de probabilidades com foco em diferenciação entre situações determinísticas e aleatórias, caracterização dos eventos, observância de diferentes significados da probabilidade e compreensão das diversas formas de representação do espaço amostral, além da noção de risco.

Por fim, o autor considerou positiva a ação interventiva pois ampliou-se as compreensões dos docentes, instrumentalizando-os para ensinar Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental, além de que foi propiciada um redimensionamento em relação às concepções do senso comum de que a matemática é uma ciência unicamente determinística. “Compreender que a matemática trabalha também com situações de caráter não-determinístico foi uma grande contribuição para os conhecimentos desse grupo de professores" (FELISBERTO DE CARVALHO, 2017, p. 326).

Constatou-se também, que os professores desenvolveram e ampliaram conhecimentos concernentes à probabilidade e ao seu ensino. Nessa ampliação, constatou-se ainda, um processo de ressignificação dos professores sobre o significado da probabilidade e das noções que sustentam este conceito como as noções de aleatoriedade, espaço amostral e quantificação de probabilidades. Foi destacada a noção de risco por meio do estudo da associação entre variáveis em tabelas de dupla entrada como um conhecimento emergente para o ensino nos anos finais do Ensino Fundamental. Avaliou-se que o programa de formação favorece a construção dos conhecimentos didáticos-matemáticos uma vez que a idoneidade didática geral foi considerada alta. Observou-se que o modelo formativo experimentado, é um aporte que permite apoiar e formar adequadamente os professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental no tema específico da probabilidade e sua didática.

4.3. ESTUDOS COMPARATIVOS DE PROBABILIDADE ENVOLVENDO ADULTOS E CRIANÇAS

No percurso de revisão da literatura, poucos estudos foram localizados, considerando a última década, cujas pesquisas tratassem explicitamente acerca da comparação de compreensões entre crianças e adultos com foco em Probabilidade. Nessa revisão, nenhum texto nacional (brasileiro) foi encontrado. Quatro textos na língua inglesa se destacaram e estão explicitados no Quadro 3. Brevemente, por ordem cronológica crescente do ano de publicação, os textos serão discutidos a seguir.

Quadro 3: Pesquisas envolvendo comparação de compreensões da probabilidade de crianças e adultos

Ano	Pesquisadores	Público/Participantes	Foco
2002	Harbaugh, Krause, Vesterlund	Crianças a partir de 5 anos e adultos até 64 anos	Análise de risco (influência da idade)
2013	Betsch e Lang	Crianças de 6 e 9 anos e adultos de 23 anos	Análise de risco (influência de dados probabilísticos e informações irrelevantes) se alteram com a idade?
2014	Betsch, Lang, Lehmann e Axmann	Crianças de 6 e 10 anos e adultos de 21 anos	Escolhas e riscos (transmissão de informações probabilísticas)
2014	Fontanari, Gonzalez, Vallortigara e Girotto	Indígenas mais (crianças e adultos)	Há um senso de chance compartilhado por todos os indivíduos independente de escolaridade e cultura?

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

O artigo ‘Risk Attitudes of Children and Adults: Choices Over Small and Large Probability Gains and Losses’ possui tripla autoria: William T. Harbaugh, Kate Krause, Lise Vesterlund e foi publicado em 2002. Os autores procuraram examinar como as atitudes de risco podem mudar com a idade. A pesquisa envolveu participantes de 5 a 64 anos de idade que deveriam escolher entre apostas simples, considerando determinados valores. A pesquisa contou com um total de 234 participantes, em três estudos: o primeiro com 129 crianças com idade de 5 a 13 anos; o segundo com um grupo de 6 sujeitos que tinham entre 14 e 20 anos de idade e mais 47 adultos (familiares e pais de alunos que frequentavam programas de verão, com idade entre 21 e 64 anos) e, o terceiro estudo envolveu 52 estudantes universitários com idades entre 18 e 20 anos.

Os pesquisadores investigaram, como se comportavam adultos e crianças em escolhas que envolvessem risco e perda-ganho de dinheiro, considerando, por exemplo, se o risco fosse alto (baixa probabilidade de acerto), mas a premiação também fosse alta, eles teriam aversão ou investiriam? Ou se o risco fosse baixo (alta probabilidade de acerto), mas a premiação fosse baixa, como seriam as escolhas considerando as idades?

Os participantes do experimento enfrentaram a decisão mais simples possível envolvendo risco. Eles teriam apenas que fazer uma escolha., ou seja, uma aposta que envolvia incerteza nos resultados, mas esta aposta envolvia o risco da perda de seu dinheiro. As perguntas e atividades não eram hipotéticas, eram reais e os sujeitos tinham benefícios em dinheiro quando ganhassem. Os pagamentos médios para as crianças foram de US$ 5 com um intervalo de cerca de US$ 1 a US$ 9. Para os adultos, o pagamento médio foi de cerca de US $50, com variação de US$ 10 a US $90. Os protocolos usados foram muito semelhantes em crianças e adultos, por isso os autores puderam descrever como o comportamento de risco varia em uma ampla faixa de idades. Cada participante avaliou uma série de catorze atividades que envolviam escolhas entre uma aposta simples e um determinado resultado. Em todas estas escolhas a aposta era tudo ou nada: ou acertava e ganhava mais dinheiro ou perdia a aposta e ficava sem o benefício.

Foi utilizada uma espécie de roleta formada por setores com marcações diferentes e probabilidades distintas de ocorrência. Assim, por exemplo, num questionamento, cujo setores da roleta apresentam 30% de probabilidade de perda, o examinador questionava o participante para escolher entre fazer a aposta naquele setor que possui alta probabilidade de ocorrência (70%), mas, em contrapartida, ele teria que utilizar 40 ‘fichas-moedas’ de um total de 50 que possuía. Assim, a probabilidade era alta para ganhar, mas o investimento também era alto. Em outra situação, os sujeitos teriam 2% de probabilidade de perder, mas teriam que investir todo o seu dinheiro. Os participantes escolheriam arriscar mais dinheiro pela alta probabilidade de ganho ou prefeririam arriscar menos dinheiro, mesmo que houvesse menor probabilidade de ganhar? Haveria diferença de comportamento com a idade?

Como resultados, os pesquisadores informaram que

> Nós examinamos as escolhas entre uma simples aposta e um certo resultado para crianças e adultos e encontramos grandes diferenças relacionadas à idade nas escolhas. Nos protocolos experimentais virtualmente idênticas, cerca de 70% das crianças mais novas escolheu um jogo justo quando a possibilidade do ganho foi de 0,8, enquanto que apenas 43% dos adultos mais velhos fez isso. Sobre as perdas, cerca de 75% dessas crianças fez uma aposta justa, quando a probabilidade de perda foi de 0,1, em comparação com 53% dos adultos. (HARBAUGH, KRAUSE, VESTERLUND, 2002, p. 72).

Para os pesquisadores, os resultados mostraram que a função da probabilidade muda com a idade. Especificamente, as decisões infantis são consistentes com o uso de grandes pesos de probabilidade subjetiva[11], que envolve riscos de 10%, por exemplo, e estes pesos diminuem com a idade. Harbaugh *et al* (2002) argumentam que a explicação mais razoável para esse resultado é que a experiência acumulada pelos adultos, na avaliação de riscos e tomada de decisões, suportam consequências dessas decisões que os acompanham com o passar do tempo e, portanto, de alguma forma movem preferências de risco das pessoas, no sentido da ponderação da probabilidade objetiva[12] que pode considerar investir em riscos em torno de 30%. Apesar deste resultado, os autores alertam que a ponderação subjetiva não deve desaparecer completamente com a experiência, uma vez que um número substancial de participantes mais velhos exibiu evidências robustas de ponderação subjetiva.

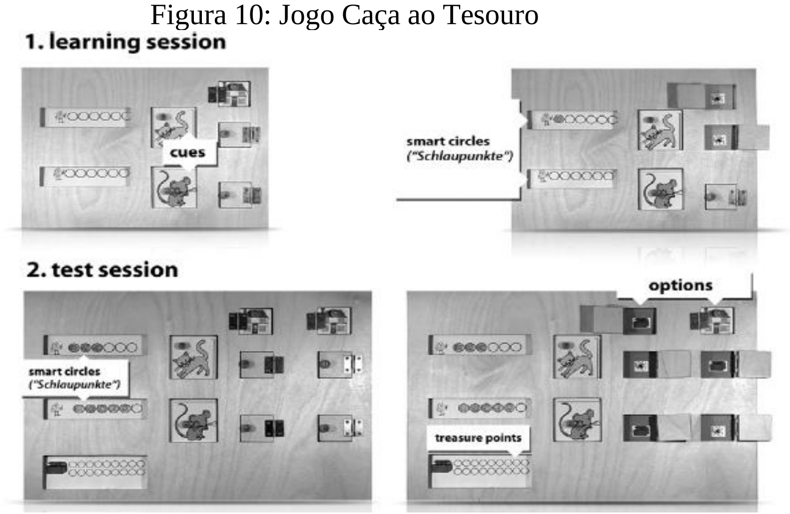
Betsch e Lang (2013) realizaram um estudo cujo objetivo foi comparar as escolhas arriscadas de crianças de 6 anos (n=89) e de 9 anos (n=75) e de adultos de 23 anos (n=81), em situações que se exigia considerar dados probabilísticos e informações irrelevantes ao contexto, ou seja, as pesquisadoras buscaram investigar até que ponto a influência destes elementos (dados probabilísticos e informações irrelevantes) se alteravam com a idade, em escolhas que envolviam análise de risco.

---

[11] Nesta obra, os autores se basearam-se em Prelec (1998) que considera pesos subjetivos situados nas escolhas que envolveram perda de 0,1 ou ganho de 0,8.
A probabilidade subjetiva, baseada em Bayes, considera graus de crença. É uma probabilidade a *priori* determinada a partir da observância de uma consequência a *posteriori* (COUTINHO, 2007).
[12] Para Prelec (1998) se relaciona às escolhas que envolveram riscos em torno de 0,33.
A probabilidade objetiva é entendida como uma probabilidade *a priori*, ou seja, como a probabilidade clássica ou teórica.

Às crianças foi apresentado um tabuleiro que envolvia um jogo de Caça ao tesouro (Figura 10). Neste jogo, as crianças escolhiam um animal de sua preferência entre oito disponíveis (o animal escolhido teria um nome dado pela criança) para ajudá-las com as dicas para encontrar o tesouro. O examinador escolhia um outro animal que não teria um nome específico. O animal da criança ficava na parte superior e, para este os acertos eram de 50%. Já o animal do examinador ficava na parte inferior e acertaria 83% das dicas. Foi informado às crianças que os animais dariam dicas que poderiam ser corretas, ou não, sobre a existência do tesouro. Se as crianças aceitassem a dica, abrissem a porta da casa e encontrassem um baú do tesouro, elas pintariam uma bolinha representando um ponto (à esquerda). Caso não tivesse o baú e, sim, uma aranha, elas não ganhariam ponto. Antes do jogo, as crianças tiveram uma sessão de ensino, que apontava para a probabilidade de acerto de 50% do animal escolhido por elas (3 acertos em 6) e 83% de acerto pelo animal escolhido pelo examinador (5 em 6). A questão investigada era: As crianças seriam influenciadas pelo animal que mais gostam (informação irrelevante) em detrimento dos dados probabilísticos?

Figura 10: Jogo Caça ao Tesouro



Fonte: Betsch e Lang (2013)

O mesmo procedimento foi realizado com os adultos, com uma diferença apenas: eles foram comunicados que seriam o grupo controle de uma pesquisa que envolveu crianças. Por esta razão, o contexto era infantil e iria permanecer igual para o estabelecimento de comparações. Assim como ocorreu com as crianças, os dados foram codificados após as sessões experimentais, analisando as fitas de vídeo. Para cada tentativa, número e sequência de janelas abertas, sua posição e seu conteúdo foram registrados para medir a busca de informações. Além disso, para cada tentativa, registrou-se a escolha (Casa A ou B) e seu resultado (tesouro ou aranha).

Para estas pesquisadoras, um tomador de decisão deve ser sensível às diferenças nas probabilidades dos resultados e deve ser capaz de usar e priorizar probabilidades de resultados como pesos durante a busca e escolha de informações para a tomada de decisão. Assim, por meio de uma série de ensaios, avaliou-se se e em que medida a informação probabilística é usada como critério de decisão quando outras informações irrelevantes também estão presentes. Dessa forma, o estudo consistiu em explorar as tendências das crianças e adultos para priorizar a informação probabilística na tomada de decisão em detrimento de informações irrelevantes que estejam envolvidas na situação.

Segundo os autores, uma variedade de operações cognitivas é necessária para executar uma regra de decisão. Entre elas, o indivíduo deve:

- Procurar informações probabilísticas no ambiente ou na memória;
- Priorizar esta informação como um peso de decisão (por exemplo, através da inibição de outras informações na memória de trabalho);
- Realizar operações de ponderação;
- Determinar e escolher a opção com a maior soma dos valores ponderados.

Os participantes completaram 18 testes de escolha em uma ordem fixa. Eles tiveram a tarefa de concluir várias decisões que sempre envolveram duas opções que diferiam em termos de probabilidade (p = 0,50 vs. p = 0,83).

Com o estudo, observou-se grandes diferenças de resultados com a idade em todas as medidas dependentes: precisão da escolha, utilização de informações probabilísticas (validades de sugestões), busca de informações e utilização de feedback. Crianças de 6 anos (pré-escolares) tendiam a ter atração sistemática pelas informações irrelevantes que eram determinantes para suas escolhas. A precisão da escolha e a utilização de informações probabilísticas aumentaram com a idade. Na ausência de informação atraente (sugerida pelo animal de sua escolha), todos os adultos seguiram a pista de alta validade na maioria de suas escolhas, enquanto apenas uma minoria das crianças de 6 anos o fez. Em comparação com as crianças de 6 anos, a tendência de usar probabilidades como pesos de decisão foi substancialmente mais forte em alunos de 9 anos. Ainda assim, uma proporção considerável dessas crianças de 9 anos de idade não usou as probabilidades como pesos, mesmo quando não havia informações de atração. A busca de informações também diferiu entre os grupos etários. Concluiu-se que as crianças mais novas tendem a pesquisar informações de uma maneira baseada na sugestão, enquanto os adultos tendem a empregar uma estratégia de busca baseada em opções.

Assim, para as pesquisadoras, as crianças com mais de 6 anos já são capazes de aplicar procedimentos de ponderação antes de tomar suas decisões. Especificamente, eles podem pesar os valores associados com opções por outros estímulos. Essa capacidade é fundamental, mas não suficiente para alcançar a competência da decisão (BETSCH e LANG, 2013). Compreender a importância especial da informação probabilística e priorizá-la como peso de decisão parece se desenvolver mais tarde e não está totalmente desenvolvido por volta dos 9 anos de idade, afirmam os autores.

Betsch, Lang, Lehmann, Axmann, (2014) realizaram uma pesquisa com 215 sujeitos em uma primeira etapa e 217 na segunda, dos quais, crianças de 6 e 10 anos incompletos e adultos de 21 anos de idade. No Experimento 1 foi aplicada uma atividade envolvendo um painel de informações, cujos dados deveriam ser lembrados para a tomada de decisão posterior. O Experimento 2 considerou uma atividade em que todas as informações eram visíveis durante a tomada de decisão. Os painéis de informações apresentavam três pistas probabilísticas com validades: 0,83; 0,67; 0,50 (chances de acertos).

Para estes pesquisadores, na análise de uma situação que envolve escolhas e riscos, os valores de resultados devem ser ponderados pelas suas probabilidades de ocorrência, assim se os riscos são maiores, a premiação deve ser maior para valer o risco. Os pesos da probabilidade impõem algumas exigências sobre as habilidades cognitivas do tomador de decisão. A representação exige que a informação probabilística disponível seja efetivamente codificada e formada em representações subjetivamente significativas na mente. A codificação não é possível sem um correspondente sistema de codificação (ou seja, um conceito de probabilidade) ativada na memória. Assim, é possível que a aprendizagem baseada na experiência estabeleça uma compreensão implícita do risco ou que a informação probabilística seja transmitida em um formato que mapeie sistemas de codificação básicos necessários às análises de risco.

Os resultados da pesquisa mostraram que uma parcela considerável de crianças com idade aproximada de 10 anos é capaz de usar as probabilidades como pesos de decisão em um ambiente de decisão bastante complexo, enquanto que crianças de seis anos não conseguem fazê-lo. Os pesquisadores observaram que o formato de apresentação aberta, promove ainda mais a utilização de probabilidades em alunos com 10 anos de idade. Como nos adultos, também aumenta sua suscetibilidade a outras informações para influenciar adicionalmente suas decisões, mesmo quando são irrelevantes. Em conjunto, essas descobertas demonstram que as capacidades de ponderação e integração são altamente desenvolvidas em crianças de 10 anos. Com relação às crianças de 6 anos, o comportamento de decisão sistemática é escasso. Suas decisões também refletem diferentes fontes de informação, mas de maneira substancialmente menos sistemática. A forte diferença de desempenho entre crianças de seis e dez anos sugere que a competência de decisão se desenvolve significativamente durante a idade escolar precoce.

Fontanari, Gonzalez, Vallortigara e Girotto (2014) investigaram acerca do senso de chance (probabilidade) entre dois grupos indígenas maias. Estes pesquisadores buscavam resposta para a indagação: *Existe um senso de chance compartilhado por todos os indivíduos, independentemente da escolaridade ou da cultura*?

A pesquisa contou com 188 participantes indígenas maias da Guatemala divididos em três grupos: adultos monolíngues, adultos bilíngues e crianças maias escolarizadas (7 a 9 anos). Foi usado também um grupo controle formado por crianças e adultos italianos. A investigação envolveu três estudos: uma avaliação prévia e posterior (Estudo 1); um levantamento envolvendo raciocínio sobre as proporções (Estudo 2) e atividades envolvendo possibilidades e a combinatória (Estudo 3).

As principais conclusões a que os pesquisadores chegaram é que a capacidade de fazer avaliações probabilísticas corretas emerge independentemente da cultura ou instrução, por esta razão, adultos que não foram expostos a qualquer tipo de educação formal foram capazes de fazer previsões adequadas. A performance dos adultos não escolarizados, na maioria dos casos, foi indistinguível daqueles das crianças escolares maias e dos controles ocidentais. Os pesquisadores enfatizam que o que se avaliou no estudo foi a capacidade dos sujeitos de expressarem suas compreensões intuitivas acerca de eventos incertos e que as atividades não exigiam julgamento numérico. As tarefas utilizadas tinham uma natureza elementar, pois foram projetadas para revelar a existência de um senso de acaso, não seus limites e aprofundamentos. Bennett (2003) afirma que "algumas ideias intuitivas a respeito da probabilidade parecem, sim, preceder as ideias formais, e, se corretas, são um auxílio ao aprendizado" (BENNETT, 2003, p. 8). Neste ponto, concorda-se mais com Fischbein (1984) que defende que as intuições, embora não sejam coerentes do ponto de vista formal, servem de base para novas aprendizagens.

Por fim, Fontanari *et al* (2014) concluíram que juntamente com a aritmética básica e a geometria, a mente humana possui um conhecimento probabilístico básico, intuitivo que independe de cultura e escolarização. Assim, concorda-se com o estudo dos pesquisadores que aponta para a presença de noções intuitivas que emergem nas pessoas, independente da escolaridade e da cultura das pessoas, bem como independe da idade. Em contrapartida, acredita-se que a compreensão da probabilidade como um conjunto de demandas cognitivas que precisam ser desenvolvidas, não acontece espontaneamente, carece da interferência de intervenção por meio do ensino. E este é um pilar da pesquisa que aqui se desenrola.

Constata-se que em três dos estudos apresentados (HARBAUGH *et al* 2002; BETSCH E LANG, 2013; BETSCH *et al* , 2014;) foram observadas diferenças nos desempenhos de adultos e de crianças e gradação nos resultados em função das idades. Já o estudo de Fontanari, Gonzalez, Vallortigara e Girotto (2014) mostrou aproximação entre os resultados de adultos e crianças, escolarizados ou não. A presente pesquisa tem como um dos seus objetivos verificar se há, ou não, diferenças de desempenhos entre crianças e adultos – no que diz respeito a exigências cognitivas relativas à probabilidade.

4.4. ESTUDOS QUE ENVOLVEM A COMPREENSÃO DE JUSTIÇA EM JOGOS

Apesar da relevância e da relação histórica entre justiça e jogos de azar, nenhuma pesquisa brasileira ou portuguesa, realizada nos últimos 10 anos, foi encontrada com foco na ideia de justiça em jogos. Em estudos internacionais também se observou escassez de pesquisa na última década com esse foco, razão pela qual, optou-se por ampliar o período de busca. Em anos anteriores, destacam-se os estudos de Vidakovic, Berenson e Brandsma (1998) e de Cañizares, Batanero, Serrano e Ortiz (2003), assim como as pesquisas realizadas a partir dos estudos de Pratt (2000) por pesquisadores do mesmo grupo, como Paparistodemou, Noss e Pratt (2002, 2008). Evidencia-se, ainda, o estudo de Ortiz, Batanero e Contreras (2012) que tratou de jogo equitativo na ótica de professores (Quadro 4) .

Quadro 4: Pesquisas que tratam de justiça em jogos com foco probabilísticos

Ano	Pesquisadores	Público/Participantes	Foco
1998	Vidakovic, Berenson e Brandsma	Estudantes da 8ª série	Intuições probabilísticas sobre jogos justos
2003	Cañizares, Batanero, Serrano e Ortiz	Crianças de 10 e 14 anos	Concepções de jogo justo
2002	Paparistodemou, Noss e Pratt	Crianças com 6 anos e meio e 8 anos	Equalização de chances num jogo eletrônico
2008	Paparistodemou, Noss e Pratt	Crianças de 5 a 8 anos	Adaptação em um jogo eletrônico para torná-lo justo
2012	Ortiz, Batanero e Contreras	Professores da escola primárias (anos iniciais)	Análise de jogo justo (protocolos)
2017	Guerrero de Treviños, Ortiz e Contreras	Estudantes universitários	Avaliação de jogos justos e adequação de premiação para torná-los justos

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

A discussão sobre os estudos concernentes à justiça em jogos aparece em ordem crescente do ano de publicação, em conformidade com o Quadro 4.

Um importante estudo que versa sobre justiça em jogos, especificamente sobre crenças acerca da justiça no lançamento de dados, de autoria de Watson e Moritz (2003) encontra-se no capítulo referente à fundamentação, em razão de servir de aporte mais aprofundado das análises de nosso estudo.

Vidakovic *et al* (1998) realizaram um estudo com alunos da 8ª série acerca de intuições sobre conceitos probabilísticos a partir da compreensão de jogos justos. Foram utilizados jogos envolvendo dados, que trataram do acaso e do espaço amostral. As autoras defendiam que a comunicação presente durante o jogo oferece aos alunos uma oportunidade de dar sentido aos conceitos matemáticos e esclarecer seu pensamento quando eles discutem possíveis estratégias. Além disso, defendem os autores, o jogo é um contexto neutro em que a justiça pode ser examinada.

Como resultados gerais, Vidakovic *et al* (1998) concluíram que os alunos parecem ter uma variedade de ideias sobre o acaso, a maioria delas vinda de suas vidas cotidianas e relacionadas à justiça dos jogos. Alguns alunos consideraram justo para ambos os jogadores, no lançamento de um dado, um jogador ganhar se sair 1, 2 ou 3 e o outro, se sair 4, 5 ou 6. As autoras relatam que no desenvolvimento de ideias probabilísticas, por meio de jogos e simulações, as conclusões dos estudantes são geralmente tiradas de um número limitado de observações que ocorrem durante a experiência no jogo. Havia alunos que achavam que os números do dado em sequência não seriam justos, propondo alternância para parecer mais ‘misturado’, como 1, 4 e 6, por exemplo. A exploração do espaço amostral, se deu ao refletir sobre a justiça no lançamento de dois dados, quando o jogador A ganharia se saísse soma 2, 3, 4, 10, 11 ou 12 e o jogador B, se saísse 5, 6, 7, 8 ou 9.

Um estudo realizado por Pratt (2000) que não versava especificamente sobre justiça em jogos, e sim, sobre a compreensão de aleatoriedade por crianças, foi o alicerce que culminou em estudos específicos posteriores sobre esta relação: justiça e jogos. Neste estudo, Pratt (2000) utilizou um micromundo em um jogo de computador no qual os sujeitos visualizavam como o comportamento de objetos funcionavam (roletas, dados, moedas), com a intencionalidade de verificar conhecimentos acerca da aleatoriedade por crianças com idade entre 10 e 11 anos. Como resultado, o pesquisador verificou que os participantes relacionaram a aleatoriedade a quatro características: a ausência de estabilidade (os resultados não eram estáveis) a irregularidade (não se visualizava uma regra nos resultados), a imprevisibilidade (os resultados eram imprevisíveis) e a justiça (a incerteza dos resultados e as chances de ganhar tornavam o jogo justo aos participantes). Os resultados desta pesquisa apontarem para a relação entre aleatoriedade e justiça por parte das crianças. Em função disso, novos estudos, como os descritos a seguir, foram realizados.

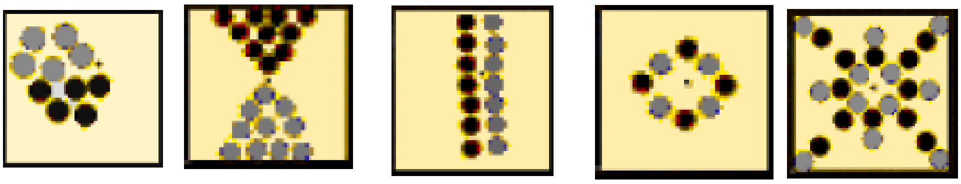
Dando continuidade aos estudos iniciais de Pratt (2000), Paparistodemou, Noss e Pratt (2002) realizaram uma nova pesquisa, agora com 22 crianças de 6 anos e meio a 8 anos, analisando como elas poderiam organizar bolinhas de um jogo eletrônico (micromundo), de forma tal que a organização do espaço amostral (bolas de duas cores diferentes destinadas a duas equipes) pudesse equalizar as chances de vencer das equipes, ou seja, de tornar o jogo justo. Assim, na atividade havia uma relação com o espaço amostral, considerando formas de organizá-lo e também com a aleatoriedade, uma vez que no jogo existe uma destacada bola (branca) que salta no espaço do micromundo, colidindo de forma aleatória com as demais bolinhas pertencentes às equipes. Neste jogo, as crianças poderiam controlar o número, o tamanho e a posição das bolas das equipes, mas não teriam influência sobre a bola branca que quicava aleatoriamente. A ideia era que as crianças construíssem um ‘espaço amostral justo’. Os pesquisadores descreveram quatro categorias de estratégias utilizadas pelas crianças:

1- Movimento casual – refere-se à consciência da falta de padrão ou falta de controle sobre o movimento da bola branca que quica de forma aleatória, associando tais movimentos à aleatoriedade. A conclusão das crianças evoca intuições iniciais que poderiam apontar para construção de um significado convencional do que seria aleatório.

2- Movimento complexo – para alguns participantes a complexidade dos movimentos tornaria justa a situação. Então, houve casos em que a velocidade das bolas vermelhas e azuis foram alteradas e a pontuação (regra) também foi modificada.

3- Simetria no posicionamento – A maioria das crianças tentou realizar um jogo justo organizando as bolas simetricamente (Figura 11). As crianças não se importavam tanto com o local onde cada bola era colocada, mas estavam especialmente preocupados com o posicionamento de cada equipe (bolas). Assim, o que importava era a igualdade das equipes, e não precisamente a quantidade de bolas envolvida na situação. Dessa forma, parecia que se equacionava igualdade com justiça e, presumivelmente, justiça com uma forma de aleatoriedade.

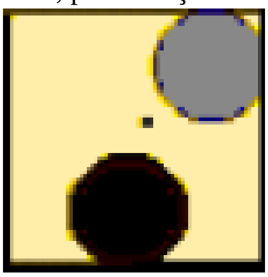
Figura 11: Modelos de organização do espaço amostral por simetria num jogo de micromundo por crianças



Fonte: Paparistodemou *et al* (2002)

4- Igualdade no tamanho das bolas – para as crianças, tornar o jogo justo implicava em ter as bolas do mesmo tamanho (Figura 12), mesmo que a bola branca (que quicava aleatoriamente) fosse maior ou menor que as demais. Assim, para elas, haveria uma conexão entre a representação espacial do espaço amostral (conjunto de bolas) e o resultado do jogo justo após várias jogadas (longo prazo).

Figura 12: Modelo de organização do espaço amostral (com igualdade de tamanho) num jogo de micromundo, por crianças



Fonte: Paparistodemou *et al* (2002)

Cañizares *et al* (2003), analisaram concepções de alunos de 10 anos (n= 320) e de 14 anos (n=147) de idade sobre jogos justos e foram realizadas entrevistas com uma subamostra destes alunos. Os estudos concluíram que os alunos acreditavam que jogo justo é sinônimo de resultados equiprováveis, portanto, a dificuldade para a maioria dos alunos não era julgar se o jogo era justo ou não, mas sim, determinar se era ou não equiprovável. Assim, o estudo apontou concepções das crianças ao considerar um jogo justo somente quando você joga com o mesmo resultado, ou a ideia de justiça como uma chance igual para ambos os jogadores, com a necessidade de modificar o prêmio se ambos os jogadores têm diferentes probabilidades de ganhar.

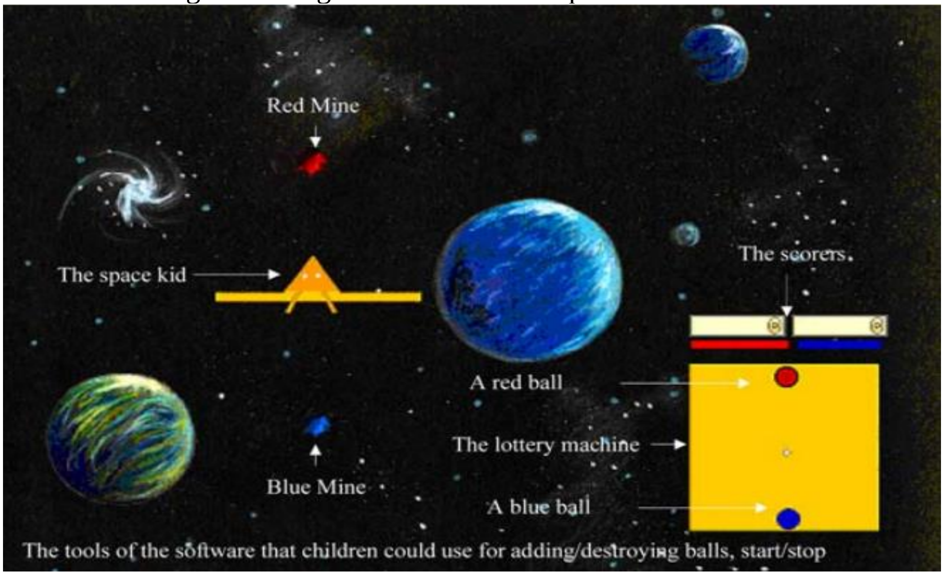
A maioria das crianças achou mais fácil determinar se dois eventos compostos são equiprováveis em contextos que envolvem cartas e dados do que em contextos de urna, porque eles só precisam comparar casos favoráveis. Por exemplo, para comparar se sai mais cartas com letras ou cartas com número no baralho, basta comparar os casos favoráveis referentes ao evento ‘cartas com número’ (total de 36) com ‘cartas com letras (total de 16), não sendo necessário calcular as probabilidades porque o espaço amostral é o mesmo. No contexto com urnas, a comparação exige quantificação de probabilidades e raciocínio proporcional (comparar a retirada de uma bola azul, considerando: numa urna há 2 bolas azuis e 4 vermelhas, em outra urna tem 3 azuis e 8 vermelhas, por exemplo)

Para Paparistodemou, Noss e Pratt (2008)

> "a justiça parece ser um fator importante centralmente na maneira como as crianças se envolvem em interações sociais, particularmente quando jogam jogos. Quando, por exemplo, um jogo infantil consiste em duas equipes, a justiça é alcançada quando as duas equipes têm a mesma oportunidade de ganhar pontos."(PAPARISTODEMOU *et al* ,2008, p. 124)

O interesse de Paparistodemou *et al* (2008) pela justiça decorre da conexão entre justiça e estocástica, que é a área da Matemática que se ocupa de resultados incertos, em relação a eventos futuros. Assim, como nos estudos citados anteriormente pela equipe de pesquisadores, um jogo de computador (denominado Máquina de Loteria, como se pode observar na Figura 13 foi projetado para que as crianças tivessem a oportunidade de manipulá-lo, alterando, inclusive algumas regras para se obter um jogo justo.

Figura 13: Jogo Micromundo: Máquina de Loteria



Fonte: Paparistodemou *et al* (2008)

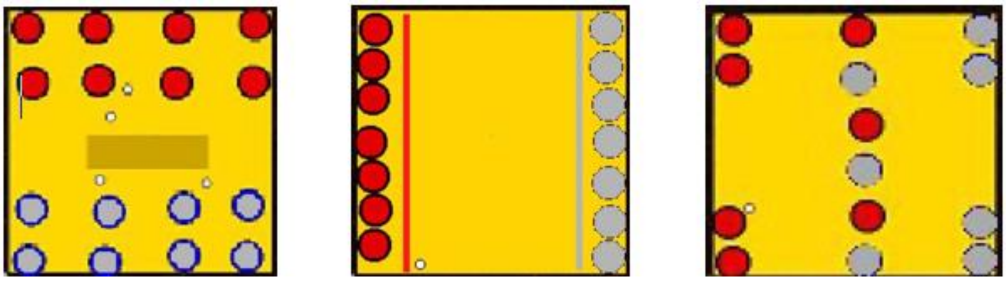
A máquina da loteria era basicamente o retângulo amarelo que aparece na Figura 13 em que as crianças iam projetar um jogo justo que contava com bolas azuis e vermelhas estáticas que se moviam apenas quando tocadas por uma bolinha branca que se movia aleatoriamente. No jogo, cada toque da bolinha branca numa bola azul movia o 'menino espacial' (triângulo laranja) para baixo onde estava uma mina azul ou para cima, onde se encontrava uma mina vermelha. Se a bolinha branca (que quicava aleatoriamente e sem controle dos estudantes) tocasse mais nas bolas azuis, o ‘menino espacial’ se aproximaria da mina azul e ‘explodiria’. O mesmo aconteceria com os toques excessivos nas bolas vermelhas que conduziriam o ‘menino espacial’ para a mina vermelha. O ponto de equilíbrio (o jogo justo), seria manter o ‘menino espacial’ sempre no centro e para tal, o conjunto de bolas azuis e vermelhas teriam que ser ‘tocadas’ pela bolinha branca, um mesmo número de vezes.

Os resultados desse estudo, que contou com a participação de 23 crianças de 5 a 8 anos de idade, mostraram que assim como no estudo anterior (Paparistodemou *et al* 2002) as crianças se utilizaram da simetria para organizar as equipes de bolas azuis e vermelhas para compor um jogo justo (Figura 14).

Os pesquisadores observaram que

> “As crianças construíram cuidadosamente equipes que eram consideradas iguais, e consideramos isso também como um exemplo de justiça aparente. As crianças tentavam arrumar as bolas simetricamente, em vez de a esmo, a fim de obter justiça aparente.” (PAPARISTODEMOU *et al* , 2008, p. 107).

Figura 14: Organização simétrica para jogo justo feito por crianças

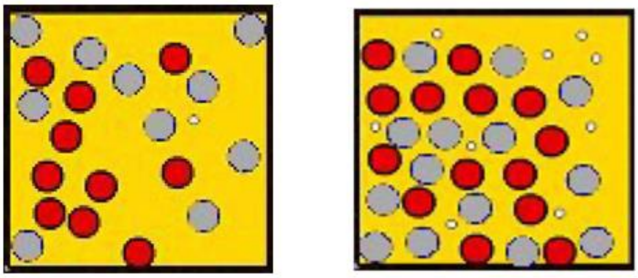


Fonte: Paparistodemou *et al* (2008)

No entanto, foi observado que esta organização simétrica estava relacionada à possibilidade da bolinha branca tocar alternadamente numa bola azul e depois numa bola vermelha. A ideia é que houvesse um revezamento de ‘toques’ e isto, foi considerado pelos pesquisadores como um elemento que promovia a justiça no jogo.

Outra forma de garantir a justiça era tornar o jogo ‘incontrolável’, de forma tal que a justiça se evidenciaria, uma vez que o controle sobre o jogo não poderia ser influenciado pelas ações intencionais de qualquer jogador. Assim, com esta nova regra, o jogador não poderia ‘operar’ as bolas para se beneficiar do resultado. Para tal, as crianças apostaram numa configuração ‘misturada’ e complexa de bolas vermelhas e azuis, de forma assimétrica, como se pode observar na Figura 15.

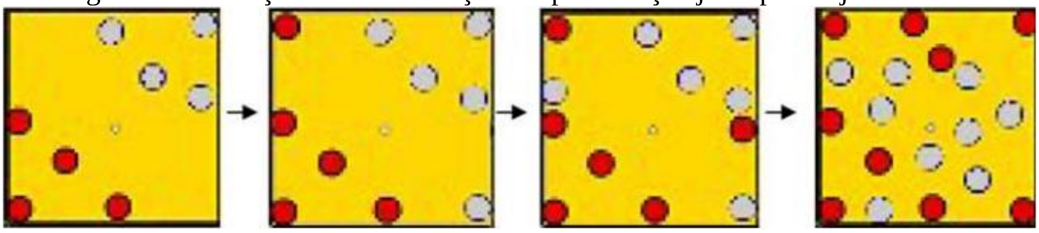
Figura 15: Representação de jogo justo: figura assimétrica



Fonte: Paparistodemou *et al* . (2008)

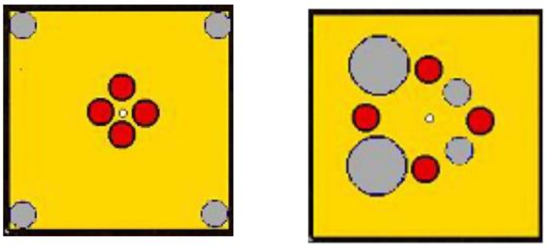
Em contrapartida, quando foram desafiados a tornar o jogo injusto, crianças tornavam uma figura simétrica em algo assimétrico (Figuras 16 e 17), corrompendo a máquina da loteria anteriormente simétrica e 'justa'.

Figura 16: Evolução de uma criança da representação justa para injusta



Fonte: Paparistodemou *et al* . (2008)

Figura 17: Representações para jogo injusto



Fonte: Paparistodemou *et al* (2008)

Por fim, os pesquisadores apontaram que o jogo promoveu a aprendizagem e possibilitou às crianças outra forma de pensar a organização espacial das bolas para obter um jogo justo. Inicialmente, o foco era centralizado na organização simétrica e, posteriormente foi evoluindo para uma representação 'mista', misturada, complexa, como seria, de fato num jogo de "Bingo", por exemplo, com as bolas 'misturadas'.

Como mencionado anteriormente, não foram localizados muitos estudos que contemplassem pesquisas envolvendo a ideia de justiça em jogos, nos últimos anos. De uma forma geral, nos estudos aqui descritos, a noção de justiça das crianças está muito ligada à ideia de aleatório, imprevisível, incerto e de chances iguais aos jogadores para obterem sucesso em suas jogadas. Para tornar as chances iguais para as duas equipes as crianças se utilizaram, especialmente de simetria (Paparistodemou *et al* , 2002, Paparistodemou *et al* , 2008). Estas características de jogo justo são essencialmente, a alma da probabilidade: a aleatoriedade, a imprevisibilidades e a equiprobabilidade (igual probabilidade para os participantes ganharem em suas apostas).

Um estudo que tratou de jogo equitativo, destinado a futuros professores foi realizado por Ortiz, Batanero e Contreras (2012). A pesquisa contou com 167 futuros professores da escola primária da Espanha, e teve como objetivo avaliar o conhecimento comum e especializado do conteúdo, além do conhecimento do conteúdo e dos estudantes.

Os autores ressaltam que para avaliar se um jogo é justo ou não, o primeiro passo é comparar as probabilidades de ganhar dos diferentes jogadores. Para analisar as estratégias utilizadas pelos professores no estabelecimento dessas comparações, os pesquisadores utilizaram a classificação propostas por Piaget e Inhelder para os estágios de desenvolvimento no que concerne à probabilidade. Em alguns casos, alertam os estudiosos, os futuros professores não alcançaram o nível de estágio adequado a sujeitos adultos. Em conformidade com Piaget e Inhelder, a estratégia mais adequada para adultos (estágio de operações formais) seria uma estratégia multiplicativa que estabelece a comparação entre os quocientes que envolvem os casos favoráveis e os casos possíveis das probabilidades.

Os pesquisadores propuseram dois itens e solicitaram que os participantes:

a. Resolvessem o problema;
b. Indicassem o conteúdo matemático que os alunos teriam que saber para dar a resposta correta;
c. Assinalassem quais respostas dos alunos estavam incorretas;
d. Para cada uma das respostas incorretas, apontassem possíveis intuições ou estratégias equivocadas que levaram os estudantes à resposta incorreta;

Quadro 5: Situações probabilísticas propostas para análise de professores espanhóis

Item 1: *Eduardo tem em sua caixa 10 bolas brancas e 20 bolas pretas. Luiz tem 30 bolas brancas e 60 pretas. Ganha um euro quem conseguir pegar a bola branca. Eduardo afirma que o jogo não é justo porque a caixa de Luiz tem mais bolas brancas que a sua. Qual sua opinião sobre isto?*

Item 2: *Maria e Esteban jogam dados. María ganha um euro se sair 2, 3, 4, 5 ou 6. Esteban ganha um euro se sair 1. Quanto deve ganhar Esteban para que o jogo seja justo?*

Fonte: Ortiz *et al* (2012)

Como resultados, os pesquisadores observaram que pouco mais de 70% dos professores consideraram o Item 1 equitativo. No entanto, 14,4% apontaram estratégias que indicam estarem no estágio pré-operatório de Piaget e Inhelder, com justificativas, como: "*a probabilidade de ganhar Luiz é maior que de Eduardo, pois tem mais bolas brancas" ou "Luiz tem menos probabilidade de ganhar, já que tem mais bolas negras*".

No Item 2, 77% dos pesquisados obtiveram êxito, dos quais, pouco mais de 69% usaram como justificativa a comparação de probabilidades, em resposta assinalada nas opções que indicava: "Esteban deve ganhar 5 euros porque sua probabilidade de ganhar é 5 vezes menor que a de Maria". Vale salientar, que das respostas corretas, 22% não souberam calcular o valor do prêmio para que o jogo fosse justo.

Por fim, Ortiz *et al* (2012) orientam que é importante reforçar a formação de professores futuros tanto no seu conhecimento especializado do conteúdo matemático, como o conhecimento do conteúdo e dos estudantes no campo da probabilidade, pois estes aspectos se mostraram mais fragilizados na pesquisa. E sugerem metodologias envolvendo situações experimentais e contextualizadas de jogos justos e não justos para que se possa pensar em formas de alterar o prêmio ou as condições do jogo para torná-lo justo.

Um estudo mais recente dos pesquisadores Guerrero de Treviños, Ortiz e Contreras (2017) objetivou avaliar os conhecimentos de estudantes (bacharelado de Ciências Sociais e de Ciências e Tecnologia) sobre esperança matemática no contexto de jogos justos. A pesquisa contou com 63 estudantes universitários que tiveram que responder a dois problemas que se segue.

- Problema 1 - Ana *e Maria brincam jogando duas moedas para o alto e observam o resultado.*
  - ***a)*** *Ana ganha € 1 se uma ou duas caras aparecerem e Maria ganha € 1 se nenhuma cara aparecer. Se você jogasse, preferiria ser Ana ou Maria? Por quê?*
  - ***b)*** *Um jogo é justo quando não favorece nenhum participante, ou seja, ninguém tem mais vantagem do que o outro. Quanto Maria deve ganhar para o jogo ser justa?*
- Problema 2 - Miguel *e Luís jogam um jogo com um dado comum (como você conhece cada dado é numerado de 1 a 6).*

a) *Miguel ganha um euro se o número obtido for 1, 2, 3 ou 4. Se o número for 5 ou 6, o Luís ganha três euros. Algum dos meninos tem vantagem no jogo? Por quê?*

b) *Quanto você acha que cada menino ganhará se jogar 60 vezes?*

Os resultados apontaram para um acerto de 72% na letra a do Problema 1, que exigia o cálculo de probabilidade de um evento composto. Os erros nesse item tiveram relação com o viés da equiprobabilidade, ou seja, a crença de que os eventos são equiprováveis e o cálculo equivocado de probabilidade. Já em relação a letra b do Problema 1, um pouco mais de 13% dos estudantes apontaram corretamente que Maria deveria receber € 3. Os tipos de erros advindos da resposta a esse item se relacionaram com: viés da equiprobabilidade, o fato de não conseguirem calcular o valor do prêmio para tornar justo o jogo (erro mais frequente), não julgar necessário alteração no valor do prêmio.

No Problema 2, os estudantes não obtiveram bons resultados no item a (apenas 16% de acertos totais), com erros que também se assemelharam, em parte, à natureza dos equívocos apresentados no Problema 1. Em relação ao item b do Problema 2, quase 38% dos participantes acertaram integralmente a questão. Os equívocos tiveram relação com o viés da equiprobabilidade e a não consideração do lucro no cálculo do valor esperado.

Nessa pesquisa, observou-se que os estudantes associaram jogo injusto à probabilidade maior de vitória de um dos jogadores, e, consequentemente, jogo justo a chances iguais. Os alunos não apresentaram grandes dificuldades para quantificar probabilidades, mas, em sua maioria, se equivocaram ou não conseguiram analisar e calcular premiação para tornar justo um jogo cujas probabilidades de vitória são diferentes para os jogadores. Os autores ressaltam que esse tipo de situação que envolve proporcionalidade inversa se configura numa séria dificuldade para os estudantes, que afetam não somente conceitos probabilísticos e que deve ser um ponto chave para se consolidar ao logo da caminhada escolar dos estudantes.

As pesquisas apontadas aqui, envolvem diversas vertentes da Probabilidade e apresentam tanto similitudes quanto diferenças em relação aos estudos que fazem parte da presente pesquisa. Alguns estudos tratam de demandas cognitivas, outras usam jogos, outras fazem estudos comparativos de crianças e adultos e ainda há os estudos que focam na justiça em jogos. No entanto, nenhuma pesquisa foi encontrada que considerasse as demandas cognitivas, quais sejam, aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades, como pano de fundo para verificar a influência na avaliação de jogos justou ou não. Assim, considera-se o ineditismo da atual pesquisa, ainda mais por contemplar públicos bem distintos em três estudos que se interconectam: i) crianças e adultos com mesma escolaridade; ii) crianças brasileiras e portuguesas do 5º ano do Ensino Fundamental; e iii) professores brasileiros e portugueses dos anos iniciais.

Julga-se, portanto, importante e necessária a atual pesquisa, em função da relevância do tema e da importância de se ampliar compreensões acerca dos pensamentos probabilísticos dos diversos grupos de sujeitos arrolados nos estudos. Assim, acredita-se que os estudos desta pesquisa se fazem mister, especialmente pela expectação de contribuição teórica por meio de dados e informações que auxilie no redimensionamento de ações que promovam e ampliem as aprendizagens probabilísticas, no âmbito escolar.

A seguir, serão detalhados as bases e aportes teóricos que deram sustentação aos diversos estudos da presente pesquisa.

5. REFERENCIAL TEÓRICO

“A teoria de aleatoriedade é fundamentalmente
uma codificação do bom senso. “
Leonard Mlodinow

Para apoiar os procedimentos metodológicos dos estudos e as análises da presente pesquisa, foram considerados os seguintes aportes teóricos de base e suas ramificações: i) as *demandas cognitivas da probabilidade* defendidas por Bryant e Nunes (2012) e as aproximações com outros olhares da probabilidade como os *significados e visões da probabilidade* propostos por Batanero Henry e Parzysz (2005) e Batanero e Diaz (2007) e o *letramento probabilístico* defendido por Gal (2005); ii) os *construtos do pensamento probabilístico* propostos por Jones *et al* (1997) e Jones (2006); iii) a *relação entre justiça e jogos*, especialmente por meio dos estudos de Watson e Moritz (2003) em relação aos *níveis de crença sobre justiça* e das pesquisas de Cañizares *et al* (2003) referente à *concepção de jogos justos*.

