UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO
ANA LUCIA NOGUEIRA JUNQUEIRA

# PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM ESTUDO SOBRE CONCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2014

**ANA LUCIA NOGUEIRA JUNQUEIRA**

**DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

# PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM ESTUDO SOBRE CONCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Educação Matemática, sob a orientação da Professora Drª Maria Elisabette Brisola Brito Prado.

SÃO PAULO
2014

Junqueira, Ana Lucia Nogueira.
J94p Probabilidade na educação básica: um estudo sobre concepções de professores de matemática. / Ana Lucia Nogueira Junqueira. -- São Paulo: Universidade Anhanguera de São Paulo - UNIAN, 2014.
xviii, 421 p.: il.; 30 cm.

Tese (DOUTORADO em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo - UNIAN, 2014.
Orientadora: Profª. Dra. Maria Elisabette Brisola Brito Prado.
Referências bibliográficas: p. 347 - 361.

1. Noções básicas de probabilidade. 2. Design Experiment. 3. Processo formativo. 4. Concepções de professores. I. Prado, Maria Elisabette Brisola Brito. II. Universidade Anhanguera de São Paulo. III. Título.

CDD 519.2

## FOLHA DE APROVAÇÃO

JUNQUEIRA, Ana Lucia Nogueira. **PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM ESTUDO SOBRE CONCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**. Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo como requisito parcial para obtenção do título de Doutor(a) em Educação Matemática, sob a orientação da Profa. Dra. Maria Elisabette Brisola Brito Prado.

Aprovada em: 07/03/2014

Banca Examinadora

MEPrado

Orientador: Profª Drª Maria Elisabette Brisola B. Prado

Nielce M Lobo da Costa

Profª Drª Nielce Meneguelo Lobo da Costa

Rute E S R. Borba

Profª Drª Rute Elizabete de Souza R. Borba – UFPE

Verônica Yumi Kataoka

Profª Drª Verônica Yumi Kataoka

Prof. Dr. José Armando Valente - UNICAMP

*Dedico este trabalho*

*Aos meus queridos filhos, criaturas preciosas que sempre me incentivaram.*

*Aos meus amados pais (in memoriam), tenho certeza que ficariam orgulhosos!*

## Agradecimentos

À minha orientadora Profa. Dra. Maria Elisabette Brisola Brito Prado pela dedicação, paciência e sempre carinhosa atenção que proporcionou leveza nesse caminhar.

Aos professores membros da banca: Profa. Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba, Profa. Dra. Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Prof. Dr. José Armando Valente, Profa. Dra. Verônica Yumi Kataoka, pelas valiosas contribuições ao trabalho.

À Profa. Dra. Tânia Maria Mendonça Campos por sua dedicação e determinação frente ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo (antiga Uniban) e grande incentivo e apoio aos pós-graduandos.

Ao Prof. Dr. Ruy Pietropaolo pela amizade construída e o apoio junto ao trabalho no Observatório de Educação da Uniban.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, pela competência e dedicação com que se envolvem nas atividades docentes e pelo clima acolhedor com que nos recebem.

À Uniban pela bolsa parcial de tutoria que ajudou a suavizar a realização deste trabalho.

Aos colegas desse árduo, porém gratificante, caminhar pela solidariedade e momentos de partilha. Em especial, às colegas e novas amigas Edite Resende Vieira e Andreia Maciel pelo incentivo e bons momentos vividos juntas.

Ao pessoal administrativo pela atenção e presteza no atendimento. Em especial, a Guilherme por toda ajuda em momentos cruciais, sempre prestativo em nos atender e acalmar.

Aos professores participantes da pesquisa pelo empenho e dedicação com que se entregaram aos trabalhos. Em particular, à Diretoria de Ensino Norte 2, na pessoa da Profa. Rosana Jorge Monteiro Magni pelo incentivo aos cursistas.

Às amigas muito especiais: Maria Lucia Tavares de Campos, amiga-irmã de longa jornada, de alegrias e agruras compartilhadas e apoio permanente, companheira constante desse percurso; Flávia Amaral Rezende, amiga-irmã mais recente, apoio incondicional e sempre disponível para ler e reler, sugerir e ajudar nas dificuldades midiáticas, interlocutora constante nos nossos devaneios filosóficos e epistemológicos.

À toda minha família pelo incentivo e apoio recebido, em especial a minha irmã Eliane pela ajuda na transcrição dos vídeos e aos meus filhos, Thiago e Felipe, pela presença constante.

Aos amigos, os de perto e os de longe, pela torcida.

**RESUMO**

A pesquisa tem como propósito compreender as concepções dos professores sobre os conceitos básicos de probabilidade por meio de processo formativo baseado no *design experiment*. O estudo de probabilidade é mais complexo do que em geral se apresenta nos cursos de formação e requer um tipo de raciocínio que provoca uma ruptura do pensamento determinístico. Na revisão de literatura, dificuldades evidenciadas no desenvolvimento do pensamento estocástico podem ser detectadas tanto na sua origem e evolução histórica quanto em estudos atuais sobre a concepção dos professores. A presente pesquisa aborda conceitos básicos de probabilidade num processo formativo desenvolvido com professores do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, da rede pública do Estado de São Paulo, integrantes do Projeto Observatório da Educação da UNIBAN/CAPES. A metodologia adotada na pesquisa segue o modelo do *Design Experiment*, defendido por Paul Cobb e seus colaboradores. A dinâmica de trabalho ocorre mediante encontros presenciais e acompanhamento a distância por meio de ambiente virtual de aprendizagem, especialmente preparado para este fim. Dessa forma, o processo formativo utiliza a tecnologia como recurso e como suporte por entender que potencializa a abordagem dos conteúdos e favorece perceber as concepções dos professores sobre os conceitos básicos de probabilidade. A fundamentação teórica articula a teoria sócio histórica epistemológica com teorias sobre formação de professores, educação estatística e o uso de tecnologias midiáticas. A análise evidencia que muitas das dúvidas, incompreensões e equívocos (*misconceptions*), presentes na maioria das pesquisas consultadas, foram também constatados, notadamente sobre probabilidade condicional, eventos independentes e mutuamente excludentes, e algumas falácias, como a da representatividade e do jogador. No que concerne à formação, a pesquisa detecta também algumas concepções relativas à prática do professor em sala de aula, entre elas, certa fragilidade no planejamento e reflexão de sua ação docente, pouca prática e alguma resistência com o uso de tecnologia no processo educacional. No entanto, sentem-se motivados com recursos familiares aos seus repertórios. Sobretudo, no aspecto de formação de professores derivado da pesquisa reforça-se minha opinião de que não basta o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento tecnológico do conteúdo sem o conhecimento aprofundado do conteúdo específico, sem o qual não se consegue efetuar a amálgama destes três aspectos fundamentais para realizar a aprendizagem efetiva dos educandos. Dessa forma, outras pesquisas nessa direção devem ser realizadas por entender que podem contribuir para a melhoria da formação continuada dos professores e, consequentemente, de suas práticas em sala de aula.

Palavras-chave: noções básicas de probabilidade, *design experiment*, processo formativo, concepções dos professores.

**ABSTRACT**

The research aims to understand the conceptions of teachers about the basic concepts of probability through training process based on design experiment. The study of probability is more complex than it is usually presented in training courses and requires a kind of thinking that causes a disruption of deterministic thinking. In the literature review, difficulties highlighted in the development of stochastic thinking can be detected both in its origin and historical evolution as for current studies on conception of teachers. This research addresses basic concepts of probability in a formative process developed with teachers from Secondary School and Basic School, the public of the State of São Paulo, members of the Obsevatory for Education UNIBAN / CAPES Program. The methodology adopted in the research follows the model of Design Experiment, defended by Paul Cobb and his colleagues. The work dynamics occurs through face meetings and monitoring the distance through a virtual learning environment, specially prepared for this purpose. Thus, the training process uses technology as a resource and to support and understanding that enhances the approach to content and helps realize the conceptions of teachers about the basic concepts of probability. The theoretical framework articulates the historical socio epistemological theory with theories on teacher education, statistics education and the use of media technologies. The analysis shows that many of the doubts, misunderstandings and misconceptions, present in most surveys consulted, were also found, especially on conditional probability, independent and mutually exclusive events, and some fallacies, such as representativeness and gambler. With regard to training, the survey also detects some concepts related to the practice of the teacher in the classroom, among them certain fragility in planning and reflection of their teaching, a little practice and some resistance to the use of technology in the educational process. However, feel motivated to family resources to their repertoires. Especially in the aspect of teacher education research reinforces my view that not enough pedagogical content knowledge and technological content knowledge without thorough knowledge of the specific content, without which you can not effect the amalgamation of the three key aspects to perform effective learning of students. I believe that further research in this direction are to be implemented by understanding what may contribute to the improvement of continuing education of teachers and consequently their practices in the classroom.

Keywords: basic notions of probability, design experiment, formative process, teachers' conceptions.

**RESUMEN**

La investigación tiene como objetivo comprender las concepciones de los profesores acerca de los conceptos básicos de probabilidad a través del proceso de formación basado en el *design experiment*. El estudio de la probabilidad es más complejo de lo que generalmente se presenta en los cursos de formación y requiere un tipo de pensamiento que causa una rotura del pensamiento determinista. En la revisión de la literatura, las dificultades destacadas en el desarrollo del pensamiento estocástico puede ser detectado tanto en su origen y evolución histórica de los estudios actuales sobre la concepción de los maestros. Esta investigación aborda los conceptos básicos de la probabilidad en un proceso formativo desarrollado con los maestros de la Escuela Secundaria y Preparatoria, escuelas públicas del Estado de São Paulo, miembros del Proyecto Observatorio de Educación UNIBAN /CAPES. La metodología adoptada en la investigación sigue el modelo de *design experiment*, defendido por Paul Cobb y sus colaboradores. La dinámica de trabajo se produce a través de reuniones presenciales y el acompañamiento a distancia a través de un ambiente virtual de aprendizaje, especialmente preparado para tal fin. Por lo tanto, el proceso de formación utiliza la tecnología como recurso y como soporte que potencializa el enfoque de contenido y ayuda a darse cuenta de las concepciones de los profesores acerca de los conceptos básicos de probabilidad. El marco teórico articula la teoría epistemológica socio histórica con las teorías sobre la formación del profesorado, la educación estadística y el uso de las tecnologías de los medios de comunicación. El análisis muestra que muchas de las dudas, malentendidos y conceptos erróneos (ideas falsas), presentes en la mayoría de las encuestas consultadas, también se encontraron, sobre todo en la probabilidad condicional, eventos independientes y mutuamente excluyentes, y algunas falacias, como la falacia de la representatividad y la falacia del apostador. Respecto a la formación, la investigación también detecta algunos conceptos relacionados con la práctica del docente en el aula, entre ellos cierta fragilidad en la planificación y la reflexión de su enseñanza, la falta de práctica y un poco de resistencia al uso de la tecnología en el proceso educativo. Sin embargo, se sienten motivados a los recursos conocidos de sus repertorios. Sobre todo en el aspecto de la formación docente derivada de la investigación refuerza mi opinión de que no es suficiente el conocimiento del contenido pedagógico y conocimiento de contenido tecnológico sin un conocimiento profundo de los contenidos específicos, sin la cual no pueden efectuar la fusión de estos tres aspectos fundamentales para lograr un aprendizaje efectivo de los alumnos. Por lo tanto, se debe hacer más investigación en esta dirección por entender que pueden contribuir a la mejora de la formación continua de los profesores y, en consecuencia, de sus prácticas en el aula.

Palabras clave: las nociones básicas de la probabilidad, *design experiment*, proceso formativo, concepciones de los profesores.

**SUMÁRIO**

# INTRODUÇÃO

> Façamos da interrupção um caminho novo...
> Da queda, um passo de dança...
> Do medo, uma escada...
> Do sonho, uma ponte...
> Da procura, um encontro!
> (Fernando Sabino)

A pesquisa envolve os conceitos básicos de probabilidade num processo formativo de professores utilizando a tecnologia como recurso e como suporte. Nessa introdução traço um panorama geral acerca dos motivos que me conduziram à escolha do tema probabilidade para ser trabalhado junto a um grupo de professores de matemática da educação básica e da escolha do *design experiment* como metodologia adotada na pesquisa que possibilitou agregar o uso de tecnologias e, acima de tudo, atender a intencionalidade do processo formativo. Todos estes aspectos serão explorados com maior profundidade nos capítulos da tese.

Partindo do pressuposto que fazer ciência no paradigma contemporâneo não exclui a figura do pesquisador em seu laboratório, senti a necessidade de abordar inicialmente meu percurso profissional para me situar como sujeito protagonista da pesquisa, uma vez que a metodologia do *design experiment* inclui processos de interação e tomada de decisão do educador. Além disso, a história pessoal costuma ser um componente determinante no processo de uma pesquisa.

## Meu percurso profissional

Sempre gostei de Matemática e tenho formação nessa área realizada em universidades públicas: graduação (bacharelado e licenciatura) na Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP (1973) e mestrado na Universidade de Brasília-UnB (1976) e um quase doutorado na Unicamp, no início na década de 80, do qual tive que me afastar na etapa final, impossibilitada por uma conjunção de fatores em que mais pesaram motivos pessoais que, à época, mostraram-se intransponíveis. Minha incursão pela Educação Matemática se deu após esse inacabado doutorado, não só pela limitação na carreira acadêmica, mas principalmente por sempre ter me interessado pelo processo de ensino-aprendizagem nessa disciplina em diversos níveis. Nesse sentido, considero que tenho uma sólida formação na área aliada há mais de 30 anos dedicados à docência e formação de professores.

Enquanto professora universitária, a maior parte do tempo de minha docência transcorrido na Universidade Federal do Espírito Santo-UFES e o restante em universidades privadas, preocupava-me a aprendizagem dos alunos e sempre procurei encontrar formas diferenciadas de ensino das disciplinas de matemática ministradas nos mais variados cursos, tais como licenciaturas em Matemática, Física, Química, Engenharias, Economia, Ciências da Computação, Farmácia e Pedagogia.

No final dos anos de 1980, ainda na UFES, com a formação de uma equipe engajada com a Educação Matemática avançamos nas questões de formação de professores. Criamos o Laboratório de Ensino Aprendizagem de Ciência e Matemática-LEACIM/UFES, que por mais de uma década foi referência no Estado do Espírito Santo, por promover cursos de formação para professores de matemática, encontros, oficinas, feiras de ciências, além de grupos de estudos envolvendo professores da universidade, professores da educação básica e alunos de licenciatura. Entre os projetos desenvolvidos podemos destacar Projeto Rede Interdisciplinar de Ciências e Matemática do Espírito Santo, convênio PADCT/CAPES/UFES (1990 a 1996); Curso de Formação de Professores de 2° grau, convênio VITAE/SEDU/UFES (1993); quatro edições de um Curso de Especialização em Educação Matemática, duas Cachoeiro do Itapemirim (1993/1994), e duas em Vitória (1998/1999). Estas ações foram, em particular para mim, uma grande escola sobre processos de ensino e aprendizagem.

Durante minha passagem pelo Ministério da Educação (MEC), de 2004 a 2008, como concursada e lotada no Departamento de Políticas para Ensino Médio-DPEM da Secretaria de Educação Básica-SEB/MEC, pude ter contato direto e aprofundado com as políticas públicas, num momento especial quando estavam sendo criados cursos de licenciatura a distância e a Universidade Aberta-UAB, anunciando um novo paradigma de ensino por meio de novas tecnologias e através da rede de internet. Além disso, tive a oportunidade, entre outras atividades durante este período, de ser a coordenadora pedagógica dos programas da TV-Escola para o Ensino Médio junto à Secretaria de Educação a Distância-SEED/MEC.

Este contato com as tecnologias e mídias em prol da educação me induziu a fazer uma especialização em Educação a Distância, pelo SENAC-DF, em 2006, preparando-me para futuros empreendimentos. Assim, pude ser tutora/formadora em diversos cursos de especialização: Gestão de Ambientes Inclusivos, pela Universidade Cidade de São Paulo-UNICID (2007-2010), Formação de Professores de Ensino Médio, promovido pela Secretaria de Educação do Distrito Federal em convênio a UnB (2008-2009), duas edições do Programa Rede de Professores-REDEFOR/UNICAMP, na área de Matemática, promovido pela Secretaria de Estado de Educação de São Paulo em convênio com a Unicamp (2010-2012).

Dessa forma, senti-me motivada a dar continuidade em meus estudos e fazer um doutorado em Educação Matemática, em que pudesse me valer desse conjunto de experiências, como educadora em matemática. Era chegada a hora!

## Do embrião à decisão pela pesquisa

Buscava algo que me instigasse realizar e envolver o uso de tecnologias.  Precisava pensar um tema que me desafiasse, que fosse relevante na área, mas que eu não tivesse muita desenvoltura e isto exigiria aprofundar-me em pesquisar e estudá-lo. Nesse sentido, dentre as disciplinas de Matemática que teria que cursar no doutorado, uma me desafiava, a Estatística.  Havia uma questão sempre me instigara: por que nem toda experiência como professora de matemática foi suficiente para me impedir de ter a sensação de não dominar bem o campo que trata do pensamento estocástico?

Propus-me a procurar respostas às minhas inquietações. Matriculei-me na disciplina de Estatística. Professora atenciosa, ótima didática, sempre disposta a atender às dúvidas que surgiam e, mesmo assim, pude perceber durante o curso, por diversas vezes, que meus conhecimentos prévios não me davam segurança para resolver algumas questões postas nas sequências de ensino que ela nos entregava para resolvermos em grupo e depois discutir coletivamente.  Percebi que não era muito fácil mudar a forma de raciocinar e pensar estocasticamente. Não era só comigo que isto ocorria, também com alguns colegas de curso. Embora possa parecer paradoxal, começou a se delinear em meu íntimo um desafio de que este era um bom tema para usar na pesquisa. Precisava encontrar um recorte adequado.

Na revisão de literatura, busquei com certa avidez livros, artigos e pesquisas que pudessem tanto subsidiar a fundamentação teórica como me confortar em relação às inquietações que me afligiam:

- Como proporcionar o desenvolvimento do pensamento probabilístico nos alunos da Educação Básica?
- Como prover professores de Matemática de recursos didático-metodológicos, inclusive digitais, para atingir essa meta, qual seja, organizar seu trabalho de forma a despertar o interesse do aluno e favorecer a aprendizagem de Probabilidade?
- Como proporcionar aos professores de Matemática o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e uma ruptura com a visão determinística da Matemática por meio de situações problemas?
- Em que medida as tecnologias poderiam servir de ferramenta auxiliar no desenvolvimento do pensamento estocástico?

Minha experiência como professora de Matemática e formadora de professores acrescida nos últimos anos da vivência com tecnologias digitais e cursos em Educação a Distância (EAD), me forneceram os seguintes elementos de reflexão:

- O estudo de probabilidades é mais complexo do que em geral se apresenta nos cursos e requer um novo tipo de raciocínio que provoca uma ruptura do pensamento determinístico.

- Os professores da Educação Básica em sua prática pedagógica, em geral, trabalham atividades prontas, com uso de fórmulas, muitas vezes sem sentido para os alunos, o que não favorece a construção desse conhecimento por parte dos educandos.

- Essa conjunção de fatores parece refletir a falta de domínio do conteúdo a ser ensinado e, consequentemente, fragilidade no desenvolvimento de práticas didático-pedagógicas que favoreçam a aprendizagem dos alunos.

A presente pesquisa aborda um recorte dessa temática e foi desenvolvida num curso voltado para a formação de professores de matemática, do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, participantes do Programa Observatório da Educação da Universidade Bandeirante Anhanguera (UNIBAN), em convênio com a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES/MEC) e parceria com a Secretaria da Educação do Estado de São

Paulo (SEE-SP). Neste programa, fiquei responsável por um módulo, denominado *Probabilidade Geométrica na Educação Básica: casos de acaso e incerteza*, no qual foram abordados noções, conceitos e conteúdos básicos de probabilidade, iniciando pelas noções de acaso, incerteza, aleatoriedade, passando pelas abordagens clássica e frequentista de probabilidade e culminando na probabilidade geométrica (descritos com mais detalhes no capítulo específico desta tese).

Para construir a presente investigação, busquei coerência com o próprio desenvolvimento do pensamento estocástico, encontrado no olhar voltado para a história. Dessa forma, estabeleci o seguinte objetivo de pesquisa:

**Compreender as concepções dos professores sobre os conceitos básicos de probabilidade por meio de processo formativo baseado no *design experiment.***

Em particular, busquei respostas às seguintes **questões da pesquisa**:

- Que dificuldades evidenciadas no desenvolvimento do pensamento estocástico ainda são, ou podem ser, detectadas na concepção dos professores, durante o processo formativo do módulo?
- Dificuldades semelhantes foram identificadas, ou encontram ressonância, também em outras pesquisas?
- Que abordagem adotar no processo formativo para propiciar o levantamento dessas concepções e possíveis dificuldades?

Para descrever o percurso de desenvolvimento da pesquisa, seus aspectos fundantes foram decompostos em quatro elementos, como peças de um quebra-cabeça que precisam se encaixar para compor um todo integrado e significativo: o tema (conteúdo abordado), o processo formativo, o uso de tecnologia e a metodologia utilizada. Seguem as considerações acerca desses elementos.

## A escolha do tema

Na contemporaneidade, é notória a presença da Estatística e Probabilidade, notadamente após o avanço das tecnologias, do crescimento da internet, e-commerce, redes sociais, enfim, da própria cultura digital como um todo. Podemos ver diariamente notícias na mídia com base em análises estatísticas para explicar resultados de pesquisas. A utilização da estatística está disseminada nas pesquisas acadêmicas, nas empresas privadas e públicas, nos órgãos do Governo. Gráficos e tabelas são apresentados na exposição de resultados das empresas; dados numéricos são usados para aprimorar a produção; censos demográficos auxiliam o governo a entender melhor sua população e a definir suas políticas ou organizar seus gastos com saúde, educação, saneamento básico, infraestrutura, entre outros. Com a velocidade da informação, a estatística passou a ser uma ferramenta essencial na produção e disseminação do conhecimento.

A Estatística considerada como ciência, utiliza-se das teorias probabilísticas para explicar a frequência da ocorrência de eventos, tanto em estudos observacionais quanto em experimentos que modelam a aleatoriedade e a incerteza de forma a estimar ou possibilitar a previsão de fenômenos futuros, conforme o caso. Durante o século XX, a criação de instrumentos precisos para a agronomia, epidemiologia, bioestatística, controle de qualidade industrial, análises de dados econômicos e sociais (econometria), como taxas de desemprego, censos populacionais, entre outros, demandaram avanços substanciais nas práticas estatísticas com uso de ferramentas probabilísticas.

Stigler (1986)[1] mostra como as estatísticas surgiram a partir da interação de conceitos matemáticos e as necessidades de várias ciências aplicadas, incluindo astronomia, psicologia experimental, genética e sociologia. A ênfase de Stigler é sobre como, quando e onde os métodos da teoria das probabilidades foram desenvolvidos tanto para medir a incerteza na ciência experimental e observacional como também na estrutura conceitual para os estudos quantitativos nas ciências sociais. Em seu livro *The History of Statitics: The Measurement of Uncertainty before 1900*, Stigler descreve o contexto científico que permitiu a evolução de diferentes métodos estatísticos, identifica problemas conceituais que retardaram o crescimento da matemática estatística e desenvolvimentos conceituais que permitiram grandes avanços.

[1] STIGLER, S. M. **The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900**. Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press, 1986.

A chegada de computadores pessoais cada vez mais potentes foi decisiva para tornar a Estatística mais acessível aos pesquisadores dos diferentes campos de atuação. Atualmente, os equipamentos e softwares permitem a manipulação de grande quantidade de dados, dinamizando o emprego dos métodos estatísticos.

Para Salsburg (2009)[2], a Estatística revolucionou a ciência no século XX e, na primeira década do século XXI, continua a fornecer modelos úteis para as ciências mais novas. Essas inovações estatísticas podem ser encontradas em universidades e laboratórios de diversos países. Em seu livro, Salsburg (2009, p. 248) diz que "a ideia básica por trás da revolução estatística é que as coisas reais da ciência são distribuição de números que podem ser descritos por parâmetros", sendo matematicamente conveniente introduzir esse conceito na teoria probabilística e lidar com distribuição de probabilidades. Como a probabilidade parece inerente ao conceito de distribuição, muito esforço se despende para que as pessoas entendam probabilidade, tentando vincular a ideia matemática de probabilidade à vida real e usando ferramentas da probabilidade condicional para interpretar observações e resultados de experimentos científicos.

Embora possa parecer que a Estatística está associada ao crescimento e ao avanço tecnológico, seu uso é reconhecido há milhares de anos. Voltando os olhos para a história, podemos encontrar indícios de sua origem; o registro de informações perde-se no tempo. Embora haja controvérsias acerca do surgimento do termo "estatística", a utilização das ideias de caráter estatístico remonta à Antiguidade, com a necessidade de os Estados conhecerem dados de sua população e riqueza, tendo em vista principalmente fins militares e tributários.

Os conceitos de acaso e incerteza são tão antigos quanto a civilização. As pessoas sempre tiveram que enfrentar as incertezas de clima, de suprimento de alimentos e de outros aspectos de seu ambiente e se esforçar para reduzir essas incertezas e seus efeitos. A ideia de jogo também tem origem bastante antiga. Cerca de 3.500 anos a. C. eram praticados no Egito, e em outros lugares, jogos de azar com objetos de osso, que podem ser considerados precursores do dado. Foram encontrados em tumbas no Egito, que datam de 2000 anos a.

[2] SALSBURG, D. **Uma senhora toma chá...: como a estatística revolucionou a ciência do século XX**. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

C., cubos com marcas bastante semelhantes às dos modernos dados. O homem antigo também usava mecanismos de sorte para propósitos de predição.

Entretanto, surpreendentemente, parece que os gregos, romanos e nações medievais da Europa não alcançaram uma noção clara das leis do acaso, embora o acaso fosse uma ideia familiar, especialmente em conexão com jogos. Ideias primitivas de frequência relativa já estavam presentes, mas a doutrina do acaso demorou a surgir.

O conceito científico de probabilidade não teve uma única fonte. Pode-se indicar como origens da teoria da probabilidade, principalmente os jogos de azar e o seguro marítimo para cobertura de riscos referentes aos naufrágios de navios ou roubo por pirataria, mas também os estudos de mortalidade decorrente de pragas e os estudos de erros em astronomia, entre outros. O desenvolvimento desse conceito intensificou-se, a partir de meados do século XVIII, decorrente da extensão de suas aplicações, através da estatística, em diversos campos do conhecimento, principalmente em biologia, agricultura, economia, meteorologia, psicologia e sociologia.

De acordo com Richard Jeffrey (1992, p. 54)[3], "Antes de meados do século XVII, o termo "provável" (em latim *probable*) significava aprovável, e foi aplicado neste sentido, univocamente, à opinião ou à ação". Uma ação ou opinião provável era o que as pessoas sensatas iriam empreender ou manter, nas circunstâncias em questão.

Afora algumas considerações feitas por Girolamo Cardano, no século XVI, a doutrina de probabilidades data da correspondência de Pierre de Fermat e Blaise Pascal (1654). Christiaan Huygens (1657) deu o mais antigo tratamento científico conhecido para conceito. As obras *Ars Conjectandi* de Jacob Bernoulli, publicada postumamente em 1713, e *The Doctrine of Chances* (1718), de Abraham de Moivre, tratam o assunto como um ramo da matemática. O ensaio do inglês Thomas Bayes, *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances*, de 1763, abriu horizontes para aplicações de probabilidade no raciocínio

[3] JEFFREY, R.C. **Probability and the Art of Judgment**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

indutivo[4], ou seja, o uso das probabilidades de eventos observados para comparar a plausibilidade de hipóteses que poderiam explicá-las.

Dessa forma, vemos que situações relativas ao acaso, aleatoriedade ou chance estão presentes em diversas atividades na história das antigas civilizações, envolvendo jogos de tabuleiro a práticas divinatórias conhecidas por volta de 2500 anos a. C. Muito embora despertassem o interesse de filósofos e cientistas desde a primeira metade do século V a. C., o entendimento dos conceitos de aleatoriedade e chance não convergiram ao longo da história. Motivos religiosos, além da inexistência de um conceito formal de chance ou aleatoriedade teriam ainda, segundo Ian Hacking (2006)[5], dificultado o desenvolvimento de uma teoria matemática sobre chances muito antes da segunda metade do século XVI, quando os primeiros passos nesse sentido foram efetivamente dados.

Na opinião de Bennett (2003)[6], se a incerteza em um processo aleatório é fruto da nossa ignorância a respeito das forças que determinam o seu desfecho ou da existência de mecanismos inacessíveis inerentes aos recursos e condições que o circunscrevem e que determinam o seu desfecho de maneira distributivamente peculiar e própria, estas são questões que estão no centro da discussão filosófica envolvendo as noções de aleatoriedade e chance e que continuam em debate até os dias de hoje.

Embora com origens distintas, segundo Lopes (1999), ao longo da história as noções e conceitos estatísticos imbricaram-se aos probabilísticos, gerando o termo estocástico. Na evolução da concepção do termo estocástico podemos relacioná-lo a: chance, imprevisibilidade e experimento; inter-relação matemática e probabilidade; inter-relação combinatória, probabilidade e estatística e, por fim, inter-relação matemática, probabilidade e estatística.

A explanação até o momento tem o propósito de evidenciar os seguintes pontos:

- a relevância dos conceitos probabilísticos cada vez mais presentes no mundo atual;

---

[4] **Raciocínio indutivo**: Raciocínio que parte de premissas, observações ou fatos do mundo ou da natureza, em situações particulares, para inferir uma generalização.

[5] HACKING, I. **The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas About Probability, Induction And Statistical Inference**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[6] BENNETT, D. J. **Aleatoriedade**. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

- a importância de se conhecer as origens, avanços e percalços na evolução dos conceitos, para melhor compreensão numa visão sociocultural epistemológica das dificuldades ou equívocos encontrados ao longo da história;
- esclarecer que as ideias no âmbito da estatística e da probabilidade, embora com origens distintas, acabaram convergindo no tempo e hoje encontram-se imbricadas.

Ao compreender que o pensamento estocástico abarca o pensamento estatístico, aliado ao pensamento e raciocínio[7] probabilísticos, faz-se necessário definir a ênfase conceptual adotada na pesquisa: **pensar estocasticamente é ter condições de reconhecer a existência da imprevisibilidade, variabilidade e de interpretar informações; é pensar em situações envolvendo o acaso, a incerteza e aleatoriedade; é ter condições de estabelecer padrões estocásticos, que são aqueles que têm origem em processos não determinísticos, desencadeados em eventos aleatórios.**

De algum modo já nos defrontamos com a aleatoriedade ou fomos tocados por leis do acaso: jogo de cartas, cara-coroa, jogo de futebol, resultado de um sorteio, algum acidente ou cataclismo, mais ou menos trágico. Estatísticas que descrevem nosso mundo probabilístico são disseminadas por todo lugar. Por exemplo: informações do Ministério da Saúde indicam que, em 2011, a taxa de *incidência* de *aids* no Brasil foi de 20,2 casos por 100 mil habitantes; dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) registram que, **e**ntre 2005 e 2011, a população de 10 anos ou mais de idade cresceu 9,7%, enquanto o número de pessoas nessa faixa etária que utilizam a internet aumentou 143,8%; a Organização das Nações Unidas (ONU) estima em mais de 100.000 o número de mortos nos

[7] **Pensamento** e **pensar** são, respectivamente, uma forma de processo mental ou faculdade do sistema mental. Etimologicamente ambos os termos remontam ao latim '*pensare*', que é um verbo de ação. Pensar permite aos seres modelarem o mundo e com isso lidar com ele de uma forma efetiva e de acordo com suas metas, planos e desejos. Termos que se referem a conceitos e processos similares incluem cognição, senciência, consciência, ideia e imaginação. O pensamento é considerado a expressão mais "palpável" do espírito humano, pois através de imagens e ideias revela justamente a vontade deste. Já **Raciocínio** é uma atividade do pensamento pela qual se procede a um encadeamento de juízos visando estabelecer a verdade ou a falsidade de algo; procedimento racional de argumentação ou de justificação de uma hipótese. Etimologicamente deriva do latim '*ratio*' (razão), faculdade de julgar que caracteriza o ser humano. Em outras palavras, o que nos faz transcender a vida sensitiva dos animais (e vegetativa das plantas) é a nossa razão, nossa alma intelectiva.

confrontos na Síria, desde o início da revolta contra o regime do presidente Bashar al-Assad. E vai por aí...

Difundem-se médias de gols no futebol, pesquisas políticas, previsões de tempo, mas não um entendimento dos conceitos subjacentes a essas estatísticas e probabilidades.

> São inúmeros os equívocos, e alguns conceitos parecem ser especialmente problemáticos. Mesmo para os mais versados em matemática, algumas questões de probabilidade não são tão intuitivas. Apesar das reformas curriculares que deram atenção especial ao ensino de probabilidade nas escolas, a maioria dos professores experientes provavelmente concordaria com o seguinte comentário de um professor de matemática: "Ensinar bem estatística e probabilidade não é fácil". (BENNETT, 2003, p. 2)

A inserção de conceitos de Estatística e Probabilidade na Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio) sugerida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e currículos oficiais tem provocado discussões e gerado dúvidas em professores e formadores sobre a abordagem a ser dada a esse conteúdo nos diferentes níveis de escolaridade.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) publicados pelo Ministério de Educação (MEC), esses temas estão recomendados no bloco de conteúdo "Tratamento da Informação" do currículo de Matemática. Nesse bloco, além da probabilidade e da estatística inclui-se a combinatória, considerando que tais assuntos possibilitam "o desenvolvimento de formas particulares de pensamento e raciocínio, envolvendo fenômenos aleatórios, interpretando amostras, fazendo inferências e comunicando resultados por meio da linguagem estatística". (BRASIL,1998, p.134)

Além dessa visão de ensino apontada nos PCN, vale destacar argumentos que têm sido evidenciados em pesquisas sobre o ensino da Estocástica na Escola Básica – que ocorreram por conta de um movimento internacional, em meados do século passado, culminando com a inclusão da temática nas escolas. Entre os argumentos que justificam a inclusão, encontram-se os citados por Cardeñoso e Azcárate (1995, p. 41)[8], como: a influência na tomada de decisões das pessoas quando dispõem somente de dados afetados pela incerteza; o seu domínio em facilitar a análise crítica da informação recebida através, por

[8] CARDEÑOSO, J.M.; AZCÁRATE, P**.** Tratamiento del conocimiento probabilístico en los proyectos y materiales curriculares. **Revista sobre La Enseñanza y Aprendizaje de Las Matematicas (Revista SUMA),** Zaragoza, v. 20, p.41-51, nov. 1995.

exemplo, dos meios de comunicação; por seu entendimento proporcionar uma filosofia do azar (acaso) de grande repercussão para a compreensão do mundo atual.

Apesar dos Parâmetros Curriculares Nacionais justificarem o ensino da probabilidade e da estatística acenando para a necessidade do indivíduo compreender as informações veiculadas, tomar decisões e fazer previsões que influenciam sua vida pessoal e em comunidade, ao descreverem as noções de estatística, probabilidade e combinatória, não o fazem de forma integrada, podendo deixar ao professor a ideia de compartimentalização desses temas. Isso é reforçado por Lopes (1998)[9] ao destacar o fato de as atividades propostas em livros didáticos serem permeadas por uma concepção de ensino de estatística e probabilidade bastante compartimentalizada, como se os conceitos probabilísticos e estatísticos não se relacionassem. Essa forma de olhar o ensino desses temas se contrapõe ao trabalho que recomenda o ensino da probabilidade inseparável da estatística, ou seja, da estocástica.

Daí porque, apesar de tratar no módulo de aplicação da pesquisa apenas de conceitos básicos de probabilidade, tomo o termo estocástico como mais abrangente para nortear a compreensão, em termos de análise, das dificuldades epistemológicas evidenciadas na história, por vezes refletidas ainda hoje e desejáveis de serem suplantadas.

Merece ressaltar ainda que, nas escolas, o professor de Matemática costuma trabalhar o ensino de probabilidade algoritmamente, ou seja, geralmente associado à fórmulas, situações conhecidas e repetidas, definições sem justificativa plausível, o que provoca desinteresse por não dar sentido ao aluno. Por exemplo, o enfoque combinatório dado ao conceito de probabilidade, com ênfase nas noções da análise combinatória (arranjo, combinação, permutação, binômio de Newton)**,** exerce um forte peso quando da abordagem da teoria das probabilidades no contexto escolar. Ao tratar dessa maneira esse conteúdo, de acordo com Azcárate (1996)[10], não se estaria possibilitando perceber seu caráter estocástico, deixando de considerar as percepções aleatórias trazidas pelo azar.

---

[9] LOPES, C. A. E. **A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental*: uma análise curricular.*** 1998. 125 p. Dissertação (Mestrado em Educação)-Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

[10] AZCÁRATE, P. **Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad.** Granada: Comares, 1996.

Além disso, podem levar a equívocos (*misconceptions*) sobre o conceito de probabilidade, como os levantados em algumas pesquisas da área. Shaughnessy (1977, p. 295, tradução nossa)[11] aponta a inexperiência dos alunos com a expressão combinatória e com leis da probabilidade além de que "há evidências consideráveis que sugerem que os equívocos sobre probabilidade são, por vezes, de um tipo psicológico, e que a mera exposição às leis da probabilidade pode não ser suficiente para superar alguns equívocos de probabilidade".

Ademais, a questão da certeza e da verdade absoluta, há tempos atribuída à ciência, ainda se perpetua na escola, o que contribui para reforçar a visão determinista de mundo, provocando na formação das pessoas um déficit em relação à compreensão das incertezas e suas possibilidades de tratamento matemático. Isto pode ser verificado em pesquisas realizadas tanto com alunos nas escolas, quanto em cursos de formação inicial ou continuada. Sobretudo, entende-se que as metas esperadas com o ensino de probabilidade e estatística na Educação Básica devem ser esperadas também dos professores que irão ensiná-los. Aos cursos de formação cabe a reponsabilidade de preparar bem os futuros professores para lidar com o ensino desse conteúdo. Diante deste quadro, é importante levantar algumas considerações acerca da formação de professores.

**A formação de professores que norteou a ênfase do processo formativo**

Nas últimas décadas houve um crescente interesse em investigar o conhecimento dos professores com o objetivo tanto de compreender as concepções, crenças, dilemas e teorias que orientam a prática profissional, como o de identificar os processos que contribuem para que o professor se aproprie do conhecimento necessário a sua atividade profissional. A cada ano cresce o número de pesquisas de diferentes tipologias e classificações que dão um panorama da diversidade de enfoques teórico-metodológicos presentes nesses estudos. Muitos pesquisadores vêm estudando a base de conhecimento profissional para o ensino a partir de uma variedade de perspectivas teórico-metodológicas, uma vez que a aprendizagem dos alunos relaciona-se diretamente à qualidade da formação dos professores.

[11] SHAUGHNESSY, J.M. Misconceptions of probability: an experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. **Educational Studies in Mathematics**, 8, p. 285-316, 1997.

Um dos precursores desses estudos referentes à compreensão de processos de aprendizagem profissional da docência foi Lee Shulman ao constatar a prevalência de questões didático-pedagógicas nas pesquisas e processos seletivos, defendeu a recuperação do que denominou "paradigma perdido" em um programa *Knowledge Base* (SHULMAN, 1986, 1987)[12], que valoriza o saber docente sobre o conteúdo do ensino e da aprendizagem e distingue três categorias de conhecimento do professor: conhecimento do conteúdo; conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular. As obras desse autor, que nas últimas décadas influenciaram pesquisas e políticas de formação e desenvolvimento profissional de professores, visaram principalmente responder à seguinte questão: o que os professores precisam saber para poder ensinar de forma que seu ensino possa conduzir à aprendizagem dos alunos?

A ele seguiram-se muitos outros, entre os quais destaco aqui Deborah Ball, Liping Ma, Viola dos Santos, Punya Mishra. Os grupos de investigação de Deborah Ball estudam a natureza do conhecimento matemático necessário para ensinar, tendo desenvolvido instrumentos de analise das relações entre conhecimento matemático dos professores, qualidade do seu ensino e desempenho dos alunos. Em continuidade aos trabalhos de Shulman, o artigo de Ball, Thames e Phelps (2008)[13] inclui outras categorias, como o conhecimento comum e específico do conteúdo, o conhecimento sobre estudantes e conhecimento sobre o conteúdo de ensino. Outras pesquisas deste grupo também focam em intervenções destinadas a melhorar a qualidade e proficuidade do ensino da matemática, seja através de políticas, reformas ou formação de professores.

O referencial teórico de Shulman, Ball e colaboradores nos ajuda a pensar em processos de formação, no qual o professor possa assumir-se como principal protagonista de seu desenvolvimento profissional, identificando e refletindo sobre o conhecimento base para o ensino de matemática, o que é absolutamente desejável. Entretanto, sem prejuízo da atenção que se deve dedicar às questões do conhecimento pedagógico acerca do conteúdo e do conhecimento dos alunos, bem como a integração curricular do conteúdo, todos

[12] SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher***,* 1986
SHULMAN, L. Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. Harvard Educational Review, Cambridge, v.57, n.1, p.1-22, 1987.

[13] BALL, D.L.; THAMES, M.H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education***,* 2008.

necessários a uma boa prática docente, quero ressaltar a necessidade de uma **formação sólida do conteúdo específico**, conforme defende Viola dos Santos (2012)[14], pois sem esta não se atinge uma excelência na aprendizagem dos alunos, uma vez que não se pode ensinar e tampouco encontrar caminhos e estratégias de ensino de "algo" que não se sabe com profundidade para se ter a destreza de desenvolver a favor de uma aprendizagem eficaz dos alunos. Quem também advoga nessa direção é Liping Ma (Ma, 2009)[15], que desenvolve a noção de "*Profunda compreensão da Matemática fundamental*" como um tipo de conhecimento matemático conexo, estruturado e coerente ao nível das ideias matemáticas fundamentais. Estes aspectos levantados por Viola dos Santos e Liping Ma, relativos ao conhecimento específico do conteúdo – formação sólida e compreensão profunda -, são particularmente fundamentais no que diz respeito ao ensino de probabilidade, mesmo em se tratando de seus constructos básicos.

Dessa forma, **constituíram-se como cerne do tema e da concepção do processo formativo adotado nesta pesquisa,** o entrelaçamento dos seguintes fatores:

- a importância do desenvolvimento do pensamento estocástico (História das Ideias),
- as dificuldades detectadas para desenvolver este pensamento, apontadas no meu percurso profissional e levantadas na revisão de literatura sobre pesquisas realizadas por especialistas da área, particularmente entre os envolvidos com Educação Estatística,
- os percalços e equívocos que puderam ser evidenciados na evolução histórica desse pensamento, em particular relativo à questões envolvendo probabilidades.

Entretanto, falta ainda uma peça importante e necessária para o contexto desta pesquisa: a tecnologia. Seguem algumas considerações que respondem à questão a seguir.

### Por que usar a tecnologia na pesquisa?

É possível constatar que o advento das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e as mídias digitais têm causado grande impacto em praticamente todos os segmentos da nossa

---

[14] VIOLA DOS SANTOS, J. R. O que falam formadores sobre a formação (sólida em) matemática de futuros professores que ensinam matemática. In: ANGELO, C. L. et al (Org.) **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de História**. São Paulo: Midiograf, 2012, p. 233-250.

[15] MA, L. **Saber e Ensinar Matemática Elementar**. Lisboa: Gradiva, 2009.

sociedade, da nossa vida e, sobretudo, no desenvolvimento do conhecimento científico e nos avanços da ciência.

Segundo Valente (2002, p. 16)[16], com a disseminação dos microcomputadores nos anos 80 as escolas começaram a usar essa tecnologia e, com isso, diversificaram-se as modalidades do seu uso pedagógico, surgindo os jogos, as linguagens de programação e outros *softwares* para desenvolver tarefas específicas – como processadores de texto, planilhas, banco de dados – , e a cada avanço das TIC, novas possibilidades surgem, como é o caso mais recente da Internet na Educação.

Anterior à Internet, o uso das tecnologias na Educação já vinha (e continua) sendo muito demandado. Segundo os PCN (1998)[17], as tecnologias podem ser ferramentas importantes para trabalhos interativos e ampliar as opções de ação didática na construção de ambientes de interação que favoreçam a aprendizagem.

> As novas tecnologias da informação oferecem alternativas de educação a distância, o que possibilita a formação contínua, trabalhos cooperativos e interativos. Podem ser ferramentas importantes para desenvolver trabalhos cooperativos que permitam a atualização de conhecimentos, a socialização de experiências e a aprendizagem permanente. (BRASIL, 1998, p. 140)
>
> A tecnologia deve ser utilizada na escola para ampliar as opções de ação didática, com o objetivo de criar ambientes de ensino e aprendizagem que favoreçam a postura crítica, a curiosidade, a observação e análise, a troca de ideias, de forma que o aluno possa ter autonomia no seu processo de aprendizagem, buscando e ampliando conhecimentos (BRASIL, 1998, p. 156)
>
> Conhecer e saber usar as novas tecnologias implica a aprendizagem de procedimentos para utilizá-las e, principalmente, de habilidades relacionadas ao tratamento da informação (BRASIL, 1998, p. 139)

Criar ambientes de aprendizagem com a presença de tecnologias significa utilizar as TIC para a representação, a articulação entre pensamentos, a realização de ações e o desenvolvimento de reflexões sobre as ações. O desafio mais complexo desse processo,

[16] VALENTE, J. A. A espiral da aprendizagem e as Tecnologias de Informação e Comunicação: Repensando Conceitos. In: JOLY, M. C. R. A. (Org). **A tecnologia no Ensino: Implicações para a aprendizagem**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002.

[17] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998. 174 p.

segundo Almeida e Prado (2008)[18] está na criação de um design educacional que seja flexível e aberto ao desenvolvimento de metodologias de trabalho e estratégias de atuação docente, que leve em conta as contribuições das tecnologias disponíveis para o alcance dos objetivos, considerando a articulação entre distintas mídias e a sinergia de integrá-las à atividade, além de produção colaborativa de conhecimento.

Punya Mishra e Mathew Koehler (2006)[19] propoem uma estrutura conceitual para tecnologia educacional, baseando-se na formulação do ''conhecimento do conteúdo pedagógico de Shulman'' e estendendo-o para o fenômeno dos professores integrando a tecnologia em sua pedagogia. Os autores enfatizam que usos pedagógicos da tecnologia requerem o desenvolvimento de uma forma complexa de conhecimento, que denominam de **conhecimento pedagógico do conteúdo tecnológico**. Ao fazer isso, levam em conta a natureza, complexa e multifacetada – característica deste conhecimento – e propõem a interação entre os três principais componentes de ambientes de aprendizagem: conteúdo, pedagogia e tecnologia. Dessa forma, o modelo tem muito a oferecer para as discussões sobre a integração da tecnologia no vários níveis: teórico, pedagógico e metodológico. Os autores argumentam que o desenvolvimento da teoria para a tecnologia educacional é difícil porque requer um entendimento detalhado dos relacionamentos complexos que estão contextualmente imbricados, sendo difícil estudar causa e efeito, quando professores, salas de aula, política e objetivos curriculares variam conforme o caso. Ressaltam ainda que uma abordagem, chamada de *design experiment*, homenageia essa complexidade e recentemente ganhou destaque na pesquisa educacional (BROWN, 1992; COBB, CONFREY, DISESSA, LEHRER, E SCHAUBLE, 2003; DESIGN-BASED RESEARCH COLLECTIVE, 2003).

Nessa direção é que foi pensada a criação de um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) para suporte e acompanhamento das atividades e ações de formação realizadas na aplicação da pesquisa, como também para o uso de recursos midiáticos. Optou-se, assim, por adotar uma abordagem diferenciada no desenvolvimento do conteúdo Probabilidade: trabalhar o

[18] ALMEIDA, M. E. B. de; PRADO, M. E. B. B. Tecnologia na sociedade, na vida e na escola. In: Tecnologias na Educação: ensinando e aprendendo com as TIC. ProInfo – Curso de 100h. Guia do Cursista. Brasília: MEC/ SEED. 2008.

[19] MISHRA, P.; KOEHLER, M. Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. **Teachers College Record**, V. 108, n. 6, 2006, pp. 1017–1054

módulo na elaboração de ações de formação desenvolvidas na perspectiva do *design experiment* para favorecer os processos de ensino e aprendizagem do tema, fazendo uso da tecnologia como recurso para atividades e experimentos com objetos digitais (*applets*, vídeos) e como suporte aos encontros presenciais através de um ambiente virtual de aprendizagem, criado por mim para esta finalidade. Notadamente para o ensino de probabilidades os chamados objetos digitais de aprendizagem interativos (ODAIs), como os simuladores (*applets*) são muito apropriados por permitirem a realização de experimentos randômicos, que simulam experimentos aleatórios. Dessa forma, o módulo contou com encontros presenciais com acompanhamento a distância, potencializados pelo uso da tecnologia.

## Metodologia da pesquisa

*Design experiment* como metodologia de pesquisa, segundo Mishra e Koehler (2006) enfatiza a implementação detalhada e o estudo de intervenções que envolvem objetivos pedagógicos em cenários autênticos. Favorece o reconhecimento das complexidades do ensino em sala de aula; conduz profissionais e pesquisadores ao desenvolvimento de idéias teóricas fundamentadas em contextos da prática; reduz a distância entre a investigação e a prática, entre a teoria e aplicação. (MISHRA; KOESHLER, 2006, p. 1019)

No caso específico deste trabalho, para além do conteúdo a ser tratado, era fundamental adotar uma abordagem que pudesse provocar nos participantes uma desconstrução (ruptura conceitual) e, ao mesmo tempo, uma interação dialógica numa dimensão construcionista, que permitisse evidenciar as concepções, dificuldades ou equívocos acerca das noções e conceitos básicos de probabilidade – quiçá um novo olhar para esta temática –, de forma que pudesse melhor compreendê-los à luz do conhecimento histórico sobre os mesmos. Nesse sentido, o *design experiment*, na concepção defendida principalmente por Paul Cobb e seus colaboradores (COBB; CONFREY; diSESSA; LEHRER e SCHAUBLE, 2003)[20], de caráter teórico e prático, interacionista e intervencionista, visando uma 'micro' teoria de ensino aprendizagem, mostrou-se a metodologia mais adequada, no meu ponto de vista, por atender às necessidades de desenvolvimento da pesquisa que propiciasse a análise dos

[20] COBB, P.; CONFREY, J.; diSESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in educational research. **Educational Researcher**, v. 32, n. 1, p. 9-13, jan/fev. 2003.

dados coletados na direção da meta estabelecida, quer seja, o objetivo de compreender as concepções dos professores acerca dos conceitos básicos de probabilidade à luz da fundamentação teórica realizada.

Já para Steffe & Thompson (2000)[21], a metodologia pode ser utilizada para entender o raciocínio e a aprendizagem, ou seja, o *design experiment* tem como parte essencial olhar o que está por trás do que falam os aprendizes. Suas raízes surgiram nos Estados Unidos como um tipo de experimento de ensino em pesquisas em Educação Matemática, em que se consideram os progressos do estudante diante de uma comunicação matemática interativa. Como método científico de investigação enfatiza a análise do pensamento matemático do estudante, bem como suas modificações durante o processo. Para tal cabe ao pesquisador criar situações e modos de interação com os estudantes de forma a encorajá-los a modificar seu pensamento (ou modo de pensar) sobre o tema estudado.

Nas palavras de Cobb e colaboradores (2003), trata-se de uma *ecologia de aprendizagem*, uma metáfora à característica transversal iteracionista, que no seu desenvolvimento é revista, repensada e modificada, de acordo com a avaliação *in loco* de seus resultados, adquirindo um caráter cíclico no seu processo. Consiste, portanto, numa forma de investigação educacional formativa onde se testam e aperfeiçoam projetos educacionais, recorrendo a técnicas cíclicas e iterativas, que assumem um caráter extremamente formativo, flexível e que englobam princípios de outros tipos de investigação educativa. Dessa forma, ao mesmo tempo em que se detectam dúvidas, equívocos ou inconsistências conceituais, reformula-se as ações ou atividades de forma a tentar ressignificá-las conceitualmente, numa dinâmica cíclica. Em outras palavras, já é realizada pelo pesquisador uma análise parcial *in loco* nos diferentes ciclos durante a condução do processo. Por outro lado, o processo registrado pelos instrumentos de coleta permite, ao ser revisitado, uma análise mais elaborada, à luz dos fundamentos teóricos, dos seus diferentes momentos, que comporão análise final da pesquisa.

[21] STEFFE, L.P.; THOMPSON, P.W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Ed). **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale, NJ: Erlbaum. 2000, p. 267-307.

Dentre os tipos de ambiente educacional em que a metodologia do *design experiment* pode ser aplicada, este trabalho foi concebido entre o professor-pesquisador e os cursistas durante o desenvolvimento do módulo, como a **metodologia aplicada no curso**, ao mesmo tempo em que, pelo seu caráter, se constitui como **metodologia de pesquisa**. Vale constar que os instrumentos de coleta de dados durante a aplicação da pesquisa constituíram-se de: a gravação em filme e áudio dos encontros presenciais do módulo em questão; os registros do AVA, que permitiram acompanhar todo o processo entre esses encontros por meio das ferramentas, como fóruns, portfólios, diário de bordo, entre outros.

Vale ressaltar ainda que uma das características do *design experiment* – que o distingue de outras metodologias – é a indissolubilidade entre os papéis de formador e pesquisador (STEFFE; THOMPSON, 2000). Este fato, no desenvolvimento do módulo, impôs uma atenção constante na condução das atividades e discussões, pois demandavam o desenho cíclico do planejamento de uma programação básica e de diversos recursos extras que pudessem ser inseridos conforme surgissem questões ou dúvidas por parte dos cursistas, numa constante dinâmica de replanejamento das ações.

Por fim, entende-se a relevância do tema e da abordagem adotada por propiciar o domínio de conteúdos e conceitos básicos de Probabilidade, bem como a desenvoltura do raciocínio probabilístico, cada vez mais demandados na sociedade atual e ainda recentes nas pesquisas nessa direção. Nesse sentido, destaca-se:

- A atenção e importância de um tratamento adequado do conteúdo de probabilidades no desenvolvimento curricular nas escolas desde cedo, aumentando a responsabilidade dos professores.
- A utilização de tecnologia condizente com o desenvolvimento do conteúdo favorece a apropriação do mesmo e torna o ensino mais atraente e atual para nossos alunos.
- A adoção de uma modalidade semipresencial e/ou online em cursos vem sendo cada vez mais demandada e é sempre um desafio realizá-la de forma eficiente.

A tese está estruturada em 6 capítulos que aprofundam a fundamentação e considerações iniciais aqui esboçadas, descrevem a pesquisa e sua análise. O primeiro capítulo traz a visão de autores pesquisadores destacando iniciativas preponderantes para o surgimento da Estatística e da Probabilidade no percurso histórico da evolução do conhecimento científico.

A intenção é olhar como eram vistos o acaso e a aleatoriedade, a incerteza e a tomada de decisão, as principais motivações dos pensadores em cada época e os principais empecilhos, resistências ou dificuldades epistêmicas, objetivando evidenciar que algumas incompreensões detectadas ainda se refletem até hoje em determinados níveis do conhecimento.

O capítulo 2, visando situar o leitor, traz os constructos de Probabilidade que foram relevantes na aplicação da pesquisa, utilizados nas sequências de ensino trabalhadas no desenvolvimento do módulo. São apresentadas as noções preliminares, as definições e interpretações de probabilidade na visão clássica, frequentista, subjetiva e geométrica, bem como algumas aplicações com resolução por serem exemplos específicos de considerações ou interpretações destacadas no texto.

O terceiro capítulo aborda a importância da Educação Estatística para congregar especialistas e acadêmicos preocupados com a educação dessa temática, sua inclusão nos currículos e abordagens em sala de aula. Surgida do movimento ocorrido em âmbito mundial, a partir dos meados do século passado, frente às evidências da relevância crescente do papel da Estatística e da Probabilidade na sociedade atual e, portanto, da consequente urgência da apropriação, por parte dos estudantes nas escolas, das noções e principais conceitos, bem como instrumental teórico e procedimental, envolvendo combinatória, probabilidade e estatística, adequados aos diversos níveis de escolaridade. Isto provocou o surgimento de grupos de especialistas e pesquisadores de diversas áreas do conhecimento.

O capítulo 4 trata da formação dos professores e também faz um retrospecto a um movimento ocorrido por volta da década de 1970, em que houve uma mudança de paradigma acerca da visão sobre o processo de ensino e aprendizagem, repercutindo fortemente no papel do professor, de transmissor do conhecimento para professor reflexivo, com variadas interpretações sobre este conceito, e que ainda se verificam até os dias atuais, modificadas ou ressignificadas, numa dinâmica própria que caracteriza um processo, ou seja, em construção na sua evolução. O tratamento dado ao tema visa refletir meu pensamento sobre a formação do professor, em particular de matemática, e que foram norteadores do processo formativo adotado na pesquisa.

O capítulo 5 apresenta o delineamento da pesquisa propriamente dita, o objetivo geral e objetivos específicos da investigação, bem como a descrição do processo formativo realizado junto a professores de matemática da Educação Básica, participantes do módulo **Probabilidade na Educação Básica: casos de acaso e incerteza**, desenvolvido por meio de encontros presenciais com acompanhamento a distância realizado no AVA, concebidos e desenvolvidos na abordagem do *design experiment* que permitiu, à luz da fundamentação teórica, evidenciar concepções dos professores participantes acerca dos conceitos básicos de Probabilidade, bem como as incompreensões e equívocos que se destacaram na análise.

Por fim, o capítulo 6 traz a descrição do processo e a análise dos dados com a síntese da pesquisa. A análise evidencia tanto equívocos (*misconceptions*) detectados na evolução dos conceitos básicos de probabilidade que se refletem até os dias de hoje e costumam ser identificados como falácias por diversos pesquisadores, como também identifica que muitas dúvidas e incompreensões ocorridas foram constatadas na maioria das pesquisas similares consultadas. A despeito de algumas dificuldades e limitações encontradas no desenvolvimento da pesquisa, pode ser verificado progresso no desenvolvimento do pensamento probabilístico de alguns cursistas. Mesmo assim, parece claro que o desenvolvimento do pensamento estocástico é mais complexo do que costuma se apresentar e, no meu modo de ver, exige uma abordagem que privilegie o caráter sócio histórico cultural e antropológico da episteme dos conceitos associados, de forma a provocar tanto uma ruptura/desconstrução do pensamento determinístico arraigado por tanto tempo na construção do saber, como aprender a coexistir com ele no campo do conhecimento, uma vez que ambos são necessários numa simbiose dialética. Os dados também evidenciaram algumas concepções dos professores-cursistas relativas à formação e ao uso da tecnologia nas práticas educativas.

# 1. Noções Fundantes da Estatística e da Probabilidade

> “Nada é mais importante do que observar as origens da invenção, as quais são, na minha opinião, mais interessantes que as próprias invenções”. (LEIBNITZ, *apud*, POLYA, 1995, p. 96).

Neste capítulo destacamos noções fundantes tanto da Estatísca quanto da Probabilidade, voltando o olhar para os primórdios dessas ideias que tiveram origens distintas e convergiram na sua evolução ao longo da história.

A Estatística é muito presente na atualidade pricipalmente após o avanço das tecnologias de comunicação e informação, do crescimento da internet, e-commerce, redes sociais, enfim, da própria cultura digital como um todo. Mas nem sempre nos damos conta disso.

Durante o século XX, a criação de instrumentos precisos para a agronomia, epidemiologia, bioestatística, controle de qualidade industrial, análises de dados econômicos e sociais (econometria), como taxas de desemprego, censos populacionais, entre outros, demandaram avanços substanciais nas práticas estatísticas. Dados estatísticos são usados por agências de publicidade para estudar hábitos, preferências e gostos de clientes em potencial; por agências de inteligência para localização de pessoas, rastreamento de mensagens eletrônicas, ligações telefônicas e celulares; para censos demográficos; em avaliações de desempenho de políticas públicas, na análise de risco em operações de investimento.

Além disso, com a chegada de computadores cada vez mais poderosos, o trabalho estatístico ficou mais acessível aos usuários, pois a utilização de softwares de estatística permite que imensas quantidades de informações possam ser compiladas em fração de segundos, processo esse que outrora, feito manualmente, acarretava um trabalho gigantesco e até maçante. Nesse sentido, a Estatística tem um papel decisivo no mundo atual: políticos, médicos, psicólogos, empresários, cientistas, economistas, ecologistas, agricultores, jornalistas, todos a utilizam, com variados objetivos. Ela tem como objeto a coleta, organização, análise e interpretação de conjuntos de observações, dados numéricos e fatos e seu objetivo não é explicar os fenômenos, mas descrevê-los (estatística descritiva), embora também possa fazer inferências sobre os dados coletados e analisados (estatística inferencial).

A estatística inferencial preocupa-se com o raciocínio necessário para, a partir dos dados obtidos, se obter conclusões gerais, ou seja, obter uma afirmação acerca de uma população com base numa amostra. Estas inferências ou generalizações podem também ser de dois tipos: estimações ou decisões (testes de hipóteses). Entretanto, o processo de generalização, característico do método indutivo, está associado a uma margem de incerteza. A medida da incerteza é tratada mediante técnicas e métodos que se fundamentam na *Teoria da Probabilidade,* que procura quantificar a incerteza existente em determinada situação. Em outras palavras, a Probabilidade trata de modelos matemáticos que explicam fenômenos estudados pela Estatística. Como exemplo destes modelos podemos citar a distribuição de probabilidade, dentre as quais a mais conhecida é a distribuição normal ou 'curva do sino', e os testes de hipóteses. É inegável, portanto, que Estatística e Probabilidade exercem atualmente um papel preponderante como ferramenta indispensável para qualquer profissional que necessita analisar informações para tomadas de decisão em sua vida diária, seja no trabalho ou na vida pessoal.

Etimologicamente Estatística deriva do termo latino *status* (Estado); surge da expressão em latim *statisticum collegium* (conselho do estado), conjunto de palestras sobre os assuntos do Estado, de onde surgiu a palavra em língua italiana *statista*, que significa "homem de estado", ou político, e a palavra alemã *Statistik*, designando a análise de dados sobre o Estado. Mesmo assim, não existe consenso na literatura sobre quem ou qual civilização utilizou este termo como o conhecemos hoje.

Como ciência a Estatística utiliza-se das teorias probabilísticas para explicar a frequência da ocorrência de eventos, tanto em estudos observacionais quanto em experimentos que modelam a aleatoriedade e a incerteza de forma a estimar ou possibilitar a previsão de fenômenos futuros, conforme o caso. As noções e conceitos estatísticos imbricaram-se aos probabilísticos, gerando o termo estocástico, que abrange, portanto, as noções de acaso, incerteza, chance, imprevisibilidade, variabilidade, entre outros.

No que tange ao ensino, documentos oficiais recomendam tratar a probabilidade e a estatística juntas. Nos PCN (BRASIL, 1998, p. 20), elas aparecem no bloco *Tratamento da*

*Informação*. Enfatizam a “importância de trabalhar com amplo espectro de conteúdos, incluindo já no ensino fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos”. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) apresentam os conteúdos básicos organizados em quatro blocos: *Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade*. Além disso, de acordo com este documento (BRASIL, 2006, p. 79), “Isso não significa que os conteúdos desses blocos devam ser trabalhados de forma estanque, mas, ao contrário, deve-se buscar constantemente a articulação entre eles”.

No caso específico desta pesquisa, considerar o pensamento estocástico abrangendo o pensamento estatístico aliado ao pensamento e raciocínio probabilísticos, foi necessário para compreender a evolução destas ideias na história e nortear a compreensão das dificuldades epistemológicas evidenciadas na análise quando cotejadas com a história. Embora não seja claro, muito menos fácil, delimitar fronteiras entre a origem ou surgimento das primeiras noções e conceitos acerca de estatística e probabilidade – até porque elas se interrelacionam no tempo e na história – procura-se dar um encaminhamento desse desenvolvimento *a priori* em separado, mas sabendo que por vezes se intrecruzam pela própria natureza do tema. Isto tem uma intenção: o foco da pesquisa é no campo da probabilidade, daí tentar distinguir, o quanto possível, suas origens, evidenciando a interconexão com as ideias correlatas pela evolução das mesmas ao longo da história.

A intenção foi olhar na história o percurso do nascimento e desenvolvimento do pensamento estocástico, ou seja, como eram vistos o acaso e a aleatoriedade, a incerteza e a tomada de decisão, bem como as principais motivações dos pensadores em cada época e quais foram os principais empecilhos, resistências ou dificuldades epistêmicas, objetivando evidenciar mais à frente que algumas incompreensões detectadas ainda se refletem até hoje em determinados níveis do conhecimento, em particular, no processo de ensino e aprendizagem desta temática. Vale ressaltar que nos diversos campos da matemática, o desenvolvimento das noções e conceitos, bem como métodos de raciocínio, surgiram em circunstâncias históricas muito interessantes e peculiares, nas mentes de pensadores originais, cujos méritos, não só por justiça, mas por exemplaridade, valem ser abordados. No contexto pretendido desse trabalho, alguns mereceram destaque, como veremos ainda neste capítulo.

Também vale lembrar que, embora tenhamos a tendência de associar a Estatística ao crescimento e avanço tecnológicos, seu uso é reconhecido há milhares de ano, bem como a gênese da Probabilidade. É o que mostramos a seguir, buscando a origem e evolução dessas ideias ao longo da história, o contexto em que surgiram e a que ou a quem serviam. Em outras palavras, buscando voltar o olhar para a história na perspectiva sócio cultural e antropológica da episteme dos conceitos associados, coerente ao próprio desenvolvimento do pensamento estocástico.

## 1.1 Origem das noções estatísticas

A utilização da Estatística como suporte para a tomada de decisões se fez presente desde o mundo antigo. O primeiro registro remonta à civilização da Suméria (de 5000 a 2000 a.C.) elaborado em tábuas de argila. Há também indícios de que, por volta de 3000 a. C., já se faziam censos na Babilônia, China e Egito. O livro quarto do Velho Testamento[22], intitulado *Números* faz referência a uma instrução dada a Moisés, para que fizesse o levantamento dos homens de Israel que estivessem aptos para guerrear. Parece que o censo mais antigo registrado foi na China, em 2238 a. C., por ordem do imperador Yao para levantamento da população e das lavouras cultivadas. Há registros do censo realizado no tempo de Moisés, cerca de 1700 a. C. e de recenseamentos anuais realizados pelos egípcios, no século XVI a. C. Também as civilizações pré-colombianas dos maias, astecas e incas se utilizaram desses registros. Na Idade Média, houve diversos recenseamentos: na Península Ibérica durante o domínio muçulmano (séculos VII ao XV) e no reinado de Carlos Magno (712-814); no continente Americano, muito antes de Cristóvão Colombo, os Incas usavam um engenhoso sistema de cordas com nós, os *quipus* (do quíchua cusquenho Quipu ou *Khipu*, [ˈkʰipu], "nó"), para registro numérico de dados da população (também utilizado para mensagens).

Aliás, o termo "censo" vem do Latim *census* – lista de nomes e propriedades dos cidadãos romanos – particípio passado de *cencere* – avaliar, estimar o valor de, taxar, julgar. A

[22] Capítulo 01º de O Quarto Livro de Moisés chamado *Números*. Disponível em: https://sites.google.com/site/ovelhotestamento/o-quarto-livro-de-moiss-chamado-nmeros.Acesso em: 15 fev. 2013.

concepção do termo evoluiu e hoje compreende o conjunto dos dados estatísticos dos habitantes de uma cidade, província, estado, nação, entre outros. Usualmente, estas informações eram utilizadas para a taxação de impostos ou para o alistamento militar. No Egito o censo era utilizado também para redistribuir a terra depois das enchentes do Nilo. Entretanto, não costumava ser feita nenhuma outra análise dos dados populacionais coletados, que eram muito básicos e nem sempre se mostravam confiáveis.

Na Europa, um censo merece destaque, por ser o maior registro estatístico feito na época, na Inglaterra, por ordem de Guilherme, o Conquistador. De acordo com Rooney[23] (2012, p. 179-180), em 1066, William, o Conquistador (William da Normandia, em francês Guillaume, Le Conquérant), fez uma auditoria completa nos novos territórios da Bretanha conquistados pelos normandos. Segundo essa autora, esses registros constam do *Domesday Book* e até hoje proporcionam valioso material de dados estatísticos sobre o século 11, sendo considerado o primeiro censo nacional registrado. Depois disso, por cerca de meio século, parece não ter havido interesse em promover censos, até pelo contrário, alguns acreditavam ser um sacrilégio, reportando-se à história da Bíblia sobre a peste que assolou a população quando o Rei Davi tentou promover um censo.

O censo realizado por Guilherme merece maior atenção por ter sido um marco, tanto na coleta extensiva de dados quanto por anunciar uma nova leitura que esses dados podiam evidenciar e que mais à frente se entrecruza com a história da probabilidade. Seguem alguns detalhes dessa história. Mlodinow[24] (2009, p. 159) relata que Guilherme iniciou seu governo aos 7 anos, em 1035, sucedendo seu pai como duque da Normandia. Assim que invadiu a Inglaterra, em 1066, se deu de presente ser coroado. Entretanto a vitória suscitou nele a seguinte questão: quem exatamente tinha conquistado e, o mais importante, como deveria cobrar os impostos de seus súditos? Em 1085, enviou um grupo para fazer o censo e um segundo grupo para assegurar os cálculos. Como a tributação não se baseava na população, mas na terra e seu uso, os inspetores fizeram não só um extenso levantamento de cada animal existente na propriedade, como também dos dados sobre as pessoas que cuidavam dos animais e limpavam seus excrementos.

---

[23] ROONEY, A. **A História da Matemática. Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**. São Paulo: M.Books, 2012.

[24] MLODINOW, L. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

O censo que Guilherme fez da Inglaterra legalizou a posse das propriedades tomadas pelos normandos. Também reavaliou terras, casas, bosques e campinas para fins de impostos. Cada animal — boi, vaca e porco — foi incluído no censo. Os ingleses oprimidos viram isso com apreensão, sabendo que não poderiam apelar das decisões. Compararam esse grande censo ao "Dia do Juízo" ou "Dia da Condenação" (*Day of Doom*, em inglês). Por isso, foi chamado *Domesday Book* (Livro do Juízo Final) e publicado em 1086, ainda incompleto, um ano antes da morte de Guilherme.

O *Domesday Book* estabeleceu o precedente para várias outras tentativas de se compilar informação. Além disso, um levantamento de dados populacionais já teria sido relevante, mas em tempos medievais uma pesquisa sobre os dados mais vitais dos seres humanos – suas expectativas de vida e doenças – era inconsistente com o conceito de morte para os cristãos, uma vez que não seria correto especular sobre o fim da vida e, mais ainda, um sacrilégio buscar leis que a governam. Afinal, não importava a causa da morte de uma pessoa, era sempre pela vontade divina. Ao longo dos séculos foi gradualmente se modificando essa visão fatalista, dando espaço para uma visão oposta.

Um grande passo nesse sentido foi dado no século XVI, quando o lorde-prefeito de Londres ordenou uma compilação semanal das listas de mortalidade para contabilizar os batismos e enterros nas paróquias. Isto foi compilado durante décadas, de forma esporádica, mas em 1603, por conta do aumento de mortalidade por causa da peste[25] (que matou 38 mil pessoas), a cidade instituiu um registro semanal. Alguns teóricos do Continente desprezaram estas listas, mas não um lojista inglês, John Graunt – para ele os registros contavam uma história interessante.

Segundo Mlodinow (2009, p.160), Graunt e seu amigo William Petty foram considerados os fundadores da Estatística, área vista na época como pouco nobre para os matemáticos puros, uma vez que tinha seu foco em questões práticas e mundanas. Ainda segundo este autor, Graunt é um 'fundador adequado', por ser um lojista, diferentemente de outros que desenvolveram probabilidades, mas eram considerados 'amadores', como o médico

[25] Acredita-se que a Peste Negra, uma das piores pandemias da história da humanidade, que assolou a Europa no século XIV, tenha voltado durante várias gerações, como múltiplos tipos de vírus e mortalidade, até meados dos anos 1700s. Durante todo este período, mais de 100 formas de epidemias varreram a Europa. Em 1603 a praga matou 38.000 londrinos. Londres ainda sofreu depois com a grande praga, ou peste bubônica, 1665-1666, que matou de 75 mil a 100 mil pessoas.

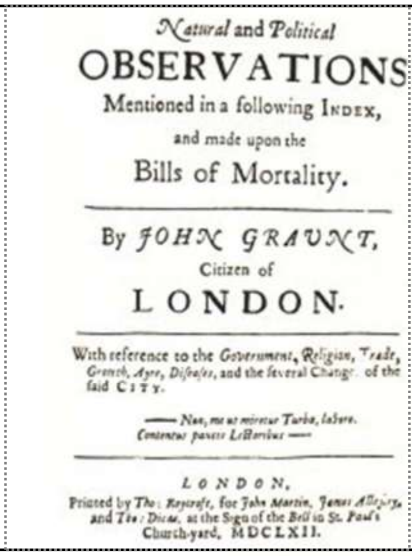
Cardano, o jurista Fermat, o clérigo Bayes. Graunt era bem sucedido e sua fortuna lhe permitia tanto dedicar-se ao que lhe interessava quanto frequentar o círculo de amizades de intelectuais da época, como Petty.

Graunt, a partir das listas de mortalidade, observou que as flutuações eram grandes demais para serem aleatórias, como esperava que ocorresse se a transmissão fosse de pessoa a pessoa. Por outro lado, como o clima variava de maneira errática, ele considerou que os dados flutuantes seriam consistentes com a teoria do ar impuro. Sua grande contribuição, mais que as conclusões, foi a percepção de que as estatísticas poderiam prover noções sobre o sistema do qual foram colhidas. Na verdade Graunt trabalhou com um conjunto completo de registros, não só com uma amostra, mas raciocinou sistematicamente como ninguém ainda o fizera, um avanço no uso de cálculos de amostragem e no cálculo das probabilidades. Dessa forma, estabeleceu-se os fundamentos da ciência estatística.

Já o trabalho de Petty é por vezes considerado o prenúncio da economia clássica. Petty acreditava que a força do Estado dependia e refletia o número e o caráter de seus habitantes e, para tal, utilizou o raciocínio estatístico para analisar as questões nacionais, que eram feitas do ponto de vista do soberano, tratando os membros da sociedade como meros objetos que poderiam ser manipulados conforme a vontade. Em relação à peste, ressaltou que deveriam ser feitos investimentos para prevenção, uma vez que, ao salvar vidas, o reino estaria garantindo retorno financeiro maior do que o investido para prevenção.

Em 1662, Graunt publicou suas análises no livro *Observações naturais e políticas sobre as listas de mortalidade* (Figura 1), que foi muito aclamado concorrendo para a eleição de Graunt para a *Royal Society*. Considera-se que Graunt publicou a primeira “tábua de vida”, uma organização sistemática de dados sobre a expectativa de vida, atualmente muito empregada por organizações, de companhias de seguro à Organização Mundial da Saúde, interessadas em saber por quanto tempo as pessoas vivem.

**Figura 1** - Imagem da capa do livro de John Graunt.


Natural and Political
OBSERVATIONS
Mentioned in a following INDEX,
and made upon the
Bills of Mortality.

By JOHN GRAUNT,
Citizen of
LONDON.

With reference to the Government, Religion, Trade, Growth, Ayre, Diseases, and the several Changes of the said CITY.

— Non, me ut miretur Turba, laboro,
Contentus paucis Lectoribus —

LONDON,
Printed by Tho: Roycroft, for John Martin, James Allestry, and Tho: Dicas, at the Sign of the Bell in St. Paul's Church-yard, MDCLXII.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/John_Graunt. *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality, London, 1662.*

Segundo Berstein (1997, p. 77)[26], embora o livro de Graunt tenha fornecido dados interessantes para estudiosos de sociologia, medicina, ciência política e história, sua maior novidade é o uso da amostragem, pois ele percebeu que os dados levantados representavam uma fração de todos os nascimentos e mortes ocorridas em Londres, mas isto não o impediu de tirar amplas conclusões, sendo sua linha de análise hoje conhecida como 'inferência estatística' – inferir uma estimativa global de uma amostra de dados. Na Figura 2, um exemplo de lista de mortalidade, com a causa da morte e número de crianças e adultos, conforme o gênero, na semana de 11 a 18 de abril de 1665 (à esquerda) e na semana de 11 a 19 de setembro de 1666 (à direita).

> Nos anais da pesquisa estatística e sociológica, o pequeno livro **[de Graunt]** foi um avanço revolucionário, um salto ousado no uso de métodos de amostragem e no cálculo das probabilidades – a matéria prima de todo método de administração do risco, dos seguros e da medição de riscos ambientais ao projeto dos mais complexos derivativos. (BERNSTEIN, 1997, 23ª ed., p. 74, grifo nosso).

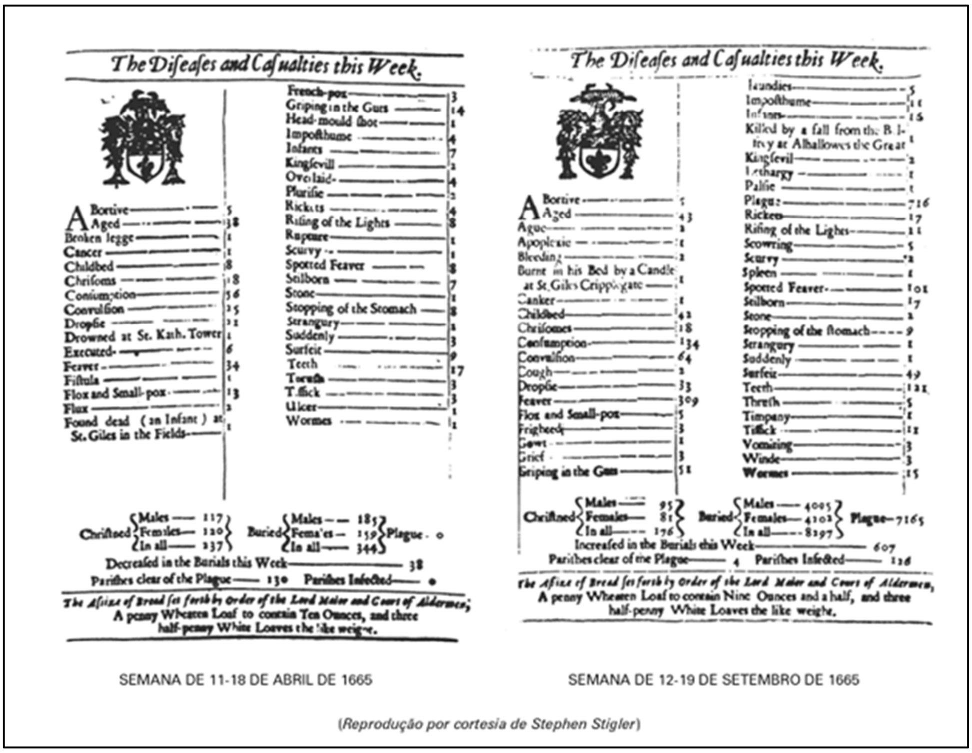
Segundo Hacking (2006, p. 103)[27], é verdade que o conhecimento demográfico foi menor numa sociedade feudal do que numa sociedade industrial. Quando a terra e seu cultivo são base da tributação, não é preciso saber exatamente quantas pessoas estão lá. Com o aumento de tamanho das cidades inglesas, como o imposto era cobrado de pronto aos sinais

[26] BERSTEIN, P. L. **O desafio dos deuses: a fascinante história do risco**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 23 ed., 1997.

[27] HACKING, I. **The Emergence of Probability**. 2ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

mais evidentes do número de habitações, ainda não era preciso saber muito mais sobre a população. Entretanto, no esquema conceitual daquela época, devemos também supor que fatores não econômicos tenham impedido o uso de dados estatísticos. Diante disso, mesmo sabendo que Graunt e Petty ignoravam os trabalhos de Pascal e Huygens, Paris e Londres, de maneiras diferentes, deram início à disciplina que hoje chamamos de **probabilidade e estatística**. Motivado por Deus ou por jogos, pelo comércio ou pela lei, o mesmo tipo de idéia surgiu simultaneamente em muitas mentes.

**Figura 2 -** Imagem de "tábua de vida" de Graunt.




Fonte: Bernstein (1997, p. 79)

Vale ainda registrar que, em 1666, realizou-se o primeiro censo regular em Quebec, Canadá. Os franceses adotaram esse procedimento em 1667, realizações idênticas foram adotadas na Islândia em 1703 e na Suécia em 1749. A partir daí, seguiram-se outros na Europa e Estados Unidos. Com a realização do Congresso Internacional de Estatística em Bruxelas, em 1853, dá-se o início da normalização internacional dos recenseamentos da população e a recomendação para a sua realização decenal nos anos terminados em zero. Pode dizer-se que aquele ano marca o nascimento dos Censos da época moderna. No século XIX os estatísticos de toda Europa estavam envolvidos em registros de grandes dados censitários.

Aqui em nossas terras nativas, o tamanho da população brasileira é conhecido desde o período colonial. Segundo o IBGE[28], inicialmente os dados eram obtidos de forma indireta, uma vez que os levantamentos não eram feitos com o objetivo estrito de contar o número de habitantes; as fontes de dados eram relatórios preparados com outras finalidades, como os relatórios de autoridades eclesiásticas, sobre os fiéis que frequentavam a igreja; os relatórios de funcionários da Colônia, enviados para as autoridades da Metrópole e as estimativas da população fornecidas pelos Ouvidores, ou outras autoridades, à Intendência Geral da Polícia. Somente a partir de 1750, visando a objetivos estritamente militares, a Coroa Portuguesa decidiu realizar levantamentos, de forma direta, da população livre e adulta, apta a ser convocada para a defesa do território. O primeiro regulamento censitário no Brasil data de 1846, com caráter periódico do censo demográfico, fixado em intervalos de 8 anos, mas não tendo recursos autorizados para se realizar em 1850 foi programado para ocorrer em 1852. Entretanto, em 1852, a população revoltou-se contra o Decreto nº 797, de junho de 1851, conhecido como a "lei do cativeiro" e impediu o levantamento que já estava em pleno início de execução. Acreditava-se que o decreto era uma odiosa medida governamental visando à escravização dos homens de cor. Este episódio foi suficiente para adiar por 20 anos a realização do censo. Só em 1872 foi realizado o primeiro recenseamento nacional no país, que recebeu o nome de Recenseamento da População do Império do Brasil. Depois deste e até 1940, novas operações censitárias sucederam-se em 1890, 1900 e 1920. Em 1910 e em 1930, não foram realizados os recenseamentos. Com a criação do IBGE, em 1938, e com a contribuição do demógrafo italiano Giorgio Mortara, inaugurou-se a moderna fase censitária no Brasil dos censos demográficos, de periodicidade decenal, sendo ampliada, nessa nova fase, a abrangência temática do questionário com introdução de quesitos de interesse econômico e social, tais como os de mão-de-obra, emprego, desemprego, rendimento, fecundidade, migrações internas, dentre outros temas.

[28] A História do Censo no Brasil. Disponível em: http://www.ibge.gov.br/censo/censobrasil.shtm. Acesso em: 05 abril 2013.

Como pudemos ver, desde os balancetes do império romano, como o inventário das posses de Carlos Magno, passando pelo *Doomsday Book*, registro do século 11, estes são alguns exemplos anteriores à emergência da estatística descritiva no século 16, na Itália. A primeira tentativa para se tirar conclusões a partir de dados numéricos foi feita somente no século 17, na Inglaterra, denominada *Aritmética Política*[29], que evoluiu para o que se chama hoje de demografia. Contudo, só começou realmente a existir como disciplina autônoma no raiar do século 20, o verdadeiro início da estatística moderna. Mas e as ideias sobre probabilidades, como surgiram? Antes ainda, quando surgiram as noções de acaso e incerteza? As primeiras noções acerca dos fenômenos aleatórios?

## 1.2 Primeiras noções sobre aleatoriedade, acaso e incerteza.

Olhando para a História da Matemática vemos que os gregos, além dos amplos conhecimentos de geometria, se destacam por terem inventado a maneira como a matemática moderna é trabalhada, por meio de axiomas, teoremas e provas – apesar de séculos depois, em 1930, Kurt Gödel, amigo de Einstein, com seu Teorema da Incompletude[30] ter provado que esta abordagem tinha uma inconsistência. Mesmo assim, a matemática seguiu seu caminho ao estilo grego, o estilo de Euclides. Porque os gregos não desenvolveram conhecimentos sobre probabilidades? Afinal eles costumavam apostar num jogo, semelhante a um jogo de dados, jogado com **astrágalos**, feito de ossos de calcanhar de carcaça de animais; o astrágalo tinha seis faces não uniformes, em virtude da anatomia dos animais, apenas quatro delas eram estáveis para permitir que o osso se apoiasse ao ser lançado (a probabilidade da peça cair em cada um desses lados era de 40% para as faces estáveis contra 10% para as outras). De acordo com Mlodinow (2009, p. 36), o jogo comum era jogado com quatro astrágalos e o resultado mais raro, em que as quatro peças caiam em

[29]**Aritmética Política** foi uma corrente de pensamento precursora da Estatística, desenvolvida na Inglaterra em meados do século XVII, que promoveu a coleta para análise da informação numérica em relação à economia, demografia e administração de um Estado, contra descrições qualitativas que então realizada. Seu precursor foi William Petty, autor do trabalho *Political Arithmetic*, publicado em 1690. Outros matemáticos da época, como Edmund Halley e Abraham de Moivre também adotaram o ponto de vista de Petty. A Aritmética Política foi adotada como paradigma de análise estatística também na Europa continental, que unida ao cálculo de probabilidades levaram ao desenvolvimento da estatística, como é conhecido hoje.

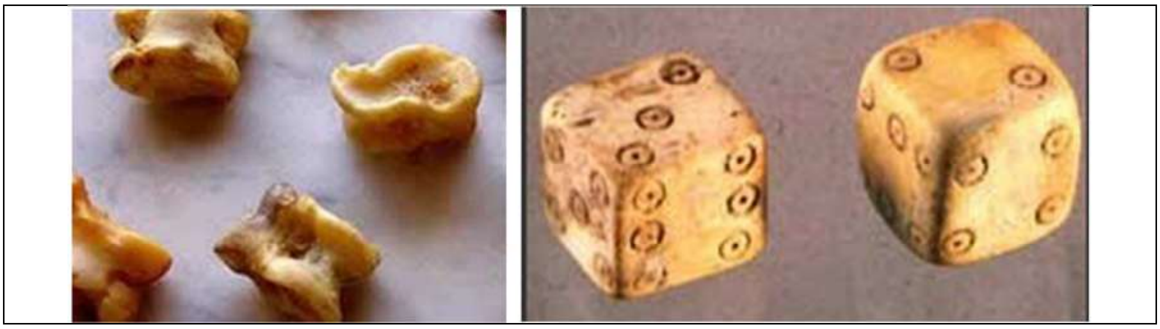
[30] O teorema afirma que qualquer sistema axiomático suficiente para incluir a aritmética dos números inteiros não pode ser simultaneamente completo e consistente. Isto significa que se o sistema é auto consistente, não existirão proposições que não poderão ser nem comprovadas nem negadas por este sistema axiomático. E se o sistema for completo, então ele não poderá validar a si mesmo, seria inconsistente.

lados diferentes, era chamado jogada de Vênus, com probabilidade de, aproximadamente, 384/10.000 de acerto, mas os gregos não sabiam sobre esse cálculo. Na verdade, utilizavam o jogo mais para consultar seus oráculos, sem se preocuparem em entender as regularidades do mesmo. É plausível afirmar que não se preocuparam em perceber essas regularidades porque acreditavam que o futuro se desvelava conforme a vontade dos deuses.

Com essa visão de mundo, um entendimento da aleatoriedade seria irrelevante, e mesmo contraditório em relação às suas crenças. Por exemplo, segundo Mlodinow (2009, p. 36), em *Fédom*, de Platão, Símias diz a Sócrates que "argumentos baseados em probabilidades são imposturas", e alerta que "a menos que seja observado grande cuidado em seu uso, tendem a ser enganadores – na geometria e também em outros assuntos", antecipando o trabalho de Khaneman e Tversky em muitos séculos.

Na Figura 3, imagens de astrágalos[31] na versão mais antiga e, posteriormente, em forma de cubos com marcações, utilizada para consulta aos oráculos (jogo dos sacerdotes ou astragalomancia).

**Figura 3** - Imagens de astrágalos



Fonte: http://www.siaoroxo.com/siaoroxo/astragalomancia/astragalamancia.html.

Na Antiguidade, chamava-se muitas vezes **probabilidade** àquilo que, segundo as aparências pode ser considerado como verdadeiro[32] ou certo.

> A retórica ou arte de persuadir consistia em técnicas de discurso que visavam demonstrar a *plausibilidade* de uma tese dada. Nas palavras de Platão, a retórica de Tísias e Córax consistia na descoberta de que "a probabilidade [εἰκότα – provável, plausível, aparência] deve ser tida em maior apreço do que a verdade

[31] Outras informações e imagens sobre os astrágalos (jogo dos ossos – *Tali*) no site: http://www.aerobiologicalengineering.com/wxk116/Roman/BoardGames/tali.html. Acesso em: 07 abr. 2013.

[32] http://www.filoinfo.bem-vindo.net/filosofia/modules/lexico/entry.php?entryID=2725.

> [αλήθεια]" (*Fedro*, 267a). Essa afirmação torna-se significativa, se levarmos em consideração o fato de a retórica ter se originado nos meios jurídicos. No gênero jurídico, o réu ou o acusador discursam para defender ou acusar alguém diante de juízes e de um júri que deve escolher entre uma de duas alternativas mutuamente excludentes: a culpa ou a inocência. (RIBEIRO, 2006, p. 14)[33].

Ainda segundo Mlodinow (2009, p. 37), em *Teeteto*, Sócrates afirma que "argumentos baseados em apenas verossimilhança e probabilidade são suficientes para desclassificar qualquer geômetra". Pois vejamos:

> Porém quanto a argumentos e à conclusão forçosa é o que não apresentais, pois só recorreis a verossimilhança, o que, nas mãos de Teodoro ou de qualquer outro geômetra, seria suficiente para desclassificá-lo. Considerai, tu e Teodoro, se em assunto de tamanha transcendência acolheríeis argumentos baseados apenas em verossimilhança e probabilidade. (TEETETO, p. 23)[34].

Além disso, Mlodinow (2009, p. 40) afirma que o principal legado de Cícero para o campo da aleatoriedade foi ter usado o termo *probabilis*, que acabou originando o termo atual.

> A contribuição da qual Carneades é mais conhecido, no entanto, veio em resposta ao 'contra-argumento' estóico em defesa da percepção cognitiva. Eles afirmaram que, sem percepções cognitivas, os seres humanos seriam privados de qualquer base para a ação ou inquirição. Em resposta Carneades argumentou que essa base poderia ser encontrada nas chamadas percepções prováveis (de 'probabilis', que se presta ou convida à aprovação, do Latim de Cícero para o Grego 'pithanos', persuasivo). (Carneades, sem data, tradução nossa)[35].
>
> 'Probable' e seus cognatos em outras linguas modernas derivam do aprendido latim medieval 'probabilis' e 'verosimilis", decorrentes de Cícero e geralmente aplicado a uma opinião para significar 'plausível' ou 'geralmente aprovado'. (FRANKLIN, 2001, p. 113, tradução nossa)[36].

No entanto, é numa seção do *Digesto*, código de leis romanas compilado pelo imperador Justiniano, no século VI, que o termo **probabilidade** aparece pela primeira vez como figura jurídica.

Por outro lado, na Roma antiga, onde as regras de testemunho eram tribais como na Idade das Pedras, a probabilidade de verdade num testemunho podia variar e apenas o reconhecimento da inconsistência da veracidade de testemunhos sob essa égide é que

---

[33] Ribeiro, André Antonio. A filosofia da linguagem em Platão. Dissertação de mestrado. PUC-RS, 2006.

[34] TEETETO. Diálogo platônico. Tradução: Carlos Alberto Nunes. Versão eletrônica de domínio público. Disponível em: http://www.cfh.ufsc.br/~wfil/teeteto.pdf. Acesso em: 07 abr. 2013.

[35] Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/carneades/>. Acesso em: 07 abr. 2013.

[36] FRANKLIN, J. **The Science of Conjecture: Evidence and Probability Before Pascal**. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 2001. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_probability>. Acesso em: 07 abr. 2013.

impulsionou a criação de novas regras para a combinação das possibilidades – isso foi um ponto de partida.

Para Mlodinow (2009, p. 42), na Roma antiga “surgiu pela primeira vez um conjunto sistemático de regras de probabilidade”. Ainda segundo este autor, é difícil atingir certa destreza quantitativa quando se trata dos séculos VIII e IX, uma vez que a lei romana, embora possuísse certa racionalidade e coerência legal, não chegava a ter validade matemática, por exemplo, duas meias provas constituíam uma verdade; isto num raciocínio de combinar probabilidades não é correto; além disso, não somamos um número finito de provas parciais para gerar uma certeza, pois ao combinarmos probabilidades não as somamos, mas as multiplicamos.

Vale destacar que a palavra probabilidade deriva do Latim *probare* (provar ou testar). O termo provável é muito utilizado em eventos incertos, sendo também substituído por outros como ‘sorte’, ‘risco’, ‘azar’, ‘incerteza’, ‘duvidoso’, dependendo do contexto. No entanto, a noção de probabilidade tem sua origem mais remota relacionada à prática dos jogos, ditos de azar. O jogo foi a mola propulsora e também o primeiro beneficiário da criação da teoria das probabilidades.

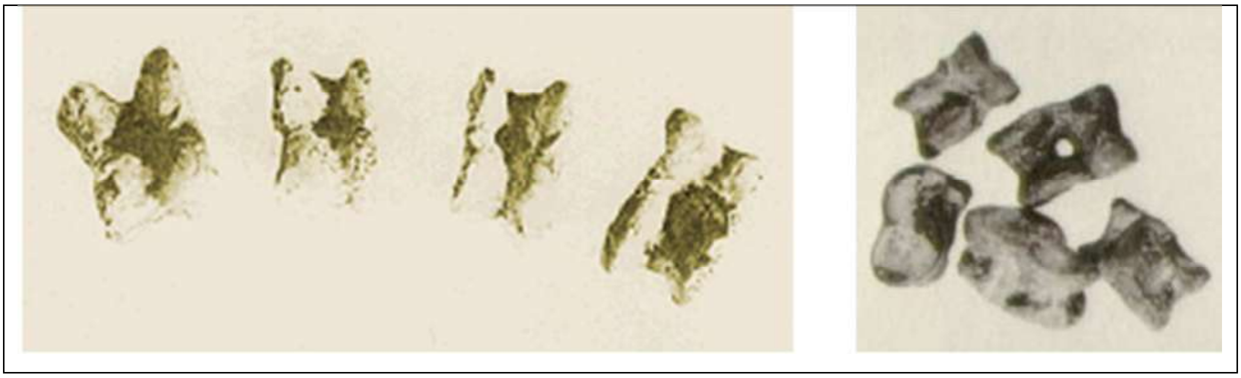
Parece que tudo começou com o jogo de dados. Entretanto, as informações são um pouco desencontradas, o que é natural uma vez que uma nova escavação pode alterar a data da descoberta, mas sabe-se que por volta de 1200 a. C. já existiam os dados feitos de ossos de animais. Desde a pré-história os dados teriam sido utilizados no Oriente; escavações feitas em cemitérios mostram que, provavelmente, têm origem na Ásia. A expressão “jogar dados” aparece no jogo indiano *Rig-veda*, e existem indícios que foram inventados na Índia, pois em escavações feitas em Kalibangan, Lothal e Ropar, foram encontrados dados que remontam a mais de 2000 a. C.

Na forma primitiva do *Jogo do osso* (ou *knucklebone*, em árabe*)*, crianças atiravam o osso na expectativa de deixar certo lado para cima ou para baixo. Em escavações em Shahr-i Sokhta (na antiga Pérsia, hoje o Irã), sítios arqueológicos levaram à descoberta de dados, dos mais antigos que se têm conhecimento, como parte de um jogo de Gamão, com mais de cinco mil anos de idade, que provavelmente foi importado da Índia. Encontrados em tumbas egípcias, os dados sugerem um período de cerca de 2000 a. C.

Posteriormente os dados de osso ganharam valores numéricos, tornando-se mais parecidos com os atuais. No entanto, o jogo atingiu grande popularidade com os gregos e os romanos. Os romanos eram exímios jogadores, principalmente na era de luxo do Império Romano (século II d. C.), onde jogar dados era um passatempo predileto, tanto que esse jogo por dinheiro foi motivo de leis especiais em Roma. Os romanos conheciam duas variedades de jogo: os autênticos dados, *tesserae,* e os *astrálagos* (*tali*). Cícero refere-se ao elemento de sorte (chance) em jogar tali em seu tratado *De Divinatione*, uma obra de 44 d. C. que discute as crenças estoicas concentradas no destino e na possibilidade da premonição: "Da possibilidade ao lançar quatro talis venha produzir Vênus; cem Vênus também poderia produzir, se jogar quatrocentos [talis], transformando a sua chance no mundo, o que você acha?" [tradução e grifo nossos] [37].

Jogadores profissionais de dados eram comuns e até hoje alguns desses dados estão preservados em museus. Seguem algumas imagens que retratam e documentam o jogo em peças de acervos dos museus *The Metropolitan Museum of Art*, em Nova York, e *British Museum*, em Londres. Na primeira imagem (Figura 4), o conjunto de tali à esquerda foi encontrado em Pompéia, enquanto o da direita em Atenas; na segunda imagem (Figura 5), escultura em terracota de duas jovens jogando tali com astrágalos.

**Figura 4** – Peças de Tali da coleção de *The Metropolitan Museum of Art in New York*



Fonte: http://www.aerobiologicalengineering.com/wxk116/Roman/BoardGames/tali.html.
Acesso em: 07 abr. 2013.

[37] "*Quattor tali iacti casu Venerium efficiunt; num etiam centum Venerios, si quadringentos ieceris, casu futuros putas?*" [original]

**Figura 5**: Imagem de escultura em terracota do *British Museum*, em Londres.

Fonte: http://www.aerobiologicalengineering.com/wxk116/Roman/BoardGames/tali.html. Acesso em: 07 abr. 2013

Na Figura 6, uma imagem de vaso em forma de astrágalo, da categoria do famoso *Sotades Painter*, símbolo da imortalidade em vasos gregos, uma bela peça da Grécia, cerca de 460 a. C., com pinturas de várias figuras femininas.

**Figura 6** - Vaso astrágalo *Sotade*, coleção de *The Metropolitan Museum of Art in New York*.

Fonte: http://www.aerobiologicalengineering.com/wxk116/Roman/BoardGames/tali.html. Acesso em: 07 abr. 2013

Na Idade Média, a Igreja Católica era contra o jogo, nem tanto pelo jogo em si, mas pelo vício de beber e dizer palavrões, comum durante os torneios. Os jogadores inveterados do século XVI procuravam cientistas de renome para que estes lhes dessem fórmulas 'mágicas' que garantissem ganhos substanciais nas bancas de jogo. O fato é que desde sempre os jogos foram utilizado em apostas, como também serviram para prever futuro, decidir conflitos ou dividir heranças.

Entretanto, não foram só os jogos que contribuíram para a formação do conceito de probabilidade. Também a prática dos seguros teve forte influência e parece ter se iniciado com comerciantes mesopotâmicos e fenícios que o aplicavam à perda de cargas dos navios por conta de roubos ou naufrágios. Essa prática teve continuidade com os romanos e gregos estendendo-se até aos comerciantes marítimos italianos em tempos mais recentes. Não se sabe muito sobre a prática das seguradoras, mas especula-se que se baseavam em estimativas empíricas das probabilidades. O crescimento de conglomerados urbanos, após a idade média, popularizou o uso de seguros. Apesar do crescimento desse tipo de negócio, os prêmios dos carregamentos entre as Américas e as Índias continuavam sendo calculados pelas técnicas milenares. É daí, então, que surgem os primeiros estudos matemáticos acerca desse tipo de negócio.

Em 1693 foi publicado o primeiro trabalho sobre seguros, *An Estimate of Degrees of Mortality of Mankind*, de autoria de Edmond Halley (1656-1742), o mesmo cujo nome batizou o cometa. Antes dele, em 1570, na obra *De proportionibus Libre V*, Cardano fez uma tentativa de estudar matematicamente os seguros de vida, no entanto, não alcançou repercussão. Halley mostrou como determinar a anuidade de um seguro (prêmio) em termos da esperança de vida e da probabilidade de sobrevida.

O estudo de seguros atingiu a maturidade, em 1730, com Daniel Bernoulli (1700-1782), que utilizou a abordagem de calcular o número esperado de sobreviventes após “n” anos, dado certo número de nascimentos (conceito de probabilidade condicional). Nesse momento começavam a aparecer grandes empresas de seguros que tinham condições de trabalhar com embasamento científico.

Entretanto, a abordagem matemática do ***acaso*** e do ***risco*** só teve início há cerca de 500 anos. Uma contribuição decisiva para a criação da Teoria das Probabilidades deu-se por meio da correspondência trocada entre os matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), nas quais ambos chegaram à solução correta, por caminhos diferentes, de um problema célebre da divisão das apostas, em 1654.

Quis o acaso que o austero Pascal conhecesse Chevalier de Méré, jogador quase profissional, que lhe contava as disputas com seus adversários, muitas delas com controversas resoluções sobre dados e apostas. Depois de refletir sobre elas, Pascal trocou correspondências com seu amigo Fermat. Estas cartas históricas são documentos fundadores da Teoria das Probabilidades, que mais tarde desenvolveu-se através dos trabalhos de Jacques Bernoulli

(1654-1705), Moivre (1667-1759) e Thomas Bayes (1702-1761). Bernoulli publicou o livro *Ars Conjectandi*, em 1713, que foi o primeiro dedicado inteiramente às probabilidades. Nesse livro é que se encontra a lei dos grandes números, hoje chamado Teorema de Bernoulli, que pode assim ser enunciada:

***A frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar-se nas vizinhanças de um valor quando o número de experimentos cresce indefinidamente.***

Moivre introduziu e demonstrou a lei normal e a Bayes deve-se o cálculo das chamadas probabilidades das causas, que consiste em determinar a probabilidade dos acontecimentos perante certas condições iniciais.

Na segunda metade do século XVIII e primeira metade do século XIX a probabilidade adquiriu uma forma concisa e sistemática. Laplace, em 1812, publicou importante obra *Teoria Analítica das Probabilidades*, sistematizando os conhecimentos da época e aonde se encontra a Lei de Laplace. Destaca-se também a participação de Gauss (1777-1855) no aprofundamento da Lei Normal e a de Poisson na sua *Teoria da lei dos grandes números e da lei de repartição*.

No século XIX e princípio do século XX a teoria das probabilidades tornou-se um eficaz instrumento, exato e fiável do conhecimento. Surge daí a célebre escola de San Petersburgo, com grandes nomes como Tchébychev (1821-1894), Markov (1856-1922) e Liapounav (1857-1918). À escola de San Petersburgo sucedeu a escola soviética, cujo grande destaque foi Kolmogorov (1903-1987), que axiomatizou corretamente a Teoria das Probabilidades e um dos sucessos da sua abordagem foi dar uma definição rigorosa da expectância condicional.

A teoria das probabilidades começou com um ***jogo***. Fermat e Pascal viabilizaram que o estudo do ***acaso*** tomasse uma expressão matemática, introduzindo o *Cálculo das Probabilidades*. Este, juntamente com o Método dos mínimos quadrados, vieram credibilizar a Estatística.

E hoje a Teoria das Probabilidades transformou-se num dos ramos da matemática com mais aplicações nas outras ciências, exatas, naturais e sociais. No próximo capítulo veremos mais detalhes sobre essas aplicações, mas podemos evidenciar que na vida cotidiana nos deparamos com uma grande quantidade de jogos, como loteria esportiva, loteria federal, sena, entre outras ofertas de prêmios dos mais variados tipos. É natural que as pessoas interessadas pensem quais são suas chances de ganhar antes de apostar ou concorrer. Se resolvermos fazer um investimento, quer seja em poupança, em ações ou de outro tipo, desejamos saber a priori como estes estão se comportando no mercado investidor para decidir qual deles dará melhor retorno financeiro que possa atender às nossas expectativas. Um médico pode se deparar com a incerteza dos efeitos que poderão ser provocados num paciente ao administrar-lhe um novo remédio e terá que deter conhecimentos para uma tomada de decisão. Enfim, em diversas ocasiões da vida cotidiana nos deparamos com situações em que temos de tomar uma decisão, sem a certeza do que poderá ocorrer exatamente.

Como é de se esperar em todo processo de construção do conhecimento, em particular nessa longa trajetória de construção dos conceitos probabilísticos e estatísticos, muitas concepções equivocadas ocorreram e até hoje aparecem, motivando larga escala de pesquisas, tanto entre os cientistas das áreas afetas, como entre pesquisadores envolvidos com o ensino desse tipo de conhecimento. O fato é que alguns equívocos (*misconceptions*) e falácias se refletem até os dias de hoje. É o que destacamos no tópico a seguir.

## 1.3 Alguns percalços na construção dos conceitos de probabilidade e estatística.

Reforçando a ideia de que o desenvolvimento do pensamento estocástico é mais complexo do que costuma ser apresentado, destacam-se neste tópico algumas dificuldades que podem ser encontradas na compreensão de noções e conceitos envolvidos neste campo de conhecimento.

### 1.3.1 Sobre as noções relacionadas à probabilidade

Desde a antiguidade, filósofos, físicos e matemáticos dedicam-se à tarefa de compreender e dar um sentido ao que chamamos de "evento aleatório" e "probabilidade". Nessa tarefa, entretanto, as divergências cuidaram de dividir os estudiosos em diferentes correntes de pensamento acerca do conceito de probabilidade, entre as quais três se destacam: o "frequentismo", defendido por aqueles que entendem probabilidade como "intensidade de ocorrência"; o "subjetivismo", defendido pelos que entendem probabilidade como "grau individual de convencimento em uma ocorrência", expresso por sua disposição em "agir" de alguma forma específica; e o "logicismo", defendido pelos que entendem probabilidade como "noção lógica relacional" a ser valorada relativamente a um corpo de "evidência".

Kasner e Newman (1976)[38] ao falar sobre acaso e probabilidade, iniciam com um pequeno trecho do livro *The Return of Sherlock Holmes*, de Conan Doyle. Sherlock Holmes[39] ficou famoso por utilizar, na resolução dos seus mistérios, o método científico e a lógica dedutiva, como uma caricatura do *raciocínio por dedução provável.* Esse método de raciocínio, embora se assemelhe ao procedimento formal do silogismo, é menos rígido sem se enquadrar em normas exatas, por isso mais apropriado para o raciocínio diário. Na Matemática, certas suposições fundamentais são feitas e delas são deduzidas as conclusões, segundo o raciocínio lógico formal, garantindo assim validade ao nosso pensamento. Entretanto, nem todos os pensamentos são matemáticos, grande parte das crenças não é certa, apenas provável.

> [...] É, portanto, uma relação de probabilidade, não de certeza, que obtemos da maioria de nossas premissas e conclusões. Temos certeza de que uma moeda cairá após ser jogada para o ar. [...] Mas a maior parte do que acreditamos não chega a atingir a certeza, embora variem de intensidade de crença. Assim, podemos estar quase certos de que uma moeda comum não dará "cara" 100 vezes seguidas. [...] Talvez seja possível explicar esta atitude. Algumas coisas acontecem no mundo de acordo com as leis naturais, que (a não ser que acreditemos em milagres) operam inexoravelmente. Assim, por causa da gravitação, as moedas caem. [...] Mas sabemos muito pouco a respeito dos fenômenos que nos cercam. Não conhecemos as leis que obedecem, nem, na verdade, se obedecem a alguma lei. Podemos predizer os movimentos dos planetas a milhões de milhas no espaço, mas ninguém pode predizer se cairá "cara ou coroa" numa moeda ou a combinação de um par de dados. Acontecimentos desta espécie, e outros sem conta, atribuímos ao acaso. (KASNER; NEWMAN, 1976, p. 217).

Mas dizer que um acontecimento é determinado pelo acaso é declarar que não se sabe como ele é determinado. Mesmo assim, no "reino do acaso", percebe-se certa regularidade, certa "ordem dentro da desordem" e acerca disso – acontecimentos atribuídos ao acaso – formamos uma gradação de crença racional.

> A teoria da probabilidade considera o que é paradoxalmente chamado de "leis do acaso". Parte de sua análise crítica é uma tentativa de formular regras sobre o quando e como a Matemática pode ser empregada para medir a razão de

---

[38] KASNER, E.; NEWMAN, J. **Matemática & Imaginação: o mundo fabuloso da matemática ao alcance de todos.** 2ª ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

[39] Famoso detetive particular das histórias de ficção da literatura britânica criadas pelo médico e escritor Sir Arthur Conan Doyle, na virada dos séculos XIX e XX.

> probabilidade. Contudo, devemos tornar bem clara a significação de probabilidade, antes de ser possível passar a uma consideração de suas regras. (KASNER; NEWMAN, 1976, p. 218).

Embora a maioria dos nossos julgamentos seja baseada na probabilidade e não na certeza, raramente dedicamos um pensamento cuidadoso à "mecânica" desse modo de raciocínio. Em geral, os julgamentos na tomada de decisão são feitas por dedução provável, nos negócios, na mesa de jogos, em um processo de júri, até mesmo em experimentos. Costumamos dizer em dias quentes e nebulosos que provavelmente choverá. Um meteorologista pode precisar de maiores evidências, mas não o cidadão comum. Costuma-se raciocinar assim, no senso comum, em assuntos que vão do mais trivial ao mais importante, com o uso frequente das palavras "provável" e "probabilidade", sem precisar seu significado.

De fato, segundo Bennett (2003)[40], se a incerteza em um processo aleatório é fruto da nossa ignorância a respeito das forças que determinam o seu desfecho ou da existência de mecanismos inacessíveis inerentes aos recursos e condições que o circunscrevem e que determinam o seu desfecho de maneira distributivamente peculiar e própria, estas são questões que estão no centro da discussão filosófica envolvendo as noções de aleatoriedade e chance e que continuam em debate até os dias de hoje.

Cientistas desenvolvem e aperfeiçoam o uso da probabilidade matemática, filósofos e matemáticos a definem, surgindo até opiniões divergentes ou conflitantes. Destacam-se três principais interpretações: ponto de vista subjetivo; da frequência relativa ou interpretação estatística; da probabilidade atribuída à Peirce[41].

Para Kasner e Newman (1976, p. 219), o ponto de vista subjetivo da probabilidade, não tão em moda nos dias de hoje, manteve por certo tempo, notadamente no século XIX, uma posição respeitável. Um dos primeiros adeptos foi Augustus De Morgan, conceituado lógico matemático, que se referia à probabilidade como um "estado de espírito e ao grau de certeza ou incerteza que caracteriza nossas crenças". Não é um ponto de vista totalmente errôneo, mas traz dificuldades como fundamento para o cálculo de probabilidades. Na lógica

---

[40] BENNETT, D. J. Aleatoriedade. São Paulo: Martisn Fontes, 2003.

[41] Charles Sanders Peirce (1839-1914) foi um filósofo, cientista e matemático norte-americano. Seus trabalhos apresentam importantes contribuições à lógica, matemática, filosofia e, principalmente, à semiótica. É também um dos fundadores do pragmatismo, junto com William James e John Dewey.

matemática uma proposição ou é falsa ou é verdadeira, mas nossos conhecimentos são, na maioria das vezes, limitados, o que impede de estarmos racionalmente certos, quer seja da verdade ou da falsidade. Para ter uma crença racional devemos possuir algum conhecimento a ela concernente, que ocasionalmente pode ser suficiente para justificar a certeza sobre a validade ou não da proposição.

> De certo modo é indubitavelmente certo que nossas crenças racionais são subjetivas. Contudo, se estivermos convencidos da verdade ou falsidade objetiva de todas as proposições, não podemos, se quisermos ser racionais, permitir-nos ser guiados pela mera intensidade da crença. Por questão de princípios, são infinitamente preferíveis as conclusões falsas, mas baseadas em conhecimento limitado e raciocínio correto, do que resultados corretos, obtidos com raciocínio falso. Somente assim é que nos aproximamos da era da razão. [...] Além disso, pensamos que, se a relação de probabilidade deve ser tratada matematicamente, deve fornecer-nos melhor material para avaliação do que mera força de crença. Na maior parte dos casos, não se pode dar um valor numérico à relação de probabilidade e, contudo, só pode ser considerada pelo matemático quando puder ser medida e contada. (KASNER; NEWMAN 1976, p. 220).

Esses autores reforçam que não há como medir a intensidade de uma crença, havendo ainda grande variação entre as crenças das pessoas acerca de um mesmo conjunto de fatos.

Uma das dificuldades do ponto de vista subjetivo da probabilidade resulta do *princípio da razão insuficiente* – tido como base lógica em que repousa o cálculo da probabilidade subjetiva – e estabelece que “se ignoramos completamente as diferentes maneiras pelas quais um acontecimento pode ocorrer e, por isso, não temos base razoável para preferência, consideraremos como ocorrendo de um modo ou de outro”. Este princípio, de acordo com Kasner e Newman (1976, p. 221), foi apresentado primeiramente por Jacob Bernoulli e, desde então, tem sido analisado exaustivamente pelos matemáticos. Por apoiar-se na ignorância, pode-se concluir que tal tipo de cálculo era mais preciso quando utilizado por aqueles que tivessem uma “ignorância igualmente equilibrada”. Ainda segundo os autores, “por mais que os homens se aproximem deste ideal, os filósofos e matemáticos se têm ainda em maior estima e, por isso, o princípio foi deixado de lado”. Entretanto, este princípio contém parte da verdade, notadamente o critério de negação – não se pode dizer que dois acontecimentos são igualmente prováveis se há razões de preferência por um ou outro – e, portanto, qualquer cálculo de probabilidades consistente depende dele de alguma forma.

Em relação à probabilidade subjetiva, Kahneman e Tversky (1972)[42] afirmam que as pessoas julgam a probabilidade de eventos com base na heurística da representatividade ao invés da probabilidade real. Representatividade é um pouco difícil de definir, mas reflete dois aspectos, as características da população e do processo que a gerou. Por exemplo, no caso do nascimento de seis filhos, a sequência de nascimento em ordem do sexo, ser dada por MFMMMM é julgada menos provável do que FMFMMF (porque a primeira não reflete a proporção de meninos na população), ou também MMMFFF contra FMMFMF (porque a primeira não reflete a aleatoriedade da determinação do sexo). As pessoas também costumam ignorar o efeito do tamanho da amostra sobre a probabilidade de um resultado, resultando desse raciocínio por representatividade que o tamanho da amostra não afeta o resultado, o que nem sempre é verdade.

Já a *frequência relativa* ou *interpretação estatística* (esta se aproxima da visão Aristotélica) é uma teoria considerada bastante viável e aceita mais amplamente ao evitar muitas destas dificuldades. Em grande parte esse ponto de vista é o responsável pela ampliação do uso das probabilidades no campo da Física, Astronomia, Biologia, Ciências Sociais e no mundo dos negócios. Para Kasner & Newmon (1976, p. 222): "Probabilidade é considerada como a frequência relativa em que um acontecimento ocorre em certa classe de acontecimentos." Assim, a probabilidade de um acontecimento é expressa como uma razão matemática que é hipoteticamente atribuída ao acontecimento, esta hipótese pode ser verificada racionalmente ou experimentalmente. Dessa forma, a frequência relativa da classe de acontecimentos na classe maior de tentativas representa a probabilidade de o evento ocorrer. "Avançamos, então, para uma predição geral em um grande número de situações particulares e supomos que o futuro será consistente em relação ao passado". Apesar do sucesso do método estatístico, ele sofre objeções. Algumas dificuldades podem ser facilmente sobrepujadas, outras não.

O conceito de limite, que desempenha importante papel na Matemática é usado na Estatística, embora nesse caso, segundo os autores (KASNER; NEWMAN, 1976, p. 226), "seu emprego seja dificilmente defensável, pois este conceito aparece apropriadamente somente em ligação com processos infinitos [...] para declarar que as frequências se aproximam de

[42] KAHNEMAN; TVERSKY. Subjective Probability: A Judgment of Representativeness. **Cogitive Psychology, v.** 3, 1972, p. 430-454.

uma razão limite”, mesmo que físicos e estatísticos não lidem com o infinito, uma vez que os fenômenos estudados, por mais amplos e complexos que sejam, são *finitos* e *limitados*. Uma experiência que produza o mesmo resultado, um grande número de vezes, não é prova (matemática) de que os resultados seguintes serão consistentes (até Scherazade pode contar uma história desfavorável na milésima segunda noite).

O conceito de limite tal como usado na teoria da frequência relativa guarda, de modo geral, a mesma relação com o conceito matemático de limite que o raciocínio por dedução provável com o silogismo.

> Fazem-se, muitas vezes, referências à probabilidade de acontecimentos passados, embora tal probabilidade, em termos de frequência relativa, não tenha, aparentemente, nenhuma significação. [...] Como seriam avaliadas tais declarações se a probabilidade é a frequência relativa de um acontecimento dentro de uma classe de acontecimentos? [...] De acordo com a interpretação estatística, a probabilidade só pode referir-se a um único acontecimento em relação a uma classe de acontecimentos semelhantes. Mas isto, muitas vezes, conduz à confusão. (KASNER; NEWMAN, 1976, p. 227).

Dessa forma, são comuns alguns mal-entendidos como acreditar que o fato de um evento ocorrer muitas vezes seguidas diminui a probabilidade de continuar ocorrendo, ou ainda, acreditar que um acontecimento futuro não seja afetado pelo que já aconteceu, mesmo que não se trate de eventos independentes. Na vida cotidiana costuma-se, instintivamente, acreditar nisso, criar essas crenças.

Vale lembrar que o conceito de probabilidade obteve uma interpretação em termos de frequência relativa porque foi originalmente desenvolvido para descrever certos jogos de azar onde as jogadas (tais como girar uma roleta ou lançar dados) são de fato repetidas um grande número de vezes e onde é razoável assumir que os eventos elementares de interesse são igualmente prováveis. Similarmente, existem inúmeras situações em que se obtêm muitas observações essencialmente sob as mesmas condições e, nestas situações, pode se dar uma interpretação frequentista à teoria matemática de probabilidade. Por exemplo, um estatístico atuarial pode observar registros de milhões de pessoas com o número de indenizações referentes a seguro de saúde ou outro tipo seguro; um bioestatístico pode observar milhares de pessoas com certa doença, registrando para cada uma os medicamentos utilizados e se pessoa é curada ou não da doença.

Por outro lado, existem muitos eventos que podem ser pensados em um sentido probabilístico, mas que não podem ter uma probabilidade em termos de uma interpretação frequentista. Assim, tal afirmação de probabilidade descreve o grau de convicção do observador sobre uma situação que ocorrerá uma única vez, pois nesse caso não será possível observar ensaios repetidos de situação de incerteza, de modo que a probabilidade não pode ser explicada em termos da interpretação frequentista. Uma interpretação que permite explicar tal probabilidade é a interpretação subjetiva ou pessoal e, nessa abordagem, a probabilidade é interpretada como uma medida de grau de convicção, ou como a quantificação do ponto de vista de um indivíduo em particular. Como consequência, pode-se pensar em probabilidade como a representação da opinião individual referente ao que acontecerá em um único ensaio de uma situação incerta em questão, em vez de uma afirmação sobre o que ocorrerá em uma série de repetições.

No uso diário do conceito de probabilidade não costumamos usar a conotação de frequência relativa. Dizemos "provavelmente chova à tarde", ou "meu time provavelmente não ganhará o campeonato". Estendendo esta noção, pode-se dizer: "existe uma chance de 70% de chover à tarde". Esta afirmação apresenta-se como uma afirmação probabilística cujo significado deveria ser claro, mas é muito difícil verificar como ela poderia descrever frequências relativas de resultados de experimentos simples repetidos. O problema é que este tipo de evento é único (ou seja, as situações não podem ser replicadas). Mesmo que alguma informação possa ser obtida observando ocorrências passadas em situações similares, não há informação disponível na forma de frequências observadas de ensaios repetidos sob condições idênticas. Mesmo que tenhamos informações disponíveis sobre ocorrências passadas de chuva em certa localidade, em certa época do ano, sob certas condições atmosféricas (temperatura, umidade, velocidade e direção do vento), é duvidoso que qualquer uma destas informações represente situações exatamente idênticas à atual.

Entretanto, não é preciso que um experimento seja não-repetitivo para aplicar a interpretação subjetivista de probabilidade. Considere os exemplos: lançar uma moeda, extrair bolas de uma urna, lançar um dado. Em cada um destes exemplos, a probabilidade de um evento em particular poderia ser interpretada como um grau de convicção, mesmo que os experimentos sejam passíveis de serem repetidos. No caso do dado, um observador que esteja disposto a aceitar certas hipóteses – como o dado ser balanceado e o método de lançamento do dado não favorecer nenhuma face – poderia sentir que a probabilidade do dado cair com face ímpar para cima em um lançamento particular é 1/2. Neste caso, a afirmação de probabilidade é sobre um lançamento particular, e não sobre uma longa série de lançamentos. A questão é simplesmente que a interpretação subjetivista de probabilidade faz sentido se o experimento for repetível ou não.

Por outro lado, a justificativa de frequências em séries de repetições está baseada em certas suposições: uma delas é que os ensaios desta série de repetições são independentes; outra é que os ensaios são realizados sob idênticas condições. Mesmo que existam técnicas que permitam pesquisar tais suposições, devemos notar que, em última instância, a decisão de que estas suposições sejam razoáveis é uma decisão subjetiva. Assim, existe uma parcela de subjetividade na interpretação frequentista de probabilidade. Se o observador acreditar que estas suposições são razoáveis, é perfeitamente aceitável definir a probabilidade subjetiva de um evento dado como a probabilidade determinada pela abordagem frequentista, seja se a determinação desta última probabilidade estiver baseada em argumentos de simetria, seja se estiver baseada em frequências relativas observadas. Se o observador não acreditar que estas suposições são razoáveis ou se ele tiver outras informações (que não frequências) sobre o evento em questão, a probabilidade subjetiva pode diferir da probabilidade frequentista. É neste sentido (e também no sentido que a interpretação subjetivista permite estabelecer probabilidades de eventos não-repetíveis) que probabilidade subjetiva pode ser pensada como uma extensão da noção frequentista. Suposições como simetria ou frequências relativas observadas podem ser muito úteis na atribuição de probabilidades, mas no fim a atribuição é subjetiva.

Já na visão de Pierce a probabilidade não se refere aos *acontecimentos*, mas às *proposições*, e com pequenas modificações, este ponto de vista é apresentado por John Maynard Keynes no seu Tratado de Probabilidades (*A Treatise on Probability*). Para Keynes a probabilidade não tem a ver com a intensidade da crença ou com frequências estatísticas. Por exemplo, invés de falar do evento "cara" num lançamento de moedas, deveria ser a seguinte proposição: esta moeda cairá com a face "cara" para cima em uma tentativa? A probabilidade desta proposição é a mesma que a frequência relativa aponta para qual o evento "cara" ocorre numa sequência de tentativas. Assim, para Peirce, esta interpretação de probabilidade está em melhor posição para tratar dos acontecimentos isolados e exemplifica: a proposição "provavelmente amanhã choverá" tem o significado de que proposições sobre o estado do tempo, temperatura, pressão, entre outras, insinuam ser mais favorável do que desfavorável à proposição de ocorrer a chuva.

Tudo o que se disse até agora conduz sem dúvida a um fato: nenhuma proposição contém qualquer verdade provável exceto em relação a outro conhecimento. Dizer que uma proposição é provável, quando o conhecimento em que se baseia é obscuro ou inexistente, é absurdo. É preciso esclarecer que, muitas vezes, fazemos declarações sobre probabilidade sem menção clara sobre qual ramo do conhecimento a que nos estamos referindo.

Dificuldades filosóficas foram prevalentes na probabilidade desde a sua criação, a probabilidade não é uma propriedade inerente de um evento, mas baseada no modelo subjacente escolhido. Daí as discussões sobre a base filosófica de probabilidade ainda não foram totalmente resolvidos. As três teorias principais relacionam-se à abordagem objetiva (clássica e frequentista) e subjetiva. Essas idéias filosóficas são a chave para compreender e desenvolver a abordagem de ensino. Conceitos probabilísticos estão mais perto de uma forma (consistente) de pensar sobre o mundo ao invés de descrever o mundo de uma forma consistente, o que pode parecer paradoxal, e só resolvido através de uma análise cuidadosa.

### 1.3.2 Sobre ideias que desafiam a racionalidade.

> Antes da descoberta da Austrália, as pessoas do Antigo Mundo estavam convencidas de que todos os cisnes eram brancos, ninguém nunca tinha visto um cisne negro. Esta era uma crença inquestionável por ser absolutamente confirmada por evidências empíricas. (TALEB, 2011, p. 15)[43].

Todos achavam que os cisnes eram brancos, pois ninguém nunca tinha visto um cisne negro. No entanto, não é porque não eram conhecidos, que os cisnes negros não existiam – o que remete ao clássico problema formulado pelo Popper: um único caso falsifica uma tese.

Nassim Nicholas Taleb (2011, p. 15) usa a metáfora em epígrafe para se referir a eventos raros, improváveis ou de difícil previsão, mas que causam grande impacto (cita, por

[43] TALEB, N. N. **A Lógica do Cisne Negro: O impacto do altamente improvável**. 5 ed. Rio de Janeiro: Best Seller, 2011. Taleb nasceu no Líbano, de família grego-ortodoxa, trabalhou como operador no pregão de Chicago e em sua própria firma em Wall Street como operador de derivativos; doutorado pela Universidade de Paris, é decano de Ciências da Incerteza na Universidade de Massachusetts; autor do *best seller* ***Iludido pelo Acaso***, publicado em vinte idiomas.

exemplo, o ataque às Torres Gêmeas do World Trade Center, de 11 de setembros de 2001). De acordo com o livro, não somos preparados para lidar com esses eventos e diante da complexidade e incerteza crescentes, sua opinião é de que serão cada vez mais frequentes (e influentes) do que o senso comum imagina.

Taleb, árduo defensor do impacto do altamente improvável, em seu livro critica com certa avidez os defensores do comportamento gaussiniano para eventos probabilísticos em que predominam fenômenos aleatórios e de análise de incertezas, por exemplo, no comportamento do mercado financeiro e de bolsas de valores, em fenômenos de cataclismos que provocam grandes tragédias ambientais, entre outros. Para este autor, esses fenômenos são considerados *outliers* nas análises estatísticas, isto é, com grandes desvios da curva normal gaussiana, denominados em seu livro de Cisne Negro, por três atributos: estar fora do âmbito das expectativas comuns; exercer um impacto extremo; a natureza humana tender a dar explicações para sua ocorrência após o evento tornando-o explicável e plausível, apesar de *outlier.*

> Tal combinação de baixa previsibilidade e grande impacto transforma o Cisne Negro em um grande quebra cabeça [...]. Acrescente a esse fenômeno o fato de que tendemos a agir como se não existisse! Não estou me referindo apenas a você, seu primo Joey e a mim, e sim a quase todos os "cientistas sociais" que, por mais de um século, operaram sob a crença falsa de que as ferramentas deles poderiam medir a incerteza. Afirmo isso porque as explicações da ciência da incerteza a problemas do mundo real tiveram efeitos ridículos. Tive o privilégio de testemunhar isso nas finanças e na economia. (TALEB, 2011, p.16-17)

A ideia central do livro, segundo as próprias palavras de Taleb (2011, p. 17-21), é "abordar nossa cegueira em relação à aleatoriedade, particularmente a grandes desvios", alegando que a lógica do Cisne Negro torna o que não sabemos mais relevante do que o que sabemos. Além disso, "a incapacidade de prever *outliers* implica na incapacidade de se prever o curso da história, dada a participação de tais eventos na dinâmica dos acontecimentos". Parece que "*não aprendemos espontaneamente que não aprendemos que não aprendemos*. O problema está na estrutura de nossas mentes: não aprendemos leis, mas fatos, somente fatos". E ainda que, "as evidências mostram que pensamos muito menos do que acreditamos – exceto, é claro, quando pensamos a respeito".

O argumento central de Taleb é que muitos problemas fundamentais não são pensáveis nos termos da curva normal. Usa-se muito essa maneira de pensar fazendo previsões, e, principalmente em modelos estatísticos usados em finanças e assuntos governamentais, o que na opinião dele é o mais preocupante. Quando dá certo – isso é, quando os problemas são semelhantes à distribuição, por exemplo, de alturas na população de seres humanos, está tudo bem. Quando não, é que se tornam de fato em um grande problema.

Taleb já vinha alertando que os modelos de classificação de risco superestimavam dramaticamente o quanto do risco real estava sendo modelado e que essas alavancagens são baseadas na ilusão de que é possível medir o risco real com boa precisão, e isto é exatamente onde está a raiz do problema, segundo ele. Ao final do livro (cap. 17), esse autor esclarece melhor suas críticas ao que ele chama de modelos platônicos gaussianos que contribuíram para a chamada Moderna Teoria de Administração de Carteiras, referindo-se a alguns premiados pelo Nobel de Economia, como Harry Markowitz e William Sharpe (Nobel 1990), como também a Myron Scholes e Robert C. Merton (Nobel 1997), por insistirem nesse tipo de modelo econômico, embora reconheça alguns pensadores valiosos, como o economista austríaco Friedrich Hayek e o psicólogo empírico Daniel Kahnerman, detentores do prêmio, respectivamente, em 1974 e 2002.

No livro Outliers, Malcom Gladwell (2008)[44] elabora uma extensa pesquisa destinada a comprovar que são inúmeras as variáveis que levam uma pessoa ao topo. A princípio podemos pensar que pessoas de sucesso, como celebridades, cientistas ilustres, prodígios da matemática, músicos e atletas bem sucedidos, não se enquadram na experiência dos comuns mortais. Mas isto não é verdade: eles são produto da história, da comunidade, das oportunidades e dos legados. Os indivíduos fora de série – como Mozart, Bill Gates ou os britânicos da banda The Beatles – além de terem praticado suas habilidades por uma quantidade de tempo extraordinária, se beneficiaram de oportunidades disponíveis, vantagens ocultas ou heranças culturais.

Além de estudar as pessoas em si, é preciso focar a análise em questões como o meio e a época em que viveram, quem foram seus amigos, dentre outros fatores, pois tudo isso exerce influência nas realizações humanas. O livro é uma viagem por histórias de pessoas em todos os cantos do mundo, desde as escolas públicas dos bairros mais pobres de Nova York até os centros de treinamento de empresas aéreas da Coréia do Sul, passando pelos campos de arroz da China, as montanhas rochosas e improdutivas da Escócia, as vilas campesinas da Jamaica. No fim das contas, os *outliers* não estão tão à margem assim.

Dan Ariely americano de origem israelita é professor de psicologia e tornou-se uma das maiores referências no que hoje se chama Economia Comportamental. É autor do livro ***Previsivelmente Irracional: Aprenda a Tomar Melhores Decisões***, publicado nos Estados Unidos em 2008, em que desmonta alguns preconceitos em relação à tomada de decisões baseadas em critérios puramente racionais. Ariely indica que seu objetivo é ajudar a pensar profundamente sobre o que move as pessoas em situações de tomada de decisão, trazendo um leque de experiências científicas, descobertas e até situações divertidas, visando levar as

[44] GLADWELL, M. **Fora de série: outliers**. Rio de Janeiro: Sextante, 2008.

pessoas a reparar que certos erros que cometemos são sistemáticos, portanto, se percebidos podem ser evitados.

Na análise do papel do risco na sociedade, Peter Bernstein (1997)[45] argumenta que a concepção do controle do risco constitui uma das ideias centrais que distinguem os tempos modernos do passado mais remoto. Em seu livro 'Desafio aos deuses' comenta que a vastidão do tema é imensa e o risco afeta aspectos profundos da psicologia, matemática, estatística e história; relata a notável aventura intelectual que libertou a humanidade dos oráculos e adivinhos, mediante as ferramentas poderosas da administração do risco disponíveis nos dias de hoje. O autor esclarece os conceitos de probabilidade, amostragem, teoria dos jogos e tomada de decisões racional versus irracional. As seções finais do livro levantam questões importantes sobre o papel do computador, a relação entre fatos e crenças subjetivas, o impacto da teoria do caos, o papel dos mercados de derivativos em franco desenvolvimento e a total predominância dos números.

Entretanto, apesar da libertação de oráculos, quando a teoria do risco alcança o século atual, Bernstein ainda expõe a medida da nossa ignorância. Quando corremos um risco, apostamos em um resultado que será consequência de uma decisão que tomamos, embora não saibamos ao certo qual será o resultado.

> A essência da administração do risco está em maximizar as áreas onde temos certo controle sobre o resultado, enquanto minimizamos as áreas onde não temos absolutamente nenhum controle sobre o resultado e onde o vínculo entre efeito e causa está oculto de nós. (BERNSTEIN, 1997, p. 197).

Bernstein ainda enfatiza que o problema está nas consequências de nossas decisões e não nas próprias decisões, a decisão é apenas o início.

## 1.4 Alguns equívocos recorrentes relativos ao raciocínio probabilístico

Vamos pensar em uma questão aparentemente simples: qual resultado é mais provável no lançamento simultâneo de duas moedas: duas caras, duas coroas ou uma de cada? Para esta pergunta, algumas pessoas poderiam pensar (equivocadamente) que os três resultados são equiprováveis, cada um com probabilidade de 1/3. É comum deixarem de considerar que sair faces distintas nesse tipo de lançamento de moedas tem probabilidade dobrada do que faces iguais, pois o espaço amostral nesse caso, se indicarmos C para cara e K para coroa, é dado por $\{(C,C),(C,K),(K,C),(K,K)\}$. O mesmo ocorre se os dois lançamentos da moeda forem consecutivos. Podem-se fazer diversas variações desse tipo de questão, como, por

[45] BERNSTEIN, P. L. **O Desafio dos Deuses: A Fascinante História do Risco**. 23 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 1997.

exemplo, qual a probabilidade de sair apenas uma face cara em dois lançamentos consecutivos da moeda. Entretanto, mesmo o conceituado matemático do século XVIII, Jean Le Rond D'Alembert, à época um dos mais influentes cientistas franceses, sustentou que a probabilidade de se conseguir uma cara em dois lançamentos consecutivos era de 2/3, por entender que haveria apenas três casos possíveis equiprováveis, ou seja, C, KC e KK. Na verdade, ao pensar num primeiro lançamento sendo cara, nem cogitou o segundo lançamento neste caso, por já ter obtido o resultado esperado. Vários autores comentam sobre este 'erro' de d'Alembert, em especial Todhunter (1865, p. 258-259, 263)[46], comentando ainda que a questão consta do artigo *Croix ou Pile*, de autoria de D'Alembert, publicado pela primeira vez em 1754 na *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Science, des arts et des métiers*. De acordo com Bennett (2003, p. 74-75) muitas pessoas por meio de um raciocínio errado ainda chegam à resposta correta, uma vez que na opinião delas um resultado com as faces diferentes das moedas voltadas para cima reflete com mais precisão o comportamento das moedas em longo prazo.  O erro de raciocínio neste caso pode ser detectado quando respondem à questão: o que é mais provável, faces iguais ou faces diferentes voltadas para cima, quando do lançamento de duas moedas? Mesmo acreditando que cara e coroa ocorrem com a mesma frequência em curto prazo, muitas pessoas respondem que, ao jogarem duas moedas é mais provável conseguir uma de cada face (faces diferentes) do que duas faces iguais. Tversky e Kahneman (1971)[47] rotulam este equívoco de "crença na lei dos pequenos números" e afirmam que essa crença surge da confiança exagerada na estabilidade de resultados observados em pequenas amostragens.

Dentre as histórias relatadas por Bernstein em seu livro situa-se a que trata de Thomas Bayes, nascido em Londres, em 1791, pastor presbiteriano, inconformista, que deixou um legado importante para a matemática, em apenas dois trabalhos, só publicados postumamente. Um desses trabalhos, *Essay towards solving a problem in the doutrine of chances*, foi uma obra que o imortalizou entre os estatísticos, economistas e cientistas sociais. O artigo estabeleceu a base do moderno método de inferência estatística, questão anteriormente levantada por Jacob Bernoulli. Quando morreu em 1761, em testamento,

---

[46] TODHUNTER, I. **A History of the Mathematical Theory of Probability: from the time of Pascal to that of Laplace.** Cambridge: Macmillan, 1865.

[47] TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. The Belief in the Law of Small Numbers. **Psychological Bulletin**, v. 2, 1971, p. 105-110.

Bayer legou o manuscrito desse ensaio para Richard Price, um simples pregador de uma aldeia de Kent, homem de elevados padrões morais e crença na liberdade humana, inclusive religiosa. Price escreveu um livro sobre a Revolução Americana, em que expressou sua crença de que a revolução fora ordenada por Deus (aliás também em referência ao artigo de Bayes, Price acreditou que era uma prova da existência de Deus). Correndo certo risco pessoal, Price cuidou de prisioneiros de guerra norte-americanos transferidos para a Inglaterra. Benjamim Franklin era amigo e Adam Smith seu conhecido, ambos leram a ensaio de Bayes, o que os ajudou a reler e criticar o manuscrito de alguns capítulos de *A riqueza das Nações*, que Smith estava escrevendo e cuja primeira edição data de 1776. Price, além de pastor e defensor da liberdade, foi também um matemático e apenas uma liberdade o incomodava: a de contrair empréstimos. Após estudar os trabalhos de Harley e Moivre, entre outros, publicou no *Philosophical Transations of the Royal Society of London* dois artigos sobre este assunto relacionando tabelas de mortalidade com prêmios de seguros de vida e anuidades. Atualmente esses dois clérigos são conhecidos pelo Teorema de Bayes e pela Tabela Price.

Dentre esses dois legados, o Teorema de Bayes é particularmente importante para a presente pesquisa. Após a publicação do artigo de Bayes, em 1764, no *Philosophical Transactions*, o trabalho caiu no esquecimento, sendo resgatado mais tarde pelo matemático francês Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), que o revelou ao mundo. Os fundamentos da teoria de probabilidade foram então colocados por Laplace em uma forma (hoje dita clássica) que se manteve praticamente inalterada até o início do século 20. Nesse tratado Laplace fez novas contribuições e reuniu, sistematizou e ampliou resultados desenvolvidos por seus predecessores. Uma das contribuições é quando define a probabilidade a priori (que originou grandes controvérsias) para o cálculo da chamada probabilidade inversa (ou probabilidade de causas ou a posteriori), conceito este sugerido pelo trabalho de Bayes em 1764. A solução de Bayes para um problema de "probabilidade inversa" foi apresentada naquele seu ensaio, que contém a declaração de um caso especial do teorema de Bayes. Vale recordar que, nas primeiras décadas do século XVIII, foram resolvidos muitos problemas, relativos à probabilidade de certos eventos, dadas as condições especificadas, a chamada **probabilidade condicional**. Por exemplo, dado um determinado número de bolas brancas e pretas em uma urna, quando se quer saber qual é a probabilidade de se tirar uma bola preta, é tipo de questão que se enquadra nos chamados problemas de probabilidade a posteriori. Mas a atenção logo se voltou para o inverso deste tipo de problema: uma vez que já se retirou uma ou mais bolas da urna, o que pode ser dito sobre o número de bolas brancas e pretas na urna? O Ensaio de Bayes contém sua solução para um problema similar, representada por Abraham de Moivre, autor da Doutrina das Chances, em 1718.

Vamos nos concentrar na forma elementar de inferência bayesiana, que consiste em inferir um ponto único - uma estimativa de probabilidade (probabilidade a posteriori) ou uma frequência – de duas hipóteses mutuamente exclusivas e complementares, com base na observação de uma delas. Segundo Gigerenzer e Hoffrage (1995, p. 687)[48] esta tarefa elementar tem sido alvo de quase todos os estudos experimentais sobre inferência bayesiana nos últimos 25 anos. O seguinte "problema da mamografia" no formato padrão de probabilidade é um exemplo adaptado do artigo em questão:

| Problema da Mamografia |
|---|
| A probabilidade de câncer de mama é de 1% para uma mulher de quarenta anos de idade que participa de exames de rotina. Sabe-se que a mamografia apresenta resultado positivo em 80% das mulheres com câncer de mama, mas esse mesmo resultado ocorre também com 9,6% das mulheres sem o câncer. Uma paciente nessa faixa etária tinha uma mamografia positiva em um exame de rotina. Qual é a probabilidade dessa paciente realmente ter um câncer de mama? |

Montando o problema de maneira bayesiana temos como probabilidade *a priori* – ter câncer (CA) ou não câncer (NCA). Como, em média, 1% das mulheres por volta dos 40 anos tem tumor de mama, a probabilidade *a priori* desta paciente é de 0,01 e de não ter é de 0,99. Agora vamos incorporar o resultado da mamografia: se o câncer estiver presente, a probabilidade condicional de a mamografia dar resultado positivo é de 0,80 (80%) e, de não estar presente, é de 0,096 (9,6%). Multiplicando a probabilidade a priori pela condicional, obtemos as seguintes probabilidades conjuntas:

$$0{,}01 \times 0{,}8 = 0{,}008 \; P\,(CA \cap +)$$

$$0{,}99 \times 0{,}096 \cong 0{,}095 \; P\,(NCA \cap +)$$

[48] GIGERENZER, G.; HOFFRAGE, U. How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction: Frequency Formats. **Psychological Review**, v. 102, n. 4, 1995, p. 684-704.

**Tabela 1**- probabilidade conjunta

| | CA | NCA |
|---|---|---|
| Probabilidade a priori | 0,01 | 0,99 |
| Probabilidade condicional | 0,8 | 0,096 |
| **Probabilidade conjunta** | **0,008** | **0,095** |

Fonte: elaborada pela pesquisadora.

Observemos que a soma das probabilidades a priori é 1, mas o mesmo não ocorre com a probabilidade conjunta. Para fazer esta soma dar 1, precisamos normalizar, isto é, dividir cada probabilidade conjunta pela soma das duas probabilidade conjuntas.

Assim, como 0,008+0,095=0,103 teremos:

0,008/0,103≅ 0,0776 (CA)

0,095/0,103 ≅ 0,922 (NCA)

**Tabela 2** – probabilidade a posteriori

| | CA | NCA |
|---|---|---|
| Probabilidade a priori | 0,01 | 0,99 |
| Probabilidade condicional | 0,8 | 0,096 |
| Probabilidade conjunta | 0,008 | 0,095 |
| **Probabilidade a posteriori** | **0,0776** | **0,922** |

Fonte: elaborada pela pesquisadora

Vemos, portanto, que usando o raciocínio bayesiano podemos concluir que a chance de a paciente não ter câncer de mama é de 92,2%, contra 7,76 % de ter.

Podemos resolver o mesmo problema usando diretamente o Teorema de Bayes, sabendo que queremos encontrar a probabilidade a *posteriori* p (câncer|positivo). Usando os símbolos $H$ e $-H$ para as para as duas hipóteses complementares (ter e não ter câncer) e $D$ para o diagnóstico positivo da mamografia, teremos:

$$p(H|D) = \frac{p(H).p(D|H)}{p(H).p(D|H)+p(-H).p(D|-H)} \cong \frac{(0,01).(0,8)}{(0,1).(0,8)+(0,99).(0,96)} \cong 0,078$$

Vale ressaltar que situações semelhantes aplicadas a especialistas, de diversas áreas, da saúde às finanças, revelam equívocos de análises, com tendências em superestimar a probabilidade a posteriori ou mesmo ignorar a probabilidade a priori, fenômeno denominado por Kahneman de 'falácia da probabilidade de base' (*a priori*).

É bom lembrar, como alerta Diáz e Fuentes (2005)[49], bem como Batanero, Contrera e Díaz (2012)[50], que a probabilidade condicional é fundamental em aplicações de estatísticas, porque permite incorporar mudanças em nosso grau de crença sobre eventos aleatórios à medida que adquirimos novas informações. Também é um conceito teórico básico necessário à construção de espaço amostral do produto. Portanto, a compreensão e raciocínio corretos sobre a mesma são requisitos necessários para o estudo da inferência estatística, tanto clássica como bayesiana, bem como no estudo da associação entre as variáveis e modelos de regressão linear. No campo profissional e até mesmo na vida cotidiana, tomar boas decisões em situações de incerteza é em grande parte baseada no raciocínio condicional. As autoras ainda reforçam que a Psicologia do raciocínio (ramo da Psicologia do pensamento) e investigações recentes em ensino da probabilidade mostram a existência de intuições incorretas, equívocos de raciocínio e erros de compreensão e aplicação do conceito de probabilidade condicional, alguns deles já bastante difundidos e que o ensino formal de probabilidade é insuficiente para superá-los. É necessário tomar consciência destas dificuldades e aprender a lidar com os problemas condicionais com ferramentas adequadas.

Falk (1986)[51] também comenta que muitos estudantes não discriminam adequadamente entre os dois sentidos da probabilidade condicional P (A | B) e P (B | A) e esse erro é denominado de 'falácia da condicional transposta'. Aparece com freqüência em contextos médicos, onde se confunde a probabilidade de ter uma doença, quando o teste teve um diagnóstico positivo, com a probabilidade de um resultado positivo do teste diagnóstico, uma vez que se têm a doença. A prevalência desse erro pode ter consequências importantes, por exemplo, a confusão entre a probabilidade de uma criança afetada com a Síndrome de Down ter o resultado de amniocentese pré-natal positivo, que é alta probabilidade, e o fato de que, uma vez que o teste foi positivo, realmente a criança ter a síndrome de Down, que é muito menor. No artigo Falk relata que um problema deste tipo

---

[49] DÍAZ, C.; LA FUENTE, E. I. Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. **Epsilon,** n. 59, 2005, p. 245-260.

[50] BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M.; DÍAZ, C. Sesgos en el Razonamiento Sobre Probabilidad Condicional e Implicaciones Para la Enseñanza. **Revista digital Matemática, Educación e Internet**, v. 12, n. 2. Marzo/Agosto, 2012, p. 1-13.

[51] FALK, R. Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute, 1986, p. 292-297.

foi apresentado aos alunos para avaliar a presença deste vié, sendo que pouco mais de 40% dos futuros professores e cerca de um terço dos alunos de Psicologia deram a resposta correta. Os resultados foram um pouco melhores no estudo de caso realizado por Pollatsek *et al*. (1987)[52], entretanto afirmam suspeitar de que o grande erro é uma confusão entre P(A| B) e P (A ∩ B). O erro mais comum foi calcular a probabilidade conjunta em vez da probabilidade condicional solicitada. Pollatsek comenta que, num certo sentido, estes resultados são complementares ao "efeito conjunção" discutido por Tversky e Kahneman. O mais freqüente em ambos os grupos é a de considerar a mesma confiança em ambas as previsões, que de acordo com Pollatsek et al. indica a falácia da condicional transposta.

Segundo Gigerenzer e Hoffrage (1995), a maioria das pesquisas sobre inferência bayesiana centrou-se na negligência das taxas de base, mas alguns estudos têm investigado o uso ou negligência de $p(D|-H)$ em inferência bayesiana. Esse fenômeno foi denominado pseudodiagnóstico. O termo deriva de um conjunto de informações obtidas de tarefas nas quais os participantes foram apresentados a ambos $p(D|H)$ e $p(D|-H)$, mas tendem a utilizar apenas um das duas probabilidades, geralmente a $p(D|H)$. Segundo os autores, a análise revelou que a taxa de alarme falso negligenciado ficou entre 31 e 33% e a taxa de probabilidade a priori negligenciada ficou entre 32% e 36%. Além disso, também identificaram algoritmos cognitivos subjacentes a este fenômeno, como ocorrência conjunta, Fisheriana, ou só de taxa base. Benett (2003, p. 4) também identifica equívocos similares de raciocínio, que podem ser bem compreendidos no caso do exemplo a seguir:

> Se um exame para detectar uma doença, cuja incidência é de 1 em mil, tiver uma taxa de resultados falso-positivos de 5%, qual é a probabilidade de que uma pessoa com resultado positivo seja realmente portadora da doença, supondo que não se tenha nenhuma outra informação a respeito do caso[53].

Segundo Bennett, este caso foi aplicado num estudo realizado em uma importante escola de medicina e quase a metade dos participantes do estudo respondeu 95% e somente 18% acertaram a resposta. Os que erraram estavam deixando de considerar a informação

[52] POLLATSEK, A.; WELL, A. D.; KONOLD, C.; HARDIMAN, P. Understanding conditional probabilities. **Organization,Behavior and Human Decision Processes**, n. 40, 1987, p. 255 – 269.
[53] Em nota, Bennett informa que, segundo Cassels, Schoenberger e Grayboys (1978, p. 999) neste caso está se supondo que o diagnóstico é preciso e não ocorram falso-negativos.

importante sobre a distribuição percentual de que apenas 1 pessoa entre 1000 que fizerem o exame apresentará a doença. Uma maneira sensata de se lidar matematicamente com a questão é: considerando que apenas 1 pessoa em 1000 que fizerem o exame apresentará a doença, em comparação com as cerca de 50 em 1000 (5% de 999) que não apresentam, logo é muito mais provável de que esta pessoa esteja no grupo dos falso-positivos. De fato, a probabilidade de apresentar a doença vai de 1 em 1000, quando se submete ao exame, para 1 em 51 se o resultado for positivo, o que corresponde a cerca de 2% de chance de ter a doença.

Considerando que mesmo profissionais experientes podem errar na interpretação de dados estatísticos e probabilísticos, não surpreende o fato da probabilidade estar em conflito com opiniões intuitivas de pacientes, pessoas leigas e até alunos. Psicólogos vêm demonstrando que pessoas estão sujeitas a enganos rotineiros em se tratando de avaliar as probabilidades, como exagerar na variabilidade da probabilidade ou prestar mais atenção ao curto prazo do que ao longo prazo – por exemplo, o caso de, ao se jogar uma moeda, uma coroa deve seguir uma série de caras, ideia amplamente aceitável, mas errônea. Até crianças são susceptíveis a esse tipo de engano, segundo Piaget e Inhelder (1959)[54], que estudaram o desenvolvimento do pensamento matemático nas crianças e salientaram que, em contraste com as operações lógico-matemáticas, a probabilidade é descoberta gradualmente. Nesse estudo, os pesquisadores concluem (PIAGET e INHELDER, 1959, p. 293): "é, com efeito (nós o vimos sem cessar), por oposição às operações que o acaso é pouco a pouco descoberto; e referindo-se à suas estruturas é que ele é compreendido e dá ocasião a um sistema de probabilidades". Entretanto, mesmo no período operatório formal (10 a 12 anos) existem limites, dentre eles, um que pode ser comprovado em experimentos de jogos (cara e coroa; bolas sorteadas), (p. 311): "existe a consciência do 'milagre' que seria uma distribuição extremamente pouco provável, e busca intuitiva de uma causa que explique tais distribuições (por ex: os tentos do cap IV) de outra maneira que não seja o acaso".

Experiências adquiridas ao longo da vida solidificam intuições a respeito de probabilidades, corretas ou equivocadas. Além disso, algumas ideias intuitivas a respeito da probabilidade parecem preceder as ideias formais e, se corretas são um auxílio à aprendizagem, mas se

[54] PIAGET, J.; INHELDER, B. **A origem da ideia do acaso na criança**. Rio de Janeiro: Record, 1959.

incorretas, pode prejudicar a compreensão dos conceitos probabilísticos. Kahneman e Tverski (2009) concluíram que os princípios estatísticos e probabilísticos não são aprendidos com experiência do cotidiano, porque os indivíduos não se concentram nos detalhes necessários para adquirir este tipo de conhecimento. Por isso, de acordo com Bennett:

> Não é de surpreender que, ao longo da história da nossa espécie, a conquista de um entendimento de probabilidade tenha sido extremamente gradual, espelhando a forma como o entendimento da aleatoriedade e da probabilidade se desenvolve em um indivíduo (se é o caso que desenvolve). (BENNETT, 2003, p. 9).

Essa visão é o que se pretendeu dar neste capítulo, mesmo que parcial frente ao volume de ideias e informações, mas procurando transcender à descrição apenas histórica da evolução do pensamento estocástico para mostrar também sua influência em várias áreas do saber, bem como os percalços, equívocos, ou mesmo divergências, que ocorreram ao longo da construção desse conhecimento, notadamente aqueles que se referem mais especificamente ao teor desta pesquisa. Dedicamos um olhar mais geral em relação às questões aqui levantadas, deixando observações mais pontuais para serem alocadas oportunamente quando da análise dos dados.

O próximo capítulo será dedicado à apresentação das noções e conceitos, relativos a essa temática, que foram tratados no módulo da pesquisa junto aos professores participantes à época do Programa Observatório da Educação da Uniban.

## 2 Constructos de Probabilidade abordados na pesquisa

> "Não há saber mais ou saber menos, há saberes diferentes". (Paulo Freire)

Hoje em dia nos deparamos com grande quantidade de jogos, como loteria esportiva, loteria federal, sena, entre outras ofertas de prêmios dos mais variados tipos. É natural que as pessoas interessadas pensem quais são suas chances de ganhar antes de apostar ou concorrer.

Nos feriados ou finais de semana ou mesmo quando temos alguma programação agendada, queremos saber como estará o clima: se vai fazer sol ou se vai chover, se fará frio ou calor. Temos que decidir qual roupar vamos usar ou o que levar conosco para nos prevenirmos.

Se resolvermos fazer um investimento, quer seja em poupança, em ações ou de outro tipo, desejamos saber a priori como estes estão se comportando no mercado investidor para decidir qual deles dará melhor retorno financeiro que possa atender às nossas expectativas.

Um médico pode se deparar com a incerteza dos efeitos que poderão ser provocados num paciente ao administrar-lhe um novo remédio. Até mesmo em uma situação mais simples, como chegar a uma bifurcação com mais de uma possibilidade de trajeto, temos que analisar as condições do trânsito para decidir qual será a melhor opção.

Enfim, em diversas ocasiões da vida cotidiana nos deparamos com situações em que temos de tomar uma decisão, mas não temos a certeza do que poderá ocorrer exatamente, ou seja, as situações não apresentam resultados previsíveis. Tais situações se encaixam no que denominamos **experimentos ou fenômenos aleatórios**.

> O ensino de probabilidade é sabidamente importante para proporcionar a compreensão de grande parte dos acontecimentos de natureza aleatória do cotidiano dos alunos e como pré-requisito para estudos posteriores de Estatística. Entretanto, é desejável que o professor aborde esse tema através de atividades em que os alunos possam realizar experimentos e observar os eventos, promovendo a manifestação intuitiva do acaso e da incerteza, construindo, a partir desses resultados, métodos matemáticos para o estudo de tais fenômenos. A construção do conceito de probabilidade deveria ser feita a partir da compreensão de suas três

> noções básicas: percepção do acaso; idéia de experiência aleatória; e noção de probabilidade. (KATAOKA; RODRIGUES; OLIVEIRA, 2007, p. 1)[55]

E foi nessa direção que a presente pesquisa foi desenvolvida num curso voltado para a formação de professores de matemática, do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, participantes do Programa Observatório da Educação da UNIBAN, no qual fiquei responsável pelo módulo *Probabilidade Geométrica na Educação Básica: casos de acaso e incerteza*, que tratou das noções, conceitos e conteúdos básicos de probabilidade, iniciando pelas noções de acaso, incerteza, aleatoriedade, passando pelas abordagens clássica e frequentista de probabilidade e culminando na probabilidade geométrica. Para entendermos melhor e situar o leitor apresento os constructos que fundamentaram o desenvolvimento do módulo.

## 2.1 Noções preliminares

Há muitas palavras para expressar ideias de acaso e aleatório. Batanero e Godino (2002, p. 739)[56] dão alguns exemplos, como: casual, acidental, eventual, fortuito incerto, imprevisível, inesperado, ocasional. Mas pode ser também associada à palavra azar (do árabe 'zahr', flor que se pintava na face de um dado), o que nos remete ao jogo de dados, um exempo típico aceito em todo mundo como um fenômeno aleatório, cuja característica é o caráter imprevisível do resultado. Esta variedade de termos indica que os fenômenos aleatórios estão presentes na nossa vida cotidiana e até crianças podem perceber o caráter imprevisível destes fenômenos.

De acordo com Azcárate, Cardeñoso e Porlán (1998)[57]:

> Aleatoriedade, sendo o núcleo de conhecimento probabilístico é geralmente considerado como um conceito "óbvio" e seu significado não é analisado em profundidade. No entanto, podemos supor que certos tipos de concepções sobre ele pode ser um claro obstáculo para a compreensão da natureza probabilística de certos aspectos da realidade. [...] A importância da noção de aleatoriedade

---

[55] KATAOKA, V. Y., RODRIGUES, A., OLIVEIRA, M.S. Utilização do Conceito de Probabilidade Geométrica como Recurso Didático no Ensino de Estatística**.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007. Belo Horizonte. **Anais eletrônicos IX ENEM**. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/minicursos.html >. Acesso em: 15 set. 2012.

[56] BATANERO, C.; GODINO, J. **Estocástica y su didáctica para maestros: Proyecto Edumat-Maestros.** Granada: Universidade de Granada, 2002.

[57] AZCÁRATE, P; CARDEÑOSO, J.M e PORLÁN, R. Concepciones de futuros professores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. **Enseñanza de las ciencias**, v.16, n.1, p.85-97, 1998.

> reside em ser um conceito que, de fato, está envolvido diretamente com a nossa própria maneira de ver a realidade e o conhecimento. (AZCÀRATE; CARDEÑOSO; PORLÁN, 1998, p. 86, tradução nossa)

Santana (2011)[58] em seu estudo ainda verificou que:

> Os autores enfatizam, ainda, que a *aleatoriedade* é um conceito ambíguo que só pode ser definido em função dos instrumentos que se dispõe para provar o caráter aleatório de um fenômeno ao qual nos deparamos. Sendo assim, não existe uma forma única e precisa, universalmente válida, para definir aleatoriedade e o nível de compreensão da aleatoriedade influencia substancialmente na compreensão do conhecimento probabilístico. (SANTANA, 2011, p. 23)
>
> Nomenclaturas como *fenômeno aleatório*, *espaço amostral*, *acaso* e *evento*, necessárias na formalização do conceito de *probabilidade* não foram evidenciadas pelos professores entrevistados. Com base nessa fragilidade apresentada pelos professores, relativa às noções probabilísticas, surgem as dificuldades de se explorar a Probabilidade em sala de aula, pois, sem a construção conceitual, dificilmente os professores conseguem construir significativamente os conceitos necessários para a aprendizagem das noções probabilísticas. (SANTANA, 2011, p. 88)

Por conta de certa polissemia desses termos, e mesmo diferenças nas interpretações, apresento o entendimento dessas noções que serviram de base para fundamentar meu trabalho.

**Acaso:** a palavra vem do latim *a casu*, sem causa e é algo que surge ou ocorre sem motivo ou causa aparente, de forma imprevisível. O conceito de acaso nos fenômenos da natureza é relacionado ao conceito da aleatoriedade objetiva, do filósofo Epicuro, que é a aleatoriedade da ausência de causas. Na história antiga, os conceitos de chance e de aleatoriedade eram interligados ao conceito atribuído a destino. Na antiguidade jogavam-se dados para determinar o destino, e posteriormente, isso se desenvolveu em jogos, chamados de jogos de azar. A maioria das culturas usou vários métodos de adivinhações para tentarem contornar a aleatoriedade e o destino ou mesmo a dita sorte. Filósofos gregos discutiram aleatoriedade por muito tempo, mas somente de formas não quantitativas. Foi só no século XVI que matemáticos italianos começaram a definir probabilidades associadas a vários jogos de azar. A invenção do cálculo teve um impacto positivo no estudo formal da aleatoriedade.

---

[58] SANTANA, M. R. M. **O Acaso, o Provável, o Determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do Ensino Fundamental**. 2011. 96 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) –Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

**Aleatoriedade:** é associada às estruturas e processos (sequências de fenômenos) que não são determinados por nenhuma causa, que negam todo recurso a mecanismos antecedentes; uma estrutura com aleatoriedade objetiva é impossível de descrever completamente. Um processo aleatório é o processo repetitivo cujo resultado não descreve um padrão determinístico, mas segue uma distribuição de probabilidade.

Na ciência contemporânea, de acordo com Batanero, Henry e Parzysz (2005, p. 19)[59] nos perguntamos sobre a existência do acaso em fenômenos naturais e sobre o possível grau de precisão nas observações. O Princípio da incerteza de Werner Heisenberg na mecânica quântica implica que o movimento de uma partícula só pode ser descrito por funções aleatórias e é teoricamente impossível de corrigir de forma determinística, ao mesmo tempo, a sua posição e velocidade. A existência de possibilidade intrínseca foi aceita e desenvolvida em genética por Jacques Monod (1970), em seguida, em termodinâmica por Ilya Prigogine e Isabelle Stengers (1979). Epistemólogos, como Edgar Morin (1990) elaboraram os conceitos fundantes da complexidade, permitindo uma esclarecedora noção de acaso, como previsto por Poincaré. Escritos contemporâneos sobre o caos, o determinismo, o acaso e a complexidade são agora muito numerosos. Matemáticos, como David Ruelle (1991), desenvolveram a teoria do caos para modelar fenômenos complexos, contribuindo assim para uma melhor compreensão destes fenômenos. Quaisquer que sejam nossas concepções filosóficas de acaso e necessidade e as nossas concepções epistemológicas de probabilidades, elas são compatíveis com a teoria matemática contemporânea de probabilidade. No desenvolvimento de uma teoria axiomática que era adequado para apoiar estas diferentes interpretações, a matemática não entra nestes debates filosóficos ou epistemológicos. Experimento aleatório é, portanto, um conceito matemático primitivo e qualquer que seja a natureza do acaso em cada experimento aleatório particular, nós podemos ter chances para os diferentes eventos, apenas pela aplicação de modelos de probabilidade, que preencham os axiomas da teoria da probabilidade. Mas o professor de probabilidade precisa estar ciente dessas interpretações, porque elas implicitamente determinam comportamentos e respostas dos alunos quando

[59] BATANERO, C.; HENRY, M.; Parzysz, B. The Nature of Chance and Probability. In: JONES, G. A. (Ed.) **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. New York: Springer, 2005, p. 15-37.

confrontados com situações de acaso ou quando precisam colocar suas intuições e conhecimentos probabilísticos na prática.

**Modelo:** É uma representação simplificada da realidade (desprezando-se detalhes que não interessam ao estudo) com a finalidade de estudar determinado problema ou fenômeno. É o que acontece, por exemplo, quando se deduz uma equação matemática para descrever um fenômeno físico.

**Experimento:** É uma experiência ou observação que possa ser repetida nas mesmas condições básicas. É o que acontece nas observações meteorológicas. Exemplo: medir a umidade do ar todo dia num mesmo local.

**Experimentos Determinísticos:** Um experimento determinístico é aquele em que as condições iniciais do experimento são preponderantes para determinar o resultado final. Ou ainda são experimentos que, ao serem repetidos nas mesmas condições, conduzem ao mesmo resultado. Alguns exemplos de experimentos determinísticos.

a) Ao deixarmos cair um objeto de certa altura podemos determinar sua posição e velocidade em qualquer momento da queda.

b) Observar uma corrente i que passa por um circuito elétrico, com uma resistência R e uma diferença de potencial V.

Aqui o resultado final pode ser previsto antes de executar o experimento. O acaso não influi praticamente no resultado final.

**Experimentos aleatórios ou probabilísticos:** São aqueles que, mesmo repetidos várias vezes em condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis.

Assim, da afirmação "é provável que o meu time ganhe a partida de hoje" pode resultar: **a.** que o time perca, apesar do favoritismo da torcida ou do desempenho favorável no campeonato até então, principalmente em relação ao time adversário; **b.** que o time ganhe como o torcedor pensava e desejava; **c.** que empate.

Como vimos, o resultado final depende do **acaso**. Em quase tudo, em maior ou menor grau, vislumbramos o **acaso,** mesmo que tenhamos em certas situações estudos e fundamentos que diminuam o grau de incerteza. Fenômenos que apresentam variabilidade na repetição das observações e imprevisibilidade em sua variação futura são chamados **fenômenos aleatórios** ou **experimentos aleatórios** ou ainda **experimentos probabilísticos**. Alguns exemplos de experimentos aleatórios:

a) de uma urna com bolas brancas e vermelhas, retirar uma bola branca;

b) em um processo de produção, ao retirar aleatoriamente um lote de peças, observar que o número de peças defeituosas varia de lote para lote;

c) no lançamento de um dado numa superfície plana, não podemos determinar a priori qual numero aparecerá na face superior do dado após o lançamento.

d) Na reprodução humana usual, o material genético de uma criança é uma combinação aleatória do material genético dos pais. Assim, o nascimento de uma criança, por exemplo, é um experimento aleatório em relação à cor dos olhos, tipo de cabelo e muitas outras características físicas. Frequentemente, o interesse se concentra na transmissão aleatória de desordens genéticas aos descendentes.

**Caracterização de um Experimento Aleatório**

a) um experimento pode ser repetido muitas vezes, sob condições basicamente inalteradas;
b) embora não sejamos capazes de afirmar qual resultado ocorrerá podemos descrever o conjunto de todos possíveis resultados do experimento;
c) quando o experimento for executado repetidamente, surgirá certa regularidade estatística, o que torna possível construir um modelo matemático preciso de análise. Exemplo: lançar uma moeda e anotar o resultado. Após um grande número de lances a proporção de caras e coroas será aproximadamente igual.

**Observações sobre alguns fenômenos naturais**

Muitos fenômenos naturais apresentam um aparente caráter aleatório, como por exemplo, os fenômenos metereológicos. Outros têm um caráter de indeterminação, uma estrutura com aleatoriedade objetiva, indeterminista, impossível de descrever completamente, portanto, sobre ela não podemos construir modelos físicos determinados, como por exemplo, a impossibilidade de medir de forma precisa a trajetória de uma partícula subatômica. Por não se poder determinar com a mesma precisão sua velocidade e sua posição, daí deriva-se o "princípio da incerteza" ou "desigualdade de Heisenberg". Entretanto alguns fenômenos naturais têm um comportamento mais complexo, por terem caráter determinista, mas apresentarem uma instabilidade em relação a condições iniciais que os tornam imprevisíveis com o passar do tempo. São fenômenos conhecidos como caóticos.

Durante muito tempo acreditou-se que apenas nos primórdios, na origem do universo como o conhecemos, o **caos** predominava. A vida sobre a Terra seria então pautada por dois tipos de fenômenos: os regulares ou previsíveis e os casuais ou aleatórios. Mas na segunda metade do século 20, a ciência mostrou que o caos estava de volta, ou melhor, que ele sempre esteve entre nós. Nos anos 60, os cientistas perceberam que muitos dos fenômenos até então considerados aleatórios são, na verdade, até certo ponto previsíveis, mas demasiados complexos para que a previsão seja precisa e duradoura. A metereologia é um exemplo cotidiano da manifestação do caos. O clima é um fenômeno que não é nem aleatório nem regular. É possível fazer a previsão do tempo baseada em dados meteorológicos, mas com a confiabilidade de no máximo algumas semanas. Isso porque pequenas alterações atmosféricas têm um efeito amplificado com o decorrer dos dias, o que pode modificar completamente a previsão inicial. Apesar de o clima ser o campo mais evidente do funcionamento do caos, ele está presente em vários outros fenômenos, da órbita dos planetas até a atividade cerebral. O caos está presente em diferentes fenômenos muitas vezes de forma dissimulada, inclusive em ciências que supostamente já teriam seus fundamentos muito bem compreendidos.

Atualmente, o caos é utilizado como uma ferramenta de observação de fenômenos previamente mal compreendidos do ponto de vista determinístico, tais como fenômenos epidemiológicos, turbulência em fluidos, fluxo de calor, ritmos biológicos e movimentos populacionais, sociais e econômicos. Historicamente, diversas áreas da ciência têm enfatizado o estudo de processos complexos (químicos, físicos ou biológicos) e da importância do entendimento dos mesmos no estudo dos sistemas vivos ou em movimento (vide Figura 7).

**Figura 7** – Alguns processos complexos representativos da Teoria do Caos.

**Ritmo biológico do voo da mariposa e a Turbulência causada pela asa de um avião**

Fonte: Imagens do Wikimedia Commons, acervo de conteúdo livre da Wikimédia Foundation

Um exemplo tradicional é o "Efeito Borboleta", representado no movimento do bater das asas da mariposa na Figura 7, que costuma ser explicitado pela frase "uma borboleta bate asas na China e causa um furacão na América", por mais absurdo que pareça, é a realidade no sentido de que os fenómenos climáticos são de comportamento caótico e de difícil previsibilidade. O efeito borboleta faz parte da teoria do caos, a qual encontra aplicações em diversas áreas, como engenharia, física, medicina, biologia, sociologia, entre outras aplicações, seja em áreas convencionais e não convencionais. Assim, o Efeito Borboleta encontra também espaço em qualquer sistema natural, ou seja, em qualquer sistema que seja dinâmico, complexo e adaptativo. Tudo começou com Edward Lorentz, em 1961, quando estudava um modelo simples de convecção de um fluído (parte de um estudo sobre previsibilidade do tempo meteorológico), e descobriu algo que à primeira vista poderia indicar falta de engenho de Lorentz para conseguir chegar a uma resposta mais satisfatória do que dizer: impossível de prever! Lorenz construiu um modelo matemático do modo como o ar se move na atmosfera, chegando à conclusão que pequenas variações nos valores iniciais das variáveis do seu modelo levavam a resultados muito divergentes. Esta sensibilidade às circunstâncias iniciais veio depois a ser conhecida como o efeito borboleta. Lorenz publicou as suas conclusões num trabalho seminal intitulado *Deterministic Nonperiodic Flow*, em que descreveu um sistema relativamente simples de equações que resultam num padrão de complexidade infinita, o Atractor de Lorenz.

Já a imagem da direita da Figura 7 representa a turbulência causada pelas asas de avião. Em mecânica dos fluidos, designa-se por escoamento turbulento, fluxo turbulento ou simplesmente turbulência o escoamento de um fluido em que as partículas se misturam de forma não linear, isto é, de forma caótica com turbulência e redemoinhos, em oposição ao fluxo laminar. Este tipo de fluxo é ruidoso e, no âmbito da hidráulica é definido como um fluxo no regime turbulento.

**Espaço amostral**

Espaço amostral associado a um experimento é o conjunto dos resultados possíveis desse experimento. O espaço amostral será representado por um conjunto S, cujos elementos serão denominados eventos simples. Sempre que o experimento for realizado suporemos que ocorrerá um e apenas um evento simples.

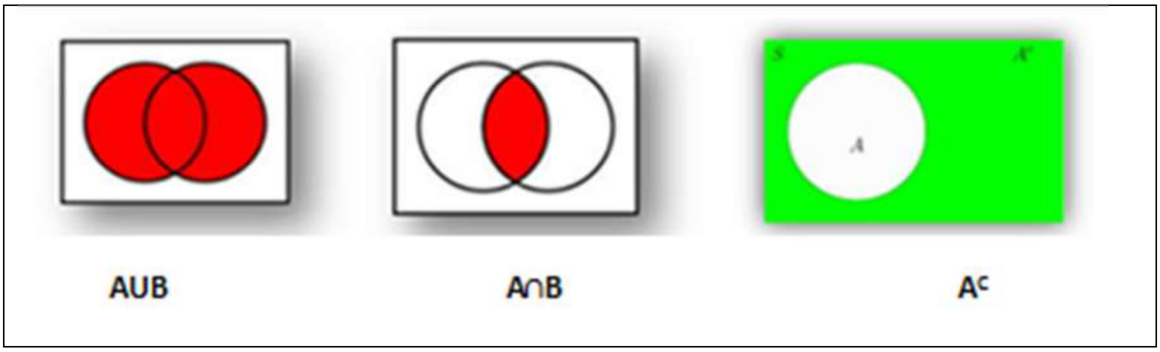
Por exemplo, no lançamento de um dado de seis faces, o espaço amostral é o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .Ou no lançamento de uma moeda, duas vezes consecutivas sobre uma superfície plana, poderá ocorrer cara $(C)$ ou coroa $(K)$ em cada uma delas, daí o espaço amostral desse experimento é $S = \{CC, CK, KC, KK\}$.

Nesse tipo de experimento o espaço amostral é finito. Mas podemos ter experimentos em que o espaço amostral não é finito, como por exemplo, o lançamento de uma moeda até que apareça cara $(C)$ pela primeira vez. Observe que, nesse caso, o espaço amostral será o conjunto $S = \{C, KC, KKC, KKKC, \ldots.\}$ , que é um conjunto infinito enumerável (que pode ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais). Ou ainda o experimento em que se observa o tempo de vida de uma lâmpada, que terá espaço amostral $S = \{x \epsilon \mathcal{R}: x \geq 0\}$, que é um conjunto infinito não enumerável, mesmo que saibamos ser quase impossível que uma lâmpada tenha um tempo de duração infinito, mas é o que devemos considerar, já que não temos definido a priori um limite máximo do tempo de duração. E se tivéssemos T como tempo máximo de duração para certo tipo de lâmpada. Ainda assim, o espaço amostral para o experimento de observar o tempo de duração de uma lâmpada de tal tipo seria $= \{x \epsilon \mathcal{R}: 0 \leq x \leq T\}$, que também é um conjunto infinito (não enumerável), embora limitado.

**Operações entre os eventos**

Um evento A é qualquer subconjunto de um espaço amostral S, logo A ⊂ S. A reunião de dois eventos A e B, denotada por AUB (em vermelho), é o evento que ocorre se pelo menos um deles ocorrer. A interseção de dois eventos, denotada por A∩B (em vermelho), é o evento que ocorre se ambos ocorrerem. O complementar de um evento A, denotado por $A^C$ (em verde), é o evento que ocorre quando A não ocorre, como indicados na Figura 8.

**Figura 8** – Representação das operações com eventos na forma de diagramas de Venn.




Fonte: elaborada pela pesquisadora

Dizemos que dois eventos são **mutuamente exclusivos** (ou excludentes) quando um não ocorre quando o outro ocorrer, daí temos que $A \cap B = \emptyset$.

Vejamos um exemplo: Considere o lançamento de um dado (não viciado) de seis faces. O espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Sejam A, B e C os seguintes eventos: A: a face superior é ímpar; B: a face superior é um número primo; C: a face superior é par. Portanto temos:

$A = \{1,3,5\}$ , $B = \{2,3,5\}$ , $C = \{2,4,6\}$, $A \cup B = \{1,2,3,5\}$ , $A \cup C = S$, $B \cup C = \{2,4,6\}$, $A \cap B = \{3,5\}$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \{2\}$, $A^c = \{2,4,6\} = C$, $B^c = \{1,4,6\}$, $C^c = \{1,3,5\} = A$. Vemos, portanto, que os eventos $A$ e $C$ são mutuamente exclusivos e ainda que, nesse caso, $A \cup C = S$, ou seja, um evento é o complementar do outro.

Estas operações podem se estender para reuniões e interseções enumeráveis de eventos. Cabe uma observação: na condução do modulo essas noções preliminares constaram da Unidade I (Apêndice A) e na Unidade II (ApêndiceA) foram feitos alguns registros de resgate histórico de probabilidades.

**Eventos equiprováveis**

Dois ou mais eventos são equiprováveis, se tiverem igual chance de ocorrer. Espaços constituídos de eventos equiprováveis são chamados de espaços equiprováveis. O lançamento de um dado não viciado ou de uma moeda honesta produzem eventos equiprováveis, embora mesmo assim seja uma idealização, já que em situações práticas dificilmente teremos eventos com a mesma chance de ocorrência, pois objetos não são perfeitos, instrumentos de medição são passíveis de erros, mesmo que ínfimos, ou ainda fenômenos e experimentos nem sempre são repetíveis exatamente da mesma maneira.

## 2.2 Definições e interpretações da probabilidade

Antes de chegarmos às definições, vamos fazer uma breve síntese histórica para contextualizar as interpretações de probabilidade que serão tratadas.

As primeiras tentativas de se atribuir cálculos probabilísticos a eventos aleatórios surgiram na Idade Média. Os jogos eram praticados há milênios, antes mesmo da era cristã, mas não há menção de cálculos confiáveis associados à chance de ocorrência de resultados dos lançamentos – em geral os resultados eram atribuídos às questões filosóficas ou religiosas. Também não se tem muita clareza de como eram feitos os cálculos dos seguros marítimos, para o caso de ocorrências incidentais em tempos mais remotos.

Entretanto, o acaso era suficientemente familiar, especialmente em conexão com jogos. Ideias primitivas de frequência relativa já estavam presentes, mas a doutrina do acaso demorou a surgir. A verdade é que o conceito científico de probabilidade não teve uma única fonte, resultou da confluência, ao longo de vários séculos e de diferentes regiões, de algumas ramificações originadas: de jogos; da coleta de fatos estatísticos; do seguro marítimo para cobertura de riscos referentes à destruição de navios e pirataria; de estudos de mortalidade decorrente de pragas; de estudos de erros em astronomia. Seu desenvolvimento se intensificou, a partir de meados do século 18, decorrente da extensão de suas aplicações, através da estatística, em áreas de crescente expansão do conhecimento, principalmente em biologia, agricultura, economia, meteorologia, psicologia e sociologia.

O ramo primitivo mais importante da probabilidade é o dos jogos de azar. Problemas matemáticos relacionados com jogos de azar foram considerados por matemáticos italianos no século XVI, Lucas Pacioli, Geronimo Cardano e Niccolo Tartaglia. Cardano foi o primeiro a deixar um manuscrito em que é exposto o conceito de leis do acaso, *Liber de ludo aleae* (Tratado de jogos de sorte). Galileu deixou um fragmento, do final desse século, que já evidencia clareza em relação à compreensão do método de cálculo de chances em jogos de dados. Seu trabalho explicita a ideia da regularidade no padrão de eventos casuais discretos que podem ser repetidos, tais como o lançamento de um dado. As bases matemáticas iniciais da probabilidade foram formuladas, no século XVII, pelos matemáticos franceses Blaise Pascal e Pierre de Fermat e pelo matemático e físico holandês Christian Huygens, inspirados por problemas referentes a jogos de azar. Essa teoria foi posteriormente desenvolvida pelo matemático suíço Jacques Bernoulli, juntamente com a teoria das permutações e combinações e o estabelecimento da hoje denominada "lei dos grandes números", que se tornou básica para a teoria da amostragem moderna. Bernoulli pode ser considerado o fundador da teoria da probabilidade como um ramo da matemática. Sua obra póstuma *Ars conjectandi* (A arte de conjeturar), de 1713, é precursora da fusão dos métodos *a priori* da probabilidade combinatória e dos métodos *a posteriori* do início da teoria de inferência estatística. Não podemos nos esquecer também das contribuições do matemático inglês de origem francesa Abraham De Moivre, com sua obra *The Doctrice of Chances*, em 1718, e do reverendo presbiterianos Thomas Bayes, responsável pelo epônimo Terorema de Bayes. A pesquisa em probabilidade efetuada pelos matemáticos do século XVIII culminou com a obra de Pierre-Simon Laplace, consolidada em *Théorie analytique des probabilités* (Teoria analítica da probabilidade), publicada em 1812, que estabeleceu as ideias que dominaram no século XIX, conhecida como **enfoque clássico de probabilidade**.

A abordagem de probabilidade originada para a solução de problemas de jogos pressupunha a igual verossimilhança dos resultados alternativos possíveis – **noção de equiprobabilidade.** A aplicação da probabilidade a problemas práticos, onde geralmente não ocorre essa simetria, apresentava dificuldades. Surgiram, então, críticas ao conceito clássico de probabilidade consolidado por Laplace, em meados do século passado.

Uma nova concepção de probabilidade decorreu da observação da regularidade das ocorrências de resultados de processos e de eventos naturais. A observação da regularidade de eventos causais discretos, tais como o lançamento de um dado e observação da face que resulta voltada para cima, já havia sido explicitada no trabalho de Galileu. A noção de que medidas em fenômenos naturais devem exibir semelhantes regularidades, que podem ser expressas matematicamente, parece ter-se originado em astronomia, em conexão com medidas de percursos de astros. Surgiu, então, a interpretação de probabilidade baseada nessa propriedade, ou seja, na estabilidade da frequência relativa da ocorrência de resultados de processos e de eventos em uma sequência de repetições ou realizações. Esse enfoque foi primeiramente formulado em uma teoria matemática por John Venn, em 1866. Uma versão mais elaborada dessa teoria foi apresentada pelo físico alemão Richard von Mises, em 1919, conhecido como **enfoque frequentista de probabilidade**.

Uma abordagem radicalmente oposta originou-se na terceira década deste século, com a concepção da teoria da probabilidade como uma teoria de graus de crença ou de certeza. São defensores dessa ideia os matemáticos e filósofos Frank Plumton Ramsey e Bruno de Finetti, que fizeram uma tentativa sistemática para basear a teoria matemática da probabilidade em noções de crença parcial. Uma abordagem também subjetiva foi adotada pelo geofísico Harold Jeffreys e pelo economista John Maynard Keynes, com a concepção de probabilidade como uma teoria de graus de crença razoável. Segundo essa teoria, formulada em sua forma mais avançada por Jeffrey em 1939, qualquer proposição tem uma probabilidade numérica mensurável. Essas ideias foram seguidas por Leonard Savage, em 1954, que se tornou o fundador de uma escola em probabilidade e estatística adepta do subjetivismo.

Vale mencionar que no final do século XIX e princípio do século XX a teoria das probabilidades tornou-se um eficaz instrumento, exato e fiável do conhecimento. Surge daí a célebre escola de San Petersburgo, com grandes nomes como Pafnuti Tchébychev, Andrei Markov e Alexander Liapounov. À escola de San Petersburgo sucedeu a escola soviética, cujo grande destaque foi Andrei Kolmogorov, que axiomatizou a teoria das probabilidades e um dos sucessos da sua abordagem foi dar uma definição rigorosa da expectância condicional.

Segundo Silva (2002)[60], embora o conceito de probabilidade faça parte natural da experiência, não há uma interpretação científica única do termo *probabilidade* aceita por todos, filósofos, estatísticos e outros cientistas. Há várias interpretações de probabilidade que têm sido propostas desde as primeiras formulações da teoria, ocorrendo divergências e críticas, mostrando que o significado de probabilidade ainda é um tema controverso em muitas discussões filosóficas. Métodos alternativos foram elaborados para fundamentar a matemática da probabilidade, a partir dessas definições. Apesar das diversas interpretações de probabilidade, os correspondentes procedimentos de cálculo alternativos aproximam-se em uma estrutura lógica comum.

Apresento agora as diferentes definições e interpretações de probabilidade que foram abordadas, mesmo que de forma implícita nas sequências de ensino aplicadas no processo formativo, objeto de pesquisa da tese. Para elaboração dessas ideias tomei como referências Silva (2002), Gnedenko (2008)[61], Dantas (2008)[62] e Rocha (2012)[63]

**Interpretação clássica de probabilidade**

A interpretação clássica da probabilidade emergiu do tratamento matemático de jogos de azar, depois sedimentado na teoria de Laplace. Por exemplo, quando é lançada uma moeda, há dois possíveis resultados: cara ou coroa. Se for presumido que esses dois resultados têm a mesma possibilidade de ocorrência – a chamada 'moeda honesta' –, então eles são igualmente prováveis. Além disso, estes dois resultados são mutuamente excludentes e como a soma das probabilidades das duas únicas possibilidades é 1, as probabilidades de ocorrer cara e de ocorrer coroa devem ser ambas iguais a 1/2. Pelo mesmo argumento, a probabilidade de resultar uma face particular no lançamento de um dado é 1/6; a probabilidade de resultar faces pares no lançamento de dados é 1/2, uma vez que este evento é a composição de três eventos simples de ocorrência das faces 2 ou 4 ou 6.

---

[60] SILVA, J. G. C. **Introdução à Probabilidade**. 1. ed. Pelotas: Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2002.

[61] GNEDENKO, B. V. A **Teoria da Probabilidade. Tradução da série de textos clássicos da American Mathematical Society.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

[62] DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: Um Curso Introdutório**. São Paulo: Edusp, 2008.

[63] ROCHA, S. H. Curso de Probabilidade e Estatística. Aula 08: Probabilidade o que é e como calcular? Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: <http://pessoal.utfpr.edu.br/heidemann/?id=4>. Acesso em: 28 out. 2012

Em todos esses processos, os resultados a priori possíveis constituem um número finito de alternativas supostas perfeitamente simétricas. A pressuposição de *igual possibilidade*, ou *igual verossimilhança*, ou *equiprobabilidade*, e de *mútua exclusividade* dos resultados simples possíveis permite o cálculo de probabilidades de eventos mais genéricos.

**Definição clássica de probabilidade**
(devida a Laplace, em 1812, na obra *Teoria analítica das probabilidades*)

Seja um espaço amostral finito S, formado por eventos simples igualmente possíveis. Seja *A* um evento de S, podendo A ser um evento simples ou decomposto em eventos simples, então a probabilidade de ocorrência de *A* é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \text{ , } com\ 0 \leq P(A) \leq 1 \text{ e onde:} \qquad (1)$$

$n(A)$ é o número de ocorrências (pontos amostrais) do evento A e $n(S)$ o números total de ocorrências (pontos amostrais) possíveis de S.

Observemos que a definição clássica de probabilidades é uma função definida na classe dos eventos, ou equivalentemente na classe de subconjuntos do espaço amostral S, satisfazendo as propriedades do seguinte lema:
Seja S um espaço amostral finito satisfazendo as condições da definição (1). Então, a probabilidade definida em (1) satisfaz:

i) $P(A) \geq 0$ , para todo $A \subset S$
ii) Se $A$ e $B$ são eventos mutuamente exclusivos, então:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
iii) $P(S) = 1$

Demonstração:

i) Como n(S) > 0 e n(A) $\geq 0$, segue que $P(A) \geq 0$
ii) Se $A$ tem n eventos simples e $B$ tem m eventos simples e como A e B são eventos mutuamente exclusivos, isto significa que não têm eventos simples em comum, logo o número de eventos de $A \cup B$ é n + m.
iii) Como o número de eventos simples de $S$ é n(S), então $P(S) = 1$

**Considerações acerca da perspectiva clássica de probabilidade**

Probabilidades determinadas pela definição clássica são denominadas *probabilidades a priori*. Ao dizermos que a probabilidade, no lançamento de uma moeda, de se obter uma cara é 1/2, é resultado puramente de um raciocínio dedutivo. Entretanto, essa abordagem clássica é limitada por algumas dificuldades, a saber:

a) A primeira delas é que a pressuposição de resultados igualmente possíveis é o mesmo que a proposição de que os resultados têm a mesma probabilidade, ou seja, baseada no conceito de probabilidade que se quer definir. Por exemplo, dizer que se uma moeda é perfeita (e seu lançamento é isento), a probabilidade de uma cara é 1/2 é dizer a mesma coisa de dois modos diferentes, mas nada é dito sobre como determinar se uma moeda particular é perfeita ou não. Jacques Bernoulli estabeleceu uma regra para as condições sob as quais resultados podem ser pronunciados corretamente como igualmente possíveis, conhecida por *princípio da razão insuficiente*, *princípio da igual distribuição da ignorância*, ou *princípio da indiferença*. Esse princípio estabelece resultados igualmente prováveis se não há razão para que um ocorra em vez do outro. Em jogos de azar, onde normalmente há concordância em relação à análise correta de resultados, esse princípio tem alguma plausibilidade. Entretanto, casos em que não há uma analogia lógica com jogos de azar e, portanto, nem sempre há concordância em relação à análise dos resultados, a confiança neste princípio torna-se dúbia. O uso seguro do princípio da equiprobabilidade está vinculado à questão de simetria das alternativas simples consideradas. Todavia, um forte argumento em defesa do principio é que a pressuposição de objetos ideais é perfeitamente aceitável, já que é um requerimento comum de teorias matemáticas – por exemplo, na geometria.

b) Outra dificuldade é a não provisão de método sistemático para encontrar a probabilidade quando se trata de eventos não equiprováveis. As alternativas de muitos eventos importantes, particularmente eventos naturais, usualmente não são igualmente possíveis e são desconhecidas. Por exemplo: Qual é a probabilidade de que um indivíduo morra em acidente de avião? Qual é a probabilidade de que chova no próximo natal? Qual é a probabilidade de um morador da cidade de São Paulo contrair o vírus H1N1 (influenza)? É desejável que questões legítimas e importantes sejam abrangidas pela teoria da probabilidade. Entretanto, a abordagem clássica da probabilidade não é aplicável nesses casos. A consideração desses problemas demanda outro tipo de estudo e de abordagem de probabilidade.

c) Uma limitação da abordagem clássica é sua restrição à situação de número finito de resultados possíveis. Em muitas situações, o número dessas alternativas é infinito. Assim, por exemplo, qual é a probabilidade de que um número extraído do conjunto dos números inteiros positivos seja par, pressupondo-se que todos os números têm a mesma possibilidade de ocorrência? Intuitivamente, a resposta a esta questão pode ser obtida pelo seguinte argumento: limitando-se a consideração aos 10 primeiros inteiros positivos, tem-se 5 números pares, de modo que a razão do número de casos favoráveis para o número de casos possíveis é 1/2; se forem considerados os 100 primeiros inteiros positivos, tem-se 50 números pares, de modo que a razão é 1/2; de modo geral, os primeiros 2n números inteiros positivos incluem n números pares, logo, a razão é n/2n =1/2; e, quando n tende para infinito, a razão permanece igual a 1/2. Esse tipo de argumento é aparentemente plausível, assim como a resposta, mas é falho: uma ordenação diferente dos números inteiros positivos pode produzir um resultado diferente, mesmo sendo um conjunto infinito enumerável. Outro exemplo: A ação é fabricar um componente e colocá-lo em teste. O evento é observar o tempo para aparecer um defeito no componente em questão. Nesse caso, o espaço amostral é infinito não enumerável $S = \{t, t \in R, t > 0\}$. Assim, abordagem clássica de probabilidade não é aplicável a essas situações.

**Interpretação de probabilidade como frequência relativa**

Sempre que tivermos um evento aleatório, queremos atribuir ao mesmo um número que reflita suas chances de ocorrência quando o experimento é realizado. Vimos anteriormente que em determinadas condições podemos atribuir a mesma chance a todos os eventos simples associados ao experimento. Contudo se o espaço amostral é infinito esta possibilidade fica afastada. Entretanto podemos aferir a probabilidade de um evento, quer seja ou não constituído de eventos simples equiprováveis, quer tenha espaço amostral finito ou infinito.

Essa outra maneira de determinar a probabilidade de um evento relaciona-se com a frequência com que o evento ocorre em relação ao número de vezes que o experimento é repetido em condições semelhantes. Consiste, então, em repetir o experimento aleatório um número n de vezes, anotando quantas vezes o evento ocorre nas n repetições do experimento.

Inicialmente, a estabilidade da frequência relativa, para um grande número de observações, foi notada em dados demográficos e em lançamentos de dados. Alguns experimentos desse tipo ficaram famosos. Nos anos 1940, um matemático sul-africano chamado John Kerrich, estava ensinando numa universidade em Copenhagen quando os alemães invadiram a Dinamarca, tendo sido feito prisioneiro durante a Segunda Guerra Mundial. Na solidão de sua cela decidiu testar esse conceito em um experimento prático, jogando uma moeda 10.000 vezes e anotando os resultados. Após 100 jogadas obteve apenas 44% de caras, mas ao chegar às 10 mil, o número já se aproximava bem mais da metade: 50,67%. Neste mesmo século, Karl Pearson – um dos fundadores da revista *Biometrika*, considerado junto com Jerzy Newman pais da Inferência Estatística – fez 24.000 lançamentos, tendo obtido uma frequência relativa de 0,5005 para caras.

No século XVIII o matemático e naturalista francês George-Louis Leclerc, Conde de Buffon, descreveu em seu *Essai d'arithmétique morale*, suplemento de sua obra *Histoire Naturelle* datada de 1777, um experimento empírico do problema de São Petersburgo[64] – um

[64] Paradoxo de São Petersburgo pode ser assim explicado: um jogador é convidado para um jogo em que lança uma moeda repetidamente e receberá, digamos 2 reais, se sair 'cara' e o prêmio dobra toda vez que sair 'cara' em sequência. O jogo termina quando sair 'coroa' pela primeira vez. Quanto este jogador pagaria pela oportunidade de disputar este jogo? As pessoas costumam achar que esta aposta não deve valer mais do que poucos reais. O paradoxo emerge porque o método de cálculo aceito (valor esperado) avalia como infinitas as perspectivas do jogador em questão, mas ninguém estaria disposto a comprar essas perspectivas por um preço moderadamente elevado.

paradoxo de jogo de azar amplamente discutido por matemáticos da época, inclusive pelos primos Nicholas e Daniel Bernoulli – na tentativa de resolver o dilema. Segundo Bennett (2003, p. 81), Buffon documentou os resultados de 2048 jogadas (lançamento da moeda) e ainda concluiu que a média de ganhos esperados por jogo era de 5 *écous* (moeda da época equivalente a cerca de 5 francos). Embora os ganhos esperados por jogo aumentem se o número de jogadas excederem as 2048, Buffon ressalta que para aumentar a média de ganhos para 10 *écous* por jogo, seria preciso jogar por 13 anos seguidos, seis horas por dia.

Os primeiros proponentes dessa *abordagem "frequentista"* sugeriram a probabilidade de um resultado específico de um processo como uma frequência relativa desse resultado "ao final de muitas realizações" do processo (como no exemplo de lançamento de moeda, a probabilidade de sair cara é 1/2, porque a frequência relativa da obtenção de cara seria aproximadamente 1/2, quando lançada um número grande de vezes). Entretanto, esse conceito vago não é satisfatório. Venn foi o primeiro a definir a probabilidade de um evento como o *valor limite* que sua frequência relativa aproxima quando o número de realizações cresce indefinidamente. A versão mais elaborada da teoria do limite da frequência foi apresentada por von Mises, que definiu a probabilidade de um evento A resultante de um processo como o limite da frequência n(A)/n do evento quando o número n de repetições do processo tende para infinito, onde n(A) é o número de ocorrências do evento A quando o evento é repetido n vezes. Embora essa definição seja aparentemente atrativa, ela é falha em decorrência da inexistência, em geral, do referido limite no sentido matemático. As definições de Venn e de von Mises basearam-se em observações empíricas referentes à estabilidade de frequências relativas em longas séries de observações aleatórias efetuadas sob condições uniformes, ou seja, na r*egularidade estatística*, que constitui a base empírica da teoria estatística.

**Definição frequentista (ou estatística) de probabilidade**
(devida a Richard von Mises, em *Probability, statistics, and truth)*

Seja $\varepsilon$ um experimento aleatório. Sob as mesmas condições teóricas, são realizados $n$ ensaios independentes do experimento $\varepsilon$, com $n$ suficientemente grande. Em cada ensaio o evento $A$ pode ou não ocorrer. Seja $n(A)$ o número de ocorrências do evento $A$. Assim:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}, \text{ com } 0 \leq P(A) \leq 1, \text{ onde:}$$

$n(A) =$ número de vezes que A ocorreu em n ensaios do experimento ε

$n =$ número total de repetições (ensaios) do experimento ε

$\frac{n(A)}{n} = fn(A)$ é a frequência relativa do evento A, em ε.

Repetindo-se o experimento um número grande de vezes, nas mesmas condições, de modo que as repetições sucessivas não dependam dos resultados anteriores, observa-se que um padrão se forma no sentido de uma estabilização, em outras palavras, a frequência relativa de ocorrência do evento A tente para um valor constante P, considerada então como a probabilidade de ocorrência do evento A.

A definição de probabilidade frequentista admite um lema análogo ao da probabilidade clássica, a saber:

A frequência relativa $f_n(A)$ definida na classe de eventos do espaço amostral $S$ satisfaz as seguintes condições:

a) Para todo evento $A$, $0 \leq f_n(A) \leq 1$
b) Se $A$ e $B$ são dois eventos mutuamente exclusivos, temos:
$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$
c) $f_n(S) = 1$

**Considerações acerca da abordagem frequentista de probabilidade**

Parece razoável supor que para um experimento com uma moeda há um número, seja p, que é a probabilidade da ocorrência de uma “cara”. Agora, se a moeda parece bem balanceada, simétrica e seus lançamentos sucessivos são efetuados de modo isento e uniforme, pode-se utilizar o conceito clássico e declarar que p é 1/2. Estabelecer p igual a 1/2 é apenas uma aproximação, já que para uma moeda particular não se pode estar seguro de que as duas alternativas possíveis – cara e coroa – são exatamente igualmente possíveis. Mas pelo exame do balanço e simetria da moeda e da isenção de seu lançamento, essa pressuposição pode parecer muito razoável. Alternativamente, poder-se-ia lançar a moeda um grande número de vezes e utilizar a frequência relativa de uma cara como uma aproximação. O lançamento de uma moeda é um exemplo de fenômeno randômico.

Em estatística, dizemos que um fenômeno é randômico se sua ocorrência é incerta em casos individuais, mas segue um padrão para um número muito grande de registros. Um fenômeno randômico expressa, portanto, um certo tipo de ordem, que emerge de um número muito grande de observações. É fácil observar que o aumento do número de registros aproxima a probabilidade de ocorrência de cara do valor apontado pela nossa intuição. Essa aproximação poderia ser ainda melhor, não fosse o fato de uma moeda usual não constituir um objeto idealmente honesto (a massa de uma face não é idêntica à da outra). Quando nos referimos à moeda ou a um dado "honesto" em problemas de probabilidade, admitimos uma situação ideal para conduzir o estudo de um fenômeno randômico. Os dados usados nos cassinos são um bom exemplo de refinamento na busca desse objeto "honesto". Nesses dados, os furos feitos para a marcação dos números são preenchidos com material da mesma densidade do dado (e cor diferente) para que não haja diferença de massa entre as seis faces. Enquanto em um modelo ideal de dado honesto a probabilidade de ocorrência de qualquer face é 16,6%, em um dado com furos, a face do número 1 (mais leve que a do número 6) tem probabilidade de 15,9% contra 17,5% do número 6, segundo dados experimentais.

A pesquisa científica, segundo Silva (2002), usualmente trata de fenômenos que se manifestam com semelhante incerteza, que impossibilita a predição exata. Por exemplo, predizer se a próxima criança nascida em certa localidade seja do sexo feminino ou masculino. Esse é um evento individualmente incerto e não pode ser predito com exatidão. Entretanto, observa-se a existência de certa regularidade ao longo de muitos nascimentos semelhante àquela do lançamento de uma moeda: digamos que o exame de registros de nascimentos dessa localidade indique cerca de 51% dos nascidos serem meninos, então, é razoável postular que a probabilidade de nascimento de menino nesta localidade seja igual a um número p e tomar 0,51 como sua aproximação. Essa ideia pode ser generalizada para fenômenos ou processos aleatórios que podem ser repetidos em condições semelhantes, mas embora as condições permaneçam semelhantes em todas as repetições, ocorre uma variação não controlável que se manifesta ao acaso ou aleatoriamente de modo que as observações são individualmente não previsíveis.

Em muitas situações as observações podem ser classificadas em certas categorias cujas frequências relativas são muito estáveis. Em ocorrendo este fato, sugere-se a postulação de um número p para cada evento particular, denominado de *probabilidade do evento*, e a aproximação de p pela frequência relativa com que as observações repetidas satisfazem o evento. Naturalmente, essa conjetura não pode ser provada nem refutada através de experiência, pois não se pode jamais efetuar uma sequência infinita de experimentos. Entretanto, ela é fortemente suportada pela experiência e constitui a base do conceito axiomático de probabilidade e do desenvolvimento da teoria matemática da probabilidade. Observe-se que, contrariamente à interpretação clássica, agora a probabilidade não é suposta conhecida *a priori*. Ela é conhecida, aproximadamente, após a realização de uma série de observações ou experimentos. Por essa razão, probabilidades determinadas por essa abordagem são denominadas *probabilidades a posteriori*. Vale ainda ressaltar que a frequência relativa e probabilidade não são sinônimas. A frequência relativa de um evento é um valor associado a um fato no passado (o evento foi realizado) e probabilidade é um valor relativo a um fato no futuro (o evento ainda não se realizou). Por isso, a relação entre incerteza e probabilidade como medida da incerteza.

Em síntese:

a) Na definição frequentista de probabilidade, a probabilidade é o limite de uma frequência relativa, isto é, a probabilidade de um evento *A* é o valor para o qual a frequência relativa de *A* converge.
b) A definição frequentista de probabilidade não é suficiente, pois pressupõe que o espaço amostral seja enumerável;
c) As frequências relativas de certos eventos observados no passado servem como referência para as estimativas do que se espera no futuro;
d) A expressão “suficientemente grande” (ou $n \to \infty$) é vaga: Quantas vezes deve-se repetir o experimento: 500, 1000, 1000000? Essa quantidade de ensaios é fixa de experimento para experimento? Em num número grande de ensaios de um experimento aleatório, a frequência relativa de um evento tende a se estabilizar. Esse valor de estabilidade é a probabilidade do evento e é independente de quem realiza o experimento. A probabilidade assim determinada, segundo Gnedenko (2008), é denominada *probabilidade na definição estatística* ou *probabilidade estatística.*

Atualmente, a definição frequentista de probabilidade, tal como a clássica, antes de serem definições formais de probabilidade, são considerada como formas de se calcular probabilidades.

**Abordagem subjetiva da probabilidade**

A abordagem clássica (*a priori*) e a abordagem frequentista (*a posteriori*) aplicam-se a fenômenos ou processos que, pelo menos conceitualmente, possam ser repetidos, sob condições mais ou menos uniformes. Por exemplo, lançamentos sucessivos de uma moeda para o caso a priori, e nascimentos sucessivos para o caso a posteriori. Entretanto, muitas situações importantes não podem ser concebidas como satisfazendo à estrutura de repetições, sob condições semelhantes. Por exemplo, pode-se querer ter respostas para questões tais como:

a) Qual é a probabilidade de que a situação da economia de nosso país esteja melhor ao fim do próximo ano?
b) Um paciente é submetido a um novo tipo de cirurgia e deseja-se saber se ele ficará bom;
c) Uma pessoa pode acreditar fortemente que ganhará na loteria, ainda que a probabilidade teórica indique o contrário.

Problemas como esses não são solucionados pela abordagem clássica ou frequentista. Entretanto, são abrangidas pela interpretação subjetiva de probabilidade e constituem parte legítima da teoria da probabilidade. As probabilidades subjetivas exprimem numericamente a intensidade com que uma pessoa acredita, isto é, a sua disposição de apostar na ocorrência ou não ocorrência de um determinado evento. Pode-se dizer que a probabilidade subjetiva se refere à chance de ocorrência atribuída a um evento por um indivíduo em particular. Esta chance pode ser bastante diferente da probabilidade subjetiva atribuída por outro indivíduo. A atribuição de probabilidades subjetivas para diversos eventos baseia-se numa combinação da experiência passada de um indivíduo, a opinião pessoal e a análise de uma situação específica. A probabilidade subjetiva é especialmente útil para se tomar decisões nas quais a probabilidade de vários eventos não pode ser determinada empiricamente. De acordo com Silva (2002), essa interpretação subjetiva pode ser formalizada:

> Em geral, se um julgamento de uma pessoa referente à verossimilhança relativa de várias combinações de resultados satisfaz certas condições de consistência, pode ser demonstrado que suas probabilidades subjetivas dos diferentes resultados possíveis podem ser determinadas de modo único. Entretanto, há duas dificuldades básicas com a interpretação subjetiva. Em primeiro lugar, parece ser humanamente inatingível o requerimento de que o julgamento de uma pessoa referente às verossimilhanças relativas de um número infinito de eventos seja completamente consistente e livre de contradições. Em segundo lugar, a interpretação subjetiva não provê base "objetiva" para dois ou mais cientistas que trabalham juntos alcançarem uma avaliação comum do estado de conhecimento em alguma área científica de interesse comum. (SILVA, 2002, p. 13)

Por outro lado, o reconhecimento da interpretação subjetiva de probabilidade enfatiza alguns dos aspectos subjetivos da ciência. Por exemplo, a avaliação particular de um cientista acerca da probabilidade de algum evento incerto deve ser, em última instância, sua própria avaliação baseada em toda a evidência que lhe é disponível. Essa avaliação pode ser baseada, em parte, na interpretação de probabilidade como frequência relativa, já que o cientista pode levar em conta a frequência relativa da ocorrência do evento em consideração ou de eventos semelhantes no passado, mas também pode ser baseada, em parte, na interpretação clássica de probabilidade, pois o cientista pode tomar em consideração o número total de eventos elementares possíveis que ele considera igualmente possíveis de ocorrer. No entanto, a assinalação final de probabilidades numéricas é responsabilidade do próprio cientista.

As concepções objetiva e subjetiva de probabilidade frequentemente são contrastadas, no entanto, não há o estabelecimento de um limite claro entre o objetivismo e o subjetivismo da probabilidade.

> Os defensores da concepção de frequência reconhecem que uma análise adequada de probabilidade requer a combinação da definição do conceito com a ideia de distribuição aleatória de eventos em uma série de ocasiões. Por outro lado, os adeptos da concepção clássica têm que recorrer a alguma forma de um princípio de indiferença para a determinação da igual possibilidade de certas alternativas elementares. Pode ser questionada a possibilidade da casualidade e da igual possibilidade serem levadas em conta de modo satisfatório sem referência aos estados de conhecimento ou ignorância. (SILVA, 2002, p. 14)

Deve-se admitir que uma consideração adequada do significado da probabilidade não pode ser feita em termos puramente objetivos. Por outro lado, a teoria da crença não implica necessariamente uma identificação de probabilidade como um fenômeno psicológico. O que se pode afirmar é que a atitude baseada em opiniões revela estimações subjetivas de probabilidade. Apesar disso, pode ser desenvolvida uma teoria matemática da probabilidade sem referência à controvérsia em torno das diferentes interpretações de probabilidade. Essa teoria é correta e pode ser aplicada de modo útil, independentemente da interpretação de probabilidade que seja usada em uma situação particular.

Andrei Kolmogorov propôs uma abordagem axiomática em que a probabilidade é definida como uma função de conjuntos que satisfaz as propriedades da frequência relativa e estende o conceito de probabilidade a situações mais gerais. A *teoria geral da probabilidade* desenvolvida por Kolmogorov incorpora a matemática da probabilidade no contexto da teoria geral de conjuntos de pontos mensuráveis, conhecida como *teoria da medida*.

**A abordagem axiomática de probabilidade**

Desde o século XVII quando apareceram as primeiras tentativas de inferências estatísticas culminando com o trabalho de Laplace já no século XIX, a Teoria da Probabilidade foi se libertando gradualmente de sua inicial dependência dos jogos de azar. Entretanto, coloca-se a questão: como será possível desenvolver esta teoria sem ter os seus conceitos básicos, tais com probabilidade, acaso ou aleatório, rigorosamente definidos? Desta forma, sendo essencial obter-se uma definição clara destas noções, ao longo do século XIX diversas obras debatem tanto as possíveis definições destes conceitos, como os limites de aplicabilidade desta ciência. Porém, a obtenção de uma definição rigorosa de alguns destes conceitos é uma tarefa delicada.

Segundo Santos (2008)[65], há ainda a acrescentar, para salientar as dificuldades sentidas nesta procura de uma definição mais geral de probabilidade, um descrédito na Teoria da Probabilidade devido à existência de inúmeros paradoxos, como os apresentados por Joseph Bertrand, em 1889, na obra *Calcul des Probabilités*. Um dos paradoxos, conhecido por

[65] SANTOS, R. F. V. S. Probabilidade Circa 1914 e a Construção de Pacheco d'Amorim. 2008. 769 p.Tese (Doutorado em Estatística e Investigação Operacional)-Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

paradoxo de Bertrand, consiste em apresentar três possibilidades distintas de resolução de um problema, qualquer uma delas rigorosamente coerente e em consonância com uma abordagem intuitiva, mas que fornecem três valores distintos para a probabilidade pretendida. Deste modo, a Teoria de Probabilidade é, nesta altura, assombrada por diversos paradoxos que ilustram a ambiguidade existente em diversas noções básicas tais como a escolha ao acaso, sendo necessária a construção de uma teoria que clarifique estes conceitos. Apesar desta depreciação na Teoria da Probabilidade, existe uma enorme motivação na procura de uma definição mais geral de probabilidade, sendo um fator determinante a crescente importância da Teoria da Probabilidade na Física, pois é nesta altura que surgem as primeiras ideias que irão dar origem, na terceira década do século XX, à Mecânica Quântica e ao paradigma da incerteza aplicado ao mundo microscópico.

Provavelmente por este motivo David Hilbert, matemático de grande notoriedade, apresentou, em 1923, uma lista de 23 problemas em aberto, consistindo um desses, o sexto, na axiomatização das áreas da Física onde a Matemática desempenha um papel predominante, figurando o Cálculo das Probabilidades e a Mecânica como as primeiras da lista. Desta forma, Hilbert desafia a comunidade matemática a procurar uma fundamentação rigorosa para a Teoria da Probabilidade a fim de que esta possa ser tratada de uma forma axiomática, como as outras áreas da Matemática, de modo a ser utilizada sem ambiguidade. Não se sabe ao certo se Hilbert, até a sua morte em 1934, tinha tido conhecimento da construção axiomática da probabilidade, feita por Kolmogorov, publicada pela primeira vez em 1933, em alemão – embora em 1925, Kolmogorov já houvesse introduzido a primeira axiomatização para a lógica intuicionista – e traduzida para o inglês em 1950, sob o título *Foundations of the Theory of Probability*. Esta axiomática baseia-se nas características das funções de conjuntos, nomeadamente na área atualmente denominada por Teoria da Medida, definindo probabilidade como uma medida em que a probabilidade do universo é unitária.

Os fundamentos de Kolmogorov (1933), baseados na Teoria da Medida, representam a primeira axiomática que resolve o sexto problema de Hilbert no que concerne à construção da Probabilidade. Embora Kolmogorov tenha tido aceite de seus pares pela generalidade, nem todos os axiomas apresentados por ele são de pacífica aceitação, nomeadamente o axioma da continuidade da medida, que não foi aceita em diversas interpretações de probabilidade, como, por exemplo, na visão apresentada por Bruno de Finetti, em 1937. Contudo, com esta axiomática, Kolmogorov consegue criar a base matemática que serve de alicerce para o desenvolvimento, sem paradoxos, da Teoria da Probabilidade. A axiomática de Kolmogorov contém as ferramentas matemáticas necessárias para o estudo da Probabilidade, mas não fundamenta uma ligação deste conceito com a realidade, isto é, com as aplicações.

> A axiomática de Kolmogorov fornece toda a estrutura matemática, mas a probabilidade é unicamente vista como um conceito matemático, uma medida, pois qualquer função que satisfaça os axiomas é uma medida de probabilidade. Assim sendo, esta construção não permite determinar as probabilidades associadas a experiências aleatórias elementares, possibilitando apenas determinar relações entre as probabilidades dos diversos acontecimentos, consoante as suas características (independência, incompatibilidade, complementaridade, entre outras). Desta forma, a axiomática de Kolmogorov permite manipular as probabilidades de vários acontecimentos, mas não determiná-las e/ou interpretá-las. Porém, Kolmogorov não ambiciona apresentar uma axiomática que explique a aplicabilidade deste conceito (Estatística), referindo na sua obra que, com este objetivo, existem outras propostas de axiomatização da probabilidade, referindo von Mises (1919) e Bernstein (1917). (SANTOS, 2008, p. 669). [tradução nossa]

Ainda segundo Santos (2008, p. 670), com base na obra de Richard von Mises, Kolmogorov expõe pequena notas sobre a ligação da probabilidade aos dados reais, provenientes de uma experiência aleatória qualquer. Estas notas estão inseridas no capítulo referente a espaços finitos, pois Kolmogorov considera os espaços infinitos unicamente como idealizações da realidade. A ligação entre a Teoria da Probabilidade e o mundo real, para Kolmogorov, deve ser feita através de uma experiência aleatória que pode ser repetida um número qualquer de vezes, sob o mesmo conjunto de condições.

> Na realidade, porém, o valor epistemológico da teoria da probabilidade é revelado apenas por teoremas sobre limite. Além disso, sem teorema de limite é impossível compreender o real conteúdo do conceito primário de todas as nossas ciências - o conceito de probabilidade. Na verdade, todo o valor epistemológico da teoria da probabilidade é baseado no seguinte: que os fenômenos aleatórios de larga escala em sua ação coletiva criam uma estrita regularidade não aleatória. (Gnedenko e Kolmogoroff, 1954, p. 1, *apud* SANTOS, 2008, p. 460). [tradução nossa]

A questão matemática proposta por Hilbert tem resposta no trabalho de Kolmogorov, mas a questão epistemológica ainda fica em discussão.

**Definição axiomática de probabilidade**

Esta definição é feita numa classe de eventos do espaço amostral que satisfaz certas propriedades e todas as operações definidas entre os eventos produzem novos eventos dessa classe (propriedade de fechamento em relação às operações)

Definição: A probabilidade é uma função definida numa classe $\mathcal{F}$ de eventos de $S$ que associa a cada evento A um número real e satisfaz as seguintes condições:

a) $P(A) \geq 0$ , para todo $A \in \mathcal{F};$

b) Se $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de eventos de $\mathcal{F},$ que são mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_n)$$

c) $P(S) = 1$

(Observe-se que a propriedade (ii) do Lema da definição clássica de probabilidade foi substituída pela condição (b) desta definição).

A definição axiomática de probabilidade é uma definição matemática, entretanto não estabelece qual valor associa ao evento de S. Para a determinação da probabilidade de um evento é necessário o estabelecimento de um modelo apropriado para o experimento aleatório sob consideração. Vale ainda observar que a definição clássica de probabilidades pode ser obtida considerando um caso particular da definição axiomática de Kolmogorov, bastando para tal considerarmos um universo finito e supormos acontecimentos elementares equiprováveis.

Cabe aqui uma consideração específica para este trabalho: embora tenhamos apresentado alguns constructos da abordagem axiomática de probabilidade, estes não foram apresentados em profundidade nas atividades desenvolvidas no processo formativo junto aos professores, tendo sido apenas apresentada a versão axiomática para dois eventos de um espaço amostral finito.

**Interpretação da probabilidade geométrica**

Outro paradoxo apresentado por Bertrand em sua obra de 1889 refere-se à extensão da definição clássica à probabilidade contínua, utilizando uma medida representativa da sua proporção geométrica (comprimento, área, volume) e definindo a probabilidade de uma região (região favorável) como sendo o quociente entre a sua medida e a medida da região total (universo) sob a hipótese de a probabilidade ser proporcional à medida e a medida do universo ser finita (interpretação geométrica de probabilidade).

Segundo Santos (2008, p. 240), nas obras contemporâneas não é frequente encontrar uma definição rigorosa de probabilidade contínua, apesar dos autores determinarem probabilidades em regiões usando uma definição análoga à definição clássica de probabilidade baseada em equiprobabilidade, ou seja, utilizando uma medida representativa da sua proporção geométrica (consoante a sua dimensão teremos o comprimento, a área ou o volume). Desta forma a probabilidade, de uma dada região A, é determinada pelo quociente entre a medida da região favorável e a medida da região possível, sob a hipótese de a probabilidade ser proporcional à medida (equipossibilidade) e a medida do universo ser finita. Esta definição é habitualmente designada por interpretação geométrica de probabilidade. Contudo, Bertrand, após apresentar a definição de probabilidade (discreta) baseada em equiprobabilidade, onde considera haver uma só condição – a equipossibilidade –, salienta o fato de esta fórmula não ser aplicável nas situações onde o número de casos possíveis é infinito. Émile Borel, ciente dos paradoxos originários desta definição aplicada em problemas de probabilidade geométrica, julga-a convencional e crê que deve ser confirmada a posteriori com os resultados de experiências, afirmando que apenas considera os problemas geométricos concretos, definidos como aqueles em que é possível determinar um método de verificação experimental dos resultados.

Já para Pacheco d'Amorim, em sua obra Elementos de Cálculo das Probabilidades, de 1914, de acordo com Santos (2008, p. 245), unicamente utilizamos a definição geométrica de probabilidade – o quociente das medidas das regiões favorável e possível – quando lançamos pontos, à sorte, diretamente numa região, pois neste caso existe equipossibilidade e, consequentemente, a probabilidade numa região é proporcional à sua medida.

**Definição geométrica de probabilidade**
(devida a B. V. Gnedenko (1912-1995), em *A teoria da Probabilidade*)

Sobre um plano, considere uma região *g* contida numa outra região *G*. Um ponto é lançado dentro de *G* aleatoriamente. Admitindo que o ponto lançado possa cair em qualquer ponto de *G*, que a probabilidade de cair numa região *g* é proporcional à área de *g* em relação à de *G*, que essa probabilidade é independente da posição que *g* ocupa em *G* e da forma de *g*, então, por definição, a probabilidade do ponto lançado estar em *g* é dada por:

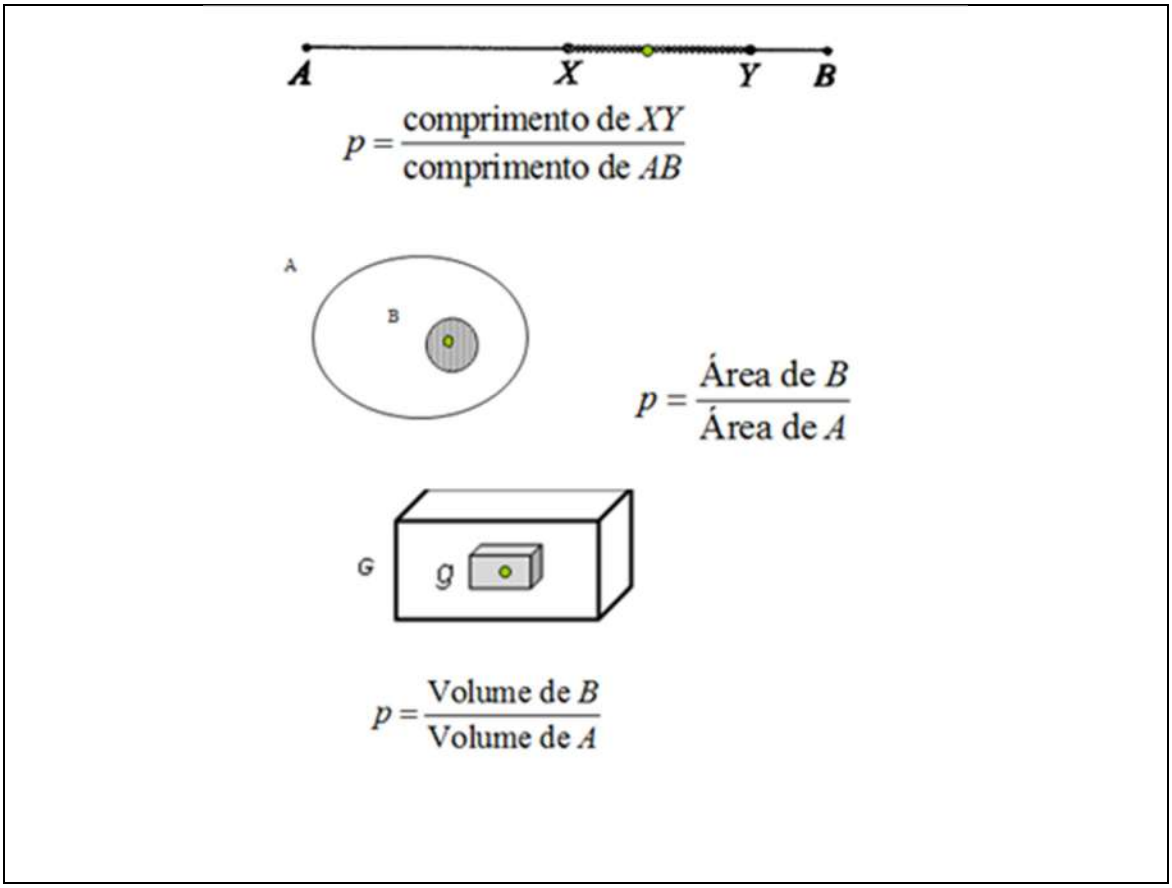
$$P(g) = \frac{\acute{a}rea(g)}{\acute{a}rea(G)}, \text{ com } 0 \leq P(g) \leq 1$$

Vale ressaltar que esta definição pode também ser adaptada, de forma similar, para medidas de comprimento e de volume, como indicado na Figura 9.