A fundamentação teórica desta pesquisa foi organizada a partir de quatro seções assim identificadas:

- *As demandas cognitivas da probabilidade* – cujo foco repousa essencialmente nas demandas cognitivas defendidas por Bryant e Nunes (2012);
- *Os significados da probabilidade e o letramento probabilístico*- exploração das visões da probabilidade baseadas em Batanero *et al* (2005) e Batanero e Diaz (2007) e do letramento probabilístico proposto por Gal (2005);
- *Raciocínio e pensamento probabilístico* – centralidade no raciocínio probabilístico proposto por Borovicnik (2016) e, especialmente nos construtos do pensamento probabilístico de Jones *et al* (1997) e Jones (2006);
- *Jogos, justiça e probabilidade* – tomando como aporte central os níveis de crença de jogos justos de Watson e Moritz (2003) e as concepções de jogos justos na ótica de Cañizares *et al* (2003).

5.1. DEMANDAS COGNITIVAS DA PROBABILIDADE

Apesar do interesse e crescente número de pesquisas referentes ao ensino e à aprendizagem da Probabilidade, há ainda diversos aspectos que ainda carecem de investigação. O conhecimento da Probabilidade exige um espectro grande de conceitos que estão intimamente ligados à sua compreensão e por vezes, as pesquisas exploram mais um conceito probabilístico em detrimento de outros.

Bryant e Nunes (2012) defendem que a probabilidade é um conceito muito complexo que demanda o entendimento de quatro exigências cognitivas que são:

- *Compreensão da aleatoriedade* – compreender a natureza, as consequências e o uso da aleatoriedade em nossas vidas;
- *Formação e categorização do espaço amostral* – passo essencial para qualquer problema de probabilidade que reside em reconhecer todos os resultados dos possíveis eventos e sequências de eventos que podem acontecer;
- *Comparação e quantificação de probabilidades* – a probabilidade é uma quantidade baseada em proporções e a solução repousa, quase sempre, em cálculos proporcionais. Algumas comparações podem ser resolvidas a partir das relações simples de ‘mais’ e ‘menos’;
- *Entendimento de correlações (relações entre eventos)* – se refere a uma associação entre eventos que exige uma análise envolvendo confirmação e refutação de dados que serão comparados, a fim de ter certeza se dois eventos ocorrem sem qualquer relação um com o outro ou se estão, de alguma forma, associados.

Acerca da *aleatoriedade,* os autores consideram que é uma parte comum e importante da vida das pessoas, mas que a compreensão da natureza e consequências da aleatoriedade é tênue e nem sempre é simples, uma vez que até adultos podem apresentar entendimento equivocado sobre o tema. Assim, alguns aspectos da aleatoriedade são mais difíceis de compreender do que outros, como o caso da independência de eventos, quando por exemplo, crianças e adultos julgam que ao sair quatro vezes no lançamento de um dado a face 5, há uma probabilidade maior de sair a mesma face (erro de recência positiva) ou de sair outra (recência negativa), imputando equivocadamente uma influência (inexistente) de um ensaio sobre o outro.

Os autores defendem que a *aleatoriedade* é útil, pois se configura como uma base indispensável para ser justo: embaralhar as cartas de um baralho para se certificar de que todos têm a mesma chance de serem tiradas, lançar uma moeda para decidir quem fará uma atividade ou para definir o lado do campo num jogo de futebol, fazer sorteio das equipes de um campeonato que jogarão entre si, são exemplos como garantia de justiça que se configura como uma boa característica da aleatoriedade que vai além da mera incerteza presente em situações aleatórias.

Sobre o *espaço amostral*, Bryant e Nunes (2012) conceituam como "o conjunto completo de possibilidades em um problema de probabilidade" (BRYANT e NUNES, 2012 p.5). Os autores julgam que o conhecimento do espaço amostral é, em muitos casos, o passo mais importante para resolução de um problema de probabilidade, pois a solução parece bastante óbvia para quem conhece todas as possibilidades. Problemas de probabilidade são sempre sobre um conjunto de possíveis, mas incertos eventos que ocorrem de forma aleatória. Não se pode afirmar o que vai acontecer com exatidão, numa sequência aleatória, mas pode-se descobrir a probabilidade de ocorrência de um evento específico, desde que se conheça o espaço amostral. Bryant e Nunes (2012) ainda afirmam que este aspecto da probabilidade (espaço amostral) tem sido relativamente negligenciado nas investigações que têm se concentrado especialmente na compreensão de crianças sobre aleatoriedade e na sua capacidade de quantificar e comparar probabilidades.

Por outro lado, Nunes, Bryant, Evans, Gottardis e Terlektsi (2014), defendem que, a fim de compreender o espaço amostral, não basta apenas criar um inventário de todos os resultados possíveis, cuja exigência repousa no raciocínio combinatório, é necessário ainda ligar os resultados possíveis com a sua probabilidade. Os resultados agregados podem parecer diferentes. Por exemplo: ao lançar uma moeda três vezes, há oito possíveis resultados: cara, cara, cara; cara, cara, coroa; cara, coroa, cara; cara, coroa, coroa; coroa, cara, cara; coroa, cara, coroa; coroa, coroa, cara e coroa, coroa, coroa. Cada um desses resultados pode ser tratado isoladamente, mas também podem ser agrupados. Cada uma dessas possibilidades tem a mesma chance de sair, ou seja, os resultados são equiprováveis. Mas se for questionado sobre a chance de sair faces iguais, qual seja, sair uma sequência de três caras ou três coroas, é preciso analisar o inventário com os oitos resultados possíveis, classificando os resultados que envolvem faces repetidas (três caras ou três coroas) que são os casos favoráveis e aqueles que incluem um número diferente de caras e coroas – os casos não favoráveis. Neste caso, a probabilidade pode ser expressa como uma *razão* (2:6, significando 2 casos favoráveis em 6 casos não favoráveis), como uma *fração* (1/4, ou seja 1 em cada 4 casos ou 2/8, 2 em 8 casos), como uma *proporção* (0,25) ou como uma *porcentagem* (25%).

A probabilidade é uma quantidade intensiva que se baseia em proporções e o uso do raciocínio proporcional para *calcular probabilidades* é uma dificuldade para crianças e para adultos, pontuam Bryant e Nunes (2012). A própria natureza intensiva da probabilidade é um aspecto que se configura em dificuldade, pois no caso de uma quantidade extensiva, como a quantidade de água em uma bacia, é simples perceber que, se há dois litros de água na bacia e se coloca mais um litro, o volume (a quantidade) aumenta passando a três litros de água. No entanto, se a temperatura da água na bacia é de 30ºC e colocamos mais um litro com 30ºC, a temperatura não aumenta. Ou seja, a temperatura, assim como a densidade e a probabilidade são quantidades intensivas, defendem os autores, e possuem características distintas das quantidades extensivas.

Tanto adultos como crianças apresentam dificuldades para *comparar probabilidades* quando se trata de espaços amostrais distintos. Por exemplo, numa análise que envolve avaliar o que é mais provável acontecer: 'tirar uma boa preta de um recipiente que possui 8 bolas, sendo 3 pretas ou tirar bola preta do recipiente que tem 10 bolas, sendo 4 pretas' as pessoas, em geral, têm dificuldades em estabelecer adequadamente a relação proporcional para realizar a comparação. Quando o espaço amostral é o mesmo, a análise se resume à comparação de 'mais' e 'menos', como no lançamento de um dado de seis faces, é mais provável sair número par (com três das seis faces sendo par) ou número maior que 5 (com apenas uma possibilidade)?

As *correlações* correspondem à *associação entre eventos*, ou seja, à análise se, de fato, dois eventos estão associados, se possuem um relacionamento genuíno entre um e outro ou se é uma razão fortuita, aleatória, ao acaso, que estabelece uma possível relação entre estes dois eventos. Para avaliar esta possível associação entre eventos, é necessária uma análise que envolve confirmação e refutação dos dados para o entendimento e conclusão sobre de tais correlações. Bryant e Nunes (2012) defendem que as quatro demandas cognitivas estão relacionadas, e que a quarta demanda (entendimento de correlações) necessita da compreensão das três anteriores e que, nem sempre ela é necessária em situações probabilísticas.

Há situações em probabilidade que exigem intervenção escolar, sem a qual os estudantes, via de regra, não conseguiriam desenvolver com o passar do tempo, por isso, adultos ainda mantém percepções bem elementares sobre alguns temas probabilísticos. Fischbein (1987), *apud* Bryant e Nunes (2012), afirma que as crianças possuem intuições primárias sobre a probabilidade e que estas intuições nem sempre são coerentes, mas que servem de plataforma para aprendizagem de conceitos mais adequados, ampliando suas compreensões para intuições secundárias. As intuições primárias são fruto das experiências informais das crianças, e, muitas vezes, são carregadas de equívocos, mas com a ajuda do ensino elas podem ser reconstruídas e lapidadas para ideias mais coerentes do ponto de vista científico.

Entende-se, a partir da exposição feita, que crianças que não desenvolveram suas compreensões acerca de conceitos probabilísticos por meio de intervenção de ensino podem ter se tornado (ou se tornarão) adultos com percepções equivocadas da probabilidade e com entendimentos que se aproximam das crianças. Nesse sentido, se pergunta: Será que crianças e adultos em mesmo nível de escolarização têm ideias semelhantes acerca da aleatoriedade, do espaço amostral e da comparação de probabilidades? O que se assemelha em suas compreensões? O que se distancia? A vivência, a maturidade, a vida social tem grande influência na compreensão de adultos com baixa escolarização em relação à probabilidade, se comparado às crianças?

5.2. OS SIGNIFICADOS DA PROBABILIDADE E O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO

Embora a teorização da Probabilidade tenha sido tardia em relação aos outros campos da Matemática, ao longo de sua breve caminhada se descobriu que não há apenas uma Probabilidade, ou seja, não há apenas um único jeito de ver e calcular probabilidades. Batanero *et al* (2016) resgatam Hacking (1975), para afirmar que a Probabilidade foi concebida a partir de duas perspectivas principais, embora diferentes, desde o seu surgimento: i) uma *face estatística* que se relaciona à necessidade de encontrar as regras matemáticas objetivas que governam os processos aleatórios e os valores probabilísticos atribuídos por meio de dados coletados em pesquisas e experimentos; e, ii) uma *face epistêmica* que vê a probabilidade como um grau pessoal de crença, que depende da informação disponível para cada pessoa que pretende determinar probabilidades.

Considerando estas duas perspectivas principais que se refletem nos trabalhos dos principais pesquisadores que contribuíram para o progresso da Probabilidade, Batanero *et al* (2016), defendem que diferentes visões de probabilidade foram sustentadas ao longo da história, como a *visão intuitiva, a clássica, a frequentista, a subjetiva, a lógica, a de propensão e a axiomática* (Quadro 6). Cada um desses pontos de vista envolve algumas questões filosóficas e é mais adequado para modelar determinados fenômenos do mundo real que pode ser levado em consideração nos currículos específicos, de acordo com sua importância para determinados públicos.

Quadro 6: Elementos que caracterizam os diferentes significados da probabilidade

SIGNIFICADOS	CAMPOS DE PROBLEMAS	ALGORITMOS E PROCEDIMENTOS	ELEMENTOS LINGUÍSTICOS	DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES	ALGUMAS CONCEPÇÕES RELACIONADAS
Intuitivo	- Sorteios - Adivinhações	- Manipulação de geradores de acaso: dados, cartas, urnas...	- Linguagem natural	- Opinião imprevisível, crença	- Sorte - Destino
Clássico	- Cálculo de esperança ou riscos em jogos de azar	- Combinatória - Proporções - Análises a priori da estrutura do experimento.	- Triângulo aritmético - Listagem de eventos - Fórmulas Combinatórias	- Quociente de casos favoráveis e possíveis - Equiprobabilidade de eventos simples	- Esperança - Regularidade - Independência
Frequentista	- Estimativa de parâmetros em populações	- Registro de dados estatísticos e *posteriori* - Ajuste de curvas matemáticas - Análise matemática - Simulação	- Tabelas e gráficos estatísticos - Curvas de densidade - Tabelas de números aleatórios - Tabelas de distribuições	- Limite de frequências relativas - Caráter objetivo baseado na evidência empírica	- Frequência relativa - Universo - Variável aleatória - Distribuição de Probabilidade
Propensão	- Situações incluindo casos isolados	- Análise *a priori* e experimental		- Disposição física ou tendência - Caráter objetivo - Aplicável para casos isolados - Relação com experimentos condicionais	- Propensão - Probabilidade de tendência causal - Frequências virtuais
Lógico	- Ampliação das inferências	- Análise *a priori* sobre as possibilidades - Lógica proposicional Lógica indutiva	- Linguagem formal - Probabilidade condicional	- Objetivação do grau de crença - Relação entre declarações - Possibilidades de dados com diferentes pesos - Generalização de implicações - Passível de revisão	- Evidência - Hipótese - Grau de implicação
Subjetivo	- Melhora do conhecimento de eventos incertos, incluindo não repetidos.	- Teorema de Bayes - Atribuição subjetiva de probabilidades	- Expressão da probabilidade condicional	- Caráter Subjetivo - Verificação com experiência	- Probabilidade condicional - Distribuições a *priori* e a *posteriori*
Axiomático	- Quantificação da incerteza de resultados em experimentos aleatórios abstratos.	- Teoria dos conjuntos - Álgebra dos conjuntos - Teoria da Medida	- Símbolos dos conjuntos	- Função medida	- Espaço amostral - Espaço de Probabilidades - Conjunto de Borel

Fonte: Batanero e Diaz (2007)

O Quadro 6 em destaque, apresenta o resumo das diversas visões da probabilidade em consonância com os estudos de Batanero, Henry e Parzysz (2005), e sintetizadas aqui por Batanero e Diaz (2007).

1- Intuitiva – A teoria da probabilidade é, essencialmente, um encapsulamento formal de visões intuitivas de chance que levam a uma ideia para atribuir valores a eventos incertos. Estas ideias sobre o acaso emergiram muito cedo na história em muitas culturas e estavam ligadas a problemas relacionados com o estabelecimento de apostas justas em jogos de azar. Ideias intuitivas acerca da probabilidade podem ser observadas em crianças (e também em adultos) quando usam expressões qualitativas “prováveis” ou “improváveis” para expressar seus graus de crença na ocorrência de eventos aleatórios. Essas ideias intuitivas podem ser usadas no ensino para ajudar estudantes a desenvolverem uma compreensão mais madura e usar a probabilidade como uma ferramenta para comparar a possibilidade de ocorrência de diferentes eventos em um mundo cheio de incerteza.

2- Clássica – O progresso teórico anterior na teoria da probabilidade foi ligado a jogos de chance, como jogar dados, como por exemplo. Em sua correspondência com Fermat, Pascal (1654 / 1963) resolveu o problema de estimar o valor justo a ser dado para cada jogador e Cardano (1663/ 1961) aconselhou os jogadores a considerar o número de possibilidades totais e número de maneiras que podem ocorrer resultados favoráveis e comparar os dois números para fazer uma aposta justa. Assim, a formalização inicial do conceito se baseou em uma suposição de que todos os eventos elementares possíveis eram equiprováveis, hipótese é razoável em muitos jogos de azar. Na definição clássica, dada por Abraham de Moivre (1718) e Laplace (1814), a probabilidade é uma fração do número de casos favoráveis a um determinado evento dividido pelo total de todos os casos possíveis – visão usualmente utilizada no ensino formal da Probabilidade.

3- Frequentista - A convergência de frequências relativas para o mesmo evento a um valor constante após um grande número de tentativas idênticas independentes de um experimento aleatório, foi observada por muitos autores. Bernoulli, ao tentar ampliar a aplicação da probabilidade para a expectativa de vida e problemas de seguro, provou uma primeira versão da Lei dos Grandes Números. De acordo com este teorema, a frequência relativa para um dado evento em um grande número de tentativas deve estar próxima da probabilidade teórica desse evento e tende a se tornar mais próxima à medida que mais tentativas forem realizadas. Na abordagem frequentista, a probabilidade é definida como o número hipotético para qual a frequência relativa tende quando uma experiência aleatória é repetida muitas vezes nas mesmas condições. Uma vez que tal tendência empírica é visível em muitos fenômenos naturais, essa definição particular de probabilidade ampliou enormemente o leque de aplicações – e deve ser discutida quando do ensino da Probabilidade.

4- De propensão – Popper introduziu a ideia de *propensão* como uma medida da tendência de um sistema aleatório para se comportar de uma certa maneira e com uma disposição física para produzir um resultado de um certo tipo. No mesmo sentido, Peirce propôs um conceito de probabilidade segundo o qual um dado, por exemplo, possui disposições para seus vários resultados possíveis. Essas propensões são diretamente relacionadas às tendências de longo prazo e indiretamente a eventos singulares. Na teoria de caso único, as propensões são idênticas às probabilidades de valores de capacidade e são considerados como tendências causais probabilísticas para produzir um determinado resultado em uma ocasião específica.

5- Lógica – Keynes e Carnap desenvolveram a teoria lógica da probabilidade, em que retêm a ideia clássica de que as probabilidades podem ser determinadas *a priori* por um exame do espaço de possibilidades. No entanto, às possibilidades podem ser atribuídos pesos desiguais. Nesta visão, a probabilidade é um grau de implicação que mede o apoio fornecido por alguma evidência E a uma dada hipótese H. Entre a certeza (1) e a impossibilidade (0), todos os outros graus de probabilidade são possíveis. Essa visão amplia a lógica dedutiva, uma vez que a implicação e incompatibilidade podem ser consideradas como casos extremos de probabilidade. Carnap construiu uma linguagem formal e definiu probabilidade como grau racional de confirmação. O grau de confirmação de uma hipótese H, dada alguma evidência E, é uma probabilidade condicional[13] e depende inteiramente das propriedades lógicas e semânticas de H e E e as relações entre elas. Portanto, a probabilidade é definida apenas para a linguagem formal específica.

6- Subjetiva - Usando o teorema de Bayes, uma probabilidade inicial (anterior) pode ser

[13] Probabilidade condicional refere-se à probabilidade de ocorrer um evento A sabendo-se que outro evento B já ocorreu. Formalmente, se define mediante a expressão: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ sempre que P(B) >0 (CARVALHO E MACEDO, 2015)

transformada em probabilidade posterior usando novos dados e, assim, a probabilidade perde seu caráter objetivo. Seguindo esta interpretação, alguns matemáticos (por exemplo, Keynes, Ramsey e Finetti) consideraram a probabilidade como um grau pessoal de crença que depende de conhecimento ou experiência de uma pessoa. No entanto, o status da distribuição anterior nessa abordagem foi criticada como subjetiva, mesmo que o impacto da diminuição por dados seja objetiva. Nesse ponto de vista subjetivista, na repetição da mesma situação não é mais necessário dar um sentido à probabilidade e, por essa razão, as aplicações de probabilidade entraram em novos campos, como política e economia, nos quais é difícil assegurar replicações de experimentos. Hoje a abordagem bayesiana da inferência, que se baseia nessa abordagem, está rapidamente ganhando mais uso e visibilidade em vários campos e deve ser objeto de discussão quando do ensino da Probabilidade.

7- Axiomática – Kolmogorov, que corroborou com a visão frequentista, derivou uma teoria axiomática da probabilidade. O conjunto S de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral. Para definir a probabilidade, é considerada uma álgebra definida em **A** contendo subconjuntos (A) do espaço amostral. O complemento de um evento (A^c) é feito de todos os resultados que não tomam parte em A. O evento S = A U A^c é chamado de evento certo. Probabilidade, nesta perspectiva, é qualquer função algébrica definida de **A** no intervalo de números reais [0,1] que preenche os três axiomas a seguir, dos quais muitas propriedades e teoremas de probabilidade podem ser deduzidos:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, para cada $A \in \boldsymbol{A}$; onde A= subconjunto e **A=** conjunto que possui todos os subconjuntos de S (espaço amostral)

2. $P(S) = 1$;

3. (a) Para um espaço amostral finito S e eventos incompatíveis ou não-contíguos A e B, i.e., $A \cap B = \emptyset$, afirma-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(b) Para um espaço amostral infinito S e uma coleção contável de pares conjuntos disjuntos $A\,i$, $i = 1,2, \ldots$ detém-se que $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

A teoria axiomática foi aceita pelas diferentes escolas de probabilidade pois, com algum compromisso, a matemática da probabilidade (clássica, frequentista ou subjetiva) pode ser codificado pela teoria de Kolmogorov. No entanto, a interpretação do que é uma probabilidade seria diferente de acordo com a perspectiva que se adere. Assim, a discussão sobre os significados da probabilidade ainda está muito viva em diferentes abordagens à estatística.

Batanero *et al* (2016) advogam que os debates em torno dos significados da probabilidade estão refletidos nos currículos escolares, embora nem todas as visões da probabilidade recebam o mesmo interesse. Antes de 1970, a visão clássica da probabilidade baseada no cálculo combinatório dominou o currículo escolar, e, como essa visão dependia fortemente do raciocínio combinatório, segundo as autoras, o estudo da probabilidade foi difícil para os alunos. A abordagem axiomática também foi dominante na era da Matemática Moderna porque a probabilidade foi usada como um exemplo relevante do poder da teoria dos conjuntos.

Nas abordagens propostas nos currículos, as múltiplas aplicações da probabilidade foram negadas aos alunos, deixando-os apenas lidar com jogos de azar, e, por isso, havia uma tendência a reduzir o ensino da Probabilidade. Hoje, com o crescente interesse em estatísticas e desenvolvimentos tecnológicos, a abordagem frequentista está recebendo tratamento preferencial. Uma experimental introdução de probabilidade como limite de frequências relativas é sugerida em muitos currículos e documentos padrões em diversas partes do mundo e a probabilidade é apresentada como uma ferramenta teórica usada para abordar problemas que surgem de experiências estatísticas. No nível da escola primária, uma experiência na qual as crianças partem de suas ideias intuitivas relacionadas ao acaso e à probabilidade também é favorecida. A abordagem axiomática não é usada no nível da escola básica, sendo muito formal e adequado apenas para aqueles que seguem estudos de matemática pura (BATANERO *et al* , 2016, p.14-15).

Corroborando, em parte, com as sugestões apontadas por Batanero *et al* (2016), o trabalho com a probabilidade frequentista, associada ao significado clássico, é proposto na BNCC (BRASIL, 2017) a partir do 6º ano. Coutinho (1994, 2007) também enfatiza a importância de se estabelecer este paralelo entre probabilidade clássica e frequentista, pois, além de permitir o uso de experimentações no âmbito escolar, possibilita maior compreensão do tema.

Independente dos tipos, visões ou significados da probabilidade, Iddo Gal (2005) defende o *letramento probabilístico* como os conhecimentos e as disposições que os alunos precisam desenvolver para serem considerados alfabetizados em relação às questões probabilísticas do mundo real. Para este pesquisador, o termo letramento, quando usado para descrever a capacidade das pessoas para comportamento orientado por objetivos, sugere um amplo agrupamento, não só de conhecimentos factuais e certas habilidades formais e informais, mas também de crenças e atitudes desejadas, hábitos mentais e uma perspectiva crítica. Assim, Gal (2005) estabelece dois tipos de elementos necessários ao desenvolvimento do letramento probabilístico:

- Elementos de conhecimento
    1- Grandes ideias: variação, aleatoriedade, independência, previsibilidade, incerteza.
    2- Cálculo de probabilidades: maneiras de encontrar ou estimar probabilidades de eventos.
    3- Linguagem: termos e expressões utilizadas para comunicar sobre o acaso.
    4- Contexto: compreender o papel e as implicações de problemas probabilísticos em vários contextos e nos discursos pessoal e público.
    5- Questões críticas: questões para refletir sobre quando se lida com probabilidades.
- Elementos disposicionais
    1- Postura crítica.
    2- Crenças e atitudes.
    3- Sentimentos pessoais em relação à incerteza e ao risco.

O letramento probabilístico proposto por Gal (2005) apresenta alguns elementos em comum com as demandas cognitivas defendidas por Bryant e Nunes (2012) para a compreensão da probabilidade.

5.3. RACIOCÍNIO E PENSAMENTO PROBABILÍSTICO

Muito se fala em relação ao raciocínio e ao pensamento probabilístico, sem, no entanto, se estabelecer conceituação clara sobre ambos. Em muitos momentos julga-se que tais conceitos são sinônimos, mas~~,~~ esta não é uma unanimidade. Borovcnik (2016) discute as bases que alicerçam o pensamento probabilístico intuitivo e estabelece as seguintes habilidades que indicam o uso desta forma de pensamento:

1- A capacidade de equilibrar elementos psicológicos e formais;

2- O entendimento de que não há critérios diretos de sucesso em situações aleatórias;

3- A habilidade de distinguir aleatoriedade e causalidade;

4- A capacidade de estabelecer critérios para refletir sobre uma situação e tomar decisões.

Enquanto Borovcnik (2016) defende as bases do pensamento probabilístico, Batanero *et al* (2016) tratam do raciocínio probabilístico, com alguma distinção. A Probabilidade para estes pesquisadores, constitui uma abordagem distinta dos modos de pensar e raciocinar sobre fenômenos da vida. Assim, o raciocínio probabilístico é um modo de raciocínio que se refere a julgamentos e tomadas de decisão sob incerteza e é relevante para a vida real, por exemplo, ao avaliar riscos, pois é necessário pensar em cenários que permitem a exploração e avaliação de diferentes resultados possíveis em situações de incerteza. Em conformidade com Batanero *et al* (2016), o raciocínio probabilístico inclui a capacidade de:

- Identificar eventos aleatórios na natureza, tecnologia e sociedade;
- Analisar as condições de tais eventos e derivar pressupostos de modelagem apropriados;
- Construir modelos matemáticos para situações estocásticas e explorar vários cenários e resultados desses modelos;
- Aplicar métodos e procedimentos matemáticos de probabilidade e estatística.

Observa-se similitudes entre as habilidades apontadas como base para o pensamento probabilístico (Borovcnik, 2016) e para o raciocínio probabilístico (Batanero *et al* , 2016), especialmente quando trata da identificação ou distinção de eventos aleatórios. O ponto mais forte proposto por Batanero *et al* 2016) diz respeito à construção e aplicação de modelos matemáticos para resolver situações, enquanto Borovcnik (2016) propõe a análise e reflexão para o estabelecimento de critérios e busca de soluções. A base central do raciocínio probabilístico, seria então, a capacidade de usar e produzir modelagens que dessem conta de resolver situações do mundo real em contextos de incerteza para a tomada de decisão.

Jones, Langrall, Thornton e Mogill, (1997) realizaram ao longo de dois anos um estudo para avaliar o pensamento probabilístico de crianças. Eles consideraram quatro construtos para montar um quadro que pudesse identificar os níveis possíveis do pensamento probabilístico dos participantes da pesquisa. Os construtos considerados foram: espaço amostral, probabilidade de um evento, comparações de probabilidade e probabilidade condicional. Para cada um desses construtos, quatro níveis de pensamento, que refletiam um *continuum* do raciocínio subjetivo ao numérico, foram estabelecidos. Em cada nível e nos quatro construtos, os descritores de aprendizado foram desenvolvidos e usados para gerar tarefas de probabilidade.

Em relação aos quatro construtos, Jones, Langrall, Thornton e Mogill, (1997) destacam em seus estudos:

1- Espaço amostral - a compreensão do espaço amostral é estabelecida pela capacidade de identificar o conjunto completo de resultados em experimento de um estágio (por exemplo, jogar uma moeda) ou um experimento de dois estágios (por exemplo, jogar duas moedas).

2- Probabilidade de um evento - a compreensão da probabilidade de um evento é exibida pela capacidade de identificar e justificar qual dos dois ou três eventos são mais prováveis ou menos prováveis de ocorrer. As tarefas de probabilidade explorados com as crianças muitas vezes envolveram resultados igualmente prováveis.

3- Comparações de probabilidade - a compreensão das crianças sobre comparações de probabilidade é medida pela sua capacidade de determinar e justificar: i) qual situação de probabilidade é mais provável em gerar um determinado evento de forma aleatória e ii) se duas situações probabilísticas oferecem a mesma chance para a ocorrência de um determinado evento.

4- Probabilidade condicional - a compreensão das crianças sobre probabilidade condicional foi medida pela sua capacidade de reconhecer quando a probabilidade de um evento é ou não é não é alterada pela ocorrência de outro evento.

O quadro a seguir (Quadro 6) discrimina os níveis descritos por Jones *et al* (1997) em função dos quatro construtos do pensamento probabilístico.

Os autores validaram a estrutura por meio de dados obtidos num estudo de caso envolvendo oito crianças da terceira série. O pensamento dessas crianças foi avaliado em três pontos ao longo de um ano letivo e analisado usando as tarefas problemáticas em contextos de entrevista. Os níveis de pensamento no quadro podem fornecem uma base teórica para os projetistas de programas de currículo e avaliação na probabilidade do Ensino Fundamental.

Quadro 7: Construtos dos níveis do pensamento probabilístico

Construto	Nível 1 Subjetivo	Nível 2 Transitório	Nível 3 Quantitativo Informal	Nível 4 Numérico
Espaço Amostral	- Lista um conjunto incompleto de resultados para um experimento de um estágio	- Lista um conjunto completo de resultados para um experimento de um estágio - Lista os resultados do experimento de dois estágios de uma maneira limitada e não sistemática	- Adapta e aplica parcialmente uma estratégia genérica para fazer uma lista completa de resultados para um caso de dois estágios	- Adapta e aplica uma estratégia geradora que permite uma listagem completa dos resultados para um caso de duas e três etapas
Probabilidade de um evento	- Prevê o evento mais / menos provável com base em julgamentos subjetivos - Distingue eventos certos, possíveis e impossíveis de forma limitada	- Prevê o evento mais / menos provável com base em julgamentos quantitativos, mas pode reverter para julgamentos subjetivos - Distingue eventos certos, possíveis e impossíveis com parâmetros razoáveis	- Prevê o evento mais / menos provável com base em julgamentos quantitativos, incluindo situações que envolvem resultados não-contínuos - Usa números informalmente para comparar probabilidades - Distingue eventos certos, possíveis e impossíveis e justifica as escolhas quantitativamente.	- Prevê eventos mais / menos prováveis para experimentos de estágio único - Atribui uma probabilidade numérica a um evento (pode ser uma probabilidade real ou uma forma de probabilidade)
Comparação de probabilidades	- Compara a probabilidade de um evento em dois espaços amostrais diferentes, geralmente com base em vários julgamentos subjetivos ou numéricos. - Não consegue distinguir situações de probabilidade justas de situações injustas	- Faz comparação de probabilidades baseado em julgamentos quantitativos (pode não quantificar corretamente e pode haver limitação quando elementos não-contínuos estão envolvidos) - Começa a distinguir situações de probabilidade justas de situações injustas	- Faz comparação de probabilidades baseado em julgamentos quantitativos consistentes - Justifica, validando com raciocínio quantitativo, mas pode haver limitação quando eventos não-contínuos estão envolvidos - Distingue situações de probabilidade justas de situações injustas geralmente baseado em validação de raciocínio numérico	- Atribui uma probabilidade numérica para mensurar uma comparação - Incorpora resultados contínuos e não-contínuos determinando probabilidades
Probabilidade condicional	- Seguindo um determinado resultado, prevê consistentemente que ocorrerá da próxima vez ou, alternativamente, que não ocorrerá novamente (overgeneralizes)	- Começa a reconhecer que a probabilidade de um evento muda em uma situação de não reposição - Pode reconhecer quando eventos certos e impossíveis surgirão em situações de não-reposição	- Pode determinar a mudança da medida da probabilidade em situações de não reposição - Reconhece a probabilidade de um evento muda em situações de não-substituição	- Atribui probabilidade numérica em situação de reposição e não-reposição. - Distingue eventos dependentes de independentes

Fonte: Jones *et al* (1997)

Os pesquisadores alertam que ao desenvolver o quadro sobre o pensamento probabilístico das crianças, as situações se limitaram a questões que envolveram a probabilidade teórica. Jones *et al* (1997) observam que

> ao focar em probabilidade teórica, não estamos subestimando a importância das experimentações da probabilidade, que é a probabilidade baseada na frequência relativa. No entanto, consideramos que é importante começar com o pensamento intuitivo das crianças na probabilidade teórica como base para explorações subsequentes de seu pensamento na probabilidade experimental (JONES *et al* , 1997, p. 104)

No estudo, as crianças que estavam no Nível 1 de pensamento probabilístico costumavam adotar uma perspectiva estreita em relação a situações de probabilidade. Elas não reconheciam fenômenos aleatórios e baseavam seus julgamentos em crenças subjetivas. Ao declarar os resultados de um espaço amostral, elas não forneciam uma listagem, e tendiam a se concentrar subjetivamente sobre o que é mais provável que aconteça, em vez do que é possível. Em situações envolvendo a probabilidade de um evento, comparações de probabilidades e probabilidade condicional, as crianças faziam julgamentos subjetivos, em vez de quantitativos.

As crianças que demonstraram estar no Nível 2 de pensamento encontravam-se em transição entre juízos quantitativos e subjetivos informais. Elas identificaram consistentemente um conjunto completo de resultados para um experimento de um estágio e às vezes foram capazes de listar os resultados para uma experiência de dois estágios sem uma estratégia geradora. A compreensão da probabilidade condicional escapou das crianças do Nível 2. Elas reconheceram a existência de probabilidade condicional na qual mudanças explícitas ocorrem (por exemplo, a probabilidade de sair bola vermelha *diminui* após ter saído uma bola vermelha e ela não ter sido reposta ou substituída), mas eles tendiam a não reconhecer o efeito na probabilidade condicional de eventos relacionados (por exemplo, a probabilidade de sair bola azul *aumenta* após uma bola vermelha ter sido retirado sem reposição).

As crianças do Nível 3 caminharam em direção a uma estratégia sistematizadora ao listar os resultados de um experimento de dois estágios. Elas usaram julgamentos quantitativos na determinação de probabilidades. Embora as probabilidades nem sempre foram expressas corretamente, elas utilizaram números para comparar probabilidades e entenderem a probabilidade condicional, no sentido de que reconheceram que as probabilidades de todos os eventos mudam em uma situação de não reposição.

No Nível 4 as crianças adotaram estratégias que não apenas permitiram gerar sistematicamente os resultados de um experimento, mas também atribuir e usar probabilidades numéricas em ambas as situações igualmente e não igualmente equitativas. Elas usaram uma estratégia sistemática para listar os resultados de experimentos de dois e três estágios, e aparentemente usaram o espaço amostral como base para encontrar e comparar probabilidades numéricas. Esse recurso com probabilidade numérica também opera em probabilidade condicional, e o pensamento das crianças nesse nível engloba o reconhecimento da probabilidade condicional em relação a todos os eventos de um experimento.

Posteriormente, Jones (2006) resgata Tarr e Jones (1997) que realizam um refinamento no quadro do pensamento probabilístico (Jones *et al* , 1997), descrita a seguir no Quadro 8, fazendo adequações acerca da probabilidade condicional, com foco, desta vez, na independência de eventos. Os pesquisadores relatam a importância de se intensificar estudos que observem os construtos e, que é possível que haja novas adequações necessárias em função da linguagem e da natureza das situações probabilísticas. Para eles, os níveis de pensamento do quadro fornecem uma base teórica para programas curriculares e avaliação no Ensino Fundamental (JONES *et al*, 1997).

Quadro 8: Adequação do construto Probabilidade Condicional por Tarr e Jones (1997)

	Nível 1 **Subjetivo**	**Nível 2** **Transitório**	**Nível 3** **Quantitativo informal**	**Nível 4** **Numérico**
INDEPENDÊNCIA	- Considera que eventos consecutivos são sempre relacionados. - Possui crença difusa de que podem controlar o resultado de um evento. - Usa raciocínio subjetivo que impede qualquer foco significativo em independência. - Exibe confiança indevida na previsão de resultados sucessivos.	- Mostra algum reconhecimento sobre eventos consecutivos se estão relacionados, ou não. - Usa frequentemente uma estratégia de “representatividade”, seja uma orientação de recência positiva ou negativa. - Reverte para o raciocínio subjetivo.	- Reconhece quando o resultado do primeiro evento influencia ou não o resultado do segundo evento. Em situações de reposição, vê o espaço amostral como restaurado. - Diferencia, embora imprecisamente, eventos independentes e dependentes em “com” e “sem” situações de reposição. - Reverte para a representatividade.	- Distingue eventos dependentes e independentes em situações de reposição e não-reposição, usando probabilidades numéricas para justificar seu raciocínio. - Observa os resultados de ensaios sucessivos, mas rejeita uma estratégia de representatividade. - Reluta ou recusa previsões de resultados quando os eventos são igualmente prováveis.

Fonte: Jones (2006)

Observa-se que os quadros de construtos do pensamento probabilístico (Quadros 7 e 8) de Jones *et al* (1997) e de Jones (2006) apresentam aproximações com as demandas cognitivas defendidas por Bryant e Nunes (2012) e, em função desta proximidade, o quadro será utilizado na presente pesquisa como aporte para analisar demandas cognitivas propostas na avaliação de jogos justos e injustos.

5.4. JOGOS, JUSTIÇA E PROBABILIDADE

Bryant e Nunes (2012) defendem que uma boa razão para que as pessoas sejam instrumentalizadas para serem capazes de pensar racionalmente sobre a aleatoriedade e a incerteza, raízes centrais da probabilidade, é que distribuições aleatórias desempenham um importante papel no sentido de garantir a equidade em suas vidas. E esta é uma forma de garantir a justiça, quando por exemplo, há um sorteio para selecionar uma pessoa que ganhará um prêmio, ou quando as cartas são embaralhadas para que não haja injustiça nas escolhas.

Em sua obra “Livro sobre os jogos de azar”, Cardano afirma que “o princípio mais fundamental de todos os jogos de azar é simplesmente condições iguais” (BENNETT, 2003, p. 87). Assim, para Cardano, os jogos de dados, por exemplo, estavam relacionados ao puro acaso, à sorte cega, se estes fossem honestos.

Bennett (2003) explora a ideia de jogo justo, em concordância com Cardano, afirmando que “um jogo justo é um no qual os jogadores tenham oportunidades iguais de ganhar a mesma quantia” (BENNETT, 2003, p. 76). Dessa forma, se num lançamento de uma moeda honesta dois jogadores apostarem 5 reais, por exemplo, o ganhador recebe 10 reais, mas o perdedor teve igual chance de ganhar e de receber valor igual ao ganhador, e cada um ‘pagou’ o mesmo preço para jogar (5 reais). Então, o jogo é justo.

No entanto, a autora, traz um novo olhar sobre esta questão. Esta nova forma de conceituar jogo justo é comumente utilizada em apostas de jogos esportivos: “se os jogadores tiverem probabilidades *desiguais* de ganhar, a aposta deverá ser corrigida para que o jogo continue justo” (BENNETT, 2003, p. 77). Nesta ótica, se os apostadores concordarem que as duas equipes têm igual capacidade (probabilidade) de ganhar o jogo, eles apostam quantias iguais, como por exemplo, numa final da Copa do Mundo entre Brasil e Itália, se considerarmos que ambas as equipes têm probabilidades iguais de ganhar. Se, no entanto, eles julgarem que as chances são desiguais, é dada uma vantagem, para quem está apostando na equipe “mais fraca”. Para exemplificar a situação, imaginemos um jogo envolvendo um time reconhecidamente com fraco desempenho e um repetidas vezes campeão. Assim, quem apostar na melhor equipe deverá investir mais dinheiro pelo privilégio de ter esta vantagem. Para ilustrar a situação, imaginemos duas jogadoras de basquete com desempenhos diferentes: Paula e Carla. Paula tem uma probabilidade de acertar cestas de três pontos de 7/10 e Carla tem probabilidade de 3/10. Para ser justo, numa aposta, envolvendo o lançamento de bolas de três pontos destas jogadoras, é necessário que haja equilíbrio no valor das apostas. Dessa forma, quem apostar em Paula terá que desembolsar mais dinheiro, pelo privilégio de ter maior probabilidade de ganhar. Sendo assim, o apostador que escolhesse Paula deveria apostar 7 reais, enquanto, quem escolhesse Carla, desembolsaria, apenas 3.

A incapacidade de obter, com antecipação, sucesso desejável nos jogos de azar representa um importante traço intuitivo de uma sequência aleatória – a imprevisibilidade. Então, a aleatoriedade garante que não exista nenhum esquema de jogo, nenhuma regra ou fórmula capaz de determinar elementos específicos na sequência aleatória (BENNETT, 2003). A esta condição chamamos de justiça, ou melhor dizendo, jogo justo.

Para o Richard Von Mises, um dos precussores no estudo de probabilidade, a aleatoriedade presente nas sequências de um jogo impossibilita um esquema desleal porque ninguém sabe o que vai acontecer, portanto, ela é a definição de uma expressão de ignorância e de indiferença humanas que engloba a incapacidade de prever resultados, independente da observância de acontecimentos passados. (BENNETT, 2003).

Cañizares, Batanero, Serrano e Ortiz (2003) advogam que o conceito de probabilidade pode ser desenvolvido por meio de jogos e experimentos como o uso de aleatorizadores como moedas ou dados, que ajudam as crianças na aquisição de conceitos: como acaso, independência e eventos mutuamente exclusivos. Para estes pesquisadores, os jogos de azar são um contexto importante no qual as crianças enfrentam situações aleatórias, tornando-se conscientes da sua imprevisibilidade e percebendo a necessidade de realização de estimativas probabilísticas. Como estes jogos fazem parte da cultura das crianças também fora da escola, eles auxiliam na aquisição de conhecimentos probabilísticos, mesmo antes de qualquer instrução formal sobre o tema. A equidade (justiça) nos jogos pode ser estabelecida de duas maneiras, para Cañizares *et al* (2003): ou se todos os jogadores têm a mesma probabilidade de ganhar e obter a mesma quantidade de dinheiro, ou através do equilíbrio entre as expectativas, quando os jogadores têm probabilidades desiguais.

Viderkovic *et al* (1998) acreditam que os jogos são atividades relevantes que podem ajudar os alunos a unir teoria e intuição. Assim, a ampliação da aprendizagem matemática dos alunos pode se dar por meio do uso de atividades de engajamento como, por exemplo, a utilização de jogos que exploram conceitos de justiça.

Cañizares *et al* (2003) orientam que os novos currículos de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio deveriam propor uma aprendizagem ativa de probabilidade na qual os estudantes possam experimentar jogos de azar e defendem, citando estudos diversos, que ao ensinar probabilidade deve-se ajudar os estudantes não apenas a desenvolver a compreensão, mas também abordar questões psicológicas referentes ao acaso. Dessa forma, é importante pesquisar sobre compreensões e crenças intuitivas dos aprendizes, incluindo o que pensam sobre os jogos probabilísticos de azar. Os autores ressaltam que é importante pesquisar a compreensão e crenças intuitivas, incluindo percepções de jogos de azar. Com os estudos destes pesquisadores evidenciou-se que a maioria dos alunos demonstrou uma concepção adequada de jogos justos e também estavam conscientes de fatores externos que podiam influenciar o resultado, como uso de aleatorizadores não justos (viciados) e este pode ser um grande argumento para começar a ensinar conceitos probabilísticos enquanto as crianças ainda estão no início do Ensino Fundamental. Esta decisão pode ter impacto crucial no desenvolvimento do raciocínio probabilístico infantil. (CAÑIZARES *et al* , 2003).

Watson e Moritz (2003), propuseram níveis de crenças observados em crianças e adolescentes quando estes avaliam a justiça no lançamento de dados. Acredita-se que a proposta destes pesquisadores pode servir para o uso de outros aleatorizadores, inclusive no presente estudo.

Os pesquisadores categorizaram os níveis de crenças no lançamento de dados, (Quadro 9), considerando tipos de respostas dos alunos, assim, o *nível icônico* (não justo) se baseou nos estudantes que expressaram a crença de que certos números são favorecidos, muitas vezes considerando suas próprias experiências e histórias de vida com jogos de dados; o *nível uniestrutural* diz respeito aos alunos cuja crença é simplesmente declarada e aceita como uma proposição de que todos os números têm as mesmas chances; o *multiestrutural* considerou os alunos que apresentaram comentários e argumentos adicionais para garantir equidade e o *relacional* foi observado nos estudantes que evidenciaram comentários contrastantes com crença de que resultados a curto prazo podem parecer injustos e, a longo prazo, são justos.

Quadro 9: Níveis de crença sobre justiça dos dados

Nível	Descrição	Explicação
Icônico	**Injusto**	Crenças de que os dados são injustos, muitas vezes envolvendo experiências pessoais sobre jogos.
Uniestrutural	**Justo**	Crença teórica em justiça ou igualdade de chances em uma forma proposicional; qualquer referência à experiência é secundária à principal conclusão de justiça.
Multiestrutural	**Justo qualificado**	Crença que os dados são justos, sujeitos à condição de rolamento de uma técnica qualificada de rolamento ou à condição física da fabricação dos dados, considerando a forma e o “peso”.
Relacional	**Variação de curto prazo**	Crença que os resultados são justos a longo prazo, mas que os resultados de curto prazo ou a lembrança seletiva da experiência podem sugerir o contrário.

Fonte: Watson e Moritz (2003) (tradução nossa)

Watson e Moritz (2003) sintetizaram também as estratégias utilizadas pelos estudantes em relação aos níveis de crenças de justiça nos dados (Quadro 10).

Quadro 10: Níveis de estratégia usados para determinar a justiça dos dados

Nível	Descrição	Explicação
Icônico	**Idiossin-crática**	Incorporação de crenças intuitivas (por exemplo, antropomorfismo), muitas vezes sobre números específicos (sorte) e, portanto, envolvimento com dados de maneira idiossincrática.
Uniestrutural	**Não testável**	Afirmação de que os dados são justos; nenhum teste é necessário.
Multiestrutural	**Observacio-nal**	Observação de características físicas, por exemplo, se cada resultado possível é representado em uma e apenas uma face; ou simetria em termos de medição de peso ou forma, ou técnica de rolamento específica; ou alguns ensaios não sistemáticos para apoiar um argumento, mas sem técnica de registro sistemático e resultados não utilizados para tirar conclusões.
Relacional	**Empírico**	Ensaios sistemáticos dos dados, registro de resultados e comparação de frequências de resultados a serem considerados se a distribuição dos resultados for uniforme. *Pequenos ensaios* com amostras incluem menos de 18 lançamentos de cada dado, registro de resultados, às vezes como uma sequência de resultados. *Ensaios de amostra grande* incluem mais de 18 lançamentos de cada dado, registro de resultados e resumos de frequências de cada resultado.

Fonte: Watson e Moritz (2003) (tradução nossa)

Considerando os subsídios teóricos aqui explorados, procurou-se estabelecer as proximidades entre os diferentes olhares acerca dos objetos de estudo, que repousam essencialmente em elementos da Probabilidade, e esta pesquisa, de forma tal que possibilitasse análises mais fidedignas dos resultados obtidos. Assim, alguns aportes apresentam um peso maior no ato de análise dos resultados, no entanto, todas as bases teóricas aqui descritas, contribuíram em maior ou menor escala para a interpretação dos dados e as conclusões obtidas ao final dos estudos, sem os quais não seria possível atestar a tese.

A seguir será pormenorizado o percurso metodológico que deu corpo a esta pesquisa, considerando os três estudos que possibilitaram a construção da tese.

6. MÉTODO

"A ideia de justiça é um elemento intuitivo importante da noção que as crianças têm *do fenômeno aleatório."*
Deborah Bennett

A presente pesquisa que pretendeu analisar compreensões de estudantes e professores acerca de justiça em jogos, levou em consideração três demandas cognitivas da probabilidade defendidas por Bryant e Nunes (2012): *aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades.* A demanda referente a *correlações* (ou associação entre eventos) nem sempre é necessária em situações probabilísticas (BRYANT E NUNES, 2012), além de não ser explicitadas em documentos curriculares dos anos iniciais do Ensino Fundamental, razão pela qual, essa demanda não foi escolhida para compor os estudos desta pesquisa. A demanda referente à *comparação de probabilidades* está associada à *quantificação de probabilidades*, mas esta última não foi explicitamente investigada nesta pesquisa, pois optou-se por evitar o foco sobre um possível cálculo de probabilidade, uma vez que os estudantes não tiveram acesso formal ao tema. Ressalta-se que para *comparar probabilidades*, em conformidade com Bryant e Nunes (2012), nem sempre é necessário quantificá-las. Assim, escolheu-se tratar de *comparação de probabilidades*, mas não de *quantificação de probabilidades*.