Alguns problemas de probabilidade são equivalentes à seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas. Nos modelos em questão, a probabilidade de um determinado evento se reduz à relação – ou ao seu limite, caso exista – entre medidas geométricas homogêneas, tais como comprimento, área ou volume (TUNALA, 1995, p. 16)[66]. É uma extensão do conceito de probabilidade ao acaso de experiências aleatórias nas quais os resultados possíveis constituam conjuntos contínuos, onde o espaço amostral é não enumerável. Nesta concepção de probabilidade, os espaços amostrais são descritos por figuras geométricas, são não-enumeráveis, podendo ser finitos, como no caso da região delimitada por um quadrado ou um cubo; ou infinitos como a região delimitada por duas retas.

[66] TUNALA, N. Determinação de probabilidades por métodos geométricos. **Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, v. 20, p. 16-22, 1995.

**Figura 9**- Representação da probabilidade geométrica




Fonte: material aulas com Prof. Verônica Yumi Kataoka

Kataoka, Rodrigues e Oliveira (2007) ainda tratam do **elo entre as concepções de probabilidade geométrica e frequentista** numa proposta de sequência didática desenvolvida em um mini-curso do IX Encontro Nacional de Educação Matemática-IXENEM, no qual as atividades foram tratadas em caráter experimental, utilizando uma mudança de enfoque para resolução de problemas. Assim, um problema de probabilidade resolvido no enfoque geométrico tem seu resultado interpretado e validado novamente no enfoque original de probabilidade. Dessa forma, apresenta a Probabilidade Geométrica, bem como um confronto de resultado com a Probabilidade Frequentista, num abordagem que discute a representatividade, a aleatoriedade de uma amostra e a estabilização dos processos experimentais.

**Considerações sobre definição geométrica de probabilidade**

As primeiras análises de problemas contendo Probabilidades Geométricas iniciaram-se por volta do século XVIII, baseando-se no problema da Agulha de Buffon, estudado inicialmente pelo matemático e naturalista francês George Louis Leclerc (1707-1788). A partir deste estudo, houve um grande desenvolvimento nas aplicações de probabilidades e estatística, tanto do ponto de vista acadêmico, quanto na vida cotidiana.

Apesar de Leclerc, conhecido como Conde de Buffon, ter sido um importante filósofo e biólogo francês, os matemáticos o conhecem mais por sua contribuição com a tradução para o francês do Método dos Fluxos, de Newton, e o problema da Agulha de Buffon, na Teoria da Probabilidade. Em relação a este último trabalho, Buffon propôs o método probabilístico, mencionado nos Anais da Academia de Ciências de Paris, em 1733, posteriormente publicado em 1777 em sua obra *Essai d'Arithmétique Morale*.

Neste clássico trabalho, Buffon discute graus de certeza, probabilidade, o valor moral do dinheiro, as diferentes avaliações de ganhos e perdas, além disso, propõe experiências repetidas para determinar o valor moral de um jogo. Dedica uma grande parte dos ensaios para a apresentação e discussão da aposta Petersburgo (artigos XV-XXII). Sua discussão é tão ampla que inclui quase todas as soluções atualmente conhecidas do paradoxo Petersburgo. Uma contribuição notável para o paradoxo Petersburgo é a sua determinação do valor do jogo pela experiência repetida. A partir dos resultados deste experimento, Buffon motivou a distribuição geométrica de recompensa que resulta da aplicação da lei dos grandes números.

Segundo Hey, Neugebauer e Pasca (2010, p. 249)[67], a contribuição dos dois últimos artigos do *Essai* precede a conclusão do artigo XXV que é mais matemático do que de comportamento moral. Buffon apresenta seus dois jogos mais conhecidos, Jogo dos ladrilhos e a Agulha de Buffon (artigo XXIII). A importância dessa contribuição é porque introduz a probabilidade geométrica na literatura.

[67] HEY, J. D.; NEUGEBAUER, T. M.; PASCA, C. M. Georges-Louis Lecler de Buffon's 'Essays on Moral Arithmetic'. In: OCKENFELDS, A.; SADRIEH, A. (Ed.). **The Selten School of Behavioral Economics**. Heidelberg: Springer, 2010, p. 245-282

O problema proposto por Buffon foi o seguinte:

> Eu suponho que em uma sala onde o piso é simplesmente dividido em juntas paralelas joga-se uma vara no ar, e que um dos jogadores aposta que a vara não vai cruzar qualquer das linhas paralelos no chão, e que o outro, em contraste, aposta que a vara irá cruzar algumas dessas paralelas; pergunta-se as chances desses dois jogadores. Pode-se jogar este jogo em um tabuleiro de xadrez com uma agulha de costura ou um alfinete sem cabeça. (HEY; NEUGEBAUER; PASCA, 2010, p. 277, tradução nossa).

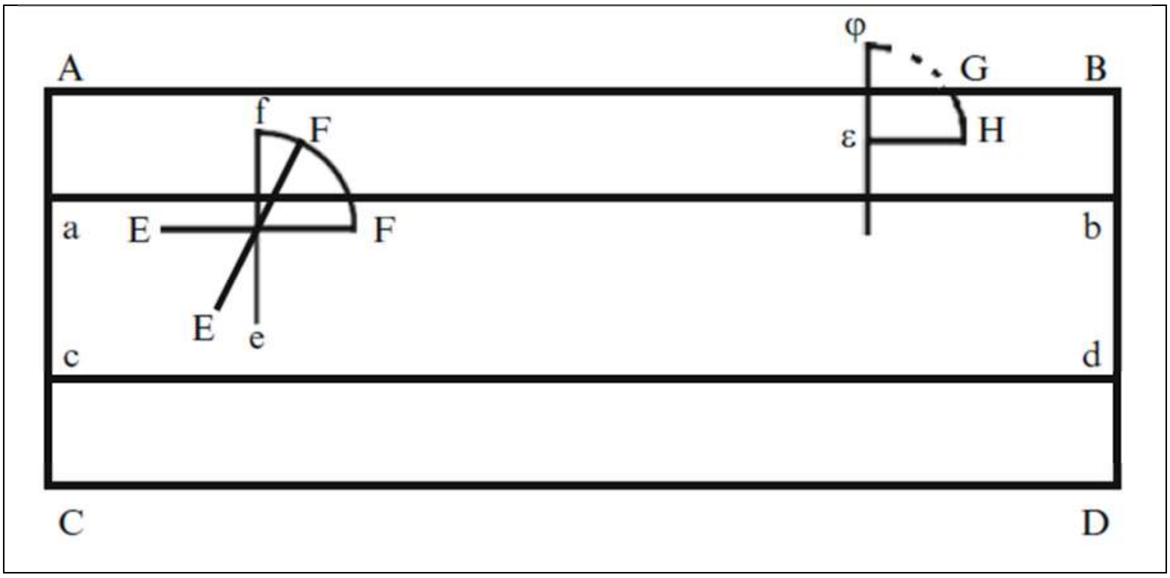
Nesse problema o interesse e calcular a probabilidade de uma agulha de comprimento $\ell$, lançada num plano marcado por linhas paralelas, tocar numa destas linhas marcadas. Essas linhas estão separadas por uma distancia $d$, com $\ell \leq d$. Mantendo constante o valore de $\ell$ e lançando a agulha, queremos saber se houve, ou não, o contato entre essa agulha e alguma das linhas. A fim de calcularmos a probabilidade de a agulha tocar uma das linhas, devemos seguir os seguintes passos: calculamos as possibilidades da agulha tocar em uma das linhas, ou seja, calculamos as possibilidades favoráveis; em seguida, calculamos as possibilidades totais de a agulha tocar ou não umas das linhas, ou seja, possibilidades totais; finalizamos calculando a probabilidade da agulha tocar uma das linhas, utilizando a definição de probabilidade (divisão dos casos favoráveis pelos casos possíveis). Um ponto interessante da solução desse problema e que, ao repetirmos o experimento um grande numero de vezes, o valor da probabilidade se aproximar de $p = \frac{\pi d}{2l}$, em que a frequência relativa é determinada pela razão entre o número de sucessos e o número de lançamentos, sendo, portanto, considerado um método de calcular uma aproximação do numero π.

Na Figura 10, a representação geométrica do problema apresentada por Buffon. Não é nossa intenção apresentar aqui a resolução matemática do problema da Agulha de Buffon, uma vez que exige cálculos mais avançados. Entretanto, é bom ressaltar que o experimento frequentista desse problema pode hoje ser realizado computacionalmente por meio de softwares simuladores de experimentos randômicos[68], propiciando uma estimativa do número π.

---

[68] Vide KATAOKA, V. Y.; UTSUMI, M. C. O Problema da Agulha de Buffon. Disponível em: <http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos/download/2186.pdf>. Acesso em: 06 dez. 2013.

**Figura 10** – Esquema da representação geométrica do problema da Agulha de Buffon




Fonte: HEY; NEUGEBAUER; PASCA, 2010, p. 278.

A definição geométrica de probabilidade, também conhecida como probabilidade geométrica, muitas vezes foi criticada por arbitrariedade na determinação das probabilidades de eventos, bem como por não determinar objetivamente a probabilidade em muitos casos que apresentavam outros resultados possíveis. Já vimos que um dos críticos da definição geométrica de probabilidades foi o matemático francês do século XIX Joseph Bertrand. Num problema conhecido como paradoxo de Bertrand, que consiste na determinação da probabilidade do comprimento de uma corda, selecionada aleatoriamente numa circunferência, ser maior que o comprimento do lado do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência, Bertrand apresentou três soluções possíveis, cada uma delas tendo resultados diferentes (1/2, 1/3 e 1/4). Entretanto, Gnedenko se contrapôs defendendo que a não unicidade da probabilidade no paradoxo de Bertrand devia-se ao fato de que as condições do problema não definiam explicitamente o que se entendia por aleatoriedade na seleção da corda na circunferência, isto é, as condições de realização do experimento não estavam claras, podendo não ser únicas. Assim, diferentes definições de "seleção aleatória de uma corda", conduziriam a diferentes maneiras de se determinar quais seriam os eventos simples equiprováveis. Consequentemente, o problema apresentaria conclusões diferentes. Atualmente, a definição geométrica de probabilidade não é considerada uma definição formal de probabilidade. Tal qual a definição clássica e a frequentista, ela é considerada como uma forma de se calcular probabilidades.

A título de informação complementar, segundo Bortolossi (2012), as conexões entre probabilidade e geometria formam a base da *estereologia*, campo interdisciplinar cujo objetivo é estudar propriedades geométricas de objetos tridimensionais usando métodos de amostragens: sondas geométricas (como pontos, retas, planos e regiões volumétricas) são "jogadas" em um objeto tridimensional de interesse. A dimensão da sonda geométrica depende do que se quer medir no objeto: para se medir o volume do objeto, as sondas são pontos; para se medir uma área no objeto, as sondas são retas; para se medir comprimentos no objeto, as sondas são planos; para se contar "pontos" no objeto, as sondas são regiões volumétricas. Em cada caso, a interseção da sonda com o que se quer medir no objeto são entidades de dimensão zero: pontos. Se as sondas são geradas aleatoriamente de forma apropriada, uma contagem destes pontos fornecerá uma estimativa para a medida que se quer realizar. São estes métodos matemáticos que permitem, através de um aparelho de raios-X, obter medidas de objetos no interior do corpo humano, medidas estas que são inacessíveis de forma direta. A informação de que os pulmões humanos tem uma superfície (de troca gasosa) equivalente a um campo de tênis foi obtida usando métodos estereológicos. Outras áreas que usam estereologia: petrografia (ramo da geologia que trata da descrição e classificação sistemática das rochas, especialmente através do exame microscópico de seções delgadas), ciência dos materiais, histologia e neuroanatomia.

**Um problema clássico de probabilidade geométrica: Problema do Encontro**

Este problema é uma adaptação da versão original, que se encontra no livro escrito pelo professor Sixto Rios (1973)[69].

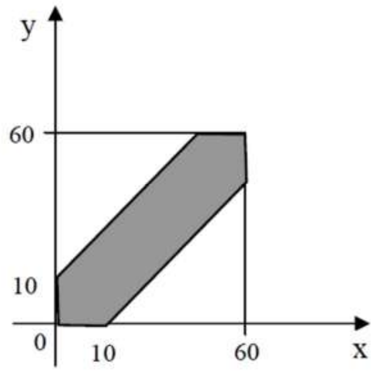
| Problema do encontro |
| --- |
| Um rapaz convida uma garota para se encontrarem num determinado bar entre 18 e 19 horas. O jovem tem fama de não ser pontual e a bela moça, advertida desse fato, aceita o convite, mas com a condição de não esperá-lo mais que 10 minutos. Ambos se despedem entendendo que esta última cláusula vale para os dois por igual. Pede-se: qual a probabilidade de que os dois jovens se encontrem efetivamente? |

A partir da proposta aceita pelos jovens pode-se supor que o par ordenado (x,y) represente o instante de chegada de ambos. Daí, este par ordenado pode ocupar qualquer ponto de um

[69] Ríos, S. *Métodos Estadísticos*, (Quinta Edición), México, Libros Mc Graw-Hill, 1973.

quadrado de lado 60, com igual probabilidade. Em termos da teoria subjacente, isto significa que o par (x,y), considerado como uma variável aleatória bidimensional, está sujeito a uma distribuição uniforme. A condição de espera máxima compactuada pelos dois jovens pode ser representada pela desigualdade $|x-y|<10$, que define uma sub-região do quadrado de lado 60, como ilustra a Figura 11, a seguir.

**Figura 11** – Representação geométrica do problema do encontro




Fonte: elaborada pela pesquisadora

A partir do problema equacionado, devemos resolvê-lo usando probabilidade geométrica, ou seja, encontrando a razão entre a área de encontro (a faixa escura) e a área total do quadrado.

Esta resolução pode ser feita de utilizando conceitos de geometria, de forma elementar:

Área $A_Q$ é área do quadrado de lado 60, $A_Q = 60^2 = 3600$ unidades de área. Pela simetria da figura, juntando os dois triângulos retângulos em branco (sem a faixa escura) obtemos um quadrado menor de lado 50, cuja área é $A_q = 50^2 = 2500$ unidades de área. Dessa forma, a área da faixa escura $A_f = A_Q - A_q = 1100$ unidades de área.

Portanto, a probabilidade procurada é a probabilidade geométrica:

$$P = \frac{A_f}{A_Q} = \frac{1100}{3600} \cong 0{,}3055$$

Logo a chance dos amigos se encontrarem é aproximadamente de 30,5%.

Na verdade, o aspecto essencial da resolução é a modelagem do problema, pois depois os cálculos ficam simples, pois resumem-se a conceitos básicos de probabilidade.

## 2.3 Noções complementares

**Propriedades da definição clássica de probabilidades**

Seja $S$ um espaço amostral qualquer e sejam $A$ e $B$ eventos de $S$. Então teremos:

i) $0 \leq P(A) \leq 1$

ii) $P(S) = 1$

iii) $P(\emptyset) = 0$

iv) $P(A^C) = 1 - P(A)$, onde $A^C$ é o evento complementar de $A$ em $S$

v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

vi) $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

É fácil verificar essas propriedades utilizando o lema (1) da definição clássica de probabilidade e as propriedades de operações entre conjuntos.

**Eventos mutuamente exclusivos**

Dois (ou mais eventos) são ditos mutuamente exclusivos (excludentes ou disjuntos) quando a ocorrência de um deles implica a não ocorrência do(s) outro(s). Desse modo, se A e B são mutuamente excludentes, então $A \cap B = \emptyset$, ou seja, não existe interseção entre eles.

**Probabilidade conjunta**

A probabilidade $P(A \cap B)$ é chamada probabilidade conjunta de dois eventos $A$ e $B$.

i) Se $A \cap B \neq \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ii) Se $A \cap B = \emptyset$, temos que $P(A \cap B) = 0$ e, portanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ e os eventos $A$ e $B$ são ditos mutuamente exclusivos (ou excludentes ou disjuntos).

**Eventos Independentes**

Dois eventos $A$ e $B$ são independentes se a ocorrência do evento $A$ não altera a probabilidade de que $B$ ocorra.

Definição: Dois eventos $A$ e $B$, de um mesmo espaço amostral (isto é, associados ao mesmo experimento aleatório), são independentes quando a probabilidade de que eles ocorram simultaneamente for igual ao produto de suas probabilidades individuais. Simbolicamente: $A$ e $B$ são independentes se, e somente se, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

É verdade que se dois eventos são mutuamente excludentes, então não são independentes, mas a recíproca não é verdadeira. (*)

Vejamos os exemplos: Considere o lançamento de um dado, daí temos $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

Exemplo 1) Sejam os eventos $A$: número par e $B$: número < 2. Assim vemos claramente que $A$ e $B$ são mutuamente excludentes e ainda temos:

$A = \{2,4,6\}$ , $B = \{1\}$ , $A \cap B = \emptyset \rightarrow p(A) = \frac{1}{2}$ , $p(B) = \frac{1}{6}$, $p(A \cap B) = 0$.

Como $p(A).p(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12} \neq 0 = p(A \cap B)$, temos que $A$ e $B$ não são independentes.

Claro que este exemplo 1 é apenas uma verificação, não a demonstração da afirmação (*), mas o exemplo 2 a seguir é exatamente um contra-exemplo da reciproca da afirmação dada, o que confirma em (*) que a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 2) Sejam os eventos $A$: número par < 6 e $B$: número primo. Temos então:

$A = \{2,4,\}$ , $B = \{2,3,5\}$, $A \cap B = \{2\} \rightarrow p(A) = \frac{1}{3}$ , $p(B) = \frac{1}{2}$ e $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Logo, como $p(A).p(B) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6} = p(A \cap B)$, então $A$ e $B$ são eventos independentes, mas não são mutuamnet excludentes, uma vez que $p(A \cap B) \neq \emptyset$.

Steinbring (1986, *apud* NABBOUT e MAURY, 2005)[70] faz distinção entre dois casos de eventos independentes que não são contraditórios, mas exigem atenção para não cometer um equívoco conceitual. No primeiro caso, refere-se à noção de "independência intuitiva",

[70] NABBOUT, M.; MAURY, S. Teachers´representations of independent events: what might an attempt to make sense hide?. **Proc. 4º Conference of European Research in Mathematics Education**. Barcelona, Espanha, 2005. Disponível em: <http://fractus.uson.mx/Papers/CERME4/Papers%20definitius/5/NabboutMaury.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2013.

em que dois eventos são considerados independentes quando "eles não são influenciados um pelo outro", noção esta utilizada quando os eventos estão associados a experiências que ocorrem sucessivamente e onde a independência é postulada. Tais eventos são também chamados de "eventos cronológicos independentes", ou de “eventos independentes a priori”, quando a situação consiste em sucessivos eventos "independentes" no sentido ingênuo ou intuitivo do termo. Já o segundo caso de independência é a "independência formal" ou "independência estocástica" de eventos, que se baseia na definição matemática formal: "dois eventos A e B são independentes $\Leftrightarrow$ P (A $\cap$ B) = P (A) x P (B)". Neste caso, não é feita nenhuma referência a quaisquer experiências, ou de qualquer cronologia, e a independência é apenas definida pela fórmula matemática. Além disso, segundo Maury (1984, *apud* NABBOT e Maury, 2005) a imprecisão da linguagem, no caso da noção intuitiva de independência, pode gerar erros do tipo o E1: "A ocorrência de uma não tem influência (ou não afeta a) B, portanto A e B são independentes"; ou do tipo E2: "Se A ocorre, B pode ocorrer ou não, e se A não ocorre, B pode ocorrer ou não, portanto, A e B são independentes". De acordo com Sanchez (2000, *apud* NABBOUT e MAURY, 2005), professores costumam apresentar as mesmas confusões que os estudantes e ele atribuiu isso à fusão entre a idéia intuitiva de independência e o conceito matemático abstrato de eventos independentes.

Na vida real, a independência entre dois fenômenos está associada à idéia intuitiva de que eles nada têm a ver um com o outro, não existindo nenhum tipo de relação entre eles . Segundo Rodrigues (2004), é natural que a descoberta da existência de algum tipo de relação entre dois fenômenos, isto é, a verificação de que eles não são independentes, seja mais importante do ponto de vista prático. Não é comum vermos em manchetes de jornal, por exemplo, que a ingestão de açúcar tem a ver com câncer de pele, mas é comum os meios de comunicação discutirem as prováveis relações entre consumo de açúcar e cárie dental ou entre o excesso de exposição à luz solar e o câncer de pele. Ainda segundo esse autor, essa idéia intuitiva explica porque os estudantes frequentemente confundem eventos independentes com eventos mutuamente exclusivos. De fato, a eventos mutuamente exclusivos correspondem subconjuntos disjuntos do espaço amostral e a associação entre a ausência de pontos comuns e a idéia intuitiva de independência, embora falsa, chega a ser compreensível. Quando se utiliza a definição, vê-se facilmente que, a não ser em casos muitos particulares (quando ao menos um dos eventos tem probabilidade zero), eventos mutuamente exclusivos nunca são independentes.

**Probabilidade condicional**

Se $A$ e $B$ são eventos de um espaço amostral $S$, com $P(B) \neq 0$, então a probabilidade condicional (ou condicionada) do evento $A$, dado que ocorreu o evento $B$, é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Da definição segue-se facilmente que se A e B são dois eventos independentes, com probabilidades positivas, teremos:

$P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$

**Produto de Probabilidades**

Da definição de probabilidade condicional tiramos o Teorema do Produto:

Sejam $A \subset S$ e $B \subset S$, dois eventos com probabilidade positiva. Então, a probabilidade $P(A \cap B)$ é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro em relação ao primeiro, ou seja:

Sendo $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ou $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, então:

$P(A \cap B) = P(B).P(A|B)$ ou $P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$

**Teorema de Bayes**

Sejam $A \subset S$ e $B \subset S$, dois eventos com probabilidade positiva. Então temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ e } P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Desde que $P(A \cap B) = P(B \cap A)$, pode-se combinar as igualdades e chegar a:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B).P(B)}{P(A)}$$

Essa fórmula relaciona as duas probabilidades condicionais.

O Teorema de Bayes é a relação anterior aplicada a uma sequência de n eventos mutuamente exclusivos $(B_i)_{i=1}^{i=n}$ , a saber, para cada i∈ $\{1,2,3, \ldots\ldots, n\}$

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i).P(B_i)}{\sum_1^n P(B_i).P(A|B_i)}$$

**Exemplos de atividades envolvendo estes conceitos**

**Exemplo 1**: Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o espaço amostral do lançamento de um dado ideal. Consideram-se e os seguintes eventos:

$A$: o resultado do lançamento do dado (face superior) é 3 ou 4 ou 6

$B$: o resultado do lançamento do dado (face superior) é par

Então temos:

$A = \{3, 4, 6\}$ , portanto $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$B = \{2, 4, 6\}$ , portanto $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{4, 6\}$, portanto $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Daí, a probabilidade do resultado ser 3, ou 4 ou 6, sabendo que é par, é calculado por $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Verificando a correlação entre os eventos $A$ e $B$:

Como $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = P(A).P(B)$ temos que os eventos $A$ e $B$ não são independentes.

Considere agora neste mesmo espaço amostral os eventos:

$C$: o resultado do lançamento é maior que 3

$D$: o resultado do lançamento é múltiplo de 3

Então temos:

$C = \{4, 5, 6\}$, portanto $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$D = \{3, 6\}$, portanto $P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$C \cap D = \{6\}$, portanto $P(C \cap D) = \frac{1}{6}$

Verificando a correlação entre os evento $C$ e $D$:

Como $P(C \cap D) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = P(C).P(D)$ temos que os eventos $C$ e $D$ são independentes.

E a probabilidade do resultado ser maior que 3, sabendo que é múltiplo de 3, é calculada por

$P(C|D) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Observe que também podemos resolver restringindo o espaço amostral à situação condicionante (sabendo que é múltiplo de 3), temos $\overline{S} = \{3,6\}$ e agora considerando $\bar{C}$: resultado maior que 3 (em relação a $\bar{S}$ ), $\bar{C} = \{6\}$ e, portanto, $P(\bar{C}) = \frac{1}{2} = P(C|D)$.

Alertamos que nem sempre é possível lançar mão dessa outra forma de resolver por não ser possível, ou ser mais difícil, restringir o espaço amostral à situação condicionante.

**Exemplo 2**: Considere as famílias com N crianças e admita que todas as distribuições de gênero (sexo) dessas crianças sejam igualmente prováveis. Seja A o evento "existem crianças de ambos os sexos" e B o evento "existe no máximo uma menina". Mostre que no conjunto das famílias com 3 crianças os eventos A e B são independentes, mas não o são em famílias com 4 crianças.

Caso 1: $S = \{FFF, FFM, FMM, MMM\}$ é o espaço amostral das famílias com 3 crianças. Observe que os eventos são equiprováveis e a ordem não importa, pois o que está em questão são todas as possibilidades de gênero destas 3 crianças, sem falar em ordem de idade ou nascimento. Assim também consideramos os eventos, pois são subconjuntos do espaço amostral: $A = \{FMM, FFM\}$ e $B = \{FMM, MMM\}$

Logo, $A \cap B = \{FMM\}$ e as probabilidades são: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Portanto, $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A).P(B)$, o que implica que $A$ e $B$ são eventos independentes.

Caso 2: $S = \{FFFF, FFFM, FFMM, FMMM, MMMM\}$ é o espaço amostral de famílias com 4 crianças, nas condições propostas no enunciado.

Temos $A = \{FFFM, FFMM, FMMM\}$ , $B = \{FMMM, MMMM\}$ e $A \cap B = \{FMMM\}$.

Daí, $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. Temos, portanto, que:

$P(A \cap B) = \frac{1}{5} \neq \frac{3}{5}.\frac{2}{5} = \frac{6}{25} = P(A).P(B)$, logo, $A$ e $B$ não são eventos independentes.

Obs: Este exemplo foi extraído e adaptado do artigo Eventos Independentes, de Flávio Wagner Rodrigues (BRASIL, 2004, p. 183)[71].

Nesses dois exemplos podemos verificar a ocorrência de eventos dependentes e eventos independentes. É claro que o fato de dois eventos serem ou não independentes é determinado pelo espaço amostral e o exemplo 2 mostra bem como a estrutura do espaço amostral afeta as relações de dependência.

Exemplo 3: Em um centro médico, 780 pessoas foram observadas. A Tabela 3 a seguir mostra informações relativas a idade e condição de infarto.

Tabela 3 – dados relativos a idade e condição de infarto

| Condição cardíaca | Idade ≤55 anos | Idade > 55 anos | Total |
|---|---|---|---|
| Teve infarto | 29 | 75 | 104 |
| Não teve infarto | 401 | 275 | 676 |
| Total | 430 | 350 | 780 |

Fonte: notas de aula da Profª Verônica Yumi Kataoka[72].

Se escolhermos ao acaso uma dessas pessoas, responda:

i) Qual a probabilidade que tenha sofrido um infarto?
ii) Qual a probabilidade que tenha mais de 55 anos e tenha sofrido um infarto?
iii) Sabendo que a pessoa escolhida tem mais de 55 anos, qual é a probabilidade que tenha sofrido um infarto?
iv) Sabendo que a pessoa escolhida sofreu um infarto, qual é a probabilidade que tenha mais de 55 anos?
v) Sabendo que não sofreu infarto, qual é a probabilidade de ter 55 anos ou menos?

A resolução pode ser feita analisando os dados na respectiva tabela de dupla entrada. Para tal vamos denominar os eventos: $A$: sofreu ataque cardíaco; $\bar{A}$: não sofreu ataque cardíaco; $B$: tem idade $\leq$ 55 anos; $\bar{B}$: tem idade $>$ 55 anos. (observar que $A$ e $\bar{A}$ são eventos complementares, assim como $B$e $\bar{B}$).

i) $P(A) = \frac{104}{780} \cong 0{,}133$ (análise direta da tabela)

ii) $P(\bar{B} \cap A) = \frac{75}{780} \cong 0{,}096$ (análise direta da tabela)

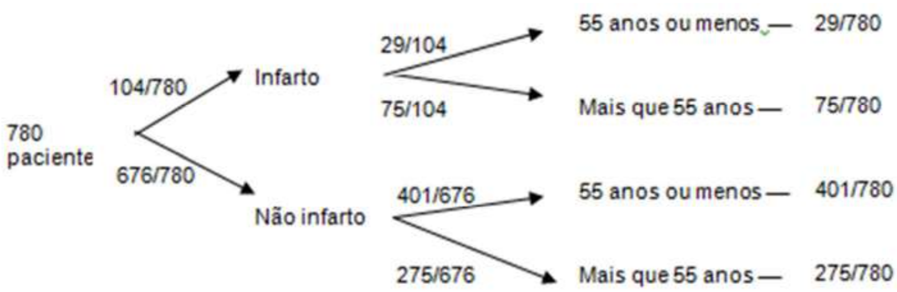
[71] BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Coleção Explorando o Ensino – Matemática, v. 3. Brasília: Ministério da Educação-Secretaria de Educação Básica, 2004, 48 p.
[72] Instrumento adaptado de Estrada e Díaz (2006), Díaz e La Fuente (2007) e Kataoka et al (2008).

iii) $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{75}{780}}{\frac{350}{780}} = \frac{75}{350} \cong 0{,}214$ (análise da tabela e regra de Bayes)

iv) $P(\bar{B}|A) = \frac{P(A|\bar{B}).P(\bar{B})}{P(A)} = \frac{\left(\frac{75}{350}\right).\left(\frac{350}{780}\right)}{\frac{104}{780}} = \frac{\frac{75}{780}}{\frac{104}{780}} = \frac{75}{104} \cong 0{,}721$ (Regra de Bayes)

v)$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{401}{780}}{\frac{676}{780}} = \frac{401}{676} \cong 0{,}593$ (análise da tabela e regra de Bayes)

A questão também pode ser resolvida utilizando o diagrama da árvore, como se segue.




Entretanto, nesta configuração o que se analisa são as relações colocadas sobre as ‘setas’ que saem dos ‘nós’ do diagrama da árvore, a saber:

No item (i) a resposta encontra-se na relação indicada na primeira seta superior à esquerda (primeiro nó); no item (ii), a relação procurada é o produto da indicada na seta superior do primeiro nó e na segunda seta (à direita) do segundo nó; no item (iii) é a razão entre “os que têm mais de 55 anos e sofreram infarto” (segunda seta do primeiro nó à direita) e “os que têm mais de 55 anos” (soma das relações indicadas nas segunda e quarta setas dos nós à direita); no item (iv) a relação é a razão entre “os que têm mais de 55 anos e sofreram infarto” (indicação na segunda seta do nó à esquerda) e “os que sofreram infarto” (indicação na primeiro seta do nó à direita), no item (v) é a relação indicada na terceira seta do segundo nó à direita .

Como podemos ver, neste caso, a resolução pelo diagrama da árvore fica simples para os itens (i) e (v), mas mais complexa para os demais, por envolver relações entre os dados indicados no diagrama. O diagrama da árvore pode também ser montado de forma inversa, isto é, o primeiro nó à esquerda originando as setas indicativas dos eventos B e $\bar{B}$. Claro que em outras situações, dependendo do que está sendo solicitado, o diagrama da árvore pode ser um facilitador para a resolução. O exemplo 3 foi apresentado por ser um tipo de exercício utilizado em diversas pesquisas, como na investigação de Díaz (2009, p. 109)[73] para avaliar a confusão entre a probabilidade condicionada e conjunta, anteriormente já apontada por Tversky e Kahneman, propôs esta atividade a 414 alunos do primeiro ano do curso de psicologia. Os resultados obtidos não apontam grandes dificuldades no cálculo da probabilidade simples (item i), entretanto a situação se inverte para os demais itens, onde a percentagem de respostas não certas é de cerca de 40%, sendo o principal erro a confusão entre a probabilidade condicionada e a conjunta, resultados similares ao de outras pesquisas, como Díaz e de la Fuente (2005) e Estrada e Díaz (2006)[74] realizada, respectivamente, com alunos do curso secundário e futuros professores. Os principais erros são relativos à probabilidade condicional e probabilidade conjunta.

**Observações acerca de dificuldades na compreensão desses conceitos**:

Vimos que o conceito de independência pode ser deduzido, matematicamente, da regra do produto mediante a definição: $A$ e $B$ são independentes se, e somente se, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. De acordo com Díaz e de la Fuente (2005), intuitivamente o conceito de independência também se relaciona com a probabilidade condicional, uma vez que dois eventos são independentes se a probabilidade de um não mudar ao ser condicionado a outro – esta é a definição intuitiva, *a priori*, segundo Maury (1986, *apud* DÍAZ e LA FUENTE, 2005). As autoras afirmam que estas definições não causam dificuldade para compreensão, do ponto de vista matemático, já que não requerem cálculos complexos. Entretanto, do ponto de vista didático e psicológico são mais difíceis, especialmente quando aplicadas à resolução de problemas e tomadas de decisão. Em muitos casos, é complicado decidir se os eventos reais são ou não independentes, por exemplo, estabelecer a relação entre fumar e desenvolver um câncer, que pode exigir anos de pesquisa e até ter um resultado inconclusivo.

Entre as dificuldades encontradas, podemos destacar: interpretação não probabilística do enunciado, fazendo uso somente das frequências absolutas, não das porcentagens; não

[73] DÍAZ, C. Sesgos en probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. In: FERNANDES, J. A.; VISEU, F.; MARTINHO, M. H.; CORREA, P. F. (Orgs.). Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola, 2009, p. 100-116.

[74] ESTRADA, A., DÍAZ, C.; DE LA FUENTE, I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. **X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática**. Huesca, 2006.

restringir, quando possível, o espaço amostral para calcular as probabilidades, ou restringir e não relacionar corretamente, o que demonstra pouca compreensão da ideia de condicionamento; confusão entre probabilidade conjunta e probabilidade condicional; crer que eventos independentes são o mesmo que eventos excludentes.

As dificuldades encontradas, não são exclusivas de alunos, mas detectadas também em pesquisas com professores, podendo ser caracterizados pelo nexo de causalidade, ponto de vista psicológico e diagnóstico, condicionamento e temporalidade.

Nexo de causalidade é um conceito científico, filosófico e psicológico complexo. Por outro lado, também é um conceito intuitivamente compreendido e aceito pelas pessoas, uma vez que construímos o nosso conhecimento do mundo com base em relações de causa e efeito entre eventos diferentes.

Ainda segundo Díaz e La Fuente, do ponto de vista da probabilidade, se um evento A é a causa estrita do evento B, se A acontece, B vai acontecer, então $P(B|A)=1$ . A relação causal estrita é difícil encontrar no mundo real, quando falamos de causa no mundo real é causa débil, quando a ocorrência de A muda com a probabilidade de ocorrência de B. Isto é, quando $P(B|A)$ é diferente de $P(B)$, porque a relação causal implica um tipo de dependência estatística entre os eventos envolvidos. No entanto, a recíproca não é verdadeira, uma vez que dois eventos podem ser estatisticamente dependentes, sem que um deles seja causa do outro. Por exemplo, é um fato conhecido que os países com maior expectativa de vida tem uma taxa de natalidade mais baixa, portanto, há uma correlação inversa entre a expectativa de vida e a taxa de natalidade, mas isso não implica que a taxa de natalidade é por causa da esperança de vida. Por outro lado, aumentar a taxa de natalidade de um país não afeta automaticamente a expectativa de vida de seus habitantes. A existência de uma relação condicional
indica que uma relação causal é possível, mas não assegurada. A associação estatística entre as variáveis pode ser devido a outras variáveis intervenientes ou até mesmo ser espúria e não implicar relação causal.

Do ponto de vista psicológico, a pessoa que avalia a probabilidade condicional $P(A|B)$ pode perceber relações muito diferentes entre A (evento condicionado) e B (evento condicionante), dependendo do contexto:

i) Se no contexto se percebe que *B* (evento condicionante) é uma causa de *A*, a pessoa estabelecerá uma relação causal entre *A e B*.

ii) Se no contexto se percebe *A* como uma causa de *B*, a pessoa estabelecerá uma relação diagnóstica entre *A* e *B*.

Mesmo que matematicamente os enunciados sejam equivalentes, do ponto de vista psicológico não são percebidos como idênticos pelas pessoas. Um efeito muito estudado é a crença de que as relações causais são mais fortes do que as diagnósticas. Em suas pesquisas, Tversky e Kahneman (1982) encontraram pessoas que acham mais provável que uma filha tenha olhos azuis se sua mãe tiver olhos azuis, do que uma mãe tenha olhos azuis, se sua filha tem olhos azuis, e menos da metade dos participantes do estudo responderam corretamente que ambos os eventos são igualmente prováveis. Tversky e Kahneman, como vimos anteriormente, explicam este comportamento pela existência de um viés de causalidade, quando as pessoas são confrontadas com tarefas relacionadas à probabilidade condicional.

A relação de causalidade muitas vezes se associa à sequência temporal. Pesquisas realizadas por Falk (1986)[75] concluem que alunos apresentam problemas com o conceito de condicionalidade quando invertem a ordem temporal em eventos que ocorrem de forma natural. Percebe-se que há um mecanismo implícito que envolve a confusão entre condicionado e causalidade. Na concepção cronológica estudantes interpretam a probabildade condicional P(A|B) como uma relação temporal em que o evento condicionante B sempre precede o evento A. Na concepção cronológica intrepretam a probabilidade condicional P(A|B) como uma relação causal implícita em que o evento condionante B é a causa e o evento A, a consequência. Falk ainda identifica que muitos estudantes não discriminam adequadamente as direções da probabilidade condicional, ao que denomina de falácia da condicional transpostas (como vimos no caso do exemplo do teste diagnóstico). Como podemos ver, os constructos de probabilidades apresentam certas dificuldades de compreensão por amalgamarem diversas dimensões de estruturas

[75] FALK, R. Conditional Probabilities: insights and difficulties. In: DAVIDSON, R.; SWIFT, J. (Eds), **Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics -ICOTS 2**, 1986. Victoria, Canada: International Statistical Institute, 1986, p. 292-297.

cognitivas, que são construidas ao longo da vida das pessoas, muitas em nível intuitivo, portanto, não necessariamente racionais, dificultando a reflexão metacognitiva.

Cabe uma observação: na condução do modulo de aplicação da pesquisa a maioria desses constructos foram trabalhados, de forma bastante simplificada, sem a profundidade com que aqui foram expostos. As noções preliminares constaram da Unidade I (Apêndice A), na Unidade II (Apêndice B) foram feitos alguns registros de resgate histórico de probabilidades. Nas sequencias de ensino foram trabalhadas e discutidas a resolução de atividades, constantes nas Listas de Exercícios (Apêndice C).

No capítulo seguinte apresentamos o contexto que provocou o movimento em prol da inclusão do ensino de estatística e probabilidade no currículo das escolas, culminando com a formação de grupos de pesquisadores de diversas áreas, envolvidas com esse campo de conhecimento, e a criação da área de Edução Estatística, voltada mais especificamente para os estudos encolvendo processos de ensino e aprendizagem da Estatística e da Probabilidade.

# 3 A Educação Estatística

> A teoria das probabilidades tornou-se tão essencial em todos os ramos da ciência, não só nas ciências físicas, mas também nas ciências biológicas e sociais, que se pode prever com alguma segurança que desempenhará um papel cada vez mais importante no ensino da matemática nos primeiros anos de escolaridade. (Martin Gardner, 2008, p. 129)[76].

Neste capítulo abordamos a importância da Educação Estatística no mundo moderno, diante das novas exigências de leitura dos códigos e linguagens nos meios de comunicação e no cotidiano das organizações. Enfatiza-se também a necessidade dos sistemas escolares valorizarem o ensino de estatística e probabilidade como um fator complementar da cidadania plena e, principalmente, a importância de se trabalhar o ensino dessa temática na preparação de jovens para o mundo do trabalho.

## 3.1 Aplicações da Probabilidade e Estatística

No período que vai dos primeiros estudos matemáticos de probabilidades até a metade do século passado, como pudemos ver em capítulo anterior, surgiram várias aplicações da Teoria da Probabilidade, aplicações chamadas **clássicas**[77], como: os cálculos atuariais, especialmente os associados aos seguros de vida; os estudos demográficos e, em especial, os estudos de incidência de doenças infecciosas e o efeito da vacinação (um exemplo de grande repercussão na época foi o da varíola); a construção das loterias nacionais e o estudo dos jogos de azar (carteados, roleta, lotos, etc.).

O surgimento das **modernas** aplicações da Teoria da Probabilidade, no entanto, vem confirmar e demonstrar a enorme importância teórica e prática das ideias probabilistas e estender seu uso a uma enorme gama de campos profissionais e das ciências, até mesmo a muitas atividades do cotidiano do viver atual. Dentre as modernas aplicações podemos citar: a teoria dos erros experimentais, as leis de Maxwell, a mecânica quântica (física e química),

---

76 GARDNER, M. Ah! Apanhei-te! (Paradoxos de Pensar e Chorar mais...). **Colecção Biblioteca Desafios Matemáticos**. Espanha: RBA Coleccionables, 2008.

77 Não confundir com abordagem clássica de probabilidade, mas como aplicações que vieram se consolidando junto à evolução conhecimento estatístico e probabilístico até o século passado.

o controle da qualidade industrial (engenharia), a engenharia dos recursos hídricos (incluindo a componente de hidrologia), a genética (biologia), a psicologia cognitiva e comportamental (psicologia), os métodos quantitativos e experimentais (técnicas analíticas) usados em ciência política, antropologia, política social e sociologia, as pesquisa de mercado (marketing), dentre outros.

As aplicações mais recentes das probabilidades na Engenharia podem ser sintetizadas em (*)[78]: Teoria da Filas, Teoria da Informação e Teoria do Risco.

- **Teoria das Filas:** busca calcular a quantidade de recursos e a maneira de disponibilizá-los para que uma fila de solicitação de serviços seja atendida, com investimento mínimo de recursos e tempo mínimo de espera por parte dos clientes da fila. Exemplos de problemas de filas: determinar o número de caixas num supermercado, determinar o número de pistas num aeroporto, determinar a quantidade de equipamento telefônico necessário para atender uma área geográfica, determinar a quantidade de mecânicos e boxes para atender os serviços de uma grande concessionária de automóveis, tudo isso a partir de projeções probabilistas da demanda. A origem da Teoria das Filas ocorreu na Telefonia.
- **Teoria da Informação:** partindo de considerações probabilísticas, essa teoria desenvolveu uma medida da quantidade de informação em mensagens. Usando essa medida, a teoria estuda maneiras de codificar, transmitir e decodificar as mensagens que são transmitidas pelos sistemas de comunicação: TV, rádio, telefonia, satélites, etc. Os principais obstáculos a vencer são a existência de ruídos aleatórios, produzidos pelas componentes dos sistemas de comunicação e por interferências, e a existência de uma capacidade limite de todo canal de comunicação. As bases dessa teoria foram estabelecidas por Claude Shannon c. 1950.
- **Teoria do Risco:** trata de problemas envolvendo decisões alternativas e cujas consequências só podem ser avaliadas probabilisticamente. Uma situação importante, por exemplo, é o estudo das panes em sistemas de engenharia complexos, como redes de distribuição de energia elétrica, redes telefônicas, redes

[78] Fonte: http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2.html.

de computadores, etc. Tipicamente, deseja-se maximizar a duração do funcionamento normal do sistema a um custo mínimo de investimento em equipamento. O risco, geralmente definido como medida de incerteza, representa a possibilidade de um projeto não ser realizado segundo o planejamento inicial, uma vez que os riscos são eventos cujas consequências têm impacto sobre os resultados de um projeto. O que se procura numa situação de incerteza é estimar a distribuição de probabilidades para um evento futuro, usando os conhecimentos acumulados pelo exame de resultados de situações análogas ocorridas no passado. Portanto, para aumentar as chances de sucesso é fundamental fazer uma avaliação dos riscos que envolvem um projeto. Uma das técnicas prevê que os riscos sejam classificados segundo critério a qualitativos tendo por base duas dimensões, probabilidade do risco (que se refere a um risco específico) e consequência do risco (tamanho do risco), que combinadas produzem uma matriz de classificação do risco, necessária para análise visando tomada de decisão.

Quanto à aplicações de probabilidades na Economia podemos dizer que, ao estudar os suprimentos e demanda, um economista deve efetivamente descrever suas observações para extrair conclusões úteis, a partir delas, e ser capaz de dividi-las com o resto do mundo, expressando essas ideias e relações de uma maneira mais precisa e objetiva possível. Portanto, economistas se voltam para a estatística para descrever precisamente as observações econômicas. Por exemplo, um estudo pode evidenciar que uma política do governo eleva os preços de determinada safra em certo percentual, o que não é somente uma observação estatística, mas envolve diretamente a expressão de uma probabilidade. O uso de probabilidades na economia agrícola[79] permite colocar números concretos no lugar de ideias gerais de quão provável algo está para acontecer no futuro (tipicamente baseado em quão frequentemente o evento aconteceu no passado).

Probabilidade é, portanto, utilizada como uma medida de risco, particularmente o risco de mudança dos preços de mercado. Também pode ser usada como medida de probabilidade de certos comportamentos humanos afetarem um resultado econômico, ou para conduzir

[79] Informações disponíveis no site: http://www.ehow.com.br/quais-implicacoes-probabilidade-economia-agricola-info_35586/. Acesso em 03 jun. 2013.

uma "análise de caminho" estocástico que pode medir quantitativamente resultados potenciais em um sistema constantemente submetido a mudanças aleatórias. Um bom exemplo disto é o efeito nos preços do petróleo da probabilidade percebida de qualquer conflito mais abrangente que contagia a economia como um todo. Uma estimativa feita por um comerciante de *commodities* acerca de um conflito ser mais (ou menos) provável leva a um aumento (ou diminuição) de preços e sinaliza a outros aquela opinião. Da mesma forma, as probabilidades não são estimadas de forma independente nem, necessariamente, racional. A teoria de finança comportamental surgiu para descrever o efeito de tal pensamento em grupo (*groupthink*) na definição de preços, política, paz e conflito.

Outra aplicação importante da teoria das probabilidades no dia a dia é a teoria da confiabilidade. No desenvolvimento de muitos produtos de consumo, tais como automóveis e eletro - eletrônicos, essa teoria é utilizada com o intuito de se reduzir a probabilidade de falha que, por sua vez, está estritamente relacionada à garantia do produto. Vale também mencionar a Teoria dos Jogos, rigorosamente baseada na teoria das probabilidades, com bons exemplos de aplicação, desde à Guerra Fria até à doutrina de destruição mútua assegurada[80].

No que diz respeito às probabilidades na Estatística, vimos que a História registra censos para fins de alistamento militar e coleta de impostos há cerca de 4 mil anos e, por longo tempo, entendia-se por estatística o trabalho de exibição e síntese dos dados coletados pelo censo, ou apenas uma Estatística Descritiva, que não envolvia um trabalho probabilístico, uma vez que os objetos do universo envolvido (a população) eram observados ou medidos. O primeiro a estender os resultados de uma amostra para todo o universo, a partir de análise probabilística, foi Adolphe Quételet (1796-1974). Após este trabalho surgiu a ideia de dar um embasamento mais rigoroso para o método científico, partido de uma fundamentação probabilista para etapas da coleta e análise indutiva de dados científicos,

[80] **Destruição mútua assegurada** (*mutual assured destruction*, abreviado *MAD – loucura*) — é uma doutrina de estratégia militar em que o uso maciço de armas nucleares por um dos lados iria efetivamente resultar na destruição de ambos, atacante e defensor. É baseada na teoria da intimidação, através da qual o desenvolvimento de armas cada vez mais poderosas é essencial para impedir que o inimigo use as mesmas armas. A estratégia é efetivamente uma forma do Equilíbrio de Nash, onde ambos os lados estão tentando evitar a pior das consequências — a aniquilação nuclear.

concepção essencial que atingiu um nível prático no início do século XX e desenvolveu-se em quatro grandes frentes: inferência estatística, delineamento de experimentos científicos, correlação entre variáveis e decisão estatística. Das leituras realizadas em livros e artigos e no site[81] posso sintetizar:

A **inferência estatística** estuda técnicas que permitem quantificar probabilisticamente as incertezas envolvidas ao induzir para um universo as observações feitas numa amostra do mesmo. Jerzy Neyman e Karl Pearson são considerados os pais da Inferência Estatística, formulada em vários artigos escritos até 1930.

O **delineamento de experimentos científicos** trata das precauções que o cientista deve tomar antes de iniciar suas observações ou medições, de modo a evitar possíveis vieses e garantir maior confiabilidade nos objetivos pretendidos. O pai dessas técnicas é Ronald Aylmer Fisher que, ao trabalhar na seleção genética de plantas agrícolas, desenvolveu imensa quantidade de resultados básicos sobre delineamento de experimentos e os divulgou, com grande sucesso, em dois livros históricos: *Statistical Methods for Research Workers*, 1925, e *The Design of Experiments*, publicado em 1935.

**Correlação entre variáveis** trata, como o nome diz, de uma análise que permite correlacionar as variáveis, sob determinadas premissas que forem observáveis. Em outras palavras, se o estatístico ou cientista puder afirmar que duas ou mais variáveis são correlacionadas, ele pode usar uma série de técnicas (chamadas análise de regressão) para expressar os valores de uma das variáveis em termos das outras, dentro de uma margem de erro que ele poderá estimar probabilisticamente. O pai da ideia de correlação foi o inglês Francis Galton (1822-1911), que no final do século passado a usou numa série de estudos de hereditariedade motivados pela Teoria da Evolução de Darwin. Foi o primeiro a usar os termos correlação e regressão. A base matemática do trabalho de Galton era precária, coube então a seu aluno, Karl Pearson, dar uma fundamentação mais matemática para a

[81] PORT FERREIRA, J. F. O desenvolvimento das aplicações em probabilidade. Disponívei em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2c2.html>. Acesso em: 10 maio 2013.

correlação e introduzir técnicas hoje básicas, como coeficiente de correlação, medida da qualidade da regressão via a distribuição probabilista chi-quadrado, etc.

A **Decisão Estatística** nos diz que, de posse de um modelo probabilístico e de um conjunto de dados, é necessário tomar decisões quanto à validade do modelo dada a evidência presente nos dados. Para isso a Estatística fornece uma série de técnicas na forma de Testes de Hipóteses que permitem tomar decisões de forma controlada.

Em suma, é razoável pensar que a descoberta de métodos rigorosos para estimar e combinar probabilidades tem tido um impacto profundo na sociedade moderna. Assim, pode ser de extrema importância para muitos cidadãos compreender como estimativas de chance e probabilidades são feitas e como elas contribuem para reputações e decisões, especialmente em uma democracia. Exemplos como estes representam um manancial para a motivação e introdução ao estudo de fenômenos aleatórios.

Cabe, entretanto, registrar um alerta sobre usos inadequados ou descontextualizados de informações estatísticas, notadamente por parte da mídia, que exerce um papel crucial como formadora de opinião. Pesquisas de opinião, muito em voga atualmente, quando divulgados apenas uma síntese dos resultados podem induzir inferências errôneas ou equivocadas, se desprezada sua margem de erro e, principalmente, se houver conflito de interesses ou forem intencionalmente manipuladas, o que pode ocorrer, por exemplo, em pesquisas de mercado, em pesquisas eleitorais, em pesquisas da área farmacêutica ou mesmo nas áreas científica e acadêmica[82].

---

[82] Podemos constatar diversos casos exemplares, de concepções equivocadas, informações errôneas ou até mal-intencionadas, ocorridos em várias áreas nos livros: (1) Besson, J-L. (Org.) **A ilusão das estatísticas**. São Paulo: Editora UNESP, 1995; (2) Crossen, C. **O fundo falso das pesquisas: a ciência das verdades torcidas**. Rio de Janeiro: Revan, 1996; (3) SEIFE, C. **Os números (não) mentem: como a matemática pode ser usada para enganar você**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012; (4) Kahneman, D. **Rápido e Devagar: duas formas de pensar**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2012. Este último, uma obra que reúne 30 anos de trabalho dos renomados psicólogos israelenses, Daniel Kahneman e Amos Tversky, que culminou com a outorga do Nobel de Economia ao primeiro em 2002.

## 3.2 O Movimento para inclusão da Estatística e Probabilidade nos currículos escolares.

Nos últimos anos, constata-se um crescimento das investigações no campo da estocástica. O reconhecimento da incerteza como uma característica da realidade tem impulsionado pesquisas em diversas áreas tanto do desenvolvimento do indivíduo como do seu entorno social. Segundo Arno Bayer *et al*[83] (2004), em 1948 ocorreu a primeira mesa redonda sobre ensino de Estatística. A partir daí houve um crescente interesse deste assunto em várias comunidades científicas no mundo todo. A educação estatística surgiu da necessidade de adaptação às propostas da UNESCO (*United Nations Educational, Scientific and Cultural Organisation*), criada em 1945, em Londres, com o propósito de promover, através das relações educacionais, científicas e culturais dos povos do mundo, os objetivos da paz internacional e do bem-estar comum da humanidade (proclamados na Carta da ONU). Isto incentivou o desenvolvimento de pesquisas voltadas para a educação em várias áreas do conhecimento em diversas partes do mundo. Em particular, incentivou pesquisas na educação em estatística, bem como na formação de um programa internacional que viesse ao encontro destas necessidades. Com este propósito foram criados comitês e associações para promover e fomentar estudos e debates sobre a educação estatística. Como resultado deste movimento, surgiu em meados dos anos 70 o Instituto Internacional de Estatística (ISI), criado com o objetivo de ampliar e incentivar as pesquisas na área de educação estatística. Em 1976 algumas proposições foram estabelecidas para a pesquisa na área de educação estatística, como: produção de livros-texto com exemplos e aplicações relacionadas ao cotidiano dos alunos; publicação de um jornal para auxiliar professores de diferentes níveis e mantê-los informados sobre as novidades da área; organização de encontros para os interessados em educação estatística. Ainda segundo esses autores, a ideia de acrescentar a Estatística no ensino da matemática nas escolas ocorreu em 1966, na primeira conferência do *Comprehensive School Mathematics Program* (CSMP), com propostas de inclusão das noções de estatística e probabilidade no currículo da matemática desde o curso secundário. Estas propostas basearam-se na relevância da probabilidade e da estatística em quase todas as atividades da sociedade moderna. Como consequência, muitos

[83] BAYER, A., BITTENCOURT, H., ROCHA, J., ECHEVEST, S. **A Estatística e sua História**. XII Simpósio Sul Brasileiro de Ensino e Ciências. Canoas, 2004.

estudantes, em suas vidas futuras, deveriam estar aptos a usar noções de probabilidade e estatística como instrumentos em suas profissões, sabendo argumentar com base em raciocínios em probabilidade e estatística.

> As numerosas conferências sobre educação estatística (ICOTS, IASE Round Table Conferences, IASE reuniões de ISI, grupos de trabalho em estocástica no ICME, PME, PME-NA, etc.), revistas, artigos publicados e recursos na Internet sugerem que a educação estatística alcançou a maioridade (Vere-Jones, 1997). Algumas boas agendas de investigação têm sido propostas por Shaughnessy (1992) e Shaughnessy, Garfield e Greer (1996). Contudo, necessitamos ainda de uma maior reflexão e discussão para clarificar que devemos considerar como investigação em educação estatística, como estabelecer a validade dos resultados da investigação, quais questões devem ser estudadas prioritariamente, e quais marcos teóricos e métodos de investigação deveriam ser recomendados para levar a cabo esta investigação. (BATANERO *et al*, 2000, p. 1, tradução nossa)[84]

Segundo Carvalho (2003)[85], até os anos 50 e 60, o ensino da estatística era dominado por preocupações fortemente centradas nas ferramentas e nos métodos necessários para resolver problemas presentes nos mais variados contextos para os quais a Estatística era considerada um instrumento importante que permitia aos mais variados setores da sociedade medir, descrever e classificar. O mérito da Estatística era devido principalmente aos serviços que prestava às outras áreas do conhecimento e, consequentemente, seu ensino refletia uma visão instrumental, segundo a qual a Estatística é um conjunto de noções e técnicas matemáticas rigorosas, que se podem utilizar de forma objetiva, ficando a atividade estatística circunscrita a uma utilização formal e mecanicista dessas noções e técnicas. Entre os anos 60 e 70 o foco da Estatística concentrou-se nos seus aspectos matemáticos. Nesta época, houve uma forte preocupação de afirmação da Estatística como uma ciência independente das influências sociais, orientada pelo rigor e a objetividade, resultantes da influência matemática. Esta é igualmente uma época em que na própria Matemática priorizava-se o formalismo e o simbolismo, caracterizando-se como uma disciplina abstrata, desvinculada da realidade. Para Lopes (2008)[86], no início dos anos de 1980, Mendoza e Swift (1981) destacaram que estatística e probabilidade deveriam ser

---

[84] BATANERO, C., GARFIELD, J. B., OTTAVIANI, M. G. y TRURAN, J. Investigación en Educación Estadística: Algunas Cuestiones Prioritarias. **Statistical Education Research Newsletter**, v.1, n. 2, 2000.

[85] CARVALHO, C. **Literacia Estatística**. Comunicação apresentada na mesa redonda Literacia Estatística do I Seminário de Ensino de Matemática – 14ª Conferência realizada pelo COLE, Campinas, Julho de 2003.

[86] LOPES, C. E. **O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação de professores.** Cad. Cedes, Campinas, v. 28, n. 74, 2008, p. 57-73.

ensinadas para que todos os indivíduos pudessem dominar conhecimentos básicos de estatística e probabilidade para atuarem na sociedade.

> O raciocínio estatístico pode ser definido como sendo o modo como as pessoas raciocinam com as ideias estatísticas, conseguindo assim dar um significado à informação estatística. O que envolve fazer interpretações com base em conjuntos de dados, representações de dados ou resumos de dados. Muitos dos raciocínios estatísticos combinam dados e acaso o que leva a ter de ser capaz de fazer interpretações estatísticas e inferências. (Garfield & Gal, 1999, p. 207)[87]

Borovcnik e Peard (1996)[88] citam duas razões que legitimam a introdução das probabilidades no currículo escolar em qualquer nível. A primeira diz respeito à perspectiva do pensamento probabilístico como um tipo específico de pensamento, como o pensamento geométrico e o algébrico; assim a probabilidade constitui uma oportunidade de questionar a dicotomia verdade versus falsidade, estendendo-a à categoria do possível. Estes autores destacam ainda a importância do valor aproximado em relação ao valor exato e destacam a impossibilidade de controlar o resultado de uma única experiência. Este tipo de pensamento pode, sem dúvida alguma, se beneficiar do estudo das probabilidades na escola. A segunda razão deve-se à utilidade já que propicia múltiplas aplicações, embora estas devam ser relativizadas, conforme os modelos probabilísticos modelam diretamente a realidade ou o fazem através da estatística. No caso dos métodos estatísticos, por se basearem no raciocínio probabilístico, verifica-se que as aplicações das probabilidades são inúmeras na vida social e nas ciências, o que confere às probabilidades uma grande importância.

Esse movimento só veio repercutir mais efetivamente no Brasil em 1997 com o estabelecimento dos novos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). De acordo com os PCN o ensino da estatística na escola vem ao encontro de uma sociedade que, muitas vezes, se comunica através de gráficos, tabelas e estatísticas descritivas. Para que o cidadão sobreviva e assimile toda essa quantidade de estatísticas é necessário que alguns conceitos sejam trabalhados desde cedo na escola. Atualmente, as propostas curriculares de matemática, em todo mundo, dedicam atenção especial a esses temas, enfatizando que o estudo dos

---

[87] GARFIELD, J., GAL, I. **Teaching and assessing statistical reasoning**. In: STIFF, CURSIO (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12*. Reston: NCTM, 1999, p 207-219.

[88] BOROVCNIK, M.; PEARD, R. Probability. In: A. J. Bishop et al. (eds.). **International Handbook of Mathematics Education.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996,, p. 239-287. .

mesmos é imprescindível para que as pessoas possam analisar índices de custo de vida, realizar sondagens, escolher amostras e tomar decisões em várias situações do cotidiano.

Os PCN (BRASIL, 1998, p. 20)[89], voltados para o terceiro e quarto ciclos (à época) do Ensino Fundamental, reconhecem "a importância de trabalhar com amplo espectro de conteúdos, incluindo já no ensino fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos". Para evidenciar sua importância em função do uso social destacam este tema como um bloco de conteúdo, denominado Tratamento da Informação, integrando estudos relativos às noções de estatística, probabilidade e contagem, ressaltando que o pretendido não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos.

> Com relação à Estatística, a finalidade é fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia-a-dia. Além disso, calcular algumas medidas estatísticas como média, mediana e moda com o objetivo de fornecer novos elementos para interpretar dados estatísticos.
>
> Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (Brasil, 1998, p. 52).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)[90] estabelecem:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.

[89] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998,148 p.

[90] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2000, 58 p.

> Os conceitos matemáticos que dizem respeito a conjuntos finitos de dados ganham também papel de destaque para as Ciências Humanas e para o cidadão comum, que se vê imerso numa enorme quantidade de informações de natureza estatística ou probabilística. No tratamento desses temas, a mídia, as calculadoras e os computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com dados reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações. (BRASIL, 2000, p. 44-45).

Já no documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006)[91] os conteúdos básicos de Matemática estão organizados em quatro blocos – Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade – com a recomendação de que os conteúdos desses blocos não sejam trabalhados de forma estanque, mas, ao contrário, buscando constantemente a articulação entre eles.

> Os conteúdos do bloco *Análise de dados e probabilidade* têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o ensino médio. Uma das razões desse ponto de vista reside na importância das ideias de incerteza e de probabilidade, associadas aos chamados fenômenos aleatórios, presentes de forma essencial nos mundos natural e social. O estudo desse bloco de conteúdo possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico. Para dar aos alunos uma visão apropriada da importância dos modelos probabilísticos no mundo de hoje, é importante que os alunos tenham oportunidade de ver esses modelos em ação. Por exemplo, é possível simular o que ocorre em certa pesquisa de opinião estimando, com base em uma amostra, a fração de balas de determinada cor em uma caixa. O estudo da estatística viabiliza a aprendizagem da formulação de perguntas que podem ser respondidas com uma coleta de dados, organização e representação. Durante o ensino médio, os alunos devem aprimorar as habilidades adquiridas no ensino fundamental no que se refere à coleta, à organização e à representação de dados. Recomenda-se um trabalho com ênfase na construção e na representação de tabelas e gráficos mais elaborados, analisando sua conveniência e utilizando tecnologias, quando possível. Problemas estatísticos realísticos usualmente começam com uma questão e culminam com uma apresentação de resultados que se apoiam em inferências tomadas em uma população amostral. (BRASIL, 2006, p. 78).

A competência nesses assuntos possibilita aos alunos uma sólida base para desenvolverem estudos futuros e atuarem em áreas científicas como a biologia e as ciências sociais. Além disso, num mundo com rápidas mudanças como o que estamos vivendo, é imprescindível o conhecimento da probabilidade na ocorrência de acontecimentos para agilizarmos a tomada de decisão e fazermos previsões.

---

[91] BRASIL. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2). Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006, 135 p.

De acordo com Shaughnessy[92] (1992, 2007), ser competente em Estatística é essencial aos cidadãos das sociedades atuais: para ser crítico em relação à informação disponível na sociedade, para entender e comunicar com base nessa informação, mas também para tomar decisões, atendendo ao fato de que grande parte da organização dessas sociedades é feita com base nesses conhecimentos. A pesquisa em estocástica tem sido verdadeiramente interdisciplinar e isto pode ser visto em vários artigos de colaboradores, entre psicólogos e educadores matemáticos e estatísticos, que aparecem nos dois volumes do *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* projeto do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), publicados, respectivamente em 1992 e 2007. Em seus artigos nesses livros, Shaughnessy tentou explorar, sintetizar e construir sobre as contribuições de psicólogos e educadores matemáticos e estatísticos no reforço ao conhecimento em relação à aprendizagem dos alunos acerca do acaso e de dados.

Shaughnessy (ROSSMAN; SHAUGHNESSY, 2013)[93] afirma ainda que, ao longo de 20 anos, houve uma grande oscilação no foco das pesquisas. A pesquisa sobre o pensamento estatístico dos alunos, em todos os níveis, tem crescido num ritmo muito rápido, tanto que no segundo Handbook (2007), tem capítulos separados, uns dedicados à investigação sobre probabilidade e outros às pesquisas sobre estatísticas. Acredita que o número de pesquisadores em todo o mundo que estão trabalhando com o pensamento estatístico já ultrapassou aqueles que estão trabalhando com o raciocínio probabilístico. O fato de ambas as áreas serem muito ativas ficou confirmado na conferência International Congress in Mathematical Education (ICME), realizado em Seul em 2012, uma vez que havia grupos de trabalho separados em ambas as abordagens, probabilidade e educação estatística, que foram muito bem contemplados pelos delegados internacionais.

Ao analisarem os currículos para o ensino de Matemática nos Estados Unidos, Inglaterra e Portugal, Ponte e Fonseca (2001)[94] afirmam que o ensino de noções de probabilidade é

[92] SHAUGHNESSY, J.M. **Research in probability and statistics: reflections and directions**. In: GROUWS, D.A. (Ed.). Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: MacMillan, 1992, p. 465-494.
SHAUGHNESSY, J.M. **Research on statistics learning and reasoning**. In: LESTER, F. (Ed.). Second handbook of research on mathematics teaching and learning. Reston: NCTM, 2007, p. 465-494.

[93] ROSSMAN, A., SHAUGHNESSY, M. Interview with Mike Shaughnessy. Journal of Statistics Education, V. 21, n. 1, 2013. Disponível em: www.amstat.org/publications/jse/v21n1/rossmanint.pdf. Acesso: 25 jun 2013.

[94] PONTE, J. P.; FONSECA, H. Orientações curriculares para o ensino da estatística: Análise comparativa de três países. Lisboa: **Quadrante,** n. 10 v. 1, 2001, 93-115.

proposto juntamente com o de noções de estatística, desde os anos iniciais e as propostas curriculares norte americanas são mais enfáticas em relação a objetivos para o ensino de noções de probabilidade no início da escolarização. O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), em referência ao ensino de probabilidades indica como objetivos a compreensão de noções básicas sobre resultados de acontecimentos (certo, impossível, mais provável, mais frequente), para o nível de escolaridade na faixa etária de 7 e 8 anos de idade, que os alunos adquiram um vocabulário básico para falar a respeito desse conceito matemático e comecem a situar as probabilidades de acontecimentos numa escala de 0 a 1, para o nível escolar da faixa etária que varia de 9 a 10 anos, e para o nível escolar seguinte, que estes alunos estejam preparados para formular problemas que explorem assuntos complexos. Ponte e Fonseca (2001, p. 11), ressaltam que o documento do NCTM é o único que dedica um capítulo à Análise de Dados e às Probabilidades na primeira fase da *Elementary school*, no entanto, nos currículos português e inglês do 1º ciclo há algumas referências mais ou menos explícitas a objetivos relativos à classificação e organização de dados.

Ainda como reflexo desse movimento mundial, merece registro no Brasil o grupo de trabalho GT12 da Sociedade Brasileira de educação Matemática (SBEM), composto de especialistas que se dedicam à pesquisas sobre Educação Estatística, desde o final da década de 90. Cazorla, Kataoka e Silva (2010)[95], no capítulo Trajetória e Perspectivas da Educação Estatística no Brasil: um olhar a partir do GT12, trazem as origens do grupo a partir da participação de pesquisadores em dois eventos em 1999, consideradas como um marco. O primeiro, a conferência Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística: desafios para o século XXI, realizada na Universidade Federal de Santa Catarina, com apoio da Associação Internacional para Educação Estatística (IASE) e da Associação Brasileira de Estatística (ABE), que contou com participação de 180 pesquisadores, sendo 110 brasileiros, entre eles componentes do grupo de Prática Pedagógica (PRAPEM) e do grupo Psicologia da Educação Matemática (PSIEM) ambos da UNICAMP; o segundo foi a visita da pesquisadora espanhola Carmem Batanero, que ministrou a oficina sobre Didática Estatística, a convite do grupo

[95] CAZORLA, I. M.; KATAOKA, V. Y.; SILVA, C. B. Trajetória e Perspectivas da Educação Estatística no Brasil: um olhar a parit do G12. In: LOPES, C. E.; COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOUD, S. A. Estudos e Reflexões em Educação Estatística. Campinas: Mercado das Letras, 2010, p. 19-44.

PRAPEM. Esses eventos fomentaram a realização de outros, como a 7ª Conferência Internacional de Ensino em Estatística (ICOTS7) no Brasil, iniciando a trajetória de atuação do GT12, que à época do levantamento em 2010 contava com pesquisadores âncoras, envolvendo 11 grupos de pesquisas vinculados à área, sendo 25 pesquisadores do GT12, com diversas publicações e orientações em nível de mestrato e doutorado, mostrando uma trajetória crescente de produção científica.

### 3.3 Literacia, Raciocínio e Pensamento Estatístico.

O **letramento estatístico** pode ser visto, de forma sintetizada, como o entendimento e a interpretação da informação estatística apresentada, já o **raciocínio estatístico** representa a habilidade de se trabalhar com as ferramentas e os conceitos estatísticos e saber se comunicar para explicar os resultados obtidos, enquanto que o **pensamento estatístico** leva a uma compreensão global da dimensão da situação problema permitindo que se questione espontaneamente a realidade observada por meio desses conhecimentos e se investigue o resultado acerca dos dados envolvidos num contexto específico. Embora a conceituação do letramento estatístico ainda apresente variações entre especialistas da área, inclusive em relação à nomenclatura – letramento e literacia –, entendo como uma conceituação em construção, portanto, atendendo à dinâmica do curso dos resultados divulgados tanto das pesquisas em andamento como das discussões em congressos, conferências e grupos de trabalho por parte de especialistas de diversas partes do mundo. Para tanto, é importante dar uma ideia desse percurso. Entretanto, antes preciso esclarecer minha opção pelo termo literacia, por um lado por uma preferência pessoal, por outro, por ter me baseado em algumas pesquisas da área que usam este termo, como o artigo "Literacia estatística e o INAF 2002", de Lopes (2004)[96], e "A literacia, o pensamento e o raciocínio estatístico", de Campos, Wodewotzki e Jacobini (2011)[97], bem como nos argumentos da dissertação de Ody (2013), "Literacia Estatística e Probabilística no Ensino Médio", orientada por Lori Viali, na qual fez um estudo de diversas interpretações acerca dos termos alfabetização, letramento e literacia, que forneceu subsídios para a escolha por literacia:

[96] LOPES, C. A. E. Literacia estatística e o INAF 2002. In: FONSECA, M.C.F.R. (Org.) Letramento no Brasil. São Paulo: Global Editora e Distribuidora Ltda, 2004, p. 187-197..

[97] CAMPOS, C. R.; WODEWOTZKI, M. L. L.; JACOBINI, O. R. Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

> A opção se dá pelo fato de que a palavra *Letramento,* desde que foi introduzida no Brasil, está associada à aprendizagem inicial da língua escrita, o que tem levado a atribuir a ela um conceito restrito, escolarizado, limitado à designação de competências de uso adequado da leitura e da escrita em seus usos sociais. A proposta, então, pelo uso da *Literacia* ocorre pela complexidade que envolve uso de competências, pensamento crítico, leitura, interpretação, análise e argumentação sobre fatos que ocorrem diariamente – no caso da Estatística e da Probabilidade – para o exercício da cidadania. (ODY, 2013, p. 33)

Também, segundo Benavente, Costa, Rosa e Ávila (1996, *apud* ODY, 2013, p. 32), a Literacia tem a preocupação para além da aquisição de competências, mas a utilização das mesmas para a leitura, a escrita, o cálculo na vida em sociedade. Ademais, D'Ambrósio (2005), também usa o termo Literacia como a capacidade de processar informação escrita e falada, o que inclui leitura, escritura, cálculo, diálogo, decálogo, mídia, internet na vida cotidiana (que são instrumentos comunicativos). Isto posto, vale ressaltar que temos várias literacias, específicas do contexto em que se usa.

Na opinião de Ben-Zvi e Garfield (2005)[98], ao longo da última década, tem havido um apelo cada vez mais forte para a educação estatística para se concentrar mais em literacia, raciocínio e pensamento estatísticos. Um dos principais argumentos apresentados é que as abordagens tradicionais para o ensino de estatísticas focam em competências, procedimentos e cálculos, que não levam os alunos a raciocinar ou pensar estatisticamente. Esses autores, ao ler artigos sobre recomendações para a reforma do ensino de estatística, concluem que não existem definições consistentes para os muitas vezes afirmados objetivos de aprendizagem da alfabetização, raciocínio e pensamento. Literacia estatística é usado intercambiável com literacia quantitativa, enquanto o pensamento e raciocínio estatísticos são usados para definir as mesmas capacidades (competências). Esta confusão de termos ficou especialmente evidente na Quinta Conferência Internacional sobre Ensino de Estatística, realizada em Singapura em 1998, quando educadores estatísticos ou pesquisadores falam ou avaliam o raciocínio, o pensamento ou o letramento estatístico, podem estar usando diferentes definições e entendimentos desses processos cognitivos. As semelhanças e diferenças entre estes processos devem ser consideradas na formulação

[98] BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. In: BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. (Ed.). **The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academy Publishers, 2005, p. 3-16.

de objetivos, elaboração e avaliação de atividades de aprendizagem. Uma primeira conferência mais restrita – *International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy* (SRTL-1), realizado em Israel, em 1999 – foi um passo importante no esclarecimento das questões, conectando pesquisadores e seus estudos e gerando algumas definições comuns. Um segundo fórum (SRTL-2) foi realizado em 2001 na Austrália.

Os fóruns continuam a serem oferecidos a cada dois anos a título de aumentar a contribuição de investigações da área nessa direção de forma constante. O oitavo fórum (SRTL-8) realizou-se em agosto de 2013, nos Estados Unidos, com pesquisadores em educação estatística de oito países convidados a partilhar o seus trabalhos e iniciar projetos colaborativo com ênfase no raciocínio sobre a incerteza no contexto de fazer inferências estatísticas informais.

A publicação de 2005, *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, que teve David Ben-Zvi e Joan Garfield como editores, é resultado dos dois primeiros fóruns (SRTL-1 e 2). Embora nenhum acordo formal tenha sido feito a respeito das definições e distinções de literacia, raciocínio e pensamento estatísticos, Ben-Zvi e Garfield (2005, p. 6-7), resumem sua ideias compartilhadas com delMas e Chance (2003), que penso estarem bem completas e, portanto, refletem também a minha compreensão, como se seguem:

**Literacia estatística** inclui habilidades básicas e importantes que podem ser utilizadas para compreender a informação estatística ou os resultados de uma investigação. Essas habilidades incluem ser capaz de organizar os dados, construir e exibir tabelas, e trabalhar com diferentes representações de dados. Literacia estatística inclui também uma compreensão de conceitos, vocabulário e símbolos, bem como a compreensão de probabilidade como uma medida de incerteza.

**O raciocínio estatístico** pode ser definido como a forma como as pessoas racionalizam as ideias estatísticas e dão sentido à informação estatística. Isto envolve fazer interpretações com base em conjuntos, representações ou resumos estatísticos de dados. O raciocínio estatístico pode também envolver a conexão entre um conceito e outro, ou pode combinar ideias sobre dados e chance. Raciocínio significa compreender e ser capaz de explicar os processos estatísticos e ser capaz de interpretar os resultados estatísticos.

**Pensamento estatístico** envolve a compreensão de por que e como são conduzidas as investigações estatísticas e quais são as ideias chaves que fundamentam essas investigações, o que inclui a natureza onipresente de variação, quando e de que forma usar métodos adequados de análise de dados, como resumos numéricos e apresentações visuais de dados. Pensamento estatístico envolve uma compreensão da natureza da amostragem, como fazemos inferências a partir de amostras da população e porque experimentos planejados são necessários a fim estabelecer uma causalidade. Inclui uma compreensão de como os modelos são usados para simular fenômenos aleatórios, como os dados são produzidos para estimar probabilidades, e como, quando e quais ferramentas de inferência existentes podem ser utilizadas para auxiliar um processo de investigação. Pensamento estatístico também inclui a possibilidade de compreender e utilizar o contexto de um problema na formação de investigações e tirar conclusões, reconhecer e compreender todo o processo, criticar e avaliar os resultados de um problema resolvido ou um estudo estatístico.

Vemos, no entanto, que pouco é explicitado acerca de probabilidade, mesmo considerando que ideias, noções e conceitos probabilísticos são incluídos subjacentemente nas ideias estatísticas. Ocorre que boa parte das pesquisas na área tratam de forma imbricada estes conceitos. Busquei, então, subsídios no livro *Exploring Probability in School*, de 2005, em particular no segundo capítulo que trata de Literacia Probabilística, de autoria de Iddo Gal, cujas ideias principais apresento no tópico a seguir.

## 3.4 Literacia, Raciocínio e Pensamento Probabilístico.

Tentando focar o olhar para questões relativas à Probabilidade, de forma destacada, Gal (2005)[99] inicia o capítulo buscando respostas à seguinte questão: O que queremos que os alunos aprendam sobre a probabilidade, e por que nós queremos que eles a aprendam isso? Aponta duas respostas que são muitas vezes fornecidas na literatura de educação matemática e na literatura de educação estatística. A primeira é que a probabilidade é parte de matemática e da estatística, áreas de conhecimento que são importantes para aprender para si como parte da educação moderna. Uma variação desta resposta é que a

[99] GALL, I. Towards "Probability Literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In: JONES, G. (Ed.) Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning. New York: Springer, 2005, p. 39-64.

aprendizagem de probabilidade é a base para aprender temas mais avançados ou tópicos em outras ciências. A segunda resposta é que a aprendizagem de probabilidade é essencial para ajudar a preparar os alunos para a vida, desde eventos aleatórios até fenômenos fortuitos que permeiam nossas vidas e ambientes. Estas duas razões para a aprendizagem de probabilidade, portanto, são movidas por considerações internas e externas, não mutuamente exclusivas, ambas devem influenciar o nosso pensamento sobre o conteúdo e o processo da educação. No entanto, baseando-se na crença de que é essencial colocar ênfase suficiente sobre as questões que são externas à estrutura da probabilidade como um tema matemático e estatístico, devemos refletir sobre a natureza das situações de probabilidade que aparecem no mundo real e que teremos que compreender ou saber lidar com elas, bem como sobre suas implicações para os conhecimentos necessários e experiências educacionais. Embora a atenção às demandas do mundo real não devam ser o único fator que influencia o planejamento curricular ou as práticas dos professores, devem ser uma parte das considerações que orientam o que precisa ser planejado, ensinado, avaliado e valorizado na sala de aula.

> Probabilidade não é uma característica tangível de eventos, mas uma percepção, enquanto expressa via uma notação matemática formal ou um significado informal, de chance ou de ocorrência de possibilidade de eventos. Tais percepções dependem da interação entre os fatores que operam em situações externas e dentro de pessoas que enfrentam estas situações. (GAL, 2005, p. 40, tradução nossa)

Conclui-se que o pensamento e o comportamento das pessoas frente a uma situação probabilística são afetados por múltiplas bases de conhecimento e disposições. Nesse sentido faz-se necessário relacionar constructos de literacia, numeracia e literacia estatísitica. Já abordamos sobre literacia de maneira geral e literacia estatística. O termo numeracia é definido por Gal (2002)[100] como um agregado de habilidades e conhecimentos, fatores disposicionais (crenças, atitudes, hábitos mentais) e mais geralmente como as capacidades de comunicação e resolução de problemas que indivíduos devem ter para se engajar e efetivamente conduzir uma situação envolvendo competência de numeração. Essas situações envolvem números, quantidades ou informações quantificáveis, informações

[100] GAL, I. Adults' statistical literacy: Meanings, Componentes, Responsabilities. **International Statistical Review**, v. 70, n. 1, 2002, p. 1-25.

visuais ou textuais baseadas em ideias matemáticas ou incorporadas em elementos matemáticos. Gal (2005, p. 43) elenca três tipos chave de situações que envolvem numeracia: computacionais, que demandam quantificar, computar, manipular números e quantidades, itens ou elementos viisuais que podem gerar novos números, como estimar probabilidades quando se jogam jogos de azar; interpretativas, que demandam dar sentido a mensagens envolvendo questões quantitativas, mas que não envolvem números; tomada de decisão demanda que pessoas determinem o curso da ação, tipicamente na presença de conflitos, restrições ou incertezas.

Dessa forma, para construir a concepção de literacia probablísticas Gal (2005, p. 46) apresenta cinco elementos básicos de conhecimento relacionados à probabilidade e aponta para algumas disposições que são necessárias para que adultos sejam capazes de efetivamente interpretar e identificar situações probabilísticas do mundo real. Os cinco elementos básicos de conhecimento podem assim ser descritos: compreender as 'grandes ideias', quais sejam, variabilidade, aleatoriedade, independência, imprevisibilidade e incerteza; saber formas de encontrar ou estimar a probabilidade de um evento; saber termos e métodos usados na comunicação sobre acaso/chance; compreender as regras e implicações de questões envolvendo probabilidade em vários contextos no discurso pessoal e público; conhecer questões críticas para refletir quando e como se lida com probabilidade (por exemplo, o problema da Mamografia do capítulo 1). Os elementos 'disposicionais', que indicam disposição, são: postura crítica, crenças e atitudes, sentimento pessoais frente à situações de incerteza e risco.

Assim, sintetizando as ideias de Gal (2005), **a literacia probabilística** comporta o domínio destes blocos de elementos aqui descritos, cinco elementos básicos de conhecimento e três elementos disposicionais.  O **raciocínio probabilístico** consiste em colocar em ação as habilidades e conhecimentos da numeracia em situações aleatórias ou não determinísticas, que envolvem o acaso, a incerteza e a variabilidade, sobre as quais se pretende encontrar uma medida dessa incerteza ou da chance de ocorrência de um evento. Já o **pensamento probabilístico** envolve a compreensão de situações do mundo real que envolvem incertezas e aleatoriedade; permite que a pessoa seja capaz não só de utilizar as ideias probabilísticas, mas sobretudo de atribuir significado a essas ideias, e que também possa tanto analisar quantitativamente e com senso crítico, como comunicar com clareza, as chances de um fenômeno ocorre ou não. O pensamento probabilístico se constitui em um conjunto de estratégias mentais de construção e reconstrução de ideias associadas à tomada de decisão, em todas as etapas de um ciclo investigativo, estimulando aspectos cognitivos na aplicação de ideias e conceitos na identificação de novos problemas.

### 3.5 Outras considerações

Rumsey (2002)[101] compreende o pensamento e o raciocínio como níveis de compreensão dos conceitos básicos por meio da manifestação da linguagem. O raciocínio desenvolve as habilidades de questionar, comparar e explicar, enquanto o pensamento estatístico/probabilístico estimula os aspectos cognitivos na aplicação das ideias.

De acordo com Lopes (2003), deve-se promover o desenvolvimento do pensamento probabilístico e do raciocínio estocástico enquanto prática educativa por meio de experimentos de simulação, tratando a aleatoriedade, descrevendo, organizando e comunicando o comportamento desses fenômenos em tabelas de frequência e gráficos.

> O desenvolvimento do pensamento probabilístico requer o reconhecimento de situações de acaso na vida cotidiana e no conhecimento científico bem como a formulação e comprovação de conjecturas sobre o comportamento de fenômenos aleatórios simples e a planificação e realização de experiências nas quais se estude o comportamento de fatos que abarquem o azar. A partir dessas considerações, pode-se organizar situações didáticas que envolvam a observação de experimentos, com seus respectivos registros e análises, possibilitando a integração entre a Probabilidade e a Estatística. Nessa conjunção é que se terá o desenvolvimento do raciocínio estocástico. (LOPES, 2003, p. 65)[102].

Lopes (2010)[103] ainda analisa que o letramento probabilístico também supera uma simples quantificação da chance de um fenômeno ocorrer, mas possibilita um pensar, mais crítico, refletido e analítico, sobre as situações que ocorrem na vida cotidiana e profissional. Assim, se pode afirmar que esse conhecimento seja essencial à vida humana.

---

[101] RUMSEY, D. J. Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. **Journal of Statistics Education**, v. 10, n. 3, 2002. Disponível em: <http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/rumsey2.html>. Acesso em: 20 set. 2012.

[102] LOPES, C. A. E. **O Conhecimento Profissional dos Professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil**. Tese (Tese de Doutorado em Educação). UNICAMP: São Paulo, 2003.

[103] LOPES, C. E. A Educação Estatística no Currículo de Matemática: Um Ensaio Teórico. GT19 - 33ª Reunião anual da ANPED. Caxambu, 2010. Disponível em: http://www.anped.org.br/33encontro/app/webroot/files/file/Trabalhos%20em%20PDF/GT19-6836--Int.pdf. Acesso em: 20 abr. 2013.

De acordo com Gal e Garfield (1999)[104], muito do pensamento estatístico combina ideias acerca de dados e da noção de incerteza, obrigando cada sujeito a ter que fazer inferências para conseguir interpretá-los. Subjacente a este raciocínio está a compreensão conceitual de ideias importantes como distribuição, dispersão, incerteza, acaso, aleatoriedade e amostra. Neste movimento a estatística se intersecciona com a probabilidade, exigindo que as pessoas utilizem o pensamento probabilístico, hoje tão essencial em nossas vidas já que necessitamos tomar decisões rapidamente, analisando as possibilidades de eventos ocorrerem com maior ou menor chance. Por isso, justifica-se a abordagem curricular dessas temáticas de forma interligada.

> O conhecimento básico de probabilidade é importante para a formação do cidadão, pois possibilita a compreensão dos acontecimentos de natureza aleatória do seu cotidiano, bem como, se utilizado em conjunto com a Estatística no contexto inferencial, pode auxiliá-lo nas tomadas de decisões. De acordo com Coutinho (2001), Batanero e Godino (2002), para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico é necessário que o aluno vivencie atividades que possibilitem: a percepção do acaso; a ideia de experiência aleatória e a noção de probabilidade. (CAZORLA, GUSMÃO, KATAOKA, 2011, p. 538)[105]

Na opinião de Shaughnessy (1977)[106] uma abordagem de ensino pode influenciar o raciocínio de alguns alunos, mas não é tudo absolutamente claro. Embora tenha achado estatisticamente significativas suas abordagens nas pesquisas, ainda assim ficou desapontado por não garantirem eficácia na mudança de pensamento dos alunos. Conforme Kahneman e Tversky argumentaram sobre o trabalho de julgamento e tomada de decisão, num seminário com Shulman, os seres humanos dependem de algumas heurísticas que ajudam a tomar decisões ou fornecer estimativas que envolvem risco ou incerteza (Kahneman, Slovic e Tversky, 1982)[107]. Uma dessas heurísticas, chamada 'representatividade', é quando as pessoas estimam a probabilidade de um resultado com base em quão representativo esse resultado é em relação ao universo (população) ou ao

---

[104] GAL, I., GARFIEL, J. **Assessment and statistics education: current challenges and directions**. *International Statistical Review*, v. 67 (1), 1999, p. 1-12.

[105] CAZORLA, I. M., GUSMÃO, T. C., KATAOKA, V. Y. **Validação de uma Sequência Didática de Probabilidade a partir da Análise da Prática de Professores, sob a Ótica do Enfoque Ontossemiótico**. *Bolema,* Rio Claro (SP), v. 24, n. 39, 2011, p. 537-560.

[106] SHAUGHNESSY, J. M. **Misconceptions of Probability: An Experiment With a Small-Group Activity-Based Model Building Approach to Introductory Probability at the College Level**, *Educational Studies in Mathematics*, 8, 1977, p. 285-316.

[107] KAHNEMAN, D., SLOVIC, P., TVERSKY, A. **Decision Making under Uncertainty: Heuristics and Biases**. Cambridge University Press, 1982.

processo pelo qual os resultados são gerados. Por exemplo, muitas pessoas acreditam que, se jogar uma moeda seis vezes e gravar a sequência de caras e coroas, um resultado como KCKKKC é menos provável de ocorrer do que o resultado KCKCKC, porque a última sequência é mais "representativa" da distribuição uniforme de K e C na população. Da mesma forma, uma seqüência como KCCKCK seria considerado mais provável de ocorrer do que KKKCCC, porque esta última sequência não é "aleatória o suficiente".

Shaughnessy (2013) ainda afirma que a maioria de seus alunos apresentou esse tipo de raciocínio em tarefas deste tipo, dadas a eles antes de qualquer experiência de trabalho com probabilidade ou de realização de experimentos de simulação. Conclui:

> A lição que aprendi é que as intuições e crenças das pessoas sobre probabilidade e estatística são profundamente enraizadas, e que só porque podemos nos concentrar em uma forma teoricamente correta para os alunos pensarem sobre a tomada de decisão em condições de incerteza não significa que eles vão mudar os seus padrões de raciocínio. Um curso de raciocínio estatístico, não é suficiente para mudar todas as crenças dos alunos. (ROSSMAN, SHAUGHNESSY, 2013, p. 2, tradução nossa)[108]

Vimos que no Brasil os PCN (BRASIL, 1997) para o ensino Fundamental recomendam que o ensino de Probabilidade seja oferecido desde os anos escolares iniciais e tem como uma das metas fazer com que o aluno compreenda que as noções de acaso e incerteza se manifestam intuitivamente em situações nas quais o aluno realize experimentos e observe eventos (em espaços equiprováveis). Para os anos finais do Ensino Fundamental, uma das metas é fazer com que o aluno represente e conte, por meio de tabelas ou árvore de possibilidades, os casos possíveis em situações combinatórias e saiba construir o espaço amostral em várias situações, indicando a possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão (BRASIL, 1998). Já, de acordo com os PCNEM (BRASIL, 2000) o aluno do Ensino Médio deve compreender que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas intuições são incorretas e podem levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance.

> Apesar dessas orientações curriculares, pesquisadores internacionais, como Batanero, Godino e Roa (2004), Peck e Gould (2005), Serradó, Azcárate e Cardeñoso (2006), Ainley e Monteiro (2008), afirmam que os educadores

[108] ROSSMAN, A., SHAUGHNESSY, M. Interview with Mike Shaughnessy. Journal of Statistics Education, V. 21, n. 1, 2013. Disponível em: www.amstat.org/publications/jse/v21n1/rossmanint.pdf. Acesso: 25 jun 2013.

> provenientes das Licenciaturas em Matemática, às vezes, têm alguma formação básica em Probabilidade e Estatística, mas geralmente não têm formação nas questões relacionadas ao ensino destes conteúdos. (CAZORLA, 2011, p. 539)

Segundo essas autoras, no Brasil essa realidade não é diferente, uma vez que os cursos de Licenciatura em Matemática ou em Pedagogia oferecem apenas disciplinas, como Estatística Descritiva e Probabilidade, que abordam superficialmente esses conteúdos. E tais disciplinas raramente abordam aspectos da Didática da Estatística, isto é, não trabalham os conceitos e procedimentos enquanto objetos a serem ensinados. Some-se a isto a falta de materiais didáticos nos diversos níveis de ensino que sejam adequados à realidade das escolas, o que dificulta a inserção de Probabilidade e Estatística na Educação Básica.

Pietropaolo e Campos (2013, p. 61)[109] afirmam que muitos docentes não estão sequer convencidos de que a probabilidade seja importante para ser desenvolvida no Ensino Médio e têm uma posição mais restritiva para o Ensino Fundamental, considerando "a inclusão desse tema totalmente inadequada e desnecessária – fato este mostrado nesta pesquisa". E completam:

> Assim, para promover a inclusão da probabilidade no Ensino Fundamental, primeiro seria necessário convencer os professores de que a aprendizagem das noções relativas a probabilidade não e apenas útil para aplicação no cotidiano das pessoas, mas também pelo desenvolvimento de importantes habilidades cognitivas e de formas de pensar.
>
> No entanto, a probabilidade, embora possa ter um significado intuitivo, envolve noções de difícil compreensão por não serem evidentes (BRYANT e NUNES, 2012). Ou seja, intuitivamente não e fácil, sobretudo para um estudante do Ensino Fundamental, aceitar, por exemplo, que apos ter jogado oito vezes uma moeda honesta e ter obtido cara em todas as jogadas, a probabilidade de obter cara na 9ª jogada é exatamente a mesma de obter coroa. Outro conceito de difícil compreensão trata-se da não equiprobabilidade: alunos que tiveram muitas experiências envolvendo apenas espaços equiprováveis tendem a conjecturar como se todos os espaços tivessem essa característica.
>
> Por outro lado, se considerarmos a importância de o aluno dos anos iniciais do Ensino Fundamental adquirir uma percepção de que a Matemática não trata apenas de fenômenos determinísticos, mas também dos aleatórios, a abordagem do conceito de probabilidade não pode estar restrita apenas a proposição de problemas simples nos quais os alunos devam indicar a probabilidade de um evento em um espaço amostral equiprovável, como e o caso de situações padrão do tipo: qual e a probabilidade de sair o número 5 quando se lança um dado? (PIETROPAOLO; CAMPOS, 2013, p. 61)

[109] PIETROPAOLO, R.; CAMPOS, T. M. M. Um estudo sobre os conceitos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais. In: BORBA, R. E. S. R.; MONTEIRO, C. E. F. (Org.) **Processos de Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática**. v. 1. Recife: Editora Universitária UFPE, 2013, p. 57-93.

Assim, esses autores entendem que a exploração de noções relacionadas à probabilidade requer do professor que ensina Matemática um repertório abrangente de conhecimentos que permita adequar convenientemente ao nível de compreensão dos alunos e favorecer articulações dessas noções com outros conteúdos já estudados.

Vale ressaltar recente pesquisa de Nunes (2012)[110], envolvendo 3 grupos de crianças de 9-11 anos de idade, sendo que no primeiro grupo foram aplicadas atividades sobre probabilidades e aleatoriedade, no segundo grupo apenas resolução de problemas não envolvendo aleatoriedade e o terceiro, grupo de controle, não recebeu nenhuma atividade extra durante a pesquisa. Os resultados desta pesquisa apontaram que as crianças do primeiro grupo de probabilidade fizeram significativamente mais progressos na compreensão de aleatoriedade, espaço amostral e quantificação das probabilidades do que cada um dos outros dois grupos; seu progresso ainda foi considerado estável, dois meses após o ensino terminado e continuaram a mostrar uma vantagem significativa sobre cada um dos outros dois grupos, mesmo em atividades de resolução de problemas, pois foram capazes de aprender a usar essas idéias, a fim de pensar sobre associações entre eventos.

Outra preocupação de pesquisadores refere-se à apresentação superficial do tema nos livros didáticos, que acaba não favorecendo à compreensão das noções probabilísticas e até conduzindo a alguns erros ou equívocos, como indicam os comentários que seguem.

> Outra circunstância agravante no ensino de probabilidade, de acordo com Batanero *et al.* (2004), é que os livros didáticos, por vezes, apresentam uma visão demasiado estreita de probabilidade (apenas a abordagem clássica), e as aplicações são muitas vezes restritas à jogos de azar e, em alguns deles, as definições dos conceitos estão incorretas. (KATAOKA *et al*, 2008, p.2)[111][tradução nossa]

Campos, Wodewotzki e Jacobini (2011, p. 31-32)[112] citam que raciocínios incorretos são frequentemente baseados no senso comum ou no entendimento sem base formal acerca de assuntos estatísticos, o que é muito comum nos estudantes. Alguns dos raciocínios incorretos, identificados por Kahneman, Slovic e Tverski (1982) entre outros pesquisadores,

[110] Nunes, T. **Children's understanding of probability and certainty. An exploratory study of a two-factor description of mathematical ability**. John Fell Fund. June-August 2012.
[111] KATAOKA, V. Y., *et al.* Probability Teaching in Brazilian Basic Education: Evaluation and Intervention. – **Topic Study Group 13: Research and development in the teaching and learning of probability**. ICME 11, 2008.
[112] CAMPOS, C. R., WODEWOTZKI, M. L. L., JACOBINI, O. R. **Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática**. Belo Horizonre: Autênctica, 2011.

são sobre média, quando costumam tratar a média como moda; sobre probabilidades, quando são levados, em modelos intuitivos de probabilidade, a tomar decisões do tipo sim/não, ao invés de analisar a situação como um todo; sobre amostragem, ao imaginar que, para uma amostra ser representativa, ela deve ser grande, negligenciando o processo de amostragem; sobre a lei dos pequenos números, ao tomar pequenas amostras como base para inferências e generalizações; sobre representatividade e equiprobabilidade (como já vimos anteriormente). Batanero também se interessa por raciocínios equivocados e apresenta um exemplo análogo da representatividade. Na verdade não é tarefa fácil desenvolver nos estudante o raciocínio estatístico, nem o probabilístico. Muitos autores afirmam que não é possível fazê-lo de forma direta, poucas vezes é ensinado e mesmo quando isto é feito, nem sempre é bem sucedido. Isto é observado, principalmente quando se ensina conceitos e procedimentos, esperando que o raciocínio se desenvolva por si só, durante esse trabalho.  Ainda segundo esses autores (2011, p. 43), para desenvolver este tipo de pensamento, os estudantes devem ser levados a uma desconstrução interna em seus modos de pensar, abrindo mão de olhar o mundo de forma determinística para uma visão em que as ideias probabilísticas são centrais e indispensáveis.

É claro que a melhoria da aprendizagem nas escolas depende fortemente da qualidade da educação fornecida. Segundo Azcárate e Cardeñoso (2011, p. 790)[113] preparar para aprender ao longo de toda vida parece ser uma meta da formação básica. Além disso, proporcionar aos alunos uma educação completa, que contemple os conhecimentos e as competências básicas necessárias na sociedade atual, pode estimular o desejo de continuar aprendendo ao longo da vida. Nossos alunos aprendem não só no contexto escolar, sua interação com o meio é vital para seu desenvolvimento; deparam-se com toda sorte de informações, particularmente estatísticas  e probabilísticas, por meio das diferentes mídias e meios de comunicação. Nesse contexto a habilidade de saber interpretar e compreender as informações disponíveis são instrumentos necessários para a vida cotidiana. Grande parte dessas situações está afetada pela incerteza, portanto, as decisões a serem tomadas se apoiam numa interpretação e inferência da informação estatística dos estudos prévios.

[113] AZCÁRATE, P., CARDEÑOSO, J. M**. La Enseñanza de la Estadística a través de Encenarios: implicación en el desarrollo professional**. Bolema, v. 24, n. 40, 2011, p. 789-810.

Nesse sentido, especialistas em educação matemática enfatizam a necessidade dos docentes desenvolverem competências e destrezas profissionais para promover a aprendizagem ativa de seus alunos e, em particular, facilitar a estrutura dos conceitos estatísticos e probabilísticos. Nessa mesma direção, o processo formativo defendido por Azcárate (1999)[114], frente ao desafio da educação estatística, implica a reflexão intencional sobre o conhecimento profissional do docente em três perspectivas:

- Epistemológica: domínio e compreensão conceitual e didática do conteúdo.
- Cognitiva: compreensão da aprendizagem estatística e forma de promovê-la.
- Prática: desenvolvimento de competências e estratégias de intervenção em classe.

Essas reflexões, segundo Azcárate e Cardeñoso (2011, p. 796) devem se realizar em propostas formativas baseadas nestes princípios e se concretizam em estudos nos três âmbitos do conhecimento:

- Relativo ao conteúdo: análise da natureza do conhecimento estatístico, análise e reflexão dos conceitos fundamentais em probabilidade e estatística, análise didática e problemas históricos; análise de currículo, análise dos critérios para a seleção e organização dos conhecimentos para os alunos e seleção de ferramentas para trabalhar com os alunos.
- Relativo à aprendizagem da estatística: análise de como os alunos aprendem estatística e probabilidade, análise e reflexão sobre a literatura de investigação, análise do papel das ferramentas tecnológicas na aprendizagem dos alunos, a análise da organização do processo de ensino e aprendizagem.
- Relativo ao processo de intervenção: projeto pessoal de plano de intervenção na sala de aula, desenvolvimento em sala de aula, avaliação e reflexão o processo.

Por fim, vale ressaltar a importância do rompimento com a visão determinista e linear predominante nos currículos escolares que o estudo da estatística e da probabilidade pode proporcionar, levando em conta as próprias raízes interdisciplinares dessas temáticas. Para tal é preciso desenvolver atividades em sala de aula que não sejam apenas baseadas em questões com solução única, que desconsidera possíveis respostas intermediárias entre o verdadeiro e o falso, esquecendo-se de que os alunos, ao longo de suas vidas se depararão

[114] AZCÁRATE, P**. El conocimiento professional: naturaleza, fuentes, organización y desarollo**. Quadrante, Lisboa, v.8, 1999, p. 111-138.

com situações ou problemas de caráter muito menos definido e que irão demandar diferentes demandas cognitivas e por em ação diversas competências para tomada de decisão.  A incerteza, a aleatoriedade e a estimativa são características fundamentais do mundo contemporâneo. O ensino da Probabilidade desde as séries iniciais pode propiciar ao aluno condições de conviver com esses aspectos de modo natural.

No próximo capítulo veremos as questões relativas aos aspectos de formação de professores, tanto do ponto de vista da formação inicial e continuada, quanto de crenças, comportamentos e atitudes.

# 4. A formação de professores

"Ensinar não uma função vital, porque não tem um fim em si mesma. A função vital é aprender". (Aristóteles)

Inúmeros projetos de formação inicial e continuada de professores estão em desenvolvimento envolvendo um grande número de profissionais, pesquisadores e também formadores de professores. Mas quem é esse professor?

Furlanetto[115] (2011, p. 131), na perspectiva da modernidade, diz "alguém que concebe o conhecimento como uma verdade preestabelecida delineada dentro da moldura da racionalidade e passível de ser transmitida aos alunos e que se propõe uma tarefa impossível: garantir a ordem e o controle sobre a aprendizagem do outro?" Os professores são formados sob a égide de que o conhecimento é transmitido de maneira linear, numa estrutura organizada pela lógica das disciplinas e, portanto, de forma fragmentada. Enfatiza-se a "linguagem da necessidade, da certeza e da verdade que nega a ambiguidade, o desejo, e deslegitima o diferente que não se encaixa em padrões preestabelecidos".

Na ótica da modernidade, ainda segundo a autora, "o professor tornou-se um técnico comprometido com metodologias adequadas, capaz de organizar os processos de ensino e aprendizagem a partir de modelos pedagógicos". Dessa forma,

> [...] o educador moderno distancia-se dos processos vividos pelos alunos e da compreensão de como eles se apropriam dos conteúdos culturais. Os propósitos, os objetivos e as estratégias ganham força nessa perspectiva e configuram os espaços pedagógicos. A atuação dos educadores fica submetida ao reino da eficiência, da eficácia e da excelência. Sua liberdade, apesar de valorizada, torna-se ilusória. Ao mesmo tempo em que ele é responsabilizado pela condução do ensino e da aprendizagem dos alunos, participa de treinamentos que, na maioria das vezes, buscam submeter sua ação docente a alguma técnica de ensino organizada a partir de regras preestabelecidas. A formação, nesta perspectiva, assume um discurso prescritivo acerca de como o professor deve ser e ensinar. (FURLANETTO, 2011, p. 131)

Entretanto, essa concepção de ensino, de professor e de formador não é mais preponderante atualmente. Novas perspectivas e formas de conceber os agentes desse

[115] FURLANETTO, E. C. Formação de formadores: um território a ser explorado. **Psicol. educ.** São Paulo, n. 32, jun. 2011, p. 131-140

processo, o sujeito, o conhecimento, o ensino são gestadas e formuladas. As estruturas hierárquicas do conhecimento são contestadas e outros caminhos de investigação começam a ser trilhados. O conhecimento deixou de ser verdade absoluta e já pode ser reconhecido como uma versão possível e não única dos fatos.

Segundo Hall[116] (1999), a concepção de sujeito moderno, racional, pensante e consciente, situado no centro do conhecimento com identidade estável, conhecido como "sujeito cartesiano", cede lugar à concepção de sujeito descentrado de suas certezas. Sua identidade se constitui numa dinâmica relação com os sistemas culturais aos quais está articulada e com as inúmeras instâncias psíquicas contraditórias que emergem e colocam-no em contato com a ambivalência.

De acordo com Furlanetto (2011, p. 132): "Nessa perspectiva, as concepções de ensino, como intervenção tecnológica, e de professor, como técnico especializado que aplica regras derivadas do conhecimento científico, não são mais suficientes para explicar os fenômenos educativos". Algumas pistas sugerem que esse modelo de professor e de formação apresenta sinais de esgotamento.

Gómez[117] (1992) aponta para os limites e inconsistência dessas concepções. Segundo ele, metáforas como o *professor investigador, o professor como profissional clínico, o professor como prático reflexivo*, entre outras, têm em comum buscar superar a relação mecânica entre o conhecimento técnico-científico e a prática de sala de aula. Dessa forma, busca-se descobrir quem é o professor e como é a sua prática. Diversos autores, como Nóvoa (2007[118], 2009[119]), Schön (2007[120]), Perrenoud (2001[121]), Shulman (1986b[122], 2004[123]), Tardif

[116] HALL, S. **A identidade cultural na pós-modernidade**. 3ª ed. Rio de Janeiro: DP&A, 1999.
[117] GÓMEZ, A. P. O pensamento prático do professor. In: NÓVOA, A. (Org.) **Os professores e a sua formação**. Lisboa, Dom Quixote, 1992.
[118] NÓVOA, António. **Desafios do trabalho do professor no mundo contemporâneo**. São Paulo: SINPRO-SP, 2007.
[119] NÓVOA, António. **Professores: Imagens do futuro presente**. Lisboa: EDUCA, 2009.
[120] SCHÖN, Donald A. **Educando o Profissional Reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2007.
[121] PERRENOUD, Philippe, *et al*. **Formando Professores Profissionais**. (Orgs). 2ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2001.
[122] SHULMAN, Lee S. **Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching**. Educational Research, Vol. 15, N. 2, 1986b, p. 4-14.
[123] SHULMAN, Lee S. **Teaching as Community Property: Essays on Higher Education**. San Francisco: Pat Hutchings, 2004.

(2008[124]), Zeichner (1993[125], 2000[126], 2008[127]), entre outros, pesquisam nessa direção, que enfatiza a importância de se desvelar as experiências, que não se constituem apenas às dimensões técnicas e teóricas, mas à repertórios mais amplos, como pensamentos, sentimentos, necessidades e dilemas dos professores nos processos de formação docente, revelando que exercem docência em cenários complexos.

Segundo Furlanetto (2009a[128], 2009b[129]), esses cenários complexos desafiam os professores e os deslocam da zona de conforto, levando-os a rever constantemente seus princípios e práticas. Ao refletirem sobre suas histórias de formação, percebem que suas práticas expressam os conteúdos aprendidos em cursos de formação, mas também revelam que se aprende a ser professor a partir de experiências significativas. Descobrem, então, um *professor interno*, composto por dimensões conscientes e inconscientes que se revela no seu fazer pedagógico. Essas referências constituem o que denomina de *matrizes pedagógicas*, que resultam das interações sociais nas quais os professores vivenciam relações, ora no polo de quem aprende, ora no polo de quem ensina, e se apresentam como arquivos existenciais que contêm registros sensoriais, emocionais e cognitivos que são acessados quando o professor atua nos espaços pedagógicos.

Para responder às demandas que a prática formula, os professores acessam tais matrizes compostas de dimensões conscientes e inconscientes, fruto não apenas da racionalidade, mas de subjetividade, afetividade, valores e preconceitos. Nesse sentido, as pesquisas revelam professores multifacetados mergulhados em vivências, conflitos e dilemas que exigem deles respostas desconhecidas e soluções, muitas vezes, impensadas. Nesta perspectiva, para Furlanetto (2011, p. 133) a "formação passa a ser concebida como processos nos quais sujeitos, inacabados, contraditórios e multifacetados, com histórias

[124] TARDIF, Maurice. **Saberes Docentes e Formação Profissional**. 9ª ed. Petrópolis: Vozes, 2008.
[125] ZEICHNER, K**. El Maestro como profesional reflexivo. Cuardernos de Pedagogía**. n. 220, 1993, p. 44-49.
[126] ZEICHNER, K. Para além da divisão entre professor pesquisador e professor acadêmico. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. **Cartografias do Trabalho Docente**. Campinas: Mercado das Letras, p. 207-236, 2000.
[127] ZEICHNER, K. Uma análise crítica sobre a "reflexão" como um conceito estruturante na formação docente**. Educ. Soc.**, Campinas, vol. 29, n. 103, 2008, p. 535-554.
[128] FURLANETTO, E. C. Formação de Professores e Experiências Simbólicas. **Revista Múltiplas Leituras**, v.2, n.2, 2009a, p. 239-249.
[129] FURLANETTO, E. C. Matrizes pedagógicas e formação docente. **Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia**. Braga: Universidade do Minho, 2009b.

pessoais esculpidas nas relações que estabelecem com a natureza, com a cultura e consigo mesmos, encontram formas de se desenvolver e crescer".

A formação continuada, por meio de abordagens reflexivas e participativas, mediante um processo de formação que considere os conhecimentos, as crenças e teorias dos professores, representa uma possibilidade, um dos caminhos para se trabalhar. Falar de formação inicial ou continuada, independente de nível ou modalidade de ensino que os professores estejam envolvidos, é falar de processos, não de fatos, eventos ou produtos. Segundo Mizukami (2004[130]) aprender a ensinar é um processo complexo que se prolonga por toda a vida do profissional. A concepção é de que a formação se dá num *continuum* e o processo de formação é visto segundo o modelo reflexivo com base na concepção construtivista da realidade com a qual se defronta o profissional.

Os referenciais sobre "ensino reflexivo", mesmo com diferentes abordagens teórico-metodológicas, vem aglutinando as preocupações com a experiência pessoal e com a prática na formação e no desenvolvimento profissional docente. Ainda segundo Mizukami[131](2002), a premissa básica do ensino reflexivo considera que as crenças, valores e suposições que os professores detêm sobre o ensino, conhecimento, saber, conteúdo, aprendizagem, enfim, tudo que se relaciona com o âmbito escolar, estão na base de sua prática docente. A reflexão proporciona aos professores tornarem-se conscientes das crenças, suposições e teorias pessoais que guiam suas práticas para atingir as metas estabelecidas.

Ademais a profissão do professor é uma atividade cujo caráter essencial está relacionado com o saber, sua produção e utilização. Embora intrínseca, esta vinculação comporta uma problemática que parece perdurar ao longo da trajetória profissional: aquilo que o profissional pensa e faz é um *saber-fazer* resultado de um processo de aquisição e, ao mesmo tempo, de um *saber-prático*, no sentido de um discurso com a práxis, entendida como possibilidade de teorizar a prática e praticar a teoria, como momentos de um mesmo e único processo.

---

[130] MIZUKAMI, M. G. N. Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman. **Revista Educação**. Centro de Educação da Universidade Federal de Santa Maria. V.. 29, n. 2, 2004.
[131] MIZUKAMI, M. G. N., *et al*. **Escola e aprendizagem da docência: processos de investigação e formação**. São Carlos: EdUFSCar, 2002.

## 4.1 Sobre o saber docente

Diversos autores muito contribuem com pesquisas sobre o saber docente e sobre o pensamento do professor, em perspectivas variadas e renovadas que superam interpretações estreitas e acríticas dos significados do saber, de formas de apropriação e da prática propriamente dita. Entretanto, entendo ser desnecessário (re)escrever o que pesquisadores credenciados da área e linha de pesquisa já o fizeram com bastante competência para não soar repetitivo. Nesse sentido, restrinjo-me a alguns teóricos que possibilitem conduzir a linha de pensamento pretendida para fundamentar meu intento. Autores como Lee S. Shulman, Deborah Ball, Liping Ma, Viola dos Santos, entre outros imbricados com estes.

Lee Shulman, professor emérito da *Stanford University* e presidente emérito da *Carnegie Fundation for Advancement of Teaching* (1997-2008), é especialista em formação de professores, avaliação do ensino e da educação nas áreas da medicina, ciência e matemática. É considerado um dos pioneiros nos estudos sobre os conhecimentos do professor. Na década de 1980, elaborou um levantamento dos programas de pesquisas sobre ensino, particularmente sobre os saberes dos professores, no qual identificou e classificou as várias abordagens teórico-metodológicas que orientaram essas pesquisas A pesquisa de Shulman tem foco no estudo do ensino e da formação de professores, a importância do conhecimento pedagógico do conteúdo e da qualidade do ensino na educação superior. Entretanto, destaco em Shulman sua abordagem de diferentes modalidades de conhecimento que os professores têm, como um aspecto importante do processo de pensamento dos professores e que configura sua estrutura epistemológica.

Vale um breve restropecto: na metade dos anos 70 a revolução cognitiva estava a caminho, ou seja, ao mesmo tempo em que as pesquisas do tipo processo-produto deixaram de ocupar o papel preponderante, a psicologia cognitiva ganhou ênfase. Todo ser humano era reconhecido como envolvido com pensamento, raciocínio, julgamento, tomada de decisão e resolução de problemas. Mas parece que isto não se aplicava aos professores que ainda eram descritos exclusivamente em termos de seus comportamentos. Era tempo de introduzir um novo paradigma de pesquisa (Shulman, 2004a[132], p.373).

A pesquisa sobre o ensino passou então a examinar as formas pelas quais o professor em atividade processava a informação. Esse modo de investigação havia recebido um impulso decisivo após a conferência organizada pelo *National Institute of Education,* em 1974, na qual um grupo de trabalho presidido por Lee S. Shulman abordou o tema: "*Teaching as clinical information processing*" e propôs um calendário de trabalho sobre o tema, que culminou, em 1976, na criação do *Institute for Research on Teaching*, na Universidade de Michigan, responsável por importante programa de pesquisa sobre os processos de pensamento dos professores. Shulman tinha como objetivo mapear os diferentes programas de pesquisa sobre o ensino e suas respectivas abordagens e, também, indicar perspectivas futuras para a pesquisa, considerando as lacunas observadas nos programas analisados. Seus estudos de pesquisador do programa *knowledge base* – como ficou conhecido entre nós -, tornaram-se referência para as reformas educativas americanas na década de 90.

Em 1986, ele publicou no *Handbook of research on teaching*, uma análise sobre alguns programas de pesquisa sobre o ensino e sobre a docência. Nesta análise, Shulman reconhece e denuncia a inexistência de um modelo (paradigma) de pesquisa que investigue o processo de transformação do conhecimento da disciplina em conhecimento de ensino.

Na verdade, em 1983, após sua mudança para a *Stanford University*, Shulman observara no estudo sobre ensino que o conteúdo – o que era ensinado nos diferentes componentes curriculares, os conteúdos escolares relacionados a grandes áreas do conhecimento humano – não era levado em conta. Nas investigações, o ensino ainda era considerado como mais uma atividade genérica do que relacionada ao que estava sendo ensinado, por quem, para quem e para qual nível de escolarização. Ele defende, sob uma nova perspectiva, a recuperação do que chamou de *missing paradigm* (paradigma ausente/perdido). Iniciou-se, então, um novo programa de pesquisa, o Projeto *Knowledge Growth in a Profession*, com o objetivo de recuperar o 'paradigma perdido'.

[132] SHULMAN, L. Research on teaching. A historical and personal perspective. In: WILSON, M.S. (Ed). **The Wisdom of Practice. Essays on teaching, learning, and learning to teach**. San Francisco: Jossey-Bass, 2004a, p. 364-381.

Shulman (1986b) formulou ainda o conceito de *conhecimento pedagógico do conteúdo* para integrar o processo e o conteúdo de ensino. Ele escreveu que:

> O mero conhecimento do conteúdo é provável que seja tão pedagogicamente inútil quanto uma habilidade livre de conteúdo. Mas misturar corretamente os dois aspectos da capacidade do professor requer prestar tanta atenção aos aspectos de conteúdo de ensino como dedicamos aos elementos do processo de ensino. [tradução nossa]. (SHULMAN, 1986b, p. 8)

Shulman (1986a)[133] distingue três categorias de conhecimento no desenvolvimento cognitivo do professor, a saber: ***subject matter knowledge, pedagogical knowledge matter, curricular knowledge.***

> *Subject matter knowledge* is that comprehension of the subject appropriate to a content specialist in the domain [...]*Pedagogical knowledge* refers to the understanding of how particular topics, principles, strategies, and the like, in specific subject areas are comprehended or typically misconstrued, are learned and likely to be forgotten. *Curricular knowledge* is familiarity with the ways in which knowledge is organized and packaged for instruction in texts, programs, media, workbooks, other forms of practice, and the like. (SHULMAN, 1986a, p. 26)

O *subject matter knowledge*, ou conhecimento do conteúdo da matéria ensinada (conhecimento do conteúdo específico) representa não só compreender o conteúdo, mas também saber organizá-lo, entender os processos de sua produção, compreendê-lo em diversas perspectivas para poder relacionar diversos tópicos da área de conhecimento, como também articulá-lo com outras áreas promovendo a interdisciplinaridade. Envolve o conhecimento acumulado, histórico e filosófico e cabe ao professor discernir o que é essencial e periférico, flexibilizar e adaptar às diversas perspectivas para torná-lo compreensível aos alunos.

O *pedagogical knowledge matter*, ou conhecimento pedagógico do conteúdo, é o método ou o modo de formular e apresentar o conteúdo, identificar o que pode facilitar o aprendizado, conseguir sanar as dificuldades, por meio de estratégias e materiais pedagógicos.

[133] SHULMAN, L. Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. In: WITTROCK, M. C. (Ed.). **Handbook of research on teaching**. 3. ed. New York: Macmillan. 1986a. p. 3-36

O *curricular knowledge*, ou conhecimento curricular compreende conhecer o programa em si, não só objetivos e conteúdos específicos de cada nível, mas também os materiais de apoio disponíveis para auxiliar na aprendizagem.

**Figura 12**: Representação do modelo Shulman

| DOMÍNIOS DO SABER DOCENTE | | |
|---|---|---|
| I | II | III |
| CONHECIMENTO DO CONTEÚDO *(content knowledge)* | CONHECIMENTO DO CONTEÚDO NO ENSINO *(content knowledge in teaching)* | CONHECIMENTO PEDAGÓGICO *(pedagogical knowledge)* |
| | CATEGORIAS DO CONHECIMENTO DE CONTEÚDO NO ENSINO | |
| | **1-conhecimento sobre a matéria** *(subject matter content knowledge)* | |
| | **2-conhecimento didático da matéria** *(pedagogical content knowledge)* | |
| | **3-conhecimento curricular da matéria** *(curricular knowledge)* | |

**Fonte:** extraído de Saberes e crenças-cap III, no link: http://xa.yimg.com/kq/groups/19983881/648795286/name/Saberes+e+cren%C3%A7as.doc+.

Para Shulman, a expressão *pedagogical content knowledge* é uma combinação entre o conhecimento da disciplina e o "modo de ensinar" e tornar o conteúdo compreensível aos alunos. Dessa forma, ele destaca fortemente uma questão importante para a análise de processos de ensino, que é o conteúdo do ensino, abrangendo ambas as dimensões: o conhecimento do conteúdo do ensino e a maneira como esses conteúdos são transformados em ensino. Shulman[134] (2004b, p. 233) formula sua visão de ensino que inclui um conhecimento, um processo de raciocínio e uma ação, ou seja, o ensino percorre um ciclo, que "começa com um ato de razão, prossegue com um processo de raciocínio, culmina com uma *performance* de comunicação, provocação, envolvimento e sedução para, daí, ao refletir um pouco mais sobre ele, o processo se iniciar de novo". [tradução nossa]

[134] SHULMAN, L. Knowledge and teaching: foundations of the New Reform. (In: Harvard educational review, (1987), vol. 57 (1). pp. 1-22). In: HUTCHINGS, P. (Ed). **Teaching as Community Property: Essays on Higher Education**. San Francisco: Pat Hutchings, 2004b.

As contribuições de Shulman neste momento da pesquisa educacional sinalizam a importância dos estudos acerca dos saberes docentes, como também colaboram com o movimento de profissionalização docente. Com isto, Shulman avança na construção de um modelo pedagógico que define a ação do professor. Em 1987, ele apresenta o Modelo de Ação e Raciocínio Pedagógico, caracterizado em seis fases: a compreensão, a transformação, a instrução, a avaliação, a reflexão e uma nova compreensão.

Em 2004, Shulman publica uma coletânea de seus trabalhos em dois livros, *The Wisdom of Pratice: Essays on Teaching, Learning, and Learning to Teach*, e coloca a compreensão como referência central do trabalho docente, partindo de pesquisas feitas com professores. Segundo Guimarães[135] (2009), neste processo, ele buscou investigar como os professores são capazes de reorganizar os conhecimentos que possuem para a criação de atividades, impregnando-as de uma emoção capaz de envolver os alunos em situações de aprendizagem.

> Mais uma vez, os estudos de Shulman convergem para a compreensão da especificidade do trabalho docente no que diz respeito à articulação com o saber. Para ele, o conhecimento que está na base do ensino vai além do conhecimento da disciplina por si mesma, para uma dimensão do conhecimento da disciplina para o ensino e explica que a chave para distinguir a base do conhecimento do ensino repousa na interseção entre os conteúdos específicos e a pedagogia, na capacidade que um professor tem de transformar o conhecimento do conteúdo que ele possui em formas que sejam pedagogicamente eficazes e possíveis de adaptação às variações de habilidade e contexto apresentados pelos alunos. Para Shulman, *o conhecimento do conteúdo pedagógico é a categoria que mais provavelmente distingue o entendimento do especialista do entendimento do educador.* (GUIMARÃES, 2009, p. 95)

Podemos ver então que Schulman, ao constatar a prevalência de questões didático-pedagógicas nas pesquisas e processos seletivos, defende a recuperação do paradigma perdido, que valorizava o saber docente sobre o conteúdo do ensino e da aprendizagem e distingue três categorias de conhecimento do professor: da matéria que ensina, o pedagógico e o curricular. Fiorentini *et al.*(2000)[136] reconhecem limites ao modelo de Schulman, mas admitem seu mérito ao chamar a atenção para a formação teórica do

---

[135] GUIMARÃES, M. N. **Um corpo em construção: a história de uma professora narrando a constituição dos seus saberes.** 2009. Tese (Doutorado em Educação)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

[136] FIORENTINI, D.; SOUZA JR, A. J.; MELO, G. F. A**. Saberes Docentes: um desafio para acadêmicos e práticos**. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E.M.A. (Orgs**). Cartografias do Trabalho Docente**. Campinas: Mercado das Letras, 2000.

professor, trazendo à tona a questão do conhecimento que os professores têm dos conteúdos que ensinam e do modo como estes se transformam no ensino

De fato, embora para Shulman uma das dimensões mais importantes do conhecimento profissional dos docentes seja o conhecimento pedagógico do conteúdo, aquele referente à capacidade reflexiva que articula ciência e pedagogia e permite tornar cada conteúdo compreensível, quer seja por meio da sua (re)construção, quer seja por meio do conhecimento e controle de todas as outras dimensões, enquanto variáveis na relação ensino-aprendizagem e que é exclusivo de quem ensina, a perspectiva de Shulman (1986b, p. 9) considera como requisito indispensável uma **sólida base de conhecimentos sobre o conteúdo que ensinam**. Desse modo, o **conhecimento do conteúdo é fundamental** visto que está subjacente ao conhecimento pedagógico pois, sintetizando Shulman, *ninguém pode ensinar aquilo que não sabe* e, parafraseando Sá-Chaves[137], *ninguém pode desconstruir aquilo que não sabe*. Esse conhecimento inclui tanto compreensão de fatos, conceitos, processos, procedimentos, entre outros, tanto de uma área específica de conhecimento, quanto daquela relativa à construção dessa área.

Nessa perspectiva, os professores não devem apenas ser capazes de definir as 'verdades aceitas' naquele conteúdo aos seus alunos. Além de saber que 'algo é como é', precisam saber 'porque é' e 'como é'. Devem ser capazes de explicar porque uma proposição particular é julgada como aceitável ou não, porque vale a pena saber aquele conteúdo e como relacioná-lo a outros conteúdos.

A esse respeito, no seu livro A Cultura da Educação, Jerome Bruner reforça sua posição exposta em *The Process of Education*:

> Mantenho firmemente os pontos de vista expressos na minha obra anterior sobre o ensino de uma matéria: a importância de dar ao discente um sentido da estrutura gerativa de uma disciplina, o valor de um 'currículo espiral', o papel fulcral da descoberta auto-produzida na aprendizagem de uma matéria, e por aí diante. (BRUNER, 1996, p. 65)[138].

Para ensinar os alunos de acordo com os padrões de hoje, os professores precisam compreender o assunto profundamente e de forma flexível, para que possam ajudar os

[137] SÁ-CHAVES, I. **Formação, Conhecimento e Supervisão: Contributos nas áreas de formação de professores e de outros profissionais**. *Estudos temáticos 1*. Aveiro: Universidade de Aveiro, 2000.
[138] BRUNER, J. **Cultura da Educação**. Lisboa: Edições 70, 2000.

alunos a criar mapas cognitivos úteis, relacionar uma idéia à outra e evitar concepções errôneas. Os professores precisam ver como as ideias se conectam através dos campos e na vida cotidiana. Este tipo de entendimento fornece uma base para o conhecimento do conteúdo pedagógico que permite aos professores tornar as ideias acessíveis a outros.

Quando Shulman introduziu o termo conhecimento pedagógico do conteúdo, provocou uma onda de artigos acadêmicos sobre o conhecimento do conteúdo dos professores e a importância desse conhecimento para o ensino bem sucedido. Mas vale reforçar que, no quadro teórico de Shulman, os professores precisam dominar dois tipos de conhecimento: (a) conteúdo, também conhecido como conhecimento "profundo" do próprio conteúdo, e (b) o conhecimento do desenvolvimento curricular. Portanto, conhecimento do conteúdo engloba o que Bruner (como citado em Shulman, 1992)[139] chamou de "estrutura de conhecimento", as teorias, princípios e conceitos de uma determinada disciplina. Especialmente importante é o conhecimento do conteúdo que lida com o processo de ensino, incluindo as formas mais úteis de representar e comunicar conteúdos e como os alunos aprendem melhor os conceitos e tópicos específicos de um assunto.

Para propiciar que os alunos aprendam, os professores precisam de vários tipos de conhecimento sobre a aprendizagem. Eles precisam pensar sobre o que significa aprender diferentes tipos de materiais para fins diferentes e como decidir qual é mais necessário para a aprendizagem em diferentes contextos; precisam saber sobre recursos e tecnologias de currículo para conectar seus alunos com as fontes de informação e conhecimento que lhes permitam explorar idéias, adquirir e sintetizar informações, resolver problemas; precisam saber sobre a forma de estruturar as interações entre os alunos para que possa ocorrer a aprendizagem compartilhada. Mas para tal, é necessário que a priori detenham um conhecimento profundo do conteúdo a ser ensinado.

Adquirir esse conhecimento sofisticado e desenvolver uma prática, que é diferente daquela que os próprios professores experenciaram enquanto estudantes, requer oportunidades de aprendizagem para os professores que são mais poderosas do que simplesmente ler e falar

[139] SHULMAN, L. Ways of seeing, ways of knowing, ways of teaching, ways of learning about teaching. **Journal of Curriculum Studies**, 28, 1992, p. 393-396.

sobre novas idéias pedagógicas (Ball & Cohen, 1996)[140]. Professores aprendem melhor através do estudo, fazendo e refletindo, através da colaboração com outros professores, olhando atentamente para os alunos e seu trabalho, e compartilhando o que eles vêem.

## 4.2 A voz de formadores sobre formação

Quero destacar aqui o enfoque adotado por Viola dos Santos (2012)[141] em seu artigo *O que falam formadores sobre a formação (sólida em) matemática de futuros professores que ensinam matemática.* O artigo trata de uma síntese de sua tese de doutorado, na qual produziu "possíveis legitimidades para formação matemática de professores de matemática por meio da produção de textualizações, a partir de entrevistas com educadores matemáticos e matemáticos, e de textos teórico-analíticos, construidos nesse processo". Os treze textos produzidos na tese foram rearranjados e reagrupados por categorias nas três narrativas apresentadas no artigo, representando falas de um formador fictício, organizando assim três direções de possibilidades das ideias acerca da formação matemática de professores que ensinam matemática. (VIOLA DOS SANTOS, 2012, p. 234)

Penso que dessa forma apresentamos três cenários que congregam, de certa maneira, as principais vertentes dessas vozes.

No artigo, Viola dos Santos propõe o questionamento inicial: "pensar se os futuros professores de matemática que atuarão na Educação Básica precisam de uma formação sólida em matemática ou de uma formação matemática sólida". Aparentemente as duas expressões podem significar apenas uma inversão de palavras, mas o autor alerta sobre pensar que "uma formação sólida em matemática abriria possibilidades para diferentes caracterizações do que se pode pensar sobre essa formação" e que "formação matemática sólida se referiria a um conjunto de conhecimentos postos pela comunidade" pode parecer uma discussão ingênua, mas não o é. (VIOLA DOS SANTOS, 2012, p. 233) [grifos meu]

[140] BALL, D. L., & COHEN, D. K. Reform by the book: What is--or might be--the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? **Educational Researcher**, v. 25, n.9, 1996, p. 6-8.

[141] VIOLA DOS SANTOS, J. R. O que falam formadores sobre a formação (sólida em) matemática de futuros professores que ensinam matemática. In: ANGELO, C. L. Et al. (Orgs). **Modelos dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história.** São Paulo: Midiograf, 2012.

A esse respeito, Viola dos Santos inicia sua argumentação a partir de algumas frases ouvidas de colegas matemáticos nos corredores da universidade. As frases foram extraídas de uma coletânea registrada por Baldino (2001)[142] e que estão reunidas sob o título de *A doutrina*, visando mostrar as origens e os fundamentos de certos pontos de vista generalizados entre matemáticos acerca da formação de professores de matemática e que serviram de base para a discussão do subgrupo de pesquisa *teoria da pesquisa-ação*, do Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática da UNESP (GPA), durante os anos de 1999 e 2000.

A partir da constatação de Baldino naquele artigo, acerca de uma ideologia dominante retroalimentada pelo corporativismo acadêmico que regem boa parte dos cursos de formação, caracterizados pela formação em matemática sólida, Viola do Santos opta por engendrar a discussão noutra direção, ou seja, num cenário em que pensemos em formação (sólida em) matemática. Após essa diferenciação, elabora alguns direcionamentos de uma formação inicial que dialogue com demandas da prática de professores. Baseando-se em sua pesquisa de doutorado, que teve como referência a caracterização do conhecimento no Modelo dos Campos Semânticos, de Rômulo Lins, apresenta os três textos de formadores, fictícios, engendrados das discussões que subsidiaram a pesquisa, apresentando suas *crenças-afirmações com justificação.*

O primeiro texto trata da *formação (sólida em) matemática do professor de matemática entre a matemática acadêmica e a matemática escolar*. Resumindo a opinião do 'formador', este reforça a baixa qualidade do ensino, a falta de professores e a pouca estruturação das escolas que não oferecem boas condições para a aprendizagem dos alunos e, portanto, acha que os licenciandos precisam reaprender a matemática básica e aprender a matemática acadêmica na Licenciatura. Afirma que não dá para pensar num professor de matemática que não conheça a matemática acadêmica, nada tão sofisticado, mas a parte básica; o professor precisa entender como a matemática funciona, precisa definir, demonstrar, relacionar as principais ideias; precisa ter segurança naquilo que fala. Ao mesmo tempo que aprendem novos conceitos, também podem reconstruir ideias, conceitos e procedimentos matemáticos básicos; ao mesmo tempo que se debruçam sobre processos axiomáticos, abstratos, da matemática acadêmica, poderiam (re)construir seus conhecimentos em

[142] BALDINO, R. R**.** Grupos de Pesquisa-Ação em Educação Matemática. **BOLEMA**, Rio Claro, v.14, n. 16, 2001, p. 83-98.

relação aos conceitos menos rigorosos, com apelo à relações físicas e concretas, da matemática escolar. Seria algo entre a matemática básica e a matemática acadêmica, que apresentasse discussões desses dois modos de pensar. (VIOLA DOS SANTOS, 2012, p. 236-239)

O segundo texto trata do *fundamentalista e sua formação (sólida em) matemática*. O 'formador' afirma já ter um posicionamento muito claro e sistematizado; acredita que um professor de matemática que pretenda ensinar matemática em qualquer série e nível necessita ter uma formação matemática sólida no curso de Licenciatura; precisa experenciar os conceitos básicos da matemática acadêmica, compreendê-los em profundidade, estabelecer relações entre os temas e construir o arcabouço teórico que permita transitar por diversas áreas do conhecimento matemático. Na opinião do fundamentalista, em cursos de Matemática, o que se estuda é matemática, quem sabe Matemática é o matemático, e este último é quem define o que o professor precisa aprender e também quem ensina o professor; quando se aprende a Matemática (declarando insistir na letra maiúscula), não só se percebe, como fica natural, que essas coisas da matemática escolar são apenas exemplos e meras particularidades da Matemática. Complementa que o que chama de formação matemática sólida seria oferecer aos licenciandos as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, seguindo os conteúdos como estão encadeados axiomaticamente, sistematizados, com as técnicas, demonstrações e conjecturas; de Geometria Euclidiana que tivesse como eixo central as demonstrações, alegando que muitas vezes os alunos não têm uma compreensão profunda do que o professor fala e apenas nas séries seguintes terão condições de entender os conceitos discutidos; prossegue citando diversas disciplinas como Estruturas Algébricas, Espaços Métricos, Variáveis Complexas, pois em todas elas teriam discussões importantíssimas para a formação do professor de matemática. É da opinião que o professor é o mestre, e o aluno, o aprendiz; este tem que estudar muito, 'ralar', procurar os professores, resolver exercícios e tê-los como fonte de saber. Finaliza completando sua opinião: precisa aprender Matemática; aplicações didáticas e pedagogia, é supérfluo. (VIOLA DOS SANTOS, 2012, p. 239-242)

O terceiro e último texto trata da *prática profissional do professor como uma direção para uma formação (sólida em) matemática*. O relato do 'formador' inicia dizendo que essa é uma discussão que não dá para separar da dimensão política, mesmo tentando deixar isto de lado, sempre se esbarra nessa questão. Pensa que temos na literatura em Educação Matemática muitas ideias do que seria uma formação sólida em matemática para futuros professores de matemática da Educação Básica. Como ponto de partida afirma pensar que há diferenças entre saber conteúdo matemático para ser um matemático (ou engenheiro, economista, etc) e saber conteúdo matemático para ser professor de matemática. Na prática profissional existem demandas, no trabalho com o aluno, relacionadas às dimensões matemáticas, pedagógicas, psicológicas, afetivas, sociais, culturais, que requerem uma formação específica do professor. Afirma concordar que há uma *matemática do professor de matemática*, como comenta Rômulo Lins[143], um *conhecimento matemático para o ensino*, como o constructo teórico defendido por Déborah Ball e Hyman Bass[144] e o *conhecimento profundo da matemática escolar* da Liping Ma[145]. Complementa que temos caracterizações elaboradas a partir de estudos empíricos acerca do conhecimento dos professores para educarem seus alunos da Educação Básica e que há certas especificidades, peculiaridades, posturas e atitudes, idiossincrasias do trabalho com educação nas escolas, qualquer que seja a perspectiva pensada sobre a educação. No entanto, sobre essas discussões e trabalhos não estarem nos curso de Licenciatura em Matemática, argumenta que existe uma ideologia dominante que é retroalimentada pelo corporativismo acadêmico, que dita quais os conteúdos devem ou não estar presentes no curso. Temos cursos de Licenciatura, temos um conjunto de ideias sistematizadas sobre o que seria uma boa formação do futuro professor, temos uma formação em nível de mestrado e doutorado para formadores de professores e pessoas interessadas em construir um currículo de licenciatura adequado; mas como irão trabalhar os profissinais que não têm formação para formar professores? Completa citando uma tese de doutorado em Educação Matemática que pesquisou sobre a questão do conteúdo matemático nas Licenciaturas e mostra, na revisão bibliográfica, que os artigos sobre formação de professores pouco se dedicam em questionar o conteúdo matemático na formação inicial, e os que tratam dessa questão, muitas vezes apenas a tangenciam. Outra

[143] VIOLA DOS SANTOS, J.R.; LINS, R.C. **Formação matemática do professor nas disciplinas de conteúdo matemático de um curso de licenciatura em Matemática**. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/272-1-A-GT1_Viola%20dos%20Santos_ta.pdf>. Acesso em: 15 abril 2013.

[144] BALL, D.L., & BASS, H. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), **Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group**. Edmonton, AB: CMESG/GCEDM, 2003, p. 3-14.

[145] MA, L. **Saber e Ensinar Matemática Elementar**. Lisboa: Gradiva, 2009.

constatação é que conteúdos e metodologias não devem ser vistos em separado. Essas são discussões matemáticas (ligadas aos conteúdos) e pedagógicas (ligadas às metodologias) que se constituem como características de um conhecimento específico da prática profissional dos professores de matemática, o que Déborah Ball chama de *conhecimento matemático para o ensino*. Além disso, explicita algumas discussões que Liping Ma faz em seu livro, reforçando que são poucas as pesquisas que mobilizam as ideias de se pensar a *formação sólida em matemática* do professor de matemática. (VIOLA DOS SANTOS, 2012, p. 242-246)

Dessa forma, entendo que essas narrativas englobam em três blocos as vertentes de visão de formadores acerca da formação de professores de matemática que ensinam matemática.

No entanto, para complementar, discorro um pouco sobre as ideias e teorias defendidas pelas duas pesquisadoras citadas na última narrativa.

Deborah Ball, em seu artigo *Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching* (BALL, 2003, p. 3-14), publicado nos Anais da Reunião Anual 2002 do Grupo de Educação Canadense *Mathematics Study*, enfatiza que o problema da aprendizagem dos alunos deve-se mais à qualidade do conhecimento dos professores. A meta é melhorar a aprendizagem da matemática dos alunos, e não apenas produzir professores que sabem mais matemática. Então o problema que se coloca é: O que é que os professores de Matemática precisam saber para ensinar de forma eficaz?

Ball relata que as primeiras tentativas para investigar a relação entre o conhecimento matemático dos professores e suas conquistas com os alunos reuniu resultados que surpreenderam muitas pessoas. Cita, talvez como a mais conhecida, a análise de Begle[146], em 1979, que identificou uma série de variáveis críticas para o ensino e aprendizagem da matemática, especificamente (na pesquisa, Begle descreve cinco domínios principais: professores, currículo, estudantes, meio ambiente e processo instrucional, observando até que ponto cada um impacta sobre as realizações dos alunos em matemática).

[146] Edward Griffith Begle (1914 - 1978) foi um matemático mais conhecido por seu papel como o diretor do *School Mathematics Study Group* (SMSG), o grupo responsável para desenvolver o que veio a ser conhecido como *The New Math*. Publicado postumamente em 1979, *Critical Variables in Mathematics Education: Findings from a Survey of the Empirical Literature,* foi listado pelo *National Council of Teachers of Mathematics* como o seu trabalho mais influente.

De acordo com Ball, uma explicação para essas variáveis críticas que prejudicam a aprendizagem dos alunos, pode estar na compressão do conhecimento que acompanha o trabalho matemático cada vez mais avançado. Tal compressão pode interferir na descompactação do conteúdo que os professores precisam fazer (BALL e BASS, 2000)[147]. Outra explicação pode ser que mais cursos em matemática são acompanhados por experiências com as abordagens convencionais para o ensino de matemática. Essas experiências podem impressionar os professores com imagens e hábitos pedagógicos que não contribuem para que o jovem estudante possa dar significado ao que está aprendendo (BALL, 1988)[148]. Ainda segundo Ball (2003, p. 4), uma importante contribuição para a questão do que significa saber o conteúdo para o ensino foi o conceito de *conhecimento pedagógico do conteúdo* que, como Shulman e seus colegas conceberam, identifica o tipo especial de conhecimento dos professores interligando conteúdo e pedagogia. O conhecimento pedagógico do conteúdo é um tipo de conhecimento que entrelaça conteúdo com aspectos do ensino e da aprendizagem, e mesmo um especial conhecimento pessoal de matemática muitas vezes pode ser inadequado para o ensino. Saber matemática para o ensino requer uma transcendência do entendimento tácito que caracteriza o conhecimento pessoal. Também requer uma compreensão única que entrelaça aspectos de ensino e aprendizagem com o conteúdo.

Ball comenta que, em 1999, o livro de Liping Ma – Saber e Ensinar Matemática Elementar – atraiu ainda maior interesse nesta questão. O estudo de Ma comparou o conhecimento elementar de professores chineses e norteamericanos e produziu um retrato das diferenças dramáticas entre os dois grupos, usando seus dados para desenvolver a noção de *compreensão profunda da matemática fundamental*, um argumento para um tipo de conexão longitudinal com o conhecimento coerente das idéias matemáticas básicas, curricularmente estruturadas. (BALL, 2003, p. 4)

---

[147] BALL, D.L., & BASS, H**. Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics.** In J. Boaler (Ed.), **Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics). Westport,** CT: Ablex, 2000, p. 83-104.

[148] Ball, D.L. **Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.** Unpublished doctoral dissertation. East Lansing: Michigan State University, 1988. Disponível em:< http://www-personal.umich.edu/~dball/.>. Acesso em: 10 set. 2012.

Embora o trabalho de análise de Begle não tenha conseguido demonstrar as conexões esperadas entre o nível de matemática dos professores e a aprendizagem dos seus alunos, parece claro agora que o conhecimento matemático para o ensino tem características que estão enraizadas nas demandas matemáticas do ensino em si. Estas não são facilmente detectadas pelo quanto de matemática alguém tenha estudado. A questão é antiga e continua desafiando pesquisadores e educadores matemáticos, mas novas conquistas podem ser feitas ao abordar esse desafio de novas maneiras. (ibidem)

Para Ball, os esforços substanciais para rastrear os efeitos de conhecimento dos professores sobre o aprendizado dos alunos e a questão sobre o que constitui conhecimento importante para o ensino levaram o seu grupo de pesquisas a trabalhar essa ideia mais a fundo, começando com a prática. Ficaram impressionados com o fato de que a natureza do conhecimento necessário para o ensino é subespecificado. Por um lado, o que os professores precisam saber parece óbvio: precisam saber matemática. Quem pode imaginar algum professor ser capaz de ensinar um asssunto sem entender o conteúdo matemático específico. Por outro lado, menos óbvio, é que a *compreensão do conteúdo matemático para o ensino* implica nos seguintes questionamentos: como os professores precisam saber tal matemática, o que mais precisam saber de e sobre a matemática e como e onde os professores podem utilizar tais conhecimentos matemáticos na prática? Assim, em vez de investigar o que os professores precisam saber, olhando para o que eles precisam ensinar, ou através da análise do currículo que eles usam, o grupo decidiu se concentrar no trabalho do professor, tentando descobrir as formas como a matemática é moldada por suas demandas regulares do dia-a-dia, momento a momento. Estas análises podem ajudar a apoiar o desenvolvimento de uma *teoria do conhecimento matemático para o ensino baseado na prática* (a *practice-based theory of mathematical knowledge for teaching)*. Segundo Ball, esta abordagem é uma espécie de 'análise de trabalho', similar às análises feitas por outras áreas que usam matemática intensivamente, de enfermagem à engenharia e física (HOYLES, NOSS, & POZZI, 2001; NOSS, HEALY & HOYLES, 1997). (BALL, 2003, p. 5)

A fonte do trabalho do grupo de Ball foi um grande banco de dados, documentando um ano inteiro do ensino de matemática em uma terceira série de sala de aula de escola pública nos anos 1989-1990. Ao analisar os registros detalhados da prática, buscaram desenvolver uma teoria do conhecimento matemático, tendo por foco a maneira como este conhecimento é modulado e usado para o ensino. Estudaram a natureza do conhecimento matemático necessário para ensinar, desenvolvendo instrumentos de análise das relações entre conhecimento matemático dos professores, qualidade do seu ensino e desempenho dos alunos. O ensino é visto como um trabalho matematicamente intensivo, envolvendo o raciocínio matemático significativo e desafiador e a resolução de problemas. A investigação foca-se também em intervenções destinadas a melhorar a qualidade e proficuidade do ensino da matemática, seja através de políticas, reformas ou formação de professores. O grupo defende que, dessa forma, pode-se oferecer uma perspectiva sobre a educação matemática de professores em toda a sua carreira, abrindo as portas para uma educação profissional, produzindo um crescimento matemático, ao mesmo tempo intelectual e profundamente útil e prático.

Ainda segundo Ball (2001)[149] não está provado que o número de disciplinas de matemática que o professor tenha tido na sua formação esteja relacionado com melhores performances dos seus alunos, mesmo uma formação matemática ampla de um professor não é garantia de que  este saiba lidar com as complexidades de ensinar matemática elementar.

Nessa direção, Liping Ma (2009) em sua investigação verificou que, embora os professores dos Estados Unidos tivessem tido uma formação matemática mais avançada durante o ensino secundário e durante a sua formação do que os professores chineses, estes últimos mostraram maior compreensão do conhecimento matemático, que se ensina na escola do ensino básico, do que os professores americanos. O estudo de Liping Ma mostra um manancial de exemplos de tarefas, referentes a conteúdos essenciais da matemática básica, que foram aplicados a professores americanos e chineses, de modo a avaliar os conhecimentos matemáticos desses professores e cuja análise confirma essa tese. Partindo do pressuposto, amplamente alicerçado, de que as concepções e a ação dos docentes têm implicações nas aprendizagens, recorrendo à convivência com as duas realidades educativas, Ma formulou a hipótese de existirem diferenças relevantes no que diz respeito ao conhecimento e compreensão dos conteúdos matemáticos elementares, da atitude face à

[149] BALL, LUBIENSKI, MEWBORN. Research on Teaching Mathematics: The Unsolved Problem of Teachers' Mathematical knowledge. In: **Handbook of Research on Teaching**. New York: Virginia Richardson, 2001, p. 433-456.

Matemática, e do ensino em sala de aula, com vantagem para os professores chineses. Esta conclusão pode surpreender-nos, já que os americanos têm licenciaturas, enquanto os chineses, após o nono ano, têm somente mais três anos de preparação escolar.

A trajetória de Liping Ma explica bem suas inquietações acerca do ensino, notadamente em matemática. Quando era estudante em Xangai, por conta da Revolução Cultural Chinesa, Liping Ma foi enviada para uma remota região rural da China para ser 'reeducada' por camponeses, vindo a tornar-se professora da aldeia em que vivia. Sua carreira no ensino da Matemática Elementar iniciou-se, portanto, nesse contexto e durante os sete anos seguintes lecionou os cinco níveis de escolaridade, chegando a ser a diretora da escola local, tornando-se mais tarde Diretora Geral da Educação Básica de todo o Conselho. Regressando à Xangai, fez pós-graduação em Educação e, posteriormente, rumou para os Estados Unidos, onde fez seu doutorado na Universidade de Stanford, sob orientação de Lee Shulman. Atualmente é pesquisadora da *Carnegie Foundation for Advancement of Teaching*. Os estudos comparativos que realizou, e vem realizando neste país e na China, têm-lhe permitido verificar que o sucesso na aprendizagem reside, em grande medida, na formação dos professores, que, no seu entender, deve conferir a estes profissionais um conhecimento disciplinar profundo, bem como destreza pedagógica e didática para ensinar. É autora do livro *Saber e Ensinar Matemática Elementar*, publicado inicialmente em 1999 nos EUA e editado em 2009 pela Gradiva em colaboração com a Sociedade Portuguesa de Matemática.

Ma (2009) deixa claro que sua pesquisa não pretendeu desenvolver um trabalho estatisticamente sofisticado, nem tampouco comparar a formação dos americanos globalmente com a dos chineses, restringiu seu foco num tema muito concreto – as competências de ambos no ensino da Matemática Elementar – e o aborda com questões muito precisas e esclarecedoras. Liping Ma entrevistou os professores do seu estudo tentando perceber como é que tinham obtido o seu conhecimento matemático. Relativamente ao tipo de conhecimento matemático de um professor, Ma argumenta que há aspectos particulares desse conhecimento que derivam do fato de os professores terem de promover a aprendizagem nos alunos e de serem capazes de tornar explícitas as conexões entre os diferentes conceitos. Foram quatro os aspectos focados pelos professores chineses: estudo intenso de materiais para professores, aprendizagens feitas com colegas, aprendizagens feitas através do trabalho com os alunos e o fazer matemática como um meio para aprender.

No prefácio desta obra (MA, 2009, p. 7), Lee Shulman evidencia, entre outras coisas, que o livro: “parece ser um estudo comparativo entre professores de matemática chineses e americanos, mas seus contributos mais importantes são teóricos e não comparativos”. A conclusão global que o livro de Ma expõe é a de que a circularidade da situação em que nos encontramos poderá ser quebrada na formação de professores.

## 4.3 O Contexto sociocultural e epistemológico

O contexto sociocultural está envolvido na construção do conhecimento. Não existe conhecimento isolado no indivíduo, ele está distribuído por todos os elementos do entorno deste sujeito e imbricado entre eles. Também é influenciado pelas condições sociais, culturais e emocionais, bem como pelas crenças, valores e referências estabelecidas ao longo da sua vida. Tudo isso atesta a natureza cultural, social, psíquica e epistemológica do conhecimento e da sua aquisição.

De maneira geral, as discussões que envolvem cultura e, especialmente, as relações entre cultura e cognição, apropriam-se dos termos *cultural* e *social* praticamente como sinônimos, considerando-se suas interdependências. Neste sentido, cultura, a despeito das discussões que procuram estabelecer os limites entre o cultural e o social, que não cabe aqui estender, será considerada como um desdobramento da característica humana de filiar-se, viver em grupo, em sociedade. Da sociedade emerge a cultura ou emergem culturas, que são mais restritas à espécie humana, principalmente quando nos referimos à linguagem. Além deste sentido mais geral, podemos considerar os sentidos mais específicos propostos tanto por Geertz[150] (2008), que recupera o conceito de Max Weber e afirma que o homem é um ser amarrado em teias de significados que ele mesmo teceu, como por Bruner (2000), que demonstra que só através de uma plena participação na cultura é que a mente se realiza.

[150] GEERTZ, C. **A interpretação das culturas**. 13ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

Assumimos, então, que o pensamento é uma faculdade humana individual e coletiva, uma vez que pertencemos a uma sociedade, e as condições em que nos formamos como seres pensantes não são desvinculadas de nossas práticas diárias. Portanto, também a construção social do pensamento matemático, do ponto de vista socioepistemológico, é alimentada pelo binômio social e cultural, em que as representações e práticas desempenham um papel importante na institucionalização de tais conhecimentos e sabedoria.

E nas palavras de Cantoral[151] (2003) a expressão *construção social do conhecimento matemático avançado* se refere ao conjunto das interações, explícitas ou implícitas, que se estabelecem entre os processos avançados do pensamento, a epistemologia da matemática avançada e as práticas humanas altamente especializadas. A relação simbiótica entre estes componentes da construção social do conhecimento garantem um saber compartilhado que responde não só às necessidades biológicas primárias de uma comunidade, como também às intenções e curiosidades que dinamizam um desenvolvimento integral.

A construção social do pensamento matemático pode ser analisada de duas maneiras diferentes, mas complementares. A primeira etapa é construída e produzida por necessidades inviduais-coletivas relativas à funcionalidade e, numa segunda fase, pela motivação intrínseca e extrínseca do indivíduo, para saber mais, o que conduz a um nível mais reflexivo e de caráter epistemológico. Assim, o desenvolvimento do pensamento matemático não se restringe apenas à intenção cognitiva, constituindo-se numa relação simbiótica entre uma intenção reflexiva e funcional, entendendo por funcional algo que possui uma intencionalidade, um propósito funcional, cujo interesse é de caráter coletivo, que modifica ou transforma, e é ligado às práticas institucionais.

Ao tirar partido da premissa e caracterização de Cantoral, podemos dizer que a construção social é constituída das diferentes formas e processos entre as culturas para compreender e modificar seu estado atual. Esta construção é o produto de aspectos filogenéticos e

---

[151] CANTORAL, R. La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. (CD-ROM) **Anais XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática. Tema: Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas**. Blumenau, Brasil: Universidade Regional de Blumenau, 2003.

ontegenéticos, e é precedida pela genialidade do indivíduo, porque a necessidade e a curiosidade são compartilhadas por todos os indivíduos dentro da comunidade.

Paul Cobb (1996)[152] em seu artigo *Perspectivas experimental, cognitivista e antropológica em Educação Matemática*, argumenta que o ensino e a aprendizagem em matemática envolvem a coordenação de análises em três domínios de interpretação, que não se intersectam: os contextos experimental, cognitivo e antropológico. Alega que a afirmação de os contextos experimental, cognitivo e antropológico serem domínios de interpretação que não se intersectam deve-se a Maturana (1978)[153] ao dizer que os constructos usados para desenvolver as interpretações nos diferentes contextos são mutuamente excludentes. Por exemplo, o constructo da operação conceitual é relevante apenas no contexto cognitivo, ao passo que cultura matemática é um constructo antropológico, mas não cognitivo. O desafio é encontrar modos de coordenar as análises desenvolvidas nos vários contextos. Sua discussão volta a atenção para a noção de verdade matemática, normalmente considerada uma noção pré-existente, aceita sem questionamentos. Alega que, embora possamos especular ou acreditar que a matemática é uma criação da mente humana, permanece o fato de que a verdade e a realidade matemáticas independem da mente, ou seja, preexistem quando fazemos ou falamos de matemática. A esse respeito a experiência matemática é distinta da reflexão filosófica: na primeira é descoberta, na segunda é inventada. Não se trata de obrigar a escolher entre a descoberta e a invenção, mas de levar a sério a experiência matemática e explorar a atividade construtiva que acompanha uma experiência de verdade e certeza matemática. Resumindo, a verdade matemática é um fenômeno a ser explicado mais do que ser negado.

No artigo, Cobb (1996, p. 154-158) explicita qual é sua visão acerca do propósito que estrutura cada um dos domínios: no contexto experimental é o de tentar inferir em quê as experiências dos outros são semelhantes; no cognitivo é explicar como é que os alunos têm as experiências matemáticas que eles imaginam ter e, no contexto antropológico, é o de

[152] COBB, P. Perspectivas experimental, cognitivista e antropológica em Educação Matemática. **Zétetiké**, Campinas, v. 4, n. 6, 1996, p. 153-180.
[153] MATURANA, H. R. Biology of language: The epistemology of reality. In: MILLER, G. A. e LENNENBERG (Eds.). **Psychology and biology of language and thought: Essays in honor of Eric Lennenberg.** New York: Academic Press, 1978, p. 27-63.

identificar e explicar aspectos de uma cultura (ou microcultura) através da análise das regularidades e dos modelos que surgem, por exemplo, quando professor e alunos interagem durante a instrução matemática.

Ressalta ainda que alguns teóricos propõem que a relação entre a construção mútua do conhecimento cultural e a experiência individual do mundo em que se vive é dialética. Nessa formulação pode-se concluir que o conhecimento cultural (incluindo a matemática) é continuamente recriado através de ações coordenadas dos membros de uma comunidade. Esta inter-relação proposta entre as análises cognitiva e antropológica da atividade matemática é aplicável tanto ao professor e alunos de uma série inicial quanto a uma comunidade intelectual. Para uma perspectiva antropológica, essas práticas matemáticas institucionalizadas constituem o domínio consensual mutuamente construído pelos membros do grupo. Nesse caso, emerge como uma verdade construída, tornando-se óbvia e prescindido de justificativa, enquanto cognitivamente pode haver uma variedade de significados, qualitativamente distintos para cada indivíduo, seus significados revelam-se mais compatíveis do que compartilháveis.

Aprende-se matemática tanto tentando ajustar suas ações às das demais, construindo assim domínios consensuais, como também participando do processo de negociação e institucionalização dos significados matemáticos. É uma via de mão dupla: de um lado, ao coordenar contextos, criam-se práticas matemáticas institucionalizadas que influenciam as atividades matemáticas individuais; por outro lado, práticas matemáticas institucionalizadas que, ao exercerem um controle sobre as atividades individuais, dão origem às práticas matemáticas institucionalizadas. A aculturação e a institucionalização parecem ser um aspecto necessário na educação matemática e análises que centram somente no aspecto cognitivo contam somente a metade da história de um longo processo. O que merece ser discutido refere-se à forma que o processo de aculturação matemática deveria tomar e como esse processo pode ser relacionado com aquilo que é conhecido sobre os processos cognitivos pelos quais os indivíduos constroem o conhecimento matemático.

> Tenho dito que o ensino aprendizagem em matemática pode ser analisado em três diferentes contextos: experimental, psicológico e antropológico. Esta estrutura de complementaridade, ainda que estes contextos sejam irredutíveis, foi aplicada ao problema da verdade e da certeza em matemática. A análise envolveu uma coordenação dos três contextos matemáticos. Para a perspectiva antropológica os

> teoremas são verdades emergentes institucionalizadas pela atividade coordenada de membros de comunidades matemáticas. Para a perspectiva experimental, a objetividade, a verdade e a certeza surgem da crença inquestionável em uma realidade externa compartilhada que é necessária para e tornada possível pela comunicação interpessoal. Para a perspectiva cognitivista, a matemática enquanto modelo de certeza está relacionada com a abstração reflexiva da atividade, que é o processo fundamental através do qual o conhecimento matemático é construído. (COBB, 1986, p. 173)

Nesse artigo, Cobb (1996, p. 174) enfatiza o contexto antropológico por ser o mais negligenciado. Afirma que teremos sérios problemas se nos restringirmos aos contextos cognitivista e experimental e apresenta quatro opções que denomina de ‘desagradáveis’: a primeira é seguir nossas intuições subjetivas e aceitar o platonismo como teoria explicativa, a despeito do fato de que ele tem sido demolido por críticas filosóficas; a segunda é querer tentar desenvolver o empirismo de Mill[154], a despeito dos golpes dados por Frege[155] e outros. A terceira consiste em nos filiarmos à concepção neovigtskiana baseada no materialismo dialético. A quarta é o construtivismo, este um ponto solipsíquico, já que nos induz a restringirmo-nos somente ao contesto cognitivo.  Conclui essa argumentação:

> A saída mais convidativa que vejo é complementar o construtivismo cognitivo com uma perspectiva antropológica que considere que o conhecimento cultural (incluindo a linguagem e a matemática) é continuamente reconstruído e modificado pelas ações coordenadas dos membros de comunidades. Esta caracterização é compatível com as descobertas de Carraher e Carraher (1987), D’Ambrosio (1985) e SAXE (1988). Além do mais ela recupera a natureza evolutiva do conhecimento matemático revelada pelas análises históricas (Bloor, 1976; Grabiner, 1986; Lakatos, 1976). (COBB, 1996, p. 174)

[154] A filosofia de Stuart Mill funda-se na tradição empirista, principal vertente do pensamento inglês na Modernidade. Para este filósofo, a experiência constitui a base dos processos mentais, sendo a partir delas que se instauram as representações; estas formam, por seu turno, associações e, destas últimas, procedem as ideias. Deste modo, toda ciência rigorosa deve voltar-se para a experiência, já que toda ideia e conhecimento se encontram circunscritos, em última instância, aos seus limites. Tal estudo com base na experiência vale tanto para a lógica e as ciências matemáticas quanto para as ciências humanas.

[155] Um acontecimento dos mais importantes na história da filosofia do século XIX foi a invenção da lógica matemática, cujo principal fundador foi Gottlob Frege. Na filosofia de Frege, os princípios lógicos – e, consequentemente, a aritmética, que, segundo Frege, é estabelecida exclusivamente a partir deles – não são extraídos do mundo exterior pelos sentidos, como quer Mill, por exemplo, em vez disso, são acessíveis tão somente por meio de nossa faculdade racional; são, portanto, princípios universais e imutáveis, não podem depender da faculdade cognitiva relacionada à sensibilidade exterior, nem tampouco de ocorrências, processos ou entidades de natureza psicológicas. Entretanto, Frege não nega que processos subjetivos estejam diretamente envolvidos na produção de conhecimento em geral, nas atividades comunicativas ou nos raciocínios lógico-matemáticos, quando realizados efetivamente pelos sujeitos. Tal como Mill já o fizera, Frege distingue o ato subjetivo do juízo – o reconhecimento de que um pensamento é verdadeiro –, que pode ser explicado por meio de causas psicológicas, do conteúdo objetivo que é considerado verdadeiro no ato do juízo.

Finaliza o artigo dizendo que, à primeira vista, pode parecer um paradoxal: o significado matemático pode estar no mundo (perspectiva experimental), na mente do indivíduo (perspectiva cognitiva) e na interação social (perspectiva antropológica). Mas este aparente paradoxo resulta de se tentar lidar na teorização em educação matemática, com uma complementaridade onipresente, embora implícita. "A complementaridade é então a expressão desse aparente paradoxo entre posições aparentemente opostas". (ibidem)

## 4.4 O papel da História na Educação Matemática

"A História da Matemática, assim como a História da Ciência, insere-se na história geral". Esta frase está na introdução do livro *Uma História Concisa da Matemática no Brasil*, do renomado professor Ubiratan D'Ambrosio (2008, p. 11)[156]. Em seguida, o professor-autor sugere que ao nos referimos a uma época ou a uma região, devemos ficar atentos ao que se passou naquela época, na região e no mundo. "Portanto, ao estudar História da Matemática, o leitor deve ter sempre disponível um bom Atlas Histórico e um livro de História Geral".

> Embora haja insistência para que a Matemática e as Ciências sejam consideradas universais, a História da Matemática e das Ciências não pode se afastar dos contextos sociais, políticos, econômicos e culturais, particularmente religiosos. A incontestável universalidade da matemática acadêmica torna necessária a atenção para uma matemática contextualizada. (D'AMBROSIO, 2008, p. 11)

A publicação de obras relativas à história em domínios específicos da ciência precedeu a constituição mais geral de História da Ciência. Por isso, segundo Miguel e Miorim (2002)[157], não é de se estranhar que histórias da matemática começassem a ser escritas em tempos bem remotos, por volta do século IV a.C. Entretanto, só a partir do início do século XX, artigos sobre história da matemática encontraram espaço de publicação em periódicos referentes à educação matemática. Já a primeira revista específica, *História da Mathematica*, foi criada em 1974, como uma revista de divulgação científica da *International Commission on the History of Mathematics* (ICHM).

---

[156] D'AMBROSIO, U. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. Petrópolis: Vozes, 2008.
[157] MIGUEL, A., MIORIM, M. A. História da Matemática: uma prática social em construção. **Educação em Revista***,* Belo Horizonte, n. 32, 2002, 177-203.

Por sua vez, as primeiras manifestações em estabelecer relações entre a História da Matemática e a Educação Matemática ocorreram em meio à percepção da importância do papel da história da Matemática no processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina. Pode-se destacar pelo menos que, a partir do século XVIII, esta percepção pode ser observada, sendo a obra *Élements de géométrie* (1741), de Alexis Claude Clairaut, geralmente considerada a pioneira nessa direção. Inicialmente, os positivistas do século XIX exaltaram as potencialidades pedagógicas do 'caminho histórico' no processo educativo e, a partir do século XX, começaram a surgir pontos de vistas explícitos dessa manifestação na forma de fragmentos em produções não intencionalmente voltados para tal, como nas obras *Elementary Mathematics from na Advanced Standpoint*, de Felix Klein, e *Science et Méthode*, de Henri Poincaré. Mais à frente é que surgiram outras formas de relacionar a História da Matemática com processos educativos. (MIGUEL, MIORIM, 2002, p. 180)

Há que se ressaltar que um diálogo com as culturas passadas que permita não só aprofundar a nossa compreensão funcional da matemática, mas também contribuir para o nosso crescimento como seres humanos, requer formas adequadas de "dialogismo". Que perguntas colocar para a história e como buscar as respostas a essas perguntas? Que tipo de conhecimento queremos que os professores tenham a este respeito? Como utilizar a história em uma aula específica de matemática?

Para Redford, Furinghetti e Kartz (2007, p. 109)[158], a História em geral, e a História da Matemática em particular, é um "lembrete da finitude da existência humana, dos limites de nossas capacidades cognitivas individuais". Ao mesmo tempo, a história constrói-se como o lugar onde podemos superar a unilateralidade dos nossos significados particulares, é um lugar para entrar em diálogo com os outros e com o histórico conceitual das produções da atividade cognitiva daqueles que nos precederam na sempre mutante vida das culturas. História nos proporciona a experiência que completa o momento efêmero em que vivemos e que nos revela a profundidade das conceituações que partilhamos agora com os nossos contemporâneos. A concepção cultural-epistêmica da história da matemática conduz a uma série de importantes problemas teóricos e práticos.

[158] RADFORD, L., FURINGHETTI, F., KATZ, V. The Topos of Meaning or the Encounter of Past and Present. **Educational Studies in Mathematics**, v. 66, 2007, p. 107-110.

A História da Matemática já vem sendo utilizada para fins educacionais. Entretanto, uma das maneiras é contando episódios pitorescos ou fatos históricos isolados acerca de algum conceito, outra maneira é olhando a História da Matemática como um arsenal de problemas ordenados cronologicamente para serem 'importados' para a sala de aula. Embora este tipo de abordagem possa até incentivar os alunos a se interessarem pelo conteúdo ou mesmo pela matemática, costuma trazer uma visão superficial da História da Matemática.

Segundo Radford[159] (2011, p. 73-74) o uso educacional da História da Matemática muda radicalmente quando se olha para ela como um laboratório epistemológico no qual exploramos o desenvolvimento do conhecimento matemático.

> Entre outras coisas, isto requer que adotemos certo ponto de vista teórico que justifique o *elo* entre o desenvolvimento conceitual moderno e o histórico. Infelizmente, esta questão é frequentemente evitada em uma suposição tácita de que o conhecimento passado tem *algo* a ver com o conhecimento moderno. Quando as coisas se tornam mais explícitas, um suposto paralelismo entre ontogênese e filogênese[160] é frequentemente mencionado. (RADFORD, 2011, p. 73-74)

No últimos anos, paralelamente ao crescente interesse da História da Matemática no ensino da Matemática, tem aumentado a busca de relações entre a Matemática e sua história como uma ferramenta didática e como campo de pesquisa.

Como exemplo disto, Valdés[161] (1996) cita que o *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) incluiu este tema na agenda do *International Congress on Mathematical Education* (ICME), realizada no Japão, em 2000. O documento de discussão prévia ao Congresso considerou uma série de questões, tais como:

- Nível dos sistemas de ensino no qual a História da Matemática é relevante como ferramenta de ensino.
- Consequências do uso da história para a organização da prática da sala de aula.

[159] RADFORD, L. **Cognição Matemática: História, Antropologia e Epistemologia**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

[160] Para melhor compreendermos o significado de filogénese (no grego: *Phylo* = raça e *genetikos* = relativo à génese = origem) e ontogénese (ὄντος, *ontos* "ser", ***genesis*** "criação") importa referir que, cada uma destas ciências estuda a evolução, mas, enquanto a primeira se dedica ao estudo da evolução da espécie, a segunda ocupa-se do estudo da evolução de cada indivíduo desde o embrião até à velhice.

[161] VALDÉS, J. E. N. **Conferencias de Historia de la Matemática (I).** Cuba: EdUTecNe, 1996.

- Utilidade da História da Matemática para os pesquisadores em Educação Matemática.
- Incorporação da História da Matemática no currículo.
- O ensino da matemática pode realizar-se de diferentes perspectivas: heurística, lógica e por meio de uma abordagem histórica.

> O enfoque histórico é uma proposta metodológica que atua como motivação para os alunos, pois é através dessse enfoque que descobrirá a gênese dos conceitos e métodos que aprendem em sala de aula. Em outras palavras, permitirá deixar patente a origem das idéias matemáticas. [...] Se queremos estabelecer uma ligação entre os nossos alunos e a época e a personagem relacionadas aos conceitos estudados, se os alunos conhecerem a evolução dos conceitos ensinados em sala de aula, se conhecerem as motivações e as dúvidas vivenciadas pelos sábios então talvez possam entender como foi descoberto e justificado um problema, um corpo conceitual, etc. Não se trata de que a ordem lógica deva respeitar estritamente a ordem histórica, nem tampouco a ordem didática deva, necessariamente, coincidir com as demais. O que deve ser ressaltado é a necessidade de manter um sentido de proporção quando se utiliza esta abordagem. Por exemplo, se ao combinar o enfoque histórico com a abordagem heurística, as ideias fundamentais permanecerem obscuras e, portanto, o estudante não as tenha incorporado em sua base de conhecimento, conhecer a sua evolução não o ajudará na resolução de problemas. Relacionar um nome e uma data com uma ideia, conceito ou procedimento não é suficiente. (VALDÉS, 1996, p.11, tradução nossa)

Valdés ainda acrescenta:

> A linha de pesquisa que ainda não foi totalmente desenvolvido, é a busca de elementos históricos como um recurso educacional que utiliza nossos conhecimentos acerca de obstáculos didáticos, epistemológicos, ontogenéticos e de problemas relacionados com o processo de ensino e aprendizagem, entre os quais está a influência das crenças e concepções dos professores em seu trabalho. (VALDÉS, 1996, p.11, tradução nossa)

Por outro lado, este autor ressalta que não reivindica ser este o único, ou o melhor, dos métodos a serem utilizados, mas uma alternativa de trabalho que tem se mostrado útil em várias situações. Entretanto, alerta que o uso da História da Matemática, em muitas situações, têm feito mais mal do que bem, por conter abusos tradicionais ao invés de usos racionais.

Em sua pesquisa acerca das fundamentações teóricas das abordagens da História da Matemática no ensino desta disciplina, Motta (2007)[162] afirma:

---

[162] MOTTA, C. D. V. B. **História da matemática na educação matemática: espelho ou pintura?** In: *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática-IX ENEM*. Belo Horizonte, 2007.

> Um dos pontos essenciais para a integração da História da Matemática na Educação Matemática está centrado no papel do professor: os valores que influenciam na sua visão da História da Matemática; suas preocupações com os fatores emocionais, sociais e culturais nos processos de aprendizagem; o grau de conhecimento histórico e matemático que ele possui; sua formação inicial e continuada e suas possibilidades de acesso à bibliografia especializada entre outros aspectos. (MOTTA, 2007, p. 8-9)

Furinghetti e Paola (2003, p. 37)[163] discutem em seu artigo como a História da Matemática pode ser usada em apoio ao ensino da Matemática, mas alertam que podemos enfrentar a questão do ponto de vista do professor. Se um professor é encantado pela história - porque gosta ou confia na história como suporte para o ensino, ou porque um colega que admira faz uso da história –, esse professor tem que planejar uma sequência de ensino que deseja implementar em sala de aula no campo de interface entre questões históricas e de ensino do conteúdo. (O mesmo é demandado aos organizadores de currículos). Todavia há as premissas que os dois domínios, de história e ensino da matemática, se entrelaçam e que as potencialidades e dificuldades oferecidas pela parte sobreposta devem ser convenientemente exploradas. (na pesquisa relatada, para essas premissas, designam um hipertexto para os professores, contendo materiais históricos e educativos adequados para a concepção de uma sequência de ensino)

Os autores afirmam que, a partir da literatura neste campo, temos duas abordagens possíveis de utilização da História da Matemática em sala de aula. Na primeira abordagem, a história tem a função principal de promover o interesse dos alunos em matemática. Na segunda abordagem, a história é integrada ao ensino da Matemática como um suporte para perseguir os objetivos matemáticos a partir de um novo ponto de vista e em um novo ambiente de trabalho. Segundo alguns autores a historiografia (em geral, não só de matemática) pode ser vista como um artefato. Como um artefato, a História da Matemática, juntamente com os seus modos de utilização, tal como interpretado pelo usuário (professor ou aluno), pode se tornar uma ferramenta de ensino e aprendizagem (se o usuário é capaz de usá-lo para suas finalidades). (FURIGUETTI, PAOLA, 203, p. 38)

[163] FURINGHETTI, F., PAOLA, D. History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom**. Mathematics in School**, v. 37, n. 1, 2003, 37-41.

Quando a história é utilizada com o propósito auxiliar para atingir objetivos matemáticos específicos (segunda abordagem), planejar uma sequência de ensino requer um trabalho competente nos campos da história e da educação, que pode não ser simples (na pesquisa apresentam em esquema do caminho para preparar materiais históricos para a sala de aula) e acreditam que o professor deixado sozinho pode encontrar dificuldade para realizar este caminho, porque são muitas as questões envolvidas. Muitas vezes, neste caso um manual de História da Matemática pode não ser suficiente e o professor terá que ir às fontes primárias. O esquema enfatiza a vasta gama de competências necessárias pelo professor e nos lembra mais uma vez a importância do problema permanente de formação de professores em História da Matemática.

Dessa forma, as funções da História da Matemática na formação de professores estão vinculadas às diferentes concepções de matemática. Para os que veem a Matemática como uma ciência pronta e acabada e o ensino como uma relação de dominação, a História da Matemática encontra pouco espaço no processo de ensino-aprendizagem. Em contrapartida, estudar a História da Matemática como uma das múltiplas manifestações culturais da humanidade torna o conhecimento matemático significativo e facilita o entendimento das relações entre este conhecimento e o homem, em um dado contexto cultural. Evidencia-se, assim, a importância da visão epistemológica do professor sobre a Matemática, a História da Matemática e a educação para um trabalho que integre a História na Educação Matemática.

Na opinião de Wagner Valente (2004)[164] temos:

> Parece que, a inclusão da História da Matemática como disciplina formadora de professores de Matemática, através de clássicos manuais de ensino, remete ao que ocorreu com a História da Educação, pensada como disciplina formadora de professores e propensa a estabilizar o passado, como modelo a ser seguido pelos futuros mestres. E, ainda, esses mesmos manuais constituirão referência para a elaboração de estudos históricos, configurando essa produção. Desse modo, estamos diante de uma situação em que as questões didáticas, que nortearam a elaboração dos manuais, organizam a própria produção científica. (VALENTE, 2004, p. 29)

[164] VALENTE, W. R. A matemática na escola: um tema para a história da educação. In: **Anais do Encontro da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática – História do Ensino da Matemática em Portugal.** Beja, 2004, p. 21-31.

Valente procura então mostrar que os estudos sobre História da Matemática escolar vêm, em grande medida, se filiando à História da Matemática, conformada pela Matemática, mas por uma Matemática herdeira de uma "filosofia implícita" estruturalista, o que no seu entender acaba, por fim, não dando conta dos processos históricos de escolarização desse saber.

Já Schubring (2001, p. 297)[165] defende que as pesquisas no terreno da história da educação matemática devem evitar qualquer separação entre produção e reprodução da cultura. Em outras palavras, o pesquisador, em suas investigações, deve evitar trabalhar, implícita ou explicitamente, com o pressuposto maniqueísta que associa produção com invenção e ensino com socialização, divulgação ou recepção passiva da cultura.

Entretanto, segundo Radford (2011, p. 75), pesquisadores da Educação Matemática quando se voltam para a História da Matemática se dão conta de que os livros costumam apresentar a história como uma sequência de eventos que não necessariamente pode responder as questões epistemológicas, pelo contrário, muitas vezes desvelam narrativas episódicas implicitamente sob a forma de uma epistemologia apriorista[166] de estilo platônico. Isso conduz a olhar as realizações matemáticas do passado como esforços desajeitados sempre na direção da formulação conceitual dos nossos tempos. No entanto parece implausível que matemáticos do passado pudessem ter tido uma visão, mesmo que opaca, dos conceitos modernos e que se esforçassem, em épocas remotas, para trazer seus conceitos o mais próximo do que são hoje. Tão logo pudermos deixar o domínio da epistemologia apriorista platônica de lado e, consequentemente, não consideramos mais a história como relato de descobertas de forma atemporal, descobertas por homens afortunados, teremos que fazer uma escolha explícita e dizer o que queremos ver no passado. Em outras palavras, teremos que identificar os dados históricos que nos interessam.

Dados históricos são interessantes, não por si só, mas no que diz respeito ao quadro conceitual no qual a pesquisa se apoia e este quadro torna possível oferecer uma explicação teórica dos dados ou fatos e eventos. No caso de investigação epistemológica, a busca por

[165] SCHUBRING, G. Production mathématique, enseignement et communication. **Revue d'histoire es mathématiques**, v. 7, 2001, p. 295-305.

[166] Etimologicamente, significa o processo de raciocínio *a priori*, que consiste em partir de princípios anteriormente aceitos.

dados históricos relevantes será moldada particularmente pela nossa própria percepção de como se desenvolve o conhecimento matemático. Selecionamos o que achamos que pode ter acontecido no passado. Assim, dependendo da corrente epistemológica adotada, dados interessantes para um podem não ser para outro, ou também podem concordar em algum caso, mesmo que seja lido e interpretado de forma diferente. Essa comparação nos mostra como uma interpretação da história pode ter muitas versões dependendo do intérprete.

Avançando nesse raciocínio, suponhamos por simplicidade que fizemos uma feliz escolha epistemológica sobre *o que ver* no passado, mas quando finalmente começamos ver o tão desejado objeto "percebemos que o que estamos 'vendo' é necessariamente mediado por nossas próprias concepções sociais e culturais *modernas* sobre o presente e o *passado"*. (RADFORD, 2011, p. 77)

Mesmo nos esforçando para ver um acontecimento histórico com isenção, não teremos êxito, pois sempre traremos nossas concepções culturais conosco. E não basta conhecer o problema, há que se entendê-lo em "um processo dialógico no qual dois horizontes (o passado e o presente) se fundem" (GADAMER, 1975, *apud*, RADFORD, 2011, p. 78).

A contextualização desejada frente ao choque cultural que ela provoca, bem como a ingenuidade valorizada nos estudos etnomatemáticos e antropológicos, não passam de manifestações dessa dialogicidade entre mundos diferentes. O significado do 'real' de um conceito passado é inatingível, sempre será filtrado pela nossa estrutura e pelas nossas concepções modernas socioculturais da história; o contato com horizontes diferentes, acrescido do fato que o horizonte presente está sempre em movimento, a história de qualquer conceito ou teoria estará sempre sendo reescrita. (RADFORD, 2011, p. 78-79)

Se adotarmos, como defendido na perspectiva sociocultural, que o conhecimento é um processo cujo produto é obtido através de negociações de significado que resulta na atividade social dos indivíduos e é abarcado pelo contexto cultural no qual os indivíduos estão inseridos, então a História da Matemática tem muito a oferecer para a epistemologia da matemática.

> De fato, análises histórico-epistemológicas podem nos fornecer informações interessantes sobre o desenvolvimento do conhecimento matemático dentro de uma cultura e ao longo de diferentes culturas e nos fornecer informações sobre a maneira com que os significados surgiram e mudaram; precisamos compreender as

> negociações e as concepções culturais que fundamentam esses significados. O modo pelo qual uma ideia antiga foi forjada pode nos ajudar a encontrar significados antigos que, através de um trabalho didático adaptativo provavelmente pode ser redesenhado e tornado compatível com currículos modernos no contexto da elaboração de sequências de ensino. [...] Como Cantoral (1995, p. 57)[167] assinalou, precisamos reconhecer a complexidade de uma teoria moderna e desvendá-la histórico-epistemologicamente, a fim de reconstruir representações acessíveis para nossos alunos. [...] Teremos que ter em mente, é claro, que um antigo problema ou uma situação matemática antiga nunca mais será a mesma. Parece que Heráclito tinha razão quando, estando de pé na margem do rio e olhando o fluxo de água, disse que não é possível entrar no mesmo rio duas vezes. (RADFORD, 2011, p. 93-94).

Um caminho que nos leva a perceber que existem vários tipos de matemática, irredutíveis uns aos outros, não tem sido curto. E essa situação não pode ser atribuída ao acaso. Tem sido difícil aceitar que existe uma diversidade de maneiras de viver e construir o conhecimento, que existe uma diversidade de tipos de conhecimento matemático que são genuínos em si mesmos. Críticos têm dificuldade de apreender o significado de um empreendimento antropológico, costumam reduzir a uma antropologia de curiosidades. Tentativas antropológicas de entender outras matemáticas costumam ser acusadas de demagógicas. Claro que o pensamento lógico é um dos produtos mais notáveis do pensamento humano. Entretanto o problema é compreender as circunstâncias históricas, políticas, econômicas, culturais e sociais que tornaram possível tal forma de pensar.

Sempre usei a História da Matemática em apoio ao ensino da Matemática. Mais que isso, compartilho da ideia de Radford (2011), de olhar para ela como um laboratório epistemológico no qual exploramos o desenvolvimento do conhecimento matemático. O mais importante é o olhar que voltei para a história e a pergunta que me orientou buscar resposta na história, me permitiram uma viagem pela origem e evolução do pensamento estocástico, em particular o probabilístico. Isto determinou fortemente as opções de busca de referenciais para a revisão de literatura em uma das dimensões que pretendi acumular para o desenvolvimento da tese. Dessa forma, a História da Matemática não é utilizada como foco da tese, mas sim como arcabouço dela. é utilizada como arcabouço para a tese, não como foco  prioritariamente

---

[167] CANTORAL, R. Acerca de las contribuciones actuales de uma didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylo**r**. **Mathesis**, v.11, n.1, 195, p. 55-101.

## 4.5 Sobre crenças e concepções dos professores

O estudo acerca das concepções de professores, como também de outros profissionais ou grupos humanos, de acordo com Ponte[168] (1992, p. 185), "baseia-se no pressuposto de que existe um substrato conceptual que joga um papel determinante no pensamento e na ação". É um substrato de natureza diferente da natureza dos conceitos específicos, trata-se de uma forma de pensar, de ver o mundo e, portanto, de uma forma de organizar os objetos e ações. Assim, não é facilmente revelado ou observável, sendo constituído ao longo do processo de formação do indivíduo no âmbito das inter-relações culturais na família, na escola, na sociedade.

> As concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva. Atuam como uma espécie de filtro. Por um lado, são indispensáveis pois estruturam o sentido que damos às coisas. Por outro lado, atuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de actuação e compreensão.
>
> As concepções formam-se num processo simultaneamente individual (como resultado da elaboração sobre a nossa experiência) e social (como resultado do confronto das nossas elaborações com as dos outros). Assim, as nossas concepções sobre a Matemática são influenciadas pelas experiências que nos habituamos a reconhecer como tal e também pelas representações sociais dominantes. A Matemática é um assunto acerca do qual é difícil não ter concepções. É uma ciência muito antiga, que faz parte do conjunto das matérias escolares desde há séculos, é ensinada com carácter obrigatório durante largos anos de escolaridade e tem sido chamada a um importante papel de seleção social. Possui, por tudo isso, uma imagem forte, suscitando medos e admirações. (Ponte, 1992, p. 185, tradução nossa)

Dessa forma, o modelo de professor, de estudo e de prática educativa é calcado durante a vivência do indivíduo ao longo de sua formação, notadamente como profissional da educação. Em particular, no que diz respeito à Matemática, esta geralmente é considerada uma disciplina difícil, que lida com abstrações e muitos cálculos, atraindo apenas pessoas com uma queda especial pela mesma. Mesmo que possa existir uma parte de verdade, o conjunto dessas crenças é simplista, mas seus efeitos se projetam de forma negativa no processo de ensino e aprendizagem. Assim, os professores como responsáveis pela gestão

[168] Ponte, J. P. Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In: **Educação Matemática: Temas de Investigação**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992, p. 185-239. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm. Acesso em: 14 fev. 2013.

de suas práticas em sala de aula, ocupam um papel fundamental na organização das experiências de aprendizagem dos seus alunos - um lugar chave para influenciá-los com as suas concepções.

Por exemplo, segundo Fiorentini[169] (1995):

> O professor que concebe a Matemática como uma ciência exata, logicamente organizada e a-histórica ou pronta e acabada, certamente terá uma prática pedagógica diferente daquele que a concebe como uma ciência viva, dinâmica e historicamente construída pelos homens, atendendo a determinados interesses e necessidades sociais. (Fiorentini, 1995, p. 4)

Fiorentini ainda alerta que não basta descrever os diferentes modos de ensinar a Matemática, uma vez que por trás de cada modo de ensinar se esconde uma particular concepção de ensino, de aprendizagem e mesmo da Matemática e da Educação. Segundo ele, “o modo de ensinar sofre influência também dos valores e das finalidades que o professor atribui ao ensino da matemática, da forma como concebe a relação professor-aluno e, além disso, da visão que tem do mundo, de sociedade e de homem” (p. 4).

Nesse sentido, passa a ter relevância como os professores vêem a Matemática e o modo como se aprende Matemática, bem como suas práticas e atitudes se relacionam com suas concepções e mesmo com suas crenças. E principalmente em que grau essas crenças e concepções moldam seu comportamento implicando, muitas vezes, em resistências às mudanças.

Diversas pesquisas e produção teórica sobre as crenças, os saberes profissionais e as práticas dos professores têm sido realizadas, destacando-se pela sua influência os trabalhos de Shulman (1986) e Schön (1983). Ainda referente a crenças e concepções dos professores e sua relação com a prática escolar podemos citar Thompson (1992), Raymond (1997), Schoenfeld (1983), Fiorentini (1995), Cazzorla e Santana (2005), Brito (2001), Bolzan (2002), Zakaria e Maat (2012), Zalská (2012), na área específica ou de interface com educação matemática, e Rokeach (1981), na área da psicologia.

O interesse no estudo das crenças e concepções teve início na década de 70 motivado pela mudança de paradigma na investigação do ensino que se deu naquela época, em âmbito

[169] FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké,** v.3, n. 4, 1995, p. 1-38.

internacional, transferindo o objeto de estudo do comportamento do professor (processo-produto) para um enfoque centrado no pensamento do professor e nos processos de tomada de decisão. Segundo Thompson[170] (1992), esta mudança de foco acabou levando a identificar e compreender o sistema de crenças e percepções, bem como outros elementos que influem nos pensamentos e decisões dos professores. Em relação a este ponto de vista, Thompson discute questões como: a distinção entre crenças e conhecimentos; as relações entre crenças sobre o ensino e a prática docente; as relações entre concepções sobre a Matemática e a prática docente; as concepções dos professores sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática; as mudanças das concepções dos professores.

Thompson (1992) distingue crenças de conhecimento, associando ao conhecimento critérios de validade, inexistentes para crenças. Para a autora, não há que se opor crenças e conhecimento; o conhecimento é visto em correspondência com o mundo e com as práticas sociais e sua validade é atribuida em termos de eficiência e operacionalidade, já as crenças são vistas como uma forma primitiva do saber, não havendo suporte empírico que as valide.

No entanto, as crenças intervêm necessariamente em todo o conhecimento.

> Existe um ponto, para além do qual não consegue ir a racionalidade humana, entendida como a capacidade de formular raciocínios lógicos, definir conceitos com precisão, e organizar de forma coerente os dados da experiência. Para além da racionalidade entramos no domínio das crenças, que são indispensáveis pois sem elas o ser humano ficaria virtualmente paralisado, sem ser capaz de determinar cursos de ação. (Ponte, 1992, p. 8)

Vale ainda ressaltar que todo conhecimento tem um componente individual e um coletivo e, embora não seja possível traçar uma linha demarcadora entre eles, é inegável o aspecto decisivo da componente coletiva no processo de construção do conhecimento. Segundo Ponte (1992), o caráter coletivo das concepções e dos saberes permite dizer que têm sua origem nas estruturas organizativas, nas relações institucionais, e nas dinâmicas funcionais em que estão integrados os seres humanos. “Geram-se nas interações inter-individuais e a sua evolução é muito marcada pelas dinâmicas coletivas” (p. 10). Nesse sentido, por um lado as concepções influenciam as práticas ao apontar caminhos e tomadas de decisão e, por

---

[170] Thompson, A. G. Teachers’ beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In: D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of research in mathematics teaching and learning**. New York, NY: Macmillan, 1992, p. 127-146.

outro lado, as práticas são condicionadas por diversos fatores que geram concepções compatíveis a elas.

Há que se considerar também a importância da dimensão pessoal do conhecimento e distinguir entre o saber imposto ao indivíduo pelo contexto sócio cultural e com o qual ele não se identifica, e aquele por ele produzido e do qual se apropria.

Zalstá[171] (2012) afirma que, em geral, há certo consenso de o termo concepção ser usado como um constructo contendo crenças como subconjuntos, juntamente com outras subcategorias, tais como conhecimento, opiniões, preferências. Thompson (1992) aponta que as concepções do professor sobre a natureza da matemática podem ser vistas como crenças que o professor constrói, de forma consciente ou inconsciente, conceitos, significados, regras, imagens mentais e preferências sobre a disciplina de matemática.

Ponte (1992) aponta que pode ser pertinente distinguir entre concepções *manifestadas* pelos professores, que estes descrevem como sendo as suas, e as concepções *ativas*, que de fato informam a sua prática, uma vez que a distância entre estes dois tipos de concepções pode ser bastante apreciável.

> As concepções manifestadas podem sofrer uma influência significativa do que no discurso social e profissional é tido como adequado, mas não serem (parcial ou integralmente) capazes de informar a prática. Isto pode ocorrer por uma variedade de fatores: (a) falta de recursos materiais e organizativos, (b) falta de recursos conceptuais (não saber como vencer as dificuldades que a sua concretização suscita), ou ainda (c) pelo esforço exagerado que se antevê como necessário. Admitindo a distinção entre estes dois tipos de concepções, podemos dizer que existe (por definição!) uma relação forte entre as concepções ativas e as práticas, podendo ser mais forte ou mais fraca a relação entre as concepções manifestadas e as práticas (e daí os problemas da consistência). (Ponte, 1992, p. 25, tradução nossa)

Cazorla e Santana (2005)[172] assume como Ponte que as concepções podem ser vistas como o pano de fundo organizador dos conceitos, constituindo-se em *miniteorias*, semelhantes aos pressupostos teóricos gerais dos cientistas, condicionando a forma de abordagem das

---

[171] Žalská, J. Mathematics Teachers' Mathematical Beliefs: A Comprehensive Review of International Research (Matematicka přesvědčeni učitelů matematiky: přehled mezinarodniho vyzkumu). **Scientia in educatione**, v. 3, n. 1, 2012, p. 45–65.

[172] CAZORLA, C.; SANTANA, E. Concepções, Atitudes e Crenças em Relação à Matemática na Formação do Professor da Educação Básica. GT 19-Educação Matemática. In: **Anais 28ª Reunião ANPED- 40 anos de Pós-Graduação em Educação no Brasil: Produção de conhecimentos, poderes e práticas.** Caxambu_MG**,** 2005.

tarefas, muitas vezes orientando para abordagens inadequadas. As autoras (p. 4) sintetizaram as concepções mais arraigadas listadas por Ponte, a saber:

> a) O cálculo é a parte mais acessível e substancial da Matemática, mas isso significa reduzi-la a seu aspecto mais pobre e de menor valor formativo;
>
> b) A Matemática é reduzida a sua estrutura dedutiva;
>
> c) A Matemática seria o domínio do rigor absoluto, da perfeição total;
>
> d) A Matemática é uma ciência abstrata, pura e autossuficiente;
>
> e) Nada novo, interessante ou criativo pode ser feito em Matemática, a não ser pelos *gênios.*

Tais concepções têm raízes históricas e remontam a um período em que preponderava o ensino elitista e no qual a Matemática servia como filtro seletivo. Para as autoras, a visão da Matemática com predominância dos cálculos, reflete uma redução do saber aos procedimentos, mais utilizada nos níveis elementares; a visão axiomática e de rigor reflete o domínio do saber argumentativo, mais expressivo em níveis mais avançados; a concepção de ciência abstrata está mais ligada aos objetivos educacionais; a relação com a genialidade está ligada à concepção pedagógica do papel do aluno na aprendizagem, embora para outros pesquisadores, como Moron e Brito[173] (2001, p. 267), a última concepção seja considerada uma crença, uma vez que “as concepções são relativas ao domínio cognitivo enquanto que as crenças são altamente influenciadas pela cultura e referem-se à aceitação de uma ideia sem o devido suporte teórico”.

Sem ter a intenção de abordar aqui de forma mais aprofundada as estruturas das crenças, por fugir do foco de nosso trabalho, é interessante trazer algumas colocações de Jana Zalská para as características das crenças que são relevantes para a pesquisa educacional, como a tangebilidade de uma crença, já que muitas vezes se mantém uma crença sem ter consciência dela. Segundo Zalská (2012, p. 50), para saber sobre as crenças, precisamos contar com a inferência. Especificamente, pode-se inferir as crenças de ações e intenções das pessoas ou do que elas dizem. Ao mesmo tempo, a inferência não é um processo

[173] MORON, C.F., BRITO, M. R.F. Atitudes e concepções dos professores de educação infantil em relação à Matemática. In: BRITO, M. R. F. (Org). **Psicologia da Educação Matemática: teoria e pesquisa.** Santa Catarina: Insular, 2001, p. 263-277.

particularmente fiável, especialmente se as fontes são poucas. O problema metodológico de reconhecimento de crença e inferência levou a estabelecer distinção entre crença declarada (reconhecida conscientemente) e promulgada (inferida a partir da observação).

Para delinear a complexidade do desenvolvimento de crenças, Zalská usa em sua pesquisa, como guia dos fatores que influenciam as práticas de professores de matemática e as crenças matemáticas, o modelo projetado por Raymond[174] (1997). Embora não considere o modelo suficientemente abrangente, por não levar em consideração alguns fatores, como as experiências de vida do professor que podem influenciar diretamente suas crenças, e também não enfatizar a influência cultural sobre as crenças, adotou-o assim mesmo.

A pesquisa de Raymond (1997) investigou a relação entre as crenças e as práticas de ensino de matemática de um professor iniciante de escola primária e os resultados indicaram que a prática do professor está mais estreitamente relacionada às crenças sobre o conteúdo de matemática do que às crenças sobre a pedagogia matemática, sendo que as crenças sobre o conteúdo matemático foram altamente influenciadas pelas experiências pessoais do professor como estudante.

Já Zakaria e Maat[175] (2012), a fim de determinar a relação entre as crenças e as práticas de ensino em escolas secundárias, realizaram sua pesquisa com 51 professores de sete escolas secundárias, agrupados de acordo com suas experiências de ensino. As dimensões das crenças matemáticas analisadas consistiram de crenças em relação à natureza da matemática, crenças para o ensino de matemática e crenças em relação à aprendizagem matemática. O resultado não revelou diferença significativa entre os professores menos experientes e mais experientes nos aspectos de crenças matemáticas, havendo apenas uma moderada correlação entre as suas crenças e práticas de ensino de matemática.

O surgimento de novas orientações curriculares, a participação em ações de formação ou ainda a demanda que se apresenta pelo uso de tecnologias emergentes e recursos digitais

---

[174] RAYMOND, A. M. Inconsistency between a Beginning Elementary School Teacher's Mathematics Beliefs and Teaching Practice. **Journal for Research in Mathematics Education***, v*. 28, n. 5, 1997, p. 550-576.
[175] ZAKARIA, E.; MAAT, S. M. (2012). Mathematics Teachers' Beliefs and Teaching Practices. **Journal of Mathematics and Statistics**, v. 8, n. 2, 2012, p. 191-194.

educativos suscitam novas perspectivas em relação à prática pedagógica. No entanto, a tendência que se observa nos professores é para a acomodação dos novos elementos nas estruturas conceptuais pré-existentes, modificando-os apenas o necessário para deixar aquelas estruturas basicamente inalteradas.

Estas constatações implicam um desafio que se impõe atualmente com bastante urgência. Se as concepções dos professores não forem as mais adequadas ao desempenho do seu papel profissional, pelo menos sob certos aspectos frente aos desafios emergentes, impõe-se a questão de saber como é que elas podem mudar. O problema refere-se tanto aos professores já em exercício da prática profissional, ou seja, de uma vivência sobre a qual podem refletir, quanto aos alunos dos cursos de formação inicial, futuros professores que se preparam para a atividade profissional que ainda está porvir.

> Mudanças profundas no sistema de concepções só se verificam perante abalos muito fortes, geradores de grandes desequilíbrios. Isto apenas sucede no quadro de vivências pessoais intensas como a participação num programa de formação altamente motivador ou numa experiência com uma forte dinâmica de grupo, uma mudança de escola, de região, de país, de profissão. A mudança de concepções e de práticas constitui um processo difícil e penoso em relação ao qual as pessoas oferecem uma resistência natural e de certo modo saudável (Ponte, 1992, p. 26-27)

De acordo com esse autor, algumas investigações com o objetivo de promover mudanças ambiciosas nos professores acabaram por se concluir com resultados francamente modestos ou mesmo desanimadores. Ademais, os processos de formação não podem ser concebidos como a imposição de um conjunto de "verdades", mas exigem antes de tudo uma atitude diferente, de grande respeito pelos participantes. A formação deve ser entendida como um processo de troca e de criação coletiva, em que quem conduz intervém com certos conhecimentos e competências, mas está igualmente a aprender com os outros, ou seja, a formação é apenas mais um processo partilhado de aprendizagem (Ponte, 1995, p. 27).

Em seu livro, Rokeach[176] (1981) apresenta mais uma elaboração de seu contínuo interesse acerca dos sistemas de crenças e, conforme ele mesmo anuncia no prefácio, sua visão é de que as crenças, atitudes e valores estão organizados juntos de modo a formar um sistema cognitivo funcionalmente integrado, de maneira que uma mudança em qualquer uma das partes afetará as outras e culminará em mudança compartamental. Segundo este autor, "as

---

[176] ROKEACH, M. **Crenças, Atitudes e Valores: uma teoria de organização e mudança**. Rio de Janeiro: Interciência, 1981.

crenças são inferências feitas por um observador sobre estados de expectativas básicos" (p. 1); "as crenças variam ao longo de uma dimensão perférica-central; quanto mais central uma crença, tanto mais resistirá à mudança" (p. 2); "quanto mais central for a crença que mudou, tanto mais difundidas as repercussões no resto do sistema de crenças" (p. 3).

Para Rokeach (1981), "uma atitude é uma organização de crenças, relativamente duradoura, em torno de um objeto ou situação que predispõe que se responda de alguma forma preferencial" (p. 91). Além disso, cada crença na organização de uma atitude é concebida como tendo três componentes: cognitivo (representa o conhecimentos de uma pessoa com graus variados de convicção), afetivo (a crença é capaz de provocar afeto de intensidade variada, tomando uma posição positiva ou negativa, em torno do objeto da crença ou de outros objetos – indivíduos ou grupos) e comportamental (a crença sendo uma predisposição de resposta, de variados princípios, deve levar a alguma ação quando adequadamente ativada). Mesmo discorrendo sobre os fundamentos que contestam a distinção conceitual entre crenças e atitudes, Rokeach conclui reafirmando que "uma atitude é simplesmente uma organização de crenças inter-relacionadas em torno de um objeto comum, com certos aspectos do objeto sendo foco de atenção para algumas pessoas e outros aspectos para outras pessoas" (p. 94).

O autor ainda ressalta que uma resposta a um objeto preferencial não ocorre no vácuo, mas inserido num contexto de alguma situação social. E a maneira como uma pessoa se comporta em relação a um objeto numa situação dependerá das crenças e predisposições particulares ativadas, por um lado, pelo objeto de atitude e, por outro lado, pela situação. Dessa forma, postula que o comportamento social de uma pessoa deve estar sempre mediado, pelo menos, por dois tipos de atitude, uma ativada pelo objeto e outra pela situação. Ao se focalizar apenas uma atitude certamente se estará observando ou uma inconsistência ou uma falta de dependência entre a atitude e o comportamento da pessoa.

Já valor, segundo Rokeach (1981), tem a ver com os modos de conduta e estados finais da existência. Dizer que uma pessoa "tem um valor" (concebe para si um valor) "é dizer que ela tem uma crença duradoura de que um modo específico de conduta ou de estado final de existência é pessoal e socialmente preferível a modos alternativos de conduta ou estados finais de existência" (p. 132). Uma vez internalizado, um valor se torna, consciente ou inconscientemente, um padrão ou critério para guiar a ação do indivíduo, para desenvolver ou manter suas atitudes em relação aos objetos e situações relevantes. Os valores diferem das atitudes em diversos aspectos, pois enquanto uma "atitude representa diversas crenças focalizadas em objetos ou situações específicas, um valor é uma única crença que guia trancendentalmente as ações e julgamentos através de objetos e situações específicas e além de metas imediatas para estados finais e mais urgentes da existência" (p. 132). Sistema de valor é uma ordenação de valores num continuum de importância, uma organização aprendida de regras que auxilia o indivíduo a fazer escolhas e resolver conflitos.

Levando em conta a concepção de Rokeach acerca de atitude, como uma organização de crenças, relativamente duradoura, em torno de um objeto ou situação que predispõe que se responda de alguma forma preferencial, uma mudança de atitude seria uma mudança na predisposição, esta última entendida como um estado hipotético do organismo que, ativado por um estímulo, faz com que a pessoa responda de forma seletiva, afetiva ou preferencial ao estímulo. Ao se considerar ainda os valores, o comportamento em relação a um objeto social dentro de uma situação social será em função da importância relativa das duas atitides ativadas $A_o$ e $A_s$, que por sua vez serão em função do número e da importância relativa de todos os valores ativados em $A_o$ em comparação aos valores ativados em $A_s$. Nesse caso, para se pensar em mudanças nos sistemas de valores e de atitudes, postula-se a motivação por consistência, primeiramente a consistência com a autoestima e depois a consistência com a lógica ou a realidade. Isto porque, entre ambos os tipos de inconsistência que uma pessoa se deflagre, a consistência com a autoestima é mais compelativa do que a outra.

Rokeach ainda ressalta que seu desejo de passar de um interesse nas atitudes para um interesse nos valores foi para lidar com um conceito mais central, dinâmico e econômico, provocando assim uma colaboração interdisciplinar que estenderia seu alcance para além da Psicologia Social tradicional para incluir os problemas de educação e reeducação. Conclui ao final de suas pesquisas (que obviamente levantaram outros questionamentos) que uma condição necessária para a mudança é um estado de inconsistência cognitiva.

Uma mudança também pressupõe superar ou vencer as resistências que a ela se interpoem. A esse respeito, Bolzan[177] (2002) aponta em sua pesquisa de formação de professores três categorias de análise: resistência, ruptura da resistência e tomada de consciência.

Segundo a autora, "a apropriação de novos conhecimentos implica a possibilidade dos sujeitos envolvidos nas situações de ensino e aprendizagem tomarem consciência dos mecanismos que envolvem essa apropriação" (p. 85). Entretanto, em geral, há uma força em direção à tomada de consciência e que se opõe a ela – a que chamamos de resistência-, fazendo com que o sujeito fique oscilando entre o que é constituído como conhecimento (conhecimentos prévios) e os novos conhecimentos a serem apropriados.

> A resistência se caracteriza por movimentos oscilatórios de negação e contradição, quando o indivíduo apresenta dificuldade para apropriar-se do conhecimento pedagógico circulante A negação aparece nitidamente, quando o indivíduo dissocia teoria e prática, negando sua relação ou quando não está disponível para reflexão, mostrando-se incapaz de retomar a prática para fazê-la, ou ainda, quando nega seu papel de mediador, durante situações de ensino e de aprendizagem. A contradição aparece como um movimento de avançar e retroceder entre as perspectivas atuais (novos conhecimetos) do sujeito e os seus conhecimentos prévios, de aceitar e negar as ideias dos demais ou as suas próprias, evidenciando assim a dificuldade de apropriação do novo, ou seja, de reconstruir, em novas bases, conhecimentos já existentes ou de apropriar-se de novos conhecimentos. (Bolzan, 2002, p. 86)

Dessa forma, de acordo com Bolzan (2002), o processo de apropriação pressupõe momentos, por vezes conflitantes, que se entrelaçam e podem se referir à internalização de formas culturais de comportamento, de regras do ambiente social, que envolvem a reconstrução de atividades psicológicas, baseadas nos instrumentos e nos signos, embora o sujeito não precise reinventá-los, mas compreendê-los e adequá-los para serem utilizados em novas cirscunstâncias. Assim, a resistência "se caracteriza pelo fato de que os indivíduos não conseguem estabelecer trocas durante o trabalho coletivo, pois ainda não compreenderam as relações possíveis entre seu ideário e o dos demais" (p. 86).

Já a ruptura da resistência é um movimento de ultrapassagem caracterizado por uma oscilação variável entre a resistência e a tomada de consciência. Dessa forma, para Bolzan (2002), os sujeitos envolvidos no processo de apropriação vão assumindo com alguma clareza suas posições, embora retornando vez por outra às posições iniciais; explicitam pouco a pouco mais claramente suas novas construções, abandonando progressivamente a

[177] BOLZAN, D. P. V. **Formação de Professores: compartilhando e reconstruindo conhecimentos**. Porto Alegre: Mediação, 2002.

negação e a contradição, assumindo seu papel de mediador, capza de retomar a prática para melhor compreendê-la, mesmo que ainda não se dê conta perfeitamente disso. Essas construções são mais evidentes quando recebem um estímulo auxiliar de um pesquisador ou formador e pode-se perceber um esforço na direção da apropriação do novo. Então, a ruptura de resistência se dá quando o sujeito progressivamente consegue estabelecer relações entre o seu ideário e o dos demais, abandonando a resistência em direção à tomada de consciência. O processo de apropriação pelo sujeito é um reflexo consciente que surge de relações objetivas, nas quais se opera, passando do conteúdo objetivo da atividade ao seu produto. “Para que esse processo tenha êxito, é necessário que ocorra uma transformação desse produto, de maneira que ele se torne cognoscível pelo sujeito” (p. 87).

A tomada de consciência também é um produto da atividade do sujeito no mundo objetivo, que se realiza por meio da comunicação entre indivíduos, ocorrendo como consequência a apropriação pelo sujeito das riquezas acumuladas pela humanidade. Bolzan (2002, p. 88) afirma que “a tomada de consciência é um produto da comunicação entre consciências. É um produto social que pressupõe interações e mediações”. Nesse sentido, a tomada de consciência se caracteriza:

> pela possibilidade de o indivíduo estabelecer relações entre teoria e prática, assumir seu papel de mediador no processo de ensino , dispor-se a repensar a prática, assumindo a importância do trabalho conjunto na construção do conhecimento pedagógico compartilhado e, consequentemente, apropriando-se do conhecimento pedagógico reconstruído coletivamente. (Bolzan, 2002, p. 88)

A todas essas considerações ouso acrescentar que para que se efetive uma mudança comportamental (incluindo aí conceptual, atitudinal e valorativa) faz-se necessário que haja, não só o estímulo adequado à mudança, mas primordialmente que a predisposição da pessoa que o recebe seja de caráter aberto, receptivo, de forma a permitir que lhe desperte o desejo e a vontade de mudar – o desejo, entendido como o impulso interior de se lançar em ação, e a vontade, entendida como o ato de permanecer em ação de forma perseverante e persistente objetivando tal mudança. Assim, o sujeito frente a situações em que se apresentem novos conhecimentos, novas abordagens, poderá enfrentar as resistências que porventura aflorem e transpassar os momentos de superação das mesmas, rumo à tomada de consciência e consequente apropriação do novo.

Finalizando o capítulo quero acrescentar que, por meio da revisão de literatura aqui apresentada, pretendi tecer e enredar os principais aspectos que nortearam e fundamentaram a pesquisa, que será tratada no capítulo seguinte.

## 5. A pesquisa

"Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso, aprendemos sempre." (Paulo Freire, 1989)

Na introdução comentei sobre minhas inquietações acerca do desenvolvimento do pensamento estocástico e também intuía que este não se dava de forma tão natural, pelo contrário, exigia certa ruptura do pensamento determinístico e parecia ser mais complexo do que costuma se apresentar em cursos de formação. Além disso, ainda de maneira informal, havia a percepção de que essa dificuldade atingia uma escala mais ampla de pessoas, como alguns colegas, alunos e, arrisco dizer, até boa parcela da sociedade. Essas percepções foram uma primeira fisgada de motivação para querer conhecer mais sobre o assunto.

O embrião da pesquisa originou-se de uma oficina ministrada no XIII Congresso Interamericano de Educação Matemática-XIII CIAEM, em junho de 2011 na cidade de Recife-PE, cujo tema foi *Uma sequência de ensino em probabilidade geométrica: o jogo da roleta*. A ideia de montar a oficina para o XIII CIAEM foi extraída de um trabalho final da disciplina Estatística, cursada durante o doutorado e ministrada pela Profª Verônica Yumi Kataoka. No referido trabalho, realizado em grupo pela pesquisadora e duas colegas[178], desenvolvemos diversas ideias que foram tratadas na disciplina. A oficina do congresso teve uma boa procura e pudemos confirmar o interesse dos participantes – a maioria já atuando como professores de matemática da educação básica – pela temática, principalmente por ansiarem por atividades que pudessem ser replicadas em suas salas de aula. Por outro lado, mesmo não tendo sido objeto de uma pesquisa formal, pudemos perceber que afloraram dúvidas e equívocos conceituais acerca dos conteúdos tratados. Minha orientadora, Profª Maria Elisabette Prado, assistiu a oficina e acabou por me convencer de que dali poderia sair meu objeto de pesquisa. E assim foi que me decidi.

A linha de pesquisa à qual me vinculo dentro do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática é Formação de Professores que ensinam Matemática. Além disso, a UNIBAN

[178] Maria Lucia Tavares de Campos e Leika Watabe

conta com um projeto que propicia o desenvolvimento de pesquisas dessa linha que se integrem aos projetos desenvolvidos na ocasião.

Trata-se do Projeto Observatório da Educação da UNIBAN, realizado em convênio com a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), órgão do Governo Federal, que teve início em novembro de 2008 contando com a parceria da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE-SP)[179]. Este Projeto tem dois propósitos principais e inter-relacionados: a) constituir um grupo colaborativo de formação e pesquisas sobre o desenvolvimento profissional docente de professores de Matemática; b) contribuir com propostas de apoio efetivo ao trabalho do professor em suas aulas na Educação Básica. Centra-se na formação continuada do professor de Matemática da escola pública, na perspectiva do desenvolvimento profissional. Uma das linhas de pesquisa busca compreender as contribuições que o uso de ambiente virtual possibilita para o processo de formação que enfatiza o aprendizado contextualizado e reflexivo do professor.

A relevância do Projeto reside nos seguintes aspectos: trata-se de um estudo longitudinal; envolve políticas públicas (implementação da Nova Proposta Curricular de São Paulo e avaliação do desempenho dos alunos das escolas estaduais nas avaliações de larga escala); promove estudos metodológicos e teóricos, como a concepção de metodologias para cursos de formação continuada de professores de Matemática. O Projeto Observatório da Educação vem possibilitando discussões efetivas sobre a prática docente e as propostas de formação continuada devem criar estratégias que permitam ao professor encontrar um sentido para rever e analisar a própria prática. Além disso, permite a adesão dos pós-graduandos da linha de pesquisa Formação de Professores que ensinam Matemática, sendo que diversas dissertações e teses foram realizadas integradas a projetos que compõem o Projeto.

Em 2011 o Observatório da Educação da UNIBAN/CAPES encontrava-se com a seguinte composição: 6 professores-pesquisadores doutores da UNIBAN; 4 alunos de Doutorado e 1 aluno de Mestrado em Educação Matemática da UNIBAN; 23 professores de Educação Básica da Secretaria de Estado de Educação da Diretoria de Ensino da Região Norte de São Paulo. As temáticas que foram objeto dos encontros no ano de 2011 foram: Números Reais,

[179] Foi estabelecida uma parceria com a Diretoria de Ensino Norte 2 da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (Portaria de Autorização CENP de 08/07/09 – D.O.E. de 09/07/09 da SEE-SP)

Análise Combinatória (Problemas de Contagem) e Probabilidade – temas sugeridos pelos professores. O número de encontros para cada temática variava de acordo com os objetivos a serem alcançados e as necessidades do grupo de professores acertados no decorrer da pesquisa associada a cada temática objeto da formação continuada integrante da respectiva pesquisa.

## 5.1 Contextualizando a pesquisa

Ao mesmo tempo em que me decidi por onde encaminhar minha tese, um grupo de professores havia sugerido a Probabilidade como um dos temas relevantes que gostariam de estudar dentro do projeto desenvolvido pela mesma universidade em que cursava o doutorado. Parece que o 'acaso' fez o seu papel: uma conjunção de fatores bastante favoráveis, evidenciando a emergência desse estudo.

Dessa forma, e em comum acordo com minha orientadora, optamos por elaborar o módulo sobre Probabilidade a ser desenvolvido com os professores de Matemática do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, integrantes de um projeto do Programa Observatório de Educação. Os módulos desse projeto não eram muito extensos, portanto, exigia um recorte da temática. No entanto, esse recorte deveria abordar tópicos de probabilidades que propiciassem trabalhar a gênese dessa teoria, levando os participantes a refletirem sobre as noções e conceitos básicos de probabilidade, contribuindo com formação desses professores. Isto posto, o tema escolhido foi a probabilidade geométrica e o seu desenvolvimento requeria abordar desde situações de acaso e incerteza, passando pelos conceitos básicos de probabilidade, a visão clássica, a visão frequentista, culminando com a probabilidade geométrica. Além disso, por ser o último módulo trabalhado naquele ano no Observatório da Educação, em princípio, concentramos os conteúdos a serem tratados em seis encontros presenciais, realizados no período de 29 de setembro a 08 de dezembro de 2011, com o propósito de investigar os conhecimentos dos professores sobre probabilidade, notadamente relativos ao pensamento estocástico em situações de imprevisibilidade em experimentos não determinísticos.

A coerência com o próprio desenvolvimento do pensamento estocástico, encontrado no olhar voltado para a história e norteado por uma concepção epistemológica sócio cultural, foram fundamentais para estabelecer o seguinte **objetivo geral da pesquisa**:

**Compreender as concepções dos professores sobre os conceitos básicos de probabilidade por meio de processo formativo baseado no *design experiment*.**

Com esse objetivo busquei respostas às seguintes **questões da pesquisa**:

- Que dificuldades evidenciadas no desenvolvimento do pensamento estocástico ainda são, ou podem ser, detectadas na concepção dos professores, durante o processo formativo do módulo?
- Dificuldades semelhantes foram identificadas, ou encontram ressonância, também em outras pesquisas?
- Que abordagem adotar no processo formativo para propiciar esse levantamento?

Dessa forma foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos da pesquisa:

- Buscar referencial teórico para subsidiar o desenvolvimento da pesquisa de forma a responder às questões de pesquisa.
- Detectar dificuldades no desenvolvimento do raciocínio e pensamento probabilísticos na evolução do pensamento estocático.
- Identificar quais dessas dificuldades são passíveis de serem encontradas ainda hoje e se encontram repercussão em pesquisas similares.
- Implementar o ambiente construcionista que propiciasse aos participantes o desenvolvimento do raciocínio probabilístico.
- Analisar por meio do processo formativo os percalços e equívocos na construção dos conceitos básicos de probabilidade.

Nessa direção, há evidências que merecem destaque:

- A inserção de conceitos de Probabilidade no Ensino Fundamental sugerido pelos PCN e currículos oficiais (alguns desde a educação infantil) tem provocado discussões e gerado dúvidas em professores e formadores sobre a abordagem a ser dada a esse conteúdo nos diferentes níveis de escolaridade. Dados do Indicador de Alfabetismo

Nacional-INAF, adotado no Brasil desde 2001, apontam alto índice de desconhecimento/dificuldade da população sobre o assunto. (LOPES, 2004).

- Nas escolas, o professor de Matemática costuma trabalhar o ensino de probabilidade, em geral, associado à fórmulas, situações conhecidas e repetidas, definições sem justificativa plausível, o que provoca desinteresse por não fazer sentido ao aluno e, portanto, dificulta a construção do conhecimento por parte do educando. (KATAOKA et al, 2011; SANTOS, 2010; SHAUGHNESSY, 1997, 2007; FERNANDES, 1999).
- O estudo de probabilidades é mais complexo do que em geral se apresenta nos cursos e requer um novo tipo de raciocínio que provoca uma ruptura do pensamento determinístico. (LOPES, 1998; HURTADO e COSTA, 1999; RODRIGUES, 2011)
- Essa conjunção de fatores parece refletir a falta de domínio do conteúdo a ser ensinado e, consequentemente, fragilidade no desenvolvimento de práticas didático-pedagógicas que favoreçam a aprendizagem dos alunos. (Lopes, 2010)

Para corroborar estas ideias, encontramos na revisão de literatura algumas pesquisas que apontam essas mesmas premissas.

Lopes (1998) identifica em muitas propostas curriculares que fica evidenciada a ruptura com o determinismo e a linearidade predominantes nos currículos de Matemática, justificando-se assim o estudo das noções estocásticas no ensino fundamental. Ainda segundo essa autora, os currículos internacionais estão enfatizando o desenvolvimento da criticidade do aluno ao considerar a importância de se trabalhar com a análise de dados e a necessidade de relacionar o trabalho de Matemática com observações do mundo real. Suas pesquisas (LOPES, 1998, 2003) apontam para a potencialidade de se trabalhar noções de probabilidade e estatística desde a educação infantil. No entendimento dessa autora o estudo de noções desses tópicos ampliam os horizontes do conhecimento, podendo concorrer para a formação do aluno no sentido de desenvolver sua capacidade crítica e a autonomia para que exerça plenamente sua cidadania. Portanto, o objetivo de estudar probabilidade e estatística pode ir além do caráter utilitário ou de servir como pré-requisito para estudos futuros.