Nesta pesquisa foram realizados três estudos[14] que se encontram entrelaçados entre si:

- O Estudo 1 - teve a intencionalidade de mapear compreensões de crianças e adultos de mesma escolaridade acerca de justiça em jogos em contextos que envolvem as demandas cognitivas: aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades.
- O Estudo 2 – que se configurou em uma ampliação do Estudo 1, envolveu a análise de compreensões de crianças portuguesas do 5º ano em comparação com as crianças brasileiras do Estudo 1 desse mesmo ano escolar.
- O Estudo 3 - que utilizou compreensões apontadas pelos participantes dos Estudos 1 e 2 a fim de resgatar entendimentos de professores brasileiros e portugueses sobre elementos da probabilidade explorados na pesquisa e que estão relacionados à justiça em jogos.

[14] Os Estudos 2 e 3 foram idealizados posteriormente para substituir o estudo interventivo proposto inicialmente e aprovado na qualificação, em função da impossibilidade de vivenciá-lo por causa da pandemia de Covid-19.

6.1. ESTUDO 1: COMPREENSÕES DE CRIANÇAS E ADULTOS SOBRE JUSTIÇA EM JOGOS EM CONSONÂNCIA COM DEMANDAS COGNITIVAS DA PROBABILIDADE

O Estudo 1 foi realizado com 15 crianças do 5º ano, com média de idade de 11 anos, e 15 adultos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), com idade entre 28 e 67 anos, e com escolarização equivalente ao 5º ano. Ambos os grupos pertenciam a escolas públicas do município do Cabo de Santo Agostinho, residentes em comunidade de baixo nível socioeconômico do município que nunca tiveram acesso formal a estudos de probabilidade. Assim sendo, as compreensões apontadas pelos participantes do estudo são de natureza intuitiva.

Fischbein (1984) defende que há conhecimentos de natureza probabilística que só são efetivamente consolidados por meio do ensino, razão pela qual foi escolhido para compor o Estudo 1 dessa pesquisa, estudantes de mesma escolaridade, sendo crianças do 5º ano e adultos da EJA (fase equivalente ao 5º ano). O 5º ano foi escolhido por considerar que participantes deste ano de escolarização teriam um arcabouço maior de vivências escolares que lhes permitissem fazer alguma conexão com elementos que permeiam as demandas cognitivas da probabilidade, como por exemplo, a possível compreensão da proporcionalidade, mesmo com a ausência de estudos formais sobre temas probabilísticos.

O estudo foi realizado por meio de entrevistas clínicas individuais que foram audiogravadas em aparelho smartphone. A entrevista clínica é baseada no método clínico piagetiano e, neste estudo, ele foi inspirado nas contribuições de Carraher (1998). Para esta autora, o método clínico possibilita refletir sobre as ações, respostas, escolhas e comportamento dos sujeitos acerca de uma determinada situação proposta para resolução. É uma análise do raciocínio do sujeito, que exige inferência. Assim, “no método clínico piagetiano, a finalidade do exame é compreender como o sujeito pensa, como analisa as situações, como resolve problemas e como responde às contra-sugestões do examinador” (CARRAHER, 1998, p.6). No método clínico, o pesquisador busca motivar o participante à reflexão, que não é possível, num teste padronizado. Por esta razão, a entrevista clínica, traz perguntas norteadoras que suscitam novas perguntas, em conformidade com as respostas de cada entrevistado, visando possibilitar reflexões mais aprofundadas.

Carraher (1998) orienta que é recomendável que o método seja aplicado num ambiente que seja calmo e ofereça conforto ao sujeito e que o pesquisador procure deixar o sujeito à vontade, motivando-o para a tarefa e adotando uma atitude de naturalidade ao efetuar as perguntas. As perguntas norteadoras devem ser padronizadas, evitando-se assim, que termos diferentes que por ventura venham a ser usados, tenham influência diferenciada nos sujeitos.

Nesta ótica, Carraher (1998) defende que

> O exame piagetiano visa buscar as respostas mais características do pensamento do sujeito, aqueles que o sujeito dá com maior convicção e não com maior rapidez. Alguns sujeitos podem mesmo ter a necessidade de examinar algumas alternativas diferentes, antes de encontrarem a resposta que julgam mais apropriada. (CARRAHER, 1998, p. 17-18)

Neste estudo foram utilizados seis jogos, dos quais dois exploravam a *aleatoriedade* com foco em *independência de eventos em sequências aleatórias*, dois tratavam de *espaço amostral* com ênfase em *eventos equiprováveis e não-equiprováveis* e dois versavam sobre *comparação de probabilidades* com uso de espaços amostrais distintos para verificar a utilização (ou não) do *raciocínio proporcional.* Cada uma das demandas cognitivas defendidas por Bryant e Nunes (2012) e exploradas neste estudo contou com contextos de jogos justos e injustos.

Os quadros a seguir (Quadro 11, 12 e 13) mostram os contextos de jogos utilizados na entrevista clínica, considerando as demandas cognitivas exploradas e o foco probabilístico referente a cada uma. São explicitados também as perguntas norteadoras que deram corpo ao trabalho, além das respostas esperadas, ou seja, as respostas que se julga coerente do ponto de vista conceitual e que servirão de guia para avaliar as justificativas e argumentos apresentados pelos participantes ao longo da pesquisa.

As crianças e os adultos tiveram a oportunidade de manusear os artefatos utilizados nos jogos propostos como forma de se familiarizarem com as atividades. A intenção era que, mesmo que eles desconhecessem as atividades e os aleatorizadores envolvidos nos contextos apresentados, eles teriam como entender o funcionamento e as regras de cada jogo, de forma prática, para poder avaliar a justiça presente (ou não) nas situações. O Quadro 11 apresenta a proposta de jogos para exploração da aleatoriedade em contextos justos e injustos.

Quadro 11: Situações de jogos justos e injustos envolvendo aleatoriedade

Aleatoriedade e Justiça em Jogos

”Loto” - Jogo Justo

Foco: Independência de eventos

1- Num **jogo de ”Loto”**, há bolas numeradas de 1 a 90. Serão sorteadas 6 bolas do saco. Veja as cartelas que os amigos receberam para participar do jogo. A cada bola sorteada, eles marcam o número correspondente na cartela. Ganhará quem completar mais rápido sua cartela.

Veja as cartelas de algumas crianças:

- Pedro

16	**18**	**20**
24	**26**	**28**

- Felipe

6	**12**	**27**
32	**44**	**53**

- Ana

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**

Analise as cartelas das crianças e responda:

a) **O jogo é justo para Pedro, Felipe e Ana? Justifique.**

b) **Se você respondeu que era injusto o que poderia ser feito para torná-lo justo?**

”Bingo” - Jogo injusto

Foco: Independência de eventos associado a aleatorizadores desonestos

2- A professora propôs a seus alunos um jogo de ”Bingo” diferente: num globo vazado foram colocadas apenas 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Felipe colocou as bolinhas dentro do globo e verificou que embora elas tivessem o mesmo tamanho tinham “pesos” diferentes: umas “pesavam” mais e outras, menos. As que “pesavam” mais eram sorteadas com maior frequência. Ele notou que as mais “pesadas” pertenciam a números que tinham 2 em sua composição (por exemplo 21, 22, 23).

Analise as cartelas que alguns colegas de Felipe receberam.

Ana

15	**30**	**16**
08	**14**	**27**

André

12	**02**	**20**
24	**26**	**14**

a) **Você acha que o jogo é justo para Ana e André? Por quê?**

b) **Se você julgou a situação injusta, o que poderia ser feito para torná-la justa?**

Resposta esperada (correta)

”Loto”	”Bingo”
a) Sim. O jogo é justo porque há as mesmas probabilidades de vitória para qualquer uma das cartelas, ou seja, qualquer número é igualmente provável de ser sorteado, possibilitando a qualquer um dos jogadores ganhar o jogo. b) Sendo justo, não há necessidade de sugerir alterações ou adequações ao jogo.	a) O jogo é injusto porque com os aleatorizadores desonestos, há maior probabilidade de vitória do jogador que possui maior quantidade de números formados por algarismo 2. b) Manter as duas cartelas com a mesma quantidade de números formados pelo algarismo 2. Ou propor premiação diferenciada para os jogadores. Ou substituir os aleatorizadores por outros de igual massa.

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

O Jogo de ”Loto” é considerado justo, em função da equiprobabilidade dos resultados dos possíveis números sorteados. A ideia se pautou na avaliação da compreensão dos participantes acerca de sequências aleatórias equiprováveis, presentes nas cartelas dos jogadores,. As sequências aleatórias se relacionam diretamente ao entendimento acerca da *independência de eventos*. Bryant e Nunes (2012) comentam que crianças e adultos cometem equívocos para avaliar e entender sequências aleatórias pela falta de ampla compreensão da *independência de eventos*. Já no ”Bingo” (injusto), a proposta se assentou na possibilidade de que os participantes refletissem sobre chances diferentes dos números serem sorteados em função da massa maior de algumas bolinhas, ou seja, a ausência da equiprobabilidade comprometia o caráter justo da situação.. Nesta situação, o fato dos aleatorizadores serem claramente desonestos era um fator preponderante para a injustiça no jogo, especialmente em função das cartelas que beneficiavam mais um jogador do que outro.

O Quadro 12 apresenta os contextos de jogos utilizados para exploração da relação do espaço amostral com justiça. Foram idealizados dois jogos: um jogo considerado injusto denominado aqui como “Bolinhas na colher” e um jogo justo, que envolveu três moedas distintas e nomeado como “Jogo das Moedas”. Os jogos, não focaram na construção do espaço amostral, em sua totalidade, ou seja, na possibilidade de realização de uma lista exaustiva dos casos possíveis, mas esperava-se que os participantes fizessem referência a alguns elementos dos eventos para justificar suas escolhas e avaliações.

Para ponderar se o jogo ”Bolinhas na colher” é justo ou não, seria necessário que os participantes analisassem as possibilidades destinadas a cada jogador, ou seja, verificassem o espaço amostral para avaliarem a equiprobabilidade (ou não) de cada evento: evento 1- sair bolinhas somente na cor azul; evento 2- sair bolinhas apenas cor rosa; e evento 3- sair bolinhas nas duas (cores azul e rosa), em qualquer configuração.

No ”Jogo das Moedas”, a análise do espaço amostral se referia ao lançamento de três moedas para verificar se os eventos destinados a cada jogador eram equiprováveis para garantir a justiça no jogo. Sabe-se que o espaço amostral no lançamento de três moedas resulta em oito possibilidades, no entanto, nos eventos destinados a cada jogador, haviam três possibilidades para cada um, tornando, por conseguinte, iguais as probabilidades de vencer, assim, o jogo foi caracterizado como justo.

Quadro 12: Situações de jogos justos e injustos envolvendo espaço amostral

Espaço amostral e Justiça em Jogos	
”Bolinhas na colher” - Jogo injusto Foco: Eventos não-equiprováveis	**“Jogo das Moedas” - Jogo justo** Foco: Eventos equiprováveis
 3-Uma colher de madeira com 4 furos, serve para apanhar bolinhas de uma caixa. Na caixa há a 120 bolinhas rosas e 120 azuis. Para brincar, a pessoa fecha os olhos e coloca a colher dentro da caixa para pegar quatro bolinhas. Mariana propôs a seus filhos Pedro, Felipe e Amanda **um jogo com essa colher e essas bolinhas**. As crianças ganharão pontos nas seguintes condições: - Sempre que a colher for preenchida com 4 bolinhas rosas, será ponto da **Miguel** - Sempre que a colher for preenchida com 4 bolinhas azuis será ponto da **Tiago** - Sempre que a colher for preenchida com bolinhas de cores diferentes: rosas e azuis será ponto da **Amanda.** a) **O jogo é justo para Miguel, Thiago e Amanda? Por quê?** b) **Se você respondeu que o jogo era injusto o que poderia ser feito para torná-la justa para as três crianças?**	4- A professora propôs aos alunos um **jogo de lançamento de três moedas** (uma de 25 centavos, uma de 50 centavos e outra de 1 real) para que anotassem os resultados. Para a dupla de Cristina e Rute, a professora determinou que:  - Cristina ganha um ponto - se saírem 2 caras e 1 coroa - Rute ganha um ponto – se saírem 2 coroas e 1 cara - Cristina e Rute ganham um ponto cada – se saírem qualquer combinação de faces iguais a) **O jogo é justo para Cristina e Rute?** b) **Se você respondeu que era injusta a situação, o que poderia ser feito para torná-la justa?**
Resposta esperada (correta)	
a) O jogo é injusto, pois há mais probabilidade de Amanda ganhar, uma vez que há mais maneiras de compor cores diferentes na colher do que cores iguais, como 1 rosa e 3 azuis (em 4 formas), 3 azuis e 1 rosa (4 formas) e 2 azuis e 2 rosas (6 formas) b) Acrescentar mais 120 bolinhas de outra cor e cada jogador ter que tirar as quatro da sua cor escolhida; ou cada um jogador escolher uma organização particular (das 16 possíveis) das ”Bolinhas na colher”; ou Miguel – 1 rosa e 3 azuis (4 possibilidades), Tiago – 3 azuis e 1 rosa (4 possibilidades), Amanda – 2 azuis e 2 rosas com as cores iguais juntas lado a lado (4 possibilidades). Ver Figura 17.	a) O jogo é justo, pois as jogadoras têm iguais chances de vencer. Há três possibilidades de Rute ganhar (CCK,CKC, KCC) e três de Cristina ganhar (KKC, KCK, CKK) e se saírem faces iguais (KKK ou CCC) ambas ganham pontos. b) Sendo justo, não há necessidade de sugerir alterações ou adequações ao jogo. Considera-se: K-cara C- coroa

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

O Quadro 13 mostra as situações contextuais referentes aos jogos que possuem relação com a comparação de probabilidades em espaços amostrais distintos.

Quadro 13: Situações de jogos justos e injustos envolvendo comparação de probabilidades

Comparação de probabilidades e Justiça	
Dados I: Jogo justo Foco: uso do raciocínio proporcional	**Dados II: Jogo injusto** Foco: uso do raciocínio proporcional
5- Num jogo com dados, Marcos usa o hexaedro (vermelho) e Paulo o octaedro (preto). O dado de Marcos tem seis faces numeradas (1, 2, 3, 4, 5, 6). O de Paulo tem oito faces (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8). **CARLOS→**  **ANDRÉ→**  Para ganhar ponto a pessoa tem que tirar um número PAR. **a) O jogo é justo para Marcos e Paulo? Por quê?** **b) Se você respondeu que era injusto o que poderia ser feito para ele ser justo?**	6- Num lançamento de dados são usados um tetraedro roxo (quatro faces triangulares numeradas de 1 a 4), e um hexaedro branco (dado comum, com 6 faces numeradas de 1 a 6). Duas pessoas estão jogando e estabeleceram a seguinte regra:   →Priscila joga com o tetraedro e ganha um ponto se a face **não visível** for número maior que 2. → Daniele joga com o hexaedro e ganha um ponto se a face **não visível** for número maior que 2. **a) O jogo é justo para Priscila e Daniele? Por quê?** **b) Se você acha que as regras são injustas, o que poderia ser alterado nelas para que se tornassem justas para ambos os participantes?**
Resposta esperada (correta)	
a) O jogo é justo para os jogadores, pois há a mesma probabilidade de vitória para ambos. Cada um tem metade das chances de sair par no lançamento de seu dado. b) Sendo justo, não há necessidade de sugerir alterações ou adequações ao jogo.	a) O jogo é injusto, pois há maior probabilidade Daniele ganhar, uma vez que no dado dela há mais da metade dos números maiores que 2 (4 em 6), enquanto no dado de Priscila há metade das chances (2 em 4). b) Usar o mesmo dado; ou mudar as regras (tirar número ímpar ou número primo)

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Para avaliar a justiça relacionada a esta demanda cognitivas, nesses jogos, foram usados como aleatorizadores dados de diversos formatos. O Jogo de Dados I, considerado como justo, exigia que os participantes comparassem as probabilidades de sair o evento par em espaços amostrais distintos por meio da análise do lançamento de um hexaedro e de um octaedro. Apesar dos espaços amostrais serem diferentes, não era necessário fazer cálculos de probabilidades para avaliar a situação, mas devia-se fazer uso do *raciocínio proporcional*. O Jogo de Dados II, envolvia a comparação de probabilidades no lançamento de um tetraedro e de um hexaedro. A avaliação da justiça das situações poderia ser feita comparando proporcionalmente a quantidade de elementos dos eventos "sair número maior que 2" em ambos os dados.

Ao final da apresentação dos jogos supracitados, uma pergunta foi feita aos participantes da pesquisa, a fim de que eles pudessem conceituar, de alguma forma, o que para eles era justo num contexto de jogos: *Para você o que é um jogo justo? O que se caracteriza um jogo justo?*

Posteriormente, foi solicitado que, as crianças e adultos participantes do estudo, preenchessem o quadro a seguir (Quadro 14), para avaliar o que eles julgavam justo e injusto, considerando os jogos 'Par ou ímpar' e '"Bingo"'.

Quadro 14: Situações justas e injustas considerando o jogo "Par ou ímpar" e "Bingo"

SITUAÇÃO	É JUSTA	NÃO É JUSTA
1.Sortear no "**par ou ímpar**" dentre alguns suspeitos, o que será condenado por um crime.		
2.Definir a escolha do lado do campo para iniciar o jogo no "**par ou ímpar**".		
3.Definir no "**par ou ímpar"** o campeão do Brasileirão.		
4. Tirar no "**par ou ímpar**" quem vai pagar o sorvete.		
5. Usar um **"Bingo"** para definir o ganhador de um carro.		
6. Fazer um **"Bingo"** para definir o aluno que irá representar o município num campeonato de xadrez.		
7. Por meio do resultado de um **"Bingo"** selecionar a pessoa que receberá o título de "O amigo da escola".		
8. Usar um **"Bingo"** para definir qual atleta do time vencedor ficará com o troféu.		

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Como explicitado no Quadro 14, foram propostos contextos em que os jogos ("Par ou ímpar" e "Bingo") estavam sendo usados em situações diretamente ligadas a atividades esportivas (jogos) e em situações não-esportivas. A intencionalidade desta atividade específica era avaliar se a premiação destacada nas situações ou o tipo de jogo teria influência sobre a compreensão de justiça nos jogos para os participantes.

Como finalização, para compreender como adultos e crianças categorizam o que é justo e o que não é, num contexto de jogos, foi solicitado que os participantes respondessem à pergunta: *Usar o jogo de 'cara ou coroa' para definir o ganhador de uma casa com piscina é justo ou não? Por quê?* Esta indagação teve a intenção de avaliar, de forma aberta, se adultos e crianças julgam se a presença da justiça, ou não, nos jogos é influenciada pelo tipo do jogo ou pelo valor do prêmio.

6.2. ESTUDO 2: COMPREENSÕES DE CRIANÇAS BRASILEIRAS E PORTUGUESAS ACERCA DE JUSTIÇA EM JOGOS

O Estudo 2[15] seguiu o mesmo percurso metodológico do Estudo 1. Para fins de coleta de dados foram considerados os contextos de jogos utilizados na entrevista clínica com as crianças brasileiras do Estudo 1, a fim de na análise ser possível estabelecer um paralelo com as crianças portuguesas.

Conjecturou-se se crianças de mesma escolarização, mas de culturas diferentes e que não tiveram acesso formal a conhecimentos de natureza probabilística, poderiam ter compreensões semelhantes ao avaliar jogos justos e injustos, considerando demandas cognitivas da probabilidade.

Assim, foram entrevistadas 15 crianças portuguesas do 5º ano de escola pública, residentes em Lisboa, em bairro de classe média. Além da escolaridade, a média de idade das crianças portuguesas também era semelhante às das crianças brasileiras: 11 anos. Essas crianças também não tiveram acesso formal a conhecimentos probabilísticos em função do currículo português só explorar o tema no 7º ano. Nos anos iniciais, portanto, as crianças portuguesas não estudam probabilidade formalmente, por conseguinte, as compreensões apontadas neste estudo são de ordem intuitiva, assim como com os participantes brasileiros.

6.3. ESTUDO 3: COMPREENSÕES DE PROFESSORES BRASILEIROS E PORTUGUESES ACERCA DE JUSTIÇA EM JOGOS A PARTIR DE ANÁLISE DE ENTENDIMENTOS DE CRIANÇAS E ADULTOS SOBRE O TEMA

O Estudo 3 levou em conta análises de pesquisa mapeadas e explicitadas nesse documento (CAMPOS E PIETROPAOLO, 2013; VIALI E CURY, 2011; LOPES, 2008; VIALI, 2008, FELISBERTO DE CARVALHO, 2017) que apontaram fragilidades conceituais de professores dos mais diversos níveis em relação a conhecimentos probabilísticos. Nessa ótica, procurou-se analisar também o entendimento de professores dos níveis/modalidades explorados nos Estudos 1 e 2, considerando brasileiros e portugueses proporcionalmente. Apesar terem sido utilizados os mesmos jogos e análises semelhantes aos Estudos 1 e 2, o

[15] Os Estudos 2 e 3 foram idealizados em função da impossibilidade de colocar em prática o estudo interventivo originalmente proposto inicialmente para esta pesquisa.

percurso metodológico foi um pouco diferente e o foco centrado na justiça em jogos, como nos estudos anteriores.

O Estudo 3 contou com a participação de 15 professores do Ensino Fundamental distribuídos em três grupos distintos: cinco professores dos anos iniciais do ensino regular da Rede Municipal de Ensino do Cabo de Santo Agostinho; cinco professores da EJA (anos iniciais) também de escolas públicas do Cabo de Santo Agostinho; e cinco professores de Portugal, habilitados a ensinar o 5º ano, de escola pública da cidade de Lisboa.

Para este estudo os mesmos jogos foram utilizados, com algumas adaptações, a fim de atingir os objetivos propostos. Foram consideradas algumas falas que indicaram compreensões sobre justiça em jogos apontadas pelos participantes dos Estudos 1 e 2. Essas compreensões (uma coerente e outra equivocada) foram atribuídas a dois estudantes fictícios: o Estudante A e o Estudante B que respondiam basicamente à indagação*: "Esse jogo é justo para os jogadores tal e tal*"? Os professores, portanto, tiveram que analisar o contexto dos jogos e interpretar as compreensões dos Estudantes A e B para dar um parecer sobre a coerência, ou não, da compreensão dos dois estudantes acerca dos elementos probabilísticos explorados.

Em função da pandemia de Covid-19 (2020-2021), não foi possível realizar as entrevistas presencialmente com os professores. Optou-se, portanto, pela realização de uma conversa (via Google Meet), de forma individual e síncrona para que os professores pudessem responder a um formulário (Google Forms) com as questões supracitadas. Durante todo o tempo em que os professores responderam às questões do formulário, se manteve aberta a conversa via Google Meet para maiores esclarecimentos e apresentação dos artefatos utilizados nos jogos, caso houvesse necessidade. A pesquisadora se manteve em permanente disponibilização a cada um dos professores, de forma síncrona, durante todo o tempo de análise e resposta ao formulário.

Inicialmente, os professores foram convidados a opinar sobre as seguintes questões:

a) Para você o que é um jogo justo?

b) Ganhar uma casa com piscina num jogo de cara ou coroa é justo?

c) Qual jogo seria justo para ter como premiação ganhar uma casa? O que seria justo ganhar num jogo de cara e coroa?

Estas questões foram propostas aos estudantes após a análise dos seis jogos, e as respostas foram fortemente influenciadas pela vivência recente nesses jogos. Optou-se por inverter a ordem para que os professores apresentassem as suas percepções, sem a influência do que seria discutido nos jogos explorados. Nessa etapa inicial, as respostas dos professores foram audiogravadas e, posteriormente, transcritas para fins de análises.

A seguir, estão especificadas as questões abordadas na pesquisa com os professores, considerando as demandas cognitivas e o foco probabilístico explorado, em consonância com os Estudos 1 e 2. As respostas esperadas, ou seja, as respostas corretas também estão indicadas ao final de cada item. Considera-se como respostas corretas, as análises feitas pelos professores que indiquem compreensões coerentes do ponto de vista conceitual, que se assemelham ao que está descrito na resposta esperada. Foi orientado verbalmente aos professores que eles deveriam observar os contextos dos jogos e avaliar as compreensões de cada um dos estudantes (A e B) a fim de atribuir uma opinião sobre esses entendimentos. As questões aparecem na ordem presentes no formulário.

- **"Loto" (jogo justo) – Demanda: Aleatoriedade – Foco: independência de eventos**

1- Analise as cartelas dos jogadores Pedro, Felipe e Ana que estão participando de um jogo de "Loto".

PEDRO

16	**18**	**20**
24	**26**	**28**

FELIPE

44	**12**	**27**
32	**6**	**53**

ANA

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**

Este jogo é <u>justo</u> para Pedro, Felipe e Ana?

*****ESTUDANTE A→ É justo, porque qualquer um pode ganhar. Com estas cartelas todos têm as mesmas chances de ganhar.

*ESTUDANTES B→ Não é justo, pois Ana tem menos chances de ganhar. Os números da cartela dela estão em ordem e é muito mais difícil sair números em sequência.

Como você avalia a compreensão do ESTUDANTE A? Justifique. Como você avalia a compreensão do ESTUDANTE B? Justifique.

Resposta esperada (correta): O Estudante A está correto em sua avaliação, pois as probabilidades são iguais de vitória para os três jogadores, uma vez que qualquer número tem igual chance de ser sorteado. O Estudante B está equivocado, pois, independente dos números estarem ordenados, ou não, as chances são iguais para qualquer número de qualquer cartela.

- **”Bingo” (jogo injusto) – Demanda: Aleatoriedade – Foco: independência de eventos com associação a aleatorizadores desonestos**

2- Neste jogo de ”Bingo” foram colocadas 30 bolinhas numeradas de 1 a 30 dentro do globo. As bolinhas que tinham o número 2 em sua composição eram mais “pesadas” que as outras (por exemplo 12, 20, 23). No jogo, as bolinhas com maior “peso” saíam com maior frequência que as outras.

Analise as cartelas de Paula e André.

PAULA

15	**9**	**27**
12	**26**	**2**

ANDRÉ

25	**26**	**27**
28	**29**	**30**

Este jogo é justo para Paula e André?

ESTUDANTE A→ Sim. Porque tem 30 bolinhas no globo e nas cartelas todos os números só vão até 30. Qualquer um tem chances de ganhar.

ESTUDANTES B→ Não. André tem mais chance de ganhar porque ele tem mais números com 2, embora os números dele estejam em sequência.

Como você avalia a compreensão do ESTUDANTE A? Justifique. Como você avalia a compreensão do ESTUDANTE B? Justifique.

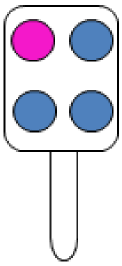
Resposta esperada (correta): O Estudante A está equivocado pois considerando os números das cartelas há maior probabilidade de André ganhar do que Paula. O Estudante B está correto em avaliar que André tem mais chances de vitória, pois tem 5 números formados pelo algarismo 2, enquanto Paula tem somente 4 números formados com o algarismo 2. O fato dos números de André serem consecutivos, não tem qualquer influência na equiprobabilidade dos resultados.

- **”Bolinhas na colher” (jogo injusto) – Demanda: Espaço amostral – Foco: eventos não-equiprováveis**

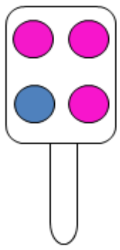
3- Uma colher de madeira com 4 furos, serve para apanhar bolinhas de uma caixa. Na caixa há 120 bolinhas rosas e 120 azuis. Para jogar, a pessoa fecha os olhos e coloca a colher dentro da caixa para pegar quatro bolinhas.

Miguel, Tiago e Amanda estão jogando.

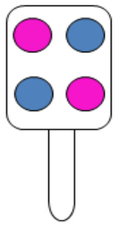
MIGUEL ganha se sair 3 bolinhas azuis e 1 rosa em qualquer organização. Ex.:



TIAGO ganha se sair 3 bolinhas rosas e 1 azul em qualquer organização. Ex.:



AMANDA ganha se sair 2 bolinhas rosas e 2 azuis em qualquer organização. Ex.:



Este jogo é <u>justo</u> para Miguel, Tiago e Amanda?

ESTUDANTE A→ Sim. Porque todos têm que tirar duas cores, logo as chances são iguais.

ESTUDANTES B→ Não. Porque Amanda tem mais chances de ganhar, porque tem mais jeitos de organizar duas bolinhas de cada cor na colher.

Como você avalia a compreensão do ESTUDANTE A? Justifique. Como você avalia a compreensão do ESTUDANTE B? Justifique.

Resposta esperada (correta): O Estudante A está equivocado, pois as chances de vitória não são iguais. O Estudante B está correto em sua avaliação, pois há 6 maneiras de compor 2 bolinhas azuis e 2 bolinhas rosas na colher (jogada de Amanda), enquanto há somente 4 possibilidades de organização das ”Bolinhas na colher” tanto para Miguel quanto para Tiago.

- **”Jogo das Moedas” (jogo justo) – Demanda: Espaço amostral– Foco: eventos equiprováveis**

4- Cristina e Rute estavam jogando um jogo de lançamento de duas moedas (uma de 50 centavos e outra de 1 real/euro). Cristina ganha ponto se saírem faces iguais nas duas moedas e Rute ganha ponto se saírem faces diferentes.

O jogo é <u>justo</u> para Cristina e Rute?

ESTUDANTE A→ Sim. Porque Cristina e Rute têm as mesmas chances de ganharem. Tá equilibrado.

ESTUDANTES B→ Não. Cristina tem mais chances de ganhar, porque pode sair cara e cara ou coroa e coroa e Rute só tem um jeito: cara e coroa.

Como você avalia a compreensão do ESTUDANTE A? Justifique. Como você avalia a compreensão do ESTUDANTE B? Justifique.

Resposta esperada (correta): O Estudante A está correto, pois há duas possibilidades para Cristina (cara-cara e coroa-cora) e Rute também (cara-coroa e coroa-cara). O Estudante B está equivocado, pois as possibilidades cara-coroa e coroa-cara são distintas, logo as chances para as duas jogadoras são iguais.

- **JOGO DOS ”Dados 1” (jogo justo) – Demanda: Comparação de probabilidades – Foco: raciocínio proporcional**

5- Num jogo com dados, Marcos usa um dado com seis faces numeradas (1, 2, 3, 4, 5, 6) e Paulo usa um dado com oito faces assim numeradas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Eles têm que tirar número PAR em seus dados para ganharem ponto no jogo.

MARCOS

PAULO

O jogo é justo para Marcos e Paulo?

ESTUDANTE A→ Sim. Porque os dois têm que tirar par. E cada um tem as mesmas chances de tirar par em seus dados.

ESTUDANTES B→ Não. Paulo tem mais chances de ganhar porque tem mais números pares em seu dado.

Como você avalia a compreensão do ESTUDANTE A? Justifique. Como você avalia a compreensão do ESTUDANTE B? Justifique.

Resposta esperada (correta): O Estudante A está correto, pois há 50% de chances de cada jogador ganhar (tirar par), embora os dados sejam diferentes. O Estudante B está equivocado, pois, proporcionalmente as chances são as mesmas (3 em 6 e 4 em 8).

- **JOGO DOS ”Dados 2”(jogo injusto) – Demanda: Comparação de probabilidades – Foco: raciocínio proporcional**

6- Num jogo de dados Priscila está jogando com o tetraedro roxo (quatro faces triangulares numeradas de 1 a 4) e Daniele joga com um hexaedro branco (dado comum com 6 faces numeradas de 1 a 6). Ganha ponto quem tirar número menor que 4 na face oculta.

Priscila Daniele

O jogo é justo para Priscila e Daniele?

ESTUDANTE A→ "Sim, porque nos dois dados, há três números que podem sair: 1, 2 e 3. É justo."

ESTUDANTE B→ "Não, porque o dado de Priscila tem menos faces e, portanto, mais chances de cair número menor que 4 do que no de Daniele que tem muitas faces."

Como você avalia a compreensão do ESTUDANTE A? Justifique. Como você avalia a compreensão do ESTUDANTE B? Justifique.

Resposta esperada (correta): O Estudante A está equivocado, pois embora haja três possíveis resultados em cada dado, no tetraedro há 3 possibilidades em 4 (mais da metade das chances ou 75%) e no hexaedro há 3 possibilidades em 6 (metade das chances ou 50%). Logo, as probabilidades de vitória são diferentes para os jogadores. O Estudante B está correto, pois as chances de vitória são diferentes.

Importante salientar que é possível que os jogos utilizados nos diversos estudos que contemplam a presente pesquisa, possam servir de apoio para desenvolver trabalhos de natureza interventiva que ampliem o pensamento probabilístico, bem como aporte para novas pesquisas que tratem de conceitos e/ou elementos da Probabilidade.

Os estudos aqui descritos, se encontram entrelaçados e serviram de base para atingir os objetivos específicos da pesquisa, cujos resultados são apresentados e discutidos a seguir.

7. ANÁLISES

"O princípio mais fundamental de todos os jogos de azar é simplesmente condições iguais. "
Cardano

Os vários estudos, de natureza qualitativa, seguem uma análise descritiva e interpretativa (Wolcott, 2009) das respostas dos participantes obtidas nas entrevistas e questionário, com foco nas suas compreensões, mas também incluindo uma descrição dos dados quantitativos acerca do desempenho dos diversos grupos estudados, organizados em tabelas de frequência, como pode ser visto nas seções a seguir. Para cumprir as questões de ética, nestes estudos é garantido o anonimato dos participantes, que se voluntariaram com base no consentimento informado.

7.1. ANÁLISES DO ESTUDO 1: COMPREENSÕES DE CRIANÇAS E ADULTOS (EM INÍCIO DE ESCOLARIZAÇÃO) SOBRE JUSTIÇA EM JOGOS EM CONSONÂNCIA COM DEMANDAS COGNITIVAS DA PROBABILIDADE

Para fins de análise do Estudo 1, os participantes adultos foram identificados nas análises da pesquisa como A1, A2, A3...A15 e as crianças como C1, C2, C3...C15. As análises levaram em consideração, mais fortemente, as compreensões que envolvem demandas cognitivas da probabilidade propostas por Bryant e Nunes (2012) e os construtos do pensamento probabilístico propostos por Jones (2016) e Jones *et al* (1997) entre outros estudos.

7.1.1. Aleatoriedade e Justiça em jogos

Os jogos idealizados para explorar a demanda cognitiva que diz respeito à aleatoriedade, focaram em sequências aleatórias para avaliar compreensões acerca da independência de eventos, especialmente no Jogo da "Loto". No "Bingo", além da observância de sequências aleatórias, foram adicionados aleatorizadores 'desonestos' que influenciaram a (in)justiça presente do jogo.

7.1.1.1. Jogo Justo (”Loto”)

Na Tabela 1 são mostrados os resultados das crianças e também dos adultos quando indagados sobre o jogo da ”Loto”: se justo ou injusto. Neste contexto, considerou-se um jogo cujas cartelas dos jogadores possuíam seis números: a de Pedro com 16, 18, 20, 24, 26 e 28; a de Felipe: 6, 12, 27, 32, 44 e 53; e a de Ana: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Independente da sequência, qualquer cartela tem igual probabilidade de ser a vencedora, portanto, esse é um jogo justo. As respostas foram classificadas em *corretas* (quando apresentavam justificativas coerentes), *parcialmente corretas* (quando as justificativas possuíam aportes coerentes do ponto de vista formal, mas não em sua totalidade) ou *incorretas* (quando havia equívoco na avaliação de jogo justo e ou as justificativas apresentadas eram incoerentes do ponto de vista conceitual).

Tabela 1: Resultados da avaliação do jogo de ”Loto” (justo), por crianças e adultos

Participantes	Respostas Corretas	Parcialmente corretas	Respostas Incorretas
Crianças	3	3	9
Adultos*	1	2	11
Observação: *Um adulto não respondeu			

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Para avaliar a justiça, ou não, no Jogo 1 (“Loto”), os participantes deveriam analisá-lo, observando o contexto, inclusive as cartelas dos jogadores.-Poucos participantes (três crianças e um adulto) foram capazes de julgar o jogo como justo e apresentar uma justificativa correta para esse julgamento. Na verdade, a maioria dos participantes julgou que o jogo era justo (57% dos adultos e 67% das crianças), no entanto, apresentaram justificativas incorretas ou parcialmente corretas nos seus julgamentos. Observou-se que as justificativas apresentadas por ambos os grupos, nem sempre remetem à compreensão da equiprobabilidade presente nas sequências aleatórias.

Os participantes que julgaram corretamente o jogo como justo e que apresentaram justificativas coerentes, informaram que:

- C3: “*Pode ser, porque qualquer um pode ganhar. Qualquer um tem a mesma chance de ganhar. Pode ser na sorte*”.

- C5: “*Sim. Porque é uma questão de sorte, né? Acho que todos têm a mesma chance de ganhar porque tem todos esses números aqui no saco, né?”*

- A2: *"É justo. Acho que qualquer um pode ganhar. O que eu pegar, se não servir para o Felipe pode servir para o Pedro. Tem que arriscar... um tem o outro não tem. Tirando a pedrinha qualquer um desses pode ganhar*".

Estes participantes não foram influenciados pelas sequências nas cartelas, como os que consideraram o jogo injusto. Eles julgaram que, todos teriam as mesmas chances[16], ou seja, que qualquer um dos três jogadores poderia vencer, pois tinham iguais condições.

Algumas respostas foram consideradas parcialmente corretas, pois embora apontassem para alguma coerência, como por exemplo, algo que remetesse a regras, havia equívoco no julgamento final, como no caso de C8 que afirmou: "*Acho justo, porque os três estão com uma cartela. Felipe tem mais chances de ganhar que os outros porque tem os números' mais altos'. Ana tem menos chance porque os números dela são muito baixos e muito dificilmente ela vai ganhar, não vai vir os números dela, porque eles são iniciais"*. C8, corretamente, informou que era justo porque os três possuíam uma cartela, ou seja, ninguém tinha mais cartelas que o outro, e esta conclusão diz respeito às regras do jogo. Apesar de afirmar ser justa a situação, a criança incorretamente julgou que há mais chance de saírem números mais altos.

Boa parte dos participantes de ambos os grupos (adultos e crianças) tomaram como elemento central da avaliação da justiça no jogo a observância das sequências aleatórias, que, para muitos, não foi considerada equiprovável. Como comentado inicialmente, diversas pessoas têm dificuldades em avaliar uma sequência aleatória, em função da falta de compreensão acerca da independência de eventos (BRYANT e NUNES, 2012; BENNETT, 2003).

A incompreensão acerca da independência de eventos também foi observada no estudo de Silva (2016), no qual foi questionado a 36 crianças sobre uma situação que envolvia o lançamento de um dado, cujo resultado deu 5 sucessivas vezes. Ao serem questionadas sobre o resultado do próximo lançamento, mais de 38% das crianças julgaram que sairia o mesmo número e pouco mais de 44% acreditou que iria sair um outro número diferente do 5. Estas crianças cometeram erro de recência positiva, por acreditarem que o resultado que estava ocorrendo ia se repetir ou erro de recência negativa, quando julgaram que iria acontecer exatamente o contrário: um resultado diferente de 5. Esse é um viés da heurística da

[16] Neste texto, o termo chance terá o mesmo sentido de probabilidade, por ser uma expressão mais cotidiana de crianças e adultos.

representatividade que consideram que os poucos ensaios realizados representam os resultados probabilísticos do jogo

A falta de compreensão de que cada resultado de um experimento aleatório é independente do anterior ou do posterior, fazem não apenas as crianças, mas também adultos julgarem equivocadamente uma sequência aleatória, imaginando, por exemplo, que Felipe (com alternância de números: 6, 12, 27, 32, 44, 53) teria mais chances que Ana (com a sequência: 1, 2, 3, 4, 5, 6), por acreditarem que aleatório seria necessariamente desordenado, misturado.

Na perspectiva apresentada neste texto, quando se fala em independência de eventos, considera-se, que a cada novo ensaio (cada peça da ”Loto” ou bolinha do ”Bingo” ou face de um dado ou bolas da caixa) se mantém iguais as chances de serem sorteadas e não há influência externa que conduza a um ou outro resultado. Cada ensaio é independente do anterior ou posterior, por isso, formam-se sequências aleatórias. Assim, a independência de eventos em sequências aleatórias se relaciona ao fato de que se, por exemplo, ao lançar uma moeda três vezes e cair três caras, no próximo lançamento, a probabilidade de sair cara (ou coroa) permanece a mesma, independente de resultados anteriores (BRYANT E NUNES, 2012).

Os alunos (adultos e crianças) que julgaram o jogo injusto, em sua totalidade, acreditavam que as chances seriam diferentes, o que mostra, de alguma forma, uma importante compreensão de jogo justo (considerar que todos tenham iguais chances de ganharem). Seis adultos e cinco crianças informaram que o jogo era injusto e apontaram justificativas em relação às chances diferentes dos jogadores, considerando basicamente duas razões: os números sequenciados teriam mais ou menos chances de serem sorteados e os valores absolutos dos números (maiores ou menores teriam mais ou menos chances de ocorrência). A seguir, apresentamos algumas justificativas dos estudantes nessas direções.

- C1: *Não. O de Ana está ‘seguindo’. É injusto para ela porque os números dela é mais menor e o dos outros é mais maior. Felipe tem mais chances de ganhar porque tem os números maiores. É o mais fácil de ganhar porque o pequeno é mais difícil de sair.*

- A1: *Acho que não. Porque aqui tá em ‘frequência’*[17] *e aqui não está em ‘frequência’. Se fosse em frequência ia estar 16, 17, 18, 19, 20, 21. Os números aqui é maior, os daqui é mais baixo. Acho que não é justo não, porque jogaram mais pedra pequena pra Ana. Ela pode até ganhar. Se for numeração mais alta quem ganha aqui é Felipe. Todo*

[17] A expressão aparenta significar ‘sequência’.

> *jogo que acho que não sai número seguido frequente... não sai. Eles jogam no diferenciado. É muito raro sair assim por exemplo, 44, 45 e 46. Quando cai assim, só cai 2 números seguidos.*

Bryant e Nunes (2012) afirmam que a expectativa de irregularidade em uma sequência aleatória leva muitos adultos a se confundirem e considerarem uma determinada sequência sem um padrão específico como mais provável que outra sequência particular consecutiva, por exemplo. E nessa perspectiva, as crianças parecem se comportar da mesma forma que os adultos. Estes pesquisadores pontuaram a 'heurística da representatividade' em que as pessoas tendem a ver sequências inconsistentes e desordenadas como característica da aleatoriedade. No presente estudo também foram observados tais fatos.

Em conformidade com os níveis do pensamento probabilístico de Jones (2006) que trata do construto 'independência', o Nível 1, denominado Subjetivo, está relacionado às crianças que apresentaram predisposição para julgar os eventos consecutivos como sempre relacionados, e o Nível 2, considerado Transitório, mostra algum reconhecimento sobre eventos consecutivos. Os estudantes envolvidos no Estudo 1 apresentam compreensões típicas dos Níveis 1 e 2, verificado em justificativas como C2 que afirmou que '*os primeiros números são mais difíceis de pegar'*. Neste argumento repousa uma compreensão de que os eventos estão relacionados, ou seja, os menores, por terem valores baixos, saem menos que os de valor mais alto. Semelhante pensamento teve C15 que argumentou: '*Ana é mais difícil de ganhar, pois são seis números em fileira'* e A6 que informou*: 'Felipe tem mais chance, ele tem os números mais altos, quando se joga assim só cai mais na alta'.* Estes estudantes parecem não perceber a imparcialidade das leis do acaso (BENNETT, 2003) ao estabelecerem alguma relação de dependência ou de alguma forma de ligação entre os ensaios.

7.1.1.2. Jogo Injusto ("Bingo")

Na Tabela 2 sintetiza-se os resultados atribuídos pelos participantes à pergunta sobre a justiça, ou não, do jogo de "Bingo". Neste jogo, a resposta coerente seria avaliá-lo como injusto, pois há aleatorizadores (bolinhas) com massa maior, comprometendo a equiprobabilidade, e, por conseguinte, tornando diferentes as chances de vencer dos jogadores em função da composição de suas cartelas.

Tabela 2: Resultados da avaliação do jogo de "Bingo" (injusto), por crianças e adultos

Participantes	Respostas Corretas	Respostas Incorretas
Crianças	13	2
Adultos	9	6

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

No "Bingo" havia 30 bolinhas no globo (numeradas de 1 a 30), no entanto, as bolinhas que tinham o número 2 em sua composição, possuíam massa maior, logo, maior probabilidade de sair quando o globo fosse girado. A evidência da 'injustiça' das bolinhas, parece ter sido bem observada pelos estudantes que, desde o jogo da "Loto", apontavam a condição '*chances iguais x chances diferentes'* como condição principal para um jogo justo, ou não. Na situação apresentada, as cartelas dos jogadores Paula (15, 30, 16, 8, 14, 27) e André (12, 2, 20, 24, 26 e 14) possuíam quantidade diferentes de números formados pelo algarismo 2 e esta condição pareceu óbvia para boa parte dos estudantes pesquisados.

Por conseguinte, o jogo injusto ("Bingo") apresentou um índice de respostas corretas mais acentuado que no jogo justo ("Loto"), tanto por adultos, como por crianças. O foco da análise dos participantes foi centrado na injustiça dos aleatorizadores ''desonestos'', associado às cartelas dos jogadores. Já no jogo justo ("Loto") que envolveu unicamente a análise de sequências aleatórias presentes nas cartelas, era necessário a compreensão acerca de independência de eventos que pode ser comprovadamente mais complexa para as pessoas, de uma forma geral (SILVA, 2016; BRYANT E NUNES, 2012; JONES,2006). Possivelmente, se no jogo do "Bingo" não houvesse a influência das bolinhas 'mais pesadas' e necessitasse apenas a análise das cartelas, o resultado poderia ser semelhante ao jogo da "Loto".

Não houve acertos parciais nesse jogo, em consequência, as 13 crianças que acertaram o questionamento sobre a justiça, ou não, no jogo, apresentaram justificativas coerentes, como mostrado nas falas a seguir:

- C1: *Não. Esse aqui (André) tá mais fácil de ganhar. Porque ele tem 02, 12, 20, 24 e 26 e ela não tem com número 2. Tem só o 27. Não é justo para Paula porque ela não tá com muita chance de ganhar.*
- C15: *Não, porque ele tem mais números com o número de 2. Vai sair mais o número dele. André tem mais vantagem.*

Os 9 adultos que apresentaram justificativas coerentes, expuseram argumentos como:

- "*Acho que não, porque algo tem de errado no globo. Porque a mais pesada cai mais, as pesadas vai expulsar a 'maneira' (leve). Tá mais provável pra André ganhar porque as mais pesadas tá com número 2 e aqui tem mais 2 e aqui só tem um 2: o 27. Quem vai se dar bem aqui é André."* (A1)

- *"Não, porque André vai levar vantagem. A bola do número 2 toda vez vai cair primeiro, a de André. A bola mais pesada joga a mais leve pra cima. André tem 5 e Paula só tem um. Ela não tem chance de ganhar."* (A12)

Dos adultos que apresentaram argumentos incoerentes para a injustiça no jogo, destaca-se A8: "*Não. Porque as pedras saem mais número alto, não é? Aqui tem mais vantagem porque os números é maior, é mais, né?"* e A9: "*É justo para Paula, porque tem os números mais altos. Não é justo pra André"*, Associando a percepção de A8 às estratégias elencadas por Watson e Moritz (2003), conclui-se que alunos com esta compreensão usam uma *estratégia idiossincrática*, pois apresentam crenças intuitivas sobre os resultados de números específicos (sorte), como 'os números maiores'. Para A8, mesmo tendo a informação de que algumas bolinhas (com 2) sairiam mais do que outras, em função do 'peso', ele continuou opinando que os números maiores teriam maior probabilidade de sair.

Os participantes que consideraram incorretamente o jogo justo usaram, em grande parte, argumentos para justificar suas escolhas, falas que indicavam o fato de haver alguma 'possibilidade'[18] de qualquer um dos jogadores ganharem, mesmo a vantagem e chances sendo evidentes para um determinado jogador (A10: *Mesmo ele tendo mais chance é um jogo justo. Ela também pode ganhar, tem possibilidade)* ou porque as cartelas tinham os números que estavam no globo e esta condição (regra) era para os dois jogadores (C4: *É questão de sorte e tem o número até 30 e aqui não tem mais que 30. Aqui tem 15, 16, 8, 14 e 27 e 30, então ele não vai pegar outras bolas que não estão. Eu acho que é justo por causa disso. E ela também tem 12, 2 que não passam de 30*).