> Apesar da inclusão da Estatística e da Probabilidade no currículo de Matemática de vários países ser explícita e efetiva, o mesmo não ocorre dentro das salas de aula. Esses temas, em geral têm sido colocados ao final dos programas de ensino e, assim, nem sempre estudados pelos alunos, por falta de tempo, por falta de

> convicção do seu real interesse ou por falta de domínio teórico-metodológico do professor sobre os conteúdos estatísticos e probabilísticos. (LOPES, 2010, p. 58)

Segundo Rodrigues (2011)[180], no caso da teoria da probabilidade, sabemos que é um ramo da matemática que se tornou altamente complexo e o que se propõe para ensino na escola fundamental são apenas noções desse tópico matemático. A questão é o quê abordar num assunto complexo como a probabilidade com alunos que não o estudaram na escola básica e sua primeira oportunidade para lidar com esse assunto é no curso de graduação.

> Do nosso ponto de vista, os autores dos PCN de Matemática, para os anos iniciais (1º e 2º ciclo), criam uma espécie de expectativa sobre possíveis abordagens acerca de noções de probabilidade ao apontarem a finalidade que se pretende com o ensino desse conteúdo matemático. Quando esses autores se referem a termos como aleatório, provável, acaso e incerteza, cria-se expectativa de que naquele documento sejam contemplados conteúdos conceituais e procedimentais voltados para a compreensão desses termos. Entretanto, o que se observa é um descompasso entre a finalidade e os meios para sua efetivação. (RODRIGUES, 2011, p. 63)

Para Hurtado e Costa (1999), a visão do mundo estocástico permite adotar um ponto de vista no qual a aleatoriedade é percebida como um aspecto fundamental e a utilização dos métodos da teoria da probabilidade é uma necessidade para reduzir o caos de um único e imprevisível evento a um padrão mais previsível.

> Apesar de evidenciada a existência de um mundo estocástico, a percepção do significado primário desta estocastização ainda tem permanecido evasiva e controversa. Os estudantes, ao se depararem pela primeira vez com esta visão, o que geralmente ocorre no ensino médio, enfrentam um confronto natural com o raciocínio determinístico adotado até então. (HURTADO e COSTA, 1999, p. 2)

Para Fernandes (1999) citando Borovcnik e Peard (1996), existem duas razões que legitimam a introdução das probabilidades no currículo escolar a qualquer nível: 1) ver o pensamento probabilístico como um tipo específico de pensamento, tal como o pensamento geométrico e o pensamento algébrico; 2) as probabilidades constituem uma oportunidade de questionar a dicotomia verdade *versus* falsidade, acrescentando-se a categoria do possível e destacando a impossibilidade de controlar o resultado de uma única experiência. Tal tipo de pensamento pode beneficiar do estudo das probabilidades na escola. Entretanto, uma das maiores dificuldades em se trabalhar conteúdos de Probabilidade e Estatística na Educação Básica é

[180] RODRIGUES, J. M. S. A probabilidade como componente curricular na formação matemática inicial de professores polivalentes. (2011). Tese (Doutorado em Educação)-Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2011, 151 p.

que, em geral, os professores de Matemática não viram, em seu processo de formação, os aspectos relacionados à didática desses conteúdos.

> Assim, muitas vezes, eles apresentam tais conteúdos de forma descontextualizada, priorizando o uso excessivo de fórmulas, que muitas vezes não fazem sentido para os alunos, opondo-se, dessa forma, à exploração de situações que envolvam aproximação, aleatoriedade e estimação. Essa falta de vivência no "modo estatístico de pensar" parece implicar não só em uma abordagem meramente tecnicista dos métodos estatísticos, como também em um certo desconforto, por parte dos professores, em relação ao assunto. (KATAOKA *et al*, 2011, p 236.)

Cazorla e Santana (2010) defendem que é necessário buscar soluções para minimizar o problema, uma vez que a apropriação dos conceitos de probabilidades é cada vez mais importante para um indivíduo na sociedade atual.

Frente ao que foi aqui exposto, fez-se necessário pensar uma forma de desenvolver a pesquisa visando encontrar alternativas para as questões levantadas. Assim, os aspectos fundantes da pesquisa, de caráter qualitativo, foram pensados de forma a amalgamar quatro elementos: o conteúdo abordado – noções básicas de probabilidade; o processo formativo – módulo do curso; o uso de tecnologia – como recurso e como suporte; a metodologia utilizada – o *design experiment.*

## 5.2 Metodologia da pesquisa: Design Experiment

O termo *design experiment* originalmente utilizado por Brown (1992) e Collins (1992), consiste numa forma de investigação educacional formativa onde se testam e aperfeiçoam projetos educacionais, recorrendo a técnicas cíclicas e iterativas, que assumem um caráter extremamente formativo, flexível e que englobam princípios de outros tipos de investigação educativa.

O *Design Experiment*, como metodologia de pesquisa, segundo Mishra e Koehler (2006) enfatiza a implementação detalhada e o estudo de intervenções que envolvem objetivos pedagógicos em ambientes de aprendizagem. Favorece o reconhecimento das complexidades do ensino em sala de aula; conduz profissionais e pesquisadores ao desenvolvimento de idéias teóricas fundamentadas em contextos da prática; reduz a distância entre a investigação e a prática, entre a teoria e aplicação.

> *Design experiments* idealmente resultam em uma maior compreensão de uma ecologia de aprendizagem - um sistema complexo, que envolve a interação de vários elementos de diferentes tipos e níveis – projetando esses elementos por antecipar como eles funcionam juntos para apoiar a aprendizagem. *Design experiments*, portanto, constituem um meio de resolver a complexidade que é a marca registrada de contextos educativos. [...] Ecologia implica uma série de sistemas de interação ao invés de um conjunto de atividades ou uma lista de fatores distintos que influenciam a aprendizagem. (COBB, CONFREY, diSESSA, LEHRER e SCHAUBLE, 2003, p.9, tradução nossa)

Segundo Steffe & Thompson (2000), a metodologia pode ser utilizada para entender o raciocínio e a aprendizagem matemática por meio da construção de modelos. O *Design Experiment* tem como parte essencial olhar o que está por trás do que falam os aprendizes. Como método científico de investigação enfatiza a análise do pensamento matemático do estudante, bem como suas modificações durante o processo. Para tal cabe ao pesquisador criar situações e modos de interação com os estudantes de forma a encorajá-los a modificar seu pensamento (ou modo de pensar) sobre o tema estudado. A indissolubilidade entre os papéis de formador e pesquisador é uma das características do *Design Experiment,* que o distingue de outras metodologias.

Cobb *et al* (2003) destacam outras características que englobo aqui: a intervenção e a condição de desenvolver modelos a partir de hipóteses, que admitem duas fases, a prospectiva e a reflexiva, o que lhe imprime um *design* cíclico – as conjecturas podem ser modificadas ou redesenhadas durante o processo, estabelecendo um *redesign* em ciclos e refletindo assim suas raízes pragmáticas, nas quais os modelos desenvolvidos preocupam-se com processos de aprendizagem de domínios específicos.

Ainda segundo Mishra e Koehler (2006, p. 1018), desenvolver teoria para a tecnologia educacional é difícil porque requer um entendimento detalhado dos relacionamentos complexos que são contextualmente vinculados. Além disso, é difícil estudar a causa e efeito, quando professores, salas de aula, política e objetivos curriculares variar de caso para caso. Uma abordagem, chamada de *design experiment*, homenageia essa complexidade e tem recentemente ganhou destaque na pesquisa educacional (Brown, 1992; Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, e Schäuble, 2003).

Os pressupostos prospectivos e fundamentados na revisão de literatura levaram-me a preparar uma abordagem que privilegiasse o desenvolvimento do raciocínio probabilístico. Parti da ideia de que deveria tentar provocar uma desconstrução/construção das noções trazidas pelos cursistas sobre acaso, incerteza, aleatoriedade (processos não determinísticos), para depois tratarmos das noções e conceitos básicos de probabilidades, passando pelas visões clássica e frequentista e culminando na probabilidades geométrica, trabalhando com ações de formação por meio de sequências de ensino e utilizando experimentos diversos com recursos digitais e material concreto. Além disso, contamos com acompanhamento via plataforma virtual de aprendizagem.

A meta estabelecida era investigar o pensamento probabilístico do cursistas ao longo do desenvolvimento do módulo. Em outras palavras, quais as concepções e mesmo crenças que se manifestaram num primeiro momento, quais foram modificadas ou quais persistiram após a resolução das questões apresentadas e das reflexões provocadas nas discussões, quer sejam nos encontros presenciais ou nos fóruns virtuais. Mais que o produto visava o processo.

Os instrumentos de coleta de dados durante a aplicação da pesquisa constituíram-se de: a gravação em filme e áudio dos encontros presenciais do módulo em questão; os registros do AVA, que permitiram acompanhar todo o processo entre esses encontros por meio das ferramentas, como fóruns, portfólios, diário de bordo, entre outros.

## 5.3 Planejamento do módulo

O planejamento do módulo em questão foi pensado levando em conta essas considerações. O módulo denominou-se **“Probabilidade Geométrica na educação básica: casos de acaso e incerteza”.** Para além da escolha do tema, era fundamental decidir uma abordagem que fosse instigante e permitisse uma interação dialógica numa dimensão construcionista. Para atender esses quesitos, optou-se em adotar uma abordagem diferenciada no desenvolvimento do conteúdo matemático de Probabilidades, que propiciasse a esses professores:

- Usar a tecnologia como **recurso** para favorecer a aprendizagem (PRADO, 2005) e como **suporte** para acompanhamento online (PRADO, 2006, 2009).

- Contribuir com a formação continuada desses professores e servir de referência para recriarem suas próprias metodologias na prática em sala aula sobre o tema.

A abordagem assim criada visava atender aos seguintes **objetivos do módulo**:

**Objetivo Geral do módulo:**

Desenvolver o conteúdo elencado por meio do *design experiment* para a produção de dados que permitisse detectar (perceber) o conhecimento dos professores sobre o conteúdo de probabilidades, notadamente acerca do pensamento estocástico em situações de imprevisibilidade em experimentos não determinísticos.

**Objetivos Específicos do módulo:**

- Analisar os conhecimentos prévios dos professores, bem como suas crenças e percepções e possíveis experiências em sala de aula sobre a temática.
- Tratar as situações de acaso e incerteza e as noções básicas de probabilidade geométrica, via visão frequentista, para desenvolver o raciocínio probabilístico no sentido de facilitar sua aplicação em sala de aula na educação básica.
- Identificar como trabalhavam as atividades propostas nas sequências de ensino para ir (re)construindo novas atividades que possibilitassem a reflexão para superação das dificuldades epistemológicas que surgissem.
- Detectar dificuldades no desenvolvimento do raciocínio e pensamento probabilísticos e traçar estratégias para superá-las.

Os encontros presenciais tinham a duração de 3,5 horas e o módulo contou com a participação efetiva de 15 professores do Programa Observatório da Educação e realizou-se em seis encontros presenciais, com duração de 3,5 horas cada, no período de setembro a dezembro de 2011 (acrescido de mais dois encontros em março de 2012), com acompanhamento a distância.

Os participantes da pesquisa são professores da Educação Básica, em escolas públicas do Estado de São Paulo. Dois são licenciados em Física e os demais licenciados em Matemática, sendo três com especialização. Quanto ao tempo de docência a maioria tem entre 10 e 15 anos.

## 5.4 Metodologia do módulo

Os dados a serem produzidos nesse processo constituiriam a base de análise para a pesquisa. Nesse sentido, o curso foi desenvolvido buscando proporcionar aos professores de Matemática o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e provê-los de recursos didático-metodológicos, inclusive digitais, para organizar seu trabalho de forma a despertar o interesse do aluno e favorecer a aprendizagem de probabilidades.

> O sentido atribuído à ideia de integração de mídias na prática pedagógica tem sido muitas vezes equivocado. [...] Integrar – no sentido de completar, de tornar inteiro – vai além de acrescentar o uso de uma mídia em uma determinada situação da prática escolar. Para que haja a integração, é necessário conhecer as especificidades dos recursos midiáticos, com vistas a incorporá-los nos objetivos didáticos do professor, de maneira que possa enriquecer com novos significados as situações de aprendizagem vivenciadas pelos alunos. Nesta perspectiva, o cenário educacional requer do professor saber como usar pedagogicamente as mídias e, este "como" envolve saber "o quê" e "o porquê" usar tais recursos. Por outro lado, este saber "como", "o quê" e "o porquê" usar determinadas mídias encontra-se ancorado em princípios educacionais, orientadores da prática pedagógica do professor. (PRADO, 2005, p. 9).

Ainda segundo Prado (2009, p.3)[181], o trabalho online envolve a construção de um design educacional que contempla "a concepção, o planejamento, a produção, a implementação e o desenvolvimento de um curso". Na concepção que se fundamenta em princípios constitutivos de processos reflexivos e interativos e que enfatiza a autoria e a produção de conhecimento do aluno cursista, "a construção do design do curso compatibiliza e integra três elementos fundamentais: os princípios educacionais, as características da virtualidade e a configuração do contexto".

Nessa direção, adotou-se para trabalhar no módulo a elaboração de ações de formação desenvolvidas na perspectiva do *design experiment* para favorecer os processos de ensino e aprendizagem do tema, fazendo uso da tecnologia como recurso para atividades e experimentos com objetos digitais (*applets*, vídeos) e como suporte aos encontros presenciais através de um ambiente virtual de aprendizagem-AVA, criado por mim na plataforma TelEduc especialmente para este fim. Essas ações compreenderam:

---

[181] PRADO, M. E. B. B. Estratégias de orientação para a prática do professor no contexto da educação a distância. **Revista E-Curriculum**, São Paulo, v. 4, n. 2, jun 2009. Disponível em: <http://www.pucsp.br/ecurriculum>. Acesso em: 09 set. 2010.

1) trabalhar sequências de ensino baseadas no *design experiment*;
2) preparar o ambiente virtual e desenvolver os conteúdos online do AVA;
3) realizar a mediação presencial e no ambiente virtual de aprendizagem;
4) utilizar material concreto (dados, roleta, tangram) e objetos midiáticos (*applets*, vídeos);

## 5.5 Desenvolvimento do módulo

Os encontros presenciais ocorreram com participação efetiva dos professores cursistas. A metodologia do *design experiment* adotada no desenvolvimento do módulo impôs uma atenção constante na condução das atividades e discussões, pois demandavam o planejamento de uma programação básica e de diversos recursos extras que pudessem ser inseridos conforme surgiam as questões ou dúvidas por parte dos cursistas, numa constante dinâmica de replanejamento das ações.

Os conteúdos abordados no módulo foram:

- Casos de acaso e incerteza: exemplos e discussão.
- Modelo, experimentos determinísticos e aleatórios (ou probabilísticos).
- Noções básicas de probabilidades: eventos, espaço amostral, eventos equiprováveis, operações com eventos, a definição clássica de probabilidades.
- Visão histórica do conceito de probabilidade. O jogo, notadamente de dados, como mola propulsora da criação da teoria das probabilidades e o papel fundamental de Fermat e Pascal para esta teoria, bem como de Bernoulli, Gauss, Laplace e Kolmogorov.
- Probabilidade condicional, eventos independentes e eventos mutuamente excludentes.
- Abordagem frequentista de probabilidade
- Probabilidade geométrica.

Entre os encontros presenciais, tivemos acompanhamento via ambiente virtual. Assim, os conteúdos foram desenvolvidos por meio de textos e artigos, vídeos, atividades propostas em listas de exercícios, discussão dialógica nos encontros presenciais e nos fóruns do ambiente virtual, realização de experimentos concretos e virtuais. No ambiente virtual os professores cursistas puderam interagir com os colegas e com a formadora enquanto trabalhavam os conteúdos abordados, por meio de material complementar disponibilizado, e desenvolveram atividades relativas ao curso, na construção dos conhecimentos matemáticos e pedagógicos do tema.

### 5.6 O ambiente virtual criado

Para melhor entendimento é interessante apresentar o ambiente virtual que foi criado especificamente para esse módulo, na plataforma TelEduc, que dispõe de diversas ferramentas, entre as quais algumas foram elencadas por melhor atenderem às necessidades do curso.

Segundo Prado (2006)[182], as ferramentas do ambiente virtual possuem características próprias, pois são implementadas para fins específicos e seu uso depende do ressignificado que o professor faz com base na sua concepção educacional e nos aspectos constituintes do desenho e desenvolvimento do curso.

> No contexto de educação a distância as estratégias de mediação pedagógica podem ganhar uma nova dimensão, por meio da integração das ferramentas do ambiente virtual. No entanto, o ponto de sustentação que dá concretude para outros níveis de articulação é a concepção educacional que trata o ensino e aprendizagem de forma interdependente. Esta visão, portanto, reconhece que o conceito fundamental da mediação pedagógica é a articulação. De fato esta concepção educacional é que dá condições para que os elementos da mediação (materiais, atividades e interações) sejam tratados de forma inter-relacionada. De igual maneira, as ferramentas do ambiente virtual também podem pedagogicamente ser tratadas de forma inter-relacionadas entre si e com os elementos da medição, propiciando com isto o redimensionamento da mediação pedagógica no contexto de educação a distância. (PRADO, 2006, p. 7)

Antes, porém, vale reportar à concepção assumida para um ambiente de ensino e aprendizagem. Segundo Rezende (2004, p. 31)[183], o ambiente de ensino e aprendizagem é denominado **construcionista**, idealizado inicialmente por Papert, na abordagem do ***estar-***

---

[182] PRADO, M.E. B. B. **A mediação pedagógica: suas relações e interdependências**. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE. Anais do Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE 2006 (26), p. 101-110, Brasília: UNB/UCB, 2006.

[183] REZENDE, F. A. **Características do ambiente virtual construcionista de ensino e aprendizagem na formação de professores universitários**. Dissertação de Mestrado em Multimeios. Instituto de Artes da UNICAMP. Campinas-SP, 2004, 246 p.

***junto-virtual*** (VALENTE, 1999)[184]. Suas características advêm da compreensão do que são os ambientes construtivistas e seus pressupostos sócio interacionistas resultantes das ideias de Piaget e Vigotsky. (Apesar da relevância, vamos omitir de explicitar sobre ambientes construtivistas e suas origens por já serem bastante discutidos e aqui admitidos como pressupostos).

Para Valente (2001)[185] o computador pode ser um importante instrumento de registro sobre os quais os aprendizes podem realizar processos de *ação-e-reflexão na* e *sobre a ação*, processos estes responsáveis pela tomada de consciência pelo aprendiz de seu processo individual de aprender.

Ainda de acordo com Valente (2010, p. 237)[186], na abordagem '*estar junto virtual'* que vem denominando, "o grau de interação entre professor e aprendizes, e entre aprendizes, é bastante intensa, permitindo o acompanhamento do aprendiz e a criação de condições para o professor 'estar junto', ao lado do aluno, vivenciando e auxiliando-o a resolver seus problemas, porém virtualmente". Além disso, as interações que acontecem via internet visam à realização de ciclos de ações, que facilitam o processo de construção de conhecimento.

> Essas interações permitem o acompanhamento e o assessoramento constante do aprendiz no sentido de entender o seu interesse e nível de conhecimento sobre determinado assunto e a partir disso ser capaz de propor desafios e auxiliá-lo a atribuir significado ao que está realizando. Nessa situação o aprendiz consegue processar as informações, aplicando-as, transformando-as, buscando novas informações e, assim, construindo novos conhecimentos (VALENTE, 2010, p. 236)

E ainda segundo Rezende (2004, p. 47) "em ambientes computacionais, construir conhecimento implica enriquecer dinamicamente as estruturas cognitivas por meio de ciclos de ações que o aluno realiza na interação com o software com a mediação do professor". Softwares abertos, como muitos simuladores encontrados atualmente na web, mostram ser

---

184 Valente, J.A. (1999). **Diferentes Abordagens de Educação a Distância. Artigo Coleção Série Informática na Educação – TVE Educativa**. Disponível em:<http://www.proinfo.gov.br>. Acesso em: 10 set 2011.

185 VALENTE, J. A**. Diferentes abordagens na Educaçõa a Distância**. Campinas: NIED/UNICAMP. 2001.

186 VALENTE, José Armando. A Interação entre Aprendizes nas Comunidades Virtuais de Aprendizagem: Oportunidade de Aprender e Identificar Talentos. In: **Anais XV Endipe-Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino Convergências e Tensões no Campo da Formação e do Trabalho Docente: Educação Profissional e Tecnológica**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010, p.230 a 250.

um instrumento poderoso como recurso de aprendizagem. Na interatividade com o programa e interação com o professor, as ações realizadas pelo aprendiz "tornam-se transparentes e palpáveis, portanto passíveis de serem observadas e analisadas, e transformam-se em objetos de reflexão e depuração ou objetos de metacognição, possibilitando a construção do conhecimento" (*ibidem*).

Ao desenvolver e colocar em prática a plataforma virtual pretendi assegurar as características que conformam um ambiente rico em aprendizagem, conhecido como **ambiente construcionista de aprendizagem (REZENDE, 2004).** Isso posto, seguem alguns detalhes do ambiente virtual criado.

A dinâmica do curso foi assim explicitada aos cursistas na ferramenta de mesmo nome, com a intenção de familiarizá-los:

> O ambiente virtual é um **espaço de estudo** de cada professor e de **compartilhamento** e **interação** com os colegas do curso e com a formadora.
>
> Nesse ambiente é disponibilizado como **Material de Apoio**, além dos utilizados nas aulas presenciais, outros arquivos, textos e links que fornecem **subsídios** e **apoio teórico-prático** para aprofundamento e acompanhamento dos conteúdos tratados nos encontros presenciais.
>
> Para manter a **dinâmica** do curso, aos **sábados** será disponibilizada a **Agenda** semanal com as atividades a serem desenvolvidas em consonância com o que estará sendo abordado nos encontros presenciais.
>
> Teremos **Fóruns** de discussão e **Atividades** propostas que serão realizadas e postadas nos **Portfólios** individuais, podendo ser comentadas pela formadora e pelos colegas. O **Correio** também servirá para nos comunicarmos. No **Mural** poderemos postar recados e avisos e, no **Diário de Bordo**, registrarmos livremente nossas **impressões** e nosso **percurso** neste espaço de aprendizagem. As **Agendas** e algumas imagens do ambiente virtual podem ser consultadas nos Apêndices. (extraído das telas do ambiente virtual criado para o módulo)

Ficou combinado com a turma que, semanalmente, seria disponibilizada uma agenda de programação entre os encontros e preparatória para o encontro presencial seguinte. A intenção era que os cursistas acompanhassem essas programações, realizando as tarefas agendadas, que eram acompanhadas e mediadas por mim e serviam para nortear a abordagem do próximo encontro presencial. Mesmo que nem sempre isto ocorresse como pretendido, este fato era levado em conta no sentido de serem retomadas e discutidas nos encontros presenciais as atividades que demandassem mais atenção e novas abordagens.

O capítulo seguinte traz a análise dos dados levantados na pesquisa. Devido ao desenvolvimento imprimido no módulo, com econtros presenciais permeados por atividades a distância na plataforma virtual, contendo várias readaptações e redesigns cíclicos numa abordagem em espiral, a análise é feita junto à descrição das diversas etapas e momentos do processo formativo.

## 6. Descrição e análise da pesquisa

> "Se desejarmos chegar a lugares onde ainda não estivemos devemos ousar passarpor caminhos que ainda não trilhamos".
> (M. Ghandi, 1984)

Escolher e desenvolver a temática do Módulo *Probabilidade Geométrica na Educação Básica: casos de acaso e incerteza* (doravante designado por MPG) teve o propósito de levar os participantes a refletirem acerca dos conceitos subjacentes aos conteúdos trabalhados. Num primeiro momento era fundamental tentar fazer aflorar as concepções e os conhecimentos prévios, portanto, para tal era necessário adotar uma abordagem que criasse certo desconforto, algum conflito/desequilíbrio em relação às noções e crenças que os professores construíram sobre aqueles conceitos ao longo de sua formação. Era necessário criar um âmbito que pudesse provocar uma desconstrução, para propiciar uma reconstrução dessas noções no processo formativo.

O referencial teórico proveu-me de um repertório que me permitiu transitar com segurança por todas as etapas da pesquisa: o planejamento do módulo e preparação das atividades das sequências de ensino, escolha dos materiais a serem utilizados, como artigos, recursos digitais (vídeos, simuladores), material concreto; montagem e alimentação do ambiente virtual; desenvolvimento dos encontros presenciais, acompanhamento e mediação no ambiente virtual, e por fim, a análise dos dados levantados durante o processo da pesquisa.

A metodologia do *design experiment* (Cobb *et al*, 2003) adotada no desenvolvimento do MPG, conforme já explicitado anteriormente, traz em seu bojo uma análise dos dados durante o processo, por imprimir um desenho cíclico que envolve a intervenção em duas fases, a prospectiva e a reflexiva , que podem ser modificadas num redesenho das conjecturas a partir dessa reflexões acerca dos elementos que se evidenciam, como crenças, equívocos ou dúvidas, estabelecendo assim um *redesign* em ciclos, em que as ações adotadas preocupam-se com o processo de aprendizagem de domínios específicos. As pesquisas acerca da origem histórica das ideias estocásticas e a revisão de literatura fundamentaram os pressupostos prospectivos para preparar uma abordagem inicial e nortear a reflexões para as possíveis reformulações de forma a privilegiar o desenvolvimento do raciocínio probabilístico.

O objetivo principal da investigação foi compreender o pensamento probabilístico dos cursistas ao longo do desenvolvimento do módulo. Em outras palavras, quais as concepções ou crenças se manifestaram inicialmente, quais foram ou não modificadas durante o processo, após a resolução das atividades e das reflexões provocadas nas discussões, quer sejam nos encontros presenciais ou nos fóruns virtuais. Mais que o produto interessa o processo.

A metodologia do *design experiment* mostrou-se bastante apropriada por permitir apresentar um assunto ou tópico de forma não muito convencional e, conforme fosse perceptível certo estranhamento por parte dos professores, era possível reformular em 'tempo real' e ir adequando durante o próprio encontro e também no ambiente virtual, que permitia dar continuidade à provocação num tempo contíguo até o próximo encontro, num ciclo em espiral na tentativa de provocar alguma mudança conceptual, quer seja para reformular os conceitos, quer seja para reafirmar com mais propriedade o conceitualmente correto. Claro é que, durante o processo corre-se o risco de não atingir esse intento, que só os dados levantados na pesquisa podem comprovar ao serem analisados.

Do ponto de vista metodológico, desempenhei diversos papéis: pesquisadora – autora – formadora/ mediadora. A pesquisadora se coloca como investigadora e autora nesta pesquisa, pois esteve responsável pelo planejamento de todo MPG, bem como pelo desenho do ambiente de aprendizagem, que serviu de suporte aos momentos presenciais e no qual atuou como mediadora num esforço constante de reflexão na e sobre a ação. Nos encontros presenciais, atuamos como pesquisadora que observa, reflete e faz inferências a partir do processo educativo e, por outro lado, como formadora que busca promover o desenvolvimento dos participantes. Dessa forma, na medida em que o módulo se desenvolve, a pesquisadora analisa o desempenho, as expectativas e dificuldades dos alunos-professores, re-elabora as atividades e reformula os recursos materiais e digitais para serem trabalhados de forma integrada e complementar durante o processo.

Nesse sentido, precisava ter um amplo e diversificado repertório que pudesse lançar mão adequadamente no momento que se fizesse oportuno ou necessário. Isso não foi problema no ambiente virtual, pois havia tempo de preparar o acompanhamento à medida que surgissem questões ou dúvidas nas postagens das atividades ou na discussão nos fóruns. Mas para os encontros presenciais, além da preparação de uma sequencia de atividades, precisava pensar em outras tantas possibilidades que pudessem surgir e estar preparada e munida com outros artefatos para usar quando necessário fosse repetir um experimento de outra maneira, com uso de objetos concretos ou recursos midiáticos que tratassem do mesmo tema do momento de outra forma. Assim, pelo menos para mim, foi um período intenso que exigiu muita criatividade e imaginação de possibilidades diversas que pudessem vir a acontecer.

Reproduzo a seguir, junto à descrição dos encontros presenciais, permeados pelo acompanhamento no ambiente virtual, uma síntese das reflexões ocorridas durante o processo acerca das evidências percebidas ou constatadas.

Algumas observações: Os nomes dos cursistas foram omitidos, serão identificados aqui por siglas com duas letras, a pesquisadora por "**P**". Os encontros foram todos gravados em áudio e vídeo, porém como as filmagens foram feitas, na maioria das vezes, em câmera aberta, as falas não puderam ser transcritas de modo integralmente literal, pois muitas vezes não foi possível ouvir com clareza a gravação. Dessa forma, muitas vezes as transcrições se deram pela ideia que pode ser captada na fala dos cursistas. Além disso, o texto padrão narra a situação e abordagem dadas, o texto em caixa, exceto o quadro 1 e algumas atividades em destaque, relata as principais observações feitas pelos cursistas e o texto em negrito indica as análises feitas pela pesquisadora. Observações complementares dentro do texto em caixa são feitas entre colchetes.

Para melhor situar a leitura simultânea das narrativas e análise dos dados evidenciados, apresento antes um quadro-resumo das atividades desenvolvidas nos respectivos encontros presenciais realizados no MPG, bem como das atividades postadas no ambiente virtual que ocorreram via as agendas inter-encontros presenciais e que serviam  para acompanhar, re-elaborar e preparar o encontro seguinte, num constante *redesign* do MPG.

**Quadro-resumo MPG: encontros presenciais intercalados pelos momentos no AVA**

| Evento | Pauta /Agenda | Atividades |
|---|---|---|
| Primeiro encontro presencial | Apresentação do módulo MPG<br>Discussão dialógica: acaso e incerteza<br>Noções básicas e aplicações | Apresentação em ppt do tema<br>Apresentação de dois Vídeos<br>Discussão dialógica ao longo da apresentação<br>Lista 1- resolução em grupo. |
| Segundo encontro presencial | Apresentação do AVA<br>Ambientação ao AVA | Uso das ferramentas do AVA<br>Experimento com simulador |
| Online no AVA | Agenda 1 | Consulta às Unidades I e II (resumo teórico)<br>Resolução Lista 1<br>Fórum Lista 1<br>Postagem portfólio da Lista 1 |
| Online no AVA | Agenda 2 | Retomada das noções abordadas na Lista 1, abertura de três fóruns:<br>Fóruns (dados, urna, baralho) |
| Terceiro encontro presencial | Participação no AVA<br>Discussão coletiva- atividades Agenda 2<br>Noções probabilidade clássica, frequentista e geométrica. | Atividades da Agenda 2<br>Resolução e discussão coletiva dos exercícios da Lista 1 |
| Online no AVA | Agenda 3 | Reflexão nos 3 fóruns já abertos sobre a discussão no 3º encontro<br>Finalização Lista 1 no portfólio<br>Resolução da Lista 2.<br>Postagem portfólio Lista 2 |
| Online no AVA | Agenda 4 | Leitura do texto “Probabilidade prática” p/ subsidiar uma aula<br>Elaboração de plano de aula<br>Fórum Plano de aula |
| Quarto encontro presencial | Sistematização conceitos básicos: eventos mutuamente excludentes, independentes e probabilidade condicional.<br>Discussão Atividades da Agenda 4 | Discussão s/ Plano de aula<br>Discussão conceitos abordados Lista 2<br>Leitura e discussão: Eventos Independentes. |
| Online no AVA | Agenda 5 | Leitura dos dois artigos<br>Elaboração “Roteiro de aula”<br>Fórum Roteiro de aula<br>Experimento virtual “Probabilidade com Urna”<br>Fórum Probabilidade c/Urna |
| Online no AVA | Agenda 6 | Resolução Lista 3 (incluindo experimentos com applets)<br>Fórum Lista 3<br>Postagem portfólio Lista 3 |
| Quinto | Discussão Agenda 6 e Lista3 | O encontro teve que ser adiado |

| | | |
|---|---|---|
| encontro presencial | Experimentos online sobre probabilidade geométrica | para a semana seguinte |
| Online no AVA | Agenda 7 | Manutenção das atividades da Agenda 6 |
| Sexto encontro presencial | Discussão atividades Agenda 7:<br>Lista 3 e experimentos virtuais sobre probabilidade geométrica | Discussão s/ experimentos virtuais.<br>Experimentos com material concreto: Roleta e Tangram.<br>Resolução em grupo Lista 4 |
| Online no AVA | Agenda 8 | Leitura Material complementar<br>Finalização Lista 4<br>Fórum Lista 4 |
| Sétimo encontro presencial (final/2011) | Discussão atividades Agenda 8<br>Realização experimentos virtuais s/ Prob. Geométrica<br>Sistematização conceitos trabalhados<br>Encerramento/confraternização | Discussão Lista 4<br>Revisão dos conceitos/ MPG<br>Apresentação p/ reflexão: Problema Monty Hall; Três problemas clássicos de Prob. Geométrica |
| Online no AVA | Agenda extra | Atividades pendentes |
| Oitavo encontro presencial (extra/2012) | Apresentação<br>Questionário<br>Sequência de atividades – Parte 1 sobre noções preliminares<br>Sequências de atividades Parte 2 sobre noções básicas | Realização de atividade s/ conceitos básicos de probabilidade: Sequencia - Parte 1 e Parte 2<br>Preenchimento de questionário |
| Online no AVA | Agenda 2012 | Continuidade atividades<br>Sequência- partes 2 e 3<br>Fórum seq. Parte 2/ Parte 3 |
| Nono encontros presencial (extra/2012) | Continuação 8º encontro<br>Sequências de atividades Parte 2 sobre noções básicas<br>Sequência de atividades Parte 3 sobre probabilidade geométrica | Discussão dialógica sobre as sequências atividades Parte 2 e Parte 3<br>Sistematização |

Obs: As agendas encontram-se no Apêndice B e as Listas de atividades no Apêndice C

## 6.1 Primeiro encontro presencial:

- Pauta: Apresentação do curso. Diálogo com os professores cursistas sobre a temática: acaso e incerteza. Apresentação de algumas questões instigantes sobre como o acaso determina nossas vidas. Apresentação das primeiras noções sobre acaso e incerteza: exemplos, vídeos e exercícios. Algumas atividades sobre o tema: resolução e discussão dialógica. Breve conversa sobre o próximo encontro no Laboratório de Informática.

Esse primeiro encontro presencial representou um grande desafio. Precisava iniciar questionando as concepções de acaso e incerteza, de forma provocativa. Após uma apresentação inicial do curso MPG, trabalhamos com dois vídeos, permeados pelas ideias extraídas do livro *O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas*, de Leonard Mlodinow (2009), visando provocar reflexões e uma discussão dialógica sobre essas noções e concepções, finalizando com a resolução em grupo de uma sequência de atividades envolvendo os mesmos assuntos.

Inicio questionando o que entendem por acaso (espécie de *brainstorming*), ao que respondem com algumas brincadeiras. Deixo se descontraírem e retomo dizendo que me refiro ao acaso no sentido do aleatório, da incerteza, do não determinístico.

Um cursista dá exemplo da corrente elétrica, que ao ligar o interruptor, a luz se acende, explicando o fenômeno para a turma. Vejo que deu um exemplo de experimento determinístico, questiono então sobre experimento não-determinístico, como houve silêncio retorno à questão do acaso, perguntando o que acham sobre jogos de azar, em que a chance de ganhar não depende da habilidade do jogador. Peço exemplos. Falam juntos: loteria esportiva, sena, jogo de baralho, jogo do bicho. Comentam sobre fazer uma 'fezinha' de vez em quando. Falam de jogo de dominó, jogo de xadrez.
Questiono se alguns destes jogos não têm uma estratégia, como jogo da velha, ou jogo do Nim, que torna possível determinar 'a priori' um vencedor quando se conhece a estratégia [o que não caracterizaria jogo de azar]. Apenas dois cursistas comentam que se for possível determinar o vencedor, então não seria um 'experimento determinado'.

**Este relato do diálogo dá indícios até o momento de que as noções de acaso e aleatoriedade não estão bem claras para a maioria da turma, há certa confusão em caracterizar qualquer jogo como jogo de azar, cuja característica determinante é a aleatoriedade nos resultados. Vale ressaltar que os dois cursistas que comentaram não ser um experimento aleatório, ou seja, ser um experimento determinístico - no caso de haver uma estratégia que permite ao sujeito conhecedor dela saber o resultado antecipado – estão corretos e refletem ter compreendido o conceito. A título de informação, jogos deste tipo, conhecidos em Matemática como 'jogos de estratégia' têm 3 características: apenas dois participantes; existe uma estratégia para vencer (baseada em noções, padrões e lógica matemática) que o jogador conhece; sempre tem 1 vencedor (não admite empate). Como exemplos podemos citar o jogo da velha e o jogo do Nim, entre outros. Observe-se que o jogo de xadrez, embora admita diversas estratégias, não se encaixa nessa categoria, pois permite situações de empate entre os dois jogadores.**

Dando continuidade, inicio a apresentação de uma sequência intencionalmente preparada para dar as ideias de acaso, incerteza e tomada de decisão. O primeiro vídeo[187] - antecipado pela pergunta Acaso-Destino? – foi um pequeno trecho de 3 minutos extraído do filme *O Curioso Caso de Benjamin Button*, que narra a história de um menino que nasce com a aparência e os aspectos de um idoso de oitenta anos, mesmo sendo um bebê e, curiosamente, enquanto o tempo passa, ele rejuvenesce. A história se desenvolve em torno de um romance do rapaz com Daisy, moça por quem se apaixona, mas precisa esperar que suas idades aparentes se aproximem para que os dois possam finalmente se envolver. O casal tem idas e vindas, encontros e desencontros, mas uma das cenas – o trecho apresentado – chama a atenção por explicar e desenvolver com clareza a influência de uma conjunção de acasos que se sucedem (efeito borboleta? teoria do caos?), culminando com o atropelamento de Daisy que a deixa impossibilitada de continuar dançando profissionalmente e, portanto, frustrada e amargurada. Na sequência do vídeo há uma série de pequenos eventos, aparentemente nada importantes, mas que no fim, conjugam o acidente da moça. O trecho apresenta uma grande sequência de ações e reações de causa-efeito envolvendo situações de acaso. O quadro 1 resume as principais ações/causas e reações/efeitos deste trecho do filme.

Quadro 1- Comparação Ação/Causa e Reação/Efeito do trecho do filme.

| Ação/ Causa | Reação/Efeito |
|---|---|
| Uma mulher esquece o casaco em casa e volta para buscá-lo. | Perde o táxi que esperava, já que outro passageiro entra nele. |
| Mulher pega outro táxi e para buscar um pacote. | O pacote não estava embrulhado, pois a atendente se atrasara devido ao rompimento com seu namorado. |
| O taxista então para e toma um café, mas quando sai, quase atropela um homem. | O homem quase fora atropelado, pois estava correndo, já que se esquecera de ajustar o despertador. |
| Enquanto isso, Daisy termina de ensaiar e toma seu banho. | Ao mesmo tempo o taxista precisa desviar de um caminhão de mudanças. |

[187] Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=l2JgUzFVPPg&NR=1>. Acesso em: 26 set 2011.

| | |
|---|---|
| Daisy espera sua amiga amarrar o cadarço que arrebentara | Ao sair, é atropelada pelo táxi. |

Fonte: <http://cine-caos.blogspot.com.br/2011/06/o-curioso-caso-de-benjamin-button.html>. Acesso em: 29 abril 2013.

Pergunto se alguém assistiu a esse filme e se o trecho apresentado trata de acaso ou é coisa do destino.

| |
|---|
| Abriu-se uma discussão, alguns achando que sim, outros que não; falou-se de 'efeito borboleta'; física quântica; Teoria da coerência do spin; sobre John Nash (filme Mente Brilhante), enfim, sobre diversos fenômenos e 'causos'. |

Deixei-os livres para falar, apenas alertei que não pretendíamos aprofundar a discussão nessa direção, nosso objetivo era mais singelo, mais 'pé no chão', como por exemplo, saber a distinção entre experimentos determinísticos e não determinísticos com exemplos mais simples, esclarecer o que são eventos aleatórios e estudar probabilidades.

**A discussão resvalou por noções de senso comum, filosóficas e/ou de cunho mais científico, como religiosidade e destino, teoria do caos e efeito borboleta.**

Aproveitando as questões levantadas mostro o livro – que havia levado para o caso de precisar usar – *O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas*, de Leonard Mlodinow, e falo um pouco do autor e do que ele aborda no livro a respeito do acaso. O autor discorre sobre questões matemáticas, alternando teorias sobre a probabilidade com histórias de personalidades que marcaram a história da ciência. O título *O Andar do Bêbado* vem da analogia que descreve o movimento aleatório e serve como metáfora para a nossa vida. Podemos empregar as ferramentas usadas na compreensão do andar do bêbado para entendermos os acontecimentos da vida diária. O físico norte-americano faz um levantamento das situações pretensamente regidas por eventos aleatórios e realiza uma investigação sobre diversos campos de atuação do ser humano, da esfera financeira ao mundo esportivo, das celebridades hollywoodianas à atuação dos médicos, nos quais a aleatoriedade está presente. Mlodinow também apresenta duas diferentes visões de mercado sobre a temática, determinística e não determinística: visão determinística, segundo a qual o sucesso é governado principalmente pelas qualidades intrínsecas da pessoa ou do produto e a visão não determinística, segundo a qual o sucesso que uma pessoa alcança é, em grande parte, conspiração de fatores pequenos e aleatórios, que chamamos de sorte. No contexto do mundo acadêmico ressalta que muitas pesquisas nessa área voltam-se para o modo como as pessoas fazem julgamentos e tomam decisões quando defrontadas com informações imperfeitas ou incompletas.

Os cursistas mostram-se interessados. Então questiono: Será que podemos mensurar, de alguma maneira, o acaso? Ver o que é mais provável, que chance tem? Diferentemente de medir a corrente elétrica ou a velocidade de um carro?

**MA** diz que sim.
**NA** complementa: No caos tem um prenúncio de uma nova ordem, na ordem há o prenúncio de um novo caos [fazendo um movimento circular com as mãos]. Fala do princípio da incerteza, que não tem como se medir ao mesmo tempo a velocidade e posição de uma partícula. [comenta sobre o livro *O discreto charme das partículas elementares*, que estudou num curso sobre física moderna].

Preocupo-me que a discussão novamente tome um rumo meio 'quântico' e tento ver se consigo extrair exemplos mais elementares. Digo que vimos um vídeo, com algumas situações de acaso, falamos de jogos, passamos pela ciência e comentamos sobre sucesso.

**VL** comenta sobre time de futebol: o time perdeu, perdeu..., o técnico é mandado embora. O que fica é a crença.
**NA**: Quem inicia os pênaltis, a chance de ganhar é menor; não iniciar e intercalar, a chance é maior.
**LE**: Falando em futebol, pênalti não é só loteria, tem técnica, ângulo da bola...Um jogador mais treinado tem mais chance.
**P**: Falo que a probabilidade é um estudo das possibilidades, mas não é uma certeza e depende das ocorrências e das situações em que ocorrem, se estas têm o mesmo 'peso'. Na verdade podemos repetir um experimento aleatório e observar o...
**NA** completa: o padrão.
**P**: Digo que ela falou uma coisa importante que temos que pensar melhor sobre.
**VL:** Pode haver um estudo para ser mais sorteado na Mega Sena.
**P**: Digo que o estudo leva a encontrar a chance de ganhar, mas não a certeza.

Voltamos para as telas da apresentação em *powerpoint* que traz alguns exemplos sobre julgamento e tomada de decisão e sobre o fator psicológico que pode envolver uma tomada de decisão.

**NA** comenta: fator psicológico, como o 'efeito manada' que ocorreu na queda das bolsas nos EUA.
**P**: Confirmo que sim e explico.

Em situações envolvendo o acaso, segundo Mlodinow (2009), nossos processos cerebrais costumam ser falhos e nos preparar uma peça, uma vez que é um campo de conhecimento que reúne muitas áreas, não só a matemática e as ciências tradicionais, como também a psicologia cognitiva, a economia comportamental e a neurociência moderna. Porém, embora tais estudos tenham sido legitimados por pesquisas acadêmicas, em grande parte suas lições ainda não vazaram dos círculos acadêmicos para a psique popular. Normalmente esses estudos tratam dos princípios que governam o acaso, do desenvolvimento dessas ideias e da maneira pela qual elas atuam em política, negócios, medicina, economia, esportes, lazer e outras áreas da atividade humana. Também tratam do modo como tomamos decisões e dos processos que nos levam a julgamentos equivocados e decisões ruins quando confrontados com a aleatoriedade ou a incerteza. A capacidade de tomar decisões e fazer avaliações sábias diante da incerteza é uma habilidade rara. Porém, como qualquer habilidade, pode ser desenvolvida com a experiência e estudos.

Essas considerações, sob a lente da aleatoriedade, geraram uma nova discussão entre os participantes e levantaram algumas dúvidas. A partir delas, foi apresentado um segundo vídeo *Coisas de passarinho*[188], mais didático para uma discussão em sala de aula acerca do tema. No vídeo, Caio toca violão num jardim quando um pássaro voando suja sua roupa e ele comenta com o pai que se acha um rapaz sem sorte, pois sempre isto acontece com ele. Na conversa com o pai é abordado o conceito de probabilidade de um evento e sua importância na previsão de fenômenos aleatórios. Isto gerou o questionamento: por que estudar probabilidade?

Algumas considerações foram levantadas:

- O ensino de estatística e probabilidade oportuniza a discussão de um ramo da matemática dos mais pertinentes da atualidade.

---

[188] Vídeo do portal Matemática Multimídia Unicamp de Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio, de domínio público. Disponível em: http://www.m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Videos/index.php?url=http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Videos/VideosM3Matematica/MatematicanaEscola/CoisadePassarinho. Acesso em: 15 set. 2011

- A probabilidade, embora associada à estatística, tem características próprias buscando quantificar a incerteza existente em determinada situação.

Aproveito para perguntar se já trabalharam probabilidades em sala de aula. Seguem algumas respostas:

**VD:** Na semana passada, na segunda aula, eu fiz um experimento com moedas.
**P**: E os alunos gostaram? Como reagiram?
**MA**: Eu fiz uma varredura porque queria chegar no Binômio de Newton para ir para probabilidade, depois para combinações. Comecei com o Triângulo de Pascal e fui para o Teorema de Tales, e fui para o fatorial e depois fui para o desenvolvimento binomial e voltei para o Triângulo de Pascal. Ali eu trabalhei o desenvolvimento do Binômio de Newton. Como o Binômio de Newton é a família de combinações do Triângulo de Pascal eu entrei nos estudo das combinações. Voltei para probabilidades e calculei as probabilidades da Mega Sena e vi as probabilidades de sucesso e insucesso. Três alunos exclamaram: mas isto é mágico! Fiquei até espantado que os alunos disseram: você foi lá, depois voltou aqui, e é a mesma coisa.
**NA**: Está tudo conectado.
**MA**: Explica que se tivesse começado pelo Binômio de Newton estaria até agora tentando explicar o sentido binomial. (!?!)
**NA**: É uma maneira de explicar probabilidades.... Interessante!
**P**: questiono se não há outra maneira de explicar probabilidades, algo mais lúdico para os alunos perceberem o significado.
**SA**: No 2º ano, já trabalhei muitos anos.
**P**: Como você trabalhou? Como eles reagem? O que você acha?
**SA**: Não estou falando agora nesse momento, mas como eu sempre passei este conteúdo, eu passava análise combinatória, todo aquele estudo, introduzia probabilidade e já começava com exercícios, jogando dados, ou mesmo baralho, para saber qual a probabilidade de tirar um naipe espada, esses eventos prováveis.
**P**: Mais alguém? ....Acham importante trabalhar este tema desde quando?
**MD**: Na realidade, nas apostilas em todos os anos tem um pouquinho, até nos livros. De uns tempos para cá, apareceu a probabilidade e a estatística também. Sempre vai aparecendo um pouquinho, coisa que antes não era assim. Essa é matéria específica de Ensino Médio.
**RO**: Quem comentou comigo que tinha gostado bastante do caderno nosso (Caderno do Professor) que tem probabilidades?
**P**: E tem probabilidade no Caderno do Professor [adotado pela Secretaria de Estado de São Paulo]? [Discutem um pouco, têm dúvidas, não sabem direito até que alguém fala: é no 2º ano, 3º bimestre]
**P**: Então quem já trabalhou probabilidade pelo Caderno?
**VA**: Eu trabalhei, mas não com a apostila.
**P**: Alguém sabe o que tem de probabilidade no Caderno? [Não souberam responder]. [**F**alam todos ao mesmo tempo sobre probabilidades]
**MD** conclui: Se a gente aprofunda esses exercícios, quebra a cabeça. Eu pelo menos só trabalho aqueles que eles (alunos) entendem, nem com grau de dificuldade maior.

**P:** Vocês acham que probabilidade é um assunto difícil?
**MD**: É, e combinatória também.
[Ficam meio silenciosos, sem maiores comentários, aquiescendo com aceno afirmativo da cabeça].

Comento que a conversa tinha o propósito de me informar sobre o quê e como trabalhavam o tema probabilidade em sala de aula. Complemento que as últimas pesquisas indicam que esse conteúdo deve ser abordado desde as séries iniciais. Pesquisadores em Educação Estatística, recomendam esses estudos desde o infantil.

**Concluo que a turma não conhece ou não se lembra como é abordado o tema probabilidade no Caderno do Professor[189], de qualquer forma vemos que este material não tem sido utilizada para trabalhar probabilidade e parece que pouco de probabilidade é trabalhado em sala de aula. Por outro lado, percebe-se pelas falas, notadamente de MA e NA que trabalham probabilidade a partir de análise combinatória, o que evidencia uma abordagem mais procedimental do que experimental, sendo que NA já adota uma abordagem mista, iniciando por combinatória e depois fazendo experimentos com jogos de dados e baralho. Nota-se também que não conhecem muito as recomendações dos PCN quanto à temática e muito menos as recomendações das pesquisas recentes indicando a inclusão do tema nos currículos desde as séries iniciais. Podemos inferir, nesse caso, o pouco domínio por parte desses professores acerca do conhecimento curricular do conteúdo.**

Por se tratar do mesmo contexto, cabe aqui fazer a inclusão de outras informações que corroboram estas últimas, obtidas num questionário aplicado posteriormente, relativas à formação e prática em sala de aula do conteúdo de probabilidades. Esses dados foram obtidos num encontro posterior, em 29 de março de 2012, que contou com 10 cursistas que haviam participado do MPG e 9 novos cursistas (integrantes do módulo seguinte).

**Todos responderam ao questionário (Apêndice D) com perguntas relativas ao tema Probabilidades. Desses 19 cursistas (a metade com menos de 10 anos de docência na**

[189] O Caderno do Professor é um material distribuído para professores do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ao 3º ano do Ensino Médio, desde 2008. Composto por 76 cadernos organizados por bimestre, por série e por matéria, ele indica o conteúdo a ser ministrado aos alunos da rede pública estadual. É complementar ao material didático já disponível nas escolas.

**educação básica), 17 disseram ter tido Probabilidade na sua formação, 16 responderam ter trabalharam esse conteúdo em sala de aula, a maioria para o Ensino Médio, 15 disseram gostar do tema, mas só 4 responderam que gostam de ensiná-lo. Mais da metade alegou achar o conteúdo complexo e também que os alunos têm dificuldades para aprender. Expressiva maioria indicou que trabalha probabilidades depois de análise combinatória, que usa o livro didático, mas 11 alegaram não conhecer esse conteúdo no Caderno do Professor e apenas 6 disseram ter trabalhado probabilidade pelo Caderno do Professor. Quanto ao conhecimento das orientações curriculares sobre o tema, 17 disseram conhecer superficialmente, apenas o essencial para aplicar em sala de aula. Entretanto, 7 não sabem dizer se as orientações curriculares e o livro didático estão em conformidade com as demandas atuais de probabilidades, outros 7 alegam que só parcialmente.**

Dando seguimento ao encontro presencial, as seguintes informações foram colocadas nas telas da apresentação em *powerpoint*, seguidas de comentário dialogados:

**Sobre os PCN**

O que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau de possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis) (BRASIL, 1998, p.52).

Fonte: tela apresentação em powerpoint da pesquisadora

**Sobre a sala de aula**

E o que podemos fazer em sala de aula?

- As aplicações da teoria das probabilidades, tanto no passado como no presente e até mesmo suas implicações futuras, devem ser citadas em sala de aula com o objetivo de despertar o interesse do aluno, mostrando de **quantas e de quais maneiras a probabilidade** pode ser utilizada no cotidiano.
- Uma abordagem interessante ao estudante consiste em apresentar

diferentes aplicações das probabilidades nos diversos ramos da ciência.
- Outra possibilidade é **buscarmos na história da Matemática as origens desses conceitos.**

Fonte: tela apresentação em powerpoint da pesquisadora

**Sobre aplicações de probabilidades**

Onde encontramos aplicações de probabilidades?
- no controle da qualidade industrial (engenharia),
- na genética (biologia),
- em pesquisa de mercado (marketing), dentre outros, que representam um rico espectro de aplicações para a introdução ao estudo de fenômenos aleatórios,
- nas leis de Maxwell, mecânica quântica (física e química).

Fonte: tela apresentação em powerpoint da pesquisadora

Comento um pouco sobre as aplicações nas diversas áreas. Os cursistas ouvem atentos, têm pouco a comentar. Apenas **NA**, acerca da aplicação em genética, comenta sobre fertilização *in vitro*. Depois abordo então sobre a origem da probabilidade.

**P:** Quando começou? Quem? Como? Será importante fazermos um retrospecto histórico? Será que ajuda? [Comentam que sim, mas não acrescentam muito]
**NA** complementa: Nada começa agora, tudo tem uma história.

Coloco, então, a tela seguinte da apresentação, que lista os principais tópicos e discorro um pouco sobre eles.

- Os primeiros conceitos de probabilidade datam do século XVII, como uma tentativa dos matemáticos da época de medir a incerteza.
- O desenvolvimento do conceito de probabilidade deu-se principalmente motivado pelos jogos de azar, que movimentavam uma elevada soma de dinheiro.
- O estudo desses jogos deu margem à criação de um campo específico denominado de Teoria dos Jogos.

Fonte: tela apresentação em powerpoint da pesquisadora

Lembro também a importância da validação e institucionalização de uma teoria. A discussão se volta para a importância e o uso do conhecimento histórico epistemológico em sala de aula.

**NA**: Mesma coisa se dá com probabilidade. Se começou com jogo de azar, não ficou limitado a isto, ampliou.
**P**: De qualquer forma, como em toda criação/invenção, foi uma necessidade da época, uma questão sócio-política cultural. Para compreender a gênese de uma criação é importante entender a cultura da época. Alguém vê mais alguma razão para buscarmos na história?
**SA**: De uma maneira geral tudo foi pela necessidade que foi surgindo, e foi aparecendo os matemáticos, que foram pensando...
**P**: Sim. Mas quando voltamos à história, o que é importante para o ensino? Em que ela pode ajudar?
**CL**: É importante para hoje e para o futuro.
[Falo sobre alguns fatos históricos].
**VL:** Veja a chegada do homem à Lua, tem gente que não acredita ainda.
**P**: Nem todos abdicam de suas crenças e não acreditam ou ignoram o progresso científico.
[Quero voltar a perguntar se voltar o olhar para a história pode ajudar a trabalhar algum conceito na escola, então comento sobre os números negativos - epistemologia de Glaeser]
**NA** comenta que uma escola que pediu uma avaliação diagnóstica e o primeiro exercício era para colocar os números inteiros na reta numérica e os alunos não sabiam.
**P**: É um problema da representação. De não saber fazer a passagem de uma representação para outra.
**VD**: Os alunos não conseguem entender centenas de milhar.
**P** provocando: Porque será que eles não entendem? Será que não está faltando alguma coisa? [Alguém comenta: deve estar faltando didática]
Falo que alguns conceitos apresentam dificuldades epistemológicas para sua compreensão: Reproduz-se o que foi dito sem compreender. Muitas vezes, se conhecermos a evolução histórica de um conceito e seus nós epistemológicos podemos perceber se esses se reproduzem na escola.

**A discussão sobre este aspecto não deslanchou muito, ficou um pouco no trivial. Tentei conduzir a conversa para ver se capturava alguma ideia que os cursistas pudessem ter acerca do uso do conhecimento histórico por parte do professor acerca de conteúdos matemáticos que pudesse auxiliar no ensino de algum conceito que apresenta dificuldades epistemológicas em sua aprendizagem, mas nada ficou evidenciado.**

Partimos então para alguns dados históricos. Nesse primeiro momento foram apresentados apenas alguns tópicos relativos à história (que depois seriam aprofundados a partir de textos disponibilizados no ambiente virtual – Apêndice A), que podem ser assim resumidos:

Sobre os jogos destacamos que, por volta de 1200 a.C. já existiam dados feitos a partir de ossos – os astrágalos –, no entanto, o jogo atingiu grande popularidade com os gregos e os romanos. Na Idade Média, a igreja católica era contra o jogo dos dados, não pelo jogo em si, mas pelo vício de beber e dizer palavrões que acompanhavam os jogos e jogadores inveterados do século XVI procuravam cientistas de renome para que estes lhes dessem fórmulas mágicas para garantir ganhos substanciais nas bancas de jogo. Daí, passamos a falar sobre jogos temos na atualidade (roleta, cartas, loterias, dados, dardos, sorteios).

Lembramos que a Teoria das probabilidades trata do estudo teórico de fenômenos envolvendo a incerteza e utilizando ferramentas básicas do cálculo matemático e que esses fenômenos, conhecidos como **aleatórios, estocásticos ou não determinísticos**, são predominantes em todas as áreas do conhecimento e se caracterizam, na repetição em condições idênticas, por produzirem resultados diferenciados, ou seja, não é possível determinar, com exatidão, qual o seu resultado. Na verdade, um experimento aleatório caracteriza-se: (a) por não se conhecer o resultado do experimento antes de realizá-lo; (b) é possível listar um conjunto com todas as possibilidades do experimento aleatório, chamado Espaço Amostral (S); (c) ao se realizar um grande número de repetições do experimento aleatório, uma regularidade poderá surgir (estes aspectos geraram discussão e levantaram algumas dúvidas, adianto que logo mais faremos atividades que podem esclarecer). Falo que iríamos focar no MPG noções básicas de três abordagens de probabilidades: a clássica, a frequentista e a geométrica. Coloco inicialmente na tela as definições de probabilidade clássica e frequentista:

I) Definição clássica: Seja um espaço amostral finito S, formado por eventos simples igualmente possíveis. Seja $A$ um evento de S, podendo A ser um evento simples ou decomposto em eventos simples, então a probabilidade de ocorrência de $A$ é dada por: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}\ , com\ 0 \leq P(A) \leq 1$ e onde $n(A)$ é o número de ocorrências (pontos amostrais) do evento A e $n(S)$ o números total de ocorrências (pontos amostrais) possíveis de S. [Trabalhamos aqui um exemplo de lançamento de dois dados: explicite o espaço amostral e encontre a probabilidade de a soma ser 7].

II) O conceito frequentista é dado por: $f_r(A) = \frac{n(A)}{n}$ , onde $n(A)$ é o número de vezes em que ocorre o resultado $A$ em *n* realizações do experimento, sob as mesmas condições.

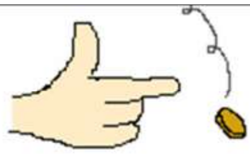
Fonte: tela apresentação em powerpoint da pesquisadora

No segundo momento desse encontro, após a apresentação e discussão dessas considerações, passamos à resolução em grupo de uma lista de atividades (Lista1 - Apêndice C), contendo questões sobre lançamento de moedas, lançamento de dados, retiradas de cartas de um baralho, retiradas de bolas de urnas e tiro ao alvo.

**Essa resolução iniciou-se no encontro presencial, deu continuidade no ambiente virtual e, de acordo com as dúvidas levantadas determinou a preparação de outros encontros presenciais. Isso caracteriza um dos *redesign* da metodologia do *design experiment*.**

A turma foi dividida em grupos, cada grupo recebeu uma cópia impressa da Lista 1. Peço que iniciem pela atividade 2, de lançamento de moeda, para podermos fazer naquele momento um experimento que pudesse trabalhar a noção frequentista de probabilidade.

2) Agora vamos lançar moedas.



- Se lançarmos duas vezes uma moeda, qual a probabilidade de obter cara pelo menos uma vez?
- Se lançarmos uma moeda três vezes, é mais provável obter "três lados iguais" ou "dois iguais e um diferente"?
- Agora vamos fazer um experimento: vamos agora lançar uma moeda 30 vezes e anotamos os resultados em uma tabela. O que aconteceu? Era o esperado?

Recomendo no terceiro item da atividade que iniciem com 10 lançamentos e só depois passem para 30 lançamentos, sempre anotando os resultados de cada jogada. Ficam animados e falam ao mesmo tempo, alguns parecem 'crianças brincando' demonstrando envolvimento com a atividade.

Câmera focaliza de perto o grupo de **MA**, **VL** e **LA**

**MA** insiste em querer resolver usando árvore de possibilidades e querendo encaixar o Triângulo de Pascal.
**VAL** não está muito convencido e fica olhando o que outros grupos estão fazendo.
**MA** desenvolvendo, **VL** meio desanimado comenta se têm que fazer até a linha 30 (do triângulo de Pascal).
**MZ** pergunta se ele tem 'de cabeça'. **MA** começa a resolver por combinatória.
**VL** comenta se não fica mais fácil jogar e anotar. Conversam um pouco.
**MA** diz: então vamos elaborar um ensaio.
**VL** fala para começarem de uma tabela (pega uma folha para fazer a tabela).

| |
|---|
| **MA** ainda resistente, argumenta: Se você lançar uma moeda você só tem cara ou coroa, não? A tendência é 50%.<br>**VL** concorda (acenando com a cabeça): Isso mesmo 50%.<br>**MA** fala: É o esperado: 32, 64, 128....Isto aqui é $2^{10}$ (??).<br>**VL** insiste: Você pode lançar uma moeda 30 vezes e cair tudo cara. A probabilidade é bem difícil, mas existe.<br>**MA** continua fazendo cálculos: 32, 64, 128....1024 .<br>**VL** fica pouco disperso olhando para os outros grupos.<br>**MZ** fica olhando tentando acompanhar o raciocínio de **MA**.<br>**VL** e **MZ** olham curiosos outros grupos jogando moeda e se divertindo. |

Câmera muda para o grupo **VD, MD, NA.**

| |
|---|
| **VD** joga moeda e só está saindo cara e diz: não dá coroa nunca? [um pouco irritada]<br>**P**: Falo para tentar tirar o viés da jogada o máximo possível. [Continuam jogando].<br>**MC** fala: Também é uma moeda de 10 centavos.<br>**NA** completa: ‘10 centavos’ não tem nem coroa. [Caem na risada]. |

Câmera volta para o grupo de **MA**, **VL** e **LA**.

| |
|---|
| **MA** capitulou e agora partiu ele mesmo para jogar a moeda.<br>**MA** continua jogando: cara, cara, cara, pô, só sai cara, não sai coroa nunca?<br>**VL** mostra a tabela: Saiu muito mais cara do que coroa.<br>**P**: Com que frequência até agora?<br>**MA**: Tá dando 11 caras e 4 coroas. |

Peço ao operador da câmera para focalizar outro grupo, **CL**, **DA**, **SE**.

| |
|---|
| **P**: E vocês, já jogaram? O que está dando, cara ou coroa?<br>**DA** diz: aqui também já saiu cara.<br>**CL** relata: A **DA** jogou 2 vezes e deu 1 cara e 1 coroa; daí eu joguei 2 vezes e saiu 2 coroas; depois **SE** jogou e deu 2 caras.<br>**CL** continua: Acho que quando é só 2 vezes, não tem essa de ser 50%.<br>**DA** completa: Não necessariamente; para dar 50% tem que ser umas....mais de 100 vezes. [Concordo que para chegar nessa frequência tem que se fazer o experimento um número grande vezes].<br>**CL**: Mas quando é 15 (em 30), não é 50%?<br>P: Se este foi o resultado, sim. |
| **P** [pergunto alto para todos]: Quantas vezes você acham que termos que jogar para a frequência de sair cara (ou coroa) tender para 50%?<br>**CL**: acho que mais de 60 vezes [que já haviam jogado], umas 300 vezes.<br>**MA** fala alto: Aqui deu 14 caras e 16 coroas.<br>**P**: Ah! Então ‘equilibrou’?<br>**MA**: acho que sim |

Dirijo-me a outro grupo (**SA**, **NO**, **MS EL**) e que não se mostra muito interessado em realizar o experimento.

**P**: E vocês porque não estão jogando? [Disseram que não estavam a fim]
**SA** confirma que preferiram fazer as outras atividades da lista.

Câmera passa pelos grupos. Dirijo-me ao grupo de **NA**

**P**: já fizeram 30 jogadas?
**NA**: Sim, deu 19 caras e 11 coroas; as coroas apareceram depois. Nas primeiras 15 jogadas, só saiu coroa 2 vezes.
**P**: Isto faz a gente pensar que, mesmo tendo essa probabilidade (de 50% para cada uma), pode sair, por exemplo, umas 20 caras seguidas e só depois começar a sair coroas (ou vice-versa).
**MD** argumenta que se jogassem só 15 vezes, não daria 50%, teria saído só 2 coroas.
**P:** Isso fere a nossa lógica? Como podemos confirmar?
**NA**: Mais tentativas.
**P**: Quantas vocês acham?
**NA**: umas 60 vezes; o cara lá fez 5 mil [referindo-se à informação do vídeo sobre a agulha de Buffon].
P (corrigindo): Lançou 10 mil vezes para ter sucesso em 5067 vezes. [Informo que vamos usar um *applet* para fazer o experimento da Agulha de Buffon muitas vezes com mais facilidade que o simulador permite].

O grupo que não estava fazendo o experimento acabou capitulando e resolveu jogar moeda.

**SA**: Não precisa saber quantas deram de cada. Aqui já está dizendo o que é mais provável.
**VL** explica que fez o mesmo jogo de loteria três vezes, não ganhou nenhuma, mas vai continuar jogando o mesmo jogo e afirma: Mas a minha chance é maior agora.
**P**: Tem certeza? Já fez os cálculos para ver qual a chance? [discutem no grupo].

Passam para outra questão da lista. O exercício 3 da lista é o seguinte:

Alice propôs a Paulo o seguinte jogo:

- Atiram 20 vezes dois dados ao ar e anotam o produto dos pontos das faces superiores;
- Se o produto é um número par, Alice ganha 1 ponto; caso contrário, Paulo ganha 1 ponto;
- O vencedor será o que tiver maior pontuação no final dos 20 lançamentos.

Não há dados suficientes para simularem a questão. Ofereço 2 dados que havia levado, mas peço que façam a simulação no papel.

| |
|---|
| **VD** diz que vai sortear 20 vezes.<br>**MA** parte para resolução binomial. [dirijo-me a ele]<br>P: E se a gente não usasse a fórmula, se não soubéssemos ainda a fórmula, como fazer?<br>**MA**: Não estou usando a fórmula, só para conferir.<br>[Falo da importância de se usar um algoritmo, mas que, principalmente com o aluno, é bom começar com experimentos como esses que fizemos; eles devem primeiro experenciar isto, para ir construindo um conceito. Reforço a importância da descoberta na formação de um, conceito]. |

Dirijo-me ao grupo de **SA,** que jogava moeda.

| |
|---|
| **P**: E aí, pessoal, está dando mais cara ou coroa?<br>[Ainda não contaram. Falo que quero saber o resultado assim que contarem].<br>**NO**: Deu 17 caras e 13 coroas.<br>**SA**: O que eu quis dizer antes é que se jogar 1 vez, tem 50%. Se jogar mais de uma moeda pode não ter essa frequência; poderá jogar 30 vezes e ter 30 caras. [Discutem].<br>**SA** complementa: Pode se aproximar de 50%. |

Termina o tempo do encontro. Agradeço a presença de todos, aviso sobre próximo encontro que será no laboratório para conhecerem o AVA e peço que terminem de resolver os exercícios da lista. Despendem-se e vão saindo.

**Estendi propositalmente a descrição da resolução das atividades em grupo para evidenciar algumas concepções e crenças ou falácias, como a falácia do jogador que apareceu nas falas dos cursistas. A falácia do jogador (apostador) ou de Gambler é a tendência a achar que eventos relacionados a probabilidades podem ser influenciados por eventos aleatórios anteriores. Para entender: você joga uma moeda 3 vezes e em todas elas dá coroa. Em que apostaria na quarta vez? A tendência é acharmos que, se já saiu coroa 3 vezes, a próxima deverá ser cara. Mas a probabilidade, é claro, continua sendo a mesma: há 50% de chance de sair cara e 50% de sair coroa, não importa quantas vezes tenha saído cada uma das faces. Pode parecer óbvio, mas esse erro de pensamento é responsável por fazer com que**

**muita gente perca dinheiro em jogos de azar. Para Kahneman e Tversky (1979)[190] a maioria das pessoas estabelece uma relação causal em eventos sequenciais aleatórios, violando sistematicamente algumas regras da teoria de probabilidades. A ausência de compreensão sobre esta aleatoriedade provoca a chamada de "Falácia do Apostador".**

**Outra observação a destacar é a forte tendência de MA em resolver as questões usando procedimentos próprios da análise combinatória e demonstrar certa resistência em abandonar esse hábito para se arriscar por outros caminhos [em outras ocasiões isto também ficou evidente].**

## 6.2 Segundo encontro presencial

- **Pauta:** Apresentação do ambiente virtual de aprendizagem; Agenda de ambientação; Atividades no AVA-TelEduc; Algumas atividades sobre o tema: resolução e discussão dialógica.

O segundo encontro presencial ocorreu no Laboratório de Informática da UNIBAN e teve dois objetivos principais: familiarizar os cursistas com o ambiente virtual (criado especialmente para dar suporte ao acompanhamento online dos encontros presenciais do MPG); tentar incutir nos cursistas as potencialidades desse tipo de recurso tentando quebrar algumas resistências já esperadas.

Todos os presentes testaram as ferramentas básicas que iríamos usar, a saber: estrutura do ambiente (informações próprias do TelEduc sobre o ambiente e as ferramentas), dinâmica do curso (com informações sobre como se daria esse acompanhamento a distância), agenda (indicando semanalmente as atividades a serem realizadas), atividades (as atividades a serem realizadas), material de apoio (textos preparados com caráter mais teórico sobre o conteúdo abordado), leituras (artigos extras disponibilizados como leitura complementar), mural (local próprio para recados), fóruns de discussão (ferramenta para discussão coletiva e espaço de interação), correio (para envio de mensagens dentro do ambiente), perfil (apresentação pessoal dos participantes), diário de bordo (espaço para impressões pessoais) e portfólio (local das postagens da resolução das atividades a serem comentadas pelo

[190] KAHNEMAN, D, TVERSKY, A. Prospect Theory: An analysis of Decision under risk. **Econometrica**. v. 47, 1979, p. 263-291. (reproduzido no livro Rápido e Devagar dos mesmos autores).

formador/tutor). Na Figura 13 temos uma imagem das ferramentas disponibilizadas para os cursistas.

Não houve momento de interação síncrona na sala de bate-papo durante o curso MPG pela dificuldade de encontrar momento comum disponível para todos, mas testaram a ferramenta no momento da ambientação. Cabe ressaltar, a título de informação, que no ambiente TelEduc, na visão do formador (e do administrador) existem ferramentas que permitem acompanhar a produção, o acesso e a interação dos cursistas, ficando registrado no ambiente. A produção do material (textos, artigos, atividades programadas e agenda da programação), bem como a mediação das atividades e dos fóruns esteve a cargo da pesquisadora e podem ser conferidos nos Apêndices.

**Figura 13 -** Ferramentas do ambiente na visão do aluno


Fonte: ambiente virtual TelEduc do MPG

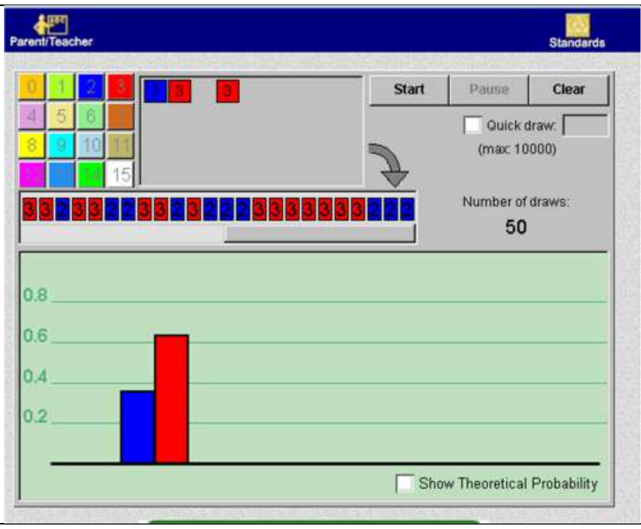
Todo período deste segundo encontro presencial foi utilizado na ambientação. Entretanto, ao acessarem o ambiente os cursistas encontraram disponibilizados, além do material trabalhado no primeiro encontro e a primeira lista de atividades, mensagem de boas-vindas, informações sobre a dinâmica do curso e a agenda de ambientação contendo atividades específicas para familiarização como o ambiente virtual, informações sobre pesquisas na internet e um experimento na Web via um *applet* de probabilidade, para testarem e postarem suas impressões. Dessa forma, ao passo que se familiarizavam, também discutiam e tinham ao seu alcance informações e atividades sobre os temas do curso.

A agenda de ambientação solicitava as seguintes tarefas para serem cumpridas durante o encontro:

a) clicar na barra de ferramenta em ***Estrutura do Ambiente*** para obter informações sobre o modo de funcionamento dos recursos do ambiente TelEduc;
b) preencher o ***Perfil*** com uma apresentação pessoal, áreas de interesse, sua formação, onde trabalha como docente, projeções para o futuro, hobby, e assim por diante;
c) fazer uma leitura cuidadosa da ***Dinâmica do Curso***, para obter informações sobre como o curso será desenvolvido, quais são os conteúdos que serão trabalhados, qual será nossa metodologia de trabalho, o cronograma geral;
d) usar a ferramenta ***Fórum*** como espaço de discussão e interação com a turma;
e) elaborar um breve texto descrevendo quais são as suas expectativas em relação ao curso e deixar seu texto na ferramenta ***Portfólio***;
f) elaborar uma Ficha de Organização de Tempo de Estudo, respondendo às questões sobre sua forma de estudar, postar e seu Portfólio individual, compartilhando com o formador;
g) fazer uma pesquisa na internet de algum site que ache interessante e deixar em seu portfólio, mas não sem antes se informar sobre os riscos e potencialidades que ela proporciona nos artigos disponibilizados;
h) fazer o experimento virtual usando *applet* disponível no link e discutir os resultados: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_146_g_3_t_5.html
i) deixar sua impressões sobre este encontro no seu **Diário de Bordo**

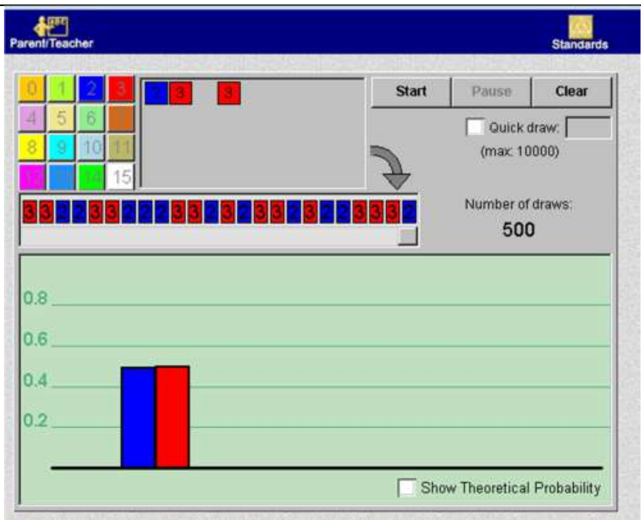
Nem todas as atividades puderam ser feitas durante o encontro presencial e foram realizadas a posteriori pela maioria. O experimento com o *applet*, gerou uma boa discussão sobre comportamento frequentista da probabilidade, que já tinha se iniciado no primeiro encontro por conta do lançamento de moedas. O *applet* em questão permite selecionar teclas (números/cores) e realizar simulações de um número n de sorteios randômicos com exibição simultânea do gráfico de barras das frequências relativas das teclas sorteadas. Nas Figuras 14 e 15 vemos imagens das telas desse experimento.

**Figura 14 -** Resultado de 50 lançamentos randômicos das teclas 2 e 3




Fonte: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_146_g_3_t_5.html

**Figura 15 -** Resultado de 500 lançamentos randômicos das teclas 2 e 3.




Fonte: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_146_g_3_t_5.html

**O segundo encontro presencial, realizado no Laboratório de Informática da UNIBAN, foi dedicado basicamente para ambientação à plataforma virtual de aprendizagem. Por se tratar de um momento todo dedicado à ambientação na plataforma TelEduc para acompanhamento virtual entre os momentos presenciais, nada de muito relevante tenho a acrescentar em termos da análise. Vale registrar que pareceram motivados naquele momento, trocaram mensagens entre si e pareceram empolgados com o experimento realizado com o simulador *applet,* que permitiu verificar visualmente a noção frequentista de probabilidade, qual seja, num experimento aleatório, realizada um número grande de**

**vezes, a frequência relativa de sucessos tende para a probabilidade de sucesso daquele evento. Não dá ainda para concluir que perceberam a noção frequentista de probabilidade, podem ter ficado empolgados com o caráter inovador e lúdico da realização de uma atividade num simulador digital. De qualquer forma, foi interessante perceber esse ânimo, uma vez que pretendia utilizar outros recursos digitais durante o processo por entender que são facilitadores da aprendizagem, quando mediados na interação com o formador.**

## 6.3 Terceiro encontro

É preciso lembrar que, conforme combinado com a turma, semanalmente (aos sábados) era disponibilizada uma agenda de programação entre os encontros e preparatória para o encontro presencial seguinte. A intenção era que os cursistas acompanhassem essas programações, realizando as tarefas agendadas, que eram acompanhadas e mediadas pela pesquisadora e serviam para nortear a abordagem do próximo encontro presencial. Nem sempre isto ocorreu como pretendido, mas este fato também era levado em conta no sentido de serem retomadas e discutidas no encontro presencial as atividades agendadas virtualmente. Desta vez o intervalo foi de duas semanas, portanto foram disponibilizadas duas agendas até o terceiro encontro presencial. As agendas podem ser verificadas na íntegra no Apêndice B.

### Acompanhamento virtual entre o segundo e o terceiro encontros presenciais.

A **Agenda 1** solicitava basicamente a leitura atenta e resolução da sequência de atividades da Lista 1 iniciada no primeiro encontro presencial. Para tal poderiam consultar o material de apoio disponibilizado (Unidades I e II), discutir ideias sugestões e tirar dúvidas no Fórum>Lista e depois postar a resolução dos exercícios da Lista 1 nos portfólios individuais, compartilhando só com o formador. Também foi sugerido registrarem suas impressões no Diário de Bordo acerca desta primeira semana no ambiente virtual.

Durante o acompanhamento virtual das discussões havidas no fórum e as resoluções postadas nos portfólio (nem todos o fizeram) alguns equívocos foram detectados.

Apenas 4 cursistas postaram no AVA a resolução da Lista 1 antes do 3º encontro presencial, sendo que destes 3 postaram antes da Agenda 2. Isso era muito importante para mim, pois daria uma noção de dúvidas e equívocos na resolução das atividades:

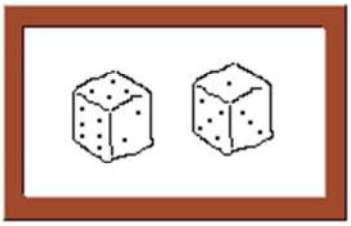
**Atividades – Lista 1**

1) Lançaram-se dois dados numerados de 1 a 6.

a) Quais são as ocorrências elementares possíveis?

b) Calcule a probabilidade de:

- sair dois 5
- não sair 6
- a soma ser 7
- a soma de dois números consecutivos ser primo
- a soma ser 10 ou maior que 10



Nessa atividade, **CL** indica o número de vezes de sucesso de cada evento, mas não calcula a probabilidade de cada evento, ou seja, não encontra a razão n($A$)/ n(S). Mas o problema comum a todos foi o item "a soma de dois primos consecutivos ser primo".

**CL indica:**

• a soma de dois números consecutivos ser primo

Resp. {(1,2)(2,3) (3,4) (5,6)} 4/36, 1/9

**LE indicou:** para que a soma de dois números consecutivos ser primo as possibilidades são 1 e 1, 1 e 2, 2 e 1, 1 e 4, 4 e 1, 1 e 6, 6 e 1, 2 e 3, 3 e 2 e 5, 5 e 2, 3 e 4, 4 e 3, 5 e 6, 6 e 5 no total são 15 possibilidades e a probabilidade é de 15/36 = 5/12.

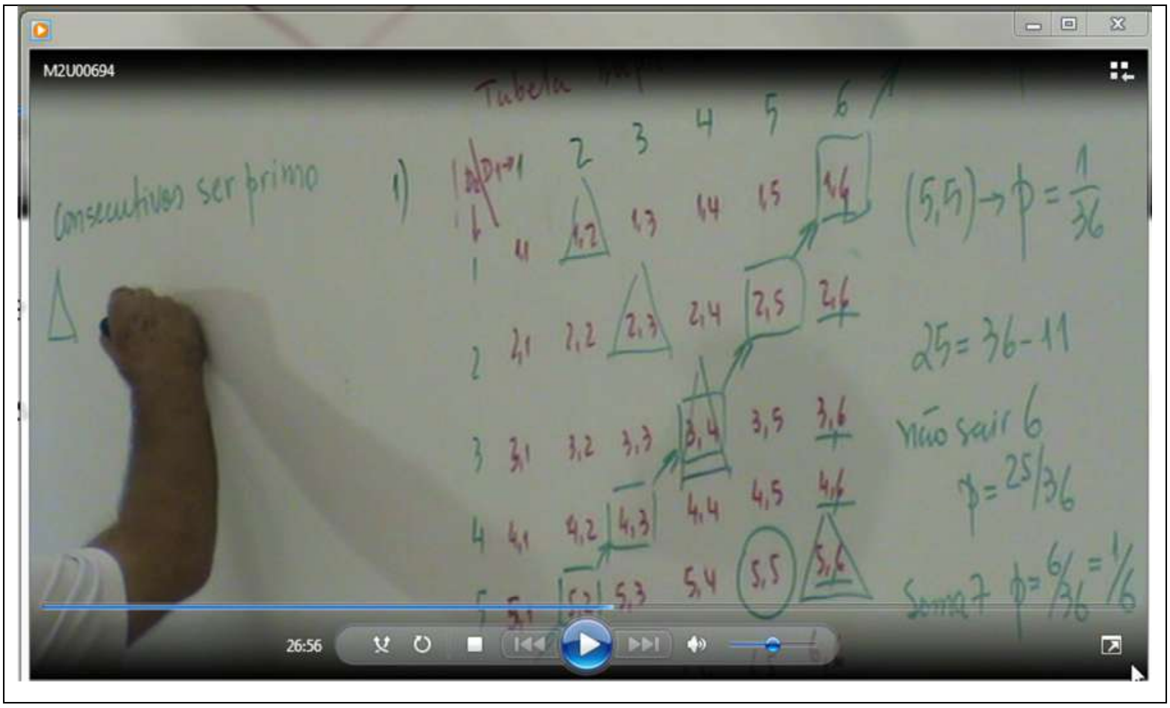
**MS indicou**:

• a soma de dois números consecutivos ser primo
D={(1,2),(2,3),(3,4),(5,6)}
n(D)=4
P(D)= $\frac{4^{\div 4}}{36^{\div 4}} = \frac{1}{9}$

**MA indicou:** *a soma de dois números consecutivos ser primo, temos 4 pares de números consecutivos cuja soma é nº primo – P = 4/36= 1/36*

**Todos encontraram corretamente o espaço amostral com 36 elementos, mas percebe-se neste item que a expressão "números consecutivos" levou-os a só considerar os pares (x,y) do espaço amostral, com $x<y$ e a soma sendo um número primo, desconsiderando os respectivos pares simétricos (y,x) do espaço amostral que também são números consecutivos com soma sendo um número primo, uma vez que a ordem nesse caso não poderia ser levada em conta, era só uma representação para o espaço amostral que auxilia na contagem dos caso possíveis de cada evento. Antecipo aqui, para não ter que repetir mais à frente, que o mesmo ocorreu com outros cursistas no 3º encontro presencial; foi uma questão que causou bastante discussão para se chegar à compreensão correta. Podemos ver na Figura 16 uma captura de tela em que um cursista resolve esta questão no quadro (na discussão coletiva que se deu mais adiante no terceiro encontro) em que este item está identificado por pares ordenados circunscritos por triângulos.**

**Figura 16** - Cursista fazendo atividade 1 da Lista 1 no quadro, para discussão coletiva.




Fonte: captura tela da gravação em vídeo.

A atividade 2 desta Lista 1 era a do lançamento de moedas que já havíamos trabalhado em grupo no 1º encontro presencial.

2) Agora vamos lançar moedas.

- Se lançarmos duas vezes uma moeda, qual a probabilidade de obter cara pelo menos uma vez? [Resp. ¾].
- Se lançarmos uma moeda três vezes, é mais provável obter "três lados iguais" ou "dois iguais e um diferente"? [Resp. dois iguais e um diferente, p= ¾]
- Agora vamos fazer um experimento: vamos agora lançar uma moeda 30 vezes e anotamos os resultados em uma tabela. O que aconteceu? Era o esperado? [Resp. que o resultado tendesse a 50%]

Entretanto, mesmo assim, esses cursistas cometeram erros e equívocos na resolução, como pode ser visto na reprodução de suas respostas postadas.

**• Se lançarmos duas vezes uma moeda, qual a probabilidade de obter cara pelo menos uma vez?**

**CL** respondeu: Jogando somente uma ou poucas vezes, não tem como estimar, daí creio que entra o fator sorte.

**MS** respondeu: P(A)= $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

**LE** respondeu: **a probabilidade é de 1/2.**
**MA** respondeu usando combinatória:

*Sendo K = cara (probabilidade de sucesso) e C= coroa (probabilidade de insucesso). Pelo princípio de $(K + C)^2 = 1K^2 + 2K^1C^1 + 1C^2$, onde: $1K^2$ é igual a uma possibilidade de ocorrerem 2 sucessos; $2K^1C^1$ é igual a duas possibilidade de 1 sucesso e de 1 insucesso; $1C^2$ é igual a uma possibilidade de ocorrerem 2 insucessos. Em um total de 4 resultados possíveis, temos: obter pelo menos 1 cara(K), P = ¾*

**• Se lançarmos uma moeda três vezes, é mais provável obter "três lados iguais" ou "dois iguais e um diferente"?**

**CL** respondeu: Jogando uma vez ou poucas vezes, não da pra estimar, nosso grupo é de 3 pessoas cada um jogou 3 vezes e não bateu nossas respostas.

**MS** respondeu: Resultados obtidos: c,k,k (c=cara, k=coroa), ou seja, 2 iguais e 1 diferente.
**LE** respondeu: a probabilidade é a mesma ½

**MA** respondeu usando combinatória
*Lançando três vezes a moeda: são 8 resultados possíveis em: $(K + C)^3 = 1K^3 + 3K^2C^1 + 3K^1C^2 + 1C^3$. - obter 3 lados iguais – P = 2/8 = ¼; - obter 2 lados iguais e um diferente - P = 6/8 = ¾. Logo o mais provável é obtermos 2 lados iguais e 1 lado diferente.*

• **Agora vamos fazer um experimento: vamos agora lançar uma moeda 30 vezes e anotamos os resultados em uma tabela. O que aconteceu? Era o esperado?**

**CL** respondeu: Quanto mais vezes fazemos o experimento , no caso analisado foi 30 vezes, fomos nos aproximando dos 50%. Cada pessoa do grupo experimentou e chegamos nos resultados aproximado.

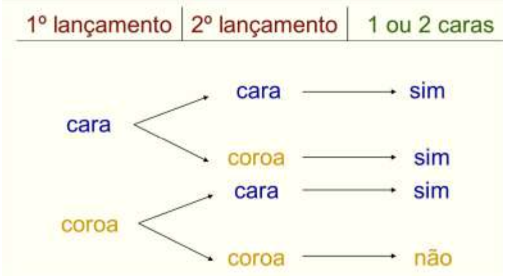
**MS** respondeu: Obtivemos 13 caras e 17 coroas, realmente era o esperado, mais coroas.
**LE** respondeu: o que acontece normalmente é que o resultado é quase sempre 50%.
**MA** respondeu usando combinatória:

Lançamento 30 vezes de uma moeda, anotando os resultados:
C C C K C C C C K C C K C C K
K K K C K K K K K K C K C K K
Temos ocorrência de 14 coroas (C) e 16 caras (K)
Em 2 lados com 30 lançamentos, $2^n = 2^{30} = 1.073.741.824$ resultados possíveis.
No experimento físico, lançando 30 vezes a moeda e anotando os resultados, temos:
[ C 30,14] . $C^{14}.K^{16} = 145.422.675$ resultados de ocorrerem 16 caras(K) e 14 coroas (C), e no evento : $P = 145.422.675 / 1.073.741.824 = 0,1354 = 13,54\%$

**As dificuldades aqui evidenciadas refletem a incompreensão de todos em relação a não distinção do que se trata: probabilidade clássica ou frequentista. Reforço a importância das primeiras impressões que podem trazer as concepções previas. Vemos que os dois primeiros itens dessa questão, apenas MA acertou, resolvendo por combinatória, embora não fosse necessário ir por este caminho, o que o complicou no terceiro item da questão, por continuar insistindo na resolução por combinatória, quando se trata de probabilidade frequentista. Por outro lado, os outros três cursistas responderam a contento este item, baseando-se no experimento já realizado em grupo no 1º encontro presencial, no entanto, não lhes ocorreu que se tratava da probabilidade no sentido clássico, que poderia ser resolvida explicitando o espaço amostral e fazendo a contagem dos casos de sucesso relativos ao total de casos possíveis (o que poderia ser feito usando a árvore de possibilidades). Mas isto tem boa explicação mais aprofundada, uma vez que o raciocínio utilizado para explicitar o espaço amostral tem razões epistemológicas históricas, que devido à sua relevância, merece aqui parênteses para fazer algumas considerações histórico-epistemológicas, que se seguem.**

Essa questão corresponde a um problema clássico que ficou conhecido como ‘o erro de D’Alembert’ (Croix et Pile). O raciocínio de D’Alembert não está correto, pois as combinações por ele descritas não igualmente prováveis. A Figura 17, a seguir, ilustra o raciocínio errôneo feito por D’Alembert em comparação com o correto.

**Figura 17** – Ilustração comparativa entre a resolução de D’Alembert e a resolução correta

| Resolução incorreta | Resolução correta |
|---|---|
|  |  |





Fonte: pesquisadora (*) [191]

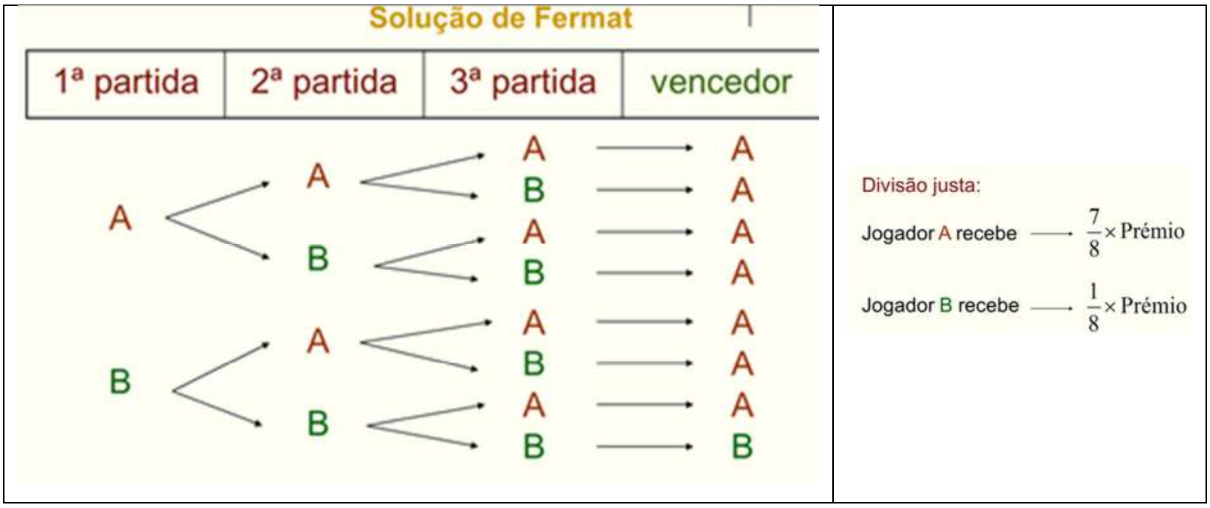
Na verdade, o raciocínio equivocado de D’Alembert foi considerar que ao sair ‘cara’ na primeira tentativa, isto excluiria de pronto o segundo lançamento, só realizado para o caso de ter saído ‘coroa’ no primeiro. Mas esse tipo de raciocínio não foi prerrogativa dele.

Na verdade, esse problema remonta a outro também clássico, conhecido como o ‘problema da divisão de apostas’, motivo da famosa troca de cartas entre Pascal e Fermat, consideradas documentos fundadores da Teoria das Probabilidades. O problema da divisão de apostas contempla um tipo de raciocínio semelhante e tratava de encontrar a melhor estratégia para resolver um problema (de probabilidades) onde se pretendia a divisão de um prêmio (valor que os jogadores apostaram) num jogo que teve de ser interrompido. Os dois jogadores tinham de jogar uma série de partidas justas levando o valor da aposta aquele que obtivesse, em primeiro lugar, 6 vitórias. Acontece que, por situações imprevistas, o jogo teve de ser interrompido no momento em que o jogador A tinha 5 vitórias contra 3 do jogador B. A questão que se colocava era encontrar a forma mais justa de fazer a divisão do valor que estava em aposta entre os dois jogadores e foi analisada por muitos matemáticos, entre eles Paciola (1445-1517), que propôs a partilha em 5/8 e 3/8 do prêmio respectivamente para os jogadores A e B; Tartaglia (1499-1557), que afirma não parecer correta a solução de Pacioli e

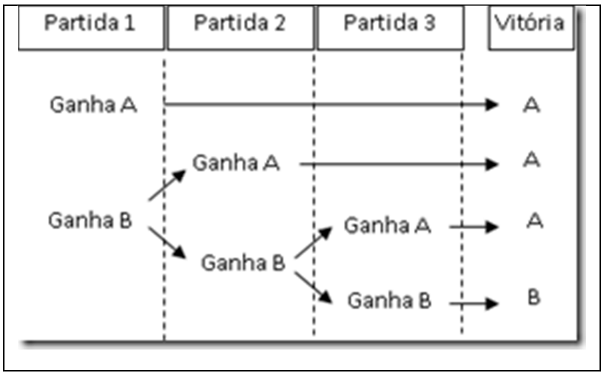
[191] Adaptada da apresentação em powerpoint de Carlos Tenreiro (Deptº de Matemática da Universidade de Coimbra), de 2006, na Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Guarda, Portugal.

que qualquer forma de divisão haverá lugar de litígio; Cardano (1501-1575), que afirma ter um erro evidente na divisão do prêmio proposta por Pacioli. Para esses matemáticos o problema de divisão das apostas era de proporção. Esta visão matemática onde transparece um raciocínio proporcional tendo em conta o número de partidas que foram realizadas (8), nada tinha a ver com a realidade que se focava naquilo que ainda faltava jogar, solução esta encontrada por Pascal (1623-1662) e Fermat (1601- 1665) em o problema se reduz a um problema de probabilidade. Vale lembrar que a solução final acordada pelos dois, após uma série de sete cartas trocadas com longas argumentações e publicada em 1654, passou também no bojo das discussões por uma proposta de Pascal, do tipo 5/8 versus 3/8, que foi rebatida por Fermat. Desta forma o problema foi tratado, por muitos anos, como sendo um problema de proporções, quando afinal, tratava-se de um problema de probabilidades, uma vez que o prêmio deveria ser repartido de acordo com a probabilidade que cada um tinha no momento da interrupção em ganhar aquela série de partidas. Pascal e Fermat, mesmo por caminhos diferentes, chegaram à solução correta, considerada o mote para a criação da Teoria da Probabilidade. Laplace (1749-1827), a quem é atribuída a definição clássica de probabilidade tratada na sua obra Théorie Analytique des Probabilities, publicada em 1812 (embora tenha sido usada por outros matemáticos anteriores), afirma no Essai Philosofique sur Probabilités, de 1814, que "Ninguém, antes de Pascal e Fermat, estabeleceu os princípios e os métodos que permitissem calcular as chances favoráveis aos jogadores, bem como resolver questões complicadas deste gênero".

A relação entre o 'problema de D'Alembert' e a 'divisão das apostas' está numa das soluções devida à Pascal de que o produto do ganho eventual pela probabilidade (p) desse ganho, ou seja, a divisão justa seria p x prêmio $\leftrightarrow$ (1-p) x prêmio. Assim, na continuidade das discussões com Fermat, a solução a que chegaram pode ser representada da seguinte forma (proposta por Fermat):




Assim já não foi entendido por D'Alembert que, um século depois, apresenta uma divisão justa para este problema com uma resposta diferente, baseada no seguinte raciocínio: no caso de o jogo continuar, havia a possibilidade de ainda serem efetuadas três partidas, acabando o jogo se o jogador A ganhasse em qualquer uma delas. Esquematicamente teríamos:




De acordo com este pensamento e segundo a lei de Laplace, o jogador A reunia três resultados favoráveis, o que lhe permitia arrecadar 3/4 do prémio sendo o restante para o jogador B. É certo o reconhecimento do pensamento sofisticado de D'Alembert ao seguir um novo conhecimento matemático – a teoria da probabilidade. No entanto, esta abordagem a este tipo de problema é conhecida pelo erro D'Alembert. Quem estava certo eram aqueles dois matemáticos que 100 anos antes já tinham chegado ao tipo de raciocínio correto e validado pela comunidade.

**Discorri mais longamente na análise dessa questão com o propósito de mostrar que tipos de raciocínios equivocados ou errôneos ocorreram durante a história da evolução do**

**pensamento probabilístico e, ainda hoje, voltar a aparecer, o que evidencia que apresentam uma dificuldade epistemológica para sua compreensão.**

**A resolução de MA segue a ideia relacionada ao método de resolução de Pascal, epônimo do Triângulo por seu *Traité du triangle arithmétique*, de 1654. Já o raciocínio amplamente utilizado hoje por meio da 'árvore de possibilidades' traz o método de Fermat, ambos desenvolvidos pela dupla de matemáticos em sua profícua discussão-missiva.**

**Cabe registrar que essa questão foi comentada, um pouco modificada, em encontro (extra) posterior, após término do MPG, com a presença de professores que cursaram o MPG e outros não. Segue a Atividade 6 da sequência – parte 2 (Apêndice D).**

6) Um artigo publicado por D'Alembert (1717-1783) em 1754, na "Enciclopédia Francesa", deu origem a um famoso paradoxo, denominado portanto de paradoxo de D'Alembert. Esse grande matemático encontrou resultados para problemas relacionados a jogos com dados (vimos que os jogos foram uma grande mola propulsora da Teoria das Probabilidades) e achava que a teoria estava errada, já que na prática os resultados não se confirmavam.
Um dos problemas era o seguinte: Qual a probabilidade de se obter pelo menos uma cara em dois lançamentos de uma moeda? D'Alembert achava que essa probabilidade era 2/3, ou seja, a obtenção de uma ou duas caras no lançamento de dois dados era de 2/3, ou aproximadamente 0,6667. Numa simulação feita no computador, obtivemos:

| Nº de repetições | 1 ou 2 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 69 | 0,69 |
| 1 000 | 778 | 0,778 |
| 10 000 | 7545 | 0,7545 |
| 50 000 | 37337 | 0,74674 |

Obtivemos então um resultado que parece tender para 0,75 e, portanto, distante do que era esperado por D'Alembert.
a) Discuta com o colega como resolver esse impasse e verificar qual dos dois resultados é o correto? Deixe seu comentário abaixo
b) O processo realizado via computador trabalha com que conceito de probabilidade?

**Essa Atividade 6 foi realizada em grupo e depois discutida coletivamente. Alguns professores, notadamente entre os que não haviam cursado o MPG, houve dúvidas na resolução. As dúvidas surgiram em razão de não conseguirem justificar o impasse, quer seja, não terem clareza ou confiança na resolução. Entretanto, dentre os cursistas do MPG nesse encontro (extra), SA, LE e DA entregaram e acertaram a resolução (ressalto que tinham liberdade de entregar ou não)**

Voltando à discussão coletiva das atividades nesse encontro, questão 3-Lista1:

3) Alice propôs a Paulo o seguinte jogo.

- Atiram 20 vezes dois dados ao ar e anotam o produto dos pontos das faces superiores;
- Se o produto é um número par, Alice ganha 1 ponto;
  caso contrário, Paulo ganha 1 ponto;
- O vencedor será o que tiver maior pontuação no final dos 20 lançamentos.

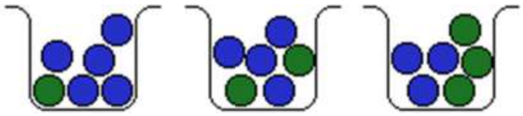
Parece-lhe que os dois jogadores têm igual probabilidade de ganhar? Justifique sua resposta.
[Resp. Alice tem mais chance na proporção de 3/1]

**CL** respondeu: As chances são iguais, fiz o experimento e creio que a pessoa que ganhar será com pouca diferença.

**MS** respondeu: Chamemos de P(A) a probabilidade de Alice vencer e de P(P) a probabilidade de Paulo vencer:
S = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2, 2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}
n(S)=36
A={(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}
n(A)=27
P(A)= $\frac{27}{36}$ =75%
P={(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)}
n(P)=9
P(P)= $\frac{9}{36}$ =25%
Alice e Paulo não tem igual chance de ganhar, pois Alice tem 3 vezes mais chances que Paulo em cada lance.
**LE** respondeu corretamente como MS
**MA** respondeu corretamente: *Considerando a tabela de dupla entrada do exercício 1, temos: 27 resultados com o produto par e 9 resultados com o produto impar, logo as chances de Alice são maiores na proporção de 9/29 = 1/3, isto é, para um resultado impar temos proporcionalmente 3 resultados pares.*

Embora nada tenham comentado sobre as 20 jogadas, analisando apenas a primeira, todos acertaram, exceto **CL**, que talvez não tenha compreendido bem a questão. Já o primeiro item da Atividade 4 a seguir apresentou dificuldades na sua resolução (o segundo item todos acertaram).

4) Existem três urnas que contém bolas iguais, azuis e verdes, segundo o esquema:



Escolhendo ao acaso uma urna, é retirada dessa urna, ao acaso, uma bola.

- Qual a probabilidade de sair azul? [Resp. 2/3]
- Qual a probabilidade de sair verde, sabendo que foi retirada da terceira urna? [1/2]

Seguem suas resoluções:

**CL** respondeu: na primeira urna as chances são maiores, pois há somente uma bola verde, então seria 5 chances em seis. Na segunda urna são 4 chances em seis 2/3
Na terceira urna 3 chances em 6, 50%

**MS** respondeu: n(S)=6 (em cada urna)

| Urna 1 | Urna 2 | Urna 3 |
|---|---|---|
| n(A)=5 | n(A)-4 | n(A)=3 |
| P(A)=$\frac{5}{6}$ | P(A)=$\frac{4^{\div 2}}{6^{\div 2}} = \frac{2}{3}$ | P(A)=$\frac{3^{\div 3}}{6^{\div 3}} = \frac{1}{2}$ |

**LE** respondeu: Nas urnas tem um total de 12 bolas azuis e 6 bolas verdes num total de 18 bolas. A probabilidade de ser uma bola azul é de 1/18, se considerarmos todas as urnas, mas se considerarmos uma urna de cada vez a probabilidade é de 1/6.

**MA** respondeu:
Três urnas:
1ª com 6 bolas, sendo 1 verde(V) e 5 azuis(A)
2ª com 6 bolas, sendo 2 verdes(V) e 4 azuis(A)
3ª com 6 bolas, sendo 3 verdes(V) e 3 azuis(A)

Escolher ao acaso uma urna, temos a probabilidade de : Pu = 1/3
Na 1ª urna escolhendo ao acaso 1 bola temos:
P1A = 5/6 : probabilidade de obter uma bola azul
P1V = 1/6 : probabilidade de obter uma bola verde

Na 2ª urna escolhendo ao acaso 1 bola temos:
P2A = 4/6 = 2/3 : probabilidade de obter uma bola azul
P2V = 2/6 = 1/3 : probabilidade de obter uma bola verde

Na 3ª urna escolhendo ao acaso 1 bola temos:

P3A = 3/6 = 1/2 : probabilidade de obter uma bola azul
P3V = 3/6 = 1/2 : probabilidade de obter uma bola verde

Escolhendo ao acaso uma urna, qual a probabilidade de sair uma bola azul?
A probabilidade esta condicionada a qual urna será escolhida, e uma vez escolhida a urna em qual delas se pode tirar uma bola azul, assim:
P = (1/3) x (5/6) x (2/3) x (1/2) = 10/108 , ou seja 10 resultados esperados em 108 resultados possíveis.
Sabendo-se que vou retirar uma bola da 3ª urna, a probabilidade de obter uma bola verde será dada por: P = 3/6 = ½

**O que se detecta no primeiro item dessa questão é que calculam separadamente as probabilidades de escolher a bola azul em cada urna, mas não conseguem dar uma resposta final, não observam o que pede a questão na sua instrução. Agem mecanicamente fazendo os cálculos, mas não se atentam para os passos essenciais de uma resolução de problemas (RP)[192], entre eles a interpretação da questão e a verificação dos resultados. Não percebem que temos dois tipos de escolha: primeiro a probabilidade de escolher a urna e, para cada urna escolhida, tirar a bola azul. Como não podemos escolher todas as urnas ao mesmo tempo [usa-se o conectivo 'ou'], trata-se por fim da probabilidade da união das três possibilidades. No segundo item, o mesmo raciocínio favoreceu o acerto, mas é prematuro dizer que compreendem probabilidade condicional. Outros cursistas cometeram o mesmo tipo de erro, que veremos mais adiante, quando da discussão coletiva da atividade. Observemos ainda que LE raciocinou de forma diferente, considerando como se todas as bolas estivessem em uma única urna, o que também não está correto.**

5) Considere um baralho de 52 cartas.

- Qual a probabilidade de sair uma figura quando retiramos ao acaso uma carta desse baralho? [Resp. (3.4)/52=12/52=3/13]
- Qual a probabilidade de sair uma carta de copas ou de ouros quando retiramos ao acaso uma carta desse baralho? [Resp. (13/52) + (13/52) =1/2]
- Se retirarmos ao acaso duas cartas, sem reposição, qual a probabilidade de a primeira carta ser um ás de paus e a segunda um rei de espadas? [Resp. (1/52).(1/51)=1/(52.51)

[192] Etapas da Resolução de Problemas, segundo Polya: entender o problema; construir uma estratégia de resolução; executar a estratégia, revisar a solução.

Também nesta atividade ocorreram equívocos:

**CL** respondeu:
• Qual a probabilidade de sair uma figura quando retiramos ao acaso uma carta desse baralho?
Resp. De 16 chances em 52. Pensei assim: das 52 cartas temos 4 naipes então 13 cartas, 9 compostas por números e 4 de desenhos que são: rei, dama, valete e ás.
• Qual a probabilidade de sair uma carta de copas ou de ouros quando retiramos ao acaso uma carta desse baralho? Resp. Mínimas, 2 chances em 52
• Se retirarmos ao acaso duas cartas, sem reposição, qual a probabilidade de a primeira carta ser um ás de paus e a segunda um rei de espadas? Resp. Idem a anterior

**MS** acertou toda a questão

**LE** respondeu:
• Qual a probabilidade de sair uma figura quando retiramos ao acaso uma carta desse baralho? **É de 12/52 = 3/13**
• Qual a probabilidade de sair uma carta de copas ou de ouros quando retiramos ao acaso uma carta desse baralho? **Carta de copas ou de ouros a probabilidade é a mesma é de 13/52 = 1/4.**
• Se retirarmos ao acaso duas cartas, sem reposição, qual a probabilidade de a primeira carta ser um ás de paus e a segunda um rei de espadas? **A primeira carta ser um ás de paus é de 1/52 e a segunda carta ser um rei de espadas é de 1/51.**

**MA** respondeu:
Baralho de 52 cartas, 4 naipes com três figuras por naipe (J, Q, K)
Probabilidade de sair uma figura ao retirarmos uma carta do baralho:
Como temos 4 x 3 = 12 figuras em 52 cartas , P= 12/52 = 3/13

Probabilidade de sair uma carta de ouros ou uma de copas, equivale a retirar uma carta de naipe vermelho, assim temos: P =26/52 = 1/2.

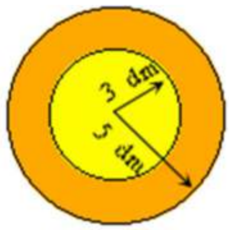
Retirando 2 cartas sem reposição:
Probabilidade de ser um as de paus: P = 1/52 (em 1º lugar)
Probabilidade de ser um rei de espadas: P = 1/51 ( em 2º lugar)

**Pode-se perceber claramente, que a dificuldade maior está em dar um resultado final. Além disso, até esse momento, já prenunciava que não têm clareza de quando devem somam ou multiplicar as probabilidades, o que foi confirmado em atividades posteriores. Apenas MS acertou toda resolução, o que me deu a impressão de já ter raciocínio probabilístico desenvolvido para este tipo de questão, que mais adiante pude confirmar.**

Por fim, a última atividade da Lista 1. Embora ainda não tivéssemos falado de probabilidade geométrica, foram dadas condições para calculá-la.

7) Tiro ao alvo

Jorge e Rui divertem-se atirando uma seta para o alvo. Jorge aposta que acerta na região amarela e Rui na região laranja. Tendo em conta que: i) todas as setas acertam o alvo; ii) a probabilidade de qualquer seta atingir uma região do alvo é diretamente proporcional à área desta região




Determine a probabilidade de a seta acertar:

a) na região amarela. [Resp. 9/25]
b) na região laranja. [Resp. 16/25]

Qual dos amigos tem maior probabilidade de ganhar? [ Resp. Rui]

Seguem as resoluções dos cursistas:

**CL** respondeu:

O Jorge e o Rui divertem-se atirando uma seta para o alvo.
O Jorge aposta que acerta na região amarela e o Rui na região laranja.
Tendo em conta que:

• todas as setas acertam no alvo;
• a probabilidade de qualquer seta atingir uma região do alvo é diretamente proporcional à área da região.

Resp. Não . A parte laranja é maior, por isso deve ser mais fácil acerta la.
Determine a probabilidade de a seta acertar:
a) na região amarela;
b) na região laranja.
Qual dos amigos tem maior probabilidade de ganhar?
Resp. O que acertar a área laranja terá mais chance.

**MS** respondeu:

A área total da circunferência é dada por: $2\pi r^2 = 2\pi 5^2 = 157$
A área amarela é da circunferência é dada por: $2\pi r^2 = 2\pi 3^2 = 56{,}5$

Determine a probabilidade de a seta acertar:

a)na região amarela;
P(A)=56,5

b) na região laranja.
P(B)=157-56,5=100,5

Qual dos amigos tem maior probabilidade de ganhar?
Rui tem maior probabilidade, pois a área laranja é maior que a amarela.

**LE** respondeu:

A área da região amarela é de 28,26 $dm^2$.
A área da região laranja é de 12,56 $dm^2$.
A área total da região é de 78,50 $dm^2$.

a) **Probabilidade de atingir a região amarela é de 28,26/78,50 = 9/25 para o Jorge.**
b) **Probabilidade de atingir a região laranja é de 12,56/78,50 = 4/25 para o Rui.**

*Qual dos amigos tem maior probabilidade de ganhar?*
**O Jorge tem mais probabilidades de ganhar.**

**MA** respondeu:

Tiro ao alvo estamos trabalhando com probabilidade geométrica.
Jorge acerta na região amarela e Rui na região laranja, e sabendo que todas as setas acertam no alvo, e que as probabilidades são diretamente proporcionais às áreas das regiões, assim as probabilidades são:
- área do circulo = 2(pi).raio ao quadrado
-área da coroa circular = 2.(pi)(raio1)² – 2.(pi)(raio2)²
Acertar a região amarela: P = 9pi/25pi = 9/25
Acertar a região laranja: P = 16pi/25pi = 16/25
Logo Rui tem maiores chances de ganhar, 16/25 > 9/25.

**Esta atividade evidencia alguns equívocos em relação à geometria: MS e MA afirmam que a área de um círculo é "$2\pi r^2$". LE calcula erroneamente a área de uma coroa, identificando-a com um disco de raio 2 (diferença dos dois raios). Ainda CL refuta uma das hipóteses dadas, dizendo que a probabilidade de acertar o alvo não é diretamente proporcional à área da região, justificando para tal, que a área da região laranja é maior, sem mostrar os cálculos. Além disso, só MA calcula de fato a probabilidade, LE e MS mostram apenas a diferença entre áreas sem calcular a razão relativa à região total do alvo.**

**Quero ainda ressaltar que erros semelhantes a estes foram cometidos por outros cursistas, na resolução destas atividades, quando posteriormente entregaram em mãos ou postaram a resolução da Lista 1 em seus portfólios individuais.**

Diante desses equívocos e erros, num primeiro redesign resolvo retomar as noções trabalhadas até o momento. Nesse sentido a **Agenda 2** reportava uma revisão acerca dessas atividades. Foram abertos três novos fóruns (Dados, Urna e Baralho), separando os assuntos para focar mais diretamente em cada um e provocar a reflexão e discussão das noções que mais evidenciaram os erros e equívocos por parte de alguns cursistas. Segue parte do roteiro de atividades da Agenda 2 que tratavam desses temas.

| |
|---|
| ***Veja a lista de exercícios 1 disponibilizada na ferramenta Atividades e resolva as ações propostas a seguir:***<br>1) Leve em conta a sua resolução da lista como ponto de partida.<br>2) **Vá ao Fórum>Dados** onde vamos fazer a seguinte discussão:<br>Ao lançarmos dois dados, numerados de 1 a 6, e verificarmos que números aparecem em suas faces superiores, pergunta-se: Faz diferença a ordem em que esses números ocorrem nas faces superiores dos dados?<br>3) **Vá ao Fórum>Urna** onde vamos fazer a seguinte discussão<br>Em relação ao exercício 4 da lista 1, se pensarmos $\mathbf{U_i}$ o evento "escolher a urna i", com i=1,2,3, **A** o evento escolher bola azul e **V** o evento escolher bola verde, pergunta-se:<br>que raciocínio fazemos para resolver o item (a) deste exercício, ou seja, como trabalhamos estes eventos para resolver o item (a) do exercício?<br>que raciocínio fazemos para resolver o item (b) deste exercício, ou seja, como trabalhamos estes eventos para resolver o item (b) do exercício?<br>4) **Vá ao Fórum>Baralho** onde vamos fazer a seguinte discussão:<br>Considere baralhos de 52 cartas. Existe diferença de raciocínio para encontrar a probabilidade descrita nas três situações:<br>a) Retirando-se **uma** carta ao acaso de um baralho, qual a probabilidade dela ser o rei de copas **ou** um cinco?<br>b) Retirando **duas** cartas consecutivas ao acaso de um baralho, sem reposição, qual a probabilidade de a primeira ser o rei de copas **e** a segunda ser um cinco?<br>c) Retirando-se **duas** cartas, **uma** de cada baralho, qual a probabilidade de a carta do primeiro baralho ser o rei de copas **e** a do segundo baralho ser um cinco?<br>5) Estas ações devem ser realizadas no ambiente virtual para levarmos subsídios para nossa aula presencial de quinta-feira, 27/10/11. |

Embora a Agenda 2 tenha sido postada antes do terceiro encontro presencial, uma participação mais efetiva dos cursistas nesses fóruns só se deu após o referido encontro.

## Terceiro encontro presencial

- **Pauta:** Sobre o ambiente virtual de aprendizagem; Atividades da Agenda 2 e discussão da Lista 1; Probabilidade: clássica, frequentista, geométrica; Algumas atividades sobre o tema: resolução e discussão dialógica

A discussão realizada no ambiente virtual tinha por objetivo levantar subsídios para o terceiro encontro presencial e foram determinantes para definição da pauta deste encontro. Inicio o encontro conversando sobre o ambiente virtual. Reforço a importância de acessarem o ambiente e seguirem o roteiro de atividades colocado nas agendas, assim podemos fazer o acompanhamento entre os encontros, tirando as dúvidas que surgirem e imprimindo uma interação entre colegas cursistas e entre cursistas e a pesquisadora. Falo que se acessarem pouco o ambiente fica estático, a dinâmica é imprimida pelo grupo e que ambiente serve para aumentar nossa comunicação, interação e interatividade. Os que acessaram comentam que acharam o ambiente 'muito legal'; outros se justificam dizendo ter gostado, mas não têm muito tempo. Comento que preciso que explicitem o raciocínio desenvolvido na resolução postada (ou entregue em mãos), para eu poder analisar e compreender como pensaram. Alego que existem maneiras diferentes de raciocinar e mesmo assim podemos cometer alguns equívocos com o raciocínio probabilístico, mesmo que o resultado esteja correto, e a importância da discussão coletiva para compartilhar estas questões. Nesse sentido, analisando o trabalho que alguns postaram, verifiquei diferentes desenvolvimentos, que vamos compartilhar e comentar.

A seguir, apresento a discussão coletiva da Lista 1

**P**: Não queremos chegar só na resposta certa, mas analisar e compreender o raciocínio envolvido. Existem maneiras diferentes de raciocinar e mesmo assim podemos cometer alguns equívocos com o raciocínio probabilístico, mesmo que resultado esteja correto. Se não percebo quando as dúvidas ocorrem enquanto estão trabalhando, como podemos refletir sobre estas questões. Quero que a gente pense como podemos refletir sobre determinadas situações, em quais o raciocínio está correto, em quais não e por que, ou que outro tipo de raciocínio podemos fazer ou ainda se temos que colocar alguma hipótese. Só assim poderemos desenvolver esse pensamento probabilístico. [Insisto

[Os que acessaram comentam que acharam o ambiente 'muito legal'; outros se justificam dizendo ter gostado, mas não têm muito tempo, etc.]

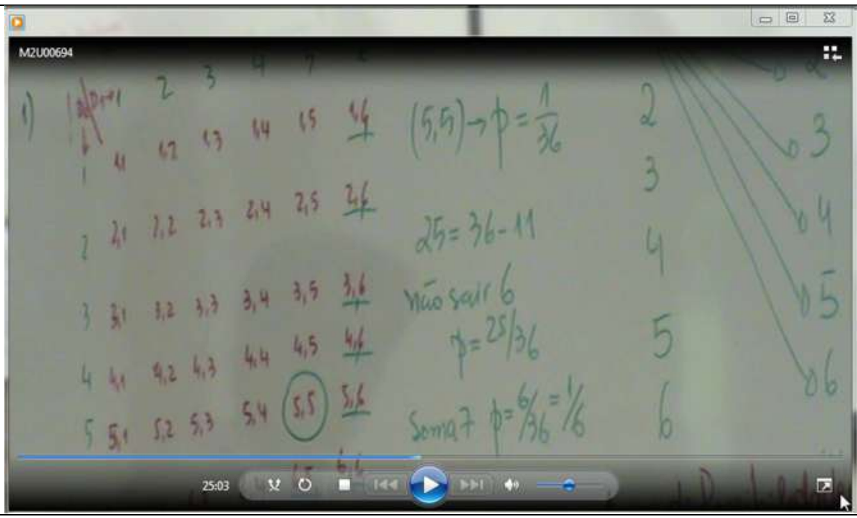
**P**: Assim sendo, considero a primeira lista dada. Vendo o trabalho que alguns postaram, verifiquei diferentes desenvolvimentos. Vamos discutir aqui o que a gente pensou e desenvolveu, com muita tranquilidade. Já tenho outra lista pronta que pretendo começar hoje aqui para ser discutida ao longo do período até o próximo encontro. Vamos aproveitar e compartilhar a resolução da Lista 1.

Solicitei aos cursistas que colocassem resoluções no quadro para discutirmos e esclarecer as dúvidas ou divergências acerca das questões. Começamos com a questão 1 da Lista 1, o exercício dos lançamento de dois dados.

Lançaram-se dois dados numerados de 1 a 6. a) Quais são as ocorrências elementares possíveis? b) calcule a probabilidade de: sair dois 5; não sair 6; a soma ser 7; a soma de dois números consecutivos ser primo; a soma ser 10 ou maior que 10

**MA** e **CL** vão ao quadro, cada um mostra um tipo de resolução: uma pela representação de todo espaço amostral em quadro de dupla entrada e a outra usando a árvore de possibilidades (mostradas parcialmente na Figura 18 a seguir).

**Figura 18 –** Duas maneiras de resolução da questão 1 da Lista 1.




Fonte: captura tela da gravação em vídeo.

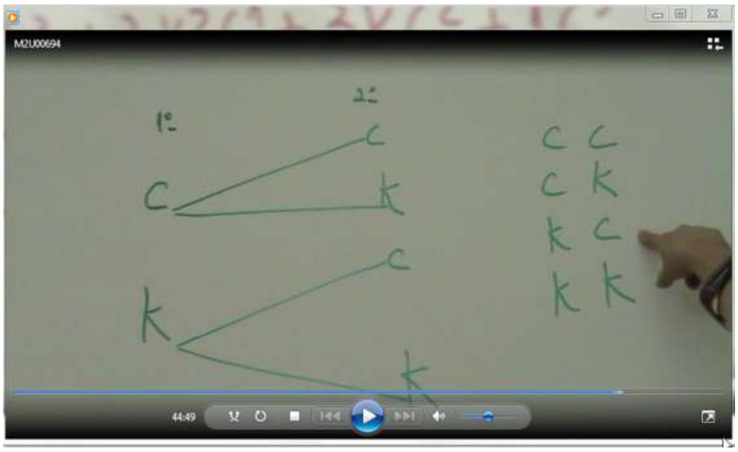
**Discutimos sobre qual resolução é mais adequada e para quê. Concluem que para saber o total de possibilidades do espaço amostral a árvore de possibilidade é mais rápida, mas para analisar os outros itens da questão, o quadro de dupla entrada é mais útil. Esta reflexão foi importante por perceberem que podemos ter situações similares que podem envolver modelos ou procedimentos de resolução diferentes, mais adequados a um caso ou outro. Daí a importância de terem em seus repertórios formas diferentes de resolução a serem utilizadas conforme o contexto, de maneira a elucidar a compreensão da situação e/ou minimizar o caminho da resolução, evitando assim cristalizar uma única forma de raciocinar dentro de uma situação problema, o que é muito útil até para analisar ou avaliar o modo de pensar de seus alunos, na prática docente.**

Entretanto, quando foram analisar o item - a soma de dois números consecutivos ser primo – não levaram em consideração as duas possibilidades (a,b) e (b,a), com haviam feito nos anteriores, apenas a possibilidade (a,b), com a<b , a e b consecutivos com soma ímpar. Levantei a questão, discutiram e o que se percebeu é que o fato de se falar "inteiros consecutivos" levou-os a pensar na ordem de lançamento. Argumentei que isto não estava claro no enunciado, então poderia ser o caso de levantarmos hipóteses? Mais discussões, concluindo que não importava a ordem de lançamento, pois sempre haveria duas possibilidades das faces "a" e "b" serem sorteadas, com a e b números consecutivos, independente de terem saído do primeiro ou segundo dado, como números seriam inteiros

consecutivos. Peço para pensarem uma situação em que a ordem de lançamento fosse preponderante. Pensam e falam: Dois lançamentos consecutivos de forma que o número da face do segundo lançamento fosse um número consecutivo do número da face do primeiro lançamento (“amarrando a ordem”, disseram).

O segundo exercício da lista, sobre lançamentos de uma moeda, foi realizado experimentalmente no encontro anterior, mesmo assim propus sua resolução no quadro, pois havia outros itens na questão a comentar.

**P**: O segundo exercício da Lista 1 foi sobre lançamento de moedas. [Chamo VA para resolver no quadro, querendo diversificar a participação]
**VA**: Eu vou ler, mas não vou fazer, não.
**P**: Vocês já fizeram esta atividade na aula passada, quero só os comentários aqui. [MA se dispõe a ir ao quadro e refaz o Triângulo de Pascal (TP) e o desenvolvimento binomial que já tinha utilizado corretamente nos dois primeiro itens da sua resolução postada].
**P**: Alguém tem outra maneira de resolver? [insisto para termos outra maneira]
**[MD** vai ao quadro e resolve de outra maneira, correta, usando a árvore de possibilidades, como ilustrada na captura de tela da gravação em vídeo].



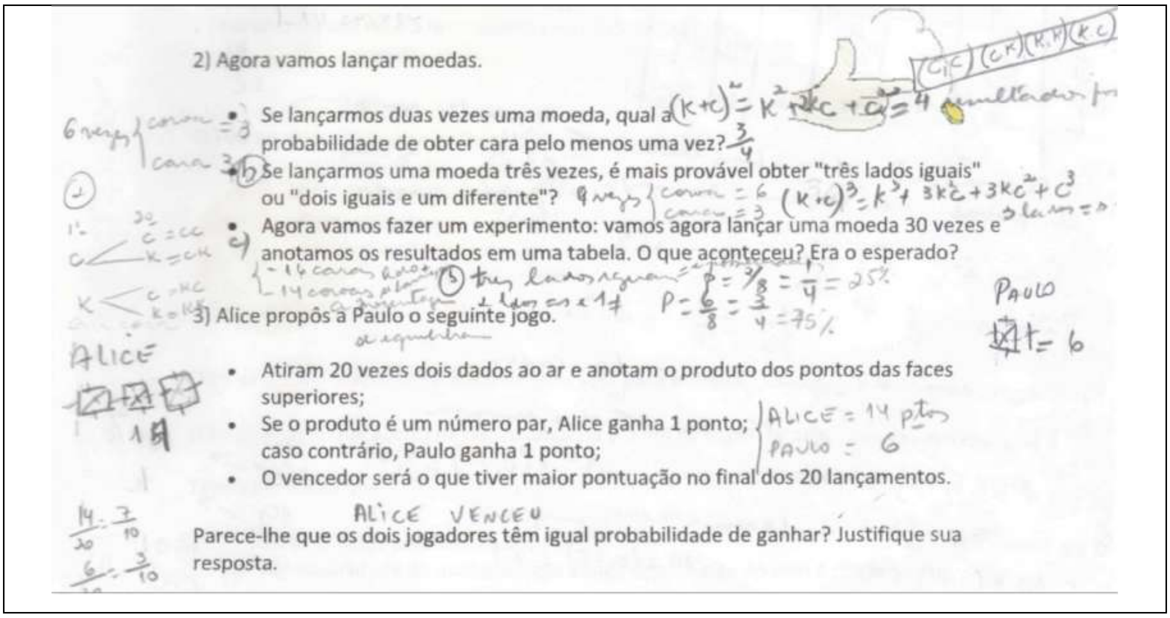

**P**: Se lançarmos a moeda três vezes o é mais provável obter: três lados iguais ou dois iguais e um diferente?
**SA** responde rápido: 2 iguais e 1 diferente.[Pergunto como resolveu, diz que foi usando a árvore de possibilidades]
**P**: Muito bem Podemos usar uma representação ou outra. A pergunta é: em qual série cada uma é mais adequada:
**MA** responde rápido: Triângulo de Pascal e Binomial. [MD afirma que só usa a árvore das possibilidades, uns 3 ou 4 concordam, os outros não se manifestam, parece não terem opinião formada . MA defende sua posição que trabalhando com a construção do Triângulo de Pascal , ao alunos conseguem resolver por já estar usando uma coisa

que já foi vista na 7ª e 8ª série, que é o Binômio de Newton, exemplifica que na segunda linha usa $(a+b)^2$].
**P** (dirigindo-me a ele): Nesse caso temos que presumir que estas noções já tenham sido trabalhadas antes, não?
**MA**: Claro
**P**: Mas nem todos trabalham isto antes. Porque estou insistindo nisto? Porque é importante saber qual seria, ou onde ficaria mais adequado trabalhar um raciocínio ou outro.
**CL** se dirigindo a **MA**: Seus alunos sempre fazem assim? [**MA** discorre e justifica longamente que dá instrução para o desenvolvimento com técnicas de memorização. Fez isto em outra série, a maioria gostou, outros ficaram olhando para o teto. Alguns cursistas discordam, outros se desligam da discussão, dispersam. Com cuidado digo que as fórmulas serão utilizadas em outro momento, mas devemos começar com algo mais palatável para o aluno]
**P**: Voltando ao procedimento frequentista de lançar moeda 30 vezes. Qual foi o resultado que chegamos? [Referindo-me ao último item do exercício 2 da lista 1]
**MD**: Quanto mais se lança, mais chance de ficar em porcentagens iguais. No início começa a disparar, depois começa a equilibrar [faz um movimento com as mãos].
**P**: Se lançarmos muitas vezes a probabilidade se aproxima de 50%, se lançarmos poucas vezes, pode ser que uma dê 80% e outra 20%. Dá um 'desvio de intuição', parece que nossa intuição está sendo traída. Lembram-se daquele experimento que fizeram na agenda de ambientação? [Refiro-me ao simulado usado na agenda de ambientação. Alguns confirmam que sim. Aproveito para comentar rapidamente sobre o 'erro de D'Alembert' e o favorecimento do uso da árvore de possibilidades em algumas situações e em determinados níveis de escolaridade, alertando que esse procedimento pode ajudar a desenvolver um tipo de raciocínio probabilístico muito importante que demorou tempos para ser aceito (referindo-me rapidamente a Pascal e Fermat].

**Vejo que a crença de MA em métodos procedimentais e de memorização é muito forte, o que aumenta sua resistência em modificá-la. Mesmo tendo realizado em grupo o experimento frequentista de lançamento de uma moeda, 30 vezes, e também tendo se atrapalhado no cálculo binomial, no caso de n=30, parece que ainda não se convenceu que pode encontrar outros caminhos mais adequados a cada situação e a cada nível de escolaridade dos alunos. Com formação em física, deve ter tido forte influência do pensamento determinístico. Entretanto, esse tipo de raciocínio não é prerrogativa apenas desse cursista, MA apenas explicita mais que outros, pois gosta de se manifestar. Outros também usam o caminho da combinatória, que obviamente em determinadas situações é**

muito útil, inclusive quando for necessário usar o Teorema de Bayes. Contudo, em situações mais elementares, particularmente quando se deseja desenvolver o raciocínio probabilístico, é importante não depender tanto de procedimentos já prontos ou mostrar mais de um processo de resolução, inclusive para melhor adequar ao nível de escolaridade dos alunos. Como exemplo, segue a imagem (Figura 19 )de um trecho da resolução da Lista 1 postada pelo cursista VD, mostrando que embora use a árvore de possibilidades em sua resolução, também resolve pelo binômio de Newton (desnecessário para uma questão simples), talvez para conferir e sentir mais segurança. A discussão se fixou mais no procedimento de resolução, muito importante, mas desviou-se um pouco do que desejava inicialmente que era questionar um pouco mais sobre os equívocos de raciocínio que havia verificado na resolução escrita desta atividade (que já me referi anteriormente quando discorri sobre o erro de D'Alembert). Devo registrar que a resolução de MD, que teve a aceitação de boa parte dos cursistas, mostra que ela não cometeu o mesmo erro que D'Alembert, o que me parece que MD já detém um raciocínio probabilístico mais elaborado. Não dá para saber sobre os demais, talvez os que acataram a sua resolução ou também já tenham ou estão desenvolvendo, o que já é um avanço. MA também tem raciocínio elaborado, mas essencialmente combinatório, mas mostra resistência em pensar de outras maneiras.

**Figura 19 –** Atividade de cursista com resolução também por binômio de Newton


2) Agora vamos lançar moedas.

- Se lançarmos duas vezes uma moeda, qual a probabilidade de obter cara pelo menos uma vez?
- Se lançarmos uma moeda três vezes, é mais provável obter "três lados iguais" ou "dois iguais e um diferente"?
- Agora vamos fazer um experimento: vamos agora lançar uma moeda 30 vezes e anotamos os resultados em uma tabela. O que aconteceu? Era o esperado?

3) Alice propôs a Paulo o seguinte jogo.

- Atiram 20 vezes dois dados ao ar e anotam o produto dos pontos das faces superiores;
- Se o produto é um número par, Alice ganha 1 ponto; caso contrário, Paulo ganha 1 ponto;
- O vencedor será o que tiver maior pontuação no final dos 20 lançamentos.

Parece-lhe que os dois jogadores têm igual probabilidade de ganhar? Justifique sua resposta.

Fonte: imagem escaneada de trabalho entregue pelo cursista **VD**.

Passamos a seguir à discussão do exercício das urnas, da Lista 1. [Já levantei os problema ocorrido – de não concluir a resposta com a probabilidade final. Quero colocar em discussão para ver se eles próprios concluem ou o descobrem]. Desenho no quadro três urnas com bolas iguais, azuis e verdes: a primeira com 5 azuis e 1 verde; a segunda com 4 azuis e 2 verdes; a terceira com 3 de cada cor.

**P**: Escolhendo ao acaso uma urna, é retirada dessa urna, ao acaso, uma bola. Qual a probabilidade de sair uma bola azul?
A maioria dos cursistas responde: Se for da primeira urna é 5/6; da segundo, 2/3; da terceira 1/2.
**P**: Mas quando a gente pergunta, queremos uma resposta final, única.
**MD**: quando a gente pergunta, pergunta separadamente. Mas o resultado tem que somar?
**P**: Quando perguntamos queremos saber o resultado final. O que fazer? Vocês acham que basta somar? Vamos discutir?
[Discutem entre si. Uns acham que deve somar, outros falam em multiplicar].
**MA** diz: eu considero primeiro a probabilidade de ser uma das urnas, como são 3, é 1/3 para cada uma delas. Depois eu considero a probabilidade de ter a bola azul em cada uma das urnas. O resultado para mim é o produto das quatro probabilidades.
**P**: É o produto? Tem certeza? Não há alguma soma?
Alguém (não identificado na imagem) diz: Não tem não. Só produto.
**P**: Então vamos pensar: O evento é tirar uma bola azul de uma das urnas. Temos que escolher aleatoriamente tanto a urna quanto a bola.
**SA**: primeiro escolhe a urna.
**P** (reforçando): Isso mesmo. A primeira escolha que tem que ser feita é a da urna e desta tira-se uma bola. Para cada urna escolhida temos chances diferentes, como juntar numa resposta única. [Conversam entre si, percebo que está havendo dois pensamentos diferentes, mas sem conclusão. Deixo-os confabulando por cerca de 10 minutos, passando pela sala e provocando a reflexão. Finalmente, **SA** parece ter chegado ao resultado. Insisto para que vá ao quadro resolver. Ela se recusa a ir ao quadro, mas se levanta e esclarece a resolução oralmente].
**SA**: Temos 3 urnas. Se for escolhida a primeira é 1/3, da segunda e da terceira é 1/3, ou seja, 1/3 de cada uma. Então se for escolhida a primeira eu tenho 5 bola azuis de 6, daí é 1/3 de 5/6 que dá 5/18. Se por acaso for escolhida a segunda, vai ser 2/9, porque são 4 bolas azuis de 6, como é 1/3 fica 2/9. Se for escolhida a terceira, vai ser 1/6, porque tem 3 bolas azuis de 6, fica ½, com 1/3 da urna, fica 1/6.
**P**: E depois....? O que fazemos com estes três resultados?
**SA**: Somaria tudo e o total dá 2/3.
**P**: Isso mesmo! A probabilidade final tem que considerar as duas escolhas aleatórias, em cada uma delas tem uma chance, que são somadas ao final. Portanto, usamos tanto a multiplicação como a adição, mas sempre temos que analisar cada caso.
**SA** fala o total enquanto os outros conferem os cálculos. [Enquanto fala, escrevo no quadro a solução para registrar e não deixar dúvidas]
**P** (aproveito para perguntar): Alguém tinha colocado isto na resolução da sua lista?
Não (respondem todos)

**P**: Foi quase um erro coletivo.
**MA** se justifica, inconformado.
**SA**: É que calculamos separadamente, e pronto!
**P**: Observem que nessa questão, colocamos o termo "ou", escolhemos a primeira urna ou a segunda ou a terceira. Do que estamos tratando em termos de probabilidade quando surge o "ou". [Conversam um pouco]
Alguém fala: União, é isso?
**P**: Quanto temos a "União" (de eventos) como calculamos a probabilidade?
**SA**: somamos.
**P**: Então o que a gente pode concluir? Se tivermos a união de mais de um evento a probabilidade é a soma das probabilidades de cada um dos eventos excludentes. Mas atenção: só se os eventos forem mutuamente excludentes. Veremos isto mais à frente. [Coloco o segundo item desta questão]
**P**: E qual é a probabilidade de se tirar uma bola azul, sabendo que a urna escolhida foi a terceira?. Falam meio em coro: aí já sabemos, ½, pois é da terceira.
**P**: Qual é a diferença do primeiro caso? Que nome que tem essa probabilidade? [Ninguém responde]
Alguém não identificado fala: Induzida?
**P**: Bom, depois voltamos para isto.
**SA**: É um evento certo? Equiprovável? Provável?
**MA**: Condicionado?
**P**: Esse nome é bom? Condicionado?
**DA**: Ajuda porque via direcionar você para resolver (calcular).
**P**: É probabilidade condicional porque a extração da bola azul está condicionada a ter saído da terceira urna. Logo mais veremos mais exemplos deste tipo na Lista 2.

**Podemos ver que este quesito gerou uma discussão mais longa, porém necessária para provocar reflexão, formar conceito e dirimir dúvidas. Foi preciso insistir e deixar a pergunta no ar para forçar essa reflexão, antes de colocar a resolução correta. Percebe-se a dificuldade em compreender o que a questão pede exatamente nesse caso (interpretação da questão) e também como 'juntar' os resultados parciais, o que evidencia dificuldades com o raciocínio probabilístico. Segundo Gal (2005), o raciocínio probabilístico consiste em colocar em ação as habilidades e conhecimentos da numeracia em situações aleatórias ou não determinísticas, que envolvem o acaso, a incerteza e a variabilidade, sobre as quais se pretende encontrar uma medida dessa incerteza ou da chance de ocorrência de um evento.**

Aproveitei o momento para revermos as propriedades de probabilidade da união e da interseção de eventos, que já tínhamos falado no primeiro encontro presencial e constam da Unidade I, postada em material de apoio no ambiente virtual, dando exemplos e fazendo alguns exercícios. Daí passamos para a atividade 5 da Lista 1(a do baralho de 52 cartas). Peço para **DA** ler em voz alta a questão. Esclareço que o "Ás" não é considerado figura, apenas as cartas "Rei", "Valete" e "Dama". Assim, a primeira pergunta sobre a probabilidade de escolher ao acaso uma figura, foi facilmente respondida por DA: 3 figuras com 4 naipes, temos 12 em 52, então é 3/13. Passamos ao segundo item em que aparece o "ou" excludente.

**P**: Qual é a probabilidade de sair uma carta de copas **ou** de ouro, quando tiramos ao acaso uma carta do baralho?
Respondem coletivamente: tem 13 de copas e 13 de ouros, a probabilidade é 26/52=1/2 igual à metade do baralho.
**P**: Muito bem! Observem que a carta não pode ser de copas e de ouro ao mesmo tempo. [Aproveito para perguntar]: Ser de um naipe é exclusivo ou é independente de ser de outro naipe?
Alguém fala e alguns reforçam: independente. Outros comentam: exclusivo. [Perguntei mais para sondar e percebo logo que têm dúvidas. Prefiro deixar para depois, pois prenuncio uma discussão mais longa]
**P**: Vamos discutir melhor essa questão mais à frente. Vou deixar isto no ar. Quero que a gente pense e possa concluir, isto é, saber quando é um e quanto é outro [quando se trata de eventos independentes e quando se trata de eventos mutuamente excludentes]
**P**: Se retirarmos ao acaso duas cartas sem reposição o que acontece? Qual a probabilidade de a primeira ser um "ás de paus" e a segunda um "rei de espada"? Reforço: Sem reposição agora. [Pensam, comentam uns com outros]
**VD** fala: 1/52 (ás de paus) e 1/51 (rei de espada), porque como já retirou e não repôs o baralho ficou com 51 cartas.
**P**: Ok! Mas e a resposta final? [Novamente têm dúvidas, confabulam]
P: Outra situação para pensarem. E se pensássemos em retirar duas cartas sem reposição, uma vermelha e uma de paus? Vejam que a vermelha pode ser de copas ou de ouro.
Conversam e alguém fala: a vermelha 26/52. MA completa: 13/51 a de paus. (O exemplo ficou sem finalizar).
**P** retomando: Vemos que a questão 6 da Lista 1 que tem a ver com a questão 5, ambas sobre baralho. Como é mesmo a questão 6?
**VD** lê: De dois baralhos de 52 cartas retiram-se, simultaneamente, uma carta do primeiro baralho e uma carta do segundo. Qual a probabilidade de a carta do primeiro baralho ser um rei e a do segundo ser o 5 de paus?
**MA** deu um resultado numérico
**P** (insisto): Não quero saber só o número, quero saber o raciocínio.
Repetem o raciocínio, mas ainda não fecham o resultado final, falam por partes e não concluem. Finalmente MA conclui.
**MA**: eu tenho 2/52 de um e do outro 1/52, é um produto.
**P**: Agora sim. Voltem ao exemplo anterior e finalizem. Outra pergunta: quando vocês resolveram a Lista 1, quais dessas noções vocês não tinham pensado?

**MA** fala: a dos números primos, a da urna. O resto bateu.
[Vejo que estão cansados, hora do intervalo, converso com alguns em particular. Deixei propositalmente a atividade 7 da Lista 1, do Tiro ao alvo, para comentar quando entrarmos em probabilidade geométrica ]

**Percebe-se que não foi muito fácil compreenderem em quais situações devem multiplicar ou somar probabilidades e em quais situações devem multiplicar probabilidade e depois somar os resultados. Reforça o que foi evidenciado na questão anterior (da urna). Na verdade, não é tão simples desenvolver esse tipo de raciocínio e o pensamento envolvidos. Inúmeras pesquisas já apontam essa dificuldade, como as desenvolvidas por Ben-Zvi e Garfield (2005), Batanero, Contreras e Díaz (2012), Azcarate e Cardenoso (2011), Santana (2011), entre outros. Além disso, mesmo instigando bastante essa discussão (que aqui só está resumida em suas partes principais) não há garantia que o aprendizado tenha se efetivado, podendo ocorrer o mesmo tipo de erro, dúvidas ou equívocos, quando se depararem com novas situações, mesmo similares a estas.**

No segundo momento desse encontro presencial, os cursistas passaram a resolver em grupo a Lista 2 (ver Apêndice C), contendo uma sequência de atividades sobre os conceitos clássico e frequentista de probabilidade, eventos mutuamente excludentes, eventos independentes e probabilidade condicional. Peço para algum cursista ler para todos as atividades da Lista 2.

**NA** lê o início da lista com explicação da probabilidade clássica. Eu explico o que é o espaço amostral e falo a definição clássica de probabilidade. O espaço amostral, na definição clássica, não pode ser nem vazio, nem infinito.

Considere um evento A e n(A) o número de elementos de A e seja S o seu espaço amostral, finito e não vazio, e n(S) o número de elementos de S. Temos então que A sendo um evento de S, ocorre $A \subset S$, isto é, A é um subconjunto de S. A probabilidade de A ocorrer, P(A), é dada por:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{total de casos possíveis}}}$$

Obs: Essa definição só terá validade se, e somente se, todos os elementos de S forem equiprováveis, isto é tiverem as mesmas chances de ocorrer.
Dessa definição temos que: $0 \leq P(A) \leq 1$ (mostre!)

E também, como $S = A \cup A^c$ temos que $P(A^c) = 1 - P(A)$ e, logicamente, $P(\emptyset) = 0$ Nesse caso, dizemos que $A^c$ é o evento complementar de $A$ e $\emptyset$ é o evento impossível de ocorrer. Se $A = \emptyset$ então $P(A) = 0$, dizemos que A não ocorre, mas se $P(A) = 0$ dizemos que A é um evento que não ocorre, mas será que podemos concluir que $A = \emptyset$ ? (verifique!)

Indagam mais sobre diferença entre o conceito clássico e o conceito frequentista. Eu explico que a definição clássica só pode ser usada em espaços amostrais equiprováveis e finitos e o conceito frequentista é usado em experimentos que repetidos muitas vezes, nas mesmas condições, levam à uma estabilização da probabilidade. No limite tende para um valor. Perguntam sobre se usarem a frequentista em jogos (loteria), se iria para um valor. Eu volto a explicar, que cada jogo tem uma probabilidade, que é a razão entre o sucesso de uma aposta pelo total de possibilidades possíveis. Um experimento frequentista nesse caso seria repetir o mesmo jogo um grande número de vezes, para analisar se aquela mesma jogada tende para algum padrão, que é a probabilidade dessa jogada. Não compensa fazer isto. Tampouco vale acreditar que se um determinado jogo não foi contemplado durante muito tempo, então esse jogo terá mais chances de sair na próxima extração. Isto é o que chamam de 'falácia do jogador' e pudemos verificar este fato no experimento de lançamento de moedas que fizemos no primeiro encontro. Fico aflita para voltar ao tema e à concentração dos demais, então solicito que iniciem a resolução das atividades da Lista 2. Enquanto trabalham na resolução, passo pela sala, respondo às dúvidas e observo o que estão fazendo ou discutindo. Terminado o encontro, aviso que a lista 2 será disponibilizada no AVA para ser finalizada e a resolução postada nos portfólios individuais.

### 6.4 Quarto encontro

Entre os terceiro e quarto encontros presenciais, tivemos duas agendas para serem trabalhadas no AVA, com as seguintes instruções:

**Agenda 3**: Reflexão sobre a discussão da Lista 1 realizada no 3º encontro presencial. Finalização e discussão no fórum da resolução da Lista 2.

**Agenda 4:** Leitura de um texto disponibilizado em Material de Apoio, intitulado Probabilidade prática, versando sobre eventos mutuamente excludentes, eventos independentes e probabilidade condicional; elaboração de um plano de aula (escolhendo o público-alvo) acerca deste conceitos e discussão deste plano de aula no fórum, para tirar dúvidas e/ou compartilhar ideias e sugestões.

## Acompanhamento virtual entre o terceiro e o quarto encontros presenciais.

Sabemos que a participação em plataformas virtuais não obedece a uma estrutura ou organização linear, uma vez que cada participante faz um percurso próprio nas diversas ferramentas disponíveis, podendo retornar mais de uma vez, fazer modificações e novas postagens, interagir com os outros colegas, no caso, de forma assíncrona. Obviamente o acompanhamento virtual numa plataforma de trabalho vê potencializada essa estrutura não linear, o que dificulta fazer uma leitura linearmente organizada. Nesse sentido, para efeito prático, organizo as observações em dois assuntos: comentários no fórum sobre reflexões da discussão das atividades da Lista 1 no terceiro encontro presencial; comentários sobre as postagens das atividades da Lista 2. Sobre o plano de aula não houve nenhuma postagem, bem como nenhum comentário no fórum sobre este tema, antes da realização do quarto encontro.

### Alguns comentários do Fórum>Lista 1

**MA**: Olhando probabilidades sob uma nova perspectiva. O quanto nos equivocamos, impressiona, ...e afinal como ficam os nossos alunos, temos que pensar sério nesta questão. A interpretação é fundamental, nas questões apresentadas, uma única palavra modifica o sentido, e conduz a uma reposta diferenciada. As propostas devem estar centradas, em motivar a compreender os desafios em um processo de auto motivação em buscar as soluções possibilitando o aprendizado e o auto aprendizado em interações cognitivas.
**DA** lamentou dificuldades em trabalhar com o computador e ambientes virtuais
**VD**: A discussão presencial do dia 27/10 sobre a lista de exercício 1 foi bastante produtiva, pois em relação aos números consecutivos eu estava pensando de uma maneira muito diferente e no exercício 4 das urnas eu também esqueci de multiplicar por 1/3 e deu uma diferença muito grande. Esse assunto é muito delicado, preciso estudar bastante, pois para mim é difícil.
**VA**: Concordo com você, pois, algumas vezes nos surgem dúvidas e nem sabendo o conteúdo, elas são esclarecidas.
**P**: Que bom que nossas discussões nas aulas vêm sendo produtivas para o aprendizado de probabilidades.

**Parece que esses cursistas fizeram uma reflexão sobre os equívocos cometidos nas resoluções das atividades da Lista 1, discutidas coletivamente no encontro presencial anterior. Segundo Bolzan (2002, p. 85), "a apropriação de novos conhecimentos implica a possibilidade dos sujeitos envolvidos nas situações de ensino e aprendizagem tomarem consciência dos mecanismos que envolvem essa apropriação". No entanto, ainda era prematuro tirar uma conclusão mais definitiva sobre o aprendizado, uma vez que necessitava ainda ser confirmado em outras situações semelhantes, pois segundo a mesma autora, há uma força (a resistência) em direção contrária à tomada de consciência, fazendo com que o sujeito oscile entre o que é constituído como conhecimento (conhecimentos prévios) e os novos conhecimentos a serem apropriados. Entretanto, já é um grande avanço.**

**Sobre resolução das atividades da Lista 2**

**A resolução da Lista 2 foi tranquila, a maioria que postou acertou praticamente a lista toda, exceto uma questão. A questão 4 da Lista 2 foi a que evidenciou maior dificuldade em sua resolução, provocando erro coletivo por parte dos cursistas que a postaram no ambiente ou entregaram impressa no encontro presencial, o que sinaliza desconhecimento ou incompreensão acerca de probabilidade condicional.**

A questão é a seguinte:

| |
|---|
| 4) No lançamento simultâneo de dois dados, qual é a probabilidade de termos números pares nas duas faces, sabendo que a soma é 6? |

Seguem resoluções dos cursistas que postaram ou entregaram acerca desta questão:

| |
|---|
| **VD**, **DA**, **NA**, **NO**, **AS**, **MD, VA MA** responderam da mesma maneira:<br>A probabilidade é (2/36)=(1/18) pois seriam os pares (2,4) e (4,2)<br>**LE** respondeu:<br>A probabilidade é (2/12)=(1/6) |

Alguns não explicitaram o raciocínio desenvolvido, apenas o cálculo, ou o fizeram sucintamente, de qualquer forma ninguém acertou a resposta.

A questão é bastante simples e pode ser resolvida por mais de uma maneira. Por exemplo: Vamos representar o espaço amostral pelo conjunto dos eventos simples ou por uma tabela de dupla entrada (optei pela tabela de dupla entrada).

$$S = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 61 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{bmatrix}$$

Sejam os eventos, A: números pares nas faces; B: soma 6 .

**Resolução 1**: Restrição do espaço amostral ao evento condicionante.

Nesse caso específico, fica mais simples restringir o espaço amostral ao evento B, $S_B$, e calcular a probabilidade de A em relação a $S_B$

$S_B = [15 \quad 24 \quad 33 \quad 42 \quad 51]$ , $A_B = [24 \quad 42]$ Daí temos que $P(A_B) = \frac{2}{5}$

**Resolução 2**: Pela definição de probabilidade condicional. Tem um caminho mais longo nesse caso específico, mas é útil saber, pois em algumas situações este será o caminho mais apropriado, senão o único para encontrar a solução.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Então temos que calcular todas as probabilidades indicadas tomando por referência o espaço amostral $S$ acima representado. Para facilitar, vou representar A utilizando a tabela de S e retirando os pares que não satisfazem as condições de A.

$$A = \begin{bmatrix} & 12 & & 14 & & 16 \\ 21 & 22 & 23 & \mathbf{24} & 25 & 26 \\ & 32 & & 34 & & 36 \\ 41 & \mathbf{42} & 43 & 44 & 45 & 46 \\ & 52 & & 54 & & 56 \\ 61 & 61 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{bmatrix}$$

$$B = \{15, \quad 24, \quad 33, \quad 42, \quad 51\}$$

$$A \cap B = \{24, \quad 42\}$$

Dessa forma temos: $P(A) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{5}{36}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

E, portanto, $P(A|B) \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$

**É importante ressaltar em relação a qual espaço amostral refere-se cada uma das resoluções aqui apresentadas. Este foi o erro que os cursistas VD, DA, NA, NO, AS e MD cometeram. Restringiram o evento A ao evento condicionante B, mas calcularam a probabilidade em relação ao espaço amostral S (não restrito). Não dá para saber bem o raciocínio utilizado por LE, ou se cometeu algum erro de cálculo. Não restringir o espaço amostral para calcular probabilidades, segundo Díaz e La Fuente (2005) que implica uma má compreensão da idéia de condicionamento. Confusão entre a probabilidade conjunta e probabilidade condicional.**

**Observamos que, além de omitirem na resolução o desenvolvimento do raciocínio utilizado, colocando apenas as respostas, o que é inadequado em se tratando de professores, esses cursistas demonstram não saber probabilidade condicional, mesmo numa atividade bastante simples como a desta questão. Este fato alertou-me para o que já imaginava: a probabilidade condicional é um dos nós epistemológicos do ensino de probabilidade. Dessa forma, é um conceito a ser retomado nas atividades posteriores. Aproveito para adiantar que a grande maioria da turma cometeu o mesmo erro e isto pode ser confirmado quando fizemos a resolução desta questão em sala, durante o quarto encontro presencial, corroborando minhas impressões.**

Outros equívocos pontuais ainda foram detectados, mas não merecem registro, pois repetem o que já foi observado na resolução da Lista 1, uma vez que a Lista 2 tem atividades que trabalham as mesmas noções da Lista 1.

## Quarto encontro presencial

- **Pauta:** Sistematização dos conceitos básicos; Atividades da Agenda 4; Eventos mutuamente excludente, eventos independentes, probabilidade condicional; Algumas atividades sobre o tema: resolução e discussão dialógica da Lista 2

No primeiro momento do encontro presencial, deu-se uma discussão sobre o plano de aula solicitado na Agenda 4, que se prolongou por cerca de meia hora. A intenção de se pedir o plano de aula era para que escolhessem o público-alvo (alguma turma do Ensino Fundamental II ou Ensino Médio) e elaborassem atividades envolvendo os conceitos já vistos no MPG. Tais atividades serviriam para discutirmos no sentido de sistematizar as noções e conceitos já trabalhados. Entretanto, parece que isto não ficou muito claro e a discussão se deu acerca do modelo de plano de aula, refletindo certa resistência em realizar a tarefa. Após a discussão, acabamos mudando de 'plano de aula' para 'roteiro de aula' a ser postado depois no AVA.

Essa discussão acabou desviando um pouco a intenção inicial e recaiu mais para o *modus operandis* da prática em sala de aula.  Entretanto, acho importante reproduzi-la parcialmente, uma vez que revela um pouco de como costumam trabalhar em sala de aula.

**P**: Vamos falar da agenda 4 e do plano de aula.
**NA**: Acho pouco tempo, só uma semana. Não tenho mais essa prática de ficar elaborando aula diariamente e me programar para o dia seguinte. Se alguém tem um roteiro aí para dar de exemplo...
**SA** pede palavra: Com relação a fazer plano de aula, eu não acho que para mim seja de grande valia. Dou aula desde 78, ficar preparando aula para passar para você, até você adaptar para ver. Uma vez que cada aula que a gente prepara não é do jeito que eu dou. Dou aula há muito tempo, pra mim não é de nenhuma valia. Quando peguei esse curso, não sei os demais, foi para fazer exercícios, resolver, tirar grandes dúvidas, tem problemas que são dúbios de interpretação, enfim, agora preparar aula para mim não vai acrescentar nada. Para mim! Para os demais, não sei.  [demonstra resistência na sua fala e na manifestação gestual]
**LE**: Eu comecei a fazer, mas nesse fim de semana foi mega corrido. Não deu tempo. Eu até comecei assim: coloquei objetivo geral, não sei se é isto que você quer, coloquei estratégias agora estou colocando as definições, e vou colocar as atividades, não sei se é assim...
**P**: Um plano de aula de fato tem todos esses elementos. Mas que meu objetivo principal, não era nem a formatação de um plano de aula, mas as ideias que seriam colocadas ali.
**P** (dirigindo-me à **SA**): Você diz que não precisa mais preparar e que queria aqui tirar dúvidas. Quando vamos preparar uma aula e temos que ensinar, será que as dúvidas serão sanadas ou não?
**LE**: dúvida dos alunos ou do professor. [Respondo: do professor].
**LE**: Quando vou passar uma matéria, seja qual for, para não ter dúvidas, escolho um exercício que não tenho dúvidas, que eu sei resolver tranquilamente.
**VA** conta que certa vez foi passar um exercício de física (era castigo para os alunos), se atrapalhou, não sabia, tive que procurar aqui e ali (risos). Decidiu que nunca mais ia fazer isto (concordância generalizada).  Agora só faço o que sei fazer e aquilo que tenho dúvida vou fazer depois.
**VL**: Antigamente eu estudava antes, agora ..(fazendo gesto de bater com as mão significando que nem liga)
**MD**: Hoje em dia a gente não precisa mais. Alguém fala: é uma correria, a gente não tem tempo. [conversa generalizada]
**LE** dá um depoimento: Vou ser muito sincera. Não sei se os colegas concordam ou não. Tem probabilidade e Análise Combinatória, pois os dois são dados juntos. Vou começar de Análise Combinatória, que vem antes (no Caderno) e é um tema que está

muito bom na apostila e a gente não consegue passar direito por conta de falta de interesse, de n problemas que acontecem. Quando se fala de probabilidade, é uma coisa que você tem que sintetizar muito, pra você passar, e você passa o mínimo do mínimo.
**NA**: E você não consegue avançar na apostila.
**LE** continua: Imagine se consegue detalhar evento por evento, eu pelo menos não consigo.
**VA**: E esses eventos exclusivos.....
**P**: Como é que a gente pode despertar o interesse do aluno?
**NA** dá exemplo de trabalhar com cartas (de baralho), **VD** comenta que precisou fazer grupinhos e levar moedas e dados e jogar, daí conseguiu, trabalhando no concreto. **SA** comenta que trabalha com dados, baralho, moedas (isso é taxativo, comenta).
**VD** acrescenta: Se tentar mostrar tudo é demais.
**P**: Quais são os conteúdos que temos que tratar para a gente não deixar de ver alguma coisa que seja importante. O que a gente deveria começar a dar? Que conceitos?
**VD**: Eu começo pela Análise (combinatória). **VL** diz que ele também.
**NA**: É legal também a árvore de probabilidade e a tabela de entrada que eu acho legal.
**P**: A árvore de possibilidades é um conceito ou um método? [Três ou quatro respondem: é um método de resolução].
**MD**: Eu acho a parte de conjuntos importante, por que trabalha reunião e intersecção.
**P**: Vocês acham que estas duas listas de exercícios que vimos aqui servirão para trabalhar estes conceitos. [Respondem sim em coro]
**NA**: Se ele for ver a fórmula lá, vai ter que recordar. A simbologia os alunos fazem confusão. Eu faço confusão.
**P**: Será que a fórmula já não é uma sistematização de um conceito? Já fizeram exercícios, a fórmula seria uma generalização, se já aprendeu o processo a fórmula tem significado. [Argumento que uma fórmula será melhor compreendida se entender como foi desenvolvida, porque foi, enfim, se tiver significado]
**NA** acho que o que a professora está querendo dizer é: dar condições para que ele caminhe sozinho. A gente viu a professora na aula passada não precisou de uma fórmula, só falou no final, resolvemos exercício de combinatória só usando raciocínio lógico, talvez na probabilidade a gente possa ir por esse caminho também; é só mostrar para o aluno que ele não tem que ficar decorando fórmulas. . já viram e lembrando que conseguiram resolver exercícios de probabilidade sem usar uma fórmula, só com raciocínio. Talvez possam fazer isto. A fórmula, se esquecem...(gesto batendo com as mãos). [Outros argumentam que uma boa parte precisa da fórmula. Falam todos ao mesmo tempo, cada um colocando sua opinião].
**SA**: Não sei se é muito conceito: eventos exclusivos, excludentes, eu acho que não precisa ficar dando conceito para o aluno. Eu acho que você dando o exercício, à medida que vai fazendo a solução, observando o que ocorreu aqui, observando de um lado ou de outro, aí que eles compreendem. Aí você ficar passando conceito, dando teoria, pois eles não gravam.
**P**: O que você entende por plano de aula? [dirigindo-me à SA]
**SA**: Eu tenho que falar tudo que vai acontecer: objetivo, estratégia, por que estou

dando este conteúdo, qual a finalidade. Acredito que você queria isto de mim.
**P**: É, pedagogicamente é o que é cobrado. Talvez não tenha ficado claro o que solicitei ou não foi bem compreendido. Poderiam ter colocado esta dúvida no fórum que eu esclareceria, mas não houve nenhuma mensagem. A intenção era a partir da leitura do texto disponibilizado que preparassem uma aula com os conceitos ali tratados, a saber: eventos mutuamente excludentes, eventos independentes e probabilidade condicional. Queria saber como fariam isto para discutirmos aqui. Basicamente o planejamento do que seria tratado na aula: a escolha dos exercícios, a ordem de apresentação, o que concretiza o que pedagogicamente seria descrito.
**VA:** Planejamento não é plano de aula? . Você quer uma aula?
**P**: Imagine que você tem que substituir um professor daí a dois dias. O que vai fazer? Tem que preparar aquela aula, não? Este é o cenário.
**MD**: Eu particularmente só uso livro, não faria um plano de aula.
**P**: Então vamos mudar o nome de plano de aula. Como falaremos? Descreva a sua aula? Temos que arrumar uma maneira de trabalhar aqueles conceitos. Podem escrever da forma como quiserem. Que tal elaborar um roteiro? É claro que vocês têm na cabeça o que fazer. Tem que passar da cabeça para o papel.
**NA**: Roteiro a gente tem na cabeça. Botar no papel dá preguiça, estou sendo sincera. (ri).
**VA**: Na prova do IMED caiu um plano de aula. Foi assim: Os alunos da primeira série do Ensino Média têm dificuldade de resolver os problemas da oitava. O diretor foi questionar o professor o que ele faria. Elabore um plano de aula, dizendo o que você faria para melhorar o ensino médio e mostrar para o diretor. Tinha que fazer um plano de aula com tudo.
**LE**: Fiz em forma de sequência didática e passei... (feliz comentando). Caiu tudo. Posso falar uma coisa? Na prova do OFAs caíram vários exercícios que vimos aqui, até o do dado caiu.
**NA**: As 10 primeiras questões eram sobre números complexos, análise combinatória e probabilidade. Significa que está valendo a pena o que estamos estudando aqui. [Conversam sobre a prova].
**P**: Bom, então fechamos assim. Elaborem um Roteiro de aula com aqueles conceitos, a partir da leitura do texto disponibilizado e postem até daqui a uma semana. Compreenderam? [acenam que sim]

Para esclarecer copio a seguir a instrução da agenda 4 sobre o plano de aula:

*Nesta agenda teremos uma tarefa central:*
*Leia o texto "Probabilidade prática", postado em Material de Apoio e prepare uma aula (defina para que público) para trabalhar os seguintes conceitos:*
*eventos independentes*
*eventos mutuamente exclusivos*
*probabilidade condicional.*
Poste sua aula no seu portfólio individual. Vá ao *Fórum>plano de aula* para discutir suas dúvidas e/ou sugestões sobre os conceitos abordados e encaminhamentos do plano de aula. Estas ações devem ser realizadas no ambiente virtual até a próxima sexta-feira.

**Nesse sentido, penso que exageraram no entendimento que pretenderam dar ao solicitado, até porque apenas um cursista havia acessado o texto disponibilizado naquela semana para este fim. Pareceu-me em princípio que estavam resistentes e querendo encontrar argumentos para não fazerem a atividade solicitada. Precisei deixar se manifestarem e ver se com cuidado ia vencendo essa resistência. Entretanto, lamentei que com esta atitude não pude ter um retorno das noções que já traziam ou que construíram com a leitura do texto e preparação da aula sobre os conceitos solicitados (eventos mutuamente excludentes, eventos independentes e probabilidade condicional) que costumam apresentar dificuldades na sua compreensão e uso. Aliás, coloquei esta atividade como única durante toda a semana, com um texto orientador de apenas 2 páginas, exatamente para auxiliar na construção desses conceitos, depois de evidenciada a dificuldade de resolução da questão 4 da lista 2 sobre probabilidade condicional. Mas, infelizmente, não tive êxito no meu intento. Restou-me trabalhar no ritmo de resolução das atividades durante os encontros presenciais.**

**Na verdade, a polêmica estabelecida acerca do plano de aula evidenciou certa fragilidade de boa parte dos cursistas no planejamento de suas práticas para sala de aula. Planejar uma aula não significa seguir mecanicamente uma listagem pré-modelada de procedimentos, mas refletir antecipadamente quem é o seu aluno (público-alvo), olhar para a realidade da sua escola (o contexto em que está inserida), pensar sobre qual conteúdo abordar (conhecimento do conteúdo específico), qual a forma mais adequada de abordagem para esse aluno (conhecimento pedagógico do conteúdo), quais recursos utilizar para atingir os objetivos de aprendizagem. Os argumentos utilizados pelos cursistas aparentemente justificam a recusa em fazer um plano de aula, denotam uma recusa em pensar sobre suas práticas, parecem mais servir de escudo para camuflar a prática vigente de só trabalhar temas e conteúdos que dominam, escusando-se de buscar novos conhecimentos ou mostrar o desconhecimento de algum conteúdo e, consequentemente, de não saber bem como desenvolvê-lo em sala com seus alunos. Além disso, têm um entendimento distorcido sobre o que denominam 'teoria', parece que as discussões que estabelecemos para verificar a compreensão dos conceitos abordados são entendidas como 'dar teoria' e não como fazer uma reflexão crítica, com argumentação, sobre domínio desses conceitos para uma transposição adequada para a prática em sala de aula.**

Em seguida, passamos então a esclarecer as dúvidas que afloraram acerca dos conceitos de eventos mutuamente excludentes, eventos independentes e probabilidade condicional, sempre por meio de atividades envolvendo estes conceitos.

Retomo falando que já tínhamos resolvido exercícios das listas 1 e 2, mas que ainda assim algumas questões voltaram à discussão. Por exemplo, o exercício das urnas e do baralho.

Relembro o exercício do baralho: tirando uma carta ao acaso qual é a probabilidade de ser rei de copas ou um cinco?

**Calcularam as probabilidades parciais e, mais uma vez, não deram uma resposta final. Esse erro já evidenciado anteriormente, repete-se em atividades desta Lista 2, evidenciando que ainda não foram compreendidos e assimilados corretamente. Percebo ainda dificuldade no desenvolvimento do raciocínio probabilístico nessa situação.**

**P**: o que é que a gente perdeu, não assimilou, da discussão anterior para não dar finalizar a resposta? [simulo a situação de retirar uma carta]: Esta carta, qual é a probabilidade dela?
**NA**: Primeiro tenho que saber a probabilidade de um depois do outro e somar?! Isto aí? Fiquei perdida. [NA havia perdido essa discussão no encontro anterior]
**P**: Parece que isto complicou, não é? [Acenam que sim]. Continuo: Porque já tínhamos feito isto numa questão anterior e vemos que continuamos a dar respostas parciais (em separado) sem concluir. [Passam a discutir a questão. Escrevo no quadro para ajudar a pensarem].
**P**: todo mundo respondeu assim: 1/52 e 4/52.
**SA** afirma: somando dá 5/52. **LE** confirma: deixei assim, sem somar.
[Reforço escrevendo no quadro o que queríamos].
**P**: Temos dois eventos. A: rei de copas; B: um cinco. E queremos o que? [vou escrevendo conforme vão falando].
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ....[espero] – $P(A \cap B)$. Ah! Só que neste caso, $P(A \cap B) = 0$, pois a interseção de A e B é vazia.
**VA**: Você concorda que eles (alunos) têm que saber isto?
**P:** Claro!, mas podemos chegar a isto da forma como fizemos, levando o aluno a compreender, até mesmo concluir por si só, não dando a fórmula de início. Isto é trabalhar o conceito. [Volto ao lembrar o problema da urna e que também deixamos sem finalizar a resposta]
**P**: O que mais que ficou dúbio de lá, no ambiente virtual?
**LE**: A maioria deles usa regra de soma ou regra de produto, não é isso?
**P**: Quando a gente usa soma? **LE**: No 'ou"
**P:** e o produto? **LE**: No "e". Falo: Mas onde mais que usamos o produto?
**VA**: No condicional. Confirmo: na probabilidade condicional. Por isso é que eu quis trabalhar quando que a gente tem eventos excludentes, independentes e probabilidade condicional.
**LE** pede para falarmos mais da probabilidade condicional, que estava estudando sobre o assunto nos intervalos de aula e ainda tem dúvida. Falam que mutuamente exclusivos (excludentes), independentes também, mas este tal de condicional ainda tem dúvidas. Tenho mais dificuldade de entender um pouquinho.
[reflito para arrumar um bom exemplo].
**LE**: O mutuamente exclusivo. Se eu jogar um dado e cair o cinco, ao jogar novamente nada impede que caia o cinco novamente, não é?
**P** (devolvo a pergunta): Neste caso são mutuamente excludentes ou independentes?

Alguns falam juntos: independentes. Reforço: o que é que são eventos mutuamente excludentes?
Pensam e falam juntos. Se jogar moeda, sair cara e sair coroa são mutuamente excludentes. Confirmo que sim: Ou sai cara ou sai coroa, não tem jeito de sair os dois numa única jogada.
**NA** confirma: ainda faço confusão com isto aí. Por isto é que se não estamos com os conceitos bem consolidados acabamos cometendo esse erro aí. Eu acho que e gente, em vez de ficar só com teoria, é mais fácil compreender se a gente praticar com exercícios. Será que só o exemplo da moeda que a gente tem?
**P**: Vamos ver este exemplo aqui. [descrito no próximo quadro]

**Esse extrato da discussão mostra certo desconhecimento e dúvidas acerca destes conceitos, que são básicos em probabilidade, ainda evidenciando dificuldades no desenvolvimento do raciocínio probabilístico. Além disso, percebo dificuldade em relacionar conteúdos matemáticos a serem usados, como se estivessem em campos estanques. Outra questão que fica evidente é a noção equivocada sobre teoria e prática, o que pode ser visto na fala de NA, que revela o entendimento sobre o 'saber-fazer' com o sentido de 'praticar exercícios' e não 'ficar só com a teoria', confundindo uma discussão reflexiva com um discurso ou tratamento teórico, quando na verdade tratava-se de provocar uma reflexão sobre o 'conhecer'.**

**A intenção da discussão dialógica era provocar a reflexão sobre a distinção entre eventos mutuamente excludentes e eventos independentes, bem como a interdependência entre os conceitos independência de eventos e probabilidade condicional. No entanto, a discussão mostrou (e não foi só na fala de NA) que querem exercício, não 'teoria', uma noção equivocada, entendendo como 'teoria' a discussão sobre uma resolução, cuja intenção é provocar reflexão e dirimir dúvidas, visando à compreensão dos equívocos rumo à construção de conceitos.**

Dando prosseguimento, preciso insistir nessa direção, é crucial que encontre algum exemplo que clarifique estes conceitos. Escrevo no quadro e vamos resolvendo conjuntamente o seguinte exemplo:

Considere o lançamento de um dado (honesto) e os seguintes eventos, A: sair número par; B: sair número maior que 4; C: sair um múltiplo de 3. Quais pares de eventos são independentes?

Lembramos que dois eventos são independentes se, e somente se, o produto das probabilidades dos dois eventos é igual à probabilidade da intersecção dos dois. Assim sendo: A e B são independentes, A e C são independentes, mas B e C não são.

Vamos ver isto com mais cuidado mais à frente, pois depende da noção de probabilidade condicional. Na verdade a noção de independência está intrinsecamente ligada à noção de condicional. Com esta definição quais que são os eventos independentes desse exemplo e quais não são? A e B são? A e C são? E B e C são?

Resolvem e acompanho escrevendo a resolução no quadro:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ; $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{5, 6\}$ e $C = \{3, 6\}$

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{6\}$$

Então temos que: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ , $P(C) = \frac{1}{3}$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{6}$$

$P(A).P(B) = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$ → A e B são independentes

$P(A).P(C) = \frac{1}{6} = P(A \cap C)$ → A e C são independentes

$P(B).P(C) = \frac{1}{9} \neq P(B \cap C)$ → B e C não são independentes

Aproveito para provocar algumas reflexões visando compreender os conceitos que é o foco do encontro e, de certa forma, estão imbricados.

Agora quero que a gente pense: isto não causa estranheza? Escrevo para deixar bem registrado. E destaco: Mas B e C não são independentes. Vou repetir: Isto não causa um estranhamento? Pois vejamos: O resultado ser par e o resultado ser maior que 4, não dá ideia de dependência? O resultado ser par e ser múltiplo de 3.. O resultado ser maior que 4 e ser múltiplo de 3. Parece tudo a mesma coisa, não? Parece contra-intuitivo. Já no caso de cara e coroa num lançamento de moeda fica evidente que são eventos mutuamente excludentes. Vamos conferir. A: cara, B: coroa, a intersecção é vazia, P(A)=P(B)=1/2 e P(A∩B)=0, então A e B não são independentes, são mutuamente excludentes. No caso da moeda, os eventos são excludentes, mais que isso, um é complementar do outro. Mas podemos encontrar exemplos de eventos mutuamente excludentes que não são necessariamente complementares um do outro. Pergunto: os complementares sempre serão mutuamente excludentes? .

[Escrevo no quadro para registrar e dar tempo de pensarem]. Pergunto: Que é que são eventos complementares mesmo? Vamos recordar? Faço um diagrama de Venn para representar eventos complementares, A e B, com AUB=S. Daí a interseção de A e B é vazia, logo são mutuamente excludentes. Mas podemos ter mutuamente excludentes sem ser complementares.

Peço um exemplo com o mesmo espaço amostral do exemplo anterior (do lançamento de um dado). Falam: pares e ímpares, mas são complementares; alguém sugere maior que seis, digo que o evento existe, mas tem probabilidade nula. Peço outro tipo de exemplo.

**LE** sugere os números primos e os números pares. Não são complementares, mas também não são mutuamente excludentes, pois o 2 está na interseção . Insisto para ver se conseguimos um exemplo de dois eventos mutuamente excludentes, mas que não sejam complementares. Desafio: Será que conseguimos?

Acabamos montando o exemplo: U={menor que 2}={1} e A={pares}={2,4,6}. Não são complementares, pois a união dos dois não dá o todo e são mutuamente excludentes, pois se sair um, não pode sair o outro, a interseção é vazia.

**LE** sugere: múltiplos de cinco e múltiplos de 6. Também serve.
**VA** sugere: múltiplos de 2 e múltiplos de 4. Pergunto para ela se a interseção é o conjunto vazio. Diz que não, logo não são serve. [Conversam e discutem sobre isto].

**P**: Penso que já conseguimos distinguir eventos mutuamente excludentes de eventos independentes, não? Agora, fizemos aqui um exemplo de eventos independentes, vamos ver o que isto tem a ver com probabilidade condicional. Dizer se é independente ou não, depende da noção de probabilidade condicional. E o que é probabilidade condicional? Relembro o problema da urna: qual é a probabilidade de tirar uma bola verde **se** a urna escolhida foi a terceira? Aí já temos uma condição, um evento que já saiu. Na resolução, costumamos reduzir o espaço amostral, é comum fazer isto. No caso, bastava a gente olhar a probabilidade da urna 3, não importava a das demais, porque a bola verde já tinha saído da urna 3.

Por exemplo, aí (apontando para o exemplo de lançamento do dado- Figura 21). Vamos pedir uma probabilidade condicional daqui. [Aguardo um pouco que construam um exemplo]

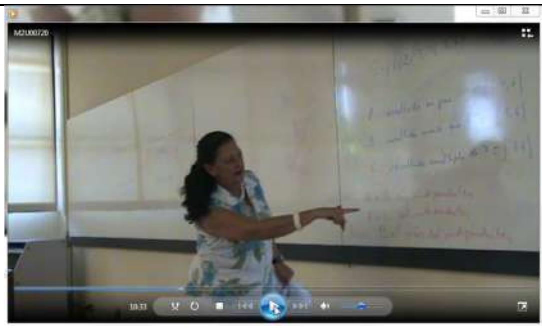
**P**: Vejamos: qual é a probabilidade de ser par, sabendo que é maior que 4? Escrevo P(A|B). Podemos reduzir o espaço amostral para B={5,6} daí, ser par, dado que é maior que quatro tem probabilidade ½. [Reforço a notação da barra vertical, pois é assim que é o correto para os estatísticos, embora em muitos livros apareça inclinado].
Mas podemos calcular de outra maneira, usando a definição de probabilidade condicional. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Na verdade esta probabilidade tem que dar ½. Peço para calcularem.
Lembro que o primeiro membro foi calculado reduzindo o espaço amostral, já as

probabilidades P(A∩B) e P(B) são tomadas em relação ao espaço amostral S (original).
Falo (brincando): Que beleza, não é que coincide!
Pergunto: Assim a fórmula faz sentido? Sim, respondem. Então, uma fórmula tem que ser compreendida também. Nunca uma fórmula é só uma fórmula, ela tem que fazer sentido para o aluno. A fórmula que é só memorizada como uma fórmula, é só um algoritmo sem significado e, se um dia o sujeito esquecer, não sabe usar.

[Peço para reverem o exercício 4 da Lista 2, baseando-se nesse exemplo que acabamos de trabalhar e reforço o que já vimos e que é consequência da definição de probabilidade condicional: se A e B são independentes, então P(A|B)=P(A)]

**Penso ter provocado a reflexão sobre os conceitos de eventos mutuamente excludentes, eventos independentes e probabilidade condicional. Percebi que ficaram um pouco confusos no início, mas à medida que íamos produzindo os exemplos, iam se sentindo mais seguros e passaram o opinar um pouco mais, embora ainda de forma titubeante. Respondia sempre com uma pergunta para ver se o próprio cursista conseguia perceber e dirimir sua dúvida. Tenho consciência de que estes conceitos não são de fácil compreensão (FALK, 1986; Díaz e LA FUENTE, 2005; BATANERO, CONTRERA e DÍAZ, 2012; KHANEMAN e TVERSKY, 2009; GINGERENZER e HOFFRAGE, 1995), dependendo da situação em que são apresentados e o aprendizado de fato só se realiza após trabalhar em diferentes situações problema. Dessa maneira, há que se fazer mais atividades sobre os mesmos conceitos. Antevendo isto, me preparei e trouxe o artigo "Eventos Independentes", que trata destes conceitos, para ser lido e discutido em grupo, visando mais uma abordagem sobre o mesmo tema. Além da discussão e leitura feita em grupo nesse encontro presencial ainda fizerem todas as atividades solicitadas (Lista 2, leitura do artigo "Probabilidade prática", o *roteiro* de aula com esses conceitos) terão realizado um estudo reflexivo e exercitado.**

**Figura 21 –** Pesquisadora indicando a atividade sobre eventos independentes



Fonte: captura tela da gravação em vídeo

No segundo momento do encontro, distribuí o texto, para ser trabalhado em grupo. É o artigo "Eventos Independentes", do Prof. Flávio Vagner Rodrigues publicado há tempos na Revista do Professor de Matemática (RPM). Falo um pouco sobre a RPM e que este artigo foi reproduzido na Coleção Explorando Ensino, volume 2, publicada pelo MEC, disponível no Portal do Professor, de domínio público. Ressalto que o professor Flávio, já falecido, era considerado um estatístico de renome e grande pensador. O artigo traz exemplos reforçando os conceitos (trabalhados nesse encontro) e suas diferenças. A tarefa consistia em ler o artigo e discutir em grupo. Se surgissem dúvidas não sanadas no grupo, compartilhamos abrindo a discussão para todos. Os cursistas trabalharam em grupo até o final do encontro. O propósito dessa leitura e discussão em grupo era fornecer outros subsídios para compreensão dos conceitos abordados, proporcionando, dessa forma outra abordagem sobre a temática.

## 6.5 Quinto encontro

Entre o quarto e o quinto encontros presenciais, tivemos duas agendas para serem trabalhadas no AVA, Agenda 5 e Agenda 6.

**Agenda 5**: Atividade 1: a partir da discussão realizada no último encontro presencial, e das leituras do texto "Probabilidade prática", de Steve Zolotow, e do artigo "Eventos Independentes", de Flávio Wagner Rodrigues (da RPM, publicado pelo MEC na Coleção Explorando o Ensino), postados em Material de Apoio, prepare um **roteiro de aula** (defina para que público) para trabalhar os conceitos: eventos independentes; eventos mutuamente exclusivos; probabilidade condicional. No roteiro de aula, elabore uma sequência de ensino que leve os alunos (seu público-alvo) a se apropriarem destes conceitos. Inclua um cabeçalho com os objetivos e o público-alvo e poste no seu portfólio individual. Também vá ao *Fórum>Roteiro de aula* para discutir suas dúvidas e/ou sugestões sobre os conceitos e encaminhamentos abordados. Atividade 2: Experimento Probabilidade com Urnas. Acesse o link a seguir, faça a atividade e relate suas impressões no Fórum>Experimento/Probabilidade com Urnas[193].

A Atividades 1 (Roteiro de aula) solicita três ações que se complementam: leitura do Texto “Probabilidade prática” para subsidiar a elaboração do Roteiro de aula abordando os conceitos de eventos mutuamente excludente, eventos independentes e probabilidade condicional, discussão no fórum sobre dúvidas ou sugestões acerca do Roteiro.

O texto Probabilidade Prática tem uma abordagem interessante ao alertar para três fatos: o significado do termo independência usado em estatística e probabilidade; a confusão comum entre eventos independentes e eventos mutuamente excludentes; a dificuldade em descobrir a probabilidade condicional. Estes três conceitos já foram foco do encontro presencial anterior, na qual foram detectadas dificuldades de compreensão dos mesmos e distinção entre eles, daí a necessidade de enfatizá-los com outra abordagem. Além disso, para não ficar só na leitura que não é suficiente para a construção de conceitos, os cursistas devem abordá-los em seus roteiros de aula, o que pressupõe também planejar a abordagem para a prática em sala de aula do público-alvo da educação básica. Para discutir as possíveis dúvidas que surgissem e compartilhamento de sugestões foi ativado um fórum específico sobre o roteiro.

**Acompanhamento virtual entre o quarto e o quinto encontros presenciais.**

Infelizmente o Fórum “Roteiro de aula” teve pouca participação, apenas dois cursistas. Seguem os comentários desse fórum.

[193] Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Softwares/SoftwaresM3Matematica/probabilidade_com_urnas/urnas/index.html>. Acesso em: 02 out.. 2011

**P**: Este fórum é para tirar dúvidas sobre o roteiro de aula, discutir ideias e dar sugestões. Mas antes disso, leiam os artigos indicados e já elaborem algumas ideias. [Dois artigos disponibilizados no ambiente, Probabilidade Prática e Eventos Independentes, este último também entregue impresso no encontro anterior]
**VD**: No artigo "Eventos Independentes" alguém conseguiu fazer o exemplo 3 referente às famílias? Eu tentei fazer, mas não deu certo, depois eu vou tentar novamente.
**NA**: Infelizmente, eu não tentei resolver.
Precisamos ler o texto com muita calma, pois o autor tenta nos explicar, através de exemplos, que as ideias intuitivas - formadas pelo nosso senso comum - acabam por nos confundir quando estudamos os conceitos de eventos independentes com os eventos mutuamente exclusivos. Leia o 3° parágrafo do Exemplo 3 que fala sobre as famílias.
**P**: **VD**, eu fiz a questão. Faça com calma todas as possibilidades de família com 3 filhos e depois com 4 filhos. Dá certo.
**NA**: Olá Pessoal, eu acabei de postar o meu Roteiro de aula, mas é ainda um "rascunho". Eu não disse que daria trabalho para elaborar as aulas, então agora falta resolver os exemplos e os exercícios, para decidir qual deles deve ficar no roteiro, pois se eu não sei fazer, como vou passar para os alunos???? Até mais.

**VD pediu ajuda, que intermediei e NA comentou sobre sua postagem do roteiro de aula. Os comentários são relevantes porque mostram interesse e dão uma indicação do empenho manifesto dos dois cursistas em realizar as tarefas e indícios de uma tomada de consciência de NA em relação a uma questão muito importante que estou convencida (embora não seja foco desta pesquisa): não há como realizar o conhecimento pedagógico do conteúdo, segundo Shulman (1986) e Ball e Bass (2003), sem conhecimento do conteúdo específico, em particular reforçado por Viola (2012) e MA (2009) e de cujas concepções amalgamadas compartilho.**

O artigo "Eventos Independentes" foi lido pelos grupos no encontro anterior e o exemplo 3 a que se referiam os cursistas no fórum anterior, merece destaque pela relevância do exemplo. É o seguinte:

Considere as famílias com N crianças e admita que todas as distribuições de gênero (sexo) dessas crianças sejam igualmente prováveis. Seja A o evento "existem crianças de ambos os sexos" e B o evento "existe no máximo uma menina". Mostre que no conjunto das famílias com 3 crianças os eventos A e B são independentes, mas não o são em famílias com 4 crianças

**A resolução desta questão consta do capítulo 2 da tese (exemplo 2 do ultimo tópico do capítulo). O mais interessante desta questão é sair do âmbito dos exemplos convencionais e mostrar que os eventos A e B são independentes, no caso de famílias com 3 filhos, e são não independentes, no caso de famílias com 4 filhos, fato este até contra intuitivo, por isso sua relevância para a compreensão destes conceitos. Infelizmente parece-me que poucos cursistas tiraram proveito disto.**

**No entanto, já em relação ao Roteiro de aula solicitado na Atividade 1 da agenda 5, notei empenho e dedicação de cinco cursistas, que o elaboraram e postaram em seus portfólios individuais. NO e SA elaboraram um roteiro mais simplificado, VD já estenderam um pouco mais, com desenvolvimento e exemplos, mas LE e NA elaboraram um trabalho completo, não só roteiro, com desenvolvimento e várias questões com resolução (NA 10, LE 20), algumas com certo grau de complexidade. Todos os roteiros têm o ensino médio como público alvo e abordam os conteúdos solicitados, portanto, atendem ao que foi solicitado. Especialmente foi interessante perceber que tiveram que pesquisar para fazer o roteiro, o que ficou evidenciado principalmente pelas referências dos exercícios selecionados.**

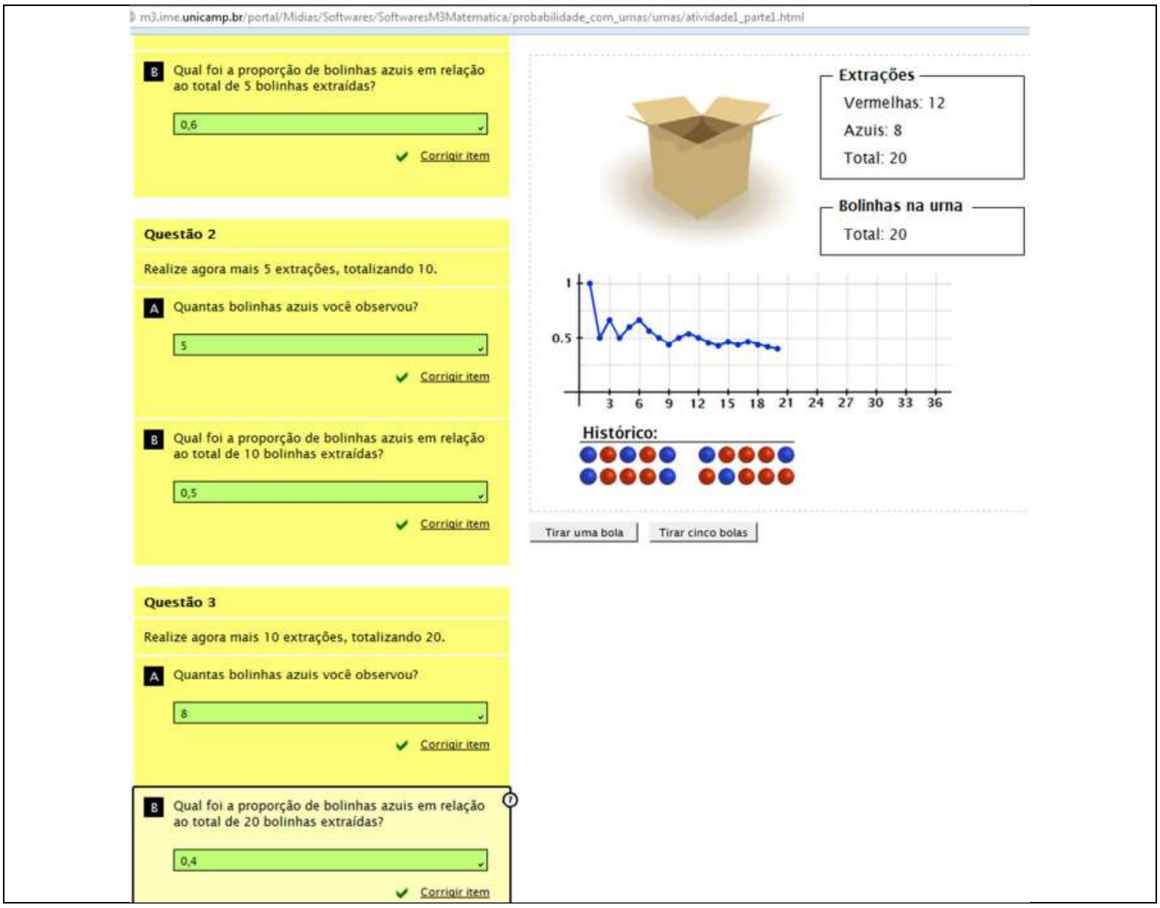
**Vale ressaltar que entre os que entregaram esta atividade estão alguns que se destacaram na discussão havida no encontro presencial anterior sobre o plano de aula demonstrando resistência em fazê-lo. Isso é importante, pois indica que, mesmo polêmica, a discussão surtiu algum efeito, pois mudaram de atitude o que reflete acima de tudo a disposição para fazê-lo, pois como indica Rokeach (1981, p. 132) uma mudança de atitude seria uma mudança na predisposição, entendida como um estado hipotético do organismo que, ativado por um estímulo, faz com que uma pessoa responda de forma seletiva, afetiva ou preferencial ao estímulo.**

Nesta agenda incluí outra atividade a ser realizada online por meio do simulador de um experimento de extração de bolas coloridas (azul e vermelho) de uma urna. O simulador virtual *Probabilidade com Urna*[194] se constitui de três sequências didáticas que na ação permitem ao usuário, seguindo as instruções claras e objetivas, escolher o número de bolas

[194] O simulador compõe um dos objetos digitais de aprendizagem criados pela UNICAMP para o Programa Condigital, de 2006, portanto é de domínio público no Portal do Professor do MEC.

de cada cor (num total de 20), acompanhar as extrações solicitadas, realizar os cálculos, preencher as respostas e ainda ter o *feedback*, o que possibilita refletir sobre possíveis erros e refazer os cálculos, ou seguir adiante se tiver correto. Além disso, a interface do simulador permite ao usuário, simultaneamente, visualizar as extrações (tipo de bolinhas, número de jogadas) e o gráfico das frequências relativas de extração randômica das bolas azuis. Este experimento frequentista traz três sequências de atividades, em ordem crescente de dificuldade, extração sem reposição, com reposição e urna de Polya[195], sendo que ao final ainda solicita ao usuário que faça um relatório a ser entregue ao formador, caso exista. Acompanha o experimento um Manual do Professor, com orientações e sugestões. A Figura 22 a seguir mostra uma captura de tela durante a realização do experimento, a título de ilustração.

**Figura22**: Experimento Probabilidade com Urnas (Condigital Unicamp /M3Matemática)




Fonte: Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Softwares/SoftwaresM3Matematica/probabilidade_com_urnas/urnas/index.html >. Acesso em: 10 out. 2011

[195] A urna de Polya é um modelo de urna com reposição, mas com uma diferença: para cada extração realizada, duas bolinhas são colocadas na urna, ambas da mesma cor da que fora extraída.

**É importante ressaltar que a escolha deste objeto digital de aprendizagem teve os seguintes propósitos: oferecer a oportunidade de realizar um experimento frequentista com simulador que envolvesse os conceitos que estamos trabalhando nessa agenda. Este simulador possibilita explorar o cálculo de probabilidades envolvido com a extração de bolas de uma urna e cada sequência de atividades apresenta um determinado objetivo de aprendizagem: o conceito de dependência entre eventos (extração sem reposição), independência de eventos (extração com reposição) e sua inter-relação com probabilidade condicional. Dessa forma, estamos realizando um experimento frequentista com o uso de tecnologia digital que propicia por meio do *feedback* que se realize o ciclo de aprendizagem (ação, reflexão, depuração, nova ação) e a tomada de consciência, em sua reflexão, de como as variáveis e seu comportamento contribuem para a formação dos conceitos em cada atividade/fase (VALENTE, 1999; REZENDE, 2004).**

Alguns cursistas realizaram a atividade com o simulador online e fizeram comentários no Fórum expondo suas dúvidas e sugestões. Essa atividade foi também discutida em encontro posterior. Apenas um cursista, **LE,** postou em seu portfólio individual o Relatório do experimento. Segue um extrato do Fórum>Experimento Probabilidade com Urna.

**P**: Este fórum é para discutir as impressões e conclusões sobre o experimento Probabilidades com urnas, depois de realizá-lo, é claro.
**VD**: Experimento
EXTRAÇÃO COM REPOSIÇÃO
Nessa atividade eu escolhi 6 bolas vermelhas e 14 azuis, e fui realizando as extrações e respondendo as questões no caderno. A questão 7 pergunta se as extrações são independentes e por que.
Conclusão: As extrações são independentes, porque são extrações com reposição, sendo assim a urna sempre vai estar com o mesmo número de bolas azuis e vermelhas, então a ocorrência de um evento não afeta a probabilidade de ocorrência de outro evento.
EXTRAÇÃO SEM REPOSIÇÃO
Nessa atividade escolhi 14 bolas vermelhas e 6 azuis, ao contrário da primeira atividade, mas isso não vai interferir na conclusão.
Conclusão: As extrações não são independentes, porque são sem reposição, a ocorrência de um evento afeta a probabilidade de ocorrência de outro evento.
URNA DE POLYA
Nessa atividade escolhi 6 bolas vermelhas e 14 bolas azuis.
Conclusão: As extrações, nesse tipo de urna, não são independentes, as probabilidades assumem valores distintos para um mesmo evento, por exemplo se sair bola vermelha, vou repor duas então vai depender do número de bolas e das

cores que ainda restam na urna, portanto a ocorrência de um evento afeta a probabilidade de ocorrência de outro evento.
Agora na questão final onde ele pede para responder no caderno, a probabilidade de que a segunda bolinha seja azul, eu não tenho certeza, mas eu acho que nesse caso eles são mutuamente exclusivos, porque na primeira extração não sabemos se saiu azul ou vermelha então pode ter saído vermelha na 1ª extração e azul na 2ª extração OU Azul na 1ª e 2ª extração OU azul na 1ª extração e vermelha na 2ª extração.
**P**: Oi **VD**, muito bem de já ter feito e relatado o seu experimento.

Quanto à questão final para responder no caderno, não me lembro bem, mas deve ser acerca da sua experiência. Se assim for, você sabe a primeira extração da urna de Polya, daí é só analisar a segunda. Mas se não for acerca do seu experimento, você colocou todas as possibilidades. Agora é só dizer as probabilidades de cada possibilidade
**VD**: Oi Ana, a questão final para responder no caderno refere-se a:
Imagine o caso de uma urna de Polya genérica. Essa urna contém, inicialmente, 20 bolinhas, das quais "a" são azuis. Qual é a probabilidade de que a segunda bolinha seja azul?
Então: Se a 1ª retirada for vermelha probabilidade= (20-a)/20
Se a 2ª retirada for Azul probabilidade = a/21 (pois foram repostas 2 bolas azuis).
AGORA
Se a 1ª retirada for azul probabilidade = a/20
Se a 2ª retirada for Azul probabilidade = (a+1)/21

**NA**: Descoberta legal experimento
Olá Pessoal, Boa tarde!!!
Ontem, eu tentei resolver todas as etapas do Experimento, mas "parei" numa pergunta que não sabia responder e não tinha para quem recorrer, pois estava com medo de sair do Experimento e perder as informações. Eu não havia instalado o Experimento no meu micro. Porém para minha surpresa, hoje ao entrar novamente no Experimento, as fases para realizar por completo o programa me dá a opção de "Rever ou Refazer a atividade" e a fase que deixei incompleta ontem, eu posso continuar hoje!!!!
Daqui a pouco eu escrevo, a minha dúvida para completar a última fase do Experimento. Até mais..
**NA**: Fase 3 Experimento Urna de Polya
Olá Pessoal, Alguém chegou nesta Fase 3 da Urna de Polya????
Eu ainda não consegui entender, para poder responder a: 3ª Questão - Com base nessa primeira extração, diga qual é a probabilidade de se obter uma bolinha azul na próxima extração. Eu já tentei, através de vários "chutes" de valores, mas nada é aceito como certo. Eu olhei no gráfico e pensei que a probabilidade fosse de uma bola azul entre onze, já que depois da 1ª extração, a bola retirada volta em dobro na mesma cor. E, 1/11 é igual a 0,090909... Mas não aceita este valor???
Alguém pode me ajudar??? Até mais.
**NA**: Outros valores: 0,010 e ainda traz a msg "Não está correto! Lembre-se que você adiciona uma bolinha da mesma cor depois que tirou". Eu estou num beco sem saída!!!

**VD**: Experimento
Oi **NA**, essa questão eu respondi com duas casas após a vírgula a minha deu 14/21 = 0,66 e deu certo. Se vc colocar como eu coloquei vai dar certo, se der errado e porque vc não acrescentou 2 bolas a mais depois da primeira extração.
**NA**: Fase 3 Experimento Urna de Polya
Valeu, **VD**, vou tentar usar as duas casas decimais!!!!
Olá Pessoal, a ajuda de **VD** foi muito bem vinda. Eu estava pegando apenas 1 (uma) bola azul e devemos pegar todas elas, inclusive a extra ==> 11/21 = 0,523
Eu iniciei o experimento com 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas!!!!! Até mais.
**P**: Que bom que vocês mesmos resolveram na interação aqui no fórum.

**Observa-se pelas mensagens postadas no fórum que esses cursistas que se empenharam em fazer o experimento ainda interagiram numa atitude proativa, e me pareceram empolgados com o experimento. VD explicitou seu raciocínio e suas dúvidas, às quais dei uma orientação, mas também auxiliou NA em seu pedido de socorro. Por outro lado, NA também explicitou suas dúvidas e ainda compartilhou a sugestão de VD com todos. Mesmo contando com a participação de poucos, os que o fizeram, usufruíram nessa atividade da interatividade (no simulador) e da interação (com colegas e pesquisadora) que um ambiente virtual de aprendizagem proporciona. Fica evidente a ambiência de aprendizagem criada nesse experimento na conjunção dos fatores: a potencialidade do objeto digital em instigar a reflexão sobre o conteúdo estudado (probabilidade) e a disposição individual e coletiva dos participantes na persistência de se chegar ao resultado. Ressalte-se o avanço dos cursistas participantes do experimento virtual no desenvolvimento do raciocínio probabilístico e a autonomia na construção desse aprendizado, um saldo positivo no processo formativo. A atitude destes cursistas me sinalizou para o uso de outros objetos digitais de aprendizagem no próximo encontro presencial. Entretanto, pretendo trabalhar a temática também com objetos concretos para diversificar as modalidades para todos e atender aos que não se familiarizam tanto ou não se sentem muito confortáveis com o uso do computador. Esse deve ser o próximo *redesign* pretendido.**

**Agenda 6**: Discussão e Resolução da Lista 3, postada na ferramenta Atividades. Recomenda-se rever a apresentação da aula inicial em *powerpoint*, postada em Material de Apoio, para recordar alguns conceitos e a linha de desenvolvimento do conteúdo do nosso curso. Vá ao Fórum>Lista 3 para discutir suas dúvidas e/ou sugestões sobre os exercícios e conceitos ali abordados. A resolução da Lista 3 deve ser postada em seu portfólio individual, compartilhando com formador.

A **Lista 3** (Anexo B) inicia situando as abordagens de Probabilidade nos Cadernos do Professor da 5ª à 8ª séries (6º ao 9ºano) do currículo oficial do Estado de São Paulo, aproveitando a situação de aprendizagem 4 descrita no Caderno do 9º ano relacionando Probabilidade e Geometria, para introduzir a probabilidade geométrica. Traz dois experimentos com *applets*: o primeiro sobre A *Agulha de Buffon* e um segundo, relacionado ao vídeo *Coisas de Passarinho* (visto no início do curso) e que se encaixa no experimento *Método de Monte Carlo*. A seguir apresenta uma sequência de ensino com sete atividades sobre probabilidade geométrica.

O problema da Agulha de Buffon é um problema clássico e dos mais antigos na área de probabilidade e geometria. Ele foi enunciado pela primeira vez em 1777 e envolve o lançamento aleatório de uma agulha num plano com infinitas linhas paralelas e a determinação da probabilidade de que a agulha cruze uma das linhas. O resultado está relacionado com o valor de π. Conta a história que Buffon teria sofrido uma queda, por isso teve que ficar imobilizado por vários meses. Apesar de advogado e naturalista, Buffon tinha como um de seus grandes interesses, a matemática. Enquanto estava imobilizado, para "passar o tempo", observou o assoalho formado por ripas e começou a jogar no chão a haste com que limpava o cachimbo. Assim notou que a haste, que possuía o mesmo comprimento da largura das ripas, hora cruzava (ou tocava) as linhas das divisórias entre as ripas, ora não. A partir daí, criou-se um interessante problema matemático de probabilidade usando geometria.

O Método de Monte Carlo pertence à classe de métodos estatísticos muito utilizado no ramo da matemática aplicada (ou experimental) ligado a experimentos com números aleatórios. Baseia-se em amostragens aleatórias massivas para obter resultados numéricos, isto é, repetindo sucessivas simulações um elevado número de vezes para calcular probabilidades heuristicamente. Suas aplicações se estendem às mais diversas áreas, incluindo ramos da Física, Química, Biologia, Astronomia, e até mesmo da Ecologia. A Agulha de Buffon se encaixa na classe das aplicações do Método de Monte Carlo. Foi inventado por Stanislaw Ulam quando jogava “paciência”, que depois apresentou a ideia a John von

Newman e a  primeiro trabalho introduzido por  Neuman e Ulam, em 1940, durante a Segunda Guerra Mundial, era um estudo da difusão aleatória de nêutrons num material radioativo. O nome Monte Carlo foi cunhado durante o projeto Manhattan, por causa da similaridade das simulações estatísticas com os jogos de azar, já que Monte Carlo, capital do Principado de Mônaco, era um centro de cassinos, apostas e jogos.  E a roleta era um gerador de números aleatórios.

Ambos simuladores applets *Agulha de Buffon* e *Método Monte Carlo em 2D* utilizados na realização dos dois experimentos fazem parte do projeto de Conteúdos Digitais de Matemática para o Ensino Médio (CDME)[196], coordenado pelo Prof. Dr. Humberto Bortolossi, da Universidade Federal Fluminense. Os aplicativos em questão são orientados para a simulação de experimentos aleatórios no computador, com ênfase em probabilidade geométrica. A exemplo do simulador da agenda 5, estes também permitem que o usuários faça algumas escolhas e visualize o experimento com algumas informações simultâneas, com a diferença que não *dá feedback*, mas seu objetivo é simular os experimentos.

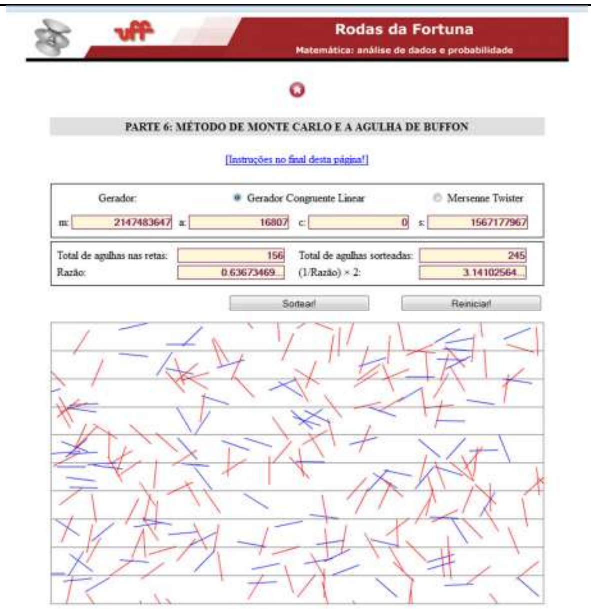
O simulador Agulha de Buffon tem uma interface que exibe escolhas do gerador aleatório (não usado no nosso caso) e um recorte de plano com retas paralelas horizontais e dois botões, 'sortear' e 'reiniciar'. Após clicar em sortear, exibe as agulhas sorteadas caindo no plano, o número de agulhas que cruzam as linhas retas e o dobro do inverso da razão (agulhas na reta)/(total agulhas sorteadas), que tende para o número π, à medida que aumenta o número de agulhas sorteadas. Para recomeçar, basta clicar no outro botão 'reiniciar', como indica a Figura 23.   Não tem muita interatividade, mas permite a visualização de uma simulação do experimento frequentista realizado pelo Conde de Buffon. A demonstração desse experimento foi postada em Material de Apoio do AVA, apenas para conhecimentos dos cursistas.

Já o experimento Método de Monte Carlo em 2D, tem interface semelhante, mas exibe um quadrado com um círculo inscrito  e  permite ao usuário, clicando em 'sortear', visualizar os pontos (objetos geométricos de dimensão nula) que caem no quadrado, dentro ou fora do

[196] CDME – Conteúdos Digitais de Matemática para o Ensino Médio. UFF.Este trabalho faz parte do projeto de elaboração de conteúdos digitais para o ensino médio promovido pelo MEC e pelo MCT.
Disponível em: http://www.professores.uff.br/hjbortol/. Acesso em: 10 set. 2011.

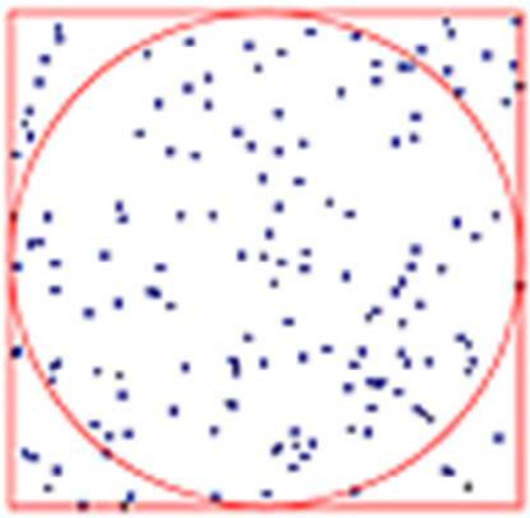
círculo, exibindo também a razão entre os pontos dentro do círculo e o total de pontos, como indica a Figura 24.

**Figura 23** – Imagem do experimento Agulha de Buffon




Fonte: http://www.uff.br/cdme/rdf/rdf-html/rdf-b-br.html

**Figura 24** – Representação do experimento de Monte Carlo em 2D



Fonte: http://www.uff.br/cdme/rdf/rdf-html/rdf-b-br.html

Usando geradores pseudoaleatórios, o aplicativo desta atividade sorteia pares ordenados (x, y) no quadrado unitário [0, 1] × [0, 1], onde as variáveis x e y estão uniformemente distribuídas no intervalo [0, 1]. A partir destas contagens, o programa calcula a razão r, entre o número de pontos no círculo e o número total de pontos sorteados, e o número r × 4. Como a probabilidade de um ponto sorteado no quadrado unitário [0, 1] × [0, 1] estar no círculo de centro (1/2, 1/2) e raio 1/2 é igual a p = (área do círculo)/(área do quadrado)= [π × (1/2)2]/1 = π/4, segue-se que (teoricamente) o número r × 4 calculado deve convergir para o número π.

Seguem comentários do Fórum>Lista 3

**P**: Neste fórum podemos trocar ideias e tirar dúvidas sobre as atividades da Lista 3, incluindo os experimentos.
**VA**: Ola, Ana, já li a atividade 3 e me interessei sobre as linhas de Buffon. Quanto as probabilidades geométricas ainda não me localizei.
**P:** Oi **VA**, você não localizou a probabilidade geométrica só no experimento de Buffon ou na lista 3 toda?
**SA**: Olá pessoal, achei interessante o experimento Agulha de Buffon que a medida que as agulhas eram sorteadas (azuis e vermelhas) que o inverso da razão entre as agulhas nas retas (vermelhas) sobre o total de agulhas sorteadas multiplicado por 2 tendia sempre ao número Pi (3,14....).
**P**: Boa observação, **SA**. Pesquise um pouco sobre o Buffon: como será que ele teve essa ideia?
**NO**: Oiiii! Não imaginei que o experimento Agulha de Buffon em todas as tentativas, desde com poucas até muitas agulhas todas tendem ao número PI (3,14...). Como posso obter esse applet (Agulha de Buffon)??? Abraços.
**P**: Oi **NO**! Interessante o experimento, não? Como será que o Buffon teve essa ideia? Pesquise u pouco sobre isto. O applet, não se obtém, mas pode ser acessado pelo link, que vc usou.
**VD**: Estimativa de pi. Suponha-se que o experimento da Agulha de Buffon seja realizado um grande número de vezes. Pela lei dos grandes números, a proporção de cruzamentos das frestas deverá ser um valor próximo da probabilidade de que a agulha cruze a fresta. Mais precisamente, seja f a frequência de cruzamentos nos primeiros n lançamentos. Observe que f é uma variável aleatória para o experimento composto que consiste nas n repetições do experimento básico. Assim, se n é grande pode-se esperar que: f/n ~ 2l/pi de modo que pi ~ 2ln/f. Esta é a famosa estimativa de pi feita por Buffon. Bibliografia Tópicos relacionados: Simulador: Agulha de Buffon Atividades: Agulha de Buffon Referências [VLab/2011]
**MD:** Nossa amiga realmente o curso da Unicamp fez bem, vc é dez
**VD**: Ao iniciar o experimento já podemos observar que as sementes vão caindo mais dentro do círculo do terreno quadrangular, depois vai se igualando até que o círculo parece que fica invisível e as sementes vão se espalhando no quadrado todo. Podemos considerar que a probabilidade de acertar o centro deve ser a razão entre a

área do círculo e a do quadrado estimando para o valor de π usando assim a probabilidade geométrica, pois o círculo pertence ao quadrado.
**P**: Muito bem VD, ótimo compartilhar essas informações com os colegas.

**Os comentários desse fórum demonstram o interesse da maioria dos participantes com o experimento virtual da Agulha de Buffon (aparentemente não realizaram o outro experimento pela ausência de comentários sobre ele). Entretanto já é um indício interessante que serviu de mote para ser explorado em encontros posteriores (redesign), pelo interesse que desperta esse tipo de objeto virtual, mesclando fatores como a novidade, o lúdico, a visualidade, a interatividade e, portanto o favorecimento à aprendizagem. É a direção indicada para proporcionar, mesmo em níveis iniciais, o desenvolvimento do conhecimento tecnológico do conteúdo (um dos componentes do TPACK)[197].**

**Quinto encontro presencial**

- **Pauta:** Discussão das atividades da Agenda 6 – Lista 3; realização de experimentos sobre probabilidade geométrica (em sala e online); atividades no AVA.

Iniciamos o quinto encontro presencial numa sala com computadores e internet para os cursistas realizarem as atividades de experimento com *applets*. Iniciaram em grupos de três e estavam entusiasmados realizando as atividades. Entretanto, tivemos um imprevisto e as atividades tiveram que ser suspensas e postergadas para o sexto encontro, para daí a uma semana.

## 6.6 Sexto encontro

- **Pauta:** Discussão das atividades da Agenda 7 – Lista 3; discussão dos experimentos virtuais sobre probabilidade geométrica; atividades no AVA.

Entre os quinto e sexto encontros presenciais, portanto, tivemos apenas uma agenda para ser trabalhada no AVA.

[197] O quadro TPACK (MISHRA; KOEHLER, 2006, 2008, 2009) para conhecimento dos professores é descrito como uma interação complexa entre três corpos de conhecimento: conteúdo, pedagogia e tecnologia. A interação destes corpos de conhecimento, tanto teórica como prática, produz um tipo de conhecimento flexível necessário para integrar com sucesso o uso da tecnologia no ensino, favorecendo assim a aprendizagem.

## Acompanhamento virtual entre o quinto e o sexto encontros presenciais

**Agenda 7:** Considerando o imprevisto do último encontro e aproveitando a animação da turma com os experimentos virtuais, mantivemos nesta agenda 7 rever as atividades da agenda 6: finalização e discussão no fórum das atividades da Lista 3, bem como dos experimentos com virtuais com *applets* e postagem da resolução nos portfólios individuais.

Por conta da situação atípica, as atividades da agenda anterior apenas foram prorrogadas por mais uma semana. Os comentários postados no fórum>Lista3 já foram feitos, então me reporto às resoluções das outras atividades da Lista 3 postadas nos portfólios, dentre elas uma atividade merece destaque, a questão 6.

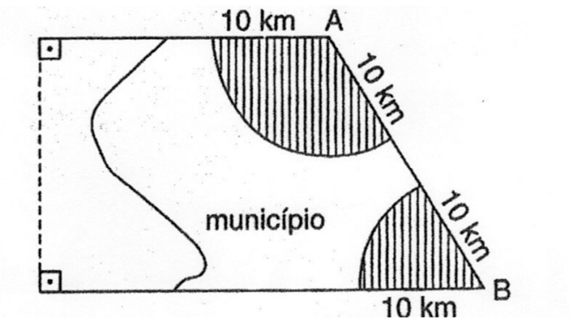
**Questão 6**

**6)** Um município de 628 km$^2$ é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mosta a figura abaixo. Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar  probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.

Essa probabilidade é de, aproximadamente:

a) 20%  b) 25%  c) 30%  d) 35%  e) 40%

**Justifique sua resposta.**




Nessa questão, a dificuldade evidenciada foi relativa ao cálculo da área dos setores circulares. Seguem algumas resoluções da questão.

**NO e SA** resolveram assim:

6) A(hachurada B) = $\frac{\prod \times 10^2}{4}$ = 3,14 x 25 = 78,5 Km²

A (hachurada A) = $\frac{\prod \times 10^2}{2}$ = 3,14 x 50 = 157 km²

P (área hachurada B) = $\frac{78,5}{628}$ = 12, 5%

P (área hachurada A) = $\frac{157}{628}$ = 25%

Então, P(A) + P (B) = 12,5 + 25 = 37,5% aproximadamente 40% (altemativa e)

**LE** resolveu assim:

Temos duas regiões circulares, sendo que a região superior (vértice A) é 1/3 de uma circunferência e a região inferior (vértice B) é ¼ de uma circunferência.
Considerando que o raio é 10 km, a área da região A é aproximadamente 104,6 $km^2$, a área da região B é aproximadamente 78,50 $km^2$.
Somando as duas regiões temos 183,10 $km^2$, a probabilidade é de 183,10/628 ou aproximadamente 30%.
Alternativa correta c.

**MD** resolveu assim:

Aa=50π Ab=25π A ou B temos 75.3,14 = 235,50
P= 235,50/628 = 0,37 aproximadamente 35%

**VD** resolveu assim:

Obs: Os dois ângulos do município são colaterais internos, então a soma = 180 graus.
área do semi-círculo = $\frac{\pi . r^2}{2} = \frac{3.100}{2}$ = 150km²
628Km² – 150Km² = 478Km² (probabilidade de não estar na emissora).
$1 - \frac{478}{628} = 1 - 0,76 \sim 25\%$
Resposta: A probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras é de aproximadamente 25%.

Nesta questão, todos acertaram o raciocínio e **NO**, **SA**, **LE** e **MD** tiveram dificuldade apenas em calcular as áreas dos dois setores circulares, o que **VD** conseguiu fazer corretamente ao perceber que os ângulos dos vértices A e B do trapézio somam 180°, logo a área hachurada corresponde à área de um semi-círculo de raio 10 km. Daí é só encontrar a razão entre a área hachurada e a área total do trapézio e a resposta correta é aproximadamente 25%, ou seja, item (b). Percebo aqui que usaram corretamente as noções de área em figuras planas e só tiveram dificuldade nesse quesito que envolve área de setor circular e o conceito de ângulos, particularmente a correspondência entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por transversais, que é uma consequência do Teorema de Tales.

**Uma das metas do MPG, além de trabalhar as noções elementares e principais conceitos de probabilidade, era chegar a trabalhar a probabilidade geométrica, que articula conceitos de geometria e probabilidade, além de relacionar também com a noção frequentista. Na Probabilidade Geométrica trabalhamos com razões entre medidas de figuras geométricas de mesma natureza (medidas de comprimento ou de área ou de volume) e é entendida como um limite da probabilidade frequentista $P_{F,n}$, quando o número *n* de realizações do experimento se torna muito grande (JUNQUEIRA, WATABE e CAMPOS, 2011). Nesse sentido, até o momento, é animador o desempenho desses cursistas na resolução da Lista 3, portanto, devo prosseguir nessa direção e realizar outros experimentos sobre probabilidade geométrica.**

## Sexto encontro presencial

No sexto encontro presencial, a fim de compartilhar com todas as atividades realizadas nesse período inter-encontros presenciais, começamos discutindo os experimentos virtuais realizados e outros que programei trabalhar em sala. Como o tempo era um pouco exíguo, optei por realizar os experimentos virtuais em conjunto pelo meu computador conectado ao projetor (datashow). Assim, íamos realizando os experimentos acompanhados da discussão sobre os mesmos. Havia planejado trabalhar com os seguintes simuladores: Agulha de Buffon, Método de Monte Carlo, Roda da Fortuna (conteúdos digitais da Universidade Federal Fluminense) e Roda da Fortuna (conteúdo digital do Rived).