Analisando a compreensão de aleatoriedade e justiça nos dois jogos, observa-se que em alguns casos, adultos e crianças apresentaram, embora com pouca frequência, argumentos não matemáticos para justificar escolhas sobre a avaliação dos jogos, como por exemplo: "*Cada um*

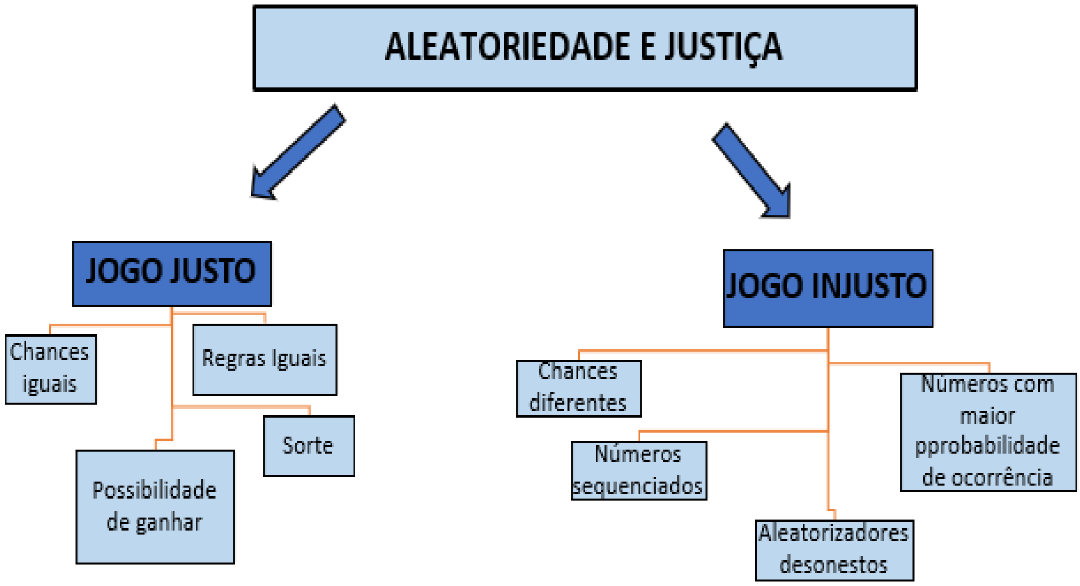
[18] Para os participantes o termo possibilidade, algumas vezes, estava associado à probabilidade ou à chance de vencer. No entanto, em outros casos, significava a observância apenas de casos favoráveis (elementos que compõem as possibilidades do evento), sem a relação direta com o conjunto referente aos casos possíveis, ou seja, sem a relação proporcional. Assim, a possibilidade de ganhar tornava o jogo justo.

faz o que gosta de fazer. É justo pra quem gosta. Pra quem não gosta não é.” (A13); “*Acho que Ana tem mais chance porque ela é mais inteligente, mas não sei o porquê”* (A9); *“É um jogo interativo, para educação. É para se divertir, é justo. Acha que todos têm a mesma chance”* (C13).

Como citado anteriormente, os estudos de Pratt (2000) apontaram que as crianças julgaram que a aleatoriedade estava relacionada à: i) impossibilidade de ser controlado; ii) imprevisibilidade; iii) irregularidade e; iv) justiça. Na presente pesquisa observou-se que a irregularidade também se relacionou à aleatoriedade, ou seja, alguns participantes (tanto com crianças, como com adultos) consideraram sequências irregulares como sendo aleatórias (Jogo 1 – ”Loto”). A *justiça*, é vista em maior escala pelas crianças como uma forma de garantir a equidade, ou seja, de garantir que todos tenham as mesmas chances de ganharem o jogo. A *impossibilidade de ser controlado* e a *imprevisibilidade* têm raízes na incerteza que é a essência da aleatoriedade. Tais elementos foram observados, no presente estudo em justificativas que diziam: ‘pode sair qualquer número’, ‘não dá pra saber quem vai ganhar’, etc. Estes dados se aproximam de resultados apontados pelos estudos de Pratt (2000).

O esquema a seguir, mostra a síntese da compreensão de adultos e crianças sobre jogos justos e injustos considerando a aleatoriedade, nos dois jogos aqui analisados.

Esquema 1: Compreensão de jogos justos e injustos, por crianças e adultos (aleatoriedade e justiça em jogos)



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

De uma forma geral, a maioria dos participantes associou jogo justo à equiprobabilidade, ou seja, às chances iguais dos jogadores ganharem o jogo. No entanto, percebe-se que esta condição não foi unânime, pois alguns participantes consideraram que se o jogador tivesse ‘alguma possibilidade’ de ganhar, mesmo que as chances fossem pequenas, o jogo seria justo. Alguns estudantes resgataram também as regras, mesmo que não tenham usado especificamente esta nomenclatura. Eles elencavam alguma condição inerente ao jogo que deveria ser seguida ou acatada por todos os jogadores. A sorte foi evidenciada por alguns sujeitos da pesquisa, e esta condição parece relacionar-se com a incerteza dos resultados, ou seja, o jogo será justo se não se souber, de partida, quem será o vencedor – pois a sorte deve ser também levada em consideração.

Em contrapartida, os participantes julgaram jogo injusto as situações em que as chances de vitória dos jogadores eram desiguais e essa desigualdade poderia advir de cartelas que possuíam números que na ótica dos estudantes teriam maior ou menor probabilidade de ocorrência (números consecutivos ou que aparentavam uma certa ordenação sequencial ou números cujos valores absolutos eram maiores ou menores que de outra cartela).

Quando indagados sobre o que fazer para tornar o jogo que foi inicialmente avaliado como injusto, em um jogo justo, os participantes consideraram as compreensões que eles tinham sobre jogo justo e buscavam a equiprobabilidade na situação. Para os que julgavam que os números em sequência tinham menos chances de sair, eles propunham mudar a cartela de Ana por números “mais aleatórios”, mais misturados, por exemplo. Esta ideia se aproxima dos resultados apresentados por Paparistodemou *et al* (2008), em que as crianças consideraram que uma possibilidade de jogo justo seria se as bolinhas estivessem ‘misturadas’.

Alguns participantes sugeriram distribuir os números menores (de Ana) para as outras cartelas, pois assim teria equilíbrio, ou, ainda, trocar a cartela de Ana. Toda intencionalidade, nestes casos era tornar as chances iguais para os participantes. No Jogo 2 (”Bingo”), diversas sugestões foram apresentadas, como: cartelas semelhantes para os jogadores, deixar as bolas com ‘pesos’ iguais ou usar um juiz para retirar as bolas com maior massa. No entanto, o Adulto A6 preferiu manter injusto e informou “*Deixa assim mesmo. Injusto. Quem ganhar, ganhou. Se botar por igual, vai ficar empate, então deixa assim mesmo”.* A fala de A6 leva a entender que se as condições forem justas para os jogadores, haverá empate e para haver um vencedor é necessário manter o jogo injusto. Esta ideia de jogo permanentemente injusto para gerar um único vencedor não foi observada em nenhuma outra pesquisa explorada neste estudo.

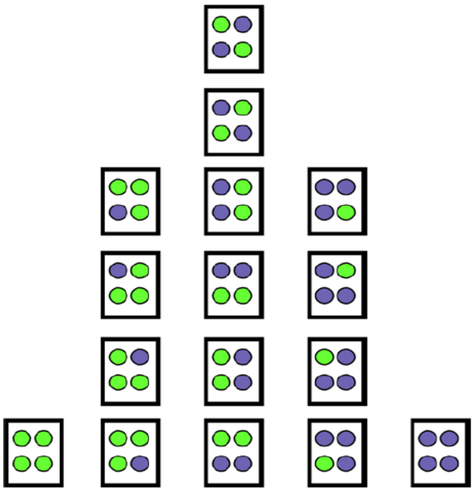
7.1.2. Espaço amostral e Justiça em Jogos

Dois jogos foram idealizados com a intenção de explorar o espaço amostral, com foco em eventos equiprováveis e não equiprováveis. Foi considerado um jogo justo (”Jogo das Moedas”) e um jogo injusto (”Bolinhas na colher”), esperando-se que as justificativas apresentadas trouxessem à tona, ao menos parcialmente, os elementos que compõem os eventos em discussão e que fazem parte do espaço amostral dos jogos explorados. A seguir são apresentadas as análises, considerando a ordem em que os jogos foram aplicados aos estudantes.

7.1.2.1. Jogo injusto (”Bolinhas na colher”)

Para avaliar o jogo injusto tomando como pano de fundo a análise do espaço amostral, foi utilizada uma atividade inspirada em Abrahamson (2006, 2009), *apud* Bryant e Nunes (2012). Assim, como no presente estudo, na proposta de Abrahamson, foi utilizada uma colher com quatro furos que era mergulhada em um recipiente com bolas de duas cores distintas, em quantidade igual das duas cores. O pesquisador perguntava às crianças o que aconteceria com os resultados do experimento, ou seja, quais resultados seriam possíveis ao mergulhar a colher no recipiente com bolinhas. Ressalta-se que para o experimento há 16 possibilidades de resultados (Figura 18).

Figura 18: Resultados possíveis do problema da colher de quatro furos



Fonte: (Abrahamson) *apud* Bryant e Nunes (2012)

No presente estudo foram utilizadas 120 bolinhas na cor rosa e 120 bolinhas na cor azul. Foram consideradas três categorias de resultados para observância dos elementos que compõem cada um dos eventos a seguir: Evento 1 – sair só bolas rosas, Evento 2 – sair só bolas azuis, Evento 3 - sair bolas nas duas cores: azuis e rosas. Se saísse só bolinhas rosa, Miguel ganharia ponto; se saísse apenas azuis, Tiago ganharia; e se saísse bolinhas rosas e azuis, Amanda ficaria com a pontuação.

Como se pode observar, há um distanciamento muito grande de probabilidades de obter cada um dos eventos anteriormente citados: a probabilidade de sair tudo rosa (Evento 1-Miguel) ou tudo azul (Evento 2 - Tiago) é de pouco mais de 6%, enquanto a probabilidade de sair o Evento 3 (envolvendo as cores rosa e azul) é de quase 88%. Embora não haja evidências de que os estudantes tenham atentado para o distanciamento das probabilidades, o fato de Amanda tirar duas cores e na caixa ter também duas cores pareceu mais representativo do que somente uma cor (de Miguel e Tiago). Outra compreensão dos estudantes diz respeito às quantidades: Amanda teria mais chances porque ela contaria com 240 bolinhas, enquanto Miguel e Tiago teriam que contar com apenas 120 bolinhas cada um. A justificativa de A4 ilustra parte dessas compreensões "*Amanda tá numa posição de ganhar dos dois, né? Porque ela pode ganhar nas duas partes no azul e no rosa e eles não. Eu acho que pra Amanda ganhar é mais fácil porque se pega azul e rosa, de todo jeito ela tá ganhando*", bem como A12 que defendeu: "*Amanda leva vantagem. Porque tem 120 bolas de cada, né? Aí tem 240 bolas pra Amanda. E só tem 120 pra Miguel e 120 pra Tiago*". Embora o argumento de A12 não apresente justificativas de caráter probabilístico, os argumentos numéricos que dão sustentação à sua fala podem indicar o Nível 2 dos construtos de Jones *et al* (1997) referente à probabilidade de um evento, que prevê o evento mais ou menos provável com base em julgamentos quantitativos, mas que pode reverter para julgamentos subjetivos.

Para alguns participantes, o fato das bolas estarem misturadas era um grande indicativo de que sairia o resultado também misturado, embora não descartassem a possibilidade de sair os eventos que envolviam apenas um cor. O Estudante C3 afirmou que não era justo *"porque ela tem mais possibilidade de ganhar porque aqui tá tudo misturado, não tem só uma cor e outra não. Tá tudo misturado, tem as duas cores. Não vai sair ou tudo rosa ou tudo azul, pode ter alguma possibilidade, mas eu não acho não. Sai mais tudo misturado. É justo só pra Amanda.",* enquanto A14 disse que "*a vantagem é para Amanda. Ela ganha misturado. Misturado é mais fácil*". Essa compreensão considerando uma amostra representativa intitulada aqui como ‘misturado’ se assemelha ao entendimento pontuado por A4 que usou a quantidade de cores para justificar a representatividade presente na situação.

De uma forma geral, a maioria dos participantes do estudo avaliou corretamente o jogo como injusto, embora os alunos não tenham tratado do espaço amostral de forma consciente para justificar a injustiça. Tal avaliação coerente sobre o jogo, pode ter sido facilitada, especialmente, pela representatividade (ou não) dos eventos em relação ao espaço amostral. O distanciamento da probabilidade de ocorrência dos eventos avaliados pode ter sido observado, mas não se mostrou evidente nas falas dos participantes. Talvez, se os eventos tivessem maior proximidade probabilística de ocorrência ou indicassem uma representatividade menos evidente, como por exemplo: Evento 1: sair duas bolas rosas e duas azuis, Evento 2: sair três bolas azuis e uma rosa e Evento 3: sair uma bola azul e três rosas, eles não apresentassem resultados tão promissores para avaliar a justiça na situação. Neste contexto, talvez os alunos fossem conduzidos a pensar mais detidamente nos elementos dos eventos que compõem o espaço amostral. Considera-se, portanto, que nesse aspecto, há a necessidade de novas pesquisas, bem como pode ser objeto de discussão quando do ensino de probabilidade em sala de aula.

De qualquer forma, o fato de que um dos jogadores teria maior chance de vencer que os outros, fez com que a maioria julgasse o jogo como injusto. No entanto, assim como nos jogos com foco na aleatoriedade, houve participantes que consideraram a situação justa, mesmo com a consciência de que haveria chance diferente de vencer dos jogadores, como observado na fala de A6: “*cada um aqui tem sua chance. Não tá ruim pra nenhum dos três. Sempre quem tem mais vantagem é Amanda, mas é justo”* e C10: ‘*eu acho que quem tem mais chance de ganhar é Amanda porque tem 120 bolas azuis e 120 rosas e ela tem azul e rosa, mas eles também podem ganhar. É justo”.* Para estes alunos, a possibilidade de ganhar, torna o jogo justo, mesmo que haja diferentes chances para cada jogador vencer.

Foram observados argumentos que pareciam remeter às regras e à concordância dos jogadores em relação a estas regras, razão pela qual o jogo seria justo: *“é justo se cada um escolheu o jogo, é uma aposta”* (A1); “*na minha opinião, é justo, sim. Aqui um ganha se sair os quatro (rosas), o outro se sair os quatro (azul) e aqui pode ser duas rosas e duas azuis. Eles quiseram assim e pode acontecer de ganhar” (A2).*

Outras justificativas apresentadas por adultos não tinham relação com o jogo, nem foram utilizados argumentos matemáticos, e, sim, justificativas externas à situação do jogo, como por exemplo A15 que afirmou que '*se tá jogando é justo. Tiago tem mais vantagem porque todos os Tiagos são sabidos e espertos* "e A9 que relatou *que acho que é justo pra Tiago, porque Tiago é azul, né? Eu acho que sai mais a azul, mas eu não sei dizer porquê. Pode sair o rosa também, mas eu acho que é o azul.* Pode-se dizer que A9 e A12 encontram-se no Nível 1 dos construtos do pensamento probabilístico referentes à probabilidade de um evento, pois apresentaram argumentos não numéricos, subjetivos.

A observância das possibilidades do Evento 3 (sair bolas azuis e rosas) foi pontuado por alguns alunos adultos, de forma espontânea, para justificar suas escolhas:

- A1: *Amanda tem mais chance de ganhar porque se cair duas azuis e duas rosas ela ganha, depois pode cair três rosas e uma azul, pode cair três azuis e uma rosa.*
- A10: *Não é muito fácil pra Miguel e nem pra Tiago. Pra Amanda é mais fácil. Quando vem, tem sempre dois pares diferentes, duas cores: uma azul e três rosas, duas azul e duas rosa, três rosa e uma azul.*

Com relação aos construtos do pensamento probabilístico (JONES *et al*, 1997) referentes ao espaço amostral, alunos com compreensões semelhantes às apresentadas pelos Adultos A1 e A10 costumam se encontrar no Nível Transitório, pois elencaram alguns elementos do espaço amostral (experimento de dois estágios), embora não tenham esgotado as possibilidades. Não é possível afirmar, portanto, que esses participantes conseguiriam ou não, fazer um inventário de todas as possibilidades porque o jogo não exigiu tal ação.

Na Tabela 3 apresenta-se os resultados dos participantes (crianças e adultos) em relação à avaliação de jogo injusto ("Bolinhas na colher"), considerando o espaço amostral, com foco em eventos não-equiprováveis. Do total de crianças pesquisadas, 13 avaliaram o jogo como injusto. No grupo de adultos, 14 responderam à situação dos quais, 8 acertaram à indagação.

Tabela 3: Resultados da avaliação do jogo "Bolinhas na colher" (injusto), por crianças e adultos

Participantes	**Respostas Corretas**	**Respostas Incorretas**
Crianças	13	2
Adultos*	8	6
Observação	*Um adulto não respondeu à questão	

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

De uma forma geral, neste jogo, os participantes associaram jogo justo a: i) chances iguais (mesmo sem levantar todo o espaço amostral, percebiam qual evento com maior número de possibilidades); ii) possibilidade de ganhar dos jogadores (mesmo com chances diferentes); iii) concordância com as regras do jogo. Em contrapartida, o jogo injusto se relacionou basicamente às chances diferentes de ganhar dos jogadores, regras injustas (para os jogadores) ou a impossibilidade de um deles ganhar.

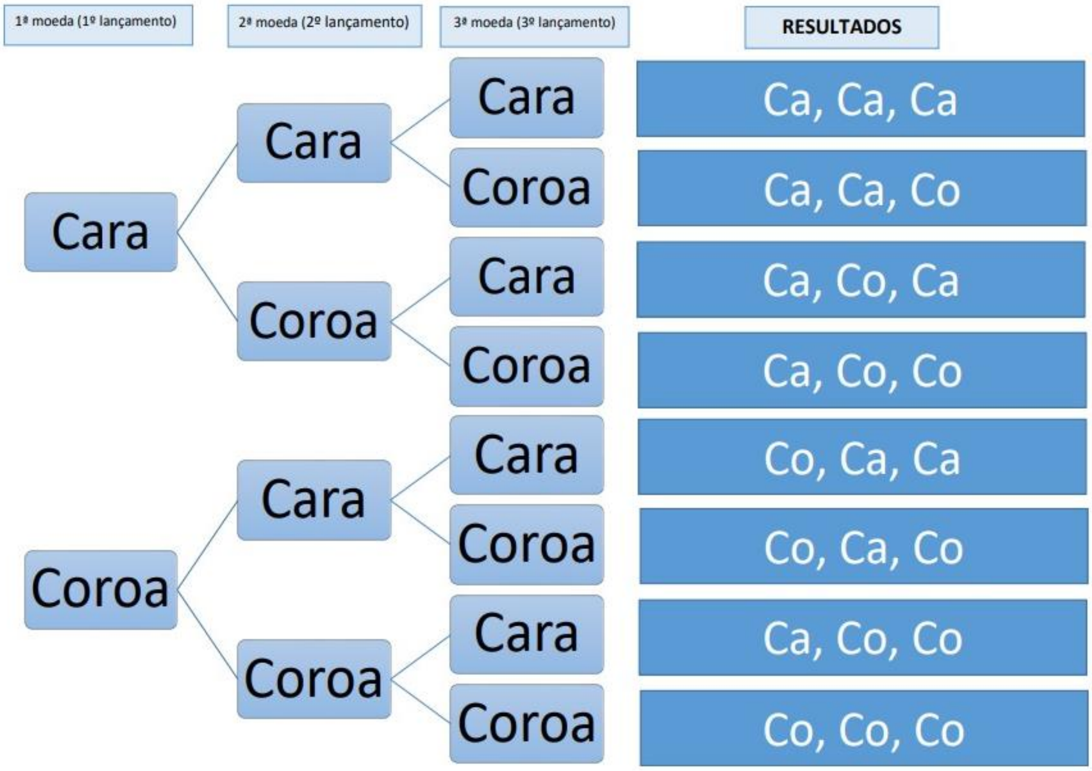
Como foi informado anteriormente, esperava-se que os alunos pensassem, de alguma forma, no espaço amostral (ou em alguns elementos dos eventos envolvidos na situação) e verificassem que há um número maior de possibilidades para sair o evento *duas cores de bolas* (azul e rosa) do que para sair um dos eventos que envolviam *quatro cores iguais* (tudo rosa ou tudo azul). Para avaliar se o jogo era justo, seria necessário observar se todos os participantes teriam chances iguais de ganhar, e isto exigiria que se observasse qual evento seria o mais ou o menos provável de acontecer. Esta observância insere as justificativas dos alunos no construto de Jones *et al* (1997) referente à probabilidade de um evento. Dessa forma, foi observado que alguns alunos se encontravam no Nível 1 (Subjetivo) dos construtos do pensamento probabilístico de Jones (1997), pois não utilizavam argumentos numéricos em suas justificativas, enquanto outros estavam no Nível 2 (Transitório), com argumentos que consideravam elementos numéricos.

7.1.2.2. Jogo justo (”Jogo das Moedas”)

O ”Jogo das Moedas” explorado neste estudo, envolveu o lançamento de três moedas distintas. As regras do jogo diziam que se saísse duas caras e uma coroa, uma das jogadoras ganharia (Cristina) e se saíssem duas coroas e uma cara a outra jogadora (Rute) marcaria ponto. Saindo faces iguais, ambas as jogadoras ganhariam igual número de pontos.

Sabe-se que o espaço amostral que envolve o lançamento de três moedas totaliza oito possibilidades, como observado na Figura 18, expressa por meio de uma árvore de possibilidades.

Figura 19: Resultado do lançamento de 3 moedas



Fonte: O autor (2021)

Assim sendo, há três possibilidades em oito para Cristina ganhar, considerando duas caras e uma coroa, bem como para Rute tirar duas coroas e uma cara. Para sair faces iguais há duas possibilidades em oito, mas com este resultado, ambas as jogadoras teriam igual número de pontuação.

Na Tabela 4 mostra-se o desempenho de crianças e adultos quando indagados se o jogo envolvendo moedas seria justo para Cristina e Rute.

Tabela 4: Resultados da avaliação do "Jogo das Moedas" (justo), por crianças e adultos

Participantes	**Respostas Corretas**	**Parcialmente corretas**	**Respostas Incorretas**
Crianças	11	1	3
Adultos*	9	2	3

Observação: *Um adulto não respondeu à questão

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Em conformidade com os dados apresentados na Tabela 4, observa-se que a maioria das crianças (73%) e também dos adultos (64%) consideraram o jogo justo, apresentando justificativas coerentes, especialmente por considerarem, mesmo sem expressarem totalmente o espaço amostral, que ambas as jogadoras teriam as mesmas chances de ganhar. O único adulto

(A10) que julgou que o jogo era injusto, apresentou a seguinte justificativa: *"Sempre cai mais cara. Cristina tem mais chance porque tem duas caras. Quando brinco em casa sai mais cara".* Outras justificativas dos adultos mostraram compreensão equivocada sobre a situação, como por exemplo, A11 que alegou: "*Cristina tem mais chances porque tem duas caras, mas é justo, sim"*, A15 que informou: "*Se tá jogando porque é justo. Rute tem mais vantagem porque ela é inteligente"* e A8 que pontuou que *"Acho que é justo, porque se jogar as duas ganham".*

As duas crianças que julgaram o jogo injusto justificaram que "*Cristina tem mais chance porque a dela é cara e esta aqui é coroa. A cara sai mais"* (C12) e "*Não, porque se sair três caras vai pras duas. Devia ir só pra uma. Rute tem mais chance porque sempre que eu jogo assim cai mais a coroa*" (C13). A falta de compreensão da equiprobabilidade presente no lançamento de moedas e observado nas respostas destas crianças, assim como nas justificativas dos adultos A10 e A11, mostram que as experiências informais não são suficientes para consolidar compreensões e aprendizagens acerca de elementos probabilísticos.

Além disso, as falas de A10, C12 e C13 consideram que uma determinada face teria maior probabilidade de sair do que outra, especialmente a partir de suas experiências com o jogo. Este equívoco pode estar associado à heurística da representatividade (BRYANT e NUNES, 2012), em que as pessoas creem que uma pequena quantidade de experimentos ou ensaios representa a probabilidade de ocorrência de um determinado evento. Considerando, portanto, o olhar de Watson e Moritz (2003), acerca da ideia equivocada de que um dado resultado (cara ou coroa, por exemplo) teria mais chances de sair mais que o outro, pode ser concebido, como *icônico*, ou seja, diz respeito à crença intuitiva de que determinados resultados possuem maior probabilidade de ocorrência de que outros (A10, C12 e C13).

Alguns participantes remeteram os resultados justos do jogo à sorte: C3 disse que não tem como trapacear, pois, o resultado é na sorte; C14 comentou que o jogo é justo porque é como se fosse na sorte, jogando e vendo o que vai sair; C15 pontuou apenas "*porque é por sorte".* O adulto A1 comentou que "*depende da sorte, em jogo, sorte é tudo";* enquanto A5 defendeu que *"as chances são iguais porque aí é pela sorte, aí não tem como dizer quem vai ganhar".*

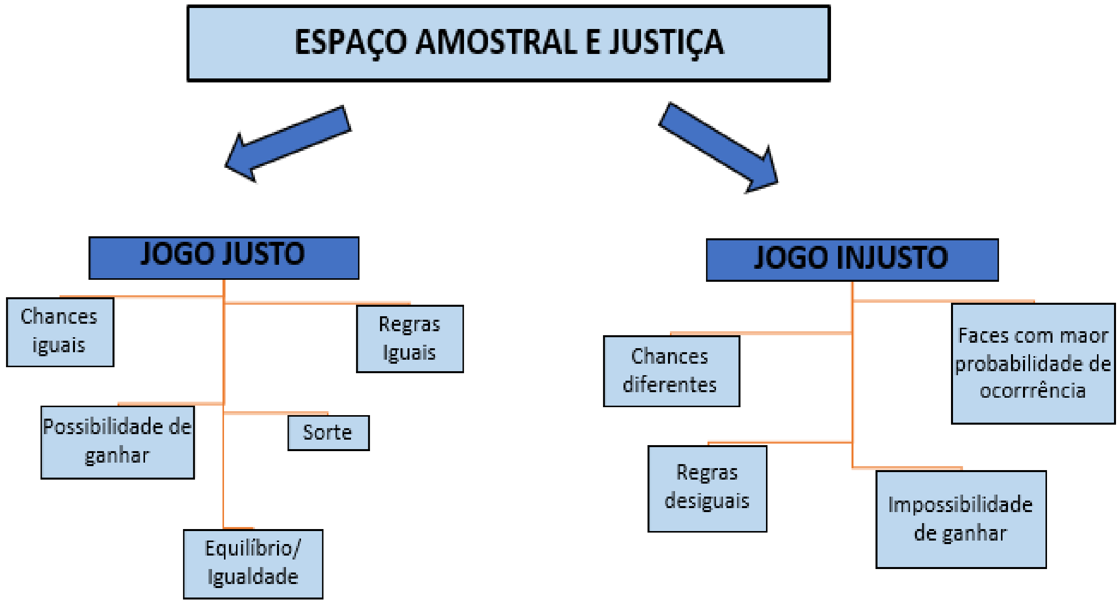
O Estudante A12 observou que há um equilíbrio nas regras do jogo, por isso ele é justo. Ele apresentou a seguinte justificativa: *"Acho que é justo, sim, porque tá tudo na igualdade. Tem duas coroas e uma cora para Rute e duas caras e uma coroa para Cristina. Tá balanceado, equilibrado.* Semelhante pensamento teve A14 que defendeu que a *"mesma coisa que uma tem,* *a outra tem. Então vai ganhar as duas. Do jeito que uma ganha, a outra ganha, dá no mesmo.... É justo pras duas".* Esta observância das regras justas para os jogadores, foi observado também em algumas justificativas em que os sujeitos da pesquisa elencavam as regras para mostrar o equilíbrio, como condição de justiça na situação. Pode-se fazer uma analogia com os estudos de Paparistodemou *et al* (2002) em que as crianças associaram jogo justo a uma organização simétrica, equilibrada.

De uma forma geral, os participantes associaram jogo justo – a partir da análise do jogo envolvendo cara ou coroa – à situação de jogo em que as chances de vitória dos jogadores fossem iguais ou, se as chances fossem diferentes, que houvesse alguma possibilidade dos jogadores ganharem, além de considerarem as regras que deveriam envolver um número igual de possibilidades dos jogadores vencerem (regras justas). Foi pontuado também a sorte para apoiar as justificativas acerca de jogo justo, como forma de relação entre os resultados dos jogos e a incerteza. Observou-se que os participantes não pensavam no conjunto de possibilidades (espaço amostral) do lançamento de três moedas para analisar e justificar suas escolhas. O olhar foi focado apenas nas possibilidades 'cara e coroa' como se a atividade estivesse se referindo ao espaço amostral no lançamento de apenas uma moeda. Esse fato se relaciona com o Nível Subjetivo ou até o Transitório dos construtos do pensamento probabilístico, pois, indiretamente eles elencaram o espaço amostral completo de um evento de um estágio (uma moeda).

Apesar do presente estudo não solicitar que os participantes listassem os elementos dos espaços amostrais dos jogos explorados, percebe-se alguns vislumbres de compreensão dos participantes e considera-se que é provável que eles se encontrem entre o Nível Subjetivo ou Transitório em que são capazes de listar um conjunto incompleto com alguns elementos do espaço amostral (de um estágio e de dois estágios), em conformidade com os construtos do pensamento probabilístico de Jones *et al* (1997).

O esquema, a seguir, mostra a síntese das ideias centrais dos participantes (adultos e crianças) acerca da justiça em jogos que envolve a compreensão ou uso do espaço amostral, considerando os dois jogos aqui discutidos.

Esquema 2: Compreensão de jogos justos e injustos por crianças e adultos (espaço amostral e justiça em jogos)



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Quando os participantes foram perguntados sobre como tornar o jogo justo, que anteriormente fora avaliado como injusto, considerando os jogos que exploravam o espaço amostral, adultos e crianças propuseram:

- No jogo das bolinhas: acrescentar mais uma cor para Amanda, excluísse Amanda da jogada ou determinar bolas coloridas para todos (mudança de regra);
- No ”Jogo das Moedas”: substituir moedas por dados ou mudar regras.

Considerando as sugestões de mudança dos jogos feitas pelos participantes, observa-se que as propostas repousam, quase sempre, no desejo de equiparar as chances de ganhar entre os jogadores. Assim, algumas ideias de alterações (por exemplo, determinar bolas coloridas para todos os jogadores) reforçam um conceito coerente muito presente neste grupo sobre jogo justo: aquele em que todos têm as mesmas probabilidades de ganhar.

7.1.3. Comparação de probabilidades e Justiça em jogos

Para explorar a compreensão dos participantes acerca de jogo justo e injusto, considerando a comparação de probabilidades, optou-se por usar jogos que explorassem espaços amostrais distintos em conformidade com os níveis do pensamento probabilístico defendido por Jones *et al* (1997) que tratam do tema.

7.1.3.1. Jogo Justo (Jogo de ”Dados 1”)

No Jogo de ”Dados 1”, envolvendo dois dados – um em forma de hexaedro (numerado de 1 a 6) e outro em forma de octaedro (numerado de 1 a 8) – ganharia ponto quem obtivesse uma face par. Marcos jogava com o hexaedro e Paulo com o octaedro. Neste jogo, embora os aleatorizadores fossem diferentes, o que possibilita espaços amostrais distintos, as probabilidades de ganhar são as mesmas para ambos os dados. Assim, o espaço amostral do hexaedro é de seis elementos, sendo três pares e o do octaedro é de oito elementos, sendo quatro pares, resultando em uma probabilidade de 50% para cada um dos dados. Desta forma, trata-se de um jogo justo, pois há chances iguais de Marcos e Paulo vencerem, embora joguem com artefatos diferentes.

Nesta situação, não necessariamente, os estudantes precisariam calcular probabilidades, mesmo porque eles nunca tiveram acesso a conteúdos de natureza probabilística. Eles poderiam utilizar raciocínio proporcional para estabelecer comparações entre as chances de ganhar em cada dado, usando, por exemplo, a ideia de metades, mais da metade ou menos da metade. No hexaedro, há metade dos números pares, então há metade das chances de sair um deles. Igual fato ocorre no octaedro que tem quatro números pares num total de oito faces, ou seja, metade das chances de sair par.

Bryant e Nunes (2012) afirmam que uma grande vantagem das relações proporcionais é que elas tornam possível comparar probabilidades de eventos diferentes, em espaços amostrais distintos No entanto, os autores relatam que o raciocínio proporcional, em geral, não apenas em relação à probabilidade, é difícil para as crianças e tal fato foi observado neste estudo, como pode ser vislumbrado na tabela a seguir (Tabela 5) na qual se mostra a síntese dos resultados apresentados por crianças e adultos acerca do Jogo de Dados I.

Tabela 5: Resultados da avaliação do Jogo de ”Dados 1” (justo), por crianças e adultos

Participantes	**Respostas Corretas**	**Parcialmente Corretas**	**Respostas Incorretas**
Crianças	0	0	15
Adultos*	0	2	12
Observação: *Um adulto não respondeu à questão			

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

As análises dos dados da Tabela 5 mostram elevado índice de erros, tanto por parte de crianças, quanto de adultos, na avaliação do jogo justo envolvendo comparação de probabilidades em espaços amostrais distintos. Não houve nenhum participante do estudo que tenha apresentado justificativa completamente coerente sobre a situação. Apenas dois adultos deram indícios de compreensão quando argumentaram que *"É justo, porque tem um dado e vai jogar. Fica difícil dizer quem tem mais vantagem porque é um dado e aí vai balançar, aí ele cai 1, cai 2, cai 3, entendeu?*" (A11) e "*É justo, sim. Todos os dois estão jogando números iguais, números pares. Pra mim, estão jogando certo porque todos dois estão jogando na confirmação dos números pares*" (A2).

A maioria dos adultos e crianças consideraram o jogo injusto, seja pela quantidade de faces diferentes entre os dados, seja pelo formato dos dados ou pelo número maior ou menor de pares nos artefatos, como observado nas falas dos estudantes a seguir.

- A1: Marcos tem mais chance. Porque aqui tá um quadrado normal e aqui tá estranho, tipo oval... Pra mim tá injusto. Marcos mais chance.
- A4: Acho que não porque o dele vai até o 8 e o dele vai até o 6. Paulo tem a possibilidade de ganhar mais, porque tem mais números.
- C15: É injusto porque Paulo tem mais números, mais números pares.
- C12: Não é justo. Este daqui tem número a mais, o de Paulo. O dado de Paulo tem mais chance de ganhar porque tem mais número par.

A fala de A1 remete a uma estratégia *multiestrutural* de observação dos aspectos físicos dos dados (antropomorfismo), como proposto por Watson e Moritz (2003). A1 julga, portanto que o formato dos dados parece influenciar o resultado do jogo.

Boa parte das justificativas apresentadas pelos participantes repousam em análises feitas, em sua maioria, sobre as quantidades absolutas de um ou outro dado, sejam em relação às faces, sejam em relação aos números pares, mas esta análise não é proporcional, como é exigência da situação. Este fato corrobora com os estudos de Antonopoulos e Zacharo (2013) que apontam que as crianças são influenciadas pela quantidade absoluta dos objetos e não pela proporção deles num conjunto, razão pela qual elas teriam dificuldade neste aspecto para avaliar jogo justo ou não. E esta influência das quantidades absolutas foi também evidenciada pelas respostas dos adultos.

Percebe-se que há uma convergência das compreensões de muitos participantes com o Nível Subjetivo do pensamento probabilístico (JONES *et al*, 1997), ao usarem justificativas numéricas e às vezes, subjetiva para argumentar sobre suas escolhas. Observa-se, ainda, que eles se equivocam ao avaliar *jogo justo* como *jogo não justo*, em razão de não conseguirem estabelecer a comparação proporcional entre os eventos que contam com espaços amostrais distintos.

7.1.3.2. Jogo Injusto (Jogo de "Dados 2")

Para o jogo injusto relacionado à comparação de probabilidades, foram usados dois tipos de dados: um em formato de tetraedro com faces numeradas de 1 a 4 e um hexaedro cujas faces indicavam os números de 1 a 6. Neste jogo, que envolvia o lançamento dos dados, ganharia quem obtivesse numeração maior que 2. O jogo é considerado injusto, pois proporcionalmente, há mais chances de Danielle ganhar (4 em 6) do que Priscila (2 em 4). Na Tabela 6 são apontados os resultados obtidos por crianças e adultos, respectivamente, quando indagados se o jogo seria justo para ambas as jogadoras (Priscila e Daniele).

Tabela 6: Resultados da avaliação do Jogo de "Dados 2" (injusto), por crianças e adultos

Participantes	Respostas Corretas	Respostas Incorretas
Crianças	0	15
Adultos	0	15

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Nesta situação, embora um número expressivo de participantes tenha julgado o jogo injusto, as justificativas apresentadas não mostram compreensão acerca do raciocínio proporcional necessário à análise coerente da questão.

No tetraedro há dois números maiores que dois e no hexaedro há quatro números maiores que dois. Se numa análise probabilística apenas o olhar sobre as quantidades absolutas fosse suficiente, 67% das crianças e 53% dos adultos teriam acertado a questão. O fato é que a probabilidade exige uma relação proporcional e a análise deveria recair sobre a proporcionalidade presente no contexto da situação que envolve dois dados distintos, com espaços amostrais diferentes. Considerando que há dois números maiores que 2 no tetraedro e esta quantidade corresponde à metade das faces deste dado, Priscila teria metade das chances de obter um número maior que dois em seu dado. Já no hexaedro há 4 números maiores que 2, e quatro é mais da metade da quantidade de faces deste dado, logo há mais da metade das chances de sair um destes números no dado de Daniele. Portanto Daniele tem mais chances de vencer, o que torna o jogo injusto.

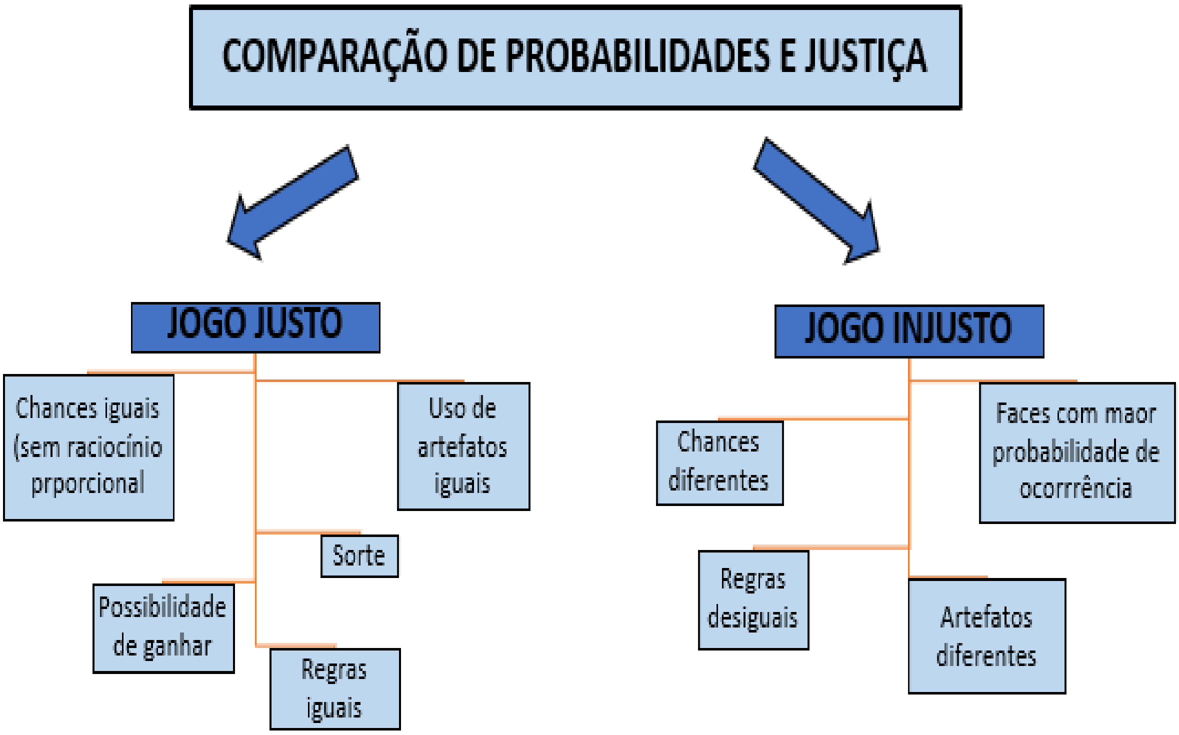
Os alunos não perceberam, nem fizeram uso de justificativas que considerassem a relação proporcional, pontuando, mais uma vez, o aspecto quantitativo absoluto e comparando as quantidades de elementos referentes ao evento ‘sair número maior que 2’que no tetraedro tem dois elementos e no hexaedro, quatro. O participante C3 afirmou que “*não é justo porque aqui tem menos números que aqui. Porque aqui tem muito mais possibilidade de número porque pode cair 6, 5... E aqui só pode ir até o 4. Aqui tem o 3, o 4, o 5 e o 6 e aqui só tem o 3 e o 4."* e o adulto A5 informou que “*é injusto porque o de Daniele tem mais pontuação que o da Priscila. Esse daqui ~~e~~ tem mais vantagem porque tem mais número maior que 2: 3, 4, 5 e 6. Este só tem até o 4 e maior que o 2 somente 3 e 4”.* Na resolução consciente da situação não é suficiente analisar os dados absolutos referentes aos eventos e compará-los porque a relação proporcional das possibilidades de cada evento (casos favoráveis) com o espaço amostral (casos possíveis) é quem vai determinar a probabilidade de ocorrência do evento.

Considerando o quadro de pensamento probabilístico de Jones *et al* (1997) em relação à comparação de probabilidades, observa-se que os estudantes, tanto crianças como adultos, parecem se encontrar basicamente no Nível 1 (Subjetivo), fato já observado no jogo de Dados I. Os participantes compararam as probabilidades de eventos em dois espaços amostrais diferentes, geralmente com base em julgamentos subjetivos ou mesmo numéricos, mas não consideraram, a condição proporcional que a situação exigia. Os estudos de Girotto *et al* (2016) e Antonopoulos e Zacharo (2103) com crianças e de Batista e Francisco (2015) com adultos, apontam para compreensões semelhantes e dificuldades no raciocínio proporcional. Na presente pesquisa, observou-se que a falta de compreensão acerca das relações proporcionais para comparar probabilidades em espaços amostrais distintos, leva crianças e adultos a julgamentos equivocados sobre situações justas e injustas.

De uma forma geral, nos jogos explorados, considerando a comparação de probabilidades, adultos e crianças relacionaram jogo justo à sorte, ao uso de mesmos artefatos, à possibilidade de ganhar e às chances iguais. Julgaram injusto quando as chances eram diferentes e as regras diferentes, como uso de artefatos (dados) diferentes, como mostra o esquema a seguir (Esquema 3).

Como reforço às compreensões descritas acima sobre jogo justo, considerando a exploração de comparação de probabilidades, os participantes propuseram que para tornar o jogo justo, seria necessário o uso dos mesmos artefatos (hexaedro, tetraedro ou octaedro), fazer alterações nos dados com maior número de faces para tentar igualar os números em cada dado ou mesmo 'apagar' números para ficar 'igual' ao outro. A ideia geral muito presente entre os participantes era que artefatos diferentes se configurava em uma condição injusta, pois possibilitava chances diferentes aos jogadores.

Esquema 3: Compreensão de jogos justos e injustos por crianças e adultos (comparação de probabilidades e justiça em jogos)



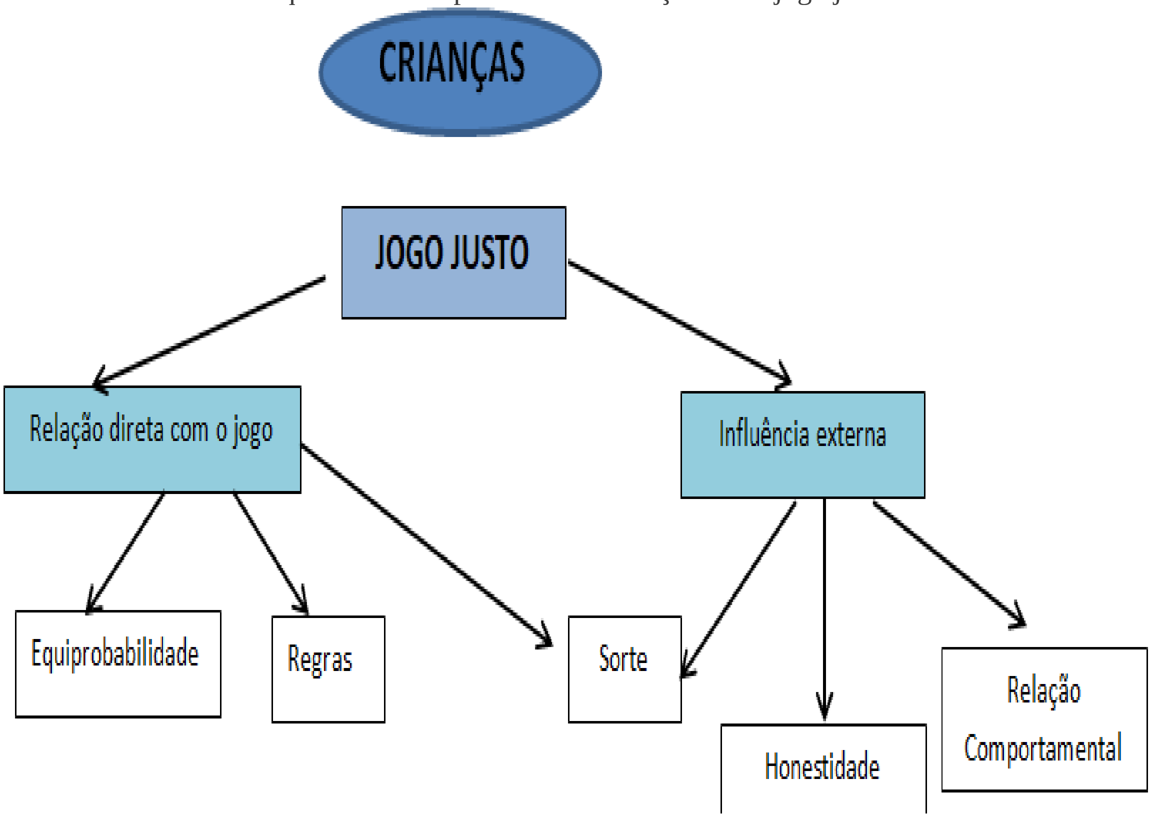
Fonte: Dados da pesquisa (2021)

A seguir, são analisadas as respostas dos estudantes à pergunta feita ao final da entrevista envolvendo os jogos justos e injustos. A pergunta tinha como objetivo buscar uma conceituação dos sujeitos acerca de jogos justos, independente da demanda cognitiva envolvida. Assim, perguntou-se: *Para você o que é um jogo justo?*

Batanero e Diaz (2007) revisitam Godino e Batanero (1999) que trazem de Vygotsky uma justificativa que parece pertinente nesta análise – a de que os significados das palavras são as principais unidades para analisar a atividade psicológica, pois elas refletem a conjunção entre o pensamento e a linguagem e incluem propriedades e conceitos. As autoras afirmam, ainda, que é particularmente relevante para o ensino da probabilidade as ideias informais e intuitivas que crianças e adolescentes (no caso de nosso estudo, adultos) atribuem ao acaso e à probabilidade antes da instrução, o que pode afetar suas aprendizagens futuras.