### Experimento Agulha de Buffon

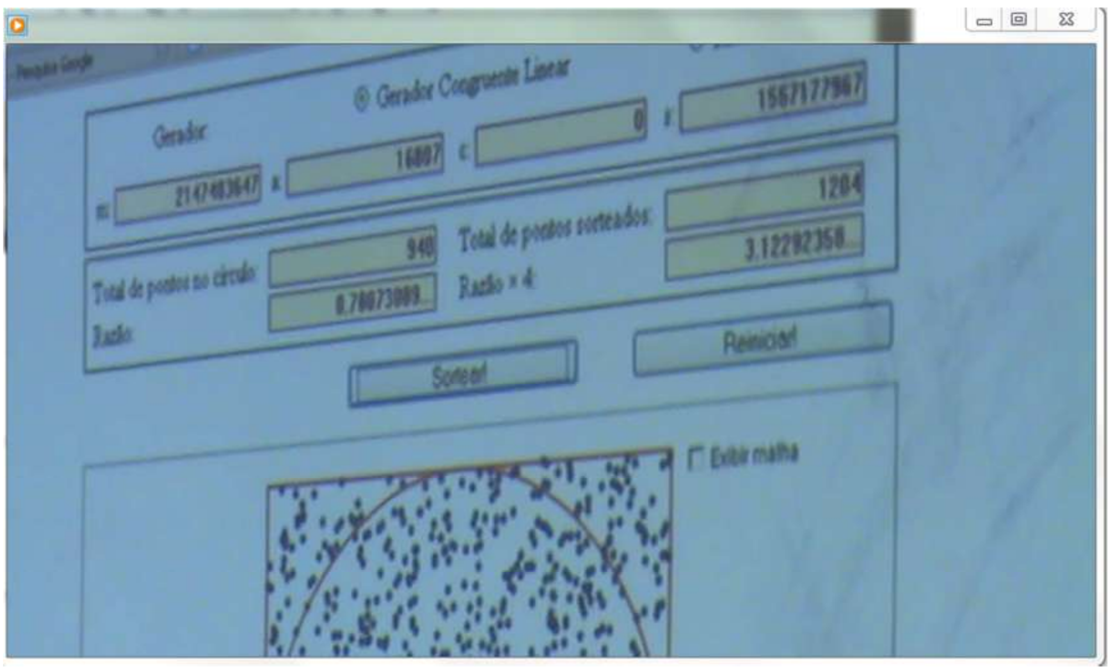
| |
|---|
| Sobre o experimento Agulha de Buffon questiono como se relaciona com o número π. [fazendo alguns sorteios na tela do simulador, ao parar está registrando π≅ 3,14342528]<br>**P**: Por que o resultado que está mostrando é uma aproximação do número π?<br>Respondem: é a razão entre as agulha que caem na linha e as que não encostam nas linhas, caem dentro das faixas.<br>**P**: Essa razão que dá π? [Concluem que dá o inverso de π] |

SA: Não, ainda falta multiplicar por 2.
P: De onde surgiu o π?
MA: É comprimento da circunferência...Pelo? (pensa) pelo diâmetro.
P: É uma razão, não? [Ressalto que essa razão dá um valor aproximado de π] Pergunto por quê? [Silêncio] Explico: Porque na prática é uma divisão entre dois racionais. Na verdade a prova da irracionalidade de π é uma demonstração matemática mais elaborada.
[Alerto para o cuidado de não induzir os alunos ao erro conceitual colocando "π=3,14" e digo que vou postar no AVA uma demonstração matemática do experimento frequentista da Agulha de Buffon convergindo para o número π, para quem se interessar]

**Experimento de Monte Carlo 2D**

P: Tinha também aquele outro experimento do Método de Monte Carlo. Vocês viram? O experimento simulava o quê? [Pensam um pouco e falam juntos: espalhavam os grãos]. Inicio o experimento na tela.
P: Pode ser um avião jogando sementes....reflorestamento. O que observam? Onde caem?
VD: Cai mais no centro.
P: E o que acontece com o valor da razão? É a razão entre o quê mesmo? [Veem na tela a interface do simulador e que a razão entre os pontos dentro do círculo e o nº de lançamento é igual aproximadamente a ¼ de π]
VD e VL respondem juntos: entre as áreas.
P: Entre as medidas de que as áreas? [Ficam um pouco em dúvida, então tento conduzir o raciocínio e aponto na tela a razão entre as áreas do círculo e do quadrado, r= $(A_c/A_q)$= ¼ de π].

[A câmera de vídeo focaliza a tela projetada]



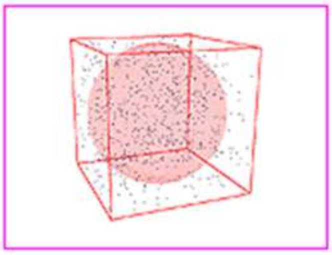
[Turma atenta, anotando, fazendo os cálculos].
**P**: Então é a razão entre a área do círculo e a área do quadrado? Mas tem que estabelecer alguma relação entre as figuras. Você tem que estabelecer o quê? Uma relação entre o círculo e o quadrado.
**MA**: o diâmetro do círculo é o lado do quadrado.
**P**: E o diâmetro é o quê? .....
**NA**: Ah! O diâmetro é duas vezes o raio.
**MA** fazendo os cálculos e VL conferido: Fazendo os cálculos. L=2r
$A_q = 4r^2$ , $A_c = \pi r^2$, logo: $A_c/A_q = \pi/4$.
**P**: Descobriram? Bom! Então o que é que é isto que calculamos? Probabilidade geométrica. Qual a diferença da probabilidade geométrica e as outras que vimos antes?
**LE**: Geometria é mais legal! [Todos riem]. **MA** fala algo inaudível
**P**: Na verdade, a gente trabalhava com uma contagem das possibilidades de um evento ocorrer dentre todas as possíveis do espaço amostral finito. Mas tinha uma condição, qual era mesmo? Desde que fossem equiprováveis cada evento simples. Chamo atenção: Precisa prestar atenção nesse detalhe que é fundamental. Mas aqui a gente está trabalhando com medidas, a razão entre áreas. Mas será que é só entre áreas?
[Uns respondem que sim, outros ficam em dúvida ou não souberam responder. Resolvo aproveitar a deixa e testar outro applet envolvendo sólidos e medidas de volume, afim de fixar melhor o conceito de probabilidade geométrica].

**Notei na apresentação desses dois experimentos (Agulha de Buffon e Método de Monte Carlo 2D) que tiveram algumas dificuldades, talvez por não terem familiaridade com simuladores virtuais, ou mesmo de compreender o que o simulador de fato estava mostrando. Por isso, durante o processo, procurei questionar no sentido de lavá-los a perceber o que estava ocorrendo. Pareceu-me que acharam uma novidade o fato de a razão, entre os pontos que caiam dentro do círculo e o total de pontos sorteados, ter uma relação com o número π. Poucos se manifestaram de forma mais atuante, outros ficaram atentos observando, mas percebi alguma dificuldade em estabelecer as conexões geométricas. Veremos mais à frente que essa percepção estava correta. Achei por bem, então, reformular o planejamento e introduzir outro simulador, que busquei online naquele momento, tanto pelos conceitos geométricos envolvidos (sólidos), quanto para ir exemplificando a probabilidade geométrica rumo à sua conceituação.**

Procuro o *applet* no mesmo site da UFF, o Método de Monte Carlo-3D e inicio o experimento. A interface do simulador mostra um cubo com uma esfera inscrita e os pontinhos preenchendo estes espaços. A questão é calcular a probabilidade de o ponto cair dentro da esfera.

**Experimento de Monte Carlo 3D**

Inicio o experimento. A interface do simulador mostra um cubo com uma esfera inscrita e os pontinhos preenchendo estes espaços. Como no exemplo anterior, exibe também o número de pontos sorteados, o número de pontos que caem dentro da esfera e a razão entre eles. Num primeiro momento, não mostro a parte superior da interface para fazer uma relação entre os dois casos desse experimento em 2D e 3D.



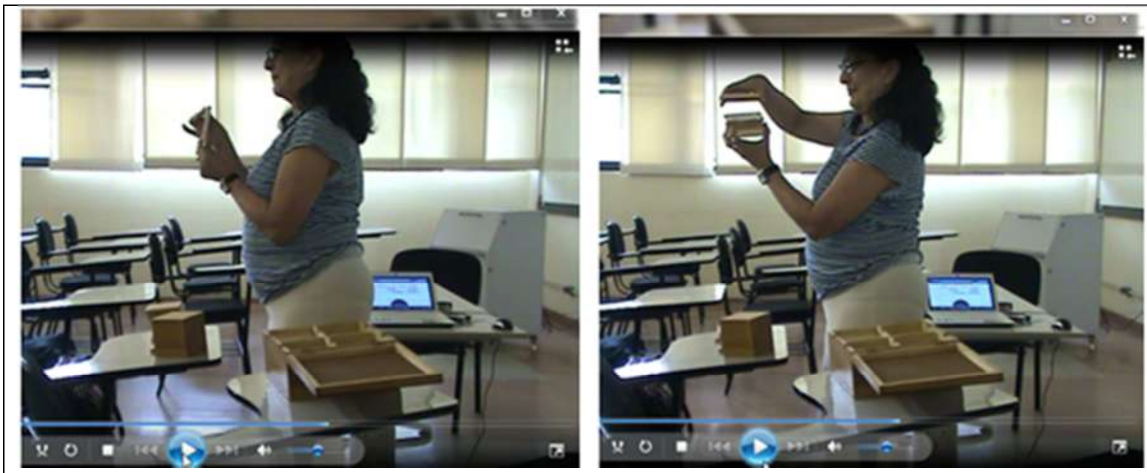
**P**: E aí? O que vai dar? Que razão será? Alguém sabe calcular? Vai dar um fator de π?
[Ficam pensando, alguns fazendo cálculos]
**P**: No outro exemplo a razão entre as áreas deu quanto mesmo?
**NA**: Deu π/4. [Pergunto para ela: E agora?] **NA** fala: agora vai dar 6... π/6.
P: É, por quê? Alguém sabe?
**NA**: porque são 6 faces.
**P**: Será que é por isso?
[**MA** está fazendo cálculos, muito ficam olhando, tentando adivinhar ou entender, alguns meio indiferentes]
**P**: É a razão entre áreas? Como no caso anterior?
**MA** é o primeiro a responder: Volumes. [Outros o seguem e repetem].
**P**: Isso, volumes. Entre quem? Quais sólidos?
Respondem juntos: cubo e esfera
**P**: Nessa ordem? [**MA** faz um sinal com a mão que é a ordem inversa] Continuo questionando: Alguém sabe calcular? Vai dar um fator de π? [Peço para calcularem quanto dá a razão entre os volumes]
**MA** responde: π/2.
**P**: Dá π/2? Tem certeza?
[Espero um pouco, percebo que estão em dúvida do quê ou como calcular. Tento encaminhar o raciocínio relembrando que, no exemplo anterior, tivemos que encontrar uma relação entre as figuras planas para encontrar a razão entre as áreas e, portanto, agora temos que encontrar uma relação entre os dois sólidos para achar a razão entre os volumes]
**P**: Que relação podemos estabelecer entre estes dois sólidos? [Refletem, mas ninguém responde, então dou continuidade] Não será a aresta do cubo? A aresta do cubo é o quê da esfera?
**MA** responde: duas vezes o raio.
**P:** Vamos trabalhar com esta relação. Quanto é o volume da esfera?

**MA** fala: $4\pi r^3$.
**P**: Tá faltando alguma coisa ai, não?
**MA** completa: 4/3
**P**: Ahhhh! $(4/3)\pi r^3$. [**MA** sorri, percebendo seu erro de cálculo e conclui]
**MA**: A razão dá π/6. [$r = V_e/V_c = \left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)/8r^3 = {}^{\pi}/_{6}$ ]
**P**: Muito bem! Mas ressalto que não é porque o cubo tem seis faces, mas sim, porque o cálculo resulta nisso.
[cursistas fazem e conferem os cálculos, demoram um pouco]. Falo com que qualquer hora vou pedir para provarem a fórmula do volume da esfera. Riem. Mas têm um pouco de dificuldade de finalizar os cálculos.
Alguém fala do cubo mágico. Digo que a demonstração do volume do cubo pode ser feita fatiando o cubo em lâminas. Outro cita o Material Dourado. Digo que é uma boa ideia, pode contar os cubinhos (unidade cúbicas) que preenchem o espaço do sólido, no caso um cubo.
**P**: Pensando em volumes, tem que medir com unidades de volume Nesse caso as unidades são cúbicas. Falo do conceito de medir, de preenchimento. E com material dourado dá para mostrar bem isto. Pergunto quem já usou Material Dourado para trabalhar com volumes. Ninguém se manifesta. **RO** fala que tem material dourado, sai para buscar e volta com o material. [Devo aproveitar o interesse manifesto e trabalhar o que for possível com o Material Dourado]

**Vemos nesse experimento dialogado que ficaram evidenciadas dificuldades em estabelecer relações geométricas e realizar cálculos de volume, reforçando minha impressão anterior. MA foi o que mais se dedicou em resolver, com algumas intervenções de outros cursistas. A maioria ficou observando, esperando os resultados e as conclusões. Disseram que acharam interessante o experimento, mas não se dedicaram muito em compreender o que estava subjacente a ele, o que pode ser verificado na fala de NA, referindo-se que a razão vai dar π/6, porque são 6 faces no cubo. Mesmo levando em conta que certo distanciamento observacional por parte dos cursista possa ser devido à novidade digital, conjecturo que têm dificuldades e/ou não têm muita prática, com geometria. Vejamos se trabalhar com material concreto pode ajudar a perceber melhor.**

Nesse momento, aproveitando o interesse, faço uma nova modificação no planejamento inicial e dedicamos algum tempo trabalhando com Material Dourado para o cálculo de volume de alguns sólidos geométricos (vide Figura 25).

**Figura 25** – Volume do cubo com Material Dourado (formadora em ação).



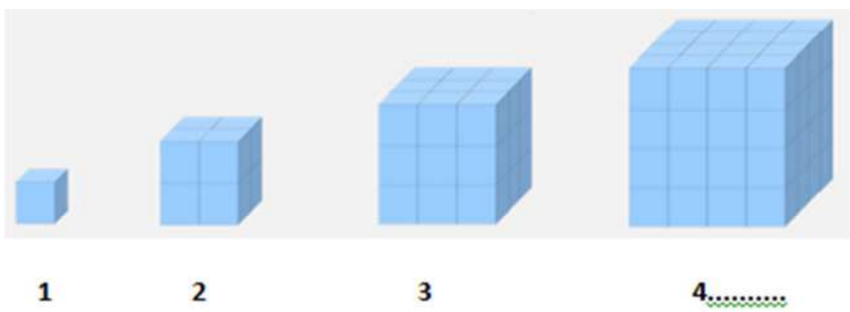
Fonte: captura tela da gravação em vídeo

Particularmente, procuro trabalhar a noção de volume como preenchimento do espaço definido pelo sólido. Discorro um pouco sobre isto e, no caso, mostro o preenchimento com cubinhos numa placa e o preenchimento com as placas para formar o cubo, monto alguns sólidos geométricos com os cubinhos, sempre questionando quantos cubinhos são necessários em cada caso.

Aproveito para passar uma atividade (na hora fiz um desenho no quadro que não foi mostrado no vídeo):

Considere a seguinte sequencia abaixo e responda:

a) Quantos cubos tem o décimo termo da sequência?
b) Quantos cubinho são necessários para formar o décimo primeiro termo, a parit do décimo termos? (sugestão: resolva com uso do Material Dourado)

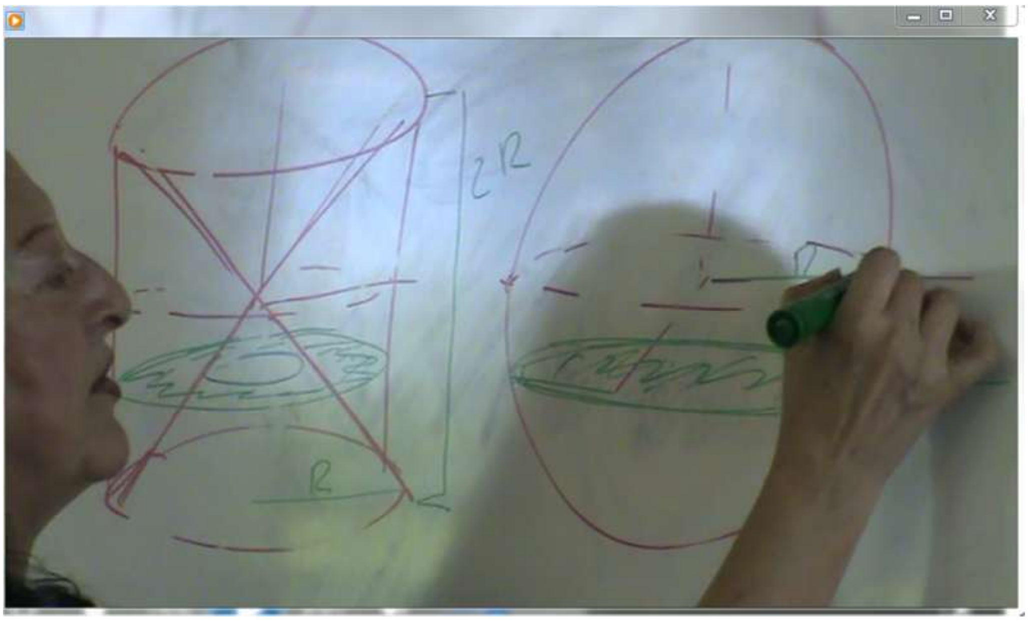



Fonte: pesquisadora

É claro que o item (a) foi elementar de resolver, mas a ideia principal era resolver o item (b) usando peças do Material Dourado, para dar a ideia de preenchimento do sólido para cálculo de volume. Como já sabiam os volumes dos cubos, a questão foi dar um tratamento diferente. Para isso, denominando respectivamente os termos da sequência de cubo1, cubo2, cubo3 e assim sucessivamente, tivemos que acoplar ao cubo10 os seguintes objetos do Material Dourado: 3 placas 10x10 + 3 colunas 1x10 + 1 cubinho. Portanto foi necessários acrescentar (300 + 30 +1)=331 cubinhos aos 1000 cubinhos do cubo10, totalizando 1331 cubinhos para o cubo11, ou seja, o volume do cubo11 é 1331 unidade cúbicas. **A turma se mostrou mais participativa, talvez pelo uso inusitado com material conhecido, mas pareceu-me que este tipo de atividade está distante de suas práticas.**

Pensando ainda no tempo que demandaram para encontrar a razão entre os volumes dos sólidos geométricos da atividade Método de Monte Carlo 3D, decido investir um pouco mais no conceito de volume. Resolvo, então, falar do Princípio de Cavalieri.

**P**: Mas a gente pode também pensar em usar Princípio de Cavalieri, para cálculo de volume de alguns sólidos. Alguém conhece?
**MA** acena que sim [enquanto represento com as mãos]. Falo que pode ser usado no caso bidimensional e também unidimensional. **VL** diz que nunca ouviu falar. [Fico surpresa que nunca tenha ouvido falar, então resolvo abordá-lo].
Explico um pouco sobre o Princípio de Cavalieri, dizendo que ajuda a relacionar formas geométricas e compreender algumas fórmulas de volume. [Decido fazer a demonstração do volume da esfera, já que não costuma ser apresentada e trata diversas relações geométricas]
**P**: Vamos então calcular o volume da esfera usando o Princípio de Cavalieri. [Vou ao quadro e esboço um desenho, que não ficou muito bem feito, mas serviu para exemplificar].




Fonte: captura tela da gravação em vídeo

Seja sobre um plano α uma esfera Ɛ de raio R e um cilindro circular C, com raio da base R e altura H=2R. Do cilindro recorto dois cones equiláteros, de raio da base R, opostos pelo vértice, conforme indicado na figura, resultando um sólido que chamaremos de S. Um plano β, paralelo a α, a uma distância h do centro da esfera, determina seções transversais nos dois sólidos: um disco na esfera e uma coroa no outro sólido S. Se mostrarmos que estas seções transversais têm a mesma área, como os dois sólidos têm a mesma altura, então pelo Princípio de Cavalieri, os sólidos S e Ɛ terão o mesmo volume. Essa é a ideia da demonstração. Só falta mostrar geometricamente estas passagens.
**MA** explica que à medida que varia a altura diminui a área da coroa circular que corresponde à área do círculo na esfera nesse corte.
**P**: Isso mesmo! Vamos calcular a área do disco e da coroa? [Vou perguntando e encaminhando a demonstração]. Então observem: [peço para irem fazendo junto comigo]
Se denotarmos o raio do disco na seção da esfera de r temos, usando o Teorema de Pitágoras que $A_d = \pi r^2 = \pi(R^2 - H^2)$ e a área da coroa no cilindro é a diferença das áreas de dois discos, o maior de raio R, o mesmo do cilindro, e o menor de raio h, pois também por Pitágoras, o triângulo que se forma na figura é retângulo e isósceles e como dista h do centro do cilindro, seu outro cateto é também h, daí a área da coroa $A_c = \pi R^2 - \pi h^2 = \pi(R^2 - h^2)$. Sendo assim, a área do disco $A_D = \pi r^2 = \pi(R^2 - H^2)$, portanto são iguais. Logo o volume da esfera Ɛ, por Cavalieri, é igual ao volume do sólido S. Qual mesmo é o volume de S? Observem na figura.
**LE:** O volume do cilindro menos o volume dos dois cones.
**P**: Os cones são iguais? Observem a simetria da construção.
Alguém fala: Sim, são iguais.
**P**: Então podemos escrever que $V_S = V_{Ci} - 2\ V_{Co}$. Terminem vocês mais tarde essa demonstração, só falta os volumes, assim podem refazê-la para compreender melhor.
[Lembro ainda que dá para fazer experimentalmente essa demonstração e explico como é. Mas percebo que a turma já está se dispersando com tanta geometria, o desinteresse evidenciou-se nas expressões].
**P**: Quem dá geometria? [**MA** e **NA** levantam a mão]
**RO** comenta que tem professor que não sabe, que não gosta e daí não dá. Eu adoro geometria, diz. [Comento que faz tempo que não dou uma oficina de geometria, mas que sempre fiz isto e gosto].
**P**: Bom, vamos voltar para nosso tema, que tem a ver com geometria, e vamos trabalhar com um objeto concreto: uma roleta, especialmente construída.
Alguém diz que estou parecendo um mágico.
**VL** brinca: Roleta russa?
**P**: Não é roleta russa, é uma roleta divertida. [respondendo à brincadeira de **VL**]
[Retirando o material da bolsa e dizendo que vamos trabalhar com diversos objetos concretos].

**Procurei mostrar que podemos tratar o volume de alguns sólidos de outra maneira, no caso utilizando o Princípio de Cavalieri. Em particular, a demonstração do volume da esfera utiliza diversas relações geométricas, planas e espaciais e, além disso, tal tipo de**

**demonstração não costuma ser apresentada, por isso fiz os detalhes que achei mais relevantes, deixando apenas o final para concluírem. LE e MA foram o mais participativos, alguns cursistas ficaram atentos, outros nem tanto. Mesmo assim entendo ser relevante para a formação de professores fazer uma demonstração matemática mais cuidadosa. Todavia, pelas manifestações parece que geometria não é o forte da turma. Talvez isto não deva ser motivo de surpresa, apesar de lamentável, uma vez que pesquisas nesse campo indicam problemas de ensino e aprendizagem, que não vou entrar em consideração, apenas registrar, por fugir do foco desta pesquisa.**

Após discussão sobre geometria, que não estava programada a priori, mas entendi como necessária, retomei o planejado e realizamos diversos experimentos com objetos concretos: uma roleta construída para ser usada em uma sequência de ensino especialmente elaborada para este fim (extraída e adaptada da Oficina ministrada no XIII CIAEM pela pesquisadora); um tabuleiro com peças de Tangram para realizar algumas atividades de probabilidade geométrica, utilizando alvos que exploravam as noções de reunião, intersecção e complementar de conjuntos (superfícies alvos criadas com as peças do Tangram), como também de probabilidade (geométrica) condicional.

**Experimento com a Roleta**

A roleta foi construída de um relógio comum de parede, colando no mostrador do relógio uma roleta, desenhada com o software *Geogebra*, subdividida em setores coloridos de diversas maneiras, e adaptando apenas um dos ponteiros (seta) de forma a girar, com um mínimo de resistência, a um toque (‘peteleco’) do dedo. Vide Figura 26 e Figura 27.

As roletas fizeram sucesso entre os cursistas que se interessaram e perguntaram como foram construídas. Expliquei em detalhes e desconstruí uma para mostrar melhor. Os cursistas puderam explorar à vontade e se divertiram ao fazê-lo.

**Figura 26** – Imagem de roletas construídas[198] especialmente para o MPG.


Fonte: capturas tela da gravação em vídeo

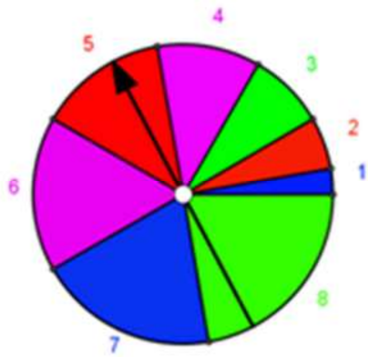
**Figura 27** – Imagem de outra roleta construída especialmente para o MPG


Fonte: capturas tela da gravação em vídeo

[198] As roletas foram construídas pela pesquisadora com a ajuda da colega de doutorado Maria Lucia Tavares de Campos, inspirada na experiência ministrada por nós numa oficina no XIII CIAEM, em 2011.

Seguem algumas atividades trabalhadas coletivamente com a turma

[Mostro uma roleta colorida, dividida em 12 partes iguais, sendo que três delas, não justapostas, são em cor azul].
**P**: Qual a probabilidade da seta para na cor azul? Falam: 1/3, 1/4
**P**: Afinal é 1/3 ou 1/4? Confirmam em coro: 1/4.
Exibo outra roleta dividida em setores coloridos, mas não em partes iguais. [uma roleta cujos setores em azul, não justapostos, aparentam compor 1/4 do círculo, como ilustra a figura abaixo].

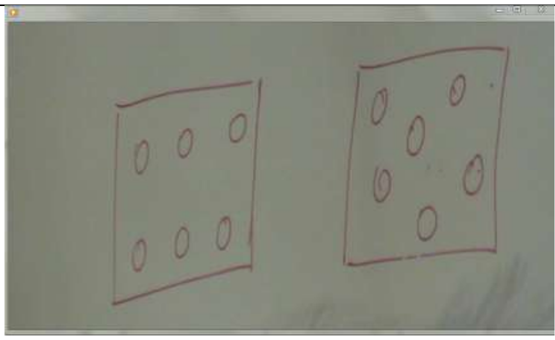



**P**: E nessa roleta aqui, podemos dizer que a probabilidade da seta parar na cor azul é 1/4? [Olham com certo estranhamento, ficam em dúvida, alguns falam que sim, outros ficam pensando]
**P**: No outra eu podia dizer, pois era uma contagem apenas, não? (divisão em partes iguais). E nessa? Podemos apenas contar os setores, somando os de mesma cor? Ou precisamos saber outra medida?
MA fala: precisamos saber a área
**P**: Isso mesmo! Aqui temos que calcular a área dos setores, que é determinada pelos ângulos que dividiram a roleta. [Explico como a Parecem interessados, mas um pouco surpresos]
**P**: Querem saber como foi feita a divisão dessa roleta? [Dizem sim em coro]. Na verdade esta roleta (círculo) foi dividida em 8 partes, com ângulos internos dos setores formando uma progressão aritmética de razão r=10°, portanto, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° e 80°, cuja soma dá 360°. Gostaram? [Acenam com a cabeça que sim, demonstram interesse e surpresa].
**LE** fala: foram vocês que fizeram a roleta. Legal! [Alguns cursistas parecem 'encantados', dizem que a construção da roleta foi engenhosa. Perguntam se há outra divisão que satisfaz uma progressão. Peço para eles próprios refletirem sobre isto e digo que podem testar e até demonstrar matematicamente]
**P** (reforçando): Em ambos os casos estamos tratando de probabilidade geométrica, a diferença é que na roleta, dividida em partes iguais, o cálculo da área de determinada cor se restringe a uma simples contagem e a probabilidade é a razão ente o número de setores da cor solicitada e o número total de divisão. Numa roleta como essa aqui, que não é dividida em partes iguais, a probabilidade (geométrica) de sair determinada cor precisa ser calculada pela razão entre a área dessa cor e a área total da roleta, que é a área total do um círculo. [explico que não perdemos generalidade se considerarmos o raio do círculo unitário]. Além disso, se alternarmos umas cores com outras, estaremos trabalhando com probabilidade da união, já que uma cor escolhida

pode não estar em subdivisões justapostas. Também podemos explorar o evento reunião de mais de uma cor.
**P** (continuando): Outra possibilidade mais caseira e possível de se usar em sala de aula é usar uma roleta de papel cartolina, um clip e utilizando, por exemplo, um lápis para ser colocado verticalmente sobre o centro da roleta de forma que o clip gire que se der um 'peteleco' nele. [um cursista fez o teste, funciona]

**P** (pegando outra roleta, como na figura abaixo): E nessa roleta aqui, qual é a probabilidade da seta, depois de girar, parar na cor verde?


**VL** pergunta se não fica mais fácil 'pegar' dois amarelos juntos? Pergunto à turma: faz diferença?
**LE** e **MA** respondem juntos: Não
**P** (ainda insistindo): É maior a área se justapormos ou é a mesma área se deixarmos as duas partes de mesma cor em separado, alternadas por outras? Todos respondem: é a mesma área. VL ainda questiona.
**LE** comenta: o olho muda! Parece maior, mas é a mesma, porque as áreas de cada subdivisão são todas iguais.
**VL** comenta: tira o risco do desenho.
**LE**: Não é para tirar o risco, são as subdivisões.
**VL**: Mas tira! **LE** fica firme: Mas não é para tirar (enfática!)
**MH** fala: Daí as áreas ficam diferentes. VL aponta afirmativamente para ela.
**MH**: Mas daí você tem que lavar em conta outra coisa, que é o ângulo de cada um (cor).
Vejo que pode estar havendo certa confusão. Lembro que podem estar associando a ideia de 'área úti'l em vez de área. Pergunto se alguém sabe explicar o que é a ideia de área útil.
Dou um exemplo: imaginem que temos dois pátios iguais (de mesmas dimensões) num colégio, ambos cimentados e com 6 buracos iguais para canteiros,dispostos de formas diferentes. Faço um representação no quadro.



Fonte: capturas tela da gravação em vídeo

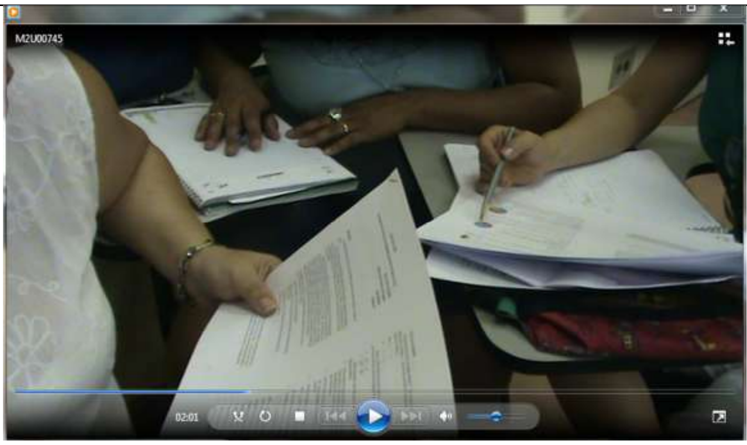
**P**: As áreas cimentadas dos dois pátios são iguais? [Perguntam se as medidas são as mesmas, respondo que sim. Ficam um pouco em dúvida com a minha pergunta]. Insisto, mudando a pergunta: Se tivermos de construir um desses pátios na escola, qual parece mais aproveitável? O da esquerda ou o da direita?
**LE** fala: o primeiro. [Mas os outros ainda parecem não ter percebido ou entendido a pergunta].
**P**: E se as 'bolinhas', ao invés de canteiros, representassem colunas (a base delas)? A área dos dois pátios é igual, mesmo com as colunas, não? [Respondem que sim]. Ocorre que às vezes se pensa na ideia de área útil, aquela que você pode utilizar melhor para alguma coisa. Qual delas? Respondem: o da esquerda.
**P**: Reforço, essa é a ideia de área útil, não matematicamente falando, pois matematicamente as áreas são iguais, não é?
Pergunto a **VL** e **MH**: É isso talvez que vocês estivessem pensando? [**VL** diz que sim, **MH** diz que não. Como falam juntos, a turma toda ri].
**P** (dirigindo-me à **VL**): Penso que era isto que você estava pensando, mas em termos de medida de área e de probabilidade geométrica não faz diferença. E se retiramos o risco que determina a divisão da cor amarela, também não faria diferença, pois seria um setor correspondente à justaposição de duas partes iguais a todas as outras. Mas isto teria que ficar claro, na indicação do ângulo.
**MA** pergunta sobre a indicação dos ângulos. Falo que escrevemos para facilitar a leitura da roleta. **MA** comenta que a soma dos ângulos tem que dar 360°. Confirmo que sim e repito alto para todos.
**P**: Agora que já 'brincaram' bastante com a roleta, vamos resolver em grupo uma sequência de atividades envolvendo jogo da roleta.

**Percebe-se, além da animação da turma com essas atividades, que na discussão evidenciaram algumas dificuldades em estabelecer as relações geométricas entre ângulos internos dos setores circulares e suas áreas. Em particular, em calcular a probabilidade geométrica da união de setores, quando não estão contíguos. Nessa direção, é necessário realizar outras atividades envolvendo estes conceitos e destacar bem quando a probabilidade geométrica exige mais do que uma simples contagem. Para isso, tenho um recurso preparado que resolvo logo por em ação.**

Lanço mão de uma lista complementar[199] que havia levado – caso fosse possível trabalhar com ela em sala –, com uma sequência de atividades envolvendo jogo da roleta. Contém algumas informações iniciais e 3 sequências de atividades com uso de roletas desenhadas. Peço para formarem grupos, distribuo uma lista por grupo, e oriento para fazerem primeiro as atividades 1 e 3, que não dependem de *applet* (Roda da Fortuna), depois poderão resolver a atividade com uso do *applet*. Aviso também que essa é a nossa Lista 4 e será postada no AVA para todos. Damos um tempo para trabalharem em grupo, se avançarem bem, discutimos coletivamente.

Câmera de vídeo focaliza um dos grupos trabalhando (Figura 28).

**Figura 28** – Grupo resolvendo a Lista 4



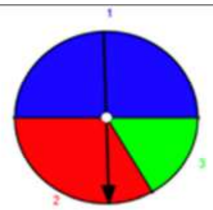

Fonte: capturas tela da gravação em vídeo

Uma síntese da discussão nesse grupo, que foi o único a ser gravado:

**MH** lê a atividade 1 (que tem uma série de itens). Discutem o primeiro item sobre como construir uma roleta 'democrática' de três setores. Concordam que os três setores teriam que ser iguais, ou seja, teriam que dividir a roleta em ângulos iguais de 120°. **NO** reforça: Reforça: 1/3 de probabilidade de cada cor. [O segundo item também foi resolvido sem dificuldade. Já o terceiro item demandou mais tempo de discussão].
**MH** lê o terceiro item da atividade 1 e discutem a resolução. O item é o seguinte:

[199] Essa lista foi extraída de uma sequência de ensino utilizada na oficina do XIII CIAEM, ministra da por mim e pela colega Maria Lucia Tavares de Campos , em junho de 2011, em Recife-PE.

Se num dos setores circulares dessa roleta, a probabilidade do ponteiro parar nela é $\frac{1}{8}$, qual é o ângulo central desse setor. Dê possíveis probabilidades para os outros dois setores e os respectivos ângulos centrais.



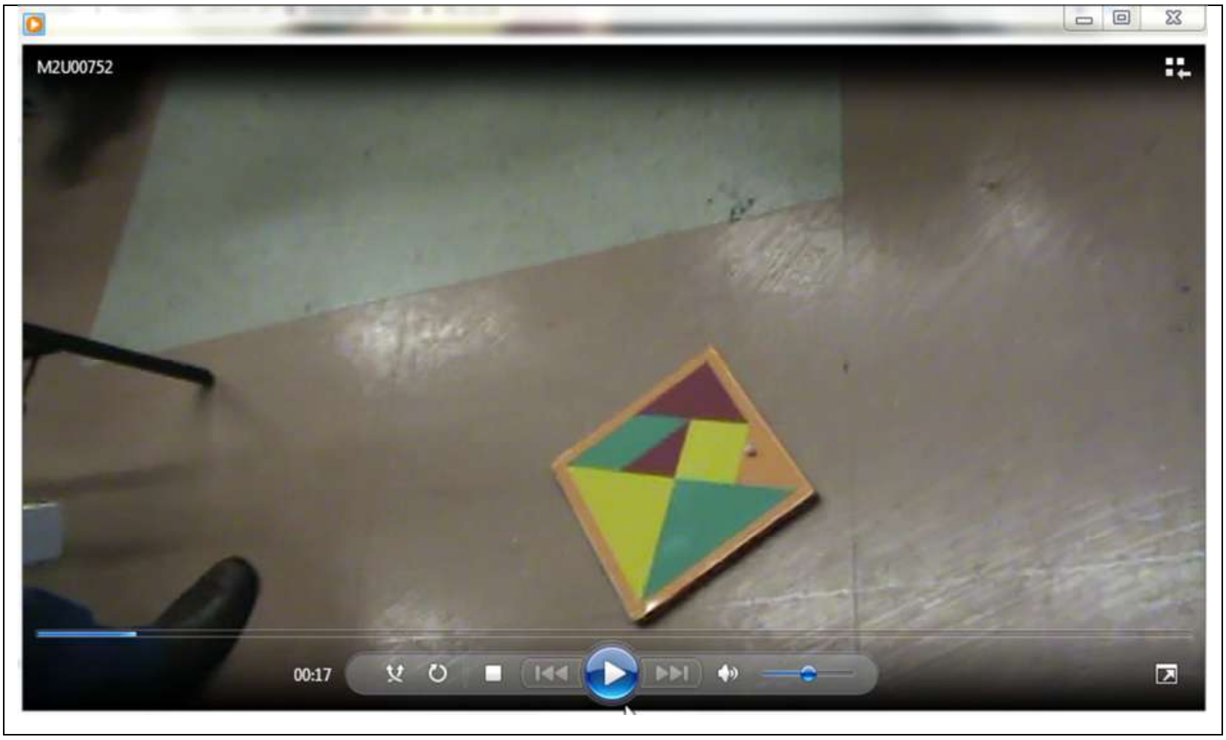
**MH** (explicando seu raciocínio): Então vamos lá. Eu sei que o ângulo central é 1/8, então é igual a 360/X. [os outros cursistas vão escrevendo]
**MH** (se corrigindo): Desculpa, o X não é embaixo. [e aponta para a escrita da colega, sendo que demorou algum tempo para se acertarem]. Vamos resolvendo: então o meu X é 360/8 [conta alto 8, 16, 24, 32 ?]. Então o meu X vale 45 graus. Quanto tá sobrando aí? Tá sobrando 315 graus. Daí a gente chuta dois valores. Vamos falar que um é 120? Assim a gente já fica com os próprios 1/3. [Pensam alto contando, percebem que dessa forma não dá certo].
**MH**: Vamos fazer 135. [Contam...] Então a gente teria um arco de 135 e outro de 180. Ele mandou escolher. Pode colocar qualquer um e depois faz a diferença.
**NO**: E se é de 180, então a probabilidade é ½, não é? [É respondem].
**MS**: E o de 45 tem probabilidade 1/8. [Chegaram ao resultado correto]

**Só houve tempo durante o encontro de resolverem alguns itens da primeira atividade da Lista 4, dentre estes o item acima foi o que demandou mais tempo de discussão, mas conseguiram por fim resolver na interlocução com os colegas. Causa certa estranheza o fato de, após encontrarem o ângulo interno do setor verde, optarem por 'chutar' dois valores para somar 315°, sem atentarem logo pela figura que um dos ângulos é 180°, o do setor azul, mesmo que depois tenham concluído corretamente.**

Tempo para um intervalo, interrompemos a resolução em grupo que depois será finalizada no AVA. No segundo momento do encontro presencial, como não houve muito tempo para adiantar a resolução da Lista 4 e também por notar a turma um pouco cansada, resolvo apresentar outro experimento com objeto concreto, algo mais lúdico e mais leve para se trabalhar nestas circunstâncias e ainda dentro da temática do encontro.

Mostro um Tangram que havia levado para o caso de precisar usar como alternativa. A ideia é pensar no Tangram como um alvo. Lembro que podemos pensar no problema do passarinho (vídeo do primeiro encontro presencial), ou num paraquedista que deve pousar num alvo escolhido entre as peças do Tangram. O problema é encontrar uma bolinha (para ser o paraquedista) que não 'pipoque' no alvo. Precisa ser pequena, mas tem que cair e ser amortecida na queda. Deram várias sugestões, testamos, por fim, improvisamos fazendo uma bolinha de papel, que deu mais certo. Pus o Tangram no centro da sala e vários cursistas tentaram acertar o 'alvo'. Nesse caso a pista de pouso era todo o Tangram e o experimento era frequentista, acertar ou não o alvo (Figura 29).

**Figura 29** – Simulando paraquedista atingindo o alvo.

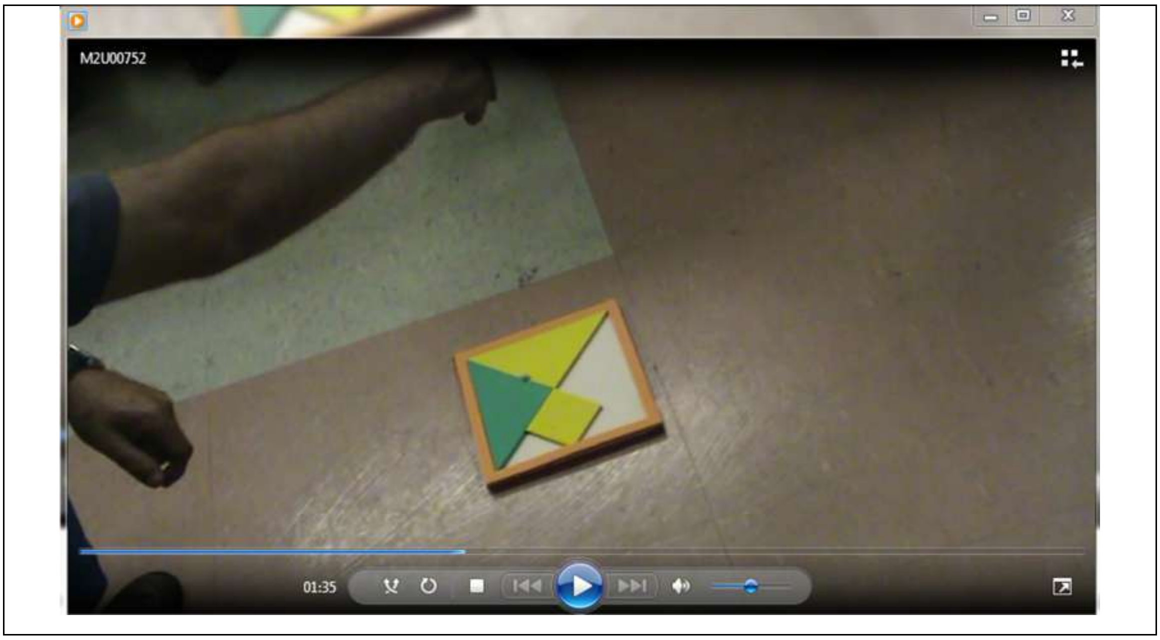



Fonte: capturas tela da gravação em vídeo

A turma ficava em volta, alguns se alternavam para tentar, outros só acompanhavam, contando os acertos e torcendo. Pareciam crianças no recreio.

Propus outro desafio. Retiro algumas peças do Tangram e proponho: Suponhamos que estamos numa etapa de um torneio de paraquedismo. A pista de pouso é o quadrado grande dentro da margem e digamos que o alvo agora é o amarelo da pista de pouso (Figura 30). Só passará para a próxima etapa do torneio aqueles que atingirem o alvo nesta etapa. Vamos calcular a probabilidade de um paraquedista seguir para a próxima etapa do torneio.

**Figura 30** – Pista de pouso e o alvo dos paraquedistas




Fonte: capturas tela da gravação em vídeo

**As atividades com o Tangram foram só exploratórias. Mas era importante mostrar outras possibilidades de trabalhar probabilidade geométrica (como também do uso do Tangram, que é um recurso familiar para os cursistas). Além disso, era necessário usar o tempo restante do encontro com uma atividade mais leve, pois os cursistas mostravam-se cansados, uma vez que o encontro tinha sido denso, com atividades variadas, alternando simuladores, demonstração, trabalho em grupo e discussão dialogada, abordando e articulando diversos conceitos geométricos e probabilísticos. Pelo menos consegui em tempo abordar, mesmo que de forma elementar, com as primeira noções, a probabilidade geométrica, que era uma das metas originais do MPG.**

Termina o tempo do encontro. Falo que vou postar no AVA uma sequencia de atividades usando o Tangram para quem quiser fazer. Lembro a turma que o próximo e último encontro será na semana seguinte, dado o adiantado do ano, e que faremos num primeiro momento uma sistematização dialogada sobre o conteúdo trabalhado no MPG e, após, uma comemoração de final de módulo e final de ano. Solicito também que finalizem as atividades faltantes e postem no AVA.

## 6.7 Sétimo encontro

- **Pauta:** Discussão das atividades da Agenda 8 – Lista 4; realização de experimentos sobre probabilidade geométrica (em sala e online): roleta (concreta e virtual) e alvos com Tangram; sistematização dos conceitos trabalhados; encerramento e confraternização.

Entre o sexto e sétimo encontros presenciais tivemos apenas uma agenda.

**Agenda 8:** Vamos dar continuidade ao que tratamos no Encontro Presencial de 01/12/2011, preparando-nos para o próximo e último Encontro Presencial do módulo em 08/12/2011. Só para recordar o que vimos: trabalhamos com objetos concretos, como a Roleta, o Trangram e até o Material Dourado; trabalhamos com os *applets* Agulha de Buffon, Método de Monte Carlo, Roda da Fortuna (conteúdos digitais da Universidade Federal Fluminense-UFF) e começamos a trabalhar uma sequência de atividades baseada no jogo da roleta.

Nessa semana as atividades solicitadas foram: finalizar e postar no portfólio a resolução da Lista 4 iniciada no encontro anterior; participar do Fórum>Lista 4, com comentários sobre sua resolução.

**Comentários do Fórum>Lista 4**

**P**: Neste fórum vamos trocar ideias e tirar dúvidas sobre as atividades da Lista 4, incluindo os experimentos. Penso que depois do nosso Encontro Presencial de 01/12/2011, avançamos bastante no nosso estudo de Probabilidade Geométrica, trabalhamos experimentos com objetos concretos e digitais, além de atividades da lista que receberam e que aqui estamos denominando de Lista 4. Aguardo os comentários de vocês. Participem!
**VA**: Infelizmente não pude participar, mas estudei sobre as agulhas de Buffon, no caderno do professor 9º ano. Obrigada e sei que podemos aplicar em várias séries e momentos.
**VD**: Ao terminar a atividade da lista 4, tive dificuldade na atividade 3, e quanto a atividade 1 e 2, da roleta, achei interessante pois daria para aplicar na sala de informática com os alunos do ensino médio, acho que eles iriam gostar muito pois o jogo e gostoso e eles iriam entender melhor sobre o tema de probabilidades.
**P**: Oi **VD**! Não se preocupe, no Encontro presencial de amanhã podemos discutir essa questão. Que bom que você já fez seu comentário aqui no fórum, assim evidencia as dúvidas que surgiram e orienta melhor o que deve ser discutido coletivamente.

**A participação no fórum foi pequena, mas importante. VA mostra atenção e responsabilidade: justificou sua ausência; preocupou-se em realizar o experimento feito**

**no encontro comentando sua viabilidade de aplicação em sala de aula. VD comenta sobre sua resolução, explicitando dificuldade em uma das atividades e o interesse em aplicar as outras atividades sobre roleta em sala de aula para ensino de probabilidade, usando sala de informática para alunos do Ensino Médio. Percebo que o lúdico proporcionado pelo trabalho com material concreto e simuladores virtuais torna-se um fator motivador para o ensino de probabilidade na prática em sala de aula, além de fornecer indícios de estarem olhando para o caráter pedagógico e tecnológico, necessários para desenvolverem o TPK, segundo Mishra e Khoeler (2006, 2009).**

Seguem algumas observações sobre a resolução da Lista 4 postadas no ambiente. A primeira atividade da lista tinha diversos itens, a maioria não apresentou dificuldade, entretanto destaco o item que evidenciou algumas dúvidas.

Agora a roleta deve ser assim, como na Figura 3:

Vamos jogar? Aqui estão as regras do jogo:

O **jogador 1** ganha 10 pontos se o ponteiro parar no vermelho.

O **jogador 2** ganha 16 pontos se o ponteiro parar no azul.

O **jogador 3** ganha 24 pontos se o ponteiro parar no verde.

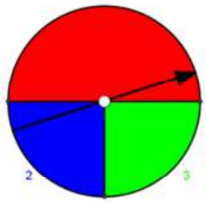


*Figura 3*: roleta 3

A regra é justa? Justifique.

- Que possibilidades tem cada jogador de ganhar pontos nesse jogo?
- Qual a probabilidade que cada um tem de ganhar pontos nesse jogo?
- Se uma partida tivesse 100 rodadas de roleta, quem poderia ganhar o jogo?

**VD** resolveu assim:

A regra é justa? Justifique.
***Resposta: Não é justa, o setor azul e o setor verde tem o mesmo ângulo.***
Que possibilidades tem cada jogador de ganhar pontos nesse jogo?
***Resposta: O jogador 1 tem maior posibilidades pois o setor vermelho tem 180***°.
Qual a probabilidade que cada um tem de ganhar pontos nesse jogo?
***Resposta: Jogador 1 a probabilidade é de 50% e os demais 25%***
Se a partida tivesse 100 rodadas de roleta, quem poderia ganhar o jogo?
***Resposta: O jogador 2 ou 3***

**NO** e **SA** resolveram assim:

Figura 3:

a) Vermelho = 180º = ½
Azul = Verde = 90º = ¼

Jogador 1 = 10 x 0,5 = 05 => 5/15 = 1/3
Jogador 2 = 16 x 0,25 = 04 => 4/15
Jogador 3 = 24 x 0,25 = 06 => 6/15 = 2/5
Total = 15

b) Jogador 1 => 50%
Jogador 2 => 25%
Jogador 3 => 25%

c) Jogador 3 => 2/5

**Enquanto NO e SA encontraram uma maneira de resolver a questão, levando em conta a pontuação dos jogadores numa primeira jogada, VD analisou apenas a proporção dos setores coloridos na roleta, não analisando a pontuação para cada jogador, exceto para a resposta correta de que a regra não é justa.**

A atividade 2 (Lista 4) incluía três simulações computacionais com o *applet* "Rodas da Fortuna"[200]. A interface desse simulador permite ao usuário escolher: o número de setores circulares; os ângulos centrais, dentro das possibilidades que as regras da probabilidade permitem; cores para os setores circulares; o número de experimentos. A primeira simulação solicita:

**Simulação 1**: Escolha em "número de possibilidades" o valor 5 e clique em atualizar. A roda terá 5 setores circulares.

**Responda:** Qual é o ângulo central de cada setor circular. A probabilidade do ponteiro da roleta parar em cada setor é a mesma? Justifique sua resposta.

Agora faça 50 experimentos. Para isso vá clicando no botão "Sortear", até completar 50 cliques e **responda**:

- Qual a probabilidade frequentista do ponteiro parar em cada um dos setores circulares?
- Qual probabilidade geométrica do ponteiro parar em cada um dos setores circulares? Responda na forma percentual.

200 O endereço do *applet* é: http://www.uff.br/cdme/rdf/rdf-html/rdf-br.html

- Para cada setor circular, compare os valores obtidos nos dois itens anteriores. O que você pode dizer sobre isso?

O que acontecerá se aumentar o número de experimentos? Teste! Aumente o número de experimentos, e observe os resultados das probabilidades frequentista e geométrica. A que conclusão você chegou?

Seguem algumas resoluções:

**NO** e **SA** resolveram assim:

SIMULAÇÃO 1:

a) Neste experimento o ângulo central é 72º. Sim a probabilidade do ponteiro em parar em cada setor é a mesma pois as razões são iguais .

50 experimentos:

1) Probabilidade frequentista :

Setor vermelho = $\frac{12}{50} = \frac{6}{25}$ Setor azul escuro = $\frac{13}{50}$ Setor verde = $\frac{9}{50}$

Setor azul claro = $\frac{8}{50} = \frac{4}{25}$ Setor amarelo = $\frac{8}{50} = \frac{4}{25}$

2) Probabilidade geométrica:

Setor vermelho = 360 x $\frac{6}{25}$ = 86,4% Setor azul escuro = 360 x $\frac{13}{50}$ = 93,6%

Setor verde = 360 x $\frac{9}{50}$ = 64,8% Setor azul claro = 360 x $\frac{4}{25}$ = 57,6%

Setor amarelo = 360 x $\frac{4}{25}$ = 57,6%

2) O setor de cor azul escuro teve freqüência maior , portanto percentual maior.
3) Estão se aproximando.

**VD** resolveu assim:

**Simulação 1**: Escolha em "número de possibilidades" o valor 5 e clique em atualizar. A roda terá 5 setores circulares.

**Responda:** Qual é o ângulo central de cada setor circular. A probabilidade do ponteiro da roleta parar em cada setor é a mesma? Justifique sua resposta.

***Resposta: O ângulo e de 72°, é a probabilidade da roleta é a mesma para todos os setores o que corresponde a*** $\frac{1}{5}$ ***= 20%.***

Agora faça 50 experimentos. Para isso vá clicando no botão "Sortear", até completar 50 cliques e **responda**:

- Qual a probabilidade frequentista do ponteiro parar em cada um dos setores circulares?

***Resposta: setor vermelho 14***
***Setor azul escuro 15***
***Setor verde 6***
***Setor azul claro 5***
***Setor amarelo 10***

- Qual a probabilidade geométrica do ponteiro parar em cada um dos setores circulares? Responda na forma percentual.
***Resposta: setor vermelho 28%***
***Setor Azul escuro 30%***
***Setor verde 12%***
***Setor azul claro 10%***
***Setor amarelo 20%***
- Para cada setor circular, compare os valores obtidos nos dois itens anteriores. O que você pode dizer sobre isso?
***Resposta: A porcentagem de um setor diminui e o outro aumenta.***
- O que acontecerá se aumentar o número de experimentos? Teste! Aumente o número de experimentos, e observe os resultados das probabilidades frequentista e geométrica. A que conclusão você chegou?
***Resposta: Aumentando o número de experimentos para 100 obtemos:***

| ***Setor*** | ***Frequentista*** | ***geométrica*** |
|---|---|---|
| ***Vermelho*** | ***22*** | ***22%*** |
| ***Azul escuro*** | ***23*** | ***23%*** |
| ***Verde*** | ***16*** | ***16%*** |
| ***Azul Claro*** | ***14*** | ***14%*** |
| ***Amarelo*** | ***25*** | ***25%*** |

***Conclusão: Quando aumentamos o número de experimentos a probabilidade vai se igualando cada vez mais.***

**NO, SA e VD fizeram a atividade que solicitava fazer experimentos frequentistas, encontrar a probabilidade geométrica e comparar os resultados. NO e SA relataram o experimento realizado, dando corretamente a probabilidade frequentista encontrada para cada setor, em 50 lançamentos. Entretanto não acertaram calcular a probabilidade geométrica dos setores circulares coloridos, mesmo afirmando no item (a) que era a mesma para todos, fizeram um raciocínio equivocado e até difícil de compreender no item (2), conseguindo resultados que somam mais que 100%, e nem se deram conta disso. Daí as demais respostas ficam comprometidas. Já VD relatou seu experimento em números absolutos e não em frequências relativas, fazendo isto na interpretação de probabilidade geométrica, o que é equivocado, evidenciando a não distinção entre as duas probabilidades, frequentista e geométrica, comprometendo também as respostas seguintes. As simulações**

**2 e 3 eram semelhantes a essa e foram detectados o mesmo tipo de erro e equívocos na resolução desses cursistas. Esse tipo de resolução evidencia que a noção de probabilidade geométrica não está ainda compreendida, tampouco a de probabilidade frequentista, causando confusão entre o que se está a calcular e até para que servem ou a que vem experimentos frequentistas de probabilidade.**

**Podemos identificar a dificuldade em estabelecer a relação frequência relativa e probabilidade, a exemplo do que constatou Coutinho (1994, p. 133) na análise de sua pesquisa de mestrado, na qual analisou as concepções espontâneas, de alunos de nível médio, em sequências experimentais de introdução desses conceitos num estudo comparativo Brasil e França, corroborando também com a conclusão de Fischbein (1991), Tversky e Kahneman (1971), de que certas concepções errôneas permanecem mesmo após a aprendizagem de noções básicas.**

## Sétimo encontro presencial

No sétimo e último encontro de 2011, revisitamos os conceitos que foram vistos durante o MPG, numa tentativa de sistematização diferenciada incluindo outros materiais para provocar uma reflexão, como a apresentação de um vídeo com o problema de Monty Hall; a apresentação de um texto sobre três problemas clássicos de probabilidade geométrica (usando *applets*), sempre numa discussão dialógica.

Por ser o último encontro do MPG, preparei-me para receber os cursistas em clima de final de ano, com uma música e, enquanto chegavam, íamos conversando de forma mais descontraída. Aproveito para comentar sobre e o ambiente virtual, segue um resumo dessa conversa.

**P**: Vi no ambiente que muitos não conseguiram acessar os applets das atividades. [Comento sobre alguns requisitos, como ter instalado na máquina os aplicativos Java e Geogebra, necessários para rodar estes softwares].
**VL**: Na escola não tem nem internet...[faz um gesto mostrando que não tem o que fazer].
**P**: Sem internet de fato não tem como usar os *applets*, mas os professores podem, mesmo assim, se interessar e saber usar para quando puderem fazê-lo. [Cursistas comentam com o colega do lado, mas suas expressões demonstram descrédito e quando se manifestam dão diversos argumentos sobre condições da escola, falta de

tempo, cumprir o currículo, demonstrando sua descrença e desânimo com a situação do ambiente profissional].
[Mesmo sabendo dos empecilhos e condições adversas ao bom desempenho da prática docente, tento desviar a conversa para não ficar só no campo das lamúrias]
**P**: Sei que nem toda escola tem as condições ideais, mas vocês em casa com internet poderiam ir se preparando para quando tiver internet na escola, ou até para fazer um trabalho, um gráfico, por exemplo, que pode ser usado nas aulas. Claro que para uso interativo cada tipo de software vai precisar de aplicativos.
**DA**: Mas não tem tantos outros que usamos? [referindo-se a vídeos]
[Explico que determinados softwares exigem alguns aplicativos que precisam ser instalados no computador. **DA** comenta que não conseguiu].
LE comenta: precisa também ver o tipo de máquina, pois algumas coisas não rodam, depende da máquina, etc. [diversos comentários sobre tecnologia, seu potencial e limitações]
LE: eu consegui abrir todos os links. [Peço para ela explicar para os colegas o que tem em sua máquina que permitiu acessar e rodar os *applets*]
[Os comentários ainda continuam por algum tempo e, em geral falam das dificuldades e/ou impossibilidades do uso da tecnologia em sala de aula].

**Relatei aqui esse trecho do diálogo por entender que reflete o pensamento deles sobre as condições adversas a que estão submetidos nas escolas que dificultam o bom desempenho docente, influenciando no estado de ânimo desses professores em relação ao seu desenvolvimento profissional e também certo descrédito de que possam haver mudanças nessa direção. Parece-me que esses professores-cursistas estão sofrendo do que Nóvoa (2007) chama de "transbordamento da escola", isto é, o excesso de missões que a ela são impostas e, consequentemente, aos professores, sem, no entanto, a contrapartida de garantia de condições adequadas para o desempenho profissional. É comum professores se apropriarem dessa demanda com generosidade e voluntarismo, o que por outro lado provoca certo conformismo, que pode ir "desde uma ligeira sensação de rotina até uma crise existencial face à prossecução da carreira" (Nóvoa, 1992, p. 42), causando uma imobilidade que vai de encontro à mudanças, quer sejam psicológicas (internas) ou sociais e profissionais (externas). Nóvoa (2005, 2007) aponta três paradoxos da profissão docente: o excesso de missões da escola e demandas da sociedade versus uma maior fragilidade do estatuto docente; a glorificação da sociedade do conhecimento versus o desprestígio com que são tratados os professores; a retórica do professor reflexivo versus a inexistência de condições de trabalho concretas.**

**Nessa direção, há ainda razões culturais e históricas que merecem ser consideradas. Entre elas, segundo Pombo (1993), a necessidade de encontrar uma resposta positiva para combater os seus efeitos na consciência dos indivíduos, quais são: desestruturação e perda de referências estáveis; a necessidade de fazer face à complexidade enquanto determinação constitutiva da civilização contemporânea, complexidade esta caracterizada pela contínua emergência de problemas urgentes (ambientais, sociais, psicológicos, tecnológicos, etc.) que reclamam respostas integradas; a necessidade de responder ao fato de a humanidade estar entrando em outra era da sua História - aquilo a que McLuhan chamou "a galáxia eletrônica", caracterizada pela crescente velocidade da informação e pela multiplicidade e complexidade dos meios técnicos de seu processamento. Época, portanto, que parece exigir que a humanidade aprenda a utilizar, rápida e simultaneamente, os seus vários sentidos, que seja capaz de considerar e integrar as muitas e diversas informações provenientes de diferentes locais, áreas, atividades, disciplinas, quer dizer, época que exige métodos interdisciplinares de trabalho, descoberta e aprendizagem.**

**Ressalto que, em princípio, não pretendia abordar também questões sobre profissão docente e o trabalho do professor, por não ser foco da pesquisa. Entretanto, achei relevante, sem me alongar muito nessa direção, fazer algumas considerações nesse sentido, pelas evidencias refletidas nessa discussão acerca da temática. Esta discussão, aqui resumida, se alongou bem mais, dada a necessidade se serem ouvidos em suas angústias acerca da profissão. Afinal, também se faz necessário um *redesign* na análise pretendida, para ser coerente e não me furtar da relação interacionista e mediadora estabelecida no processo.**

Voltando à temática do encontro presencial, e sensibilizada pelas dificuldades técnicas comentadas por parte dos cursistas, resolvo realizar um dos experimentos sugeridos como material de apoio complementar. Coloco na tela projetada do computador os links postados no AVA sobre os objetos digitais a serem utilizados. Um dos aplicativos que trata de probilidade pertencente ao conjunto de objetos digitais interativos do RIVED[201]. Abro o seguinte objeto digital (Figura 31):

[201] RIVED - Rede Interativa Virtual de Educação - é um programa da (outrora) Secretaria de Educação a

**Figura 31** – Simulador Probabilidade: A Matemática do Acaso


| **Tipo de Objeto** | Módulo Rived |
|---|---|
| **Titulo** | Probabilidade: A Matemática ao acaso |
| **Série** | 2ªsérie(Ensino Médio) |
| **Categoria** | Matemática |
| **SubCategoria** | Estatística, Probabilidade, Progressão aritmética |

**Objetivo:** Apresentar, de maneira formal, os conceitos básicos da Teoria de Probabilidade; incentivar o desenvolvimento intuitivo do estudante.

Guia do Professor | Download | Visualizar | Detalhar | Comentar

Fonte: http://rived.mec.gov.br/site_objeto_lis.php

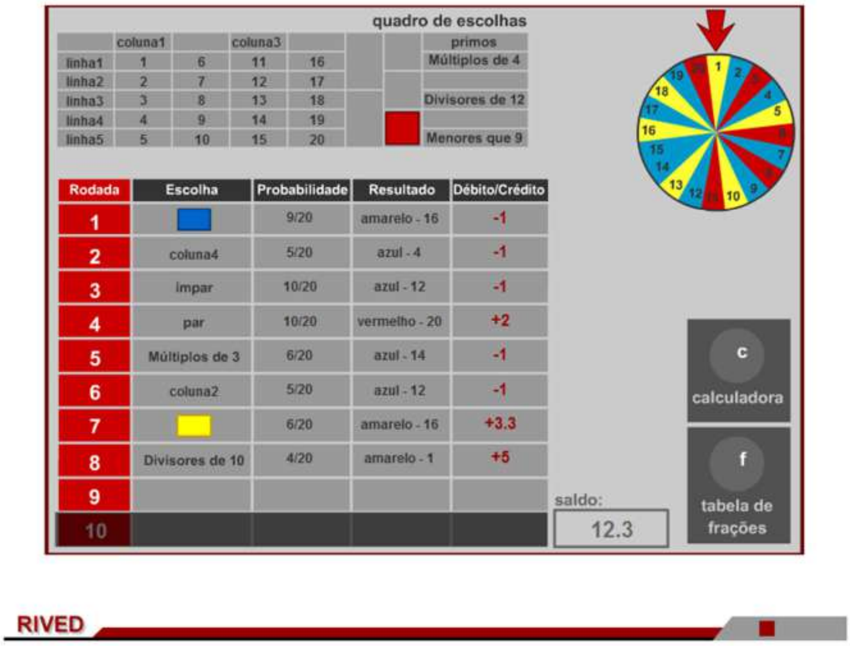
O objeto digital tem duas atividades, escolho a Roleta Mágica, por tratar do mesmo conteúdo que estamos abordando no momento, probabilidade geométrica, e para realizarmos coletivamente o experimento. Assim, pelo menos terão uma ideia do que se trata, além de realizarmos atividades que auxiliem apreender e constrir os conceitos de probabilidade geométrica, uma vez que foram percebidos equívocos na resolução da Lista 4 referente a este tema.

A interface deste simulador traz um quadro de escolhas, uma roleta subdividida igualmente em 20 partes coloridas, um quadro a ser preenchido com dados das rodadas do jogo, além de uma calculadora e uma tabela de frações a serem acessadas pelo usuário, conforme efetua o giro da roleta em cada rodada. O simulador inicialmente mostra exemplos de como joga, dá feedback ao usuário, que o ajuda a refletir sobre o que fazer, em caso de erro, e indica a pontuação, em caso de acerto. O jogo consiste em apostar em qual cor a roleta vai parar, depois de acionada para girar. Nesse sentido, cabe ao usuário, baseando-se no quadro de escolhas disponíveis e nas chances de cada cor exibidas na roleta, fazer a escolha que represente maiores chances de sucesso e, portanto, de ganhar pontos. Na Figura 32 uma imagem capturada da tela do applet, durante um experimento.

---

Distância-SEED/MEC, que produz objetos digitais de aprendizagem de domínio público.

**Figura 32** – Imagem demonstrativa da realização do experimento




Fonte: captura de tela do experimento Roleta Mágica[202] feita pela pesquisadora.

Durante a realização do experimento, solicitava à turma que me indicasse a opção do quadro de escolhas e questionava cada passo do jogo, na intenção de instigá-los a participar coletivamente. **LE** foi a que mais participou (ela já havia realizado em sua casa a outra atividade deste mesmo *applet*), alguns ficaram mais atentos, outros só acompanharam o desenrolar. Disseram que gostaram e que seria muito divertido trabalhar com os alunos, mas que achavam difícil fazer em sala de aula, por falta de condições técnicas (alegaram falta de computador, ou laboratório e internet). Diante disso, só jogamos duas vezes, até porque tínhamos mais coisas a ver.

**Entendo as dificuldades técnicas alegadas, sei que representam a realidade das escolas, notadamente as públicas, mas penso e lamento que esses argumentos tenham também servido de escudo para certa resistência com o uso da tecnologia para fins do ensino, não deixando perceber o potencial de aprendizagem para eles próprios. Afinal, estamos trabalhando com recursos variados, inclusive digitais, no desenvolvimento do MPG, voltado prioritariamente aos próprios cursistas, para incrementar seus repertórios de conhecimento e, num segundo plano, para o uso em suas práticas em sala de aula, como**

[202] http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/recursos/917/probabilidades/mat5_ativ1.htm

**consequência do aprendizado. Parece-me que se esta atitude reforça a impressão anterior de que se sentem assoberbados de tantos afazeres e sem estímulo para desenvolver outras habilidades que podem resultar em mais responsabilidades a cumprir.**

Retomo o planejamento inicial do encontro, vamos para a resolução da Lista 4, que me parece é a expectativa deles – resolver os exercícios deixados como tarefa. Além disso, poderia trabalhar sobre os equívocos que notei nas resoluções já postadas no AVA e isto era mais importante no momento. Aproveito as condições técnicas de que dispomos para poder realizar a atividade 2 da Lista 4 que requer um simulador Roda da Fortuna (conteúdo digital da UFF, descrito na agenda 8)[203] para sua resolução. Escolho a simulação 2 da lista que é a seguinte:

**Simulação 2:** Escolha em "número de possibilidades" o valor 5 e clique em atualizar.

A roda terá 5 setores circulares. Agora, faça escolhas no jogo de forma a obter setores circulares com ângulos centrais de $45^{\underline{o}}$, $60^{\underline{o}}$, $90^{\underline{o}}$, $45^{\underline{o}}$, $120^{\underline{o}}$ e com as seguintes cores: amarelo, azul, vermelho, verde, rosa, respectivamente.

**Responda:**

- Esses setores têm a mesma probabilidade de ocorrência na parada do ponteiro? Justifique sua resposta.
- Se sua resposta para a pergunta anterior foi não, diga qual setor tem maior probabilidade de ocorrência na parada do ponteiro e qual tem menor probabilidade. Explique como tirou suas conclusões.

Agora, faça 50 experimentos. Para isso vá clicando no botão "Sortear", até completar 50 cliques.

**Responda:**

- Qual a probabilidade frequentista do ponteiro parar no setor circular amarelo? E no setor circular rosa?
- Qual a probabilidade geométrica do ponteiro parar no setor circular amarelo? E no setor circular rosa? Responda na forma percentual.
- Compare os valores obtidos para o setor amarelo e para o setor rosa nos dois itens anteriores. O que você pode dizer sobre isso?
- O que acontecerá se aumentar o número de experimentos? Teste! Aumente o número de experimentos, e observe os resultados das probabilidades frequentista e geométrica. A que conclusão você chegou?

[203] Disponível em: http://www.uff.br/cdme/rdf/rdf-html/rdf-c-br.html

Segue a discussão que se deu sobre esta atividade:

**P**: O que esta atividade solicita mesmo? Temos que pegar 5 setores circulares: 45°, 60°, 90°, 45° e 120°. Verifiquem se a soma 360°. [Volto para o computador e para fazer o que a questão pede, os cursistas acompanham pela tela do projetor].
**P**: Os setores têm a mesma probabilidade de ocorre? [Respondem que não, pois ao ângulos são diferentes. Completo perguntando: e as áreas? Respondem que também. Peço ajuda para irem calculando e me ajudando a colocar as opções no simulador].
**LE** fala: 45° de 360° é 1/8.
**P**: Que cor que temos que colocar aqui. [Alguém fala: amarelo]
**P**: 1/8 é amarelo? [Respondem que sim]. Vermelho é quanto? VL responde: 90°, 1/4]
[Alunos me ajudam a colocar as cores adequadas, principalmente o VL que está bem interessado e participativo]
**SA (**discordando do trabalho que dá usar um applet): Até entrar no computador, até conseguir acessar o applet, dá muito trabalho. Eu sempre trabalho com régua e compasso, até para os alunos mexerem dentro do ângulo, com transferidor, manusear bem a medida. [Reforço a importância deste tipo de trabalho e digo que não são tarefas excludentes, pode trabalhar das duas maneiras].
**SA** insiste: quando trabalho com estatística, trabalho com gráficos de setores, ângulos, faço os alunos calcularem os ângulos. [Digo que ela poderia tentar uma vez com simulador, mas não insisto muito, pois não quero ativar novamente este tipo de discussão. Resolvo ignorar e volto para o computador para realizar o experimento frequentista]
**P**: Voltando, agora o que temos de fazer. Clicar em “Atualizar”. [Infelizmente clico errado e volta tudo, tenho que refazer. Assumo que errei, me desculpando, mas percebo que **SA** me desconcentrou].
**VL** diz logo solidariamente: Vamos lá! [E repete para mim as cores escolhida para cada divisão em setores].
Finalmente o experimento ocorre. [**VL**, **LE** e **NA** estão atentos, mas parece que nem todos estão interessados].
**P**: Porque temos que repetir o experimento 50 vezes [o que o simulador faz rapidamente]. O que queremos com isso?
**LE**: É para ver a sequência de frequências.
**P:** Que probabilidade é esta?
**LE**: frequentista.
[Resgato o que vimos no início do curso, evitando dar logo uma fórmula e fazendo um experimento, para que o aluno vivencie. Reforço que trabalhando dessa forma, favorecemos desenvolver o raciocínio probabilístico. Se tiver a oportunidade de trabalhar num laboratório, pode usar um simulador que permite realizar um número grande do experimento aleatório para comparar com a probabilidade clássica. Outra maneira é usar uma roleta, como fizemos no encontro passado. Pego a roleta para mostrar aos que não estiveram presentes no encontro anterior]
**SA**: E se agente não tiver o computador, a gente faz o quê?
**P**: Construímos uma. [Lembro-me que **SA** não esteve no encontro passado, então vou pegar a roleta. Mostro a roleta para todos e reafirmo que dá para fazer em qualquer sala de aula, com cartão e um sistema de seta que gira].
**LE**: Mas se o ângulo for muito pequeno? [Digo que não tem problema, só se for de

construção da roleta]
**P**: Mas não precisamos construir a roleta com ângulo muito pequeno. Porque perguntou?
**LE**: Ah, porque a probabilidade é pequena.
**P**: Sim, mas isso não é problema. Que probabilidade é essa mesmo?
**LE**: geométrica
**P:** Isso mesmo. E para um ângulo muito pequeno o que acontece?
**LE**: A área é pequena.
**P**: Isso, a área é pequena e a razão fica o quê?
**LE**: Pequena.
**P**: Isso. O aluno estaria ali confirmando isso, não é? Tudo bem. Mas é conveniente escolher ângulos adequados para não dificultar nem na construção da roleta, nem no cálculo da probabilidade. O importante é o raciocínio utilizado. [MA chega atrasado e se desculpa]
**NA** comentando sobre a simulação 3: Parece que a maior probabilidade, numa primeira impressão pode dar o de 80°.
**P**: Sim, pode dar? Mas em termos de probabilidade frequentista será que isto vai dar, vai tender para a probabilidade clássica? Temos que distinguir a probabilidade geométrica do experimento frequentista que deve tender para o valor da probabilidade geométrica, quando repetido um número grande de vezes. [Falo que vou deixar o ambiente virtual aberto mais tempo para quem não teve tempo de fazer, possa finalizar as tarefas].
**LE** fala que ficou em dúvida com a questão [da atividade 3]: Dado que o ponteiro não parou num setor circular de cor verde, qual a probabilidade dele ter parado num setor circular de cor azul?
**P**: Quando a gente fala 'dado que' a quê nos referimos?
**LE**: É isto mesmo que quero saber. [Riem, alguém fala: condicional]
**P:** Isso, probabilidade condicional. Então podemos pensar em excluir o setor verde e ver qual é a razão entre as áreas dos setores de cor azul e a área do círculo que sobrou, excluídas as partes em cor verde.
**LE**: Ah, é isso? [Confirmo]

**Com certa luta consegui realizar o experimento, não foi muito fácil orquestrar diversas tarefas ao mesmo tempo. Era importante fazê-lo para retomar algumas ideias que não haviam ficado bem compreendidas, como a distinção entre a probabilidade frequentista e a geométrica e reforçar porque realizamos experimentos aleatórios frequentistas. Não dá para saber se construíram esses conceitos, mas pelo menos tentei. SA mostrou bem sua resistência com o uso de objetos virtuais, que é compreensível, uma vez que já vinha demonstrando sua pouca familiaridade com o uso do computador. Parece que dificilmente conseguiria romper com sua resistência em tão pouco tempo. Sei que outros cursistas também têm pouca familiaridade com a plataforma virtual, tanto que pouco participaram nela, mas não se manifestaram de forma tão incisiva com SA** .

Seguimos para mais uma atividade. Como ainda percebi a dificuldade com probabilidade condicional, me vem uma à lembrança um probleminha do avião, mas não me recordo bem dos dados. Procuro em meus guardados, pois o contexto do problema é distinto dos até então abordados e não quero repetir os já conhecidos. Encontro o problema, escrevo no quadro e peço que resolvam:

Um avião tem uma rota de voo entre duas grandes cidades. Se a probabilidade do avião sair no horário é 84% , a probabilidade dele chegar no horário é 83% e a probabilidade do avião sair e chegar no horário é 74%, encontre a probabilidade do avião chegar no horário, dado que saiu no horário

A novidade é que a questão não tratava nem de dados, nem de urna ou de roleta, e isto causou certa surpresa. A dificuldade que tiveram foi de montar a questão e de saber exatamente o que se pedia. Dei um tempo pra fazerem, enquanto respondi algumas perguntas e dúvidas que surgiram. Então monto o problema e peço para fazerem os cálculos e me falarem que copio no quadro. A turma toda se interessou em resolver e o clima foi bem diferente do demonstrado na atividade anterior. Acabamos até, a pedido deles, incluindo outras perguntas.

**P**: Que tipo de probabilidade é esta? [alguém fala: condicional]. Muito bem, digo. [Monto o problema]
Sejam os eventos: $S$: <sair no horário> e $C$: <chegar no horário>, temos:
$P(S) = 0{,}84$ ; $P(C) = 0{,}83$ e $P(S \cap C) = 0{,}73$ . E queremos saber $P(C|S)$
Mas $P(C|S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}73}{0{,}84} \cong 0{,}87$
Podemos querer saber também $P(S|C) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}73}{0{,}83} \cong 0{,}88$
E se quisermos saber qual a probabilidade de chegar no horário, sabendo que não saiu no horário. [aqui deu-se uma pausa, pois não souberam de imediato a probabilidade de não sair no horário. Argumentei que poderia ser pensada como $P(\sim S) = 1 - 0{,}84 = 0{,}16$]
Daí $P(C|\sim S) = \frac{P(C \cap \sim S)}{P(\sim S)} =$ ? Nova dúvida.
Argumentei que não tínhamos informação sobre $P(C \cap \sim S)$. Ressaltei que se $S$ e $C$ fossem subconjuntos de um mesmo conjunto universo, $\sim S = S^c$ (complementar de $S$), daí teríamos $C \cap S^c = C - S$ (diferença entre os conjuntos), mas que aqui não era o caso. Não tínhamos como responder.
NA brincou que nem gostaria de saber a probabilidade de o avião não chegar no horário, sabendo que saiu no horário. [Risada geral]

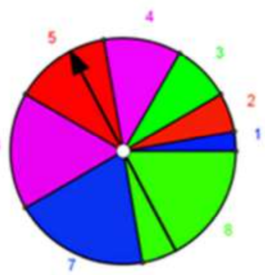
**Foi bom ter investido em buscar uma questão, que embora simples, provocou interesse da turma. Além disso, a resolução da probabilidade condicional nesse caso só poderia ser**

**feita usando a definição formal de probabilidade condicional, uma vez que não era possível explicitar a restrição do espaço amostral, como em outros exemplos. É Importante mostrar situações variadas que exigem modos diferentes de resolução.**

Pergunto se têm alguma dúvida quanto à resolução das outras atividades da Lista 4.

**LE** pede para resolver aquela questão da atividade 3 que ficou em dúvida, pois acha que a dúvida pode não ser só dela. A questão é a seguinte:

Considere a roleta dividida em 8 setores circulares, cujos ângulos centrais correspondentes variam em sequência crescente, de 10 em 10 graus. O menor ângulo é de 10°.




Pense no que você entende por probabilidade geométrica e tente responder as seguintes questões:

- Em qual cor o ponteiro tem maior probabilidade de parar? E em qual tem menor probabilidade?
- Qual a probabilidade do ponteiro parar num setor circular de cor azul?
- Dado que o ponteiro não parou num setor circular de cor verde, qual a probabilidade dele ter parado num setor circular de cor azul?
- Dado que o ponteiro parou num setor circular de cor vermelha, qual a probabilidade de ter parado no setor vermelho de menor ângulo central?

**Le** fala que sua dúvida é em relação aos dois itens finais. Proponho que resolvamos todos os tens e passamos então à resolução coletiva com a turma.

Item 1: [sugiro prestar atenção nos ângulos e pergunto se os setores coloridos são equiprováveis, a que respondem negativamente]
P: Qual cor tem maior probabilidade? E menor? [Contam]
Azul:80°; verde:110°; rosa: 100°; vermelho:70°. Verde a maior e vermelho a menor probabilidade.

Item 2: $P(azul) = \frac{80}{360} \cong 22{,}22\%$

Item 3: Lembro o que já tinha falado: excluir o setor verde (dado que já sabemos que o ponteiro não parou no verde]. Daí, reduzindo o espaço amostral, sobra que setor circular? [Pensam um pouco]
SA fala: sobre 250°. [Reforço, um setor circular equivalente a um ângulo central de 250°]
Então queremos $P(azul|\sim verde) = \frac{80}{250} = 0{,}32$

Item 4: pergunto como faremos agora.[Ficam um pouco em dúvida, pensam]
Falo: Sabemos que parou no vermelho, isto é certo, um fato. Que tal. Pensarmos só

no setor vermelho, ou seja restringir o espaço amostral no vermelho. E depois o que queremos? [Falam, a probabilidade de parar no 'vermelho menor'].
Então teremos $P(vermelho\ menor|vermelho) = \frac{20}{70} \cong 28{,}5\%$
Pergunto se ficou claro. Dizem que sim.

**Achei importante ter resolvido coletivamente esta atividade, pois reforça bem os conceitos de probabilidade condicional e probabilidade geométrica. Além disso, tenho certeza de todos os presentes pelo menos terem visto e participado da resolução, uma vez que não teria a mesma garantia de que resolveriam a atividade e, mesmo que o fizessem, se de forma correta.**

Repassamos o que foi visto no MPG. Vão listando os assuntos, as noções e conceitos que se lembravam e vou reforçando com comentários. Aviso sobre os materiais complementares postados no AVA para quem quiser. Para finalizar as atividades, passo um pequeno vídeo, que peguei na internet, versando sobre o Problema de Monty Hall (também conhecido como o problema do carros e dos bodes), que costuma ter uma resolução contra-intuitiva que causou controvérsias até entre especialistas da área. Daí sua importância. Para conhecimento segue o problema:

O **problema de Monty Hall** ou **paradoxo de Monty Hall** é um problema matemático e paradoxo surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos chamado *Let's Make a Deal*, exibido na década de 70.

O jogo consiste no seguinte: Monty Hall (o apresentador) apresentava 3 portas aos concorrentes, sabendo que atrás de uma delas está um carro (prêmio bom) e que as outras têm prêmios de pouco valor.

1. Na 1ª etapa o concorrente escolhe uma porta (que ainda não é aberta);
2. Em seguida Monty abre uma das outras duas portas que o concorrente não escolheu (sabendo, é claro, que o carro não se encontra aí)

Agora com duas portas apenas para escolher — pois uma delas já se viu, na 2ª etapa, que não tinha o prêmio — e sabendo que o carro está atrás de uma delas, o concorrente tem que se decidir se permanece com a porta que escolheu no início do jogo e se muda a sua escolha.
Qual é a estratégia mais lógica? Ficar com a porta escolhida inicialmente ou mudar de porta? Com qual das duas portas ainda fechadas o concorrente tem mais probabilidades de ganhar? Por quê?

Realmente não é assim tão indiferente mudar ou ficar na mesma porta. No início, quando se escolheu uma das portas, havia 1/3 de probabilidade de ganhar o carro. Não existe razão nenhuma para essa probabilidade mudar após o Monty Hall ter aberto uma das portas que não era premiada. As outras duas portas não escolhidas tinham em conjunto 2/3 de probabilidade de ocultarem o carro, e quando uma dessas portas é aberta (por não ter prêmio) a porta não escolhida que continua fechada passa a ter 2/3 de probabilidade de ser a porta do carro (prêmio bom)

A confusão é feita quando seguimos o raciocínio que parece mais lógico: se a porta escolhida também continua fechada, então cada uma das portas fechadas passa a ter 1/2 de chance de ter o carro.

Tive que reprisar o vídeo, a pedidos, para que melhor compreendessem o problema. Discutimos um pouco sobre ele, comentei qual era o equívoco de raciocínio que costumamos cometer. Acharam divertido o problema e ficaram meio ensimesmados com a resolução. Avisei que isto já era esperado e que postei dois artigos (na ferramenta Leitura do AVA) que tratam do problema, um de forma mais ilustrativa e outro que discute de forma mais aprofundada a polêmica da resolução. A título de ilustração

Ao final, fizemos uma comemoração de encerramento do módulo e do ano letivo, concordando em deixar o AVA disponível até o final do mês de dezembro, incluindo materiais adicionais, como textos e links interessantes para que pudessem revisitar, finalizar ou refazer tarefas. Nesse sentido incluímos uma agenda extra reportando que chegávamos ao fim do módulo, mas não do tempo da aprendizagem.

**Agenda Extra**: o AVA ficaria ativo durante o mês de dezembro de 2011 para realizarem as tarefas pendentes ou reverem tudo que desejassem a fim de consolidar o aprendizado dos conceitos tratados no curso, bem como interagirem como os colegas. Para tal, incluímos outros materiais que podem ser consultados, como vídeos, links dos *applets*, sequências de ensino e artigos relacionados com o tema. Além disso, abrimos um Fórum>Agenda Extra para que pudessem tecer comentários sobre o que desejassem, o que mais chamou atenção, solicitando também que deixassem suas impressões sobre o tema ou sobre o módulo em seus diários de bordo.

Em 2012, realizamos dois encontros extras, mas que não foram objeto de análise específica, apenas complementar.

## Síntese da análise

As abordagens iniciais do MPG tinham o propósito de causar certo desequilíbrio para que aflorassem na discussão dialógica as noções a priori sobre acaso, incerteza e aleatoriedade. Pude perceber pelas falas dos cursistas que as noções de acaso e aleatoriedade não são muito claras para a maioria da turma. Algumas discussões tomaram por vezes um rumo meio caótico, que demandava certo esforço em voltar para o foco, mesmo assim as opiniões manifestadas acerca do entendimento sobre tipos de experimento evidenciaram desconhecimento ou confusão de boa parte dos cursistas no discernimento entre experimentos determinísticos e aleatórios.

O que ficou claro foi a desconhecimento acerca das recomendações das orientações curriculares e atuais sobre o tema, inclusive do que consta do Caderno do Professor, que é adotado pelo currículo oficial do estado em que atuam, caracterizando pouco domínio do conhecimento curricular de probabilidade, um dos pilares básicos do conhecimento do professor, segundo SHULMAN (1986) e seus seguidores.

Também ficou evidente que ao abordar probabilidade em sala de aula, muitos cursistas o fazem em grande parte depois de análise combinatória. Aliás, nesse aspecto percebe-se a tendência de alguns, em particular MA, em fazer uso de procedimentos próprios de combinatória em resolução de situações probabilísticas, mesmo naquelas que demandam outro tipo de procedimento, como pode ser visto na realização em grupo do experimento frequentista de lançamento da moeda. Aliás, nesse mesmo experimento pode ser notada que, em todos os grupos, houve pelo menos uma manifestação inicial de estranhamento pela prevalência da 'sair cara' em detrimento de 'sair coroa', o que caracteriza a presença da crença denominada por "falácia do jogador", identificada por Kahneman e Tversky (1979) e também por Taleb (2011), como a tendência a achar que eventos relacionados a probabilidades podem ser influenciados por eventos aleatórios anteriores. Este tipo de engano pode ser entendido, ao se jogar uma moeda, que uma 'coroa' deve seguir uma série de 'caras', ideia amplamente aceitável, mas equivocada. Segundo Piaget e Inhelder (1959), mesmo crianças são suscetíveis a este tipo de engano (conforme vimos na revisão de literatura). Vale ressaltar também aqui a opinião de Shaughnessy (1977), concordando com

Kahneman, a respeito da necessidade dos seres humanos dependerem, em suas tomadas de decisão em situações de risco ou incerteza, de algumas heurísticas, uma delas sendo a ‘heurística da representatividade’, quando se estima a probabilidade de um resultado com base em quão representativo é em relação ao universo (população, espaço amostral). Para exemplificar este tipo de heurística, Shaughnessy diz que as pessoas acreditam, num jogo de ‘cara e coroa’, que o resultado KCKKCK é menos provável de acontecer do que o resultado KCKCKC. Dessa forma, podemos até nos perguntar se a evidência da ‘falácia do jogador’ aqui destacada não poderia também trazer subjacente a ‘falácia da representatividade’, uma vez que o tipo de equívoco de raciocínio envolvido no contexto de lançamento de moeda poderia também estar embutindo ou mesmo ser caracterizado como ‘falácia da representatividade’. A ‘falácia do jogador’ diz mais respeito à associação de ordem causal entre os eventos, enquanto a ‘falácia da representatividade’ está mais associada a uma incompreensão da aleatoriedade.

Esse mesmo experimento de lançamento de moeda serviu também para evidenciar o desconhecimento do que seja o comportamento frequentista de probabilidade, uma vez que os cursistas nem sempre tinham claro que a frequência relativa de um evento tende a uma estabilização, que melhor se aproxima da probabilidade do evento quanto maior for o número de realização do experimento, nas mesmas condições.

Por último, pela ausência de opiniões acerca do papel da história no ensino, penso que posso inferir que o conhecimento histórico epistemológico de conceitos não faz parte do repertório desses cursistas, muito menos como recurso pedagógico auxiliar da aprendizagem.

O **segundo encontro**, por se tratar de um momento todo dedicado à ambientação na plataforma TelEduc para acompanhamento virtual entre os momentos presenciais, nada de muito relevante tenho a acrescentar em termos da análise. Vale registrar que pareceram motivados naquele momento, trocaram mensagens entre si e pareceram empolgados com o experimento realizado com o simulador *applet,* que permitiu verificar visualmente a noção frequentista de probabilidade, qual seja, num experimento aleatório, realizada um número grande de vezes, a frequência relativa de sucessos tende para a probabilidade de sucesso daquele evento. Não dá ainda para concluir que perceberam a noção frequentista de probabilidade, podem ter ficado empolgados com o caráter inovador e lúdico da realização de uma atividade num simulador digital. De qualquer forma, foi interessante perceber esse ânimo, uma vez que pretendo utilizar outros recursos digitais durante o processo por entender que são facilitadores da aprendizagem, quando mediados na interação com o formador.

No **terceiro encontro** o destaque principal da análise no terceiro encontro foi a evidência das dificuldades que refletem a incompreensão em relação a não distinção entre probabilidade clássica ou frequentista, até aquele momento e que pode ser detectada, tanto na resolução postada no AVA quanto na discussão presencial, acerca da atividade de lançamento de moeda (atividade 2, Lista 1). Essa atividade solicita um experimento frequentista com a moeda e aborda um problema clássico conhecido como 'o erro de D'Alembert', por isso no meu modo de ver requereu uma explicação mais aprofundada, uma vez que o raciocínio utilizado por três cursistas na resolução escrita tem razões epistemológicas históricas que mereceram uma descrição mais minuciosa, devido à sua relevância. Nesse sentido, discorri mais longamente na análise daquela questão com o propósito de mostrar que tipos de raciocínios equivocados ou errôneos ocorreram durante a história da evolução do pensamento probabilístico e, ainda hoje, voltam a aparecer, o que evidencia que apresentam uma dificuldade epistemológica para sua compreensão. Claro é que me refiro à concepções prévias, uma vez que em encontro posterior (extra), após o término do MPG, numa atividade semelhante (atividade 6 da sequência – parte 2 – apêndice C) apenas professores que não haviam participado do MPG evidenciaram não saber explicar o impasse entre a solução de D'Alembert para a questão e a simulação apresentada do lançamento da moeda, enquanto que cursistas que participaram do MPG, resolveram essa questão corretamente, indicando terem se apropriado dos conceitos e desenvolvido o raciocínio envolvidos na resolução da mesma.

Alguns cursistas demonstraram certa tendência pelo uso de fórmulas e procedimentos algorítmicos em detrimento de outras abordagens, o que pode ser explicado pela formação que tiveram, mas que precisa ser superado para darem conta de sua prática, pois muitas propostas curriculares já indicam a ruptura com o determinismo e a linearidade predominantes nos currículos de Matemática, justificando-se assim o estudo das noções estocásticas no ensino Fundamental, segundo Lopes (1998). O cursista MA foi o que, inicialmente, refletiu mais fortemente a tendência preponderante de uso de procedimentos relativos à análise combinatória em suas resoluções, demonstrando também certa resistência em adotar outros caminhos de resolução, o que é necessário e bastante recomendável para propiciar o desenvolvimento do raciocínio probabilístico dos alunos. Na opinião de Shaughnessy (1977) uma abordagem de ensino pode influenciar o raciocínio de alguns alunos, e MA declara que sempre trabalha antes o Binômio de Newton e Triângulo de Pascal, para depois abordar probabilidade. Entretanto, este seu comportamento arraigado, dificultou-o no entendimento de um experimento frequentista e, consequentemente, da noção de probabilidade frequentista. Talvez seu comportamento possa ser explicado por sua formação em Física que pode ter tido um forte viés determinista. Entretanto vale ressaltar o crescimento desse cursista durante o processo formativo e uma demonstração de mudança positiva pode ser evidenciada quando fez algumas reflexões acerca dos seus erros e declarou: "*Olhando probabilidades sob uma nova perspectiva. O quanto nos equivocamos, impressiona, ...e afinal como ficam os nossos alunos, temos que pensar sério nesta questão. A interpretação é fundamental, nas questões apresentadas, uma única palavra modifica o sentido, e conduz a uma reposta diferenciada. As propostas devem estar centradas, em motivar a compreender os desafios em um processo de auto motivação em buscar as soluções possibilitando o aprendizado e o auto aprendizado em interações cognitivas*".

Atividades com urna e baralho (3 e 4 desta Lista 1) evidenciaram a dificuldade em dar um resultado final, fazem cálculos parciais que depois não sabem como compor numa resposta final, demonstrando a não compreensão da interpretação da questão e também que não têm clareza de quando somar ou multiplicar as probabilidades. Essa mesma dificuldade reapareceu na discussão havida no quarto encontro sobre exercícios semelhantes (sobre urna de baralho da Lista 2), mesmo após a discussão coletiva já realizada sobre essas questões. Na verdade, não é tão simples desenvolver esse tipo de raciocínio e o pensamento envolvidos. Inúmeras pesquisas já apontam essas dificuldades, como as desenvolvidas por Ben-Zvi e Garfield (2005), Batanero, Contreras e Díaz (2012), Azcarate e Cardenoso (2011), Santana (2011), entre outros.

Entretanto, vale ressaltar que no fórum virtual acerca dessa discussão houve comentários animadores. Quatro cursistas se manifestaram demonstrando reflexão sobre os equívocos cometidos nas resoluções da Lista 1. Segundo Bolzan (2002, p. 85), "a apropriação de novos conhecimentos implica a possibilidade dos sujeitos envolvidos nas situações de ensino e aprendizagem tomarem consciência dos mecanismos que envolvem essa apropriação”. No entanto, seria prematuro tirar uma conclusão mais definitiva sobre o aprendizado, uma vez que necessita ser confirmado em outras situações semelhantes, pois segundo a mesma autora, há uma força (a resistência) em direção contrária à tomada de consciência, fazendo com que o sujeito oscile entre o que é constituído como conhecimento (conhecimentos prévios) e os novos conhecimentos a serem apropriados.

A agenda anterior ao **quarto encontro** solicitava que lessem um texto e preparassem uma aula, definindo o público-alvo, abordando os conceitos de eventos independentes, eventos mutuamente exclusivos e probabilidade condicional. Para tal, postei um texto de apoio além das discussões já havidas anteriormente. Entretanto, não postaram nada, nem discutiram no fórum aberto para esse tema. Pretendi, então, fazer uma discussão sobre o silêncio virtual e se havia dúvidas nesse sentido. Mas eis que ao abrir essa discussão, senti um clima difícil com declarações contrárias à realização da tarefa, algumas um pouco contundentes. Analisando as falas pude perceber o que estava por detrás daquelas manifestações. Em primeiro lugar penso que exageraram no entendimento que pretenderam dar à tarefa, por isso explicitaram resistência em fazê-la. Na verdade, a polêmica evidenciou certa fragilidade dos cursistas no planejamento de suas práticas para sala de aula, que não significa seguir mecanicamente uma listagem pré-modelada de procedimentos (modelo de plano de aula), mas refletir antecipadamente quem é o seu aluno (público-alvo), olhar para a realidade da sua escola (o contexto em que está inserida), pensar sobre qual conteúdo abordar (conhecimento do conteúdo específico), qual a forma mais adequada de abordagem para esse aluno (conhecimento pedagógico do conteúdo), quais recursos utilizar para atingir os objetivos de aprendizagem, como defendem Ball e Bass (2000, 2003).

Percebi que os argumentos utilizados pelos cursistas revelam, sobretudo, uma recusa em refletir sobre suas práticas, servindo de escudo para camuflar a prática vigente de só trabalhar temas e conteúdos que dominam, escusando-se de buscar novos conhecimentos ou mostrar o desconhecimento de algum conteúdo e, consequentemente, de não saber bem como desenvolvê-lo em sala com seus alunos. Também revelam um entendimento distorcido sobre o binômio teoria-prática, entendendo ‘prática’ como ‘fazer exercícios’ e denominado de ‘teoria’ a reflexão crítica sobre as atividades realizadas visando apropriação e domínio sobre os conceitos envolvidos necessários para uma transposição adequada para a prática em sala de aula. Segundo Furlanetto (2009), desvelar as experiências, que não se constituem apenas às dimensões técnicas e teóricas, mas à repertórios mais amplos, como pensamentos, sentimentos, necessidades e dilemas dos professores nos processos de formação docente, revelam que exercem docência em cenários complexos, que desafiam os professores e os deslocam da zona de conforto. Parece que foi isto que ocorreu.

No entanto, consegui contornar a situação no momento da discussão, deixando-os se manifestarem, esclarecendo o que pretendia e acordamos então que deveriam postar no AVA um “Roteiro de Aula”, abordando aqueles conceitos. Merece registro o empenho e dedicação de cinco cursistas, que o elaboraram e postaram seus portfólios individuais, dois deles contendo sequência de atividades resolvidas, algumas até com certo grau de complexidade. Pude perceber que tiveram que pesquisar para fazer o roteiro, o que ficou evidenciado principalmente pelas referências dos exercícios selecionados. Vale ressaltar ainda que entre os que entregaram esta atividade, havia alguns que tinham manifestado mais resistência na discussão havida sobre este tema. Isso é importante, pois dá uma clara indicação de que mudaram de atitude, o que reflete acima de tudo a disposição para fazê-lo, pois como indica Rokeach (1981) uma mudança de atitude seria uma mudança na predisposição, entendida como um estado hipotético do organismo que, ativado por um estímulo, faz com que uma pessoa responda de forma seletiva, afetiva ou preferencial ao estímulo.

Em relação à resolução da Lista 2, a Atividade 4, abordando sobre probabilidade condicional, foi a que evidenciou maior dificuldade em sua resolução, provocando erro coletivo por parte dos cursistas que a postaram no ambiente ou entregaram impressa no encontro presencial, o que sinaliza desconhecimento ou incompreensão sobre este conceito. Na discussão coletiva sobre essa atividade, penso ter provocado a reflexão sobre os conceitos de eventos mutuamente excludentes, eventos independentes e probabilidade condicional, o que ainda não é garantia de que tenham se apropriado desses conceitos, uma vez que representam um ‘nó epistemológico’ do qual já tinha consciência. São conceitos imbricados, que costumam causar confusão e equívocos de interpretação e, portanto de difícil compreensão. Diversos pesquisadores confirmam este fato, como Falk (1986), Díaz e La Fuente (2005), Batanero, Contrera e Díaz (2012), Kahneman e Tversky (2009) Gingerenzer e Hoffrage (1995), e dependem muito da situação em que são apresentados. Nessa direção, foi realizada uma leitura em grupo sobre mais um artigo versando sobre a mesma temática, numa abordagem bastante elucidativa.

A Agenda 4 trazia também um experimento frequentista por meio de um simulador "Probabilidade com urna" e pelas mensagens postadas no fórum pude perceber que alguns cursistas que se empenharam em fazer o experimento interagiram numa atitude proativa e me pareceram empolgados com o experimento, dando uma indicação de que poderia trazer outros objetos digitais de aprendizagem, o que fiz nos encontros posteriores, também pelos recursos que me forneciam na abordagem relacionando probabilidade geométrica com a noção de probabilidade frequentista. Dessa forma, estamos realizando um experimento frequentista com o uso de tecnologia digital que propicia, por meio do *feedback* do próprio simulador e contando com a mediação da pesquisadora, que se realize o ciclo de aprendizagem (ação, reflexão, depuração, nova ação) e a tomada de consciência, em sua reflexão, de como as variáveis e seu comportamento contribuem para a formação dos conceitos em cada atividade/fase (VALENTE, 1999; REZENDE, 2004). Além disso, refletindo sobre processos formativos de docentes, segundo Lobo (2010), as tecnologias, quando usadas, interferem no processo educacional, interferindo na aprendizagem profissional, além de fornecer ao professor modelos e possibilidades didáticas.

O **quinto encontro**, por ter sido interrompido, logo após iniciado, por razões imperativas, gerou um adiamento de mais uma semana, com a inclusão de uma agenda para esse período, incluindo a Lista 3 e mais dois experimentos frequentista com simuladores (Agulha de Buffon e Método de Monte Carlo 2D), todas as atividades relativas à probabilidade geométrica. Adianto que os comentários do fórum sobre o experimento da Agulha de Buffon demonstraram o interesse da maioria dos participantes com o experimento virtual, o que foi uma boa sinalização que serviu de mote para ser explorado em encontros posteriores (*redesign)*, pelo interesse que desperta esse tipo de objeto virtual, mesclando fatores como a novidade, o lúdico, a visualidade, a interatividade e, portanto o favorecimento à aprendizagem. Nessa direção estaremos proporcionando, mesmo em níveis iniciais, o desenvolvimento do conhecimento tecnológico do conteúdo, um dos componentes do TPACK, segundo Koehler e Mishra (2006, 2009).

No **sexto encontro** presencial, em mais um *redesign* do processo, além de objetos digitais de aprendizagem também resolvi trabalhar com diversos objetos concretos, tanto pela diversidade de abordagem, quanto para atender os que não estão familiarizados, ou não se sentem confortáveis, com uso da tecnologia para si próprios ou para fins didático-pedagógicos, dada as condições de trabalho em suas escolas. Nesse sentido, esse encontro foi particularmente animado pela diversidade de materiais e atividades desenvolvidas com a participação de toda turma.

Houve, em princípio, certo estranhamento por parte dos cursistas na realização dos experimentos da Agulha de Buffon e do Método de Monte Carlo-2D., tanto pela falta de familiaridade com objetos virtuais, quanto pelo experimento em si, que além de abordar uma razão entre medidas de área, ainda relaciona a frequência relativa com um fator do número $\pi$ . Por isso, resolvi fazer outro experimento semelhante, o Método de Monte Carlo-3D, mais para mostrar que a probabilidade geométrica é uma razão entre as medidas de objetos geométricos de mesma natureza e, com isso, não deixar equívocos na construção desse conceito.

Entretanto, notei que apresentaram algumas dificuldades com a geometria. Isso ficou evidenciado durante o encontro na realização de algumas atividades, particularmente as que envolveram medidas de volume e certa dificuldade de estabelecer relações geométricas. Nesse sentido, tive que fazer algumas readequações e trabalhar um pouco de geometria, a noção de volume, com o Material Dourado e o cálculo de volume de alguns sólidos usando o Principio de Cavalieri, para dar outra abordagem. Pareceu-me pelas manifestações que a geometria não é um ponto forte da turma, notadamente a espacial.

Trabalhamos ainda nesse encontro com outros materiais concretos: roletas e Tangram. O objetivo foi mostrar que é possível realizar experimentos frequentistas com material concreto que podem ser construídos. Nesse caso, ambos tinham o propósito de trabalhar probabilidade geométrica e a noção frequentista de probabilidade, bem como explorar probabilidade condicional. Entendo que a diversidade de recursos utilizados, digitais ou não, como várias formas de abordagem de um mesmo tema, favorecem a construção dos conceitos envolvidos e contribuem para aumentar o repertório dos professores.

Percebo que o lúdico proporcionado pelo trabalho com material concreto e simuladores virtuais torna-se um fator motivador para o ensino de probabilidade na prática em sala de aula, além de fornecer indícios de estarem olhando para o caráter pedagógico e tecnológico, necessários para desenvolverem o TPAK, segundo Mishra e Koehler (2006, 2009).

Uma das metas do MPG, além de trabalhar as noções elementares e os principais conceitos de probabilidade, era chegar a trabalhar a probabilidade geométrica, que articula conceitos de geometria e probabilidade, além de relacionar também com a noção frequentista. Na Probabilidade Geométrica trabalhamos com razões entre medidas de figuras geométricas de mesma natureza (medidas de comprimento ou de área ou de volume) que é entendida como um limite da probabilidade frequentista $P_{F,\mathrm{n}}$, quando o número $n$ de realizações do experimento se torna muito grande.

O **sétimo encontro** teve apenas uma agenda anterior com a Lista 4 versando sobre probabilidade geométrica, incluindo três sequencias de atividades com um simulador (Rodas da Fortuna – UFF), devendo postar a resolução nos portfólios.

Na resolução dessas atividades da Lista 4 apareceram alguns erros e equívocos, entre eles: dar a probabilidade em números absolutos e não em frequências relativas, atribuir à probabilidade um valor maior que 100%; não distinção entre probabilidade frequentista e probabilidade geométrica; falta de clareza sobre o experimento frequentista. Estas ocorrências evidenciam que a noção de probabilidade geométrica não está ainda compreendida, tampouco a de probabilidade frequentista. Podemos identificar a dificuldade em estabelecer a relação frequência relativa e probabilidade, com resultados constatados por Coutinho (1994) corroborando com a conclusão de Fischbein (1991), Tversky e Kahneman (1971), de que certas concepções errôneas permanecem mesmo após a aprendizagem de noções básicas.

Durante o encontro presencial, logo no seu início, acerca de uma indagação que fiz a respeito dos objetos digitais, houve diversas manifestações dos cursistas refletindo o pensamento deles sobre as condições adversas a que estão submetidos nas escolas que dificultam o bom desempenho docente, influenciando no estado de ânimo desses professores em relação ao seu desenvolvimento profissional e também certo descrédito de que possam haver mudanças nessa direção. Relaciono o que esses professores-cursistas estão sofrendo com o que Nóvoa (2007) chama de “transbordamento da escola”, isto é, o excesso de missões que a ela são impostas e, consequentemente, aos professores, sem, a contrapartida de garantia de condições adequadas para o desempenho profissional. Esta desvalorização do trabalhos docente provoca certo conformismo, que pode ir “desde uma ligeira sensação de rotina até uma crise existencial face à prossecução da carreira” (Nóvoa, 1992, p. 42), causando uma imobilidade que vai de encontro à mudanças, quer sejam psicológicas (internas) ou sociais e profissionais (externas). Nóvoa (2005, 2007) aponta três paradoxos da profissão docente: o excesso de missões da escola e demandas da sociedade versus uma maior fragilidade do estatuto docente; a glorificação da sociedade do conhecimento versus o desprestígio com que são tratados os professores; a retórica do professor reflexivo versus a inexistência de condições de trabalho concretas.

Nessa direção, identifico também razões culturais e históricas a serem consideradas como afirma Pombo (1993): desestruturação e perda de referências estáveis; necessidade de fazer face à complexidade enquanto determinação constitutiva da civilização contemporânea, complexidade esta caracterizada pela contínua emergência de problemas urgentes de todas as ordens, que reclamam respostas integradas; necessidade de responder ao fato de a humanidade estar entrando em outra era da sua História, caracterizada pela crescente velocidade da informação e pela multiplicidade e complexidade dos meios técnicos de seu processamento.

Por outro lado, vale lembrar, como afirma Mizukami (2002), que a premissa básica do ensino reflexivo considera que as crenças, valores e suposições que os professores detêm sobre tudo que se relaciona com o âmbito escolar, estão na base de sua prática docente. Daí a necessidade de se provocar essa reflexão que proporciona aos professores tornarem-se conscientes das crenças e teorias pessoais que guiam suas práticas para atingir as metas estabelecidas.

Durante a conversa com os cursistas afloraram essas opiniões e sentimentos, que acho relevante relatar, pois necessitavam se manifestar e serem ouvidos em suas angústias acerca da profissão. Entendo as dificuldades técnicas alegadas, sei que corresponde à realidade que costumam enfrentar nas escolas, entretanto também percebo, de forma camuflada, certa resistência com o uso da tecnologia para fins do ensino, até impedindo que percebam o potencial de aprendizagem para eles próprios. Afinal, trabalhamos durante O MPG com recursos variados, inclusive digitais, voltados prioritariamente aos próprios cursistas, para incrementar seus repertórios de conhecimento e, quiçá, para o uso em suas práticas em sala de aula Parece-me ainda, reforçando a impressão anterior de que se sentem assoberbados de tantos afazeres e sem estímulo para desenvolver outras habilidades que podem resultar em mais responsabilidades a cumprir.