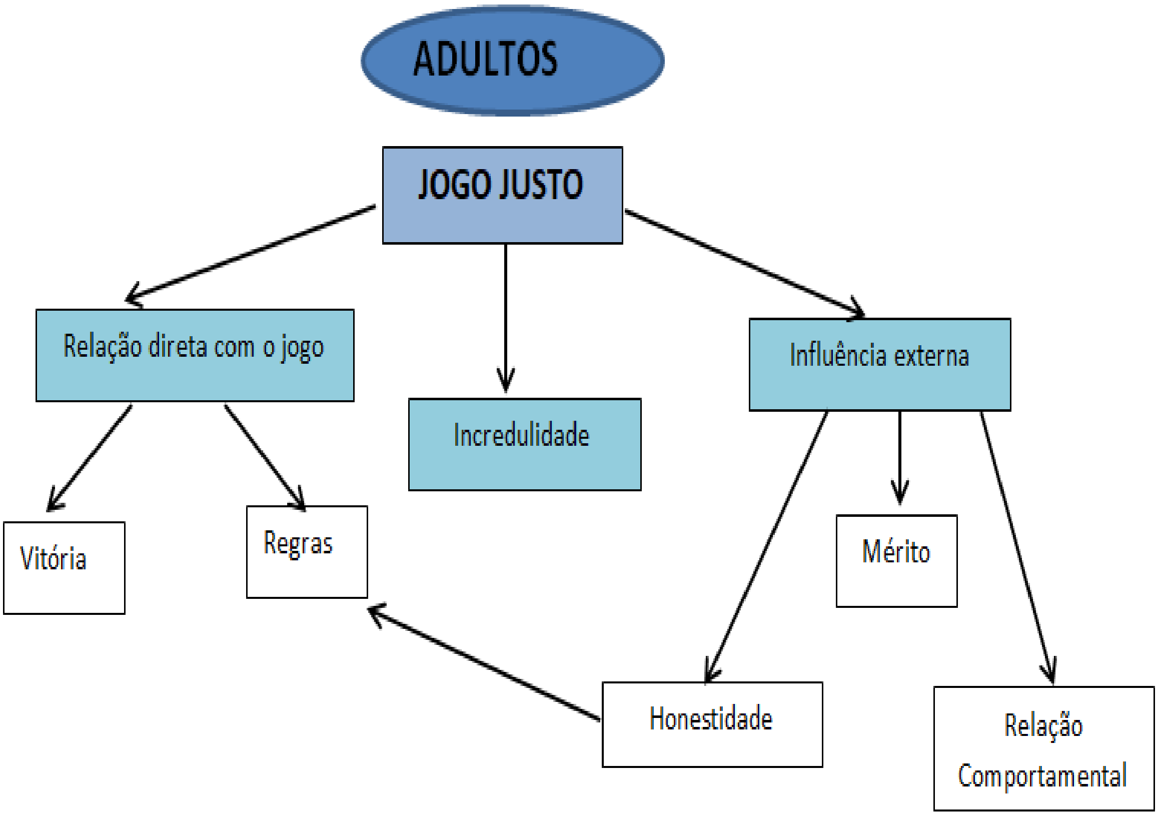
Assim, a análise das compreensões dos estudantes se assenta nas inferências realizadas a partir dos significados dos argumentos e justificativas apresentados pelos participantes, nas suas falas. Os Esquemas 4 e 5, a seguir, sintetizam as opiniões das crianças e dos adultos (Estudo 1), respectivamente, sobre o que seria um jogo justo.

Esquema 4: Compreensão de crianças sobre jogo justo



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Esquema 5: Compreensão de adultos sobre jogo justo



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Os quadros em destaque (Quadro 15 e 16) trazem a distribuição das opiniões dos participantes, em conformidade com as categorizações propostas na análise e apresentadas nos Esquemas 4 e 5.

Quadro 15: Detalhamento da compreensão de crianças sobre jogo justo

COMPREENSÕES DE CRIANÇAS SOBRE JOGO JUSTO						
Relação direta com o jogo				⟷	**Influência externa**	
Equiprobabilidade (chances iguais)	Regras	Artefatos Iguais/ Semelhantes	Igualdade/ Equilíbrio	Sorte	Honesti-dade	Relação Comportamental
C1, C2, C3, C4, C9, C11, C12, C15	C2, C9, C11, C14	C2, C5, C6, C13	C4, C5, C8, C14	C3, C4, C6	C1, C2, C3, C8, C9, C14	C6, C10

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Quadro 16: Detalhamento da compreensão de adultos sobre jogo justo

COMPREENSÕES DE ADULTOS SOBRE JOGO JUSTO					
Relação direta com o jogo		**Influência externa**			**Incredulidade**
Vitória	Regras	Mérito	Honestidade	Relação Comportamental	A1, A5, A14
A7, A15	A4, A9, A10, A11	A13, A14	A2, A3, A4, A8, A10, A11	A6, A13	

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

As respostas espontâneas acerca do que seria um jogo justo, produziram resultados bem plurais, se comparar adultos e crianças. As compreensões que se assemelharam, consideraram: regras, honestidade e relação comportamental (que trata das atitudes dos jogares frente ao jogo). Embora tenha sido bastante evidenciado nas análises relativas aos seis jogos pelos dois grupos, as ‘chances iguais’ não foram evidenciadas pelo público adulto. Em contrapartida, mais da metade das crianças relacionaram, de alguma forma, jogo justo à ideia de equiprobabilidade. Eles julgaram que o jogo seria justo se todos os participantes tivessem as mesmas chances de ganhar ou que seria injusto se uma pessoa tivesse maior probabilidade de vencer que a outra. A seguir, temos alguns argumentos apresentados por estas crianças.

“É injusto quando um tem mais possibilidade de ganhar que o outro” (C1)

“Um jogo que tem a mesma possibilidade para qualquer pessoa que tiver jogando, ganhar” (C3)

“Quando as pessoas que estão jogando têm a mesma chance de ganhar. É injusto se alguém tem mais chance que o outro” (C15)

A equiprobabilidade é um elemento relevante que caracteriza um jogo justo e esta importante relação que não apareceu nas justificativas dos adultos, foi evidenciada por várias crianças com uso de expressões, como: ‘possibilidades’ e ‘chances’. Não foi utilizada a palavra probabilidade nos argumentos apresentados pelas crianças, mas observou-se que em algumas falas, a expressão ‘possibilidade’ teria o sentido implícito de probabilidade. É possível, que a palavra probabilidade não faça parte do universo vocabular das crianças, seja por não terem tido acesso explícito ao assunto ou seja por se tratar de uma palavra pouco usual em suas comunidades, especialmente para o público infantil.

Cinco crianças argumentaram que um jogo era justo se houvesse regras que deveriam ser cumpridas, como por exemplo, na fala de C9 que afirma que "*um jogo que duas pessoas ou mais tenham os mesmos benefícios e tenham que seguir as mesmas regras. É injusto quando uma não segue uma regra e a outra segue todas as regras (...)"* e na de C2 que diz: *"um jogo que tem regras e todos saibam obedecer às regras sem querer roubar".*

Os infantes da pesquisa que usaram como argumento a 'sorte', não a usaram como único elemento para justificar o que seria um jogo justo. A sorte veio, para estas crianças como complemento de um argumento já explicitado. Por exemplo, C4 explicou que *"tem que ter quantidades iguais, as chances de ganhar iguais e também tem que ter* ***sorte****, né?"* e C3 complementou sua fala dizendo: *"(...) um jogo que todos ganhem a mesma coisa. Um jogo que todo mundo possa ganhar, seja na* ***sorte****"*, enquanto C6 concluiu sua fala afirmando que "*tem que ter* ***sorte*** *para ganhar*". A relação com a sorte parece de natureza dúbia: ora pode se relacionar à aleatoriedade como característica de incerteza, ou seja, a imprevisibilidade dos resultados, e assim, estabelecer uma conexão direta com o jogo em si, ora pode se relacionar à pessoa que está jogando, e dessa forma, fazer conexão com elementos externos ao jogo (o jogador é quem detém a sorte).

Em seus estudos, Truran (1995), *apud* Batanero e Diaz (2007), apresentaram evidências de que crianças não vêem geradores aleatórios como dados ou bolas em urnas, por exemplo, como tendo propriedades constantes. Muitas vezes, eles acreditam que os objetos têm uma mente própria (antropomorfismo) ou que podem ser controlados por forças externas, comprometendo a aleatoriedade, nestes casos. Nesta ótica, algumas pessoas (crianças e também adultos) julgam que a sorte pertence a uma ou outra pessoa e esta pessoa tem o poder de influenciar os resultados do jogo. Nesta concepção, a sorte, pode ser vista como um elemento externo ao jogo.

A honestidade dos jogadores no jogo foi evidenciada por vários alunos como condição para um jogo se caracterizar como justo. As crianças usaram expressões como: '*sem trapacear'*, '*sem querer roubar'*, '*um jogo limpo'*, '*que as pessoas não trapaceiem'*. Entende-se, que embora as falas das crianças não tenham sido explícitas, elas podem ter se relacionado, de alguma forma, à honestidade ao cumprimento de regras, e, nesta perspectiva, há, de fato, uma relação com o jogo propriamente dito, uma vez que, para 'roubar' ou 'trapacear' é necessário burlar as regras.

Assim como as crianças, houve adultos que também pontuaram a honestidade humana como característica de um jogo justo. No entanto, diferentemente das crianças, muitos adultos explicitaram a honestidade como único elemento que traduz um jogo justo. Por exemplo, A3 defendeu que "*é quando duas pessoas honestas estão jogando, né? Que ganham com esforço e com dignidade e com responsabilidade e com honestidade também, né?*. A2 disse que *"é um jogo na sinceridade"* e A8 afirmou que "*é um jogo honesto, a pessoa jogar correto"*.

Algumas crianças enfatizaram uma certa 'igualdade' que pode ser traduzida como um 'equilíbrio' para o jogo ser justo. Assim, C4 afirma que *"tem que ter quantidades iguais*" para ambos os jogadores e C14 que defendeu que "*é injusto se for de grupo e tiver uma pessoa a menos"*. Essa ideia lembra os estudos de Paparistodemou *et al* (2002) que relacionaram um jogo justo à uma organização simétrica e com mesmo tamanho. As crianças apresentaram ainda mais um diferencial em relação aos adultos: explicitaram a relação entre justiça no jogo e uso de artefatos iguais ou cartelas com numeração semelhante. C2 afirma que seria justo se "*todos tivessem jogando com o mesmo dado"* e C13 informou que haveria justiça no jogo se "*as pessoas tivessem coisas iguais, mesmos dados, porque se fossem diferentes, seria injusto*". A compreensão do uso de artefatos iguais para haver justiça é uma ideia equivocada, a exemplo do jogo de "Dados 1" que utiliza um hexaedro e um octaedro e ainda assim, é um jogo justo.

Duas crianças relacionaram jogo justo com questões que dizem respeito a comportamentos humanos. A Aluna C10 disse que o jogo é justo se não for jogado com muita força para não machucar o oponente, enquanto C6 afirmou que é justo se não tiver briga, um jogo 'sem arenga'. Esta relação também esteve presente nos argumentos dos adultos. A6 informou que um jogo é justo *"quando tá sem 'contenda', sem 'arenga'. Tudo brincando numa felicidade. Agora quando tá aquele jogo com aquela 'zoada' com aquela arenga e confusão, pra mim não presta, não é justo. Para ser justo tem que ter alegria"*. Já A18 disse que é justo se jogar sem violência, na paz.

Adultos pontuaram a vitória como condição de um jogo justo, a exemplo de A7 que julgou jogo justo como aquele que tem um número que ganha (e que sempre é o maior ou o que tem mais) e A15 que considerou que o jogo é justo quando a pessoa que joga, ganha e é injusto quando perde. Para estas pessoas, a justiça presente nos jogos tem relação com a vitória de alguém. Naturalmente, num jogo, se pressupõe haver vencedores e perdedores se não houver empates. Para A15 a questão diz respeito também à frequência com que se joga. Ela afirmou *"a pessoa jogar, jogar, jogar e nunca ganhar não é justo não"*. Nesta ótica, a vitória, se centra em uma pessoa em particular e nas chances que ela teria de ganhar com a participação frequente no jogo e não em algo que é inerente ao próprio jogo e que é aleatório. Esta fala de A15 remete à uma discussão de Bennet (2003) que trata da *injustiça do acaso*. Nesta discussão, a autora pontua que mesmo que o jogo seja justo e que a pessoa o jogue com frequência, como nos casos dos jogos de loteria, por exemplo, não há garantias de que a pessoa irá ganhar, pois a aleatoriedade não tem compromisso com o 'revezamento' de quem ganha ou perde.

O termo *regra* não foi diretamente explicitado pelos adultos, diferentemente das crianças. Implicitamente, os adultos pontuaram expressões que se considerou se aproximar da ideia de regras, como A4 que disse *"quando ambas as partes tá sabendo o que faz*" ou "*chamar os números corretamente*" (A10) ou, ainda, como A11 que afirmou "*jogo justo é aquele que tem metodologia*".

Alguns adultos atribuíram jogo justo ao mérito, ao merecimento por empenho, dedicação ou por ser melhor. Eles se remeteram a jogos de futebol, por exemplo, para afirmar que "o mais forte é que ganha" (A13), "o melhor ganha" (A14).

A relação entre jogo justo e futebol esteve presente na fala de dois adultos, um dos quais não acredita em jogo justo e que foi aqui caracterizado como 'incrédulo' por falta de uma expressão melhor. O Aluno A14 afirmou que todo jogo era injusto, externando que: *"Todo jogo tem marmelada. Todo jogo tem trapaça. É difícil um jogo não ter trapaça. O único jogo que não tem trapaça é o jogo de futebol porque tem que ganhar mesmo. Mas este jogo de roleta, tudo tem trapaça, tem marmelada. Justo só o que joga com o pé, pois o melhor é que ganha"*. Outros dois estudantes julgaram que não há jogo justo. A1 comentou: *"para mim jogo nenhum é justo (...) Para mim, para ser justo não deveria existir jogo. Se tivesse lei neste país, mas não tem..."*. A5 opinou, dizendo que *"pra mim nenhum jogo é justo, porque todos os jogos tem que ter alguém que queira ganhar mais que o outro. Tipo, sempre deve ter alguma fraude. Para ser justo, depende da pessoa que tá fazendo o jogo, né? É muito difícil, eu acho que não tem"*.

As respostas analisadas aqui foram fruto de perguntas que sucederam a primeira etapa da entrevista clínica e que contou com a análise de jogos - justos e injustos - (envolvendo "Bingo", dados, cartelas, etc), considerando a aleatoriedade, o espaço amostral e a comparação de probabilidades. Observou-se, portanto, que para as crianças, quase todas as referências atribuídas a jogo justo usadas como apoio para as respostas à pergunta "para você o que é um jogo justo?" foram assentadas nos jogos usados na etapa inicial da entrevista, enquanto os adultos resgatavam jogos de outra natureza como, por exemplo, jogos de futebol.

Como comentado inicialmente, não foi observada relação evidente, por parte dos adultos com a equiprobabilidade em nenhuma das falas, de forma implícita ou explícita, assim como não foram apontadas por este público referências explícitas a regras, fator bastante mencionado pelas crianças. Para Smolle, Diniz e Cândido (2007),

> No jogo, as regras são parâmetros de decisão, uma vez que, ao iniciar uma partida, ao aceitar jogar, cada um dos jogadores concorda com as regras que passam a valer para todos, como um acordo, um propósito que é de responsabilidade de todos. Assim, ainda que haja um vencedor e que a situação de jogo envolva competição, suas características estimulam simultaneamente o desenvolvimento da cooperação e do respeito entre os jogadores, porque não há sentido em ganhar a qualquer preço. (SMOLE, DINIZ E CÂNDIDO, 2007, P.14).

Os argumentos apresentados pelas crianças tiveram ênfase maior nas regras e na equiprobabilidade, diferentemente dos adultos que pontuaram com mais afinco a honestidade, a atitude dos jogadores diante do jogo. Fischbein (1984) pontuou que diversos conhecimentos de natureza probabilística parecem não se desenvolver sem intervenção escolar. Assim, parece que adultos podem permanecer com compreensões próximas às das crianças, caso as compreensões iniciais não sejam desenvolvidas. Para este autor, as crianças apresentam intuições primárias fundamentadas em suas experiências informais que independem da escola e que, para evoluir em suas aprendizagens para intuições mais elaboradas – intuições secundárias – é necessária instrução.

Em conformidade com os resultados apresentados, julga-se que, mesmo que as crianças não tenham tido acesso a conhecimentos probabilísticos específicos, suas experiências (que podem ter envolvido atividades competitivas e de jogos) parece ter contribuído para compreensão mais coerente que os adultos sobre jogos justos. Os adultos também com nenhum ou sem grande estudo da probabilidade, por sua vez, mostraram compreensão fortemente baseadas em suas crenças e percepções do mundo, com relações mais tímidas com elementos da aleatoriedade, como por exemplo, com a compreensão da equiprobabilidade em jogos justos.

Na continuidade da entrevista com os estudantes, foi solicitado que eles preenchessem um quadro, assinalando um x, após analisarem se o jogo era justo, ou não. Nesta atividade, foram considerados dois jogos: ‘‘Par ou ímpar’’ e ‘”Bingo”’. Todos os participantes conheciam os jogos em discussão e deveriam avaliar a justiça ou não considerando a situação contextual.

A Tabela 7 mostra os resultados, em valores absolutos, das respostas das crianças e também dos adultos acerca do que foi questionado sobre situações envolvendo os jogos ‘‘Par ou ímpar’’ e ‘”Bingo”.

Tabela 7: Resultado de respostas de crianças e adultos sobre situações envolvendo o jogo “Par ou ímpar” e ‘jogo de ”Bingo”’

	SITUAÇÃO CONTEXTUAL	Crianças		Adultos	
		É JUSTA	NÃO É JUSTA	É JUSTA	NÃO É JUSTA
JOGO ‘ PAR OU ÍMPAR’	1.Sortear no **‘par ou ímpar’** dentre alguns suspeitos, o que será condenado por um crime.	2	13	3	12
	2.Definir a escolha do lado do campo para iniciar o jogo no **‘par ou ímpar’**	12	3	12	3
	3.Definir no **‘par ou ímpar’** o campeão do Brasileirão	2	13	8	7
	4. Tirar no **‘par ou ímpar’** quem vai pagar o sorvete	4	11	11	4
JOGO DE ” Bingo”	5. Usar um **”Bingo”** para definir o ganhador de um carro	10	5	12	3
	6. Fazer um **”Bingo”** para definir o aluno que irá representar o município num campeonato de xadrez	11	4	8	7
	7. Por meio do resultado de um **”Bingo”** selecionar a pessoa que receberá o título de “O amigo da escola”.	5	10	6	9
	8. Usar um **”Bingo”** para definir qual atleta do time vencedor ficará com o troféu	7	8	8	7

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Em conformidade com os dados apresentados, parece que crianças e adultos apresentam similitudes em avaliar algumas situações justas e injustas. Por exemplo, em relação ao jogo “Par ou ímpar” a maioria das crianças e também dos adultos avaliaram corretamente que seria injusto o uso do jogo para sortear um condenado de um crime dentre alguns suspeitos. Do total de participantes, apenas cinco (duas crianças e três adultos) julgaram a situação justa. Já a escolha do lado do campo por meio do uso do ‘par ou ímpar’ foi avaliado como justo para um número igual de adultos e crianças (n=12).

No entanto, as duas outras situações que envolviam o jogo “Par ou ímpar” tiveram julgamentos bem diferenciados pela maioria dos componentes de cada grupo: crianças e adultos. O uso de ‘par ou ímpar’ para definir o campeão do Brasileirão (futebol) foi considerado por quase 87% das crianças como uma situação injusta, como de fato, é, mas para a maioria dos adultos (mais de 53%) a proposta foi considerada como justa. Este distanciamento causou estranheza, mas, talvez se explique pelo fato de que dos oito adultos que julgaram a situação justa, sete eram mulheres, que, possuíam idade acima de 38 anos e, que, provavelmente não gostam, não se importam e talvez não tenham pensado na importância de se ganhar um campeonato brasileiro de futebol. As crianças, por outro lado, ficam mais atentas à programação da TV e talvez tenham uma compreensão mais coerente sobre o que seria ser campeão nacional de futebol e quão injusto seria jogar no ‘par ou ímpar’ uma decisão desta importância.

Na situação em que seria necessário analisar se seria justo tirar no ‘par ou ímpar’ quem iria pagar o sorvete, a maioria das crianças (pouco mais de 73%) julgaram a situação injusta, em contrapartida, igual quantidade de adultos considerou justa. Quando esta análise foi proposta, considerou-se a situação como justa, pois imaginou-se que em um impasse, ou como forma de aposta, pagar um sorvete seria algo banal que poderia ser definido com um jogo de ‘par ou ímpar’, sem maiores prejuízos para as partes, mas não se pensou sob a ótica das crianças. Elas comentavam: ‘*eu não tenho dinheiro*” ou “*cada um paga o seu*” ou “*não é justo eu pagar o sorvete de ninguém*”. Então, para estas mesmas crianças que sabiamente consideraram a determinação do campeonato brasileiro como situação injusta usando o jogo ‘par ou ímpar’, tem-se que considerar que para elas, o valor do sorvete, que parece barato para um adulto, tem um peso nas suas decisões. E, como a situação não estava proposta dentro de um contexto, eles podem ter chegado a várias conclusões sobre a ‘injustiça’ de pagar um sorvete para outros.

Os questionamentos que versaram sobre o jogo de ”Bingo”, dois deles tiveram respostas coerentes e semelhantes, tanto de adultos como de crianças. Quando se solicitou que avaliassem a justiça, ou não, no fato de usar um ”Bingo” para definir um ganhador de um carro, 10 crianças e 12 adultos consideraram como uma situação justa. Nessa situação, embora o valor do prêmio seja alto, o jogo é mais sofisticado do que lançar uma moeda, por exemplo. Provavelmente, os participantes já souberam ou experienciaram (adultos) um jogo de ”Bingo” com premiações de valor elevado. Além disso, na premiação da Megasena, por exemplo, os sorteios se assemelham a um ”Bingo”, com prêmio em milhões. Outro resultado em que houve aproximação nas opiniões de adultos e crianças foi na avaliação do jogo de ”Bingo” para o título de ‘amigo da escola’:10 crianças e nove adultos consideraram a proposta injusta.

Quando questionados sobre o uso de um ”Bingo” para definição de um representante do município para um campeonato de xadrez, a maioria das crianças (n=11) e também dos adultos (n=8) consideraram a proposta justa. Na idealização da situação, a princípio, esse contexto seria injusto, pois, neste caso, a participação no campeonato deveria estar vinculada à habilidade ou destreza de lidar com o xadrez para ampliar as chances de vitória no campeonato. Mas, como esta questão não exigia uma justificativa, pode-se apenas supor que os alunos tenham pensado num ”Bingo” em que todos eram igualmente capazes e, nestas condições, a situação seria justa, sim. Para definir o atleta que ficaria com o troféu, uma quantidade muito próxima de crianças e adultos julgaram a situação injusta (8 crianças e 7 adultos). Entre os comentários feitos por uma das crianças, estava o fato de que o troféu deveria ficar na ‘escola’ ou na ‘casa do capitão do time’. Na verdade, essas avaliações dos estudantes são um juízo de valor, uma opinião que poderia se caracterizar como justo ou injusto, em conformidade com a ótica, as crenças e as experiências de cada participante.

Bryant e Nunes (2012) afirmam que pensar racionalmente sobre a aleatoriedade e a incerteza é importante, pois distribuições aleatórias desempenham um relevante papel em nossas vidas, no sentido de garantir equidade e justiça. Assim, quando se lançam dados, ou se embaralham cartas, ou se joga no cara ou coroa ou no ‘par ou ímpar’, a incerteza presente nestes jogos permite que haja justiça em seus resultados. No entanto, a discussão sobre justiça em situações de jogos vai além do uso ou não de aleatorizadores honestos. Observa-se neste estudo que, dependendo do contexto e da simplicidade ou complexidade do jogo, ou ainda, do valor ou tipo de prêmio, crianças e adultos podem avaliar situações justas como injustas e vice-versa. Aparentemente, contextos que parecem gozar de unanimidade no julgamento de justiça e injustiça envolvendo jogos, podem trazer algumas surpresas. Como por exemplo, adultos julgarem justa a definição de um campeonato brasileiro de futebol por meio de jogo ‘par ou ímpar’. Ou crianças julgarem que não é justo usar um ”Bingo” para definir o atleta do time vencedor que ficaria com o troféu. Muitas compreensões estão ‘embutidas’ nas escolhas de adultos e crianças e envolvem leitura de mundo e julgamentos em conformidade com suas vivências. Assim, concorda-se com Mlodnow (2009), o qual afirma que:

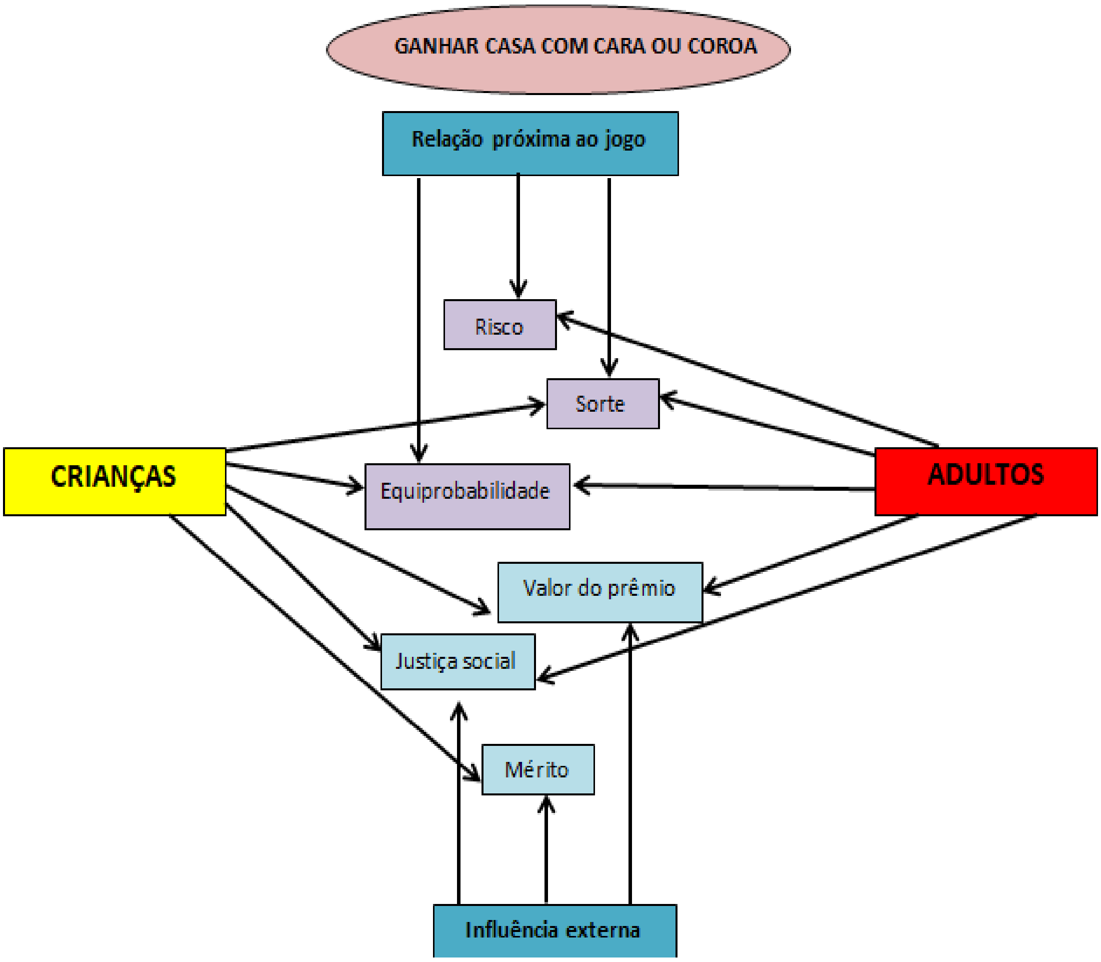
> A teoria da aleatoriedade é fundamentalmente uma codificação do bom senso. Mas também é uma área de sutilezas, uma área em que grandes especialistas cometeram equívocos famosos e apostadores experientes acertaram de maneira infame. Para entendermos a aleatoriedade e superarmos nossas concepções equivocadas sobre ela, precisamos de experiência e de um pensamento muito cuidadoso (MLODINOW, 2009, p. 30).

Tem-se observado, ao longo das análises nas diversas atividades apresentadas neste primeiro estudo, que não há muito distanciamento de compreensão de crianças e adultos em relação à avaliação de jogos justos ou injustos. O público infantil envolvido neste estudo tinha idades que variavam de 9 a 11 anos, enquanto os adultos possuíam idades entre 28 anos e 67 anos. Os dados interpretados a partir das análises aqui apresentadas apontam que a maturidade e vivência dos adultos não parece tê-los instrumentalizados para avaliar jogos justos e injustos de forma mais coerente que as crianças, em contextos que envolvem a observância da aleatoriedade, da compreensão do espaço amostral ou mesmo da comparação de probabilidades. Tal fato corrobora com Fischbein (1985) que afirma que há conhecimentos de natureza probabilística que precisam ser ampliados por meio de intervenção, por ensino, e que apenas a maturidade não possibilitará ao sujeito apropriar-se de intuições mais elaboradas.

Como complemento da atividade anterior, uma pergunta final foi realizada, a fim de que os participantes pudessem expressar sua opinião de forma aberta, uma vez que no preenchimento do quadro, não havia necessidade de comentários. *Usar o jogo de 'cara ou coroa' para definir o ganhador de uma casa com piscina é justo ou não? Por quê?* foi a última indagação realizada no Estudo 1.

Dos 15 adultos entrevistados, 14 responderam à pergunta, dos quais, 8, consideraram a situação justa. Apenas 5 crianças julgaram que a situação seria justa enquanto 10 a consideraram injusta. O esquema a seguir mostra os pontos de convergência e distanciamento nas opiniões de adultos e crianças. Diversos termos evocados pelas crianças, ou apresentados implicitamente, foram também utilizados pelos adultos, como mostra o Esquema 6.

Esquema 6: Compreensão de crianças e adultos sobre justiça na premiação de uma casa por meio do jogo cara ou coroa



Fonte: Dados da pesquisa (2021)

As crianças que consideraram justo o uso do jogo cara ou coroa para ganhar uma casa, usaram como argumento: i) a sorte ("*Sim, porque ele vai jogar na sorte, então eles têm as mesmas chances" –* C4), ii) a equiprobabilidade ("*Porque tem dois lados e um pode bater cara e o outro bater coroa. Pode sair cara ou pode sair coroa*" C11).

Os adultos justificaram a justiça da situação por meio de argumentos que também consideraram a sorte e a equiprobabilidade. A Aluna A7 afirmou que *"a sorte quem dá é Deus. É justa. Não é pra ganhar? Vamos jogar! Só ganha quem joga"*. Nesta fala observa-se ainda indícios intuitivos de aleatoriedade, em função da incerteza pelos resultados. O Estudante A14 informou que *"é sorte. Jogo é sorte. É justo porque é a sorte. Se ele tiver a sorte de ganhar cara, significa que a sorte foi pra ele."* Já o Estudante A10 defendeu que o uso do jogo é justo porque ele pode escolher cara e ganhar, mas o outro pode escolher coroa e também ganhar. Um outro argumento foi apresentado pelos adultos que não foi pontuado pelas crianças: a relação entre jogo e risco. A Aluna A11 discursou defendendo que é justo pois*, "é arriscar: ou é 'língua ou é beiço'*[19]. *Tudo tem que arriscar. Às vezes eu entro num sorteio de ganhar sabonete, mas eu posso ganhar ou não ganhar",* enquanto A2 informou que *"é um jogo, você está tentando, tá arriscando".*

Para apoiar suas opiniões sobre a injustiça de se usar um jogo de cara ou coroa para ganhar uma casa, dois argumentos se sobressaíram, tanto para as crianças quanto para os adultos. O primeiro argumento diz respeito à *justiça social*, ou seja, a necessidade prioritária da pessoa possuir uma casa, quando esta não tem nenhuma e o risco de uma pessoa que já tem casa, ganhar outra. O outro argumento diz respeito à desproporcionalidade entre o *tipo de jogo e o valor da premiação*. Destaca-se a seguir algumas falas.

- Justiça social

"Não porque pode ter muita gente com casa e dar uma casa para quem não tem, não é melhor, não? Tem tanta gente morando na rua, precisando de uma casa e você brincando de cara ou coroa para ver quem fica com a casa. Pra mim, isso não é justo" (C3).

"Injusta. Tem gente que não tem casa pra morar e tem gente que tem e tenta entrar no jogo pra ficar com duas... Tem gente que não precisa e entra do mesmo jeito no jogo" (A1).

"Não porque uma casa custa muito pra se jogar assim num jogo. Eu preferia que não fosse um jogo porque com uma casa não se brinca, né? Casa custa caro. Justo para ganhar uma casa seria uma pessoa necessitada" (A4).

- Tipo do jogo x valor do prêmio

"Para jogar a moeda para ganhar um lápis, seria justo, mas não para uma casa, porque vale muito" (C13).

"É injusto porque uma pessoa pra ganhar uma coisa assim, sem ter que se esforçar pra ganhar, né? Se fosse trabalhando... A não ser que ganhe numa loteria" (A3).

"Não é justa. Não deveria ser assim. Era para ser uma coisa mais justa. Cara ou coroa a pessoa mesmo pode roubar. Tem como trapacear. Se for para escolher o lado do campo é justo

[19] Expressão usada para indicar uma coisa ou outra, ou seja, a escolha por uma opção

*porque é diferente. Porque o campo ele não vai ficar pra ele e a casa fica. Se fosse para ficar com o campo pra ele não era justo, é a mesma situação da casa” (*C2).

O jogo de cara ou coroa é considerado, assim como o de lançamento de dados, de roleta e de cartas como jogos de azar e muitos deles são conhecidos e usados desde a antiguidade. Para Cardano, apud Bennett (2003), o princípio mais fundamental de todos os jogos de azar são condições iguais, pois, por exemplo, num jogo de dados honestos não há determinismos e tudo depende do puro acaso. Assim, Cardano estabelece que os pilares fundamentais dos jogos de azar são a existência de condições iguais.

Considerando a ótica de Cardano, o jogo ‘cara ou coroa’ possibilita condições iguais aos seus jogadores, e, se a moeda for honesta pode-se considerá-lo justo, pois garante a equidade, uma vez que os participantes terão as mesmas chances obtidas por meio da aleatoriedade ou do acaso, em conformidade com Bryant e Nunes (2012).

Na situação apresentada, o prêmio tem um peso forte na decisão sobre o que é justo ou injusto. Se por um lado, alguns participantes julgam que o jogo ‘cara ou coroa’ é justo para algumas situações, como ganhar um lápis ou o ‘mando de campo’, é injusto e muito simplista para ganhar um prêmio de um valor alto, como uma casa. Na atividade anterior, os participantes julgaram justo o uso do ”Bingo” para ganhar um carro, diferentemente do uso do cara ou coroa para ganhar uma casa. Na ótica deles, há uma desproporção entre o valor do prêmio e o tipo de jogo que se caracteriza como (in)justiça. A questão da preocupação com o contexto social, aqui categorizado como ‘justiça social’, levanta uma questão que transpõe o jogo, ultrapassando conceitos probabilísticos e regras. É uma preocupação real com os mais necessitados, com a desigualdade social e com o direito constitucional à moradia, fato fortemente marcado nas falas de adultos e crianças.

Bennett (2003) afirma que as crianças têm uma forte noção de justiça e sua exploração do conceito do acaso costuma levar a uma questão: “o acaso é justo?” Para esta autora, as crianças descobrem que nem sempre o acaso é justo, o que foi evidenciado nas respostas apresentadas na segunda pergunta deste estudo, pois a garantia das chances iguais para os jogadores no jogo cara ou coroa, não garante que a pessoa que mais precisa é a que irá ganhar, por exemplo. “Quando o acaso determina o resultado, nenhuma quantidade de inteligência, força, conhecimento ou experiência pode dar vantagem a um único jogador, e a sorte surge como uma força equalizadora’’ (BENNET, 2003, P.15). Assim, como a aleatoriedade não tem compromisso com nenhuma pessoa ou causa em particular, os resultados podem ser injustos em contextos sociais, mas, não são injustos dentro da natureza do próprio jogo, como defende Cardano.

Considerando o conjunto de atividades do Estudo 1, de uma forma geral, observou-se, que as crianças apresentaram desempenho um pouco melhor que os adultos. Ambos os grupos, em todos os jogos, apresentaram algumas justificativas que se distanciavam de análises probabilísticas (considerando as demandas cognitivas) e se centravam em outros elementos baseados em crenças e experiências, como apontado em algumas justificativas: *"é justo porque ele é um bom jogo e ela pode aprender mais*" (C6), *"eu acho justo porque eu quero que todo mundo ganhe*" (A3) ou *"se tá jogando é justo. Tiago tem mais vantagem porque todo Tiago são sabidos, espertos"* (A15). Estabelecendo-se um paralelo com os estudos de Watson e Moritz (2003), pode-se dizer que esses alunos se enquadram no *nível uniestrutural* que reside na crença teórica de justiça ou igualdade de chances em uma forma proposicional, independente de análises de dados e de experimentações.

Mlodinow (2009) discute sobre crenças, alegando que costumamos buscar argumentos para dar sustentação ao que acreditamos, ao invés de procurar dados que refutem nosso pensamento inicial: é o viés da confirmação. O autor cita Francis Bacon que afirmava que "a compreensão humana, após ter adotado uma opinião, coleciona quaisquer instâncias que a confirmem, e ainda que as instâncias contrárias possam ser muito mais numerosas e influentes, ela não as percebe, ou então as rejeita, de modo que sua opinião permaneça inabalada" (MLODINOW, 2009, p. 201). Assim, além de buscar evidências que confirmam nossas noções preconcebidas, interpretamos indícios ambíguos de modo a favorecer nossas ideias, ou seja, "nosso cérebro inteligente consegue reforçar suas crenças mesmo na ausência de dados convincentes" (MLODINOW, 2009, p. 201). Então, se conclui que um vizinho é simpático, qualquer ação futura dele, se positiva, ganhará destaque, se negativa será utilizado um atenuante ou será esquecida.

Assim, nos afirma o autor, que "a evolução do cérebro humano o tornou muito eficiente no reconhecimento de padrões. Porém, como nos mostra o viés da confirmação, estamos mais concentrados em encontrar e confirmar padrões que em minimizar nossas falsas conclusões" (MLODINOW, 2009, p. 203). Por esta razão, é comum encontrar pseudoexplicações para o que acreditamos, mesmo que haja certa contradição. Esta condição foi observada neste estudo, em várias justificativas apresentadas pelos estudantes participantes.

Imagina-se, portanto, que as fragilidades na compreensão de jogos justos a partir de contextos que envolvem a aleatoriedade, o espaço amostral e a comparação de probabilidades, por parte de adultos e crianças, tem raízes nas crenças destes grupos. Considerando que os adultos possuem mais tempo de vida e, consequentemente, mais experiência social que as crianças, é possível que suas crenças sejam ainda mais cristalizadas, mais enraizadas e, por isso, há certo distanciamento nos resultados. Os grupos, não tiverem experiência escolar envolvendo probabilidades, embora tenham tido experiência com diversos jogos, especialmente os que envolvem moedas, dados (hexaedro), 'par ou ímpar', "Bingo". Esta vivência, em alguns casos, reforça crenças equivocadas, como "a cara sai mais", "os números maiores saem mais" ou "não saem números em sequência".

O fato é que boa parte dos adultos e crianças consideram coerentemente que o jogo é justo se as chances forem iguais para todos os jogadores e esta é uma importante compreensão acerca de justiça em jogos. No entanto, diversos participantes não tinham uma compreensão adequada de alguns elementos da probabilidade que lhes dessem suporte para avaliar assertivamente sobre a ocorrência, ou não, da justiça, e, consequentemente, avaliaram equivocadamente alguns jogos em seus diferentes contextos. Assim, a incompreensão da independência de eventos em sequências aleatórias, a falta de análise do espaço amostral e a fragilidade no raciocínio proporcional que impossibilita análise comparativa de probabilidades em espaços amostrais distintos, podem se configurar em entraves para uma avaliação coerente de jogo justo ou não. Desta forma, é necessário um trabalho interventivo que viabilize tais compreensões, a fim de que os sujeitos possam acessar conhecimentos probabilísticos que lhes instrumentalizem para avaliar a justiça em jogos, minimizando o impacto das crenças preconcebidas.

7.2. ANÁLISES DO ESTUDO 2: COMPREENSÕES DE CRIANÇAS BRASILEIRAS E PORTUGUESAS ACERCA DE JUSTIÇA EM JOGOS, CONSIDERANDO ELEMENTOS DA ALEATORIEDADE, DO ESPAÇO AMOSTRAL E DA COMPARAÇÃO DE PROBABILIDADES.

Para fins de análises do Estudo 2, optou-se por uma organização mais sintética, em função da exploração das compreensões das crianças brasileiras já ter sido evidenciada no

Estudo 1. Assim, a fim de evitar falas e observações repetidas (presentes no Estudo 1), serão apontadas nessa etapa as evidências mais marcantes dos dois grupos (crianças brasileiras[20] - CB e crianças portuguesas - CP), organizando a análise por demanda cognitiva, comentando os jogos referentes à demanda específica, sem separá-los em subitens.

Tabela 8: Respostas corretas das crianças (15 de cada país), por jogo e foco probabilístico

Foco do jogo	Tipos de jogo	Crianças Brasileiras	Crianças Portuguesas
Aleatoriedade (Independência de eventos)	Jogo justo "Loto"	3	2
	Jogo injusto "Bingo"	13	13
Espaço amostral (eventos equiprováveis e não- equiprováveis)	Jogo justo Moedas	11	13
	Jogo injusto "Bolinhas na colher"	13	13
Comparação de probabilidades (espaços amostrais distintos - raciocínio proporcional)	Jogo justo – "Dados 1"	0	0
	Jogo injusto - "Dados 2"	0	0

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Na Tabela 8 são apresentados os resultados das respostas das crianças brasileiras e portuguesas que avaliaram e justificaram corretamente a justiça nos diversos jogos. As escolhas e argumentos apresentados pelas crianças apontam para a compreensão (ou não) dos elementos probabilísticos específicos discutidos em cada jogo.

Os resultados apontaram, de uma forma geral, que os desempenhos e compreensões das crianças portuguesas estiveram muito próximos das crianças brasileiras, considerando o entendimento sobre jogos justos e injustos em consonância com as distintas demandas cognitivas exploradas nesta pesquisa. A seguir, serão especificadas essas compreensões.

7.1.1. Aleatoriedade e Justiça em Jogos

Assim como no Estudo 1, no que concerne aos jogos que exploraram a demanda cognitiva referente à aleatoriedade, observou-se uma frágil compreensão da *independência de eventos* em sequências aleatórias, sobretudo na exploração do jogo "Loto" (justo). Nesse jogo, das crianças que informaram que o jogo era justo, apenas três crianças brasileiras (CB3, CB4 e

[20] Neste estudo as crianças brasileiras foram identificadas por CB, para diferenciar das crianças portuguesas (CP). Assim, CB8 desse estudo equivale à C8 do Estudo 1.

CB5) e duas portuguesas (CP12 e CP15) apresentaram justificativas que apontaram para indícios de compreensão sobre a *independência de eventos*, como observado nos excertos das falas a seguir.

- CB4: “Sim é justo, porque é uma questão de sorte, né? Acho que tem a mesma chance de ganhar porque têm todos esses números aqui (no saco), né? ”
- CP12: “É justo para os três. Eles têm as mesmas vantagens. Se é até o 90 aqui não há nenhum número que ultrapasse o 90, então os três têm as mesmas vantagens”.
- CP15: “Sim. Por ser números ‘ao calhas’[21] que vai tirar. Todos têm as mesmas vantagens porque os números saem ‘ao calhas’. Eu escolheria qualquer uma cartela porque vai ser números ‘ao calhas’ quando tirar e pode calhar qualquer um dos números. ”

Crianças com compreensões semelhantes às de CB4 e CP12, encontram-se no Nível Transitório dos construtos do pensamento probabilístico de Jones (2006) referente à *independência de eventos*, pois demonstram algum reconhecimento de que os eventos consecutivos não estão relacionados. Nesse caso, elas se detiveram na análise de que os números que estavam nas cartelas estavam também estavam no saco, e, portanto, poderiam ser sorteados. CP15, entretanto, parece dar pistas de que se encontra num nível mais elevado, o Quantitativo Informal. Aparentemente, na ótica dessa criança, os ensaios não estão relacionados de forma alguma, razão pela qual, qualquer cartela poderia ser a vencedora, e, por conseguinte, ela não teria nenhuma preferência por uma cartela em particular porque os números caem ‘*ao calhas’*, de forma aleatória.

As sequências das cartelas de Pedro (16, 18, 20, 24, 26, 28), Felipe (6, 12, 17, 32, 44, 53) e de Ana (1, 2, 3, 4, 5, 6) foram alvo do olhar da maioria das crianças que incorretamente consideraram o jogo injusto por acreditarem, especialmente, que sequências formadas por números que aparentam uma certa padronização por serem consecutivos, teriam menos chances de serem sorteadas. Observa-se esse equívoco em argumentos como

- CB15: “Acho o de Ana mais difícil de ganhar porque são seis números em fileira”
- CP3: “Para o Pedro e para Felipe é justo porque não tá em ordem, tem números diferentes. Para Ana é injusto porque os números estão todo diretos de 1 até o 6. Acho

[21] A expressão portuguesa, nesse contexto, aparenta significar, ao acaso, aleatório.

que ela não tem a mesma chance porque é quase impossível calhar vir 1, depois calhar o 2, calhar o 3, 4, o 5 e o 6."

Duas crianças portuguesas e seis crianças brasileiras usaram a comparação dos valores absolutos (maior ou menor) como justificativa para apoiar as justificações em relação às suas compreensões sobre uma possível injustiça no jogo do "Bingo" como observado na resposta de CP2: *Acho que não é porque ela (Ana) tem números mais baixos que é mais difícil de tirar. Estes dois (Pedro e Felipe) é mais justo porque tem números mais fáceis de tirar, tem números maiores* e de CB1: *"É injusto para ela porque os números dela é mais menor e o dos outros é mais maior. Felipe tem mais chances de ganhar porque tem os números maiores. É o mais fácil de ganhar porque os pequenos são mais difíceis de sair*". Essa ideia de que determinados números teriam maior probabilidade de serem sorteados que outros foi também observado na pesquisa de Vidakovic *et al* (1998). Esse tipo de equívoco é evidenciado por Bryant e Nunes (2012) que apontam para o viés da representatividade. Crianças com compreensões semelhantes a CB2 e CP1 se encontram no nível Subjetivo dos construtos do pensamento probabilístico de Jones (2016) ao considerar que eventos consecutivos estão relacionados.

No jogo do "Bingo" (injusto), apesar de ser possível avaliar a compreensão da *independência de eventos*, esse fato foi eclipsado pela obviedade dos *'aleatorizadores 'desonestos''*. Assim, as crianças focaram o olhar sobre esses aleatorizadores e a relação deles com os números das cartelas dos jogadores: Paula (15, 30, 16, 8, 14, 27) e André (12, 2, 20, 26, 24, 14). Embora a incerteza sobre os resultados se mantivesse no jogo, a injustiça de ter algumas 'bolinhas' com massa maior influenciou fortemente a análise das crianças. Assim, assertivamente, para a maioria delas, o jogo foi considerado injusto, e os argumentos apresentados repousaram sobre a probabilidade maior de sair números que em sua formação teriam o algarismo 2 – que beneficiaria André, como observado nos argumentos apresentados a seguir:

- CB9: "Não. Porque a de Paula só tem um número 2 e a de André tá cheio. Isso quer dizer que ele tem mais chance de ganhar porque as bolas estão mais pesadas".
- CP6: "É mais justo para o André porque ele tem todos menos o 14 que tem o número 2."

Watson e Moritz (2003) verificaram que há estudantes que consideram os aleatorizadores (dados) sempre justos, depois de vários experimentos, mesmo quando eles são ‘‘desonestos’’. No nosso estudo, desde o princípio foi evidenciado às crianças, nesse jogo, a ‘desonestidade’ dos artefatos, e esse pode ter sido um forte facilitador para que elas avaliassem corretamente a injustiça presente no jogo. Assim, constata-se que as crianças não apresentam dificuldades para avaliar justiça em jogos, quando os aleatorizadores são explicitamente evidenciados como ‘‘desonestos’’ ou ‘viciados’. No entanto, questiona-se se a quantidade de números formados com o algarismo 2 fosse a mesma nas duas cartelas, ainda assim, eles julgariam injusto somente pela ‘desonestidade’ dos aleatorizadores ou iriam desprezar essa informação e analisar unicamente as sequências nas cartelas, e considerar o jogo justo? Tudo leva a crer que a resposta a essa indagação seria sim, pois na pergunta sobre o que eles fariam para tornar esse jogo justo, eles claramente procuraram equilibrar a quantidade de números compostos por 2, nas duas cartelas.

Das crianças que se equivocaram em suas respostas, foram apresentados argumentos que consideraram:

- Números não-consecutivos ou fora de ordem - “*É justo porque tá aparecendo números diferentes (nas cartelas) uns dos outros e não tá em ordem”* (CP3).
- Jogo justo com chances desiguais - *“É justo para um e é justo para o outro. André tem mais vantagem de ganhar porque tem mais números com 2. Mas Paula pode ganhar e André também pode” (*CP14) e *“Esse tem mais chance de ganhar: André (...) E essa não tem tanto. Mesmo ele tendo mais chance é um jogo justo. Ela também pode ganhar”* (CB10);
- Relação entre os números da cartela e do globo - *“É questão de sorte e tem o número até 30 e aqui não tem mais que 30 nas cartelas. Aqui tem 15, 16, 8, 14 e 27 e 30, então ele não vai pegar outras bolas que não estão. Eu acho que é justo por causa disso. E ela também tem 2 e que não passam de 30. As chances são iguais”* (CB4).

A fala da criança portuguesa CP3 atrela a justiça ao fato dos números não serem consecutivos e nem aparentarem uma certa ordenação. A ideia de estabelecer a relação entre aleatoriedade e ‘desordem’, ‘mistura’ foi também evidenciado nos estudos de Pratt (2000) e Paparistodemou *et al* (2008). Os estudantes CP14 e CB10 consideraram o jogo justo, mesmo conscientes das chances desiguais de vencer dos jogadores e se apoiando unicamente na incerteza dos resultados, ou seja, a existência da possibilidade de vencer do jogador com menor chance tornaria o jogo justo, porque mesmo com vantagem para André, não há certeza sobre quem será, de fato, vencedor.

Em suas justificativas, CB4 recorreu ao fato de que os números de ambas as cartelas estavam no globo e poderiam ser sorteados, não atentando para a injustiça promovida pelos aleatorizadores viciados, em consonância com as cartelas dos jogadores. Pode-se dizer que crianças que possuem compreensão semelhante a CB4, aparentemente, se encontram num nível de crença, determinado por Watson e Moritz (2003), como *Uniestrutural* - que se caracteriza por uma crença teórica na justiça, sem referência à experiência, nem análise profunda dos contextos e elementos do jogo; é uma crença cega de que o jogo é sempre justo.

Quanto à pergunta: *O que você faria para tornar o jogo justo?* as respostas das crianças repousaram na possibilidade de 'equilibrar' as cartelas de ambos os jogadores para manter as chances iguais de vitória. Em relação ao jogo da "Loto", CP2 disse: "*Por números maiores para Ana ou então números mais pequenos para o Pedro e para Felipe",* enquanto CB11 afirmou: "*Botar um pouco dos números de Ana para Pedro e para Felipe".* Considerando o jogo de "Bingo", CP5 defendeu que para tornar o jogo justo deveria "n*ão ter bolinhas mais pesadas aqui (globo)",* enquanto CB15 considerou que *'as bolas de 2 deveriam ter o mesmo peso que as outras".* No entanto, outra proposta foi evidenciada: a de que o jogo seria justo, mesmo com aleatorizadores 'desonestos', desde que houvesse equilíbrio entre as cartelas dos jogadores, possibilitando que ambos tivessem as mesmas chances de vencer. Um total de 11 crianças portuguesas e 8 brasileiras sugeriram o equilíbrio entre as cartelas com a mesma quantidade de números com algarismo 2 em ambas as cartelas. CP6 defendeu que deveria "*Tirar alguns números com 2 desses de modo a ficar com a mesma quantidade nas duas cartelas. Dois para cada um, ficava justo."* e CB11 comentou que: "*Botava uns aqui. Ficava 3 para cada. Pegava de André e dava pra Paula."* Considera-se esse um achado bem importante, mas, julga-se aqui que essa ideia de jogo justo, mesmo com aleatorizadores 'desonestos', merece maior aprofundamento, em novos estudos.

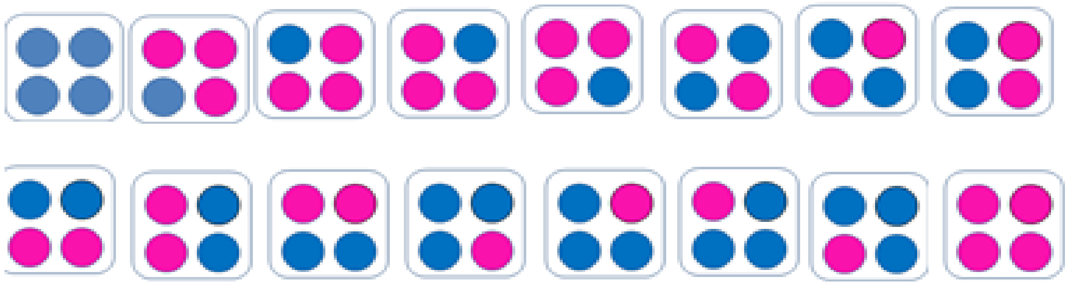
Assim como no Estudo 1, tanto as crianças brasileiras como as portuguesas apresentaram compreensões semelhantes quanto a jogo justo, a partir da exploração da aleatoriedade. Os mesmos equívocos foram observados em ambos os grupos, especialmente o que se refere à incompreensão acerca de sequências aleatórias que repousam no entendimento da independência de eventos, pois "as crianças têm dificuldades de aceitar que numa experiência aleatória, uma sequência de aparência regular é tão provável quanto uma de experiência irregular." (BENNETT, 2003, p. 192). As crianças, em sua maioria, não apresentaram dificuldades em avaliar como injusto um jogo que possui '*aleatorizadores 'desonestos''* e que, em consequência há benefício para um dos jogadores em detrimento de outros. No entanto, como pontuado anteriormente, a percepção da manutenção da justiça, mesmo com aleatorizadores 'desonestos', desde que mantida as chances iguais de vitória para os jogadores, foi um dado obtido de forma transversalmente e espontânea pelas crianças. Este importante dado reforça a compreensão dos participantes em relacionar jogo justo às mesmas probabilidades de ganhar de todos os jogadores (BENNET, 2003; BOROVICNIK, 2016).

7.1.2. Espaço amostral e Justiça em Jogos

De uma forma geral, o desempenho tanto das crianças brasileiras como das crianças portuguesas foi substancialmente melhor nos jogos que envolviam a análise de *eventos equiprováveis e não equiprováveis* na exploração do espaço amostral do que nos demais jogos, com exceção apenas do jogo do "Bingo", em que o desempenho foi semelhante. Possivelmente, esse resultado se deveu ao fato de que nos contextos apresentados, as crianças não precisariam elencar uma lista exaustiva de todos os elementos dos eventos para poder compará-los e responder corretamente à situação e isso pode ter sido um facilitador para o julgamento delas.

No jogo "Bolinhas na colher"(injusto), havia 120 bolinhas azuis e 120 bolinhas rosas num recipiente. Com uma colher de quatro furos o jogador mergulhava a colher no recipiente para 'capturar' quatro bolinhas. Há 16 possibilidades de organização das "Bolinhas na colher"(Figura 20), sendo 14 possibilidades em 16 de sair bolas duas cores (jogada de Amanda) e apenas uma possibilidade em 16 de sair só rosa (jogada de Miguel) ou só azul (jogada de Tiago). Para cada evento particular, os resultados são equiprováveis, ou seja, 'sair tudo rosa' ou 'sair uma rosa no canto superior direto e as demais azuis' têm as mesmas probabilidades de acontecer: 1 em 16.

Figura 20: Possibilidades para organização de bolas de duas cores em colher com quatro furos.



Fonte: Dados do autor (2021)

No entanto, nos eventos *não equiprováveis* que as crianças tiveram que comparar havia um distanciamento demasiado nas probabilidades de resultados (1/16 para uma única cor e 14/16 pra duas cores) e isso pode ter influenciado as respostas das crianças. Elas evidenciaram não exatamente as possibilidades de organização dos eventos, nem fizeram análises probabilísticas, pontuando, especialmente, as quantidades de bolas de cada cor e o fato de estarem 'misturadas'. Assim, para elas, como as bolas estavam 'misturadas' havia muito mais chances de se obter resultados mistos (bolas azuis e rosas) parecendo indicar, implicitamente, que o resultado com as duas cores representaria mais fidedignamente o conjunto de bolas na caixa do que o resultado com uma única cor (tudo rosa ou tudo azul) Observa-se essa compreensão nas falas de: CP12 que defendeu que o jogo não era justo "*porque há mais possibilidades de Amanda ganhar, porque há mais possibilidades de calhar as duas cores juntas. Estão os dois misturados na caixa, então se tirar assim, então eu acho tem mais possibilidades de calhar as duas. São 120 cada uma e na caixa já estão todos misturados"* e de CB9 que considerou que "*é quase impossível sair 4 rosas e 4 azuis. É mais fácil sair colorido (misturado). Não é justo. Amanda tem mais chance."*

Poucas crianças recorreram à explicitação dos elementos dos eventos que compunham o espaço amostral para justificar suas escolhas. CP6 recorreu à recente experiência no jogo e especificou alguns desses elementos para argumentar que: *"A Amanda ganharia muito mais facilmente porque quando se tira é muito mais difícil sair da mesma cor. Pelo menos comigo, quando experimentei não saiu da mesma cor. Saíram sempre três de alguma cor com um de cor diferente ou dois de cada cor".* Implicitamente CP6 elencou os eventos 'dois rosas e dois azuis', "três azuis e um rosa" e "três rosas e um azul" e concluiu que sair os eventos "tudo rosa" ou "tudo azul' seria muito mais difícil. A fala de CP6 apresenta indícios de compreensão sobre os elementos que compõem o espaço amostral, embora, seja prematuro dizer que ela seria capaz de fazer uma lista exaustiva. Em conformidade com os construtos do pensamento probabilístico de Jones *et al* (1997), crianças com a compreensão semelhante a CP6 estão no nível Transitório que se caracteriza pela capacidade de listar de forma incompleta, elementos de um evento de dois estágios.

Crianças que responderam equivocadamente que o jogo seria justo apresentaram justificativas como:

i) Justiça com chances diferentes - "*Acho que é justo. Porque por exemplo, calha uma vez na Amanda e depois calha outra vez em Tiago e outra vez em Miguel.*

Acho que Amanda tem mais chance de ganhar, *pelo que eu vi quando eu joguei, sai mais azul e rosa. Mesmo assim, é justo"* (CP14);

ii) Chances iguais "*Acho justo porque os três têm possibilidades de ganhar. As chances deles são iguais"* (CB2*);*

iii) Regras (quantidade de bolas) - *Acho que é justo porque tem a mesma quantidade de bolas, só que ele pega o total de tudo rosa e ele de tudo azuis e ela pegou misturado* (CB4).

No "Jogo das Moedas" (justo), os eventos são *equiprováveis*, ou seja, sair 'duas caras e uma coroa' é igualmente provável a sair 'duas coroas e uma cara'. Há oito resultados possíveis no lançamento de três moedas e cada um desses resultados particulares são equiprováveis (1 em 8). Nesse jogo, as crianças também não se detiveram na análise dos elementos de cada evento, e, sim, no 'equilíbrio' que ficou aparente nos eventos analisados.

Os estudos de Cañizares *et al* (2003) também apontaram a ideia de equilíbrio como forma de caracterizar jogos justos. Essa visão foi largamente evidenciada e pode ser observada, por exemplo, nas justificativas de CB4: *Sim. Porque é igual só que ao contrário. Ela pode pegar duas caras e uma coroa e ela duas coroas e uma cara* e CP12: "*É justo, porque aqui é duas coroas e uma cara e aqui uma coroa e duas caras, então, acho que isso é justo. Aqui duas coroas é igual a duas caras e aqui uma coroa é igual a uma cara. Se calhar tudo igual é ponto para duas.* A sorte também foi evidenciada nas respostas das crianças, como elemento que se traduz como justo, a exemplo, da fala de CP6: *"Acaba por ficar igual e acaba por ser também uma questão de sorte*" e também CB14: *é como se fosse na sorte, jogando e vendo o que a moeda vai tirar. Elas têm as mesmas possibilidades de ganhar."*

Como já apontado no Estudo 1, duas crianças brasileiras se equivocaram em suas respostas, entre elas, CB13 que julgou que o jogo não seria justo *"porque se sair 3 caras vai pras duas. Devia ir só pra uma. Rute tem mais chance porque sempre que eu jogo assim cai mais a coroa".* Compreensões equivocadas evidenciadas na expressão *"...sai mais a coroa*" evocada por CB13 remetem a um equívoco relativo à *heurística da representatividade* (BRYANT e NUNES, 2012; JONES, 2006) que se caracteriza pela errônea conclusão de que alguns ensaios, nesse caso, advindos da experiência, representam, de fato, a probabilidade de ocorrência de um determinado evento. No caso de CB13 ele comete o erro de *recência positiva* por acreditar que os eventos que saíram seguidas vezes (coroa), terá maior chance de sair novamente, fato observado também na pesquisa de Silva (2016). Em relação aos equívocos das crianças portuguesas, destaca-se a fala de CP8 que informou que o jogo era justo, mas utilizou argumentos frágeis, não indicando compreensão: "*É justo, porque a Cristina tem direito a ganhar e a Rute também*" e CP13 que julgou também justo, mas não conseguiu apresentar uma justificativa, apenas expôs: *"Eu sei que é justo, mas não sei dizer porque é justo."*

7.1.3. Comparação de probabilidades e Justiça em Jogos

Os jogos de "Dados 1" e 2 foram idealizados para investigar as compreensões dos estudantes acerca do uso do raciocínio proporcional, ao comparar probabilidades de eventos que envolvem espaços amostrais distintos. Observou-se, portanto, uma frágil compreensão de ambos os grupos de crianças em relação ao tema. Nos dois jogos, não foi evidenciado o uso do raciocínio proporcional para justificar as escolhas das crianças, o que culminou numa intepretação equivocada sobre jogo justo e injusto.

As justificativas apresentadas pelas crianças, quase sempre se assentavam na comparação de valores absolutos, seja comparando o número de faces de cada dado ou comparando a quantidade de pares ou ímpares (jogo de "Dados 1") ou, ainda, estabelecendo a comparação entre a quantidade de faces que possuíam números maiores ou menores que 3 em cada dado, no jogo de "Dados 2"(injusto). Quase sempre os argumentos das crianças se apoiavam numa relação comparativa entre as quantidades absolutas pertencentes a um ou outro dado, não se atentando para a relação proporcional necessária para comparar probabilidades de eventos que pertencem a espaços amostrais distintos.

No jogo de "Dados 1", por exemplo justificativas como as de CB1 (*Não é justo porque este aqui tem mais par do que este. Paulo tem mais chance de ganhar porque tem mais número par do que Marcos*) ou de CP4 (*O Paulo tem mais números e mais números pares então há maior probabilidade de calhar para ele o número par*) deixam evidente a comparação quantitativa e não proporcional realizada pela maioria dos estudantes. Semelhante ao jogo de "DADOS 2", cujos argumentos para justificar as escolhas se assentaram na análise quantitativa não-proporcional, como observado nas falas de CB2 (*Porque este dado aqui tem três números maiores e este aqui tem dois*) e CP10 *(Não, porque o de Daniele tem mais números maiores que 2*).

Estas ideias estão em consonância com o Nível Subjetivo dos construtos do pensamento probabilístico de Jones *et al* (1997) em que as crianças não conseguem avaliar situações justas e injustas ao compararem probabilidades de um evento em dois espaços amostrais distintos por meio de julgamentos subjetivos ou mesmo numéricos, sem levar em conta a proporcionalidade que a situação exige.

Nas justificativas das crianças observou-se ainda uma análise de natureza antropomórfica dos dados (Watson & Moritz, 2003) que se relaciona a crenças intuitivas de que o formato dos dados tem influência sobre os resultados. Crianças que apresentam essa compreensão estão no Nível Icônico de crenças de acordo com esses estudiosos, como parece ser o caso de CB13 que em sua defesa afirmou que "*este dado aqui é mais difícil de cair. Este é quadrado e este daqui é diferente. Ele é mais difícil sair o par nesse (Paulo)"* e de CP9 que considerou: "*Outra vantagem é o formato, porque este aqui gira perfeitamente bem e este aqui não gira perfeitamente bem. Pelo que eu rodei neste (Marcos), eu acho que é mais fácil tirar ímpar."*

Algumas crianças consideraram em seus argumentos a regra 'tirar número par' - condição comum aos dois jogadores - como característica de justiça. Diferentemente do jogo "Bolinhas na colher" em que as regras pareciam diferentes aos participantes (tirar só rosa, ou só azul ou as duas cores), a solicitação de que os dois jogadores, independente do formato do dado, teriam que tirar número par, já se configurava, por si só como um jogo justo, desconsiderando-se a análise proporcional que a situação exigia. CB5 afirmou que *"é justo se é para qualquer um desses tirar número par"*, CP8 informou: *"É um jogo limpo e acho calhar número par, um ganha, se calhar número par, o outro ganha também."* E CP14 que argumentou "a*cho justo, porque os dois têm possibilidades de ganhar e porque os dois são pares. Os dois têm as mesmas vantagens para ganhar porque os dois precisam tirar números pares".* Evidenciar a regra é importante, mas ela não garante que o jogo seja justo, pois outros elementos precisam ser analisados, como a garantia da aleatoriedade, a honestidade dos aleatorizadores e as chances iguais para os jogadores.

Pode-se conjecturar que a observância da regra (sair par) considerada como ponto central para justificativa de alguns estudantes, pode ser um importante aporte para a introdução de um trabalho interventivo que possibilite o redimensionamento da compreensão da proporcionalidade presente na situação. Em consonância com Fischbein (1984), as compreensões iniciais e intuitivas das crianças sobre conceitos probabilísticos devem servir de plataforma para intervenções por meio do ensino. E essa pode ser um importante foco de pesquisa para investigações futuras.

Nos dois jogos constatou-se que nenhuma criança conseguiu apresentar argumentos que apontassem para a compreensão e uso consciente da comparação de probabilidades entre eventos de espaços amostrais distintos. A fragilidade no uso do raciocínio proporcional se configurou como uma dificuldade extrema para esses estudantes nos contextos discutidos nesse estudo. Por conseguinte, as crianças se equivocaram na avaliação de jogo justo ou injusto, indicando que a incompreensão desse elemento da probabilidade influencia a avaliação incorreta da (in)justiça presente nos jogos. Ademais, Bryant e Nunes (2012) alertam que o raciocínio proporcional é um entrave pedagógico que está presente não apenas em contextos da probabilidade. A proporcionalidade está presente em contextos que envolvem porcentagem, ampliação/redução, razões e frações, regra de três, entre outros.

Como posto anteriormente, ao se depararem com a pergunta "*Para você o que é um jogo justo?*" as crianças brasileiras apresentaram justificativas que se relacionavam a:

a) Equiprobabilidade (chances iguais) – *"As pessoas tivessem as mesmas possibilidades de ganhar."* (CB2)

b) Regras – *"Um jogo que duas pessoas ou mais tenham o mesmo benefício e tenham que seguir as mesmas regras."* (CB9)

c) Sorte – "*Um jogo que todo mundo possa ganhar, seja na sorte."* (CB3)

d) Artefatos iguais/semelhantes – "*As pessoas tivessem coisas iguais, mesmos dados, porque se fossem diferentes, seria injusto." (*CB13)

e) Igualdade /equilíbrio – *"É injusto se for de grupo e tiver uma pessoa a menos"* (CB14)

f) Honestidade – "*É um jogo igual, sem trapacear."* (CB1)

g) Relação comportamental (atitude dos jogadores) – "*Um jogo sem 'arenga..."* (CB6)

Analisando as compreensões das crianças portuguesas ante a pergunta sobre o que seria um jogo justo, foi possível observar muitas semelhanças com as compreensões das crianças brasileiras. No entanto, a categoria referente à 'relação comportamental' não foi evidenciada por esse grupo. Essa categoria diz respeito a atitudes dos jogadores diante do jogo, como por exemplo, não brigar, não ser violento, aceitar as regras, etc. Assim, o quadro a seguir (Quadro

17) explicita as compreensões das crianças portuguesas quanto ao que seria um jogo justo, a partir de respostas espontâneas à pergunta *"Para você o que é um jogo justo?"*

Quadro 17: Detalhamento da compreensão de crianças portuguesas sobre jogo justo

COMPREENSÕES DE CRIANÇAS PORTUGUESAS SOBRE JOGO JUSTO					
Relação direta com o jogo				⟷	**Influência externa**
Equiprobabilidade (chances iguais)	Regras	Artefatos iguais/ semelhantes	Igualdade/ Equilíbrio	Sorte	Honestidade
CP1, CP6, CP7, CP9, CP15	CP2, CP4, CP5, CP10, CP11,	CP2, CP3, CP4, CP8, CP9, CP10, CP11, CP12	CP7, CP2, CP13	CP12	CP1, CP3, CP4, CP5, CP8, CP9

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Assim como as crianças brasileiras, as portuguesas também tomaram como referência os exemplos vivenciados nos jogos da presente pesquisa para justificar a maioria de suas respostas quanto ao que seria um jogo justo. Um diferencial encontrado no grupo de adultos (Estudo 1) também foi observado nas justificativas das crianças portuguesas e que não ocorreram com as crianças brasileiras do estudo que foi o uso do futebol para ilustrar suas compreensões (*Por exemplo, no futebol os dois têm as mesmas coisas, mas se um treinar mais, óbvio que ganha, mas tem os dois as mesmas coisas, então tá justo* – CP12). Semelhantemente às crianças brasileiras, três crianças portuguesas utilizaram o argumento do 'equilíbrio' e da igualdade' para caracterizar jogo justo. Esses aspectos não foram observados nos adultos do Estudo 1 *("Ter igualdade. Ter igualdade e as mesmas características para os dois* (jogadores)*"* – CP2).

No grupo de crianças brasileiras a compreensão mais evidente e mais evocada pelos estudantes esteve associada à 'equiprobabilidade' dos jogadores vencerem, enquanto as crianças portuguesas utilizaram, em maior escala, justificativas acerca da igualdade dos artefatos e/ou semelhança das cartelas. No entanto, ambos os grupos evidenciaram essas duas compreensões.

Considerando as justificativas que se apoiaram em artefatos iguais ou cartelas semelhantes como condição de jogo justo, observa-se que, uma vez mais, são evidenciados equívocos conceituais de natureza probabilística. Por exemplo, para CP10 o jogo seria justo se "*todos tivessem os mesmos números, como por exemplo os mesmos dados, para um ganhar ou o outro ganhar"* e CB2 informou que para ser justo era preciso que *"todos tivessem jogando com o mesmo dado*". Na ótica de CP10 e CB2, o uso de dados diferentes parece se configurar como característica de um jogo injusto. No caso dos dois jogos de dados, o formato dos objetos não influenciou a (in)justiça no jogo. No caso do jogo de DADOS I, o que o tornou o jogo justo foi a regra "sair par" e a justiça não foi comprometida em função da quantidade de faces diferentes nos artefatos. É óbvio que para fazer essas análises seria necessário compreender que em ambos os dados as chances de obter número par são iguais, e para isso seria imprescindível o raciocínio proporcional. Por conseguinte, a fragilidade na comparação de probabilidades motivados pelo não uso do raciocínio proporcional gerou avaliações equivocadas sobre a presença, ou não, da justiça nos jogos. No jogo de "Dados 2"novamente não há influência sobre os resultados por causa dos formatos diferenciados dos artefatos, o que determina a injustiça, nesse caso, é a regra que beneficia mais o jogador que está com o hexaedro do que o jogador que está com o tetraedro. No entanto, nesse jogo, outras regras poderiam ser criadas para torná-lo justo, como por exemplo, *sair número ímpar*.

CP2 argumentou que para um jogo ser justo é necessário que haja 'igualdade' em tudo: regras, artefatos, etc. Ele ilustrou a sua compreensão retomando o jogo de "Loto" em que os números da cartela de Pedro são 16, 18, 20, 24 e 26 e o de Ana são 1, 2, 3, 4, 5, e 6, afirmando que: "*Comparando as cartelas de Ana e Pedro, se esses números fossem relativamente iguais seria justo. Aqui não tá justo*". Esse argumento reforça incompreensões acerca de sequências aleatórias pelo não entendimento da independência de eventos (BRYANT e NUNES, 2012) e situa essas crianças no Nível Subjetivo ou Transitório do pensamento probabilístico estabelecido por Jones (2006).

Uma outra pergunta foi solicitada que as crianças respondessem: *Usar cara ou coroa para definir o ganhador de uma casa com piscina é justo ou não? Por quê?* Essa pergunta foi proposta para permitir que os estudantes analisassem não apenas o jogo em si 'cara ou coroa', mas a relação com o contexto e a premiação. Não há uma resposta certa a essa indagação, se por um lado o jogo em si é justo, pode-se julgar que a premiação é demasiada valorosa para a simplicidade do jogo.

As crianças brasileiras em sua maioria (n=11), julgaram a situação injusta, assim como as portuguesas (n=12). Retomando as justificativas das crianças brasileiras apontadas no Estudo 1, observa-se que os argumentos se assentavam em

a) Equiprobabilidade e incerteza – que dizia respeito às chances iguais e na incerteza sobre os resultados. CB1 *"é justo porque não tem como brigar, quem vai decidir é a moeda*" e CB4 "*...eles têm as mesmas chances*")

b) Sorte – associação permanente dos resultados incertos (aleatórios) com a sorte. CB14 "*é justa porque vai ser na sorte*".

c) Justiça social – referência à necessidade básica de moradia para quem não possui. CB3 "*tem tanta gente morando na rua, precisando de uma casa, e você brincando de cara ou coroa pra ver quem fica com a casa..."*

d) Tipo de jogo x premiação – julgamento de que o tipo de jogo era muito simplista para o valor da premiação, uma relação desproporcional. CB5 "*porque a pessoa ganhar uma casa muito grande com piscina não é justo com esse* jogo."

e) Mérito/Esforço – se refere à dissociação entre o jogo e o prêmio, indexando o mesmo ao esforço e ao merecimento de ter algo valioso. CB12 *"porque se a pessoa quisesse a casa tinha se esforçado para ganhar"*.

As crianças brasileiras que julgaram a situação justa, apresentaram argumentos que se relacionaram à sorte e às chances iguais (equiprobabilidade) e incerteza (aleatoriedade). Os que julgaram injusto consideraram basicamente: a justiça social, a relação entre o tipo de jogo e o valor da premiação e o mérito/esforço. A maioria dessas compreensões foi também evidenciada pelas crianças portuguesas. No entanto, CP12 apresentou uma dualidade de opinião em sua resposta, julgando o jogo justo – ao considerar a natureza do jogo - e, ao mesmo tempo injusto – ao considerar o tipo de premiação. Ela defendeu que "*É* (justo) *e ao mesmo tempo não é. É justo porque os dois têm coisas iguais e chances iguais. Mas, não faz muito sentido uma pessoa estar a fazer 'cara e coroa' por uma casa com piscina. Seria estranho. Se fosse para sortear um lápis era justo, porque é uma coisa menos valiosa".* Essa percepção de CP12 é bem interessante, pois ele enfatiza que o jogo em si é justo, mas em contrapartida, na opinião dele, a premiação não é justa para o jogo, assim, haveria justiça no jogo, mas, injustiça no contexto geral, na situação.

O Quadro 18 apresenta de forma sintética os resultados das crianças brasileiras e portuguesas sobre as compreensões apontadas a partir da análise da situação que envolve o jogo cara ou coroa e a premiação de uma casa com piscina.

Quadro 18: Compreensões de crianças brasileiras e portuguesas sobre a justiça no jogo cara e coroa com premiação de alto valor

Compreensões	Crianças Brasileiras	Crianças Portuguesas
Equiprobabilidade / Incerteza	CB1, CB4, CB9, CB11	CP3, CP7, CP12
Sorte	CB4, CB7, CB14	CP1, CP4
Justiça Social	CB3, CB15	-
Tipo de Jogo x Valor do prêmio	CB2, CB5, CB6, CB7	CP1, CP5, CP8, CP9, CP10, CP12, CP14, CP15
Esforço / Mérito	CB12	CP2, CP4, CP6, CP10

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

As crianças portuguesas focaram suas justificativas mais fortemente no fato da premiação ser demasiada valorosa para o tipo de jogo adotado. Para ilustrar essas opiniões, tem-se as falas das crianças a seguir:

- CP1 - '*porque é um jogo muito pequeno para uma coisa muito grande. Poderia ser um jogo de sorteio, tipo um "Bingo""*
- CP9 - *Nunca. Porque é uma coisa que vale muito. É um bem, uma casa e num jogo de brincadeira, acho que não é justo ganhar uma coisa séria que vai ser o sítio que nós vamos viver. Uma coisa que vale muito dinheiro num jogo de brincadeiras. Se fosse para ganhar um lápis, uma borracha eu acho justo porque é uma coisa que não vale muito dinheiro, mas uma casa é muito caro.*

Assim como as crianças brasileiras, as portuguesas também apresentaram argumentos para defender seus pontos de vista quanto à situação proposta, considerando a equiprobabilidade/incerteza *(Um jogo de cara ou coroa é justo, porque a pessoa não sabe se vai calhar cara ou coroa* – CP3); a sorte (Não porque isso é de sorte. E tem que pagar pela casa – CP4); e o esforço/ mérito (*Porque quem quiser ganhar uma casa grande tem que trabalhar. Não é justo ganhar no jogo* -CP2).

Não se observou argumentos que evocasse a justiça social pelas crianças portuguesas, como foi visto nas justificativas tanto de crianças como de adultos brasileiros no Estudo 1. As crianças e adultos brasileiros se preocupavam com o fato de haver moradores de rua e de que muitas pessoas precisam de uma casa e não possuíam. O apelo em relação à necessidade de justiça social foi evidenciado pelas crianças brasileiras (e também pelos adultos). Muito provavelmente, as crianças portuguesas não evocaram esse argumento, em função de suas experiências não contarem com a observância de pessoas em situação de rua, por exemplo. O fato das crianças portuguesas habitarem e estudarem num país que apresenta menos problemas de ordem social que o Brasil, pode ter influenciado suas experiências e suas percepções acerca da justiça social.

Foi solicitado às crianças que elas avaliassem os contextos que apresentavam situações justas e injustas a partir do jogo “Par ou ímpar” e do jogo de ”Bingo”. A Tabela 9 a seguir especifica os resultados.

Para o preenchimento do quadro não foi solicitado que as crianças apresentassem argumentos ou justificativas para sustentar suas escolhas. Elas apenas, assinalavam um X na opção que julgavam mais adequada, considerando suas compreensões não apenas sobre o jogo, como também do estabelecimento de relação entre o tipo de jogo explorado e a premiação apontada em cada situação. Alguns poucos comentários foram espontaneamente coletados. Por conseguinte, as análises explicitadas aqui são fruto de inferências obtidas a partir dos dados numéricos e de compreensões apontadas, nas poucas falas obtidas e em outros momentos da entrevista clínica.

Tabela 9: Resultado de respostas de crianças e adultos sobre situações envolvendo o jogo “Par ou ímpar” e ‘jogo de ”Bingo”’

	SITUAÇÃO	**Crianças Brasileiras**		**Crianças Portuguesas**	
		É JUSTA	**NÃO É JUSTA**	**É JUSTA**	**NÃO É JUSTA**
JOGO ‘ PAR OU ÍMPAR’	1.Sortear no “**‘Par ou ímpar’**” dentre alguns suspeitos, o que será condenado por um crime.	2	13	0	15
	2.Definir a escolha do lado do campo para iniciar o jogo no “**‘Par ou ímpar’**”	12	3	15	0
	3.Definir no **“Par ou ímpar”** o campeão do Brasileirão /Campeonato Português	2	13	0	15
	4. Tirar no **“Par ou ímpar”** quem vai pagar o sorvete	4	11	8	7
JOGO DE ” Bingo”	5. Usar um **”Bingo”** para definir o ganhador de um carro	10	5	9	6
	6. Fazer um **”Bingo”** para definir o aluno que irá representar o município num campeonato de xadrez	11	4	6	9
	7. Por meio do resultado de um **”Bingo”** selecionar a pessoa que receberá o título de “O amigo da escola”.	5	10	4	11
	8. Usar um **”Bingo”** para definir qual atleta do time vencedor ficará com o troféu	7	8	3	12

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Considerando o jogo “Par ou ímpar” houve unanimidade na opinião das crianças portuguesas e em que 87% das crianças brasileiras no item que trata do sorteio para condenar um suspeito. Esse item foi idealizado para ser considerado injusto e o item posterior, idealizado para ser visto como justo, confirma a percepção das crianças de que há contextos em que o jogo é adequado e há contextos em que não é, mesmo, que o jogo em si, seja aparentemente justo, ou seja, possibilite chances iguais aos participantes. Nessas situações, a análise de contexto é bem importante e esse fato não foi desprezado nem pelas crianças brasileiras (80%), nem pelas crianças portuguesas (100%).

O contexto que trata do uso do jogo “Par ou ímpar” para determinar o campeonato de futebol (brasileiro ou português), apresentou resultados semelhantes aos anteriores já citados, em que a maioria das crianças (13 brasileiras e 15 portuguesas) julgaram a situação injusta. No entanto, a situação que foi pensada para ser considerada justa, não foi assim observada por boa parte das crianças. Apenas 12 crianças do total de 30 julgaram a situação justa e esse fato chamou a atenção, pois, aparentemente, crianças não veem com naturalidade o fato de uma pagar o sorvete da outra. Talvez elas não tenham dinheiro e um sorvete seria algo oneroso, talvez eles gostem tanto de sorvete que não desejaria perder ou deixar de tomar um sorvete por meio de um jogo. Alguns poucos comentários colhidos apontam essas compreensões, como: *eu não tenho dinheiro*” ou “*cada uma paga o seu*” ou ainda “se *seu tivesse dinheiro comprava dois pra mim e não ia brincar de sorteio não*”.

Em relação ao jogo de ”Bingo” houve proximidade nas respostas das crianças brasileiras e portuguesas, em especial no item que considerava um ”Bingo” para ganhar um carro e receber o título de ‘amigo da escola’. O item em que as crianças deveriam avaliar a justiça no uso de ”Bingo” para definir o representante para um campeonato de xadrez houve distanciamento nos resultados. A maioria das crianças brasileiras (n=11) considerou a situação justa e a maioria das crianças portuguesas (n=9) considerou injusta. O item foi elaborado para ser ‘injusto’ porque não se deveria escolher um xadrezista para representar um município por meio de um jogo, cujo resultado é incerto. O ideal seria selecionar por habilidade, pois haveria maior probabilidade de vitória em um campeonato. A seleção poderia ser ainda por meio de etapas seletivas utilizando-se o próprio jogo de xadrez. Da forma como foi posta a situação, ela seria injusta e a maioria das crianças portuguesas estaria certa. Não se sabe, no entanto, se as crianças julgaram que todos os participantes do ”Bingo” seriam xadrezistas de mesmo nível e o jogo serviria para ‘sortear’ um entre muito bons jogadores. Se essa foi a ideia, ela é bem coerente, mas não é possível afirmar que tal pensamento passou pela cabeça das crianças.

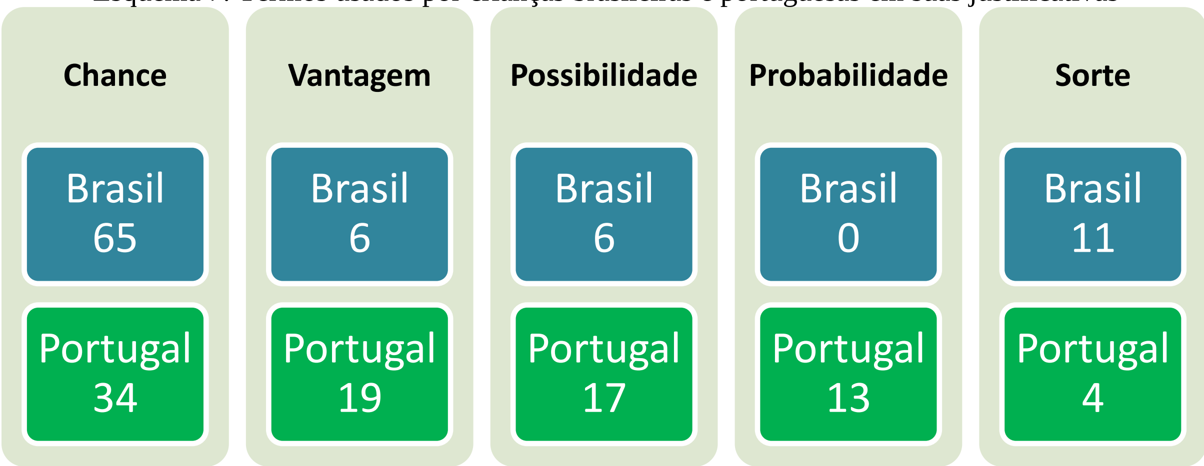
O último item que trata do uso do ”Bingo” para definir o atleta do time que ficaria com o troféu que foi idealizado para ser uma situação justa, pois todos os jogadores do time campeão teriam chances iguais de ficar com o prêmio. No entanto, a situação foi considerada pela maioria das crianças brasileiras (n=8) e portuguesas (n=12) como injusta. Alguns relatos apontam compreensões bem coerentes, como: “*o justo é ficar na escola*” ou “*o certo é ficar com o capitão*” ou “*os jogadores ficam com medalhas, não com troféu*”. Olhando por essa ótica das crianças, elas têm razão. Talvez os saberes experienciais delas apontem para essa realidade e utilizar um sorteio para tal situação seja algo desproposital.

Este estudo (Estudo 2) analisou a compreensão de crianças brasileiras e portuguesas acerca da justiça em jogos, considerando elementos essenciais à compreensão da probabilidade como a aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades (Bryant & Nunes, 2012).

Os resultados referentes à compreensão das crianças brasileiras e portuguesas apresentaram proximidade no julgamento de jogo justo e injusto. Assim, não se observou grande distanciamento de compreensão da justiça em jogos, comparando-se os dois grupos. O que se configurou como mais difícil para crianças brasileiras também foi confirmado pelas crianças portuguesas. Da mesma forma, os jogos em que as crianças brasileiras tiveram maior facilidade de análise e de justificativas coerentes foi igualmente simples para crianças portuguesas.

O maior distanciamento, na verdade, ocorreu na linguagem adotada pelas crianças brasileiras e portuguesas, que nos parece um traço muito mais cultural do que de conhecimento específico do tema. O Esquema 7 apresenta a síntese dos termos mais recorrentes utilizados pelas crianças. As expressões mais utilizadas nas justificativas por ambos os grupos foi ‘chance’, com maior destaque dado pelas crianças brasileiras que usaram mais fortemente o termo ‘sorte’. Os termos ‘provável’ e ‘probabilidade’ foram usados somente por crianças portuguesas, enquanto as crianças brasileiras utilizaram as expressões ‘possibilidade’ e ‘possível’. Como não se observou distanciamento entre as compreensões acerca dos elementos probabilísticos aqui discutidos, deduz-se que a linguagem utilizada pelas crianças tenha origem cultural, do universo em que convivem, compondo o vocabulário das comunidades em que estão inseridas.

Esquema 7: Termos usados por crianças brasileiras e portuguesas em suas justificativas



Fonte: Dados da Pesquisa (2021)

Gal (2005) destaca a linguagem como um dos elementos do conhecimento necessários ao letramento probabilístico. Para esse autor, os termos e expressões utilizadas para comunicar o acaso, faz parte de um arcabouço de conhecimentos importantes para o cidadão ser letrado probabilisticamente. Nessa direção, concorda-se com Marocci e Nacarato (2013) que consideram a linguagem como o principal sistema simbólico que vai mediar as relações com o meio social e possibilitar o conhecimento dos significados que pode conduzir à aprendizagem. Por isso, é importante, tarefas que envolvem a linguagem probabilística para o redimensionamento do pensamento probabilístico, uma vez que a apropriação de um vocabulário adequado se constituirá em ferramenta para esse pensamento (MAROCCI E NACARATO, 2013).

Os resultados relativos à primeira etapa da entrevista clínica apontaram que as incompreensões acerca da *independência de eventos* e do *raciocínio proporcional* foram evidentes em ambos os grupos, o que influenciou fortemente a avaliação equivocada sobre jogo justo e injusto. A existência de *aleatorizadores 'desonestos'* como condição de injustiça também foi evidenciada pela maioria das crianças do estudo, que é um indicador de sua compreensão de que o uso de tais artefatos viciados podem produzir jogos injustos.

Avaliar a justiça em *eventos equiprováveis* quando as sequências dos eventos aparentam um certo 'equilíbrio' (duas caras e uma coroa – duas coroas e uma cara), mostrou-se como característica de jogo justo aos participantes. No entanto, não é possível afirmar que o desempenho seria o mesmo se, embora os eventos fossem equiprováveis, as sequências não aparentassem um certo equilíbrio como, por exemplo, comparar as probabilidades de sair num lançamento de três moedas as sequências particulares 'cara-cara-cara' e 'coroa-cara-coroa'.

Para comparar eventos ‘*não-equiprováveis’* a ideia de ‘misturado’ (bolas azuis e rosas) foi a justificativa mais marcante para apoiar as escolhas dos estudantes que consideraram corretamente o jogo injusto. Algumas respostas apresentaram indícios de que as crianças consideraram implicitamente as ‘amostras misturadas’ (duas rosas e duas azuis) como mais representativa, uma vez que na caixa haviam igual quantidade de bolinhas rosas e azuis. O grande distanciamento entre as probabilidades de ocorrência dos eventos pode ter tornado óbvia a injustiça da situação, mas essa é uma evidência não conclusiva que necessita de novos estudos: as crianças, de fato, percebem esse distanciamento probabilístico ou apenas consideraram que “*azul e rosa é mais fácil sair porque tá tudo misturado” (CP12)?*

Boa parte das crianças encontra-se no Nível Subjetivo que é o mais elementar dos construtos do pensamento probabilístico de Jones *et al* (1997) e Jones (2006), e outras estão no Nível Transitório. Foram identificados alguns poucos estudantes que se encontram no Nível Quantitativo Informal, mas nenhuma criança foi identificada como estando no Nível Numérico. Em relação aos níveis de crenças (Watson & Moritz, 2003), as crianças ora estão no nível icônico (antropomorfismo, sorte) ou no uniestrutural (crença cega na justiça dos jogos) ou no multiestrutural (condição física dos dados).

As crianças de ambos os países têm dificuldades em alguns elementos da probabilidade aqui discutidos, semelhantemente a outros estudos envolvendo crianças (Bryant & Nunes, 2012; Cañizares *et al*, 2003). No entanto, este estudo dá uma perspectiva mais alargada sobre a compreensão ao considerar que elementos da probabilidade influenciam a análise e compreensão de jogos justos ou não.

Em relação à pergunta “*Para você o que é um jogo justo?”,* as crianças estabeleceram especial relação com chances iguais, uso de mesmos artefatos, regras, sorte e honestidade. Muitos desses elementos foram evidenciados nas análises dos seis jogos relativos às demandas cognitivas exploradas. E em relação à indagação “*Usar cara ou coroa para definir o ganhador de uma casa com piscina é justo ou não*?” os estudantes evocaram compreensões que se relacionavam à equiprobabilidade e incerteza, sorte, relação desproporcional entre o tipo de jogo e a premiação e mérito. Essas compreensões, ora possuem coerência do ponto de vista do conhecimento probabilístico formal, como a associação com a ‘equiprobabilidade’, ora não possuem como o ‘uso de artefatos iguais’. No entanto, somente crianças brasileiras trouxeram à tona a ideia de justiça social para justificar a injustiça de usar uma moeda para uma pessoa ganhar uma casa, quando há pessoas sem casa e moradores de rua.

Por fim, independentemente das experiências escolares das crianças e das diferenças curriculares em ambos os países, constatou-se que a compreensão sobre elementos que contemplam demandas cognitivas da probabilidade (aleatoriedade, espaço amostral, quantificação e comparação de probabilidades) influencia a avaliação de crianças sobre a justiça em jogos de azar. Isso mostra a necessidade de serem viabilizadas propostas de ensino para melhorar a capacidade dos estudantes relativa à compreensão probabilística, tomando como base suas crenças intuitivas e conhecimentos prévios sobre justiça em jogos, em concordância com alguns autores (Bryant & Nunes, 2012; Cañizares *et al*, 2003; Fischbein, 1987), especialmente acerca da independência de eventos e do raciocínio proporcional.

Deste estudo pode-se retirar algumas implicações para o ensino, reforçando primeiramente a importância do uso de jogos que pode ser usado como um rico contexto para o redimensionamento das compreensões probabilísticas das crianças e a necessidade de explorar elementos envolvendo demandas cognitivas da probabilidade desde os anos iniciais, como explorado no currículo brasileiro e necessário ainda no currículo português (PORTUGAL, 2017, 2018).

É também pertinente a realização de futura investigação que aborde como estas sugestões e a compreensão do raciocínio combinatório na análise do espaço amostral relacionando à justiça em jogos – que não foi conclusivo nesta pesquisa – podem apoiar o desenvolvimento da compreensão dos alunos sobre a probabilidade.

7.3. ANÁLISES DO ESTUDO 3**:** COMPREENSÕES DE PROFESSORES ACERCA DE JUSTIÇA EM JOGOS A PARTIR DA ANÁLISE DE PROTOCOLOS DE ESTUDANTES

Os dados apresentados nessa análise são fruto de respostas obtidas a questionamentos feitos aos professores, via Google Meet ou via formulário do Google. Os participantes responderam ao questionário, enquanto se mantinha o contato de forma síncrona com a pesquisadora, por meio da plataforma Meet, para esclarecimentos sobre possíveis dúvidas acerca dos jogos envolvidos na pesquisa. A pesquisa envolveu 15 professores dos anos iniciais, sendo 5 brasileiros do ensino regular, 5 brasileiros da Educação de Jovens e Adultos (EJA) e 5 professores portugueses também do ensino regular (uma vez que não há a modalidade de EJA em Portugal). Os professores foram identificados por códigos: professores brasileiros do ensino regular foram identificados como PBR1, PBR2...PBR5; já os brasileiros que lecionam na modalidade da Educação de Jovens e Adultos (anos iniciais), foram nomeados como PBE1, PBE2...PBE5; e os professores portugueses foram identificados como PPR1, PRP2...PPR5.

A seguir são apresentadas as análises, considerando cada jogo e o foco probabilístico em função das demandas cognitivas da probabilidade (BRYANT e NUNES, 2012). Os professores analisaram situações envolvendo os seis jogos (com algumas adaptações) utilizados nos Estudos 1 e 2, bem como observaram as respostas de dois estudantes (Estudante A e B). As respostas atribuídas aos Estudantes A e B (uma correta e uma equivocada) foram baseadas nas compreensões apontadas pelos participantes dos estudos anteriores dessa pesquisa.

Para fins de análises, foram categorizadas as respostas em função das compreensões que foi possível inferir considerando os argumentos apresentados pelos professores para avaliar as respostas dos Estudantes A e B acerca de jogos justos, ou não. Essas compreensões foram categorizadas como: i) *coerentes* quando apresentavam argumentos adequados do ponto de vista conceitual; ii) *equivocadas* quando as justificativas apontavam equívocos conceituais; e iii) *inconclusivas* quando as respostas apresentadas eram muito evasivas e não apontavam nem para a compreensão nem para incompreensão conceitual dos focos da probabilidade explorados. As respostas categorizadas como *inconclusivas* também incluem argumentos em que os professores parecem se esquivar de se posicionar e apenas repetem a informação apontada pelos Estudantes A e B.

7.3.1. Aleatoriedade e justiça em jogos

7.3.1.1. Jogo de Justo (“Loto”)

Foco: Sequências aleatórias/ Independência de eventos

Nesse jogo de “Loto”, os estudantes (Estudos 1 e 2) foram orientados a observarem as cartelas dos jogadores (Pedro: 16, 18, 20, 24, 26 e 28; Felipe: 44, 12, 27, 32, 6 e 53; Ana: 1, 2, 3, 4, 5 e 6) e questionou-se: *Esse jogo é justo para Pedro, Felipe e Ana?* Duas das respostas obtidas no Estudo 1 ou Estudo 2 foram selecionadas e atribuídas a estudantes fictícios (Estudante A e Estudante B) para análise dos professores. Destacam-se a seguir, as respostas dos estudantes que foram alvo de análise dos professores.