Após isto, retomei o planejamento original e passei a tratar da sistematização do conteúdo abordado no MPG, mas por meio de atividades que pudessem resgatar todos os conceitos, enquanto dialogávamos sobre eles. Realizei um experimento com outro simulador, a Roleta Mágica (Rived), pois havia detectado muitas incompreensões na resolução da Lista 4, portanto, era necessário tentar saná-las reproduzindo uma atividade similar que tratasse os mesmos conceitos. Não deu para perceber se houve avanços, alguns pareciam atentos, mas pouco se manifestaram. Busquei outras questões sobre probabilidade condicional, bem simples, mas diversa do que costuma aparecer nos exemplos, que provocou o interesse da turma. Além disso, a resolução da probabilidade condicional nesse caso só poderia ser feita pela definição e não por restrição do espaço amostral, como costuma aparecer nos exemplos. Queria reforçar a importância de mostrar situações variadas que exigem modos de resolução diferentes. E, a pedidos, resolvemos coletivamente exatamente uma das atividades da Lista 4 que evidenciaram dificuldades sobre probabilidade geométrica e frequentista, que espero tenha servido para sanar aqueles equívocos. Para fechar o encontro, mostrei um vídeo ilustrando o problema de Monty Hall. Por ser o último encontro presencial, o objetivo era fazer uma sistematização do conteúdo abordado no MPG.

Para finalizar, em termos gerais de análise, tenho a concluir que confirmei não ser tarefa fácil desenvolver o raciocínio o probabilístico, como afirmam Campos, Wodewotzki e Jacobini (2011). Ainda segundo esses autores, para desenvolver este tipo de pensamento, os estudantes devem ser levados a uma desconstrução interna em seus modos de pensar, abrindo mão de olhar o mundo de forma determinística para uma visão em que as ideias probabilísticas são centrais e indispensáveis. Tenho consciência que, lamentavelmente, o tempo foi curto para construir conceitos dessa natureza, que requerem um processo de idas e vindas, levando em conta as condições de trabalho dos cursistas, a formação que tiveram, enfim, uma complexidade de aspectos a serem considerados, além do tempo de aprendizagem de cada um.

No ambiente virtual os professores cursistas puderam interagir com os colegas e com a pesquisadora, por meio das ferramentas fórum, correio e diário de bordo, enquanto trabalhavam os conteúdos disponibilizados e desenvolviam nos portfólios as atividades relativas ao curso, segundo a agenda semanal. Além disso, a tônica da participação presencial dos professores era a disposição de se manifestarem oralmente, imprimindo um ritmo participativo nas discussões e uma atitude interacionista da turma. Já no ambiente virtual encontramos certa resistência por parte de alguns, não muito familiarizados com o uso do computador, ou com o ensino a distância (*on line*) ou mesmo justificada pela falta de tempo para se dedicarem para além dos encontros presenciais. Mesmo assim muito se esforçaram e realizaram as atividades agendadas postando-as nos portfólios individuais. A participação nos fóruns foi um pouco mais tímida, no entanto mostravam-se mais empolgados nos experimentos virtuais com softwares (*applets*), como a Agulha de Buffon, o Método de Monte Carlo, o Jogo da Roleta, entre outros, já descritos anteriormente em mais detalhes.

Apesar dos dados terem refletido as concepções, dificuldades e alguns equívocos, em relação aos conceitos probabilísticos aqui relatados, também ficou evidente que houve ganhos no processo formativo como um todo. Em particular, dentre os participantes, pelo menos cinco deles mostraram crescimento significativo, tanto na aprendizagem dos conteúdos abordados quanto na direção do desenvolvimento do raciocínio probabilístico.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

> "Eu jamais iria para a fogueira por uma opinião minha, afinal, não tenho certeza alguma. Porém, eu iria pelo direito de ter e mudar de opinião, quantas vezes eu quisesse". (atribuída a Friedrich Nietzsche).

Apresento neste texto algumas considerações que entendo as mais relevantes sobre a pesquisa quando cotejadas com os pressupostos iniciais e com o objetivo da mesma.

Considero que o desenvolvimento desta pesquisa se justifica pela relevância do tema abordado – noções básicas de probabilidades. No mundo das informações em que estamos inseridos é cada vez mais demandado que cidadãos saibam ler, compreender e interpretar criticamente essas informações presentes nas mídias de todas as modalidades, bem como em diversas áreas do conhecimento. Em particular, aos professores é exigido que tenham domínio dos conceitos e conteúdos de estatística e probabilidade para que possam encontrar formas adequadas de desenvolver essas competências e habilidades em seus alunos.

Nessa direção, é necessário abordar noções de acaso, aleatoriedade e desenvolver o raciocínio probabilístico desde as séries iniciais, conforme apontam pesquisas de Bryant e Nunes - haja vista que crianças desenvolvem raciocínio bayesiano com maior facilidade, segundo Alison Gopnik,[204] – bem como trabalhar os conceitos de estatística e probabilidade nas séries posteriores até níveis mais avançado, obviamente de maneira adequada ao nível de escolaridade.

---

[204] Professora de psicologia da Universidade de Berkeley, linha de pesquisa de desenvolvimento cognitivo e filosofia da mente, autora e co-autora de diversos artigos científicos e livros. Um dos livros de maior destaque foi *The Philosophical Baby: What Children's Minds Tell Us about Truth, Love, and the Meaning of Life*", de 2009. Destaco aqui o artigo Children`s causal inferences from indirect evidence: backwards blocking and Bayesian reasoning in preschoolers *Cognitive Science* 28, 303-333 (Sobel, D.M., Tenenbaum, J.B., & Gopnik, A , 2004), cuja conclusão é a seguinte: "Estas experiências mostram que as crianças podem se envolver em vários tipos de inferência causal que envolvem evidência indireta e/ou ambígua. Modelos associativos simples não são capazes de prever as habilidades de inferência das crianças. Embora seja possível que alguns modelo associativos mais complexos possam explicar estes resultados, parece mais provável que um mecanismo para a aprendizagem causal seja encontrado entre os últimos modelos computacionais de inferência causal, tais como o mecanismo de inferência Bayesiana estrutural que aqui foi descrito e testado. Mapeando o desenvolvimento desta máquina de inferência, e outras capacidades cognitivas que suportam, temos um objetivo importante para futuras pesquisas"(tradução nossa).

.

A revisão de literatura pode me subsidiar a dar o tratamento pretendido no desenvolvimento do processo formativo – o módulo para os professores da educação básica – como também para fundamentar a análise dos dados coletados na pesquisa. Nesse aspecto, também a metodologia adotada do *design experiment* mostrou-se adequada por permitir o redesenho cíclico à medida que se apresentava alguma dificuldade que precisava ser retomada de outra maneira, com outros exemplos, de forma a provocar a reflexão dos cursistas, a díade desconstrução/reconstrução, possibilitando assim trabalhar estratégias diversas para promover o desenvolvimento do raciocínio probabilístico dos professores participantes da formação continuada.

A história da evolução das ideias estocásticas também evidenciam os percalços, dificuldades e equívocos por quais passaram as figuras chave e outros pensadores na construção da Teoria da Probabilidade. Como exemplo, podemos citar as interpretações místicas atribuídas ao acaso e à incerteza, o 'erro de D'Alembert', o 'erro de Bernoulli', os percalços no desenvolvimento do raciocínio bayesiano, entre outras que podem ser vistas no capítulo 1 da tese. Com certeza, a pesquisa histórico-epistemológica das ideias estocásticas, em particular, do desenvolvimento do raciocínio e dos conceitos probabilísticos muito contribuiu para ampliar meu olhar para as dificuldades inerentes à aprendizagem destes mesmos conceitos por parte de alunos, em qualquer nível de escolaridade, e mesmo em cursos de formação de professores. Nesse sentido, considero essencial esse tipo de conhecimento por parte do professor para que possa se preparar e planejar sua prática em sala de aula de forma a minimizar erros conceituais ou raciocínios equivocados, favorecendo a aprendizagem dos alunos e contribuindo com a melhoria da educação.

Meus pressupostos acerca tanto da construção do pensamento estocástico ser mais complexo do que costuma ser apresentado nos curso de formação e nos livros didáticos, como da necessidade de uma ruptura com o pensamento determinístico e linear, que se perpetua em nossos currículos, ficaram confirmados nos estudos realizados nesta pesquisa. Nessa direção, podemos destacar, de uma maneira geral, que ficaram evidenciadas algumas crenças e concepções consolidadas nos processos de formação dos professores-cursistas. Outro aspecto a ser considerado é que alguns cursistas demonstraram trabalhar as noções de probabilidade em suas aulas vinculadas quase que exclusivamente à análise combinatória, tendo dificuldade em pensar outras formas de trabalhar essas noções, por exemplo, de forma experimental como na interpretação frequentista de probabilidade. Entendo que essa é uma dificuldade em articular as diferentes abordagens e interpretações da probabilidade: clássica, frequentista e axiomática. Evidenciou-se também a concepção subjetiva de probabilidade em boa parte dos cursistas, o que me pareceu falta de maior conhecimento ou de criticidade sobre o tema.

A análise dos dados levantados na pesquisa, relativa aos conteúdos específicos, evidenciaram, em menor ou maior grau, dificuldades na compreensão de processos aleatórios, notadamente em experimentos frequentistas, na distinção entre os conceitos de eventos mutuamente exclusivos e de eventos independentes, na compreensão do conceito de probabilidade condicional, na compreensão de probabilidade geométrica. Evidenciaram também presença de falácias (do jogador e da representatividade), que representam equívocos no modo de pensar em situações de acaso, incerteza e aleatoriedade, e alguma dificuldade em articular e relacionar conteúdos de outros campos da matemática, notadamente em geometria. Essas evidências demonstram concepções dos cursistas em relação ao conteúdo de probabilidade, no que tange aos conceitos básicos, e revelam, sobretudo, a dificuldade no desenvolvimento do raciocínio probabilístico. Entretanto, esses resultados só confirmam o que vêm apontando muitas pesquisas similares na área de Educação Estatística, referenciadas na análise e na revisão de literatura, como por exemplo, Falk (1986), Lopes (1998), Díaz e La Fuente (2005), Ben-Zvi e Garfield (2005), Batanero, Contreras e Díaz (2012), Azcarate e Cardenoso (2011), Santana (2011), entre outros.

Sobre ideias que desafiam a racionalidade, dificultando o desenvolvimento do pensamento e raciocínio probabilísticos, pude confirmar na pesquisa a presença de falácias e equívocos, que encontramos registradas nas obras de Kahneman e Tversky (1982, 2012), Stigler (1986), Bernstein (1997), Taleb (2011), entre outros. Ressalto que vários equívocos dessa ordem são encontrados na história da evolução do pensamento estocástico. Portanto, dentre dificuldades de ordem histórico-epistemológicas, pude constatar a presença de duas falácias (do jogador e da representatividade) e a dificuldade em perceber o pensamento equivocado de D'Alembert (na atividade sobre o 'erro de D'Alembert').

A pesquisa detecta também algumas concepções relativas à prática do professor em sala de aula, entre elas, certa fragilidade no planejamento de suas práticas, costumando basear-se no livro didático e no que já têm preparado, evitando abordar o que não conhecem bem, ou o que os alunos têm dificuldade em aprender. Entre os que alegaram já ter trabalhado o tema com seus alunos, uns o fazem com atividades costumeiras (utilizando dados, moedas, cartas, mas sem muita exploração dos conceitos), um cursista especifico relatoutrabalhar probabilidades depois de análise combinatória, no que foi apoiado por alguns outros colegas. Evidente que o raciocínio combinatório é útil para resolver questões de probabilidade, entretanto, ao fazê-lo, costumam usar procedimentos mecanizados, por meio de fórmulas, o que não favorece desenvolver o raciocínio probabilístico de seus alunos. Esse tipo de abordagem reflete o enraizamento nesses professores do caráter de formação determinístico que receberam e que se perpetua em nossas escolas. Vários cursistas alegaram achar difícil trabalhar com esse conteúdo e a maioria demonstrou não conhecer bem as orientações curriculares sobre esse tema. Posso concluir que probabilidade é pouco trabalhada em sala de aula e, quando o é, nem sempre de forma a propiciar uma aprendizagem significativa aos seus alunos.

Durante o processo, algumas resistências foram detectadas em relação ao uso de tecnologia em sala de aula. Por um lado refletem a não familiaridade com seu uso, impedindo até que percebam o potencial de aprendizagem para incrementar seus próprios repertórios como professores. Por outro lado, refletem as dificuldades de infraestrutura para o uso de tecnologias nas escolas. Pude perceber, em algumas manifestações, uma acomodação com a realidade que enfrentam no desempenho da prática docente, muitas vezes adversas, provocando certo imobilismo no sentido de refletirem sobre essas práticas. Normalmente acostumados com uma estrutura linear de trabalho em suas práticas docentes, normalmente numa perspectiva de utilidade imediata , a abordagem adotada no desenvolvimento do MPG foi inovadora para esses professores-cursistas. Assim, por vezes, tive a impressão que não compreendiam bem a estrutura espiral adotada na condução do processo formativo.

No entanto, mostravam-se envolvidos, e até empolgados, quando as atividades eram reconhecidas por eles em seus repertórios (como o uso de material concreto). Também houve manifestações de reflexão e mudança de atitude por parte de alguns que me deram indícios que estava por se iniciar um processo de construção do pensamento probabilístico e desenvolvimento do raciocínio probabilístico, que necessitaria de mais tempo para se consolidar.

Quero registrar também que a abordagem baseada no *design experiment*, como defendido por Cobb e seus colaboradores, mostrou-se adequada no planejamento e condução do processo formativo, permitindo realizar ciclos de *redesign* em todas as etapas do MPG. O planejamento do módulo, do ambiente virtual, das atividades desenvolvidas, dos recursos a serem utilizados, do material de apoio disponibilizado, bem como a ação da mediação presencial e virtual, foram pensadas dentro de um escopo geral, reformuladas e redesenhadas à medida que, às vezes de pronto, surgia a necessidade de retomar um conteúdo, numa nova abordagem ou por meio de outro recurso, visando com essa retomada provocar a reflexão das noções e conceitos trabalhados, para favorecer e propiciar uma aprendizagem significativa.

Dessa forma, pelo exposto até aqui, entendo que a pesquisa cumpriu o seu objetivo, quer seja, compreender as concepções dos professores sobre os conceitos básicos de probabilidade por meio de um processo formativo baseado no *design experiment*.

Devo também ressaltar alguns aspectos limitadores da pesquisa. O período destinado ao modulo foi exíguo para propiciar a reflexão necessária que pudesse provocar mudanças mais efetivas nas concepções apresentadas pelos cursistas e uma melhoria qualitativa na compreensão de conceitos que vêm apresentando ressonância em termos de dificuldades em outras pesquisas sobre concepção de professores. Em outras palavras, o tempo foi curto para que pudesse se processar o ciclo de aprendizagem de um conteúdo denso e de certa complexidade. Além disso, minha tentativa de suplantar esse déficit temporal, preparando um ambiente virtual para dar suporte aos encontros presenciais do módulo, não surtiu o efeito desejado, uma vez que os cursistas não tiveram uma participação ativa online. Alguns demonstram certa resistência e até dificuldades com o uso da plataforma, outros argumentaram falta de tempo. A maioria acessou o ambiente virtual – isso ficou visível na ferramenta acesso e frequência disponível para o formador, mas poucos de fato cumpriram as agendas, ou seja, boa parte ficou 'invisível' na plataforma. De fato, acabavam acessando o material disponibilizado, mas a resolução das atividades nem sempre era postada nos portfólios, embora depois fossem discutidas nos encontros presenciais, mas essa atitude não acelerava o desenvolvimento do módulo como pretendido. Também a interação pretendida nos fóruns de discussão não atingiu o nível desejado. Na verdade, a interação se dava presencialmente nos encontros. Além disso, a tônica dos encontros presenciais era a oralidade. Mesmo resolvendo as atividades em sala, nem todos entregavam a resolução por escrito, contentando-se em discutir as resoluções. Assim, o registro dos dados, além do que foi realizado no ambiente virtual, ficou por conta das gravações em áudio e vídeo dos encontros presenciais. Reconheço que são dotados de uma cultura da oralidade, da participação presencial, onde se sentem confortáveis e acolhidos pelos pares, e não se familiarizaram ainda com a dinâmica de formação a distância. Daí algumas resistências e sentimento de desconforto com o uso da tecnologia em processos formativos e/ou educacionais. Uma mudança cultural necessita de bem mais tempo para se processar.

Por fim, acrescento que, mesmo com limitações, as reflexões que se deram ao longo do processo formativo serviram para reelaborar algumas concepções anteriores dos professores. Particularmente, o uso de recursos digitais - simuladores utilizados, e o material concreto trabalhado, despertaram bastante atenção, motivando os professores e favorecendo a compreensão dos conceitos trabalhados com esses objetos. Tenho convicção de que os cursistas tiveram contato com um material expressivo sobre o conteúdo abordado de probabilidade, com variedade de modos de resolução e alguns avanços significativos puderam ser detectados em parte dos professores cursistas que demonstraram, ao longo do desenrolar do módulo, terem progredido no aprendizado, refletido sobre suas práticas e iniciado o desenvolvimento do raciocínio probabilístico. Minha opinião é de que mais pesquisas nessa direção devam ser realizadas por entender que podem contribuir para a melhoria da formação continuada dos professores e, consequentemente, de suas práticas em sala de aula. Mas acima de tudo, quero reforçar que a pesquisa veio confirmar para mim, no aspecto da formação, que não basta o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento tecnológico do conteúdo sem o conhecimento aprofundado do conteúdo específico, sem o qual não se consegue efetuar a amálgama destes três aspectos fundamentais para realizar a aprendizagem efetiva dos educandos.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. E. B. de; PRADO, M. E. B. B. **Tecnologia na sociedade, na vida e na escola. In: Tecnologias na Educação: ensinando e aprendendo com as TIC**. ProInfo – Curso de 100h. Guia do Cursista. Brasília: MEC/ SEED. 2008.

AZCÁRATE, P. **Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad.** Granada: Comares, 1996.

AZCÁRATE, P., CARDEÑOSO, J. M**.** La Enseñanza de la Estadística a través de Encenarios: implicación en el desarrollo professional. **Bolema**, v. 24, n. 40, 2011, p. 789-810.

AZCÁRATE, P**. El conocimiento professional: naturaleza, fuentes, organización y desarollo**. Quadrante, Lisboa, v.8, 1999, p. 111-138.

AZCÁRATE, P; CARDEÑOSO, J.M e PORLÁN, R. Concepciones de futuros professores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. **Enseñanza de las ciencias**, v.16, n.1, 1998, p.85-97.

AZCÁRATE, P. **El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones aleatoriedad y probabilidad**. **Su estudio en el caso de la educación primaria.** 1995. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz, 1995.

BALL, D.L., & BASS, H. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: DAVIS e SIMMT (Ed.). **Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group**. Edmonton, AB: CMESG/GCEDM, 2003, p. 3-14.

BALL, LUBIENSKI, MEWBORN. Research on Teaching Mathematics: The Unsolved Problem of Teachers' Mathematical knowledge. In: **Handbook of Research on Teaching**. New York: Virginia Richardson, 2001.

BALL, D.L,;BASS, H. Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics**.** In: BOALER(Ed.). **Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics**. Westport, CT: Ablex, 2000, p. 83-104.

BALL, D.L**. Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education**. Unpublished doctoral dissertation. East Lansing: Michigan State University, 1988.
Disponível em: http://www-personal.umich.edu/~dball/.

BALL, D. L; COHEN, D. K. Reform by the book: What is--or might be--the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? **Educational Researcher**, v. 25, n. 9, 1996, 6-8.

BALDINO, R. R**.** Grupos de Pesquisa-Ação em Educação Matemática**. BOLEMA**, Rio Claro, v.14, n. 16, 2001, p. 83-98.

BATANERO, C., GARFIELD, J. B., OTTAVIANI, M. G. y TRURAN, J. Investigación en Educación Estadística: Algunas Cuestiones Prioritarias. **Statistical Education Research Newsletter,** v. 1, n. 2, 2000.

BATANERO, C.; GODINO, J. **Estocástica y su didáctica para maestros: Proyecto Edumat-Maestros.** Granada: Universidade de Granada, 2002.

BATANERO, C.; HENRY, M.; Parzysz, B. The Nature of Chance and Probability. In: JONES, G. A. (Ed.) **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. New York: Springer, 2005, p. 15-37.

BATANERO, M. C. D. **VIABILIDAD DE LA ENSEÑANZA DE LA INFERÊNCIA BAYESIANA EM EL ANÁLISIS DE DATOS EM PSICOLOGÍA**. 2007. Tesis Doctoral (Departamento de Psicología Social y Metodología de las Ciencias del Comportamiento)-Universidad de Granada. Granada: Editorial de la Universidad de Granada, 2007.

BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M.; DIAZ, C. Sesgos en el Razonamiento Sobre Probabilidad Condicional e Implicaciones Para la Ensenanza. **Revista digital Matemática, Educación e Internet**, v. 12, n. 2, 2012, p. 1-13.

BAYER, A., BITTENCOURT, H., ROCHA, J., ECHEVEST, S. A Estatística e sua História. In: XII Simpósio Sul Brasileiro de Ensino e Ciências. Anais...Canoas, 2004.

BENNETT, D. J. **Aleatoriedade**. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. In: BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. (Ed.). **The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academy Publishers, 2005, p. 3-16.

BESSON, J-L. (Org.) **A ilusão das estatísticas**. São Paulo: Editora UNESP, 1995.

BERNSTEIN, P. L. **O Desafio dos Deuses: A Fascinante História do Risco**. 23 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 1997.

BIBLIA SAGRADA Capítulo 01º, O Quarto Livro de Moisés chamado Números. Disponível em: https://sites.google.com/site/ovelhotestamento/o-quarto-livro-de-moiss-chamado-nmeros.Acesso em: 15 fev 2013.

BOLZAN, D. P. V. **Formação de Professores: compartilhando e reconstruindo conhecimentos**. Porto Alegre: Mediação. 2002

BOROVCNIK, M.; PEARD, R. Probability. In: BISHOP, A. J. *et al*. (Eds.). **International Handbook of Mathematics Education.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 239-287.

BORTOLOSSI, H. Números (Pseudo) Aleatórios, Probabilidade Geométrica, Métodos de Monte Carlo e Estereologia. Projeto Klein-Sociedade Brasileira de Matemática-SBM.

Disponível em:<http://klein.sbm.org.br/wp-content/uploads/2012/10/nu%CC%81meros-bortolossi-rdf-projeto-klein.pdf>. Acesso em: 10 set. 2011

BORTOLOSSI, H. CDME – Conteúdos Digitais de Matemática para o Ensino Médio. Universidade Federal Fluminense. Disponível em: http://www.professores.uff.br/hjbortol/. Acesso em: 10 set. 2011.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 174 p.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2000, 58 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Coleção Explorando o Ensino – Matemática, v. 3. Brasília: Ministério da Educação-Secretaria de Educação Básica, 2004, 48 p.

BRASIL. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Secretaria de Educação Básica. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2). Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006, 135 p.

BRASIL, IBGE Teen. **O censo tem história**. Disponível em: http://teen.ibge.gov.br/censo/censo-2000. Acesso em: 05 abr. 2013.

BRASIL IBGE **A História do Censo no Brasil**. Disponível em: http://www.ibge.gov.br/censo/censobrasil.shtm. Acesso em: 05 abr. 2013.

BROWN, A. L. Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions. **Journal of the Learning Sciences**, v. 2, n. 2, 1992, p. 141-178

BRUNER, J. **Cultura da Educação**. Lisboa: Edições 70, 2000.

Bryant, P. & Nunes, T. (2012). **Children's Understanding of Probability. A literature review**. **Full report**. Disponível em: http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf. Acesso em: 20 set. 2013.

CAMPOS, C. R., WODEWOTZKI, M. L. L., JACOBINI, O. R. **Educação Estatística**: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática. Belo Horizonre: Autêntica, 2011.

CANTORAL, R. La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. (CD-ROM) **XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática. Tema: Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas**. Blumenau, Brasil: Universidade Regional de Blumenau, 2003.

CANTORAL, R. **Acerca de las contribuciones actuales de uma didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor**. Mathesis, v.11, n.1, 1995, p. 55-101.

CARDEÑOSO, J.M.; AZCÁRATE, P**.** Tratamiento del conocimiento probabilístico en los proyectos y materiales curriculares. **Revista sobre La Enseñanza y Aprendizaje de Las Matematicas (Revista SUMA),** Zaragoza, v. 20, p.41-51, nov. 1995.

CARNEADES Disponível em: http://plato.stanford.edu/entries/carneades/. Acesso em: 07 abr. 2013.

CARVALHO, C. Literacia Estatística. (Comunicação-mesa redonda**). I Seminário de Ensino de Matemática – 14ª Conferência COLE**, Campinas, 2003.

CAZORLA, C.; SANTANA, E. Concepções, Atitudes e Crenças em Relação à Matemática na Formação do Professor da Educação Básica. GT 19-Educação Matemática. **28ª Reunião ANPED- 40 anos de Pós-Graduação em Educação no Brasil: Produção de conhecimentos, poderes e práticas.** Caxambu_MG**,** 2005.

CAZORLA, I., SANTANA, E. **Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico**. Itabuna: Via Litterarum, 2010.

CAZORLA, I. M., GUSMÃO, T. C., KATAOKA, V. Y. Validação de uma Sequência Didática de Probabilidade a partir da Análise da Prática de Professores, sob a Ótica do Enfoque Ontossemiótico. **Bolema***,* Rio Claro (SP), v. 24, n. 39, 2011, p. 537-560.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in educational research**. Educational Researcher**, v. 32, n. 1, 2003, p. 9-13.

COBB, P. Perspectivas experimental, cognitivista e antropológica em Educação Matemática. **Zétetiké**, Campinas, v. 4, n. 6, 1996, p. 153-180.

COLLINS, A. Toward a design science of education. In: SCANLON, E.; O'SHEA, T. (Ed.) **New Directions in educational technology**. Berlin: Springer Verlag, 1992, p. 15-22.

COLLINS, A.;JOSEPH, D.; BIELACZYC, K. Design Research: Theoretical and Methodological Issues. **THE JOURNAL OF THE LEARNING SCIENCES**, v. 13, n. 1, 2004, p. 15-42.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao conceito de Probabilidade por uma visão frequentista**. 1994. Dissertação (Mestrado em Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

CROSSEN, C. **O fundo falso das pesquisas: a ciência das verdades torcidas**. Rio de Janeiro: Revan, 1996;

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

D'AMBROSIO, U. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. Petrópolis: Vozes, 2008.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: Um Curso Introdutório**. São Paulo: Edusp, 2008.

DESIGN-BASED RESEARCH COLLECTIVE. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. **Educational Researcher**, v. 32, n. 1, 2003, p. 5-8. Disponível em:<http://www.designbasedresearch.org/reppubs/DBRC2003.pdf>. Acesso em: 09 mai. 2013.

DÍAZ, C. Sesgos en probabilidad condicional e implicaciones para la ensenanza. In: FERNANDES, J. A.; VISEU, F.; MARTINHO, M. H.; CORREA, P. F. (Orgs.). **Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatistica na Escola**, 2009, p. 100-116.

DÍAZ, C.; LA FUENTE, I. **Razionamento sobre Probabilidad Condicional e Implicaciones para la Enseñanza de la Estadística**. Granada: Epsilon, v. 59, 2005, p. 245-260.

ESTRADA, A.; DÍAZ, C.; LA Fuente, I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. **X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática**. Huesca, 2006.

FALK, R. Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), **Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.**Victoria, Canada: International Statistical Institute, 1986, p. 292-297.

FERNANDES, J. A. S. **Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9º ano de escolaridade**. Tese de Doutorado não publicada, Universidade do Minho. Braga, Portugal, 1999.

FIORENTINI, D.; SOUZA JR, A. J.; MELO, G. F. A. Saberes Docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E.M.A. (Orgs). **Cartografias do Trabalho Docente**. Campinas: Mercado das Letras, 2000.

FIORENTINI, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, v.3, n. 4, p. 1-38.

FISCHBEIN, E.; GAZIT, A. Does the Teaching of Probability Improve Probabilistic Intuitions? An Exploratory Research Study. **Educational Studies in Mathematics**, v. 15, n. 1, 1984, p. 1-24.

FISCHBEIN, E.; NELO, M. S.; MARINO, M. S. Factors Affecting Probabilistic Judgements in Chilren and Adolescents. **Educational Studies in Mathematics**, n. 22, 1991, p. 523-549.

FRANKLIN, J. **The Science of Conjecture: Evidence and Probability Before Pascal**. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 2001. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_probability. Acesso em: 07 abr. 2013.

FURLANETTO, Ecleide C. Formação de formadores: um território a ser explorado. **Psicol. educ.** São Paulo, n. 32, jun. 2011, p. 131-140

FURLANETTO, E. C. Formação de Professores e Experiências Simbólicas. **Revista Múltiplas Leituras**, v. 2, n. 2, 2009a, p. 239-249.

FURLANETTO, E. C. Matrizes pedagógicas e formação docente. **Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia.** Braga: Universidade do Minho, 2009b.

FURINGHETTI, F; PAOLA, D. History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. **Mathematics in School**, v. 37, n. 1, 2003, p. 37-41.

GAL, I. Towards "Probability Literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In: JONES, G. (Ed.) **Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning**. New York: Springer, 2005, p. 39-64.

GAL, I. Adults' statistical literacy: Meanings, Componentes, Responsabilities. **International Statistical Review**, v. 70, n. 1, 2002, p. 1-25.

GAL, I., and GARFIELD, J. (Eds.) **The Assessment Challenge in Statistics Education**. Amsterdam: IOS Press and the International Statistical Institute, 1997.

GAL, I., GARFIEL, J. Assessment and statistics education: current challenges and directions. **International Statistical Review**, v. 67, n. 1, 1999, p. 1-12.

GARDNER, M. Ah! Apanhei-te! (Paradoxos de Pensar e Chorar mais...). **Colecção Biblioteca Desafios Matemáticos**. Espanha: RBA Coleccionables, 2008.

GARFIELD, J., GAL, I. Teaching and assessing statistical reasoning. In: STIFF, CURSIO (Eds.). **Developing mathematical reasoning in grades K-12.** Reston: NCTM, 1999, p 207-219.

GEERTZ, C. **A interpretação das culturas**. 13ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

GIGERENZER, G.; HOFFRAGE, U. How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction: Frequency Formats. **Psychological Review**, v. 102, n. 4, 1995, p. 684-704

GLADWELL, M. **Fora de série: outliers**. Rio de Janeiro: Sextante, 2008.

GÓMEZ, A. P. O pensamento prático do professor. NÓVOA, A. (org.) **Os professores e a sua formação**. Lisboa, Dom Quixote, 1992.

GNEDENKO, B. V. A **Teoria da Probabilidade. Tradução da série de textos clássicos da American Mathematical Society.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

GUIMARÃES, M. N. **Um corpo em construção: a história de uma professora narrando a constituição dos seus saberes.** 2009. Tese (Doutorado em Educação)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

HACKING, I. **The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas About**

**Probability, Induction And Statistical Inference**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

HALL, S. **A identidade cultural na pós-modernidade**. 3ª ed. Rio de Janeiro: DP&A, 1999.

HEY, J. D.; NEUGEBAUER, T. M.; PASCA, C. M. Georges-Louis Lecler de Buffon's 'Essays on Moral Arithmetic'. In: OCKENFELDS, A.; SADRIEH, A. (Ed.). **The Selten School of Behavioral Economics**. Heidelberg: Springer, 2010, p. 245-282

HURTADO, N. H.,COSTA, J. F. S. A probabilidade no Ensino Médio: a importância dos jogos como ferramenta didática. **Conferência Internacional "Experiências e Perspectivas do Ensino de Estatística-Desafios para o século XXI",** v.1, 1999, p. 124-136.

JEFFREY, R.C. **Probability and the Art of Judgment**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992

JUNQUEIRA, A. L. N. UMA INCURSÃO NA HISTÓRIA DA EVOLUÇÃO DO PENSAMENTO ESTOCÁSTICO PARA EVIDENCIAR DIFICULDADES EPISTEMOLÓGICAS**. Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática**. Montevideo: Biblioteca Nacional de Uruguay, 2013, p. 2135-2144.

JUNQUEIRA, A. L., CAMPOS, M. L. T., WATABE, L. Uma sequência de ensino em probabilidade geométrica: o jogo da roleta. In: EDUMATEC/UFPE (Ed**). Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática-CIAEM**. Recife: LEMATEC, 2011, p. 1-12.

KAHNEMAN, D. **Rápido e Devagar: duas formas de pensar**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2012.

KAHNEMAN; TVERSKY. Subjective Probability: A Judgment of Representativeness. **Cogitive Psychology, v.** 3, 1972, p. 430-454.

KAHNEMAN, D., SLOVIC, P., TVERSKY, A. **Decision Making under Uncertainty: Heuristics and Biases**. Cambridge University Press, 1982.

KASNER, E.; NEWMAN, J. **Matemática & Imaginação: o mundo fabuloso da matemática ao alcance de todos.** 2ª ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

KATAOKA, V. Y., OLIVEIRA, A. C. S., SOUZA, A. A., RODRIGUES, A., OLIVEIRA, M. S. A educação estatística no ensino fundamental II em Lavras, Minas Gerais, Brasil: avaliação e intervenção. **Revista Latinoamerica de Investigación em Matemática Educativa**, v. 14, n. 2, 2011, p. 233-263.

KATAOKA, V. Y., RODRIGUES, A., OLIVEIRA, M.S. Utilização do Conceito de Probabilidade Geométrica como Recurso Didático no Ensino de Estatística**.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007. Belo Horizonte. **Anais eletrônicos IX ENEM**. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/minicursos.html >. Acesso em: 15 set. 2012.

KATAOKA, V. Y., *et al.* Probability Teaching in Brazilian Basic Education: Evaluation and Intervention. – Topic Study Group 13: **Research and development in the teaching and learning of probability**. ICME 11, 2008.

KOEHLER, M. J.; MISHRA, P. Introducing TPCK. In: Colbert, J. A.; BOYD, K. E.; CLARK, K. A.;GUAN, S.;HARRIS, J. B.; KELLY, M.. A.; THOMPSON, A. D. (Eds.). **Handbook of Technological Pedagogical Content Knowledge for Educators** (pp. 1–29). New York: Routledge, 2008, p. 1-29..

KOEHLER, M. J.; MISHRA, P. What is technological pedagogical content knowledge? **Contemporary Issues in Technology and Teacher Education**, v. 9*, n.* 1, 2009, p. 60-70

LOBO DA COSTA, N. M. ou COSTA, N.M.L. Reflexões sobre Tecnologia e Mediação Pedagógica na Formação do Professor de Matemática. In: BELINE, W.; LOBO DA COSTA, N. M. (Org.). **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, TECNOLOGIA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES: ALGUMAS REFLEXÕES**. Campo Mourão, PR: Editora FECILCAM, 2010, p. 85-116.

LOPES, C. A. E. **A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental*:* uma análise curricular.** 1998. 125 p. Dissertação (Mestrado em Educação)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

LOPES, Celi A. E. A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular. **Conferência Internacional "Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística" - Desafios para o século XXI**. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis (SC), 1999.

LOPES, C. A. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil**. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

LOPES, C. A. E. Literacia estatística e o INAF 2002. In: FONSECA, M.C.F.R. (Org.) **Letramento no Brasil**. São Paulo: Global Editora e Distribuidora Ltda, 2004, p. 187-197.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação de professores. **Cad. Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, 2008, p. 57-73.

LOPES, C. A. E. Os desafios para a Educação Estatística no currículo de Matemática. In: LOPES; COUTINHO; ALMOULOUD (Org.) **Estudos e Reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado das Letras, 2010, p. 47-64.

LOPES, C. E. A Educação Estatística no Currículo de Matemática: Um Ensaio Teórico. GT19 – **Anais da 33ª Reunião anual da ANPED**. Caxambu, 2010. Disponível em: http://www.anped.org.br/33encontro/app/webroot/files/file/Trabalhos%20em%20PDF/GT19-6836--Int.pdf. Acesso em: 20 abr. 2013.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin; MORAN, Regina Célia Carvalho Pinto. A Estatística e a Probabilidade em alguns livros didáticos brasileiros recomendados para o Ensino Fundamental. **Conferência Internacional "Experiências e Perspectivas do Ensino da**

**Estatística" - Desafios para o século XXI**, Florianópolis (SC), 1999. *Anais*... Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~lem/publica/ce_lopes/est_prop.pdf.
Acesso em: 20 jun. 2011.

LOPES, C. A. E., MOURA, A. R. L. Probabilidade e estatística na educação infantil: um estudo sobre a formação e a prática do professor. **XI SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática): investigação em educação matemática: perspectivas e problemas**. Funchal, Ilha da Madeira, 2000. p. 169-78.

LOPES, C. E.; COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOUD, S. (Orgs). **Estudos e reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado das Letras, 2010.

MA, L. **Saber e Ensinar Matemática Elementar**. Lisboa: Gradiva, 2009.

MATURANA, H. R. Biology of language: The epistemology of reality. In: MILLER, G. A. e LENNENBERG (Eds.). **Psychology and biology of language and thought: Essays in honor of Eric Lennenberg.** New York: Academic Press, 1978, p. 27-63.

MIGUEL, A., MIORIM, M. A. História da Matemática: uma prática social em construção. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n 32, 2002, p. 177-203.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. **Teachers College Record**, v. 108, n. 6, 2006, p. 1017-1054.

MIZUKAMI, M. G. N., *et al.* **Escola e aprendizagem da docência: processos de investigação e formação**. São Carlos: EdUFSCar, 2002.

MIZUKAMI, M. G. N. Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman. **Revista Educação**. Centro de Educação da Universidade Federal de Santa Maria. v.. 29, n. 2, 2004.

MLODINOW, Leonard**. O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

MORON, C.F., Brito, M. R.F. Atitudes e concepções dos professores de educação infantil em relação à Matemática. In: Brito, M. R. F. (Org). **Psicologia da Educação Matemática: teoria e pesquisa.** Santa Catarina: Insular. 2001, p. 263-277.

MOTTA, C. D. V. B. História da matemática na educação matemática: espelho ou pintura? In: **IX Encontro Nacional de Educação Matemática-IX ENEM**. Anais...Belo Horizonte, 2007.

NABBOUT, M.; MAURY, S. Teachers´representations of independent events: what might an attempt to make sense hide?. **Proc. 4º Conference of European Research in Mathematics Education**. Barcelona, Espanha, 2005. Disponível em: <http://fractus.uson.mx/Papers/CERME4/Papers%20definitius/5/NabboutMaury.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2013.

NÓVOA, A. Formação de professores e profissão docente. In: NÓVOA, A. (coord.). **Os professores e a sua formação.** Lisboa: Dom Quixote, 1992, p. 13-33.

NÓVOA, A. **Evidentemente: Histórias de Educação.** Porto: Edições ASA, 2005.

NÓVOA, A. **Desafios do trabalho do professor no mundo contemporâneo**. São Paulo: SINPRO-SP, 2007.

NÓVOA, A. **Professores: Imagens do futuro presente**. Lisboa: EDUCA, 2009.

Nunes, T. **Children's understanding of probability and certainty. An exploratory study of a two-factor description of mathematical ability**. John Fell Fund. June-August 2012.

ODY, M. C. **LITERACIA ESTATÍSTICA E PROBABILÍSTICA NO ENSINO MÉDIO**. 2013, 164 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática)-Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2013.

OLIVEIRA, S.; CAZORLA, I. Ensinando probabilidades no ensino fundamental. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, v.24, n.13, p.3-6, 2008.

PLATAO **"Teeteto"**. Tradução: Carlos Alberto Nunes. Versão eletrônica de domínio público, do diálogo platônico. Disponível em: http://www.cfh.ufsc.br/~wfil/teeteto.pdf. Acesso em: 07 abr. 2013.

PERRENOUD, Philippe, *et al*. **Formando Professores Profissionais**. (Orgs). 2ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2001.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A origem da ideia do acaso na criança**. Rio de Janeiro: Record, 1959.

PIETROPAOLO, R.; CAMPOS, T. M. M. Um estudo sobre os conceitos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais. In: BORBA, R. E. S. R.; MONTEIRO, C. E. F. (Org.) **Processos de Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática**. v. 1. Recife: Editora Universitária UFPE, 2013, p. 57-93.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POLLATSEK, A.; WELL, A. D.; KONOLD, C.; HARDIMAN, P. Understanding conditional probabilities. **Organization, Behavior and Human Decision Processes**, n. 40, 1987, p. 255 – 269.

POMBO, O. A Interdisciplinaridade como Problema Epistemológico e Exigência Curricular. **Revista Inovação**, v. 6, n. 2, 1993, pp. 173-180.

PONTE, J. P. Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In: ***Educação Matemática: Temas de Investigação*** (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação

Educacional. 1992. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm. Acesso em: 14 fev. 2013.

PONTE, J. P.; FONSECA, H. Orientações curriculares para o ensino da estatística: Análise comparativa de três países. Lisboa: **Quadrante,** n. 10 v. 1, 2001, 93-115.

PRADO, M. E. B. B.(2005**). Integração das Tecnologias na Educação**. Brasília: MEC/SEED, 2005. Disponível em: http://www.tvbrasil.org.br/saltoparaofuturo/livros.asp. Acesso em 29 abr. 2011.

PRADO, M.E. B. B. **A mediação pedagógica: suas relações e interdependências**. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE. Anais ... Brasília: UNB/UCB, 2006, p. 101-110.

PRADO, M. E. B. B. Estratégias de orientação para a prática do professor no contexto da educação a distância. **Revista E-Curriculum**, São Paulo, v. 4, n. 2, jun 2009. Disponível em: <http://www.pucsp.br/ecurriculum>. Acesso em: 09 set. 2010

RADFORD, L. **Cognição Matemática: História, Antropologia e Epistemologia**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

RADFORD, L., Furinghetti, F., Katz, V. The Topos of Meaning or the Encounter of Past and Present. **Educational Studies in Mathematics**, 66, 2007, p. 107-110.

RAYMOND, A. M**.** Inconsistency between a Beginning Elementary School Teacher's Mathematics Beliefs and Teaching Practice. **Journal for Research in Mathematics Education,** Vol. 28, N. 5. 1997. p. 550-576.

REZENDE, F. A. **Características do ambiente virtual construcionista de ensino e aprendizagem na formação de professores universitários**. Dissertação de Mestrado em Multimeios. Instituto de Artes da UNICAMP. Campinas-SP, 2004, 246 p.

RIBEIRO, André Antonio. **A filosofia da linguagem em Platão**. Dissertação (Mestrado em Filosofia). Faculdade dxe Filosofia e Ciências Humanas-Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul- PUC-RS, 2006, 143 p.

Ríos, S. **Métodos Estadísticos**, (Quinta Edición), México, Libros Mc Graw-Hill, 1973.

ROCHA, S. H. **Curso de Probabilidade e Estatística. Aula 08: Probabilidade o que é e como calcular?** Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: <http://pessoal.utfpr.edu.br/heidemann/?id=4>. Acesso em: 28 out. 2012.

RODRIGUES, F. W. **Eventos Independentes**. Coleção Explorando o Ensino. V 3. Brasil. Secretaria de Educação Básica-MEC, 2004, p. 179-186.

RODRIGUES, J. M. S. **A probabilidade como componente curricular na formação matemática inicial de professores polivalentes**. (2011). Tese (Doutorado em Educação)-Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2011, 151 p.

ROKEACH, M. **Crenças, Atitudes e Valores: uma teoria de organização e mudança**. Rio de Janeiro: Interciência. 1981

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**. **Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito.** São Paulo: M.Books, 2012.

ROSSMAN, A., SHAUGHNESSY, M. Interview with Mike Shaughnessy. **Journal of Statistics Education**, V. 21, n. 1, 2013. Disponível em: <www.amstat.org/publications/jse/v21n1/rossmanint.pdf>. Acesso: 25 jun. 2013.

ROTH, W. M.; RADFORD, L. **A Cultural-Historical Perespective on Mathematics Teaching and Learning**. Rotterdan: Sense Publishers, 2011.

RUMSEY, D. J. Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. **Journal of Statistics Education**, v. 10, n. 3, 2002. Disponível em: <http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/rumsey2.html>. Acesso em: 20 set. 2012.

SÁ-CHAVES, I. **Formação, Conhecimento e Supervisão: Contributos nas áreas de formação de professores e de outros profissionais**. Estudos temáticos 1. Aveiro: Universidade de Aveiro, 2000.

SALSBURG, D. **Uma senhora toma chá...: como a estatística revolucionou a ciência do século XX**. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

SANTANA, M. R. M. **O Acaso, o Provável, o Determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica)-Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

SANTOS, R. F. V. S. **Probabilidade Circa 1914 e a Construção de Pacheco d'Amorim**. 2008. 769 p.Tese (Doutorado em Estatística e Investigação Operacional)-Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

SCHÖN, Donald A. **Educando o Profissional Reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

SCHUBRING, G. Production mathématique, enseignement et communication. **Revue d'histoire es mathématiques,** v. 7, 2001, p. 295-305.

SEIFE, C. **Os números (não) mentem: como a matemática pode ser usada para enganar você**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012;

SHAUGHNESSY, J.M. Misconceptions of probability: an experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. **Educational Studies in Mathematics**, v. 8, 1997, p. 285-316.

SHAUGHNESSY, J.M. Research in probability and statistics: reflections and directions. In: GROUWS, D.A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** New York: MacMillan, 1992, p. 465-494.

SHAUGHNESSY, J.M. Research on statistics learning and reasoning. In: LESTER, F. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston: NCTM, 2007, p. 465-494.

SCHÖN, Donald A. **Educando o Profissional Reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

SHULMAN, Lee S. **Teaching as Community Property: Essays on Higher Education**. San Francisco: Pat Hutchings, 2004.

SHULMAN, L. Knowledge and teaching: foundations of the New Reform. (In: Harvard educational review, (1987), vol. 57 (1). pp. 1-22). In: HUTCHINGS, P. (Ed). **Teaching as Community Property: Essays on Higher Education**. San Francisco: Pat Hutchings, 2004b.

SHULMAN, L. Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. Harvard Educational Review, Cambridge, v.57, n.1, 1987, p.1-22..

SHULMAN, L. Research on teaching. A historical and personal perspective. In: WILSON, M.S. (Ed). **The Wisdom of Practice. Essays on teaching, learning, and learning to teach**. San Francisco: Jossey-Bass, 2004a, p. 364-381.

SHULMAN, L. Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. In: WITTROCK, M. C. (Ed.). **Handbook of research on teaching**. 3. ed. New York: Macmillan. 1986a. p. 3-36

SHULMAN, Lee S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching**. Educational Research**, Vol. 15, N. 2, 1986b, p. 4-14.

SHULMAN, L. Ways of seeing, ways of knowing, ways of teaching, ways of learning about teaching. **Journal of Curriculum Studies***, 28*, 1992, p. 393-396.

SILVA, C. B da, COUTINHO, C. Q. S. O nascimento da Estatística e sua relação com o surgimento da Teoria de Probabilidade. São Paulo: Revista Integração. v. 1, n. 1, p. 191-96, 2005.

SILVA, C. B. da, BRITO, M. R. F. de, CAZORLA, I. M. e VENDRAMINI, C. M. M. Atitudes em relação à Estatística e Matemática.Psico-USF, v. 7, n. 2, p. 219-28, jul./Dez. 2002.

SILVA, I. **Probabilidades: a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito.** 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002, 174 p.

SILVA, J. G. C. **Introdução à Probabilidade**. 1. ed. Pelotas: Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2002.

STEFFE, L.P., THOMPSON, P.W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements**.** In: LESH, R., KELLY, A. E. (Eds), **Research design in mathematics and science education** . Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000, p. 267-307.

STIGLER, S. M. **The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900**. Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press, 1986

STROGATZ, S. **A matemática do dia a dia:** transforme o medo de números em ações eficazes para sua vida. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

TALEB, N. N. **A Lógica do Cisne Negro: O impacto do altamente improvável**. 5 ed. Rio de Janeiro: Best Seller, 2011.

TARDIF, M. **Saberes Docentes e Formação Profissional**. 9ª ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

THOMPSON, A. G. Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In: D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of research in mathematics teaching and learning.** New York, NY: Macmillan. 1992, p. 127-146.

TODHUNTER, I. **A History of the Mathematical Theory of Probability: from the time of Pascal to that of Laplace.** Cambridge: Macmillan, 1865.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Belief in the Law of Small Numbers. **Psychological Bulletin**, v. 76, n. 2, 1971, p. 105-110.

TUNALA, N. Determinação de probabilidades por métodos geométricos**. Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, v. 20, p. 16-22, 1995.

VALDÉS, J. E. N. **Conferencias de Historia de la Matemática (I).** Cuba: EdUTecNe, 1996.

VALENTE, J. A. Análise dos diferentes softwares usados na educação. In: VALENTE, J. A. (Org.). **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas: NIED-UNICAMP, 1999.

VALENTE, J. A. (1999). **Diferentes Abordagens de Educação a Distância**. Artigo Coleção Série Informática na Educação – TVE Educativa. Disponível em: <http://www.proinfo.gov.br>. Acesso em: 10 set 2011.

VALENTE, J. A. **Diferentes abordagens na Educação a Distância**. Campinas: NIED/UNICAMP. 2001

VALENTE, J. A. A espiral da aprendizagem e as Tecnologias de Informação e Comunicação: Repensando Conceitos. In: JOLY, M. C. R. A. (Org). **A tecnologia no Ensino: Implicações para a aprendizagem**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002.

VALENTE, J. A. A Interação entre Aprendizes nas Comunidades Virtuais de Aprendizagem: Oportunidade de Aprender e Identificar Talentos. In: **XV Endipe-Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino Convergências e Tensões no Campo da Formação e do Trabalho Docente: Educação Profissional e Tecnológica**. Anais... Belo Horizonte: Autêntica, 2010, p.230 a 250.

VALENTE, W. R. A matemática na escola: um tema para a história da educação. In: **Encontro da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática – História do Ensino da Matemática em Portugal**. Anais...Beja, 2004, p. 21-31.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. O que falam formadores sobre a formação (sólida em) matemática de futuros professores que ensinam matemática. In: ANGELO, C. L. et al. (Orgs). **Modelos dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história.** São Paulo: Midiograf, 2012.

VIOLA DOS SANTOS, J.R.; LINS, R.C. **Formação matemática do professor nas disciplinas de conteúdo matemático de um curso de licenciatura em Matemática**. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/272-1-A-GT1_Viola%20dos%20Santos_ta.pdf>. Acesso em: 15 abril 2013.

ŽALSKÁ, J. Mathematics Teachers' Mathematical Beliefs: A Comprehensive Review of International Research (Matematicka přesvědčeni učitelů matematiky: přehled mezinarodniho vyzkumu***).*** **Scientia in educatione** v. 3, n. 1, 2012. p. 45–65.

ZAKARIA, E., MAAT, S. M. Mathematics Teachers' Beliefs and Teaching Practices. **Journal of Mathematics and Statistics**, v. 8, n. 2, 2012. p. 191-194.

ZEICHNER, K. El Maestro como profesional reflexivo**. Cuardernos de Pedagogía,** n. 220, 1993, p. 44-49.

ZEICHNER, K. Para além da divisão entre professor pesquisador e professor acadêmico. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. **Cartografias do Trabalho Docente**. Campinas: Mercado das Letras, p. 207-236, 2000.

ZEICHNER, K. Uma análise crítica sobre a "reflexão" como um conceito estruturante na formação docente. **Educ. Soc**., Campinas, vol. 29, n. 103, 2008, p. 535-554.

## APÊNDICE A – Textos disponibilizados no Ambiente Virtual

Observatório da Educação

### Unidade I: Introdução

## Noções Básicas de Probabilidade.

Hoje em dia nos deparamos com uma grande quantidade de jogos, como loteria esportiva, loteria federal, sena, entre outras ofertas de prêmios dos mais variados tipos. É natural que as pessoas interessadas pensem quais são suas chances de ganhar antes de apostar ou concorrer.

Nos feriados ou finais de semana ou mesmo quando temos alguma programação agendada, queremos saber como estará o clima: se vai fazer sol ou se vai chover, se fará frio ou calor. Temos que decidir qual roupar vamos usar ou o que levar conosco para nos prevenirmos.

Se resolvermos fazer um investimento, quer seja em poupança, em ações ou de outro tipo, desejamos saber a priori como estes estão se comportando no mercado investidor para decidir qual deles dará melhor retorno financeiro que possa atender às nossas expectativas.

Um médico pode se deparar com a incerteza dos efeitos que poderão ser provocados num paciente ao administrar-lhe um novo remédio. Até mesmo em uma situação mais simples, como chegar a uma bifurcação com mais de uma possibilidade de trajeto, temos que analisar as condições do trânsito para decidir qual será a melhor opção.

Enfim, em diversas ocasiões da vida cotidiana nos deparamos com situações em que temos de tomar uma decisão, mas não temos a certeza do que poderá ocorrer exatamente, ou seja, as situações não apresentam resultados previsíveis.

Tais situações se encaixam no que denominamos **experimentos ou fenômenos aleatórios**.

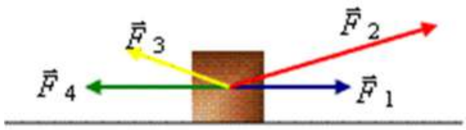
Para melhor entendermos vamos ver alguns conceitos.

## 1. Modelo

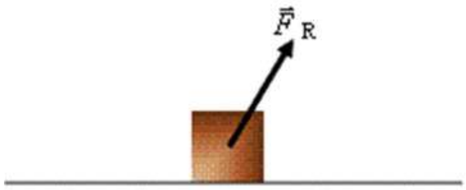
É uma representação simplificada da realidade (desprezando-se detalhes que não interessam ao estudo) com a finalidade de estudar determinado problema ou fenômeno. É o que acontece quando se deduz uma equação matemática para descrever um fenômeno físico.

Por exemplo: ao falarmos em dinâmica de corpos, a imagem que vem à cabeça é a clássica e mitológica de Isaac Newton, lendo seu livro sob uma macieira. Repentinamente, uma maçã cai sobre a sua cabeça. Segundo consta, este foi o primeiro passo para o entendimento da gravidade, que atraía a maçã. Com o entendimento da gravidade, vieram o entendimento de Força, e as três Leis de Newton. O conceito de força é algo intuitivo, mas para compreendê-lo, pode-se basear em efeitos causados por ela, como aceleração e deformação.

Força Resultante é a força que produz o mesmo efeito que todas as outras aplicadas a um corpo. Dadas várias forças aplicadas a um corpo qualquer, como na figura a seguir.




A força resultante será igual à soma vetorial de todas as forças aplicadas:




A 2ª lei de Newton diz que a Força é sempre diretamente proporcional ao produto da aceleração de um corpo pela sua massa, ou seja:

$\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$, ou em módulo: F=ma,

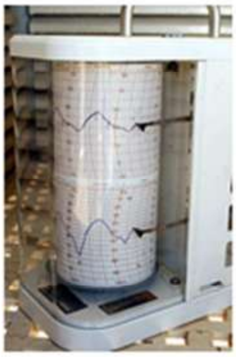
onde F é a intensidade da resultante de todas as forças que agem sobre o corpo (em N), m é a massa do corpo no qual as forças atuam (em kg), a é a aceleração adquirida (em m/s²). A unidade de força, no sistema internacional, é o N (Newton), que equivale a kg m/s² (quilograma metro por segundo ao quadrado). Esta equação descreve o fenômeno físico do efeito de uma força atuando sobre um corpo de massa m, portanto, modela este fenômeno.

## 2. Experimento

É uma experiência ou observação que possa ser repetida nas mesmas condições básicas. É o que acontece nas observações meteorológicas.

Exemplo: medir a umidade do ar todo dia num mesmo local.

Há vários aparelhos usados para medir e regular a umidade. Um dos aparelhos usados para medir a umidade é o higrômetro; quando o higrômetro utiliza termômetros de bulbos molhados, recebe a denominação de psicrômetro. Para regular a umidade do ar, é utilizado o umidificador, especialmente em dias nas quais a umidade relativa cai para menos de 30%. Também há casos onde é necessário o uso de desumidificador, para remover o excesso de umidade do ar. A umidade do ar também pode ser medida remotamente, em escala global, com a utilização de sensores especiais montados em satélites meteorológicos. (veja links http://pt.wikipedia.org/wiki/Umidade_do_ar e http://www.etec.com.br/muda3.html ou http://www.esac.pt/estacao/instrumentos.htm).



Higrômetro – um dos instrumentos que servem para mensuramento da umidade

Outro exemplo de experimento: reconhecer os principais componentes do solo.

1. Encher um copo com água até metade, colocar 2 ou 3 colheres de amostra de solo e mexer. Observar através do líquido o feixe de luz de uma lanterna e comparar com água limpa. Filtrar a mistura através de um pano limpo e analisar o que ficou retido no pano.

2. Colocar um pouco do solo numa colher ou numa espátula e aquecer. Colocar um vidro de relógio, um espelho ou outra superfície de vidro próxima à colher sem encostar. Observe o que acontece no vidro.

Explicação: Com estes procedimentos podemos identificar a presença de ar através do desprendimento das bolhas, de partículas sólidas que turvam a água limpa e da água através da condensação no vidro. Se prosseguirmos com o aquecimento iremos verificar a mudança na cor, indicando a queima da matéria orgânica do solo. (veja link http://educar.sc.usp.br/ciencias/recursos/solo.html#compo)

## 3. Experimentos aleatórios ou probabilísticos

São aqueles que, mesmo repetidos várias vezes, sob condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis. Em quase tudo, em maior ou menor grau, vislumbramos o **acaso,** mesmo que tenhamos em certas situações estudos e fundamentos que diminuam o grau de incerteza.

Assim, da afirmação “é provável que o meu time ganhe a partida de hoje” pode resultar:

**a.** que ele perca, apesar do favoritismo da torcida ou do desempenho favorável no campeonato até então, principalmente em relação ao time adversário;

**b.** que ele ganhe, como o torcedor pensava e desejava;

**c.** que empate.

Como vimos, o resultado final depende do **acaso**. O denominado **acaso** é um conjunto de forças, não determinadas ou controladas, que exercem individualmente ou coletivamente papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno.

Fenômenos como esses são chamados **fenômenos aleatórios** ou **experimentos aleatórios** ou ainda **experimentos probabilísticos**.

2.1 Alguns exemplos de experimentos aleatórios:

a) De uma urna com bolas brancas e vermelhas, sem olhar retirar uma bola branca.


b) Num processo de produção, ao retirar aleatoriamente um lote de peças, observar que o número de peças defeituosas varia de lote para lote.

c) No lançamento de dados numa superfície plana, não podemos determinar a priori qual número aparecerá na face superior dos dados após o lançamento.

d) Na reprodução humana usual, o material genético de uma criança é uma combinação aleatória do material genético dos pais. Assim, o nascimento de uma criança, por exemplo, é um experimento aleatório em relação à cor dos olhos, tipo de cabelo e muitas outras características físicas. Frequentemente, o interesse se concentra na transmissão aleatória de desordens genéticas aos descendentes.

## 4. Experimentos Determinísticos

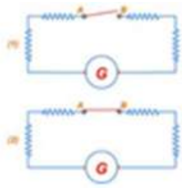
Um experimento determinístico é aquele em que as condições iniciais do experimento são preponderantes para determinar o resultado final. Ou ainda são experimentos que, ao serem repetidos nas mesmas condições, conduzem ao mesmo resultado.

4.1 Alguns exemplos de experimentos determinísticos.

a) Ao deixarmos cair um objeto de certa altura podemos determinar sua posição e velocidade em qualquer momento da queda.

b) Observar uma corrente ***i*** que passa por um circuito elétrico, com uma resistência **R** e uma d

diferença de potencial **V**.




*Aqui o resultado final pode ser previsto antes de executar o experimento.*

## 5. Caracterização de um Experimento Aleatório

(a) um experimento pode ser repetido muitas vezes, sob condições basicamente inalteradas;

(b) embora não sejamos capazes de afirmar qual resultado ocorrerá podemos descrever o conjunto de todos possíveis resultados do experimento;

(c) quando o experimento for executado repetidamente, surgirá certa regularidade estatística, o que torna possível construir um modelo matemático preciso de análise.

Exemplos:

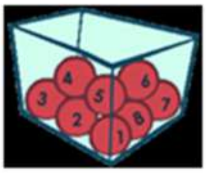
1)Uma moeda tem duas faces: cara e coroa.

Lançar uma moeda e anotar o resultado.

Após um grande número de lances a proporção de caras e coroas será aproximadamente igual.

2) Uma urna contem bolas numeradas de 1 a 8

Retirar uma bolinha da urna (sem olhar) e anotar seu número, depois repor a bolinha e repetir o experimento, anotando sempre.



Verificar quantas vezes saiu a bolinha de cada número. Após um grande número de lances a proporção de cada bolinha ter sido retirada será aproximadamente igual 1/8. (veja link: http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/090325_probabilidad.elp/experimentos_aleatorios_y_deterministas.html)

*Aqui o resultado final não pode ser previsto antes de executar o experimento, apenas podem ser previstas as possibilidades de resultados.*

Atualmente, o **caos** é utilizado como uma ferramenta de observação de fenômenos previamente mal compreendidos do ponto de vista determinístico, tais como fenômenos epidemiológicos, turbulência em fluidos, fluxo de calor, ritmos biológicos e movimentos populacionais, sociais e econômicos. Historicamente, o estudo da química tem enfatizado o estudo de processos químicos complexos, e da importância do entendimento dos mesmos no estudo dos sistemas vivos.

Ritmo biológico

Turbulência em fluidos

## 6. Espaço amostral

Espaço amostral associado a um experimento é o conjunto dos resultados possíveis desse experimento. O espaço amostral será representado por um conjunto S, cujos elementos serão denominados eventos simples. Sempre que o experimento for realizado suporemos que ocorrerá um e apenas um evento simples.

Por exemplo, no lançamento de um dado de seis faces, o espaço amostral é o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Ou no lançamento de uma moeda, duas vezes consecutivas sobre uma superfície plana, poderá ocorrer cara $(C)$ ou coroa $(K)$ em cada uma delas, daí o espaço amostral desse experimento é $S = \{CC, CK, KC, KK\}$.

Nesse tipo de experimento o espaço amostral é finito. Mas podemos ter experimentos em que o espaço amostral não é finito, como por exemplo, o lançamento de uma moeda até que apareça cara $(C)$ pela primeira vez. Observe que, nesse caso, o espaço amostral será o conjunto $S = \{C, KC, KKC, KKKC, \dots .\}$ , que é um conjunto infinito enumerável (que pode ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais).

Ou ainda o experimento em que se observa o tempo de vida de uma lâmpada, que terá espaço amostral $S = \{x \epsilon \mathcal{R}: x \geq 0\}$, que é um conjunto infinito não enumerável, mesmo que saibamos ser quase impossível que uma lâmpada tenha um tempo de duração infinito, mas é o que devemos considerar, já que não temos definido a priori um limite máximo do tempo de duração. E se tivéssemos T como tempo máximo de duração para certo tipo de lâmpada? Ainda assim, o espaço amostral para o experimento de observar o tempo de duração de uma lâmpada de tal tipo seria $S = \{x \epsilon \mathcal{R}: 0 \leq x \leq T\}$, que também é um conjunto infinito (não enumerável), embora limitado.

## 7. Operações entre os eventos

Um evento A é qualquer subconjunto de um espaço amostral S, logo A ⊂ S. A reunião de dois eventos A e B, denotada por AUB (Fig 1), é o evento que ocorre se pelo menos um deles ocorrer. A interseção de dois eventos, denotada por A∩B (Fig. 2), é o evento que ocorre se ambos ocorrerem. O complementar de um evento A, denotado por $A^C$ (Fig. 3), é o evento que ocorre quando A não ocorre.

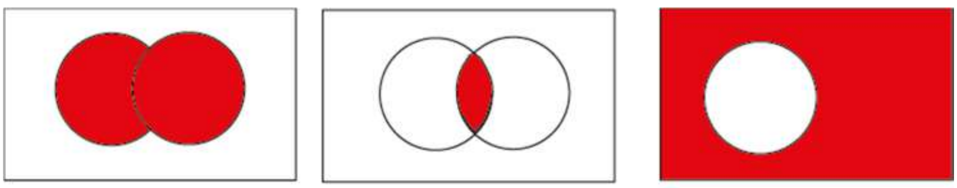


Fig.1 Fig. 2 Fig.3

Dizemos que dois eventos são **mutuamente exclusivos** (ou excludentes) quando um não ocorre quando o outro ocorrer, daí temos que $A \cap B = \emptyset$.

Vejamos um exemplo: Considere o lançamento de um dado (não viciado) de seis faces. O espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Sejam A, B e C os seguintes eventos: A: a face superior é ímpar; B: a face superior é um número primo; C: a face superior é par.

Portanto temos:

$A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,3,5\}$ , $C = \{2,4,6\}$, $A \cup B = \{1,2,3,5\}$ , $A \cup C = S$, $B \cup C = \{2,3,4,5,6\}$, $A \cap B = \{3,5\}$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \{2\}$, $A^c = \{2,4,6\} = C$, $B^c = \{1,4,6\}$, $C^c = \{1,3,5\} = A$. Vemos, portanto, que os eventos $A$ e $C$ são mutuamente exclusivos e ainda que, nesse caso, que $A \cup C = S$, ou seja, um evento é o complementar do outro.

Estas operações podem se estender para reuniões e interseções enumeráveis de eventos.

Antes de prosseguir com outras noções, vamos fazer um resgate histórico do conceito de probabilidades. **Vá para Unidade II**

## Unidade II: Uma visão histórica do conceito de probabilidades

A noção de probabilidade tem sua origem mais remota relacionada à prática dos jogos, ditos de azar. O **jogo** então foi o motor de arranque da criação desse conceito e o que mais se beneficiou com as probabilidades. Parece que tudo começou com o jogo de dados.

As informações são um pouco desencontradas, o que é natural uma vez que uma nova escavação pode alterar a data da descoberta, mas sabe-se que por volta de 1200 a.C. já existiam dados com formas cúbicas feitos a partir de ossos de animais, como o tornozelo de boi.

Dado do Jogo do Osso, aqui feito de pedra-sabão.

Mais tarde outros materiais foram utilizados, como o marfim, a madeira e a pedra, até os atuais polímeros (plásticos). Mas parece que desde a pré-história os dados teriam sido utilizados no Oriente; escavações feitas em cemitérios mostra que provavelmente têm origem na Ásia.

"***Jogar dados***" é uma expressão que aparece no jogo indiano *Rig-veda* e existem indícios que foram inventados na Índia, pois em escavações feitas em Kalibangan, Lothal e Ropar, foram encontrados dados com mais de 2000 A. C.

Na forma primitiva do ***Jogo do osso*** (ou *knucklebone)*, crianças atiravam o osso na expectativa de deixar certo lado para cima ou para baixo. Em Árabe a palavra *knucklebone* é a mesma para dado.

Escavações em Shahr-i Sokhta (na antiga Pérsia, hoje o Irã), sítios arqueológicos levaram à descoberta de dados, dos mais antigos que se têm conhecimento, como parte de um jogo de Gamão, com mais de cinco mil anos de idade, que provavelmente foi importado da Índia.

Encontrados em tumbas egípcias, os dados sugerem um período de cerca de 2000 a.C. Na Índia também foram encontrados registros escritos acerca de dados no grande épico Mahabharata, que data de mais de dois mil anos.

Posteriormente, os dados de osso ganharam valores numéricos, tornando-os mais parecidos com os atuais. No entanto, o jogo atingiu uma grande popularidade com os gregos e os romanos. Os romanos eram exímios jogadores, principalmente na era de luxo do Império Romano e jogar dados era o passatempo predileto, tanto que esse jogo por dinheiro era motivo de leis especiais em Roma. Jogadores profissionais de dados eram comuns, sendo que alguns desses dados estão preservados em museus.

Os romanos conheciam duas variedades de jogo: os autênticos dados, ***tesserae*** e os ***astrálagos*** (***tali***), feitos com os ossos do calcanhar de ovelhas, vitelos ou outros animais, ou com a sua reprodução em metal.

Na imagem os autênticos dados – ***tesserae***- e os ***astrálagos*** (***tali***)[1].

A lei romana só permitia a prática de jogos de azar durante as Saturnais (festividades romanas pagãs realizadas no final do ano em homenagem a Saturno), mas apesar disso, foram muitos os que se arruinaram por causa destes dados. (veja o link: http://imperioromano-marius70.blogspot.com/2007_06_01_archive.html )

Na Idade Média, a igreja católica era contra o jogo dos dados, não pelo jogo em si, mas pelo vício de beber e dizer palavrões que era comum durante os jogos. Os jogadores inveterados do século XVI procuravam cientistas de renome para que estes lhes dessem fórmulas mágicas para garantir ganhos substanciais nas bancas de jogo.

Os dados também foram populares na China, Índia, Japão, Coréia e outros países da Ásia. As marcas feitas no dominó chinês evoluíram das marcas nas faces dos dados. Na Tailândia, chamado de *Hoo Hey How* ou *Bau Cua Ca Cop*, é um tipo de loteria.

No Havaí encontram-se dados decorados no estilo Kaha Ki'i, feitos à mão, datando de 900 d.C. Estes dados nos remetem às formas primitivas de comunicação, utilizando argila.

Dados havaianos

Dados de Hoo Hey How

Dados chineses

Dados tailandeses

Desde sempre os jogos foram utilizado em apostas, mas também serviram para prever futuro, decidir conflitos ou dividir heranças.

Entretanto, não foram só os jogos que contribuíram para a formação do conceito de probabilidade. Também a prática dos seguros teve forte influência e parece ter se iniciado com comerciantes mesopotâmicos e fenícios que o aplicavam à perda de cargas dos navios por conta de roubos ou naufrágios. Essa prática teve continuidade com os romanos e gregos estendendo-se até aos comerciantes marítimos italianos em tempos mais recentes. Não se sabe muito sobre a prática das seguradoras, mas especula-se que se baseavam em estimativas empíricas das probabilidades. O crescimento de conglomerados urbanos, após a idade média, popularizou o uso de seguros. Apesar do crescimento desse tipo de negócio, os prêmios dos carregamentos entre as Américas e as Índias continuavam sendo calculados pelas técnicas milenares. É daí, então, que surgem os primeiros estudos matemáticos acerca desse tipo de negócio. Em 1693 foi publicado o primeiro trabalho sobre seguros, *An Estimate of Degrees of Mortality of Mankind*, de autoria de Edmond Halley (1656-1742), o mesmo cujo nome batizou o cometa.

**Halley**

O britânico Halley era professor de geometria em Oxford em 1703 e foi nomeado astrônomo real em 1721. Desde criança já se interessava pela matemática.

Antes dele, em 1570, na obra *De proportionibus Libre V*, Cardano fez uma tentativa de estudar matematicamente os seguros de vida, no entanto, não alcançou repercussão. Halley mostrou como determinar a anuidade de um seguro (prêmio) em termos da esperança de vida e da probabilidade de sobrevida.

O estudo de seguros atingiu a maturidade com Daniel Bernoulli (1654-1705), que utilizou a abordagem de calcular o número esperado de sobreviventes após "n" anos, dado certo número de nascimentos (conceito de probabilidade condicional – que veremos mais adiante, em outra unidade). Nesse momento começavam a aparecer grandes empresas de seguros que tinham condições de trabalhar com embasamento científico.

Entretanto, uma abordagem matemática do ***acaso*** e do ***risco*** só teve início há cerca de 500 anos. Uma contribuição decisiva para a criação da Teoria das Probabilidades deu-se por meio da correspondência trocada entre os matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), nas quais ambos chegaram à solução correta, por caminhos diferentes, de um problema célebre da divisão das apostas, em 1654.

**Pascal**

**Fermat**

Quis o **acaso** que o austero Pascal conhecesse Méré, jogador quase profissional, que lhe contava as disputas com seus adversários, muitas delas com controversas resoluções sobre dados e apostas. Depois de refletir sobre elas, Pascal trocou correspondências com seu amigo Fermat (**veremos este problema em outra unidade**). Estas *cartas* históricas são documentos fundadores da Teoria das Probabilidades, que mais tarde desenvolveu-se através dos trabalhos de Jacques Bernoulli (1654-1705), Moivre (1667-1759) e Thomas Bayes (1702-1761). Bernoulli publicou o livro *Ars Conjectandi*, em 1713, que foi o primeiro dedicado inteiramente às probabilidades.

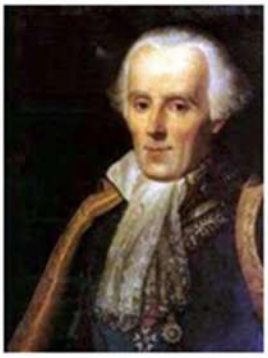
Jacques Bernoulli

Nesse livro é que se encontra a lei dos grandes números, hoje chamado Teorema de Bernoulli, que pode assim ser enunciada:

> ***A frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar-se nas vizinhanças de um valor quando o número de experimentos cresce indefinidamente.***

Moivre introduziu e demonstrou a lei normal e a Bayes deve-se o cálculo das chamadas probabilidades das causas, que consiste em determinar a probabilidade dos acontecimentos perante certas condições iniciais.

Na segunda metade do século XVIII e primeira metade do século XIX adquiriu uma forma concisa e sistemática. Laplace, em 1812, publicou importante obra *Teoria Analítica das Probabilidades*, sistematizando os conhecimentos da época e aonde se encontra a Lei de Laplace. Destaca-se também a participação de Gauss (1777-1855) no aprofundamento da Lei Normal e a de Poisson na sua *Teoria da lei dos grandes números e da lei de repartição*.

Gauss Laplace

No século XIX e princípio do século XX a teoria das probabilidades tornou-se um eficaz instrumento, exato e fiável do conhecimento. Surge daí a célebre escola de San Petersburgo, com grandes nomes como Tchébychev (1821-1894), Markov (1856-1922) e Liapounav (1857-1918). À escola de San Petersburgo sucedeu a escola soviética, cujo grande destaque foi Kolmogorov (1903-1987), que axiomatizou corretamente a teoria das probabilidades e um dos sucessos da sua abordagem foi dar uma definição rigorosa da expectância condicional.

Kolmogorov

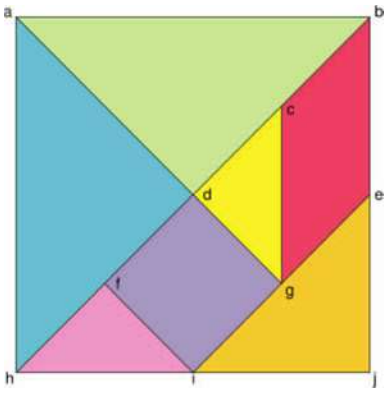
A teoria das probabilidades começou com um ***jogo***. Fermat e Pascal viabilizaram que o estudo do ***acaso*** tomasse uma expressão matemática, introduzindo o *Cálculo das Probabilidades*. Este, juntamente com o Método dos mínimos quadrados, vieram credibilizar a Estatística.

Hoje a Teoria das Probabilidades transformou-se num dos ramos da matemática com mais aplicações nas outras ciências: exatas, naturais e sociais (vide unidade sobre aplicações das probabilidades). Este breve olhar sobre a evolução histórica das probabilidades destaca algumas das dificuldades previsíveis do seu ensino. Se os matemáticos que contribuíram com a criação e o desenvolvimento da teoria tiveram certa dificuldade de ver claramente e alguns paradoxos ainda persistem até hoje, podemos presumir, sem grande risco de erro, que acontecerá o mesmo com alunos e professores. Nesse sentido, a análise retrospectiva destas dificuldades podem nos ajudar a buscar uma forma de ensino que leve isto em conta no sentido de superar e tentar garantir a aprendizagem.

**O Tangram e a probabilidade geométrica**

*Ana Lucia N. Junqueira*

O TANGRAM é mais uma ferramenta que pode auxiliar no estudo da geometria, além de desenvolver a criatividade e o raciocínio lógico, que também são fundamentais para o estudo da Matemática. Com esse quebra-cabeça você pode trabalhar a identificação, comparação, descrição, classificação e desenho de formas geométricas planas, visualização e representação de figuras planas, exploração de transformações geométricas através de decomposição e composição de figuras, compreensão das propriedades das figuras geométricas planas, representação e resolução de problemas usando modelos geométricos. Esse trabalho permite o desenvolvimento de algumas habilidades tais como a visualização, percepção espacial, análise, desenho, escrito e construção. Nas séries finais do Ensino Fundamental I já é possível contribuir para o ensino da noção de área e representação fracionária. E no Ensino Fundamental II e Ensino Médio, entre outras coisas, como recurso auxiliar para o estudo de polígonos, suas áreas e ângulos, medidas irracionais, além de poder ser utilizado em atividades envolvendo a probabilidade geométrica.




**Sugere-se ao professor montar o Tangram com os alunos e realizar algumas atividades de caráter exploratório para que se familiarizem, investiguem e descubram algumas relações entre as peças desse jogo. Também é interessante pesquisar a história do Tangram**

Na Probabilidade Geométrica trabalhamos com razões entre medidas de mesma natureza, medidas de figuras geométricas. Ela conserva as propriedades da visão clássica. Probabilidade geométrica é entendida como um limite da probabilidade frequentista $P_f$ quando o número n de realizações do experimento se torna muito grande.

Pode-se trabalhar com uma sequência de ensino que explore os conceitos básicos da probabilidade geométrica, utilizando a noção frequentista. Dessa forma podemos pensar o Trangram como um alvo a ser atingido e pedir aos alunos que realizem um experimento desse tipo, marcando numa tabela a frequência com que o lançamento atingiu o alvo estipulado (use algumas peças do Trangram de diferentes maneiras), aumentando o número de vezes em que o mesmo experimento é realizado e fazendo comparações, visando levar os próprios alunos a concluírem que as frequências de sucesso assim obtidas se aproximam da probabilidade geométrica do experimento. A partir disso, diferenciar as atividades de modo a consolidar também, além do conceito, as propriedades de probabilidade, $P(A \cup B), P(A \cap B) e\ P(A|B)$, na visão geométrica.

**Exemplos de atividades:**

1) Considere o quadriculado da figura como o campo de pouso e o parte pintada do campo (polígono representado com as peças do TANGRAM sobre o quadriculado) o alvo de um torneio esportista de asas-deltas (use uma bolinhas pequenas para representar os esportistas). **Observe que o quadriculado foi usado para relacionar as medidas de área das peças.**

Agora, considere uma asa-delta descendo de forma aleatória nesse campo de pouso (Figura 1). Responda as seguintes questões:

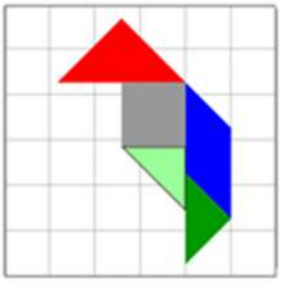


Figura 1

a) Qual é a probabilidade do esportista pousar no alvo?
b) Qual é a probabilidade do esportista no campo de pouso, mas fora do alvo?
c) É possível representar a sua resposta simbolicamente? Como?

**Professor, mude a forma do alvo e repita o experimento. Compare**.

2) **Professor, nesta atividade será abordada a propriedade $P(A \cup B)$ da probabilidade**.

Peça aos seus alunos para responderem as seguintes questões:

Considere ainda o mesmo campo de pouso e dois alvos desconexos, ou seja, separados (Figura 2). Chame um alvo de $A$ e o outro de $B$. Agora, considere o esportista do torneio descendo de forma aleatória nesse campo de pouso.

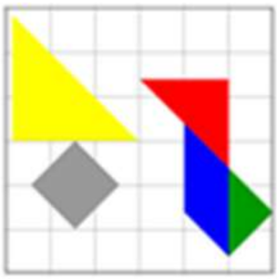


Figura 2

Responda as seguintes questões:

a) Qual é a probabilidade do paraquedista pousar nos alvos $A$ ou $B$?
b) Explique como você chegou a essa resposta.
c) É possível representar a sua resposta simbolicamente? Como?

**Repita, se necessário, o tipo de atividade mudando o alvo.**

3) **Professor, elabore uma atividade desse tipo, mas agora monte um alvo que tenha uma interseção de peças para abordar a propriedade $P(A \cap B)$ da probabilidade.**

4) **Professor, nesta atividade será abordada a propriedade $P(A|B)$ da probabilidade**

Sabendo-se que o esportista pousou no alvo da **Figura 1**, qual a probabilidade dele ter pousado:
a) na parte azul do alvo?
b) na parte verde (não importa se claro ou escuro)?
c) explique como você chegou a suas respostas.
d) é possível representar suas respostas simbolicamente? Como?

## APÊNDICE B – Agendas do Ambiente Virtual

### Agenda Ambientação

***Bem-vindos à Oficina de Ambientação Digital!***

Provavelmente, é a primeira vez que muitos de vocês participam de uma experiência de aprendizagem a distância. É fundamental, então, que todos conheçam e se familiarizem com o TelEduc, pois ele será nosso ambiente de acompanhamento de ensino-aprendizagem a distância. Um ambiente de ensino-aprendizagem é o local ideal para interagirmos com os colegas.

**O que isso significa?**

Que poderemos dar continuidade às aulas presenciais com a oportunidade de nos comunicarmos expressando nossas ideias, pensamentos e emoções sobre o tema abordado no curso. Esta troca é muito enriquecedora, pois temos muito a ensinar e a aprender com os colegas, não somente com o professor. Neste ambiente, a interação, a colaboração e a cooperação são importantíssimas para que não nos sintamos sozinhos.

Lembrem-se sempre disso!

Obrigado por estarem conosco no curso de Probabilidade Geométrica na Educação Básica: casos de acaso e incerteza.

**A Coordenação**

# Objetivo

Nesta **agenda de Ambientação**, vamos ter a oportunidade de perceber os principais componentes da prática de estudar a distância.

O que vamos fazer?

Vamos realizar quatro atividades: enquanto conhecemos o TelEduc, vamos nos apresentar ao grupo e falar sobre nossas expectativas em relação ao curso e aprender como organizar nosso tempo de estudo.

Além disso, para os menos experientes, gostaríamos de oferecer uma oportunidade de fazer uma breve pesquisa na Internet e aprender a guardar seu material em seu caderno eletrônico, conhecido aqui dentro como ***Portfólio***.

Teremos também uma **Atividade Extra** para você se divertir, enquanto aprende os softwares de uso livre.

Quando se sentir familiarizado com as ferramentas do ambiente, abra uma pasta **Ambientação** em seu ***Portfólio*** para registrar suas atividades.

# Atividade 1

***Apresentando-se ao grupo: Perfil e Fórum***

1) Faça a leitura sobre o funcionamento do ambiente TelEduc.

Clique na barra de ferramentas em ***Estrutura do Ambiente*** para obter informações sobre o modo de funcionamento dos recursos do ambiente TelEduc. Estas informações serão úteis para a exploração e utilização iniciais do ambiente.

2) Preencha o seu ***Perfil***.

Clique em ***Perfil*** e escreva sobre você: de onde você vem, áreas de interesse, sua formação, onde dá aulas e em que anos, projeções para o futuro, hobby, e assim por diante. Se você tiver uma foto digital, coloque-a em seu ***Perfil*** e complete o preenchimento de seus dados pessoais. Em Perfil você encontrará na tela todas as orientações.

3) Faça a leitura cuidadosa da ***Dinâmica do Curso***.

Clique em ***Dinâmica do Curso*** para obter informações sobre como o curso será desenvolvido, quais são os conteúdos que serão trabalhados, qual será nossa metodologia de trabalho, o cronograma geral.

4) Sempre que tiver dúvidas sobre o TelEduc, entre na ferramenta ***Fórum***.

Clique em ***Fóruns de Discussão > Dúvidas TelEduc*** e deixe sua mensagem.

Se desejar falar de outras coisas, use o ***Fórum >Café com bobagem***.

# Atividade 2

**Minhas expectativas**

Elabore um breve texto descrevendo quais são as suas expectativas em relação a este curso.

Deixe seu texto na ferramenta ***Portfólio***. Fale-nos também de sua experiência em sala de aula com a temática do curso. É abordada? De que forma? Em que anos? Como os alunos se saem?

# Atividade 3

**Organização do tempo de Estudo**

Durante os próximos 2 meses estaremos juntos estudando online. Você terá de organizar seu tempo e seu espaço.

1) Para visualizar o seu tempo, elabore uma Ficha de Organização de Tempo de Estudo, salve no Word nomeando o arquivo seuNome_FichaTempo e poste-a em seu ***Portfólio*** individual, compartilhando-o com o formador.

2) Em seguida, responda as questões abaixo. Anexe suas respostas ao seu ***Portfólio***.

Como costuma estudar? Sozinho, em grupo composto por grande ou pequeno número de pessoas? Escrevendo e fazendo resumos ou fichamentos, ou apenas lendo ou desenhando?

Quantas horas dispõe para estudar e onde costuma estudar? Em casa, nos intervalos do horário de trabalho, no ônibus, ou apenas no final de semana?

Onde pretende realizar as atividades do curso? Em casa, no seu local de trabalho ou em outro lugar?

Costuma dedicar tempo a leituras? Quanto tempo? Que tipo de leituras prefere? Jornais, revistas, livros? Qual foi o último livro que leu, entre ficção e não-ficção?

Saberia dizer qual é a configuração de sua máquina (computador) e se tem instalados os softwares:

- Pacote Office (qual a versão?)

- Acrobat Reader

- Plugin Flash/schockwave

Acrescente outras informações que considerar necessárias.

# Atividade 4

**Pesquisa na Internet**

A Internet é considerada como Tecnologia de Informação e Comunicação (TIC). A Web, um dos serviços da Internet, é um imenso repositório de informações boas e ruins.

Vamos fazer uma pesquisa na Web para levantar outras aplicações da Internet. Você pode começar pesquisando sites interessantes para professores e gestores, bem como para alunos. Escolha um assunto de seu interesse.

Para encontrar informações na Internet (web) usamos os agentes de busca como o Google, por exemplo. Nestes sites você deve colocar as palavras-chave entre aspas. Quanto maior o número de palavras-chave, mais refinada será sua pesquisa. O mesmo pode ser feito com nome de autor ou trecho de um texto a ser pesquisado. Deixe seus resultados e comentários em seu ***Portfólio***.

### Materiais de Apoio à pesquisa

A) Na Internet encontramos muito "lixo" informacional. Para realizar uma pesquisa de Qualidade, temos que ter critérios para selecionar as informações. Em Leituras>Ambientação, você encontrará os textos sobre:

• ***A qualidade das informações na Web***
http://www.terceiraidade.iq.unesp.br/index.php?option=com_content&view=article&id=7&Itemid=11

http://pt.wikipedia.org/wiki/Otimiza%C3%A7%C3%A3o_para_motores_de_busca

• ***Dicas Pesquisa na Web***

http://www.slideshare.net/JosiAmato/dicas-de-pesquisa-na-web

• ***Como citar artigos obtidos na Internet***

http://www.psicologia.pt/publicar/citar.php

***Tenha cuidado com os "filtros-bolha" online***

http://www.ted.com/talks/lang/por_br/eli_pariser_beware_online_filter_bubbles.html?refid=0

## Atividade Extra

Ao longo de seus estudos no curso *Probabilidade Geométrica na Educação Básica: casos de acaso e incerteza*, você irá usar alguns recursos midiáticos, como vídeos, experimentos e applets (tipo de software). Para começar, vamos então fazer um primeiro experimento.

Clique no link e divirta-se:

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_146_g_3_t_5.html

CAPES

UNIBAN

Observatório da Educação

## Agenda 1

***Bem-vindos!***

Depois de pouco mais de uma semana com a agenda de ambientação vamos agora dar continuidade aos nossos trabalhos no ambiente virtual. Lembrem-se de que é fundamental que acessem o ambiente com frequência, resolvam o que está proposto, participem dos fóruns. Dessa forma, além de darmos continuidade aos nossos estudos estaremos cada vez mais nos familiarizando com o TelEduc, pois ele é o nosso ambiente de acompanhamento de ensino-aprendizagem a distância, o local ideal para interagirmos com os colegas.

**O que isso significa?**

Que poderemos dar continuidade aos estudos das aulas presenciais com a oportunidade de nos comunicarmos expressando nossas ideias, pensamentos e emoções sobre o tema abordado no curso. Esta troca é muito enriquecedora, pois temos muito a ensinar e a aprender com os colegas, não somente com o professor. Neste ambiente, a interação, a colaboração e a cooperação são importantíssimas para que não nos sintamos sozinhos.

Lembrem-se sempre disso!

Obrigado por estarem conosco no curso de Probabilidade Geométrica na Educação Básica: casos de acaso e incerteza.

**A Coordenação**

## Objetivo

Nesta **Agenda 1**, vamos dar início aos estudos da temática propriamente dita do curso, além de compartilharmos esses estudos com os colegas, um dos principais componentes da prática de estudar a distância.

O que vamos fazer?

Vamos realizar **uma atividade central** que norteará todas as outras **vinculadas** a ela.

***Prazo de realização da Agenda 1: de 15 a 21 de outubro de 2011***

## Atividade

***Veja a lista de exercícios 1 disponibilizada na ferramenta Atividades e resolva as ações propostas a seguir:***

1) Faça a leitura dos exercícios da lista e reflita sobre como resolvê-los.

2) **Vá ao Fórum>Discussão Lista 1** e tire lá suas dúvidas, dê sugestões, faça uma discussão sobre dificuldades ou não na resolução dos exercícios.

3) Em Material de Apoio você encontra arquivos que podem dar suporte se precisar consultar sobre o conteúdo.

4) **Resolva** essa lista de exercícios e **poste a sua resolução** em seu **Portfólio Individual** em arquivo anexo **compartilhando com formadores**. É importante que sua resolução não seja apenas dar as respostas, mas discorrer como se estivesse fazendo a resolução para seus alunos em sala de aula. Lembrem-se de que na aula presencial de 06/10/11 já havíamos trabalhado em grupo alguns exercícios desta lista.

5) Estas ações devem ser realizadas durante esta semana (prazo acima) para darmos um ritmo adequado ao curso e podermos interagir todos juntos de uma forma compassada.

6) Também é importante que registre em seu **Diário do Bordo** suas impressões, pelo menos uma vez por semana. Poste lá, por exemplo, Semana_X, e escreva o que sentiu/refletiu durante a realização das tarefas daquela semana. Elas são um importante registro do seu percurso nesses estudos.

7) Aquele que ainda não realizou/terminou as tarefas da agenda de ambientação anterior, vá na ferramenta Agenda, clique em Agendas Anteriores e depois na agenda desejada. Confira o que está faltando e complete.

8) Quem ainda não preencheu seu perfil, por favor o faça. Clique em ***Perfil*** e escreva sobre você: de onde você vem, áreas de interesse, sua formação, onde dá aulas e em que anos, projeções para o futuro, hobby, e assim por diante. Se você tiver uma foto digital, coloque-a em seu ***Perfil*** e complete o preenchimento de seus dados pessoais. Em Perfil você encontrará na tela todas as orientações.

## Informações complementares

a) A leitura cuidadosa da ***Dinâmica do Curso*** traz as informações sobre como o curso será desenvolvido, quais são os conteúdos que serão trabalhados, qual será nossa metodologia de trabalho, o cronograma geral.

b) Sempre que tiver dúvidas sobre o TelEduc, entre na ferramenta ***Fórum***. Clique em ***Fóruns de Discussão > Dúvidas TelEduc*** e deixe sua mensagem.

c) Se desejar falar de outras coisas, use o ***Fórum >Café com bobagem***.

## Bom trabalho!

## Agenda 2

***Bem-vindos!***

## O que vamos fazer?

Nesta **Agenda 2**, após já terem resolvido a Lista de Exercícios 1, postada em Atividades vamos realizar **discussões coletivas nos fóruns** acerca de alguns itens dessa lista para consolidar alguns conceitos básicos de probabilidade. Vamos fazer isto compartilhando com os colegas para que seja uma construção coletiva e colaborativa, um dos principais componentes da prática de estudar a distância.

## Objetivo

Refletir sobre os raciocínios aplicados na resolução da Lista de Exercício 1 para desenvolver e consolidar raciocínios probabilísticos que conformam alguns conceitos básicos da probabilidade.

## *Prazo de realização da Agenda 1: de 22 a 29 de outubro de 2011*

## Roteiro da Atividade

***Veja a lista de exercícios 1 disponibilizada na ferramenta Atividades e resolva as ações propostas a seguir:***

1) Leve em conta a sua resolução da lista como ponto de partida.

2) **Vá ao Fórum>Dados** onde vamos fazer a seguinte discussão:

Ao lançarmos dois dados, numerados de 1 a 6, e verificarmos que números aparecem em suas faces superiores, pergunta-se: Faz diferença a ordem em que esses números ocorrem nas faces superiores dos dados?

3) **Vá ao Fórum>Urna** onde vamos fazer a seguinte discussão

Em relação ao exercício 4 da lista 1, se pensarmos $\mathbf{U_i}$ o evento "escolher a urna i", com i=1,2,3, **A** o evento escolher bola azul e **V** o evento escolher bola verde, pergunta-se:

que raciocínio fazemos para resolver o item (a) deste exercício, ou seja, como trabalhamos estes eventos para resolver o item (a) do exercício?

que raciocínio fazemos para resolver o item (b) deste exercício, ou seja, como trabalhamos estes eventos para resolver o item (b) do exercício?

4) **Vá ao Fórum>Baralho** onde vamos fazer a seguinte discussão:

Considere baralhos de 52 cartas. Existe diferença de raciocínio para encontrar a probabilidade descrita nas três situações abaixo:

a) Retirando-se **uma** carta ao acaso de um baralho, qual a probabilidade dela ser o rei de copas **ou** um cinco?

b) Retirando **duas** cartas consecutivas ao acaso de um baralho, sem reposição, qual a probabilidade de a primeira ser o rei de copas **e** a segunda ser um cinco?

c) Retirando-se **duas** cartas, **uma** de cada baralho, qual a probabilidade de a carta do primeiro baralho ser o rei de copas **e** a do segundo baralho ser um cinco?

5) Estas ações devem ser realizadas no ambiente virtual para levarmos subsídios para nossa aula presencial de quinta-feira, 27/10/11.

6) Também é importante que registre em seu **Diário do Bordo** suas impressões, pelo menos uma vez por semana. Poste lá, por exemplo, Semana_X, e escreva o que sentiu/refletiu durante a realização das tarefas daquela semana. Elas são um importante registro do seu percurso nesses estudos.

7) Aquele que ainda não realizou/terminou as tarefas das agendas anteriores, vá na ferramenta Agenda, clique em Agendas Anteriores e depois na agenda desejada. Confira o que está faltando e complete.

8) Quem ainda não preencheu seu perfil, por favor o faça. Clique em ***Perfil*** e escreva sobre você: de onde você vem, áreas de interesse, sua formação, onde dá aulas e em que anos, projeções para o futuro, hobby, e assim por diante. Se você tiver uma foto digital, coloque-a em seu ***Perfil*** e complete o preenchimento de seus dados pessoais. Em Perfil você encontrará na tela todas as orientações.

**Bom trabalho!**

## Agenda 3

***Bem-vindos!***

## O que vamos fazer?

Nesta **Agenda 3**, após já termos discutido a Lista de Exercícios 1 na aula presencial do dia 27/10/11, vamos refletir sobre ela e trabalhar da mesma maneira com a **Lista de Exercícios 2,** que vocês já receberam naquela aula e também encontra-se disponível em Atividades.

Vamos fazer isto compartilhando com os colegas para que seja uma construção coletiva e colaborativa, um dos principais componentes da prática de estudar a distância.

## Objetivo

Refletir sobre os raciocínios aplicados na resolução da **Lista de Exercício 1**, resolver a **Lista de exercícios 2**, fazendo o mesmo tipo de reflexão, para irmos consolidando raciocínios probabilísticos que conformam conceitos básicos da probabilidade.

## *Prazo de realização da Agenda 3: de 29 de outubro a 04 de novembro de 2011*

## Roteiro da Atividade semanal

*Nesta agenda teremos dois momentos:*

## 1º momento:

***Em relação à Lista de Exercícios 1:***

Descreva o que aprendeu com ela: quais foram as dúvidas que surgiram, quais foram os equívocos que cometeu e que a discussão coletiva ajudou a refletir e superar, isto é, a aprender. Poste sua reflexão no seu Diário de Bordo.

## 2º momento:

***Veja a Lista de exercícios 2 disponibilizada na ferramenta Atividades e resolva as ações propostas a seguir:***

1) Leve em conta a resolução da Lista 2 realizada em grupo na aula presencial

2) Escreva sua resolução e poste em seu **Portfólio individual**, compartilhado com formadores.

3) **Vá ao Fórum>Lista 2,** onde vamos discutir coletivamente as resoluções, tirar as dúvidas e refletir sobre os conceitos nela trabalhados.

4) Fique atento, pois poderemos realizar **outro Fórum** mais específico, dependendo da necessidade de discussão que surgir: ele poderá ser aberto por mim ou por qualquer um de vocês, se assim o desejarem.

Estas ações devem ser realizadas no ambiente virtual até a próxima sexta-feira.

**Participem!**

**Bom trabalho!**

## Agenda 4

***Bem-vindos!***

## O que vamos fazer?

Nesta **Agenda 4**, considerando o que vimos discutindo sobre a Lista de Exercícios 2 na agenda anterior, vamos refletir ainda sobre os conceitos que trabalhamos nela e tentar sistematiza-los

Vamos continuar compartilhando com os colegas para que seja uma construção coletiva e colaborativa, um dos principais componentes da prática de estudar a distância.

## Objetivo

Refletir sobre os conceitos trabalhados até agora, nas aulas presenciais, nas listas de exercícios e no texto postado nesta agenda, para irmos consolidando raciocínios probabilísticos que conformam conceitos básicos da probabilidade.

***Prazo de realização da Agenda 4: de 05 de outubro a 11de novembro de 2011***

## Roteiro da Atividade semanal

*Nesta agenda teremos uma tarefa central:*

*Leia o texto "Probabilidade prática", postado em Material de Apoio e prepare uma aula (defina para que público) para trabalhar os seguintes conceitos:*

*eventos independentes*

*eventos mutuamente exclusivos*

*probabilidade condicional.*

Poste sua aula no seu portfólio individual. Vá ao *Fórum>plano de aula* para discutir suas dúvidas e/ou sugestões sobre os conceitos abordados e encaminhamentos do plano de aula. Estas ações devem ser realizadas no ambiente virtual até a próxima sexta-feira.

**Participem! Bom trabalho!**

## Agenda 5

***Bem-vindos!***

### O que vamos fazer?

Nesta **Agenda 5**, considerando o que discutimos e refletimos no Encontro Presencial de 10/11/2011 sobre conceitos básicos de probabilidade, vamos sistematizar estes conceitos compartilhando com os colegas para que seja uma construção coletiva e colaborativa, um dos principais componentes da prática de estudar a distância.

### Objetivo

Sistematizar os conceitos trabalhados até agora, nas aulas presenciais, nas listas de exercícios e nos artigos e textos postados, para irmos consolidando raciocínios probabilísticos que conformam conceitos básicos da probabilidade.

## *Prazo de realização da Agenda 5: de 13 a 18 de novembro de 2011*

## Roteiro da Atividade semanal

*Nesta agenda teremos duas tarefas: Roteiro de aula e Experimento*

### *1) Roteiro de aula*

Após esclarecimentos acerca do plano de aula da agenda anterior, alteramos a atividade de plano de aula para roteiro de aula e incluímos como atividade desta agenda.

***O que deve ser feito?***

A partir da discussão realizada no Encontro Presencial, e das leituras do texto “Probabilidade prática” e do artigo “Eventos Independentes”, de Flávio Wagner Rodrigues (da RPM, publicado pelo MEC na Coleção Explorando o Ensino), postados em Material de Apoio, prepare um **roteiro de aula** (defina para que público) para trabalhar os seguintes conceitos:

*eventos independentes*

*eventos mutuamente exclusivos*

*probabilidade condicional.*

*Neste Roteiro de aula, elabore uma sequência de ensino que leve os alunos (seu público-alvo) a se apropriarem destes conceitos. Inclua no cabeçalho seu nome, os objetivos e público-alvo. Poste no seu portfólio individual.*

Vá ao *Fórum>Roteiro de aula* para discutir suas dúvidas e/ou sugestões sobre os conceitos e encaminhamentos abordados.

2) Experimento

Acesse o link abaixo e faça a atividade online. Depois relate suas impressões e conclusões acerca deste experimento no *Fórum>Experimento/Probabilidade com urnas*.

http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Softwares/SoftwaresM3Matematica/probabilidade_com_urnas/urnas/index.html

Estas ações devem ser realizadas no ambiente virtual até a próxima sexta-feira.

**Participem!**

**Bom trabalho!**

Agenda 6

***Bem-vindos !***

O que vamos fazer ?

Nesta **Agenda 6**, considerando que já tratamos dos conceitos básicos de probabilidade nas agendas anteriores, vamos avançar um pouco e começar a tratar de probabilidade geométrica, compartilhando as atividades e reflexões com os colegas.

Objetivo

Construir o conceito de probabilidade geométrica por meio de atividades e experimentos.

Prazo de realização da Agenda 6:
de 19 a 25 de novembro de 2011

Roteiro da Atividade semanal

Nesta agenda teremos uma tarefa: Discussão e Resolução da Lista de Exercício 3.

O que deve ser feito?

Veja a ***Lista de Exercícios 3***, disponível em **Atividades**, reflita sobre as atividades ali colocadas. Recomenta-se rever o *powerpoint* da Apresentação, do primeiro encontro presencial, postada em **Material de Apoio**, para recordar alguns conceitos e a linha de desenvolvimento do conteúdo do nosso curso.

Vá ao **Fórum>Lista 3** para discutir suas dúvidas e/ou sugestões sobre os exercícios e conceitos ali abordados.

Resolva a **Lista de Exercícios 3** e poste em seu **Portfólio Individual**, compartilhando com formadores. Estas ações devem ser realizadas no ambiente virtual até a próxima sexta-feira (25/11). Bom trabalho!

Ana Lúcia

# Agenda 7

***Bem-vindos!***

## O que vamos fazer?

Nesta **Agenda 7**, considerando que tivemos um imprevisto e nosso último Encontro presencial ficou um pouco prejudicado vamos deixar as mesmas atividades da agenda anterior, na perspectiva de tratar de probabilidade geométrica. Vamos aproveitar a animação de vocês com os experimentos virtuais refletir mais sobre eles compartilhando, via Fórum, suas observações com os colegas.

## Objetivo

Introduzir o conceito de **probabilidade geométrica** por meio de atividades e experimentos.

***Prazo de realização da Agenda 5: de 26 de novembro a 02 de dezembro de 2011***

### Roteiro da Atividade semanal

*Nesta agenda daremos continuidade à **Discussão e Resolução da Lista de Exercício 3***

***O que deve ser feito?***

Reveja a **Lista de Exercícios 3**, disponível em **Atividades**, resolva as atividades ali colocadas, refaça-as se for necessário, para aprofundar suas reflexões/observações.

Não deixe de ir ao ***Fórum>Lista 3*** para discutir suas dúvidas, sugestões e comentários sobre os exercícios e conceitos ali abordados.

Poste em seu Portfólio Individual a resolução da **Lista de Exercícios 3,** compartilhando com formadores. Particularmente, faça as atividades que envolvem os *applets* e coloque suas observações e comentários no Fórum. Se quiser, faça outra postagem crescentando novas observações à sua resolução. Faça estas atividades, preferencialmente, até nosso próximo Encontro Presencial da quinta-feira, 01/12/2011.

**Participem!**

**Bom trabalho!**

# Agenda 8

***Bem-vindos!***

## O que vamos fazer?

**Estamos chegando ao fim do nosso módulo (!!!)**

**Por um lado isto é bom, já que estamos conseguindo cumprir com nossos objetivos iniciais.**

**Por outro lado lamento, pois conseguimos estabelecer uma boa interação nos Encontros Presenciais e aqui no ambiente virtual, mas está chegando ao fim...**

Nesta **Agenda 8**, vamos dar continuidade ao que tratamos no Encontro Presencial de 01/12/2011, preparando-nos para o próximo e último Encontro Presencial do módulo em 08/12/2011. Só para recordar o que vimos: trabalhamos com objetos concretos, como a Roleta, o Trangram e até o Material Dourado; trabalhamos com os applets Agulha de Buffon, Método de Monte Carlo, Roda da Fortuna (conteúdos digitais da UFF) e Roleta Mágica (conteúdo digital do Rived); começamos a trabalhar uma sequência de atividades baseada no jogo da roleta.

## Então o que vamos fazer?

Vamos aproveitar a animação de vocês com os objetos concretos e experimentos virtuais e dar continuidade ao estudo da probabilidade geométrica rumo à sistematização dos conceitos envolvidos.

## Objetivo

Sistematizar o conceito de **probabilidade geométrica** por meio de atividades e experimentos.

## *Prazo de realização da Agenda 8: de 03 a 09 de dezembro de 2011*

## Roteiro da Atividade semanal

*Nesta **Agenda 8** daremos continuidade à resolução das atividades que compõem a Lista de exercício 4, refletindo e compartilhando, via Fórum, suas observações com os colegas.*

***O que deve ser feito?***

Vejam a **Lista de Exercícios 4**, disponível em **Atividades**, resolvam as atividades ali colocadas (os que já entregaram a atividade 1 resolvida no último encontro resolvam só as atividades 2 e 3) e postem a resolução no Portfólio Individual, compartilhando com formadores.

Não deixem de ir ao ***Fórum>Lista 4*** para discutir suas dúvidas, sugestões e comentários sobre os exercícios e conceitos ali abordados. Particularmente, façam as atividades que envolvem os *applets* (vejam links em Atividades) e coloquem suas observações e comentários no Fórum.

Incluí, conforme prometido, material complementar sobre a **Agulha de Buffon** em **Leituras**, por não ser foco do nosso estudo, mas para consulta a quem se interessar.

Façam estas atividades, preferencialmente, até nosso próximo Encontro Presencial da quinta-feira, 08/12/2011.

**Participem!**

**Bom trabalho!**

***Acatando solicitação de vocês o ambiente ficará ativo durante todo mês de dezembro***

## Agenda extra

***Bem-vindos!***

**Chegamos ao fim do nosso módulo, mas não do tempo de aprendizagem!**

***Os fundamentos do ensino são sociais na medida em que, como vimos,***

***os saberes profissionais são plurais, oriundos de fontes sociais diversas***

***(família, escola, universidade etc.) e adquiridos em tempos sociais diferentes:***

***tempo da infância, da escola, da formação profissional, do ingresso***

***na profissão, da carreira…(Tardif, Lessard)***

*)*

**Por isso vocês terão ainda este ambiente virtual ativo para realizarem as tarefas pendentes e reverem tudo que quiserem para consolidar o aprendizado dos conceitos e conteúdos tratados no curso e interagirem com os colegas.**

***Quando os professores atribuem o seu saber-ensinar à sua própria***

***“personalidade” ou à sua “arte”, parecem estar se esquecendo justamente de***

***que essa personalidade não é forçosamente “natural” ou “inata”, mas é, ao contrário,***

***modelada ao longo do tempo por sua própria história de vida e por sua socialização.(Tardif, Lessard)***

## O que vamos fazer?

Nesta **Agenda Extra,** incluímos tudo que foi visto no último Encontro Presencial de 08/12/2011, para que possam revisitar as atividades e experimentos que desenvolvemos com objetos concretos (Roleta, Trangram), vídeos e applets (conteúdos digitais da UFF e do Rived), além das atividades sobre estes conteúdos.

## Então o que podemos fazer?

Vamos aproveitar o interesse vocês com estes objetos e experimentos virtuais e possibilitar a continuidade do estudo da probabilidade geométrica para apropriação dos conceitos envolvidos.

## Objetivo

(Re)ver os conceitos envolvidos no estudo de **probabilidade geométrica** por meio do material disponibilizado com atividades e experimentos.

## *Prazo de realização da Agenda Extra: dezembro de 2011*

## Roteiro

*Nesta **Agenda Extra** vocês podem dar continuidade à resolução das atividades pendentes que compõem as Listas de exercícios, refletindo e compartilhando, via Fórum, suas observações com os colegas.*

***O que mais pode ser feito?***

***Como incluímos outros materiais que podem ser consultados: vídeos, links dos applets, sequência de ensino e artigos relacionados com o tema, sugerimos que:***

Vejam as novas postagens, em **Material de Apoio** e **Atividades**, que complementam nosso estudo.

Façam as **atividades pendentes** e postem a resolução em seus portfólios individuais, compartilhando com formadores.

Participem dos fóruns abertos, em particular do **Fórum>Agenda Extra**, onde poderão tecer comentários sobre o que quiserem, o que mais chamou a atenção de vocês no módulo e compartilhar com os demais.

Escrevam nos seus **Diários de Bordo** suas impressões sobre o módulo, como quais conteúdos e atividades foram mais interessantes, mais inovadores, ou que trouxeram mais dificuldades, ou ainda o que quiserem relatar.

**Participem!**

**Bom trabalho e**

## Agenda 2012


**Quero manifestar minha satisfação em receber todos vocês no nosso ambiente virtual!**

**Para os que aqui chegam pela primeira vez venho esclarecer que este ambiente foi preparado para servir de apoio e acompanhamento ao módulo *Probabilidade geométrica na educação básica: casos de acaso e incerteza*, desenvolvido nos encontros presenciais do Projeto Observatório da Educação, de setembro a dezembro de 2011, e que agora retomamos, mesmo que por pouco tempo