***ESTUDANTE A→** *É justo, porque qualquer um pode ganhar. Com estas cartelas todos têm as mesmas chances de ganhar.*

***ESTUDANTES B→** *Não é justo, pois Ana tem menos chances de ganhar. Os números da cartela dela estão em ordem e é muito mais difícil sair números em sequência.*

Esse jogo é considerado justo, pois todos os jogadores – Pedro, Felipe e Ana – possuem iguais probabilidades de obterem sucesso. Dessa forma, o argumento conceitualmente coerente é o do Estudante A. O Estudante B apresenta incompreensão acerca da independência de eventos, ao julgar que numa determinada sequência obtida de forma aleatória, um resultado específico teria mais chances de sair que outros. A equivocada ideia de que uma sequência particular que aparenta certa ordenação tem menor probabilidade de ser sorteada que outra sequência de aparência mista – resultado também obtido nos Estudos 1 e 2, com os estudantes – foi evidenciado por 10 dos 15 professores participantes da pesquisa, por meio de justificativas como:

- PBR4: *De acordo com a compreensão do Estudante A, não importa o nível de disposição dos números nas cartelas, pois os sorteios são realizados ao acaso. Porém para o Estudante B, existem cartelas que podem dar mais chances de ganhar para os jogadores. Na minha compreensão as disposições dos números nas cartelas podem, sim, influenciar no resultado do jogo, sendo pouco provável que sejam sorteados os números em sequência como descrito na cartela de Ana.*
- PBE5: *O Estudante A provavelmente levou apenas em consideração a oportunidade que estão tendo para a "sorte" ou o "azar", não analisou os números das cartelas. Enquanto que, o Estudante B observou que Ana teria menos chance de ganhar por conta de sua cartela. Foi justo em sua resposta.*
- PPR5: *A Estudante A não tem razão. Está correto o comentário da Estudante B, pois a Ana não terá as mesmas hipóteses*[22] *que as colegas, por ter os números em sequência, pois considero que as probabilidades de sair a sequência de números naturais da Ana é muito baixa.*

Essas avaliações acerca das compreensões dos Estudantes A e B apontaram equívocos de alguns professores acerca de sequências aleatórias, que se traduz num frágil entendimento da independência de eventos, em conformidade com Bryant e Nunes (2012). Para esses

[22] A expressão, neste contexto, parece ser sinônima de chances

professores, os números sequenciados de Ana (1, 2, 3, 4, 5 e 6) teriam menor chances de serem sorteados, razão pela qual eles concordaram com o argumento apresentado pelo Estudante B.

Consideram-se equivocados, também, os argumentos que apresentavam concordância com ambos os estudantes, pois se traduzia no paradoxo de que o jogo seria justo e injusto ao mesmo tempo. Nessa perspectiva, o professor brasileiro PBR3 apresentou uma resposta que considerou a dualidade de pensamentos dos dois estudantes, quando afirmou que: *O Estudante A fez uma análise fria e racional, partindo do princípio de que irá ganhar o jogo aquele que tiver mais sorte, independente da ordem dos números. O Estudante B partiu do princípio de que é improvável que sejam sorteados números em sequência. Ambos os pensamentos fazem sentido.* Na realidade, a resposta de cada estudante (A e B) faz sentido para ele próprio, ou seja, ele encontra um apoio em suas crenças e intuições para justificar suas escolhas, por mais absurda que nos pareça. Considera-se, no entanto, que o comentário "*ambos os pensamentos fazem sentido"* está relacionado à concordância do professor sobre as compreensões dos estudantes, a partir de uma releitura das argumentações por eles apresentadas. É possível que PBR3 não tenha atentado que qualquer sequência particular seria igualmente *improvável*, não apenas a sequência ordenada, e é aí onde mora o equívoco da compreensão sobre a independência de eventos: julgar que há maior ou menor probabilidade de serem obtidos resultados que, nesse caso, são equiprováveis. Assim, nessa situação aleatória qualquer sequência possível formada por seis números (de 1 a 90) teria igual chance de ser sorteada.

Considerando o construto do pensamento probabilístico referente à 'independência de eventos' (JONES, 2006), constatou-se que boa parte dos professores apresentou compreensões que se assemelham às dos estudantes dos Estudos 1 e 2. As ideias apresentadas nesse jogo específico ("Loto"), pelos professores parecem indicar um tipo de raciocínio típico do Nível Subjetivo (crença de que eventos estão relacionados e uso de raciocínio subjetivo: sorte, experiência no jogo) ou do Nível Transitório (mostra algum reconhecimento de que eventos consecutivos podem, ou não, estar relacionados). Assim, a fragilidade na compreensão de sequências aleatórias, por parte de um número substancial dos professores entrevistados (n=10) ficou evidente. Esse fato está em consonância com Bryant e Nunes (2012) que afirmam que a ideia de independência de eventos aleatórios é geralmente bastante difícil para crianças e até adultos entenderem. Corroborando com esse fato, Bennett (2003) defende que:

> As crianças têm dificuldades de aceitar que, numa experiência aleatória, uma sequência de aparência regular é tão provável quanto uma de aparência irregular. A idade parece não resolver esse problema (...). Até mesmo adultos

> têm noções errôneas sobre a aparência da aleatoriedade. (BENNET, 2003, p.192)

Dos cinco professores que apresentaram análises que apontaram, possivelmente, para compreensão da independência de eventos, tem-se os que defenderam que:

- PBR1: *Estudante A, compreende a probabilidade de que todos os números saem sem distinção. O Estudante B não tem a compreensão de probabilidade.*
- PBE4: *Concordo com o Estudante "A", pois se cada cartela tem seis números, as chances de cada um ganhar são as mesmas; discordo do Estudante "B".*
- PPR2: *O Estudante A considera que qualquer um pode ganhar, pois é um jogo aleatório, sem qualquer tipo de estratégia e qualquer número pode sair, por esse motivo não é válido o que o Estudante B refere.*

Vale salientar que as justificativas apresentadas pelos professores contêm alguns indícios que procurou-se traduzir acerca de suas compreensões e em conformidade com o que foi evidenciado em suas breves respostas, foram inferidos possíveis entendimentos. Assim, embora considerando que o professor PBR1 tenha apresentado uma análise que acredita-se ter alguma coerência, não se sabe o que ele quis dizer exatamente com "o *Estudante B não tem a compreensão de probabilidade*. Na verdade, não está claro se o professor avaliou que o Estudante B não compreende sequências aleatórias, e por conseguinte, tem fragilidade em independência de eventos e nem se ele (o professor) tem esse entendimento também. Mas, as pistas apontam que ele não concorda com o Estudante B, ou seja, essa discordância pode ser uma compreensão de que os ensaios consecutivos não estão relacionados (JONES, 2006).

O Professor PBE4 por sua vez, considera a justiça em função da quantidade de números presentes nas cartelas e esse argumento também não explicita a compreensão da independência de eventos, mas dá indícios de que essa seja a razão porque ele não se detém em nenhuma sequência particular (ordenada ou não). O Professor PPR2 discorda do Estudante B, se apoiando na aleatoriedade e incerteza inerente aos resultados de um sorteio, usado como argumento pelo Estudante A. Por conseguinte, essa análise apoia a compreensão de que os resultados são equiprováveis, o que é coerente do ponto de vista conceitual. De forma geral, entende-se que esses professores têm consciência de que qualquer número pode ser sorteado e de que as cartelas possuem iguais chances de serem vencedoras, especialmente por descartarem os argumentos do Estudante B.

Em conformidade com o que foi possível inferir, considera-se que compreensões semelhantes às apresentadas por esses professores indicam níveis mais elevados do pensamento probabilístico de Jones (2006) no que se refere à compreensão da independência de eventos, quais sejam o Nível Quantitativo Informal e/ou Numérico.

7.3.3.2. Jogo de ”Bingo” – Jogo Injusto

Foco: Aleatorizadores ‘desonestos’ /Independência de eventos

Nesse jogo de ”Bingo”, há 30 bolinhas numeradas de 1 a 30 no globo, no entanto, as bolinhas cujos números contêm o algarismo 2 são mais ‘pesadas’ e, portanto, têm maior probabilidade de saírem do globo. Há dois jogadores disputando. Eles possuem cartelas com os seguintes números: 15, 9, 27, 12, 26 e 2 (Paula) e 25, 26, 27, 28, 29 e 30 (André).

Nesse item os professores tiveram que analisar as seguintes respostas sobre dos Estudantes:

***ESTUDANTE A→** *Sim. Porque tem 30 bolinhas no globo e nas cartelas todos os números só vão até 30. Qualquer um tem chances de ganhar*.

***ESTUDANTES B→** *Não. André tem mais chance de ganhar porque ele tem mais números com 2, embora os números dele estejam em sequência.*

Esse é um jogo injusto evidenciado pela ‘desonestidade’ dos aleatorizadores e, assim como nos Estudos 1 e 2, com os estudantes, a maioria dos professores não apresentou dificuldades em considerar tal fato, ao concordar com o Estudante B. Dos 15 respondentes da pesquisa, apenas três se equivocaram.

Dos professores que julgaram adequadamente que o Estudante B apresentou argumentos mais coerentes considerando a ‘desonestidade’ dos aleatorizadores, foram observadas respostas como as de PBR3 que afirmou que “*O estudante A não avaliou que por serem mais pesadas, as bolinhas com o número 2 em sua composição teriam mais chances de serem sorteadas. O Estudante B compreendeu que pelo fato das bolinhas com número 2 em sua composição serem mais pesadas teriam maior probabilidade de serem sorteadas. Penso que a análise do Estudante B faz mais sentido”* e PBE1 que argumentou: “*Discordo do Estudante A. Se o peso favorece sair mais bolinhas formadas pelo número 2, e André tem uma chance a mais que*

Paula em sair seus números, não vejo justiça, ainda que o sorteio seja algo aleatório. O próprio esquema do peso, já predispõe para mim, injustiça. Estudante B - Concordo, André terá mais chance (uma a mais), mas terá, devido ao esquema do peso.” PPR5 pontuou: *“Não concordo com o comentário da A mas, sim, com o de B, pois se as bolas com o algarismo 2 têm mais peso e saem primeiro, o André tem mais probabilidades de ganhar, visto ter 5/6 de números com 2 e a Paula 4/6 de números com 2”.*

Observou-se equívocos nas argumentações de PBR5 que retomou a questão de sequências ordenadas ao afirmar que: “*Mesmo que os números venham em sequência, não vejo nenhuma possibilidade de trabalhar as chances para ganhar, porque os números são poucos e podem sim, vir números que contemplem as duas cartelas. Acho que a Estudante A está correta”.* Nos parece que PBR5 entende que mesmo que a cartela tenha sequências ordenadas (no jogo anterior ele julgou que sequências ordenadas seriam mais difíceis de sair), o fato de só haver 30 bolinhas numeradas no globo é condição suficiente para garantir a justiça, descartando a ‘desonestidade’ dos aleatorizadores. Já PBE4 foi influenciado pelo número maior de bolinhas que não possuíam o número 2 em sua composição, ou seja, havia mais bolinhas ‘honestas’ do que ‘desonestas’ no globo. Ele afirmou que: *Concordo com o Estudante "A", pois as chances seriam para os dois. Discordo do Estudante "B", pois mesmo ele tendo só bolinhas com o 2 em sua composição, há uma quantidade de bolas maior dentro do globo que não possuem o 2 em sua composição.* Esse pensamento de PBE4 pode estar relacionado à ideia de equilíbrio, ou seja, se por um lado André tem a vantagem de ter mais números com 2 em sua cartela, Paula também tem vantagem porque há mais números sem 2 no globo (como na sua cartela). Assim a ‘desvantagem’ de Paula seria compensada ou equilibrada pelo fato de no globo haver 18 bolas em 30 sem o número 2.

Somente a observância de aleatorizadores ‘‘desonestos’’ não encontra apoio nos construtos do pensamento probabilístico de Jones *et al* (1997) e Jones (2006). Imagina-se, no entanto, que pessoas que apresentam compreensões semelhantes à de PBR5 e que invocam a questão das sequências ordenadas parece indicar um tipo de raciocínio típico dos Níveis Subjetivo ou Transitório (JONES *et al* , 1997).

7.3.2. Espaço amostral e justiça em jogos

7.3.2.1. ”Bolinhas na colher” – Jogo Injusto

Foco: análise de eventos não -equiprováveis/ Espaço amostral

Para avaliar a análise do espaço amostral considerando a comparação de eventos não-equiprováveis foi usado um jogo injusto com 120 bolinhas azuis e 120 rosas que seriam acomodadas numa colher com quatro furos. Os professores deveriam analisar as respostas dos Estudantes A e B ao questionamento se havia justiça no jogo considerando os jogadores: Miguel que ganharia se completassem os furos da colher com 3 bolinhas azuis e 1 rosa; Tiago se fossem 3 bolinhas rosas e 1 azul e Amanda se fossem 2 bolinhas rosas e 2 azuis.

Os professores tiveram que analisar as seguintes respostas dos Estudantes A e B

***ESTUDANTE A→** *Sim. Porque todos têm que tirar duas cores, logo as chances são iguais.*

***ESTUDANTES B→** *Não. Porque Amanda tem mais chances de ganhar, porque tem mais jeitos de organizar duas bolinhas de cada cor na colher.*

O jogo é injusto, pois, considerando o espaço amostral e analisando as possibilidades de cada evento, percebe-se que há 4 possibilidades em 16 de obter os eventos destinados a Miguel e Tiago (três bolas de uma cor de uma de outra) e 6 possibilidades em 16 de sair o evento de Amanda (duas cores de cada)[23]. Assim, Amanda teria maior probabilidade de sucesso que os demais jogadores.

Nos Estudos 1 e 2, os estudantes não consideraram a quantidade de possibilidades referentes à disposição das ”Bolinhas na colher” para comparar as probabilidades de ocorrência dos eventos e, assim, verificar que eles não eram equiprováveis e, portanto, injustos. Esperava-se que os professores atentassem para esta análise, especialmente em função do comentário do Estudante B (...*porque tem mais jeitos de organizar duas bolinhas de cada cor na colher*), mas não foi o que ocorreu. Apenas o professor PBE3 informou *“fiz aqui as combinações possíveis de respostas e de acordo com as minhas combinações, Amanda tem, sim, mais chances de ganhar, pois a composição de sair duas bolinhas rosas e duas azuis tem mais jeitos de serem combinadas”.* Em contrapartida, PBE1 pareceu discordar, quando pontuou que o Estudante B está parcialmente equivocado exatamente porque ele utiliza como argumento as formas de

[23] Há ainda 1 possibilidade em 16 pra sair tudo rosa ou tudo azul

organização das ”Bolinhas na colher”: *“Concordo em parte. Não é justo pela justificativa que dei anteriormente* (relação entre quantidade de cores das bolas na caixa e no evento de Amanda), ***não pela maneira de organizar as bolinhas****”.*

Alguns professores estabeleceram uma certa relação de equilíbrio proporcional, (também pontuado por PBE1) para apoiar as justificativas do Estudante B, confirmando que Amanda teria mais chances de vencer. Por exemplo: PBR3 pontuou que “*O Estudante B avaliou que Amanda teria mais chances de ganhar o jogo, partindo do princípio que é mais fácil caírem 2 bolinhas de cada cor, já que as duas cores estão na mesma quantidade” e* PBE5 afirmou que *“o Estudante B foi coerente quando disse que Amanda tem mais chance de ganhar pela igualdade de cores/ quantidade”*. Nos parece que na ótica desses professores há uma certa proporcionalidade entre o evento que Amanda deve conseguir no jogo (dois de cada cor) e a quantidade de bolinhas da caixa, considerando as cores (120 de cada cor). Essa percepção tem relação com a amostra representativa, ou seja, os resultados que envolvem duas bolas azuis e duas bolas rosas são uma amostra mais representativa da população (120 bolas azuis e 120 bolas rosas) do que os demais eventos (três de uma cor e uma de outra). As justificativas a seguir apontam para essa compreensão:

- PBE4 - *Concordo com o Estudante "B", pois se há a mesma quantidade de bolinhas de cada cor, há uma chance maior de sair 50% de cada cor.*
- PPR5 - *A Estudante A não percebeu que com o mesmo número de bolas de cores diferentes na caixa, o resultado da Amanda está favorecido em relação aos colegas, pois* ***imita*** *a relação existente entre as cores.*

Observa-se que PPR5 parece explicitar a representatividade da amostra quando fala, “pois, *imita a relação entre as cores”.* Assim, a população de 120 bolas azuis e 120 bolas rosas estaria representada na amostra do jogo de Amanda, permitindo que ela tivesse mais chances do que os demais colegas. Dessa forma, o jogo seria caracterizado como injusto, pois haveria menos chances para os demais jogadores.

Dos professores que se equivocaram em suas análises, destaca-se PBE2 que informou: “*Concordo com o A, por serem iguais a quantidade total em cores, o B não retrata chances e, sim, sorte, pena não haver regras*” e PPR2 que afirmou: “*É justo, de acordo com o Estudante A, pois tem razão, pode sair qualquer uma das combinações”.* PBE2 parece considerar que, como foram propostos eventos diferentes aos jogadores, essa condição é indício de não haver regras no jogo ou das regras serem diferentes para os jogadores, e, portanto, injustas. E essa foi uma compreensão também apontada por algumas crianças dos estudos anteriores. A análise de PPR2 considerou que qualquer evento poderia ocorrer e isso é um fato, no entanto o que precisaria ser analisado para avaliar a justiça era se há algum evento possuindo maior ou menor probabilidade de ocorrência que os outros, o que caracterizaria a injustiça no jogo. Compreensões semelhantes à de PBE2 e PPR2 podem estar relacionadas a crenças de que em um experimento aleatório os eventos são todos equiprováveis (WATSON e MORITZ, 2003). Esse fato foi também observado nos estudos de Abrahamson (2006, 2009) *apud* Bryant e Nunes (2012) cujos participantes demonstraram dificuldades em perceberem o espaço amostral em sua complexidade. Ou seja, apresentaram fragilidade para perceber a diferença de probabilidades que envolve cada possibilidade isoladamente e que é equiprovável ou determinados ‘agregados’ de possibilidades (por exemplo, sair 3 rosas e 1 azul ou sair 2 rosas e 2 azuis) e que nem sempre são equiprováveis.

Algumas respostas foram classificadas como **inconclusivas**, pois não permitiram inferir quem os professores julgaram que estava correto em suas avaliações: o Estudante A ou o Estudante B. Esse tipo de resposta também pode indicar um receio do professor em se posicionar e se equivocar em suas avaliações. Por exemplo, PBR1 informou: *O Estudante A, compreende que a probabilidade para os três são iguais, mesmo sendo quantidades de cores diferentes. Já o Estudante B percebe a disposição das bolinhas.* Não está claro quem o PBR1 considerou equivocado em suas justificativas. Ele apenas traduziu o que cada estudante pontuou, sem se posicionar. Assim como PBR2 que informou “*Neste jogo o Estudante A entende que a regra é colocar pelo menos uma bolinha de cada cor para ganhar, sendo assim, tendo a mesma quantidade de bolinhas todos têm chance de ganhar. O Estudante B compreendeu que cada jogada o jogador escolhe o critério das sequencias das cores, sendo assim, as chances de ter duas bolinhas de cada cor ao ver dele é mais vantajoso”.*

De uma forma geral, considerando as análises referentes a esse jogo, não se pode afirmar que os professores compreendem o espaço amostral, enquanto conjunto de possibilidades, e, assim, analisarem os elementos dos eventos para avaliar e comparar as probabilidades em cada caso. Apenas PBE3 pareceu dar indícios dessa compreensão ao explicitar em sua fala que tem mais jeitos de serem combinadas duas bolinhas de cada cor. E, embora, ele não tenha apresentado uma lista exaustiva, compreensões semelhantes às apresentadas por PBE3 se insere entre os níveis Quantitativo Informal e Numérico do pensamento probabilístico (JONES *et al*, 1997). Os demais professores que apresentaram argumentos consistentes se apoiaram na relação proporcional das quantidades de bolinhas e na representatividade da amostra que não tem apoio no quadro do pensamento probabilístico de Jones *et al* (1997). Do total de professores pesquisados, oito apresentaram análises coerentes, três se equivocaram ao opinar que o Estudante A teria razão e quatro foram inconclusivos por fazerem somente descrição ou detalhamento das falas dos estudantes, sem se posicionarem.

7.3.2.2. Cara ou Coroa – Jogo justo

Foco: análise de eventos equiprováveis/Espaço amostral

No jogo Cara ou Coroa, jogado com duas moedas distintas, os professores tiveram que analisar as impressões dos Estudantes A e B ao serem questionados sobre a justiça no jogo, considerando as probabilidades que as jogadoras Rute (faces iguais) e Cristina (faces diferentes) teriam ao lançarem as duas moedas. Aos professores foi solicitado que analisassem as respostas dos estudantes a seguir.

***ESTUDANTE A**: "*Sim. Porque Cristina e Rute têm as mesmas chances de ganharem."*

***ESTUDANTES B**: "*Não. Cristina tem mais chances de ganhar, porque pode sair cara e cara ou coroa e coroa e Rute só tem um jeito: cara e coroa."*

Esse é um jogo justo porque Rute e Cristina têm chances iguais, ou seja, cada uma possui duas possibilidades em quatro de obterem seus resultados. Para tal, é necessário analisar as possibilidades de cada evento (faces iguais – cara-cara, coroa-coroa; faces diferentes: cara-coroa, coroa-cara) para verificar que são equiprováveis.

Nas respostas dos Estudantes A e B foram evidenciados três das quatro possibilidades do espaço amostral no lançamento de duas moedas, quais sejam: cara-cara; coroa-coroa e cara-coroa. A explicitação dos elementos do espaço amostral parece ter sido observada pelos professores. No entanto, apenas seis professores evidenciaram compreensão plena, pontuando que cara-coroa e coroa-cara eram ensaios diferentes. Três docentes apresentaram argumentos que não nos permitem inferir suas compreensões e seis se equivocaram, julgando que as chances eram diferentes e, portanto, concordando com o Estudante B.

Dos professores que julgaram que o Estudante A estava correto em sua avaliação, fica evidente (em PBR5 e PBE2) a compreensão de que as possibilidades cara-coroa e coroa-cara são distintas:

- PBR5: *Concordo com o Estudante A, o jogo é justo para as duas jogadoras, as possibilidades de cair faces iguais e diferentes são as mesmas, pode dar cara/cara, coroa/coroa, cara/coroa ou coroa/cara, duas possíveis formas das moedas caírem. O Estudante B, apenas destacou uma possibilidade para Rute.*
- PBE2: *Válida a análise do A, o B não percebeu que as chances de Rute também duplicam no vice-versa.*
- PPR2: *É justo, de acordo com o Estudante A, têm as mesmas possibilidades*.

O raciocínio combinatório é importante para compreender o espaço amostral (BRYANT E NUNES, 2012). No entanto, há indícios de fragilidade na compreensão do espaço amostral, por parte de alguns professores da pesquisa que consideraram que o Estudante B teria razão. Essa compreensão equivocada que impossibilita a percepção de que cara-coroa e coroa-cara são possibilidades distintas é um equívoco comum (SILVA, 2016; BRYANT e NUNES, 2012) que se dá pela falta de amplo entendimento do espaço amostral.

As falas a seguir, evidenciam a compreensão equivocada de alguns professores, de que, nesse jogo, as chances de sair faces iguais e faces opostas seriam diferentes.

- PBR4 → *O Estudante B tem um pensamento coerente, na realidade a possibilidade de sair faces diferentes é menor.*
- PBE4→ *Discordo do Estudante "A', as chances não são iguais para ambas. Concordo como o Estudante "B", pois realmente a chance de sair faces iguais seriam maiores*.
- PPR1→ *O Estudante A não compreendeu bem todas as hipóteses vencedoras que as jogadoras tinham. O Estudante B percebeu isso bem. Há mais probabilidade de a Cristina ganhar porque as condições vencedoras são em maior número que as que são dadas a Rute*.

Nessa direção, pode-se dizer que esses professores listam um conjunto incompleto de resultados para esse tipo de experimento. Respostas específicas que se assemelham a estas parecem indicar um tipo de raciocínio típico do Nível Transitório do pensamento probabilístico de Jones *et al* (1997). Equívocos quanto à compreensão do espaço amostral foi também evidenciado no estudo de Campos e Pietropaolo (2013), quando os professores demonstraram não possuir repertório de conhecimento que desse conta de entender e listar todos os elementos do espaço amostral.

Foram considerados resultados inconclusivos as justificativas apresentadas por exemplo, pelos professores PPR1 (*Estudante A não leva em conta que a probabilidade é cair faces opostas. A Estudante B também não considera a probabilidade de mais cair faces opostas*) e por PPR4 (*O Estudante A assume que têm as mesmas chances, pois há dois lançamentos e igual probabilidade. O Estudante B já assume que há mais probabilidade para a Cristina*) porque não apresentaram argumentos que nos permitissem avaliar suas compreensões sobre o jogo e o foco probabilístico explorado.

7.3.3 Comparação de probabilidades e justiça em jogos

7.3.3.1. Jogo de ”Dados 1” - Jogo justo

Foco: comparação de probabilidades em espaços amostrais distintos

Nesse jogo justo, o foco é a comparação de probabilidades considerando espaços amostrais distintos. Dois jogadores usaram dados em forma de hexaedro (Marcos) e octaedro (Paulo) para avaliar as probabilidades de sair número par. Em ambos os dados, as probabilidades de sair par são de 50%, por conseguinte, as chances dos jogadores são iguais, traduzindo-se num jogo justo. Assim, os professores tiveram que analisar as respostas dos estudantes A e B destacadas a seguir.

***ESTUDANTE A:** *"Sim. Porque os dois têm que tirar par. E cada um tem metade das chances de tirar par em seus dados*."

***ESTUDANTE B**: *"Não. Paulo tem mais chances de ganhar porque tem mais números pares em seu dado."*

Apenas quatro professores apresentaram argumentos que apontaram para compreensão acerca da análise proporcional necessária para comparar probabilidades de eventos que ocorrem em espaços amostrais distintos, a exemplo de:

- PBR2 - *O Estudante A entende que mesmo o outro tendo mais números pares, mas também aumenta a quantidade de números impares, deixando os dois com chances iguais. O Estudante B não leva em consideração que de Paulo aumentou igualmente os números pares e impares, se fixando só nos números pares*.
- PBE4 - *Concordo com o Estudante "A", porque 50% dos números de cada dado é par e 50% é ímpar. Discordo do Aluno "B", pois mesmo havendo uma quantidade maior de números no dado de Paulo, ele também possui 50% de números pares e 50% de números ímpares.*
- PPR4 - *O Estudante A compreendeu a situação, pois está na mesma proporção. O Estudante B assume que como há mais números e, consequentemente, mais números pares tem chance de ganhar.*

Esses professores refletem acerca dos eventos considerando não apenas a quantidade de números pares em cada dado, mas, especialmente, estabelecendo a relação entre a quantidade de números pares (casos favoráveis) e a quantidade de faces dos dados (casos possíveis). Pode-se inferir que pessoas com pensamentos semelhantes a esses professores se encontram entre os Níveis Quantitativo Informal (compara eventos de espaços amostrais distintos e justifica usando julgamentos numéricos consistentes, distinguindo situações justas e injustas) e Numérico (compara usando probabilidade numérica) dos construtos do pensamento probabilístico de Jones *et al* (1997).

Os demais professores apresentaram equívocos em suas conclusões, quase sempre por não estabelecerem a relação proporcional que a situação exigia. E esse aspecto foi largamente observado nos participantes dos Estudos 1 e 2 que se encontravam no Nível Subjetivo (JONES *et al*, 1997). Para ilustrar, considera-se as falas a seguir:

- PBR4 - *O Estudante B tem um pensamento coerente, quanto mais números pares a probabilidade de sair é bem maior.*
- PBE3 - *Estudante A - discordo, pois tem mais números pares no dado de Paulo. Estudante B - concordo, pois Paulo tem quatro chances de sair números pares em seu dado e Marcos só tem três.*
- PPR5 - *Concordo com a afirmação de B, pois no dado do Paulo há a possibilidade de sair quatro números pares e na do Marcos apenas três pares. Parece-me que o Estudante A não levou em conta a quantidade de números pares à disposição dos*

jogadores, apenas a possibilidade dos dois jogadores poderem atirar os dados que têm números pares e ímpares.

A abordagem desse jogo, nesse contexto, considerando as opiniões dos Estudantes A e B, apontaram para fragilidade da compreensão dos professores no que diz respeito ao uso da relação proporcional para se comparar probabilidades em espaços amostrais distintos. Esperava-se que as incompreensões apontadas pelos estudantes não ecoassem tão fortemente nos professores, mas, em todos os grupos de docentes, essa fragilidade foi observada. Os estudos de Antonopoulos e Zacharo (2013), com crianças, indicaram que os participantes são influenciados pela quantidade absoluta dos elementos que compõem os eventos, desconsiderando a proporcionalidade e este fato foi também apontado em algumas compreensões dos professores. Outras pesquisas, como a de Campos e Pietropaolo (2013) e Felisberto de Carvalho (2017), apontam para fragilidade de compreensão dos professores em temas probabilísticos semelhantes.

7.3.3.2. Jogo de *“Dados 2”* - Jogo injusto

Foco: comparação de probabilidades em espaços amostrais distintos

Nesse jogo foram usados dois dados: um hexaedro (Daniele) e um tetraedro (Priscila). Os Estudantes A e B tiveram que analisar a justiça no jogo considerando a probabilidade de sair número menor que quatro em ambos os dados. Os professores foram convidados a analisarem as respostas a seguir:

- ESTUDANTE A: *"Sim, porque nos dois dados, há três números que podem sair: 1, 2 e 3. É justo."*

- ESTUDANTE B: *"Não, porque o dado de Priscila tem menos faces e, portanto, mais chances de cair número menor que quatro do que no de Daniele que tem muitas faces."*

O jogo é injusto por haver maiores probabilidade de sair número menor que quatro no tetraedro do que no hexaedro e essa conclusão está bem evidente na fala do Estudante B. Tal fato pode ter influenciado as análises da maioria dos professores (nove dos quinze) que considerou o jogo injusto, apresentando argumentos que focaram em:

i) ‘Chances de erro’ →

a. PBR2 - *“No caso do Estudante A percebeu só a presença dos números 1, 2, 3, esquecendo que há a existência de outros números maiores que quatro que foi o que percebeu o Estudante B. No caso do dado lilás* (tetraedro)*, só há uma face que pode fazer Priscila perder e Daniele tem três possibilidade de perder”.*

b. PBE3 - *Estudante A - discordo, pois o dado de Daniele tem mais possibilidades de números maiores que quatro e tem mais números, aumentando, assim, a chance de "erro".*

c. PPR3 - *“Os dois dados têm o mesmo número de números inferiores a quatro, mas a probabilidade de sair um número não inferior a número é maior no dado da Daniele”.*

ii) Probabilidade de acerto →

a. PBE4- *“Discordo do Estudante "A", pois as chances são diferentes, já que os dados apresentam quantidades diferentes de faces. Concordo com o Estudante "B", pois Priscila teria 75% de chances, enquanto Daniele teria apenas 50%”.*

b. PPR1 – *“Eu acho que concordo com o Estudante B. Ao jogar com o tetraedro tenho mais hipóteses de ganhar porque três das quatro faces são "ganhadoras". Com o dado comum só três das seis são ganhadoras. A probabilidade de vencer será maior com o primeiro dado”.*

c. PPR5 – *“A Estudante B compreendeu o jogo melhor que a A, pois as chances de vencer de Priscila são superiores que as da Daniele, ou seja há três em quatro para Priscila vencer e três em seis para Daniele vencer”.*

Nessas justificativas os professores atentaram para a relação proporcional, especialmente observada nas falas de PBE4, PPR1 e PPR5 acima supracitadas. PBE4 apresentou as probabilidades em porcentagem para apoiar suas análises, enquanto PPR1 e PPR5 apontaram a probabilidade por meio da explicitação da razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis.

Quanto às ‘chances de erros’ (termo utilizado por falta de uma expressão melhor), pontuadas por PBR2 e PBE3, apesar das justificativas serem coerentes, não está claro se há o entendimento da relação proporcional ou se houve apenas a análise comparativa das quantidades de números que não beneficiaria os jogadores nos dados (chances de erro), uma vez que a proporcionalidade não foi considerada pela maioria no Jogo de ”Dados 1”. Assim, concluir que no tetraedro tem somente um número (face 4) que leve ao insucesso, enquanto no hexaedro há três números (faces 4, 5 e 6), pode ter sido uma comparação quantitativa não proporcional, ou seja, não se estabeleceu para o insucesso a relação proporcional (tetraedro: 1 em 4 e hexaedro: 3 em 6). Já PPR3 pontua que há maior probabilidade de sair número maior que quatro no hexaedro. Nesse caso, é possível que esse professor tenha estabelecido uma relação proporcional, mas não é certo que isso tenha acontecido.

Os professores que se equivocaram em suas respostas, ora acreditavam que ambas as justificativas apresentadas pelos estudantes estavam corretas (*Ambos analisaram com coerência e suas análises fazem sentido* – PBR3); ora pontuaram a influência do formato dos dados (*O Estudante A tem lógica ao afirmar que as possibilidades são as mesmas. O que muda é a forma geométrica da figura, a essência continua, que seriam os números menores que quatro. Logo a possibilidade seria igual* – PBR4). O formato dos dados é pontuado por Watson e Moritz (2003) como antropomorfismo que é uma crença intuitiva (nível icônico). Causa estranheza o paradoxo da concordância simultânea com os Estudantes A e B proposta por PBR3 porque pressupõe que o professor tenha julgado um mesmo jogo (“DADOS 2”) como justo e injusto ao mesmo tempo. É oportuno esclarecer que se a fala do Estudante A indicasse que o jogo era justo, a do Estudante B avaliaria esse mesmo jogo como injusto, assim, seria de se esperar que os professores analisassem as respostas desses Estudantes (A e B) do ponto de vista matemático, para interpretar quem estaria correto em seus julgamentos, considerando conceitos probabilísticos envolvidos na situação. Dessa forma, conjectura-se, que é provável que esse professor não tenha atentado para a relação proporcional necessária à análise comparativa dos eventos, mesmo concordando com a fala do Estudante B.

É possível que o contexto e também as informações atribuídas às compreensões doa Estudantes A e B tenham influenciado as respostas dos professores nos dois jogos que exploraram a comparação de probabilidades em espaços amostrais distintos. No Jogo de ”Dados 1”, a maioria dos professores se equivocou e não atentou para a relação proporcional que a situação exigia. Já no Jogo de ”Dados 2”a observância da relação proporcional foi mais evidente, como um volume maior de argumentações coerentes, apontando para um tipo de raciocínio comum aos Níveis Quantitativo Informal e Numérico de Jones *et al* (1997). No entanto, é necessário, refletir quanto ao contexto e às respostas dos Estudantes que podem ter auxiliado na elaboração de argumentação dos professores. Se, por exemplo, no jogo de “Dados 2”, o Estudante B não tivesse apontado para a quantidade de possibilidades de insucesso, o resultado seria o mesmo? Se fossem usados um hexaedro e um octaedro e a pergunta se mantivesse (sair números menores que 4) com resposta mais evasivas do Estudante B, como por exemplo: *“O hexaedro tem mais chances de vitória porque tem menos faces”*, as análises dos professores seriam as mesmas? Imagina-se que mais pesquisas nesse sentido precisam ser exploradas.

Assim como nos levantamentos anteriores dessa pesquisa (Estudos 1 e 2), os participantes desta etapa da pesquisa (Estudo 3) também apresentaram dificuldades em relação à independência de eventos e em relação à comparação de probabilidades em espaços amostrais distintos, especialmente no Jogo de ”Dados 1”, demonstrando a necessidade de ampliação da compreensão da relação proporcional. Não apresentaram maiores dificuldades em analisar a injustiça presente quando os alaetorizadores eram ‘‘desonestos’’, nem em analisar eventos não-equiprováveis (mas não se utilizaram do raciocínio combinatório) e apresentaram traços de incompreensão ao crer que ‘cara-coroa e coroa-cara’ representam a mesma possibilidade, se configurando num frágil entendimento do raciocínio combinatório.

Não se observou grande distanciamento de compreensão dos grupos estudados – professores brasileiros de ensino regular (PBR), professores brasileiros da Educação de Jovens e Adultos (PBE) e professores portugueses de ensino regular (PPR). Apenas entendimento levemente mais fragilizado no grupo dos professores regulares dos anos iniciais (grupo PBR) em conformidade com a tabela a seguir (Tabela10).

Tabela 10: Desempenho de professores quanto à avaliação indireta de jogo justo (acertos)

Foco	**Aleatoriedade**		**Espaço amostral**		**Comparação de probabilidades**	
Tipo de jogo	**”Bingo”**	**“Loto”**	**Moedas**	**”Bolinhas na colher”**	**”Dados 1”**	**“Dados 2”**
PBR	1	4	2	2	1	3
PBE	2	4	3	4	1	3
PPR	2	4	1	4	2	4

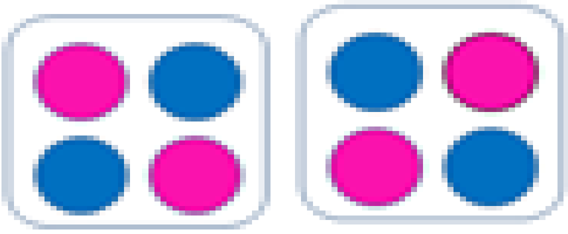
Fonte: Dados da pesquisa (2021)

No entanto, não houve um determinado tipo de equívoco presente em apenas um grupo ou compreensões mais elaboradas pertencentes a outro grupo. Nos três grupos, observou-se fragilidades quanto ao entendimento de alguns elementos probabilísticos aqui discutidos e também compreensões coerentes. Se pontuou a sorte ou azar e algumas crenças, como a influência do formato dos dados e a ideia de que a justiça só ocorreria com artefatos iguais.

Considera-se que os contextos dos jogos e as respostas dos Estudantes A e B influenciaram as análises dos professores que apontam para distintas compreensões do mesmo foco probabilístico. Assim, no jogo ”Bolinhas na colher” e no ”Jogo das Moedas” que pretendiam explorar espaços amostrais (equiprováveis e não-equiprováveis) os resultados foram bem diferentes: com um volume bem maior apresentando análises coerentes em um jogo do que no outro, semelhantemente ao que ocorreu nos Jogos de ”Dados 1” e 2.

Pode-se dizer, que, provavelmente, esse distanciamento ocorreu em função das particularidades de cada jogo, que evocava mais fortemente, um determinado raciocínio ou possibilitava encarar alguns equívocos mais particularmente do que outros. Por exemplo, no jogo ”Bolinhas na colher”, o foco de justificações dos professores para analisar as falas dos Estudantes A e B, repousaram muito mais na ‘representatividade’ da amostra (sair duas rosas e duas azuis) do que na análise comparativa da quantidade de possibilidades que contemplam cada evento em discussão, não sendo possível afirmar, com certeza, sobre a possível (in)compreensão dos professores sobre o espaço amostral. No entanto, o ”Jogo das Moedas”, exigiu que os professores tivessem consciência de que os resultados ‘cara-coroa’ e ‘coroa-coroa eram distintos, e esse fato se configurou como uma dificuldade real para os professores, apontando possíveis fragilidades desses participantes em relação ao raciocínio combinatório. Esse equívoco apresentado pelos professores nos faz refletir se eles julgariam as duas possibilidades a seguir (Figura 21) do jogo ”Bolinhas na colher” como possibilidades iguais; ou, se eles conseguiriam fazer uma lista exaustiva de todos os elementos possíveis do espaço amostral.

Figura 21: Possibilidades para organização de bolas do evento “sair duas bolas azuis e duas rosas”



Fonte: O autor (2021)

Alguns desses resultados estão em consonância com a pesquisa de Chernoff e Mamolo (2015), realizada com professores, que também apontou incompreensões acerca da aleatoriedade e também do espaço amostral por parte de alguns docentes. Nosso estudo objetivou averiguar compreensões de professores a partir da análise de protocolos dos entendimentos de estudantes sobre justiça em jogos, considerando elementos concernentes às demandas cognitivas da probabilidade. Portanto, esse estudo não se centrou no desempenho dos professores, e sim, em compreensões que eles externaram a partir das análises feitas em relação ao Estudante A e o Estudante B. Ainda assim, as justificações obtidas, mostram similitudes com resultados de outros estudos que apontam algumas fragilidades nos conhecimentos probabilísticos dos professores, como as pesquisas de Campos e Pietropaolo (2013), Viali e Cury (2009) e Felisberto de Carvalho (2017).

As potencialidades observadas nas compreensões dos estudantes (adultos e crianças) foram também observadas nos professores, como por exemplo, a facilidade em avaliar jogo justo quando há aleatorizadores ‘‘desonestos’’ influenciando o resultado. A ideia de amostra representativa que foi timidamente evidenciada entre os participantes dos Estudos 1 e 2, foi, mais fortemente apontada pelo grupo de professores. Os equívocos mais comuns apontados por crianças e adultos dos Estudos 1 e 2 foram também evidenciados pelos professores, como por exemplo, as incompreensões acerca de sequência aleatória e uso do raciocínio proporcional para comparar probabilidades em espaços amostrais distintos. Conjectura-se que os jogos podem ser usados como aporte para redimensionar compreensões probabilísticas de professores, de modo que eles possam ser capazes de realizar um trabalho pedagógico consistente que permita às crianças desenvolverem seus pensamentos probabilísticos.

Algumas perguntas foram feitas aos professores antes da etapa de análise dos jogos que envolveram demandas cognitivas. Diferentemente do que foi feito com os estudantes (crianças e adultos) que responderam a perguntas semelhantes após o trabalho com os seis jogos explorados nessa pesquisa. A ideia de fazer essas perguntas antes da análise dos jogos foi para evitar que também os professores da pesquisa se influenciassem pelos jogos trabalhados, como aconteceu com os estudantes.

Quatro perguntas foram realizadas:

1. Para você o que é um jogo justo?
2. Ganhar uma casa num jogo de cara ou coroa é justo?

3. Qual jogo seria justo para ter como premiação ganhar uma casa?
4. O que seria justo ganhar num jogo de cara e coroa?

A ideia do que seria um jogo justo foi bem plural para os professores, uma vez que eles não tiveram um apoio comum para responder à questão, diferente dos demais participantes da pesquisa que utilizaram os jogos discutidos na parte inicial da entrevista para amparar suas alegações.

O Quadro 19 mostra os principais entendimentos apontados pelos professores para caracterizar jogo justo, a partir da pergunta "Para você o que é um jogo justo?".

Quadro 19: Compreensões de professores sobre jogo justo.

Relação com o jogo		**Foco pedagógico**			**Atitude dos jogadores**
Chances iguais	Regras	Participaçã o	Aprendiza-gem	Jogos de competição	Honestidade
PBR2, PPR1, PPR2, PBE1	PBR3, PBR4, PBE2, PBE3, PBE5	PBR1, PPR5, PBE2	PBR5, PPR3	PBR5, PPR4	PBR4, PBR3, PBE4

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

As falas que tiveram relação explícita com o jogo, disseram respeito a;

i) Chances iguais – "*É justo quando os jogadores têm oportunidades iguais de vencer" (PPR2); "É aquele que dá a possibilidade de todos os jogadores de poderem ganhar"* (PBE1)

ii) Regras – "*Tem que ter estratégia, uma organização, ter noção o que vai fazer...*" (PBR2); "*Começar com regras claras, tendo conhecimento das regras"* (PBE5)

Embora nenhum professor tenha explicitado a palavra chance ou probabilidade em nenhum momento das perguntas abertas, a forma como eles apresentaram suas justificativas remetem à ideia de 'chances iguais' ou 'mesma probabilidade', como pontuado nas falas supracitas de PPR2 e PBE1. No entanto, apenas quatro dos 15 participantes fizeram alguma referência a essa associação entre jogo justo e chances iguais para os jogadores e essa foi a centralidade dos jogos em discussão nesse estudo, ou seja, a de que o jogo é justo se permitir aos jogadores as mesmas probabilidades para vencerem.

As regras foram evidenciadas por um terço dos participantes, embora nenhum deles tenha sido português. Na verdade, nenhum professor português proferiu a palavra regra nas respostas às perguntas abertas. A ideia de jogo justo relacionado a regras foi a compreensão mais presente entre os participantes, embora, apenas os professores brasileiros tenham evidenciado essa relação. Nem sempre os professores brasileiros utilizaram a palavra 'regra', mas essa informação foi transmitida por meio de expressões correlatas, como as apresentadas na fala de PBR4 que especifico*u: "Tem que ter estratégia, uma organização, ter noção o que vai fazer..."*

Se observou uma compreensão associada a um olhar pedagógico por parte dos professores. Assim, alguns participantes, associaram, de alguma forma, jogo justo a;

i) Participação dos estudantes no jogo- "*Um jogo que todos tenham possibilidade de participar. Onde todos os alunos consigam participar*" (PBR1); *"Que todos os alunos tenham oportunidade de jogar"* (PPR5).

ii) Aprendizagem – "*Se tratando de educação, é um jogo que haja aprendizagem e também que a criança se sinta atraída"* (PBR5*); "Um jogo em que alguém aprenda alguma coisa. Mesmo perdendo que possa aprender alguma coisa"* (PPR3)

iii) Jogos de competição – "*...não é importante existir um vencedor. Uma competição saudável que estimula os alunos*". (PPR4); *"tem jogos que são cansativos e com muita informação a criança não se interessa tanto. Jogo de competição, eles se sentem mais motivado para participar"* (PBR5)

Há diversos tipos de jogos: esportivos, de estratégia e raciocínio, de azar, etc. É natural que, não sabendo de que jogo a pesquisa tratava, os professores procurassem quaisquer referências para apoiar suas argumentações acerca do que seria jogo justo. Assim, nessa primeira pergunta não houve nenhuma referência a jogos de azar, apenas referência indireta a 'chances iguais' e regras. Alguns professores resgataram a ideia de jogo justo associado a atividades pedagógicas, com foco na aprendizagem e na participação dos alunos.

Assim, alguns professores, estabeleceram uma relação entre jogo justo e aspectos referentes à democratização na realização de atividades, por todos. Por exemplo, ao tratar de 'participação', os professores evocaram o espaço escolar, ao conectar os possíveis jogos à possibilidade de todos os estudantes participarem, ou seja, a justiça estaria na possibilidade de participação dos estudantes e não no jogo em si.

Houve ainda os que relacionaram a justiça em jogos com a possibilidade de aprender. Nessa ótica o jogo seria justo se promovesse a aprendizagem. PBR5, enfatizou que "*se tratando da educação, é um jogo que haja aprendizagem...*". Imagina-se que, assim como PBR5, muitos professores não pensaram em características que tornariam o jogo justo ou não, e, sim, em contextos para vivência do jogo apenas no âmbito escolar, analisando-se o que seria justo, ou não, na situação proposta em sala de aula. Chernoff e Mamolo (2015), em sua pesquisa envolvendo professores, alegaram que alguns indivíduos tendem a responder uma pergunta com algo que não foi exatamente questionado, ou sejam, usam argumentos que se distanciam do foco central da indagação principal. Talvez, pela pergunta evasiva e abrupta sobre o que seria um jogo justo, sem apoio anterior que desse pistas sobre a centralidade do estudo, motivou alguns professores a não pensarem no jogo em si, mas nos contextos em que esses jogos eram realizados.

O foco dos professores que, de alguma maneira, associou jogo justo a 'jogos de competição', também esteve atrelado a questões pedagógicas associado ao desenvolvimento dos estudantes. Essas compreensões de jogo justo relacionado a aspectos pedagógicos não foram evidenciadas nos demais estudos dessa pesquisa, como era de se esperar, pois os demais participantes eram estudantes e não professores, além de terem tido a oportunidade de discutir e opinar sobre seis jogos de azar antes de responderem a mesma pergunta, o que pode ter influenciado suas respostas.

Assim como nos estudos anteriores, os professores também conectaram justiça em jogos à honestidade dos participantes ao atuarem durante o jogo. Trata-se de uma postura atitudinal diante do jogo e não de uma característica do jogo em si. Assim, por exemplo PBR4 afirmou que era justo se os participantes agissem *"... sem trapacear*"; PBR3 diz que há justiça se for *'sem trapaça, sem ninguém tirar vantagem*" e PBE4 afirma que é justo "*quando você não é lesado*".

Em relação à Pergunta 2 (Ganhar uma casa num jogo de cara ou coroa é justo?) foi considerado justo por oito professores e injusto por sete. Os que julgaram que era justo, declararam:

PBR2 – *Se as duas partes tiverem de acordo, é justo sim.*

PBE1- *É sorte. É justo porque os dois estão com a mesma possibilidade. Os dois têm as mesmas chances de ganhar ou perder.*

PPR – *Em princípio não. Uma casa é um bem muito valioso para um jogo. Mas, se a pessoa que estava a jogar e que tem a casa concordasse, seria justo*.

As justificativas se fundamentaram na sorte presente no jogo, que de alguma forma parece se relacionar à incerteza sobre os resultados, mas também se apoiaram nas chances iguais e concordância das possíveis regras.

Os que consideraram o jogo injusto, apresentaram argumentações semelhantes às crianças e adultos dos Estudos 1 e 2, como discriminado nas falas a seguir.

PBR5 – *Acho que não. Uma casa é uma coisa que a gente conquista com tanto suor e você, de repente, ganhar tão fácil assim... não sei*.

PPR2 – *Não. É um prêmio exagerado para um jogo de sorte.*

PBE5- *Não é justo. Quando jogo é de azar não se leva em consideração a condição socioeconômica do participante.*

Assim como nos estudos anteriores dessa pesquisa, os professores também julgaram a justiça considerando o distanciamento entre o valor do prêmio e a simplicidade do jogo (PPR2). Também houve referência ao mérito e esforço (PBR5) e à justiça social pontuada por PBE5 ao relatar sobre as condições socioeconômicas dos participantes. Essa observação de PBE5 remete à Bennett (2003) que traz uma reflexão sobre a injustiça do acaso, ou seja, a aleatoriedade presente nos jogos de azar não leva em consideração, por exemplo, quem é mais merecedor do prêmio porque é mais carente ou precisa mais que o outro. Na verdade, a marca da aleatoriedade é a indiferença sobre os resultados.

As Perguntas 3 e 4 estavam conectadas à Pergunta 2. Uma dizia respeito à sugestão de um possível jogo em que seria justo ganhar uma casa e a outra refletia sobre prêmios justos para o jogo de cara ou coroa. Para responder a respeito de um jogo que seria justo ganhar uma casa, houve três tipos de respostas:

1- Inexistência – alguns professores julgaram que não haveria um jogo justo para essa premiação, como por exemplo, PBE5 que sustentou que *“não existe jogo justo para esse prêmio. Para brincar é engraçado e divertido, porque alguém vai ganhar na sorte...”*

2- Manutenção de jogos de mesma natureza – um professor (PBR3) considerou o jogo ‘par ou ímpar’ como justo para se obter uma casa. Esse jogo tem um espaço amostral de dois elementos, assim como o cara ou coroa. Assim, ele optou por um jogo tão simples como o proposto inicialmente.

3- Jogos mais complexos ou mais elaborados – a maioria dos professores considerou o uso de um jogo mais elaborado, que intenciona um maior equilíbrio entre o valor da premiação e a complexidade do jogo. PBR5 disse: "*Um jogo com mais desafios. Cara e coroa é muito fácil...Que sofresse mais um pouquinho.",* enquanto PBE1 sentenciou: '*Como uma casa é um bem tão precioso tem que ser um jogo que realmente a pessoa se esforçasse, usasse de inteligência, de raciocínio. Tipo um xadrez. Um jogo da velha que também precisa de raciocínio'.*

Nas sugestões apontadas pelos professores referentes a um jogo com maior complexidade para ganhar uma casa, houve algumas alusões a jogos que invocassem conhecimento, inteligência ou raciocínio, como apontado a seguir.

PPR5 - *Um jogo em que os participantes tivessem que demonstrar conhecimento.*

PPR2 - *Um jogo que tivesse perguntas a responder, dependesse do conhecimento, das capacidades das pessoas. O cara ou coroa é um jogo de azar.*

PBE1 - T*em que ser um jogo que realmente a pessoa se esforçasse, usasse de inteligência, de raciocínio. Tipo um xadrez. Um joga da velha que também precisa de raciocínio*

PBR5 - *Um jogo com mais desafios. Cara e coroa é muito fácil.*

Imagina-se que essas sugestões sejam para aproximar, por merecimento, o jogador vencedor do alto prêmio. Assim, o ganhador seria a pessoa mais hábil, mais inteligente ou a que se esforçasse mais, então não seria injusto ela ganhar tão valioso prêmio (uma casa) porque ela fez por merecer, ela era a melhor. E essa é uma ideia bem presente em jogos esportivos e de competição em que se avalia a destreza, esforço e habilidade e, nos jogos de azar não há este tipo de justiça por merecimento. Assim, Bennett (2003) declara que quando o acaso é responsável por estabelecer o resultado de um experimento aleatório, nenhuma habilidade, força, destreza ou inteligência é capaz de alterá-lo ou influenciá-lo.

Os tipos de prêmios sugeridos pelos professores para se ganhar num jogo de 'cara ou coroa', seguem as ideias relativas à simplicidade do jogo, em sua maioria. No entanto, alguns professores que julgaram justo ganhar uma casa nesse jogo, confirmaram essa compreensão sugerindo prêmios de alto valor. O quadro a seguir sintetiza essas sugestões.

Quadro 20: Sugestão de premiação para o jogo cara ou coroa, por professores.

Premiação	**Alto valor**	**Baixo valor**
Sugestões	Carro, moto, celular, casa, viagem de férias	Comida (coxinha, chocolate, refeição, bombom), livro, lápis, caneta, óculos, jogo, calendário,
Professores	PBR3, PPR1, PPR2, PPR4, PBE1, PBE4	PBR1, PBR2, PBR4, PBR5, PPR3, PPR5, PBE3

Fonte: Dados da pesquisa (2021)

Nessa etapa do Estudo 3, os professores demonstraram semelhantes compreensões sobre jogos justos em relação aos estudantes da pesquisa (Estudos 1 e 2), mas também apresentaram algumas diferenças. Os pontos de convergência repousam em compreensões que envolvem regras, chances iguais e honestidade, além do entendimento de premiação desproporcional considerando a simplicidade do jogo 'cara ou coroa'. A justiça e o mérito também foram evocados pelos professores, assim como foi por participantes dos Estudos 1 e 2. O maior distanciamento de opinião se deu em função do caráter pedagógico que os professores imprimiram em suas respostas. E, esse aspecto não foi evidenciado pelos demais participantes, o que parece bem sensato, pois seria incomum os estudantes pensarem em jogo justo na ótica de suas próprias aprendizagens.

O conjunto de resultados obtidos e analisados nos três estudos realizados trazem implicações educacionais importantes, as quais são discutidas no capítulo que segue.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

"A ciência não pode prever o que vai acontecer.
Só pode calcular a probabilidade de alguma coisa acontecer"
César Lattes

A presente pesquisa objetivou analisar compreensões de estudantes (crianças e adultos de mesma escolaridade) e professores (de anos iniciais de escolarização) acerca de *justiça em jogos*, considerando elementos concernentes a demandas cognitivas da probabilidade, em conformidade com Bryant e Nunes (2012). Considerou-se neste estudo que, para avaliar a justiça, ou não, presente nos jogos escolhidos, é necessária a compreensão da *aleatoriedade*, do *espaço amostral* e da *comparação de probabilidades*. É considerado, portanto, jogo justo, na ótica dessa pesquisa, aquele que possibilita probabilidades iguais de vitória aos jogadores (BOROVICNIK, 2016; BENNETT, 2003).

A pesquisa contou com três estudos distintos que se interconectaram formando um arcabouço de informações obtidas por meio de entrevistas e questionário que se configurou como material necessário ao mapeamento de compreensões dos diversos grupos estudados. Para cada estudo, seis jogos foram explorados (três justos e três injustos) com a intencionalidade de analisar compreensões dos participantes em relação a elementos da aleatoriedade, do espaço amostral e da comparação de probabilidades.

O primeiro grupo estudado (Estudo 1) contou com a participação de 15 crianças, estudantes regulares do 5º ano, com média de idade de 11 anos e 15 adultos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), estudantes de etapa escolar correspondente ao 5º ano, com idades entre 28 e 67 anos. Ambos os grupos eram estudantes de escola pública do Cabo de Santo Agostinho - PE. Além de verificar as compreensões existentes sobre justiça em jogos, esse primeiro estudo procurou ainda responder duas indagações: 1) Há diferenças de compreensão acerca de justiça em jogos entre crianças e adultos com mesma escolaridade? e 2) A maturidade influencia a compreensão dos participantes acerca de elementos probabilísticos para avaliar a justiça em jogos?

O segundo estudo (aqui denominado Estudo 2) contou com os dados obtidos das crianças do Estudo 1 para comparar com informações obtidas por meio de pesquisa com 15 crianças portuguesas também do 5º ano, com média de idade de 11 anos, moradoras de Lisboa e estudantes de escola pública. O Estudo 2, além de coletar informações sobre as compreensões das crianças sobre justiça em jogo, procurou também responder: 1) Há diferenças de compreensão, entre crianças brasileiras e portuguesas, acerca de elementos probabilísticos para avaliar a justiça em jogos? e 2) Quais aproximações e distanciamentos de compreensão há entre os dois grupos estudados?

O Estudo 3 procurou responder, especialmente dois pontos: 1) Como os professores avaliam a compreensão dos estudantes sobre probabilidade? e 2) Quais compreensões possuem os professores sobre justiça em jogos, considerando demandas cognitivas da probabilidade? Os participantes desse terceiro estudo foi composto por cinco professores brasileiros dos anos iniciais, cinco professores brasileiros da EJA e cinco professores portugueses dos anos iniciais.

Considerando o Estudo 1, observou-se que boa parte dos adultos e também das crianças, em suas análises nos diversos jogos, consideraram coerentemente que o jogo é justo se as chances de vitória forem iguais para todos os jogadores e esta é uma importante compreensão acerca de justiça em jogos. Esses participantes também não apresentaram dificuldades em classificar como injusto um jogo que tem influência de aleatorizadores ‘desonestos’. No entanto, diversos participantes não tinham uma compreensão adequada de alguns elementos da probabilidade que lhes dessem suporte para avaliar assertivamente sobre a ocorrência, ou não, da justiça, e, consequentemente, avaliaram equivocadamente alguns jogos em seus diferentes contextos. Assim, a incompreensão da independência de eventos em sequências aleatórias, a falta de análise do espaço amostral e a fragilidade no raciocínio proporcional que impossibilita análise comparativa de probabilidades em espaços amostrais distintos, podem se configurar em um entrave para uma avaliação coerente de jogo justo, ou não.

Enfatiza-se que não houve grande distanciamento de compreensão entre adultos e crianças no que se refere à análise da justiça nos jogos propostos nesse estudo. As dificuldades observadas num grupo, foram também verificadas no outro, assim como as compreensões coerentes. Os grupos estudados do Estudo 1 não tiveram acesso formal a conhecimentos probabilísticos, então conjecturou-se que os adultos, em função da experiência e da maturidade, apresentassem um desempenho melhor que as crianças. E, na verdade, os adultos apresentaram resultados um pouco mais fragilizados que as crianças, com um maior número de justificativas que se distanciavam do foco da discussão.

Assim, a resposta para a primeira pergunta (Há diferenças de compreensão acerca de justiça em jogos entre crianças e adultos com mesma escolaridade?), parece ser, de modo geral, não, pois há muito mais semelhanças do que diferenças entre as compreensões evidenciadas pelas crianças e pelos adultos. Igualmente para a segunda pergunta (A maturidade influencia a compreensão dos participantes acerca de elementos probabilísticos para avaliar a justiça em jogos?) a resposta é negativa, uma vez que as experiências dos adultos e sua consequente maturidade não parece ter favorecido os seus desempenhos.

Fischbein (1987) advoga que há conceitos probabilísticos que a maturidade não dá conta, por conseguinte, é necessário intervenção por meio do ensino para que as compreensões acerca desses conceitos sejam consolidadas. Assim, o estudo ressalta que as experiências cotidianas dos adultos não foram suficientes para que os mesmos conseguissem avaliar adequadamente a (in)justiça nos jogos de azar aqui explorados ou conseguissem apresentar desempenho melhor que as crianças. Algumas experiências mais cristalizadas podem, inclusive, levar a julgamentos errôneos referentes a situações probabilísticas, como a crença de que uma sequência particular de números numa cartela de ”Bingo” teria maior probabilidade de ser sorteada do que outra que possui uma aparência ordenada. É possível que os adultos tenham se deparado com mais sequências vencedoras (Megasena, por exemplo) com aparência desordenada do que com aparência em certa ordem e essa experiência os levam a crer que essas possibilidades não são equiprováveis, ou seja, a má aplicação dos resultados das experiências passadas resulta em análises e respostas equivocadas. Essa é uma incompreensão de sequências aleatórias pelo não entendimento da independência de evento, que se traduz num importante elemento da *aleatoriedade.* Essa incompreensão influenciou a avaliação equivocada de adultos e crianças sobre o jogo da “Loto”, por exemplo.

Mesmo, a maioria dos participantes (tanto adultos como crianças) relacionando jogo justo à equiprobabilidade, ou seja, às chances iguais dos jogadores ganharem o jogo, houve outras compreensões ligadas a: i) jogo justo com chances desiguais; ii) jogo justo com regras iguais e iii) sorte. A sorte sempre era evocada como um elemento adicional a outras compreensões e indicava, na maioria das vezes, a incerteza – um importante elemento da aleatoriedade. A ideia de jogo justo com chances desiguais foi evidenciada por adultos e crianças e se apoiava no fato do jogador com menos chances ainda poder ganhar, em função da incerteza dos resultados.

Os jogos utilizados para explorar o *espaço amostral,* não exigiram que os participantes elencassem todos os elementos do mesmo. No entanto, esperava-se que, de alguma forma, os estudantes recorressem a esses elementos ou parte deles para justificarem suas análises de jogo justo ou não-justo. No entanto, poucos alunos recorreram conscientemente a esta análise, apesar de se observar alguns vislumbres de compreensão. Os participantes associaram, nesses jogos, a justiça a 'equilíbrio' e a injustiça a 'quantidades diferentes'. No entanto, julga-se oportuno a realização de novas pesquisas com foco no raciocínio combinatório indexado a jogos de azar para explorar mais profundamente a compreensão de crianças e adultos e a influência do conhecimento do espaço amostral para avaliar a justiça em jogos.

Considerando a *comparação de probabilidades* e sua relação com a justiça, observou-se uma enorme fragilidade de compreensão por parte de adultos e crianças. Os participantes compararam probabilidades de um evento em dois espaços amostrais diferentes, geralmente com base em vários julgamentos subjetivos ou numéricos, sem considerar a condição proporcional que a situação exigia (Nível Subjetivo). A real dificuldade de compreensão da relação proporcional nas questões probabilísticas foi evidenciada também em diversos estudos aqui apontados (GIROTTO *et al* , 2016; ANTONOPOULOS E ZACHARO, 2103; BATISTA E FRANCISCO, 2015). Esta falta de entendimento sobre a relação proporcional conduziu adultos e crianças a julgamentos equivocados sobre situações justas e injustas.

Muitos participantes consideraram que para o jogo ser justo necessitaria, além de chances iguais para os jogadores, o uso dos artefatos iguais, ou seja, a utilização dos mesmos aleatorizadores, como dados iguais, por exemplo. Alguns estudantes julgaram, baseados em suas experiências, que o dado comum, em formato de hexaedro, seria mais justo e adequado para ser utilizado em situações de justiça. Esta compreensão reforça a falta de entendimento acerca da proporcionalidade, pois a justiça nos dois jogos (Dados 1 e 2) dependia das regras e não do formato dos dados. Esta incompreensão revelou, portanto, uma avaliação equivocada sobre a justiça em jogos.

Crianças e também os adultos desse estudo, em sua maioria, parecem se encontrar entre os Níveis Subjetivo (lista um conjunto incompleto de possibilidades de um estágio, compara probabilidades considerando julgamento subjetivo, considera eventos consecutivos relacionados) ou Transitório (lista conjunto incompleto de possibilidades de duas etapas, começa a distinguir situações justas de injustas, usa estratégia de representatividade) do quadro de pensamento probabilístico de Jones *et al* (1997) e Jones (2006). Esses níveis são os mais elementares e intuitivos, mas podem servir de plataforma para intervenções que possibilitem avançar para níveis mais elaborados. Tendo em conta as crenças defendidas por Watson e Moritz (2003), adultos e crianças apresentaram compreensões que remetem especialmente ao nível Icônico (antropomorfismo, sorte), mas também ao nível Uniestrutural (crença permanente na justiça dos dados) e Multiestrutural (condição física dos artefatos).

Novas compreensões acerca de jogo justo foram observadas com respostas à pergunta sobre o uso de ‘cara ou coroa’ para ganhar uma casa. Além de enfatizar a sorte, as chances iguais e a incerteza que têm raízes na probabilidade, houve referência também à justiça social, ao mérito, ao valor do prêmio, etc. Neste contexto, o foco de análise dos participantes não foi centralizado no jogo em si e, sim, na situação contextual em que o jogo estava inserido. Assim, para os participantes, a justiça dependeria, especialmente da relação entre tipo de jogo e a premiação, aliado ao mérito.

As compreensões apontadas no Estudo 1 estão presentes nos participantes do Estudo 2, como era de se esperar pela intersecção entre os participantes (crianças). No entanto, observou-se ainda mais proximidade nas compreensões de crianças brasileiras e crianças portuguesas do que no Estudo 1 em que os adultos apresentaram um desempenho um pouco mais fragilizado que as crianças, possivelmente em função de crenças enraizadas. Ambos os grupos do segundo estudo apresentaram compreensões e incompreensões semelhantes nos diversos jogos explorados. Assim como no Estudo 1, as crianças associaram jogo justo à equiprobabilidade dos jogadores vencerem, mas também consideraram a sorte, as regras e, equivocadamente, evocaram a justiça em jogos associando-a a chances desiguais. Relacionaram, ainda, jogo justo ao uso de artefatos iguais (dados iguais e cartelas com numeração semelhante) e à atitude dos jogadores frente ao jogo: agir com honestidade, sem trapaça.

O maior distanciamento observado entre crianças portuguesas e brasileiras se deu na linguagem, que aparenta ser um traço muito mais cultural do que de conhecimentos probabilísticos, uma vez que as crianças portuguesas também não tiveram acesso formal ao tema. A palavra mais utilizada pelos dois grupos foi ‘chance’, no entanto as crianças brasileiras utilizaram a expressão quase o dobro das vezes que as portuguesas. A segunda palavra mais evocada pelas brasileiras foi ‘sorte’ que representou quase do triplo de vezes do uso da expressão pelas crianças portuguesas. A expressão ‘possibilidade’ foi utilizada muito mais intensamente pelas crianças portuguesas, assim como a palavra ‘probabilidade’ que foi usada exclusivamente pelo público português. Gal (2004) elenca a linguagem como um dos pilares para o desenvolvimento do letramento probabilístico e Batanero e Diaz (2007) defendem que é relevante para o ensino de probabilidade as ideias informais advindas por meio da linguagem, razão pela qual, julga-se importante e necessário enfatizar esse traço que foi bem marcante para este público do Estudo 2.

As crianças, assim como os adultos do Estudo 1, tiveram dificuldades em avaliar jogo justo quando houve necessidade do entendimento sobre sequências aleatórias. Em contrapartida, não apresentaram dificuldades para avaliar a injustiça quando há aleatorizadores ‘desonestos’ envolvidos na situação. A maior dificuldade, no entanto, foi quanto ao uso do raciocínio proporcional para avaliar a justiça, comparando probabilidades de espaços amostrais distintos. Nos dois jogos que focaram espaços amostrais distintos, não houve nenhuma justificação que apontasse para a compreensão desse elemento.

Julga-se, portanto, extremamente importante a compreensão da proporcionalidade e o papel que ela desempenha no entendimento da probabilidade, em particular na quantificação e comparação de probabilidades. A BNCC (BRASIL, 2017) elenca a proporcionalidade como uma das ideias fundamentais que precisam ser desenvolvidas na escola. Assim, este documento destaca que:

> Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A **proporcionalidade**, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; **probabilidade** etc. (BRASIL, 2017, p. 264) (grifos nossos).

Assim, se faz mister que haja pesquisas de caráter interventivo para mapear formas de redimensionar as aprendizagens das crianças e adultos em início de escolarização em relação à compreensão da proporcionalidade. Essa aprendizagem possibilitará melhoras na compreensão de números racionais e também da probabilidade.

Uma compreensão que apresentou certo distanciamento entre as crianças foi a ideia de justiça social, apontada apenas por crianças brasileiras quando solicitadas que julgassem a justiça no uso de ‘cara ou coroa’ para ganhar uma casa. Crianças brasileiras apontaram que havia pessoas sem casa, moradores de rua e que o jogo seria injusto com tantas pessoas necessitando de casa. Essa percepção não foi evidenciada por crianças portuguesas, possivelmente, por suas vivências e experiências em um país com menos desigualdade social.

Boa parte das crianças apresentam compreensões típicas do Nível Subjetivo (compara probabilidades considerando julgamento subjetivo ou numérico, sem considerar a proporcionalidade, considera eventos consecutivos relacionados), especialmente verificado nos jogos relacionados à independência de eventos e à comparação de probabilidades. Este nível é o mais elementar dos construtos do pensamento probabilístico de Jones *et al* (1997) e Jones (20016). Outras crianças estão no Nível Transitório (lista conjunto incompleto de possibilidades de duas etapas, começa a distinguir situações justas de injustas, compara eventos considerando julgamento numéricos, usa estratégia de representatividade). Ao menos uma criança portuguesa deu pistas de se encontrar no Nível Quantitativo Informal (começa a diferenciar eventos dependentes e independentes, compara probabilidades com julgamentos numéricos e distingue situação justa e injusta), mas nenhuma criança foi identificada como estando no Nível Numérico (atribui probabilidade numérica para comparar probabilidades de espaços amostrais distintos, rejeita estratégia de representatividade, distingue evento dependente e independente, com cálculos probabilísticos). Em relação aos níveis de crenças (Watson & Moritz, 2003), as crianças ora estão no nível Icônico (antropomorfismo, sorte) ou no Uniestrutural (crença cega na justiça dos jogos) ou, ainda, no Multiestrutural (condição física dos dados).

O discutido até aqui, referente ao Estudo 2, indica mais aproximações do que distanciamentos nas compreensões das crianças brasileiras e portuguesas, em resposta aos dois questionamentos centrais desse segundo estudo: 1) Há diferenças de compreensão, entre crianças brasileiras e portuguesas, acerca de elementos probabilísticos para avaliar a justiça em jogos? e 2) Quais aproximações e distanciamentos de compreensão há entre os dois grupos estudados? Assim, não se verificou diferenças substanciais nas compreensões de crianças brasileiras e portuguesas sobre justiça em jogos, considerando demandas cognitivas exploradas. As relações intuitivas de compreensões sobre o tema apresentadas por crianças brasileiras foram também verificadas nas crianças portuguesas. Tal fato indica, aparentemente, que diferenças culturais de crianças com mesma escolaridade e sem estudo formal de probabilidade, não influenciam suas compreensões acerca de jogos justos, pautados na aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidades.

O Estudo 3 realizado com professores (brasileiros e portugueses) apresentou fragilidades e potencialidades semelhantes aos estudos anteriormente realizados. Se conjecturou que as compreensões dos professores se apresentassem menos equivocadas por duas razões: 1 - eles possuem, comprovadamente, mais conhecimento que os estudantes desta pesquisa e 2 - as perguntas destinadas a eles não foram abertas (como foram para os estudantes), contando, para suas análises, com uma resposta correta e uma incorreta, ampliando assim, as expectativas de acerto.

Entre os grupos de professores estudados – 1) professores brasileiros dos anos iniciais do Ensino Fundamental 2) professores brasileiros da EJA e 3) professores portugueses dos anos iniciais – não se observou distanciamento de compreensão. Não houve um determinado tipo de equívoco presente em apenas um dos grupos ou compreensões mais elaboradas em outro. A fragilidade no entendimento de sequências aleatórias e no uso do raciocínio proporcional para comparar probabilidades em espaços amostrais distintos, se manteve em professores dos três grupos. Em função de adaptações feitas nos jogos para este estudo, se verificou, ainda, incompreensões acerca do espaço amostral, ao considerar que os ensaios cara-coroa e coroa-cara são os mesmos.

É fato que entre os professores, observou-se compreensões típicas do nível mais elevado do quadro do pensamento probabilístico de Jones *et al* (1997) – o Numérico, como também um volume mais acentuado de entendimentos que se assemelham a pessoas que se encontram no Nível Quantitativo Informal. No entanto, observou-se, em todos os grupos, compreensões intuitivas bem elementares que se aproximam do Nível Subjetivo e Transitório.

Uma marca diferencial deixada por esse grupo (professores) foi a observância estatística de *amostra representativa*, em relação a um jogo que tratava do espaço amostral (”Bolinhas na colher”). Assim, para caracterizar o jogo como injusto, foi observado por alguns professores que a amostra presente na colher seria mais representativa quando *imitasse* proporcionalmente o universo de bolinhas da caixa que continha 120 bolinhas rosas e 120 bolinhas azuis. Em consequência, a amostra mais representativa seria *duas bolinhas rosas e duas bolinhas azuis* (na colher) ao invés de três bolinhas azuis e uma rosa, por exemplo. Nos Estudos 1 e 2, essa característica foi pontuada muito timidamente, quando os estudantes apontavam que sairia mais as bolinhas *misturadas* porque na caixa as bolinhas também estavam todas *misturadas.* No entanto, com o grupo de professores essa compreensão foi fortemente enfatizada. Ao se elaborar esse jogo, não se pensou nessa possibilidade, que nos parece bastante coerente, mas sem foco especificamente probabilístico.

Outro diferencial, no desempenho dos professores, foi a associação entre jogo justo e o trabalho pedagógico relacionando à justiça em jogos com a participação dos estudantes, com a possibilidade de aprendizagem e com jogos de competição. No entanto, houve semelhanças com os demais participantes da pesquisa ao estabelecer relação entre jogo justo e chances iguais, regras e honestidade dos jogadores frente ao jogo.

A avaliação dos professores acerca da compreensão dos estudantes (Estudante A e Estudante B) diz muito sobre o entendimento dos docentes sobre o tema. Os professores ora avaliaram as compreensões dos estudantes de forma coerente, ora se equivocaram em suas avaliações, demonstrando frágil entendimento de alguns elementos aqui explorados. Assim, observou-se compreensões corretas do ponto de vista conceitual e também compreensões equivocadas, especialmente quanto à avaliação de jogo justo quando o foco explorado foi *independência de eventos*, *comparação de probabilidades* em espaços amostrais distintos e até a compreensão acerca de lista exaustiva sobre o lançamento de duas moedas (exploração do *espaço amostral*).

De uma forma global, considerando-se os três estudos, pode-se dizer que houve similitudes entre as compreensões e incompreensões dos participantes. Assim, a maturidade e experiência dos estudantes adultos, a cultura e ensino de outros lugares (Portugal) e mesmo os conhecimentos acadêmicos parecem não ter tido grande influência nas diferentes compreensões acerca de jogos justo, considerando demandas cognitivas exploradas nesta pesquisa. Em termos de desempenho, os professores apresentaram melhores resultados, no jogo de Dados 1 e 2 e resultados mais fragilizados no ”Jogo das Moedas” em comparação com os demais participantes dos Estudos 1 e 2. No entanto, em todos os grupos de professores (brasileiros e portugueses) se observou as mesmas fragilidades encontradas nos grupos de estudantes (adultos e crianças).

O que se constatou, na verdade, é que compreensões e incompreensões acerca de elementos probabilísticos que envolvem demandas cognitivas da probabilidade influenciam a avaliação dos participantes ao considerar um jogo justo, ou não. Assim sendo, os equívocos e acertos apresentados possuem alguma relação com conhecimentos de natureza probabilísticas. Mesmo em contextos que exigiam não apenas a avaliação do jogo propriamente dito, e sim, da situação, os participantes dos três estudos fizeram referência a elementos probabilísticos, como chances iguais, sorte, incerteza. E essa pode ser uma importante conexão para futuros trabalhos interventivos.

Os equívocos quanto às sequências aleatórias, que se traduzem na fragilidade de compreensão da independência de eventos e as incompreensões acerca do raciocínio proporcional para comparar eventos presentes em espaços amostrais distintos foram os aspectos que apresentaram desempenhos e compreensões mais falhos na pesquisa, em geral. Portanto, esses elementos probabilísticos exigem um olhar mais apurado, por meio de novas pesquisas, a fim de se estabelecer mecanismos interventores que promovam caminhos possíveis para ampliação dessas aprendizagens, dessas compreensões.

Nos Estudos 1 e 2 não foi possível verificar com riqueza de detalhes a influência da compreensão do espaço amostral para avaliar jogos justos, assim como se verificou nas outras demandas cognitivas exploradas. Observou-se, portanto, alguns vislumbres que direcionavam a essa conclusão. No entanto, com uma pequena adequação do ”Jogo das Moedas” para a pesquisa com os professores (Estudo 3), se verificou essa influência quando houve a necessidade de pensar no espaço amostral em sua totalidade e alguns professores acabaram se equivocando por não atentarem para todos os elementos dos eventos em discussão. Essa é uma incompreensão que tem raízes no raciocínio combinatório. E se, os professores, que em tese, possuem mais conhecimentos que os estudantes, tiveram essas dificuldades, é muito provável que os estudantes também tivessem até mais fragilidades de compreensão se a abordagem fosse a mesma. Assim, acredita-se que a ampla compreensão do espaço amostral – via raciocínio combinatório – influencia, sim, a avaliação equivocada, ou não, de jogos justos e injustos. O raciocínio combinatório é extremamente importante para as situações probabilísticas (Bryant e Nunes, 2012), em função da necessidade do amplo entendimento do espaço amostral que é concebido por meio da *Combinatória.* Assim, enfatiza-se a importância do raciocínio combinatório para o conhecimento do espaço amostral e, consequentemente, para a resolução de situações probabilísticas de uma forma geral, não apenas na avaliação de jogos justos e injustos.

O desenho desta pesquisa considerou, desde a fase embrionária, a exploração de jogos de azar para analisar compreensões probabilísticas dos grupos estudados. Historicamente os jogos sempre estiveram relacionados com a Probabilidade (BENNETT, 2003) e, pode-se dizer que serviram de suporte para o desenvolvimento de teorias probabilísticas largamente utilizadas hoje no mundo moderno e tecnológico que vivemos. Cañizares *et al* (2003) defendem o uso de jogos de azar para construção do pensamento probabilístico de estudantes e, nessa direção, considera-se que os jogos aqui utilizados possuem potencial para esse desenvolvimento.

Ainda que os estudos que fizeram parte desta pesquisa não tenham tido um caráter interventivo com o objetivo de apontar especificamente caminhos possíveis para o ensino e a aprendizagem da Probabilidade, as compreensões evocadas pelos participantes na exploração e análise dos jogos deram pistas da viabilidade de utilização desses recursos (jogos) como plataforma para a ampliação e redimensionamento das aprendizagens de natureza probabilísticas. Por conseguinte, considera-se que os jogos aqui explorados podem servir de apoio a práticas eficazes de ensino e aprendizagem nas escolas, especialmente por trazerem à tona compreensões intuitivas e servirem como recurso para ampliação dessas compreensões. Corrobora-se, portanto, com Fischbein (1984, 1987) que advoga a importância de utilização de compreensões mais intuitivas (intuições primárias) como aporte para intervenções, por meio do ensino, com vistas à ampliação desses entendimentos iniciais em compreensões mais elaboradas (intuições secundárias, segundo este autor). E, sim, os jogos aqui utilizados apontaram potencial para a exploração dessas compreensões intuitivas iniciais que podem servir de base para intervenções que culminem na consolidação de conceitos probabilísticos mais formais.

Entende-se que essa pesquisa se configura num importante contributo para a Educação Matemática, com foco especial na Probabilidade. Considera-se, portanto, que os estudos aqui desenvolvidos promovem um redimensionamento do entendimento acerca de compreensões de estudantes (crianças e adultos) e professores sobre elementos probabilísticos associados à justiça em jogos de azar. Assim, entende-se que a pesquisa contribuiu para

- A observância da influência de demandas cognitivas para avaliação de jogos justos;
- A constatação de fragilidades de compreensão dos diversos grupos acerca da independência de eventos ao avaliar sequências aleatórias;
- A constatação do não uso do raciocínio proporcional ao comparar probabilidades em espaço amostrais distintos, caracterizando-se em equívocos;
- A percepção de diferentes compreensões sobre jogos justos, pelos participantes, dependendo do contexto em que o jogo está inserido;
- A constatação de que crianças brasileiras e portuguesas apresentam fragilidades e potencialidades semelhantes acerca de elementos probabilísticos para avaliar jogos justos;
- A observância de que maturidade e a experiência de adultos com baixa escolaridade parece não influenciar sobre avaliação de jogos justo se comparado com crianças de mesma escolarização;

- Observação de que professores, tanto do Brasil, quanto de Portugal apresentam fragilidades de compreensões probabilísticas próximas aos estudantes (crianças portuguesas e brasileiras e adultos);
- A aproximação de compreensões e também de incompreensões probabilísticas entre os participantes, mesmo considerando a pluralidade de grupos estudados.

As contribuições supracitadas da pesquisa culminam em algumas possíveis implicações elencadas a seguir.

i) É necessário intervenção por meio do ensino para ampliar as aprendizagens dos estudantes em relação a elementos da probabilidade que permitam a consolidação do pensamento probabilístico, que envolve ainda o raciocínio combinatório e o conhecimento da proporcionalidade;

ii) Recomenda-se a ampliação de políticas de formação continuada de professores brasileiros e portugueses que abordem temas de natureza probabilística, para minimizar as fragilidades apresentadas nesta e em outras pesquisas;

iii) É fundamental a implementação de propostas curriculares (ementas) nos cursos de Pedagogia e afins que promovam a ampliação do pensamento probabilístico, no Brasil e em Portugal;

iv) Ampliação do currículo português, com a finalidade de incluir elementos de natureza probabilística desde os anos iniciais;

v) São necessárias proposições de mecanismos interventores (estudos interventivos) para validar propostas que auxiliem na ampliação de habilidades de natureza probabilística, em especial que digam respeito à aleatoriedade, ao espaço amostral e à quantificação e comparação de probabilidades;

vi) É preciso atentar que jogos podem ser um recurso poderoso para a ampliação do repertório probabilísticos dos estudantes e podem suscitar intuições que servem de plataforma para desenvolver compreensões coerentes sobre o tema;

vii) Há necessidade de novas pesquisas que abordem outra ótica de jogos justos: “jogo com chances desiguais e premiação proporcional” (Bennett, 2003)

Diante do exposto, conclui-se e reforça-se a **tese** desta pesquisa que afirma que:

A avaliação, coerente ou equivocada, de estudantes (crianças e adultos) e professores sobre jogos justos e injustos é fortemente influenciada pelas suas compreensões acerca da aleatoriedade, do espaço amostral e da comparação de probabilidades.

E para finalizar, reforça-se o pensamento de Mlodinow (2009) que proclama em "O andar do bêbado" que

> O desenho de nossas vidas, como chama de vela, é continuamente conduzido em novas direções por diversos eventos aleatórios que, juntamente com nossas reações a elas, determinam nosso destino. Como resultado, a vida é ao mesmo tempo difícil de prever e difícil de interpretar (MLODINOW, 2009, p. 12).

Assim, com as incertezas próprias da vida, tal qual nos jogos de azar, a probabilidade mensura os riscos e sucessos possíveis, possibilitando, escolhas conscientes e tomadas de decisões mais acertadas, afinal "*a vida é assim: esquenta, e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem*", como poetisa João Guimarães Rosa.

REFERÊNCIAS

ANTONOPOULO, K.; ZACHAROS, K. **Probability constructs in preschool education and how they are taught.** Teachers and Teaching: theory and practice, v. 19, No. 5, p 575–589, 2013

BATANERO, C. **Significados de la probabilidade em la educación secundaria**. Relime, Vol. 8, N.3, Noviembro, p. 247-263, 2005.

BATANERO, C.; Henry, M.; Parzysz, B. **The nature of chance and probability**. In G. Jones (Ed.). Exploring probability in school: challenges for teaching and learning, p. 15-37. New York: Springer, 2005.

BATANERO, C.; DÍAZ, C. **Meaning and understanding of mathematics. The case of probability**. In J. P Van Bendegen & K. François (Eds), *Philosophical dimensions in mathematics education,* p. 107–127. New York: Springer, 2007.

BATANERO, C.; CHERNOFF, E. J.; ENGEL, J.; LEE, H. S.; SANCHEZ, E. **Research on Teaching and Learning Probability**, ICME 13 – HAMBURG, 2016 .

BATANERO, C. **Understanding randomness: challenges for research and teaching.** Ninth Congress of European Research in Mathematics Education Prague (Plenary lectura), February, 2015.

BATISTA, R.; FRANCISCO, V. **Noções probabilísticas de alunos da EJA**. In: Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 4º SIPEMAT. Ilhéus, 2015.

BATISTA, R.; BORBA, R**. No jogo é a moeda que diz, não é a gente que quer não: o que dizem crianças sobre a probabilidade.** VIDYA, v. 36, n. 2, p. 237-255, jul./dez., 2016 - Santa Maria, 2016

BAYLESS, S.; SCHLOTTMANN, A. **Skill-related uncertainty and expected value in 5-and 7-year-olds**. Psicologica. Special Issue on Functional Measurement. V.31(3), p. 677-687, 2010.

BENNETT, D.J. **Aleatoriedade**. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BETSCH, T.; LANG, A. **Utilization of probabilistic cues in the presence ofirrelevant information: A comparison of risky choice in children and adults**. Journal of Experimental Child Psychology, v.115, p. 108- 125, 2013.

BETSCH, T.; LANG, A.; LEHMANN, A.; AXMANN, J. M. **Utilizing probabilities as decision weights in closed and open information boards: A comparison of children and adults**. Acta Psychologica, v. 153, p. 74- 86, 2014.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Ministério da Educação. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Brasília, DF, 2017.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's understanding of probability: a literature review.** Nuffield Foundation. 2012. Disponível http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv

_FINAL.pdf.

BOROVCNIK, M.; KAPADIA, R. **Research and Developments in Probability Education Internationally.** Joubert, M. and Andrews, P. (Eds.) Proceedings of the British Congress for Mathematics Education. p.41-48, April, 2010.

BOROVCNIK, Manfred. **Pensamento probabilístico e alfabetização em probabilidade no contexto do risco.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.18, n.3, 1491-1516, 2016.

CAMPOS, T. M.; PIETROPAOLO, R. C. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais**. In R. Borba, & C. Monteiro (Orgs.), Processos de ensino e aprendizagem em Educação Matemática, p. 55-91. Recife: UFPE, 2013.

CAÑIZARES, M. Jesús; BATANERO, Carmen; SERRANO, L.; ORTIZ, Juan J. **Children's understanding of fair games**. In: Conference Of European Research In Mathematics Education (CERME), 3rd, Bellaria, Itália: CERME, p.1-9, 2003

CARRAHER, T. N. **O método Clínico usando os exames de Piaget**. 5. Ed. São Paulo: Cortez, 1998.

CHERNOFF, E. J.; MAMOLO, A. **Unasked But Answered: Comparing the Relative Probabilities of Coin Flip Sequence Attributes**. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 15:2, p.186-202, 2015.

COSTA, A.; NACARATO, A. M. **A Estocástica na Formação do Professor de Matemática: percepções de professores e de formadores**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 24, n. 39, p. 367-386, ago. 2011

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista.** 1994. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1994

COUTINHO, C. Q. S. **Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?** REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática - UFSC, Florianópolis, v. 2, n. 1, p. 50-67, 2007.

DEODATO, A. A.; DAVID, M. M. **Probabilidade em uma Oficina de Matemática: uma análise à luz da aprendizagem situada e da teoria da atividade.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.17, n.2, p.281-308, 2015.

EVES, H.. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FELISBERTO DE CARVALHO, J.I.; MACEDO, R. C. **Conhecimentos Necessários para o Ensino de Probabilidade: Discussão de uma Sequência Didática Desenvolvida com Estudantes de Matemática Licenciatura.** Anais do VI SIPEM. Pirenópolis, Goiás, 15 a 19 de novembro de 2015

FELISBERTO DE CARVALHO, J. I. **Um estudo sobre os conhecimentos didáticos-matemáticos de probabilidade com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.** 2017. 344f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

FELISBERTO DE CARVALHO, J. I.; PIETROPAOLO, R. C.. **Trajetórias didáticas em uma experiência formativa sobre probabilidade com professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental**. VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Foz do Iguaçu, Paraná, 4 a 8 de novembro de 2018.

FISCHBEIN, E. T**he interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity**. In: Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics: An educational approach**. Dordrecht: D. Reidel, 1987

FISCHBEIN, E.; GAZIT, A. ***Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?*** Educational Studies in Mathematics. 15, 1-24, 1984.

FONTANARI, L.; GONZALEZ, M.; VALLORTIGARA, G.; GIROTTO, V. **Probabilistic cognition in two indigenous Mayan groups**. Psychological And Cognitive Sciences; Dez, v. 111, no. 48, p. 17075–17080, 2014.

GAL, I. **Towards 'probability literacy' for all citizens**. In G. Jones (ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers, 2004.

GAL, I. **Towards 'probability literacy' for all citizens**. In G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* p. 43-71. Kluwer Academic Publishers, 2005.

GAL, I. **Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula**. 12th International Congress on Mathematical Education Program Name, 8 July – 15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea, 2012.

GIROTTO, V.; GONZALEZ, M. **Children’s understanding of posterior probability**. Cognition 106, p. 325–344, 2008.

GIROTTO, V.; FONTANARI, L.; GONZALEZ, M.; VALLORTIGARA, G.; BLAYE, A. **Young children do not succeed in choice tasks that imply evaluating chances**. Cognition 152, Journal Elsevier p.32–39, 2016.

GUERRERO TREVIÑO, H.; ORTIZ, H. J. J.; CONTRERAS, J.M. **Evaluación del conocimiento sobre esperanza matemática y juegos equitativos en estudiantes de bachillerato**. *Avances de Investigación en Educación Matemática* , 11, 107 – 125 (2017)

HARBAUGH, William T; KRAUSE, Kate; VESTERLUND, Lise. **Risk attitudes of children and adults: choices over small and large probability gains and losses**. Experimental Economics. Jun, v. 5, p. 53–84. 2002.

JOHNSTON-WILDER, P.; PRATT, D. **The relationship between local and global perspectives on randomness**. In D. Pitta & G. Philippou (Eds.), Proceedings of the Fifth Congress of European Research in Mathematics Education, p. 742-751. Larnaca: ERME, 2007.

JONES, G. A.; LANGRALL, C. W.; THORNTON, C. A.; MOGILL, T. **A Framework for Assessing and Nurturing Young Children's Thinking in Probability.** Educational Studies in Mathematics, Vol. 32, No. 2 Fev., p. 101-125. Springer, 1997.

JONES, G. A. **The challenges of teaching probability in school**. Queensland, Australia: Griffith University, 2006. https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital_Library/ICMEs/Bulletin_Jones.pdf

LIDSTER, S. T.; WATSON, J. M.; COLLIS, K. F.; PEREIRA-MENDOZA, L**. The relationship of the concept of fair to the construction of probabilistic understanding**. In P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education, Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne* (pp. 352-359). Sydney:MERGA, 1996.

LIMA, E. T.; BORBA, R. **Articulando os raciocínios combinatório e probabilístico a partir da resolução de problemas na EJA.** *Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.21, n.1, p.136-159, 2019.*

LOPES, C. E.; MEIRELLES, E. **O Desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística. Estocástica Nas Séries Iniciais.** XVIII Encontro Regional de Professores de Matemática – Lem/Imecc/Unicamp: São Paulo, 2005.

LOPES, C. E. **O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores**. Cad. Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008

MAROCCI, L. M.; NACARATO, A. M. **Um ambiente de aprendizagem baseado na resolução de problemas: a possibilidade de circulação de significações sobre Probabilidade por meio da linguagem.** Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.15, n.1, p.101-123, 2013

MLODINOW, L. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009

NIKIFORIDOU, Z.; PANGE, J.; CHADJIPADELIS, T. **Intuitive and Informal Knowledge in Preschoolers' Development of Probabilistic Thinking**. Springer Science + Business Media Dordrecht: fev, 2013.

NUNES, T. BRYANT, P.; EVANS; D.; GOTTARDIS, L.; TERLEKTSI, M. E. **"The cognitive demands of understanding the sample space**", ZDM - International Journal on Mathematics Education. V. 46 p. 437-448, jul, 2014.

NUNES, T. BRYANT; P. EVANS; D.; GOTTARDIS; L.; TERLEKTSI, M. **Teaching mathematical reasoning Probability and Problem Solving in the Classroom**. Nuffield Foundation University of Oxford, 2015.

ORTIZ, J. J.; BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M**. Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo**. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15* (1): p. 63-91, 2012.

PAPARISTODEMOU, E.; NOSS, R.; PRATT, D. **Exploring in sample space: developing young children's knowledge of randomness.** In B. Phillips (Ed.), Proceedings of the 6th International Conference on Teaching of Statistics (ICOTS 6), Cape Town. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute, 2002.

PAPARISTODEMOU, E.; NOSS, R.; PRATT, D. **The Interplay Between Fairness and Randomness in a Spatial Computer Game**. International Journal of Computers and Mathematical Learning. Springer Science+ Business Media B.V. 2008, p. 89-110.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco**: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Secretaria de Educação. UNDIME:PE, 2012, 145 p.

PORTUGAL. *Programa e Metas Curriculares de Matemática no Ensino Básico*. Programa de Matemática do Ensino Básico. Ministério da Educação e Ciência: Lisboa, 2013.

PORTUGAL. *Aprendizagens Essenciais: Matemática*. 5.º ano, 2.º ciclo do ensino básico. Ministério da Educação e Ciência: Lisboa, 2018. Disponível em https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/5_matematica_18julho_rev.pdf Acessado em 19.12.2020.

PRATT, D. **Making sense of the total of two Dice**. Journal for Research in Mathematics Education, v31(5), 602–625, 2000.

RIBEIRO, C. E.; GOULART, A. **O ensino de probabilidade por meio de jogos na educação de jovens e adultos.** Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ISSN 2178–034X, Curitiba, 18 a 21julho de 2013.

SANTANA, M.R.M.; BORBA, R. **Como a probabilidade tem sido abordada nos livros didáticos de matemática de anos iniciais de escolarização**. X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA, 7 a 9 de Julho de 2010.

SANTOS, L. C.; GONÇALVES, T, O. **Uma reflexão acerca dos conhecimentos e saberes necessários para a formação inicial do professor de matemática.** Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.19, n.2, p. 265-290, 2017.

SILVA, R. C. B. **É a moeda que diz, não é a gente que quer não: conhecimentos probabilísticos em situações de jogos**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2016.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I..; CÂNDIDO, P. **Jogos de matemática**. Artmed: Porto Alegre, 2007.

GUERRERO TREVIÑO, H., ORTIZ, J. J.; CONTRERAS, J, M. **Evaluación del conocimiento sobre esperanza matemática y juegos equitativos en studiantes de bachillerato**. Avancesde Investigación en Educación Matemática, p. 107 – 125, 2017.

VIALI, L**. Algumas Considerações Sobre a Origem da Teoria da Probabilidade**. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 8, p. 85-97, 2008.

VIALI, L.; CURY; H. N. **Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada**. Educ. Matem. Pesq. São Paulo, v.11, n.2, p. 373-391, 2009.

VIALI, L**. O Ensino de Estatística e Probabilidade nos Cursos de Licenciatura em Matemática.** In: Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística. Estância de São Pedro, SP: ABE, 2008.

VIALI, L.; CURY, H.N. **Professores de matemática em formação continuada: uma análise de erros em conteúdos de probabilidade**. EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - v.1, n. 1, Recife, 2011.

VIDAKOVIC, D.; BERENSON, S.; BRANDSMA, J. **Children's intuition of probabilistic concepts emerging from fair play.** In L. Pereira-Mendoza, L. Seu Kea, T. Wee Kee, & W. K. Wong (Eds.). Proceedings of the Fifth ICOTS. Singapore: IASE and ISI, p. 49-52, 1998.

WATSON, J. M; MORITZ, J.B. **Fairness of Dice: A Longitudinal Study of Students' Beliefs and Strategies for Making Judgments**. Journal for Research in Mathematics Education, V. 34, No. 4, p.270–304, 2003.

Wolcott, H. **Writing up qualitative research** (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE, 2009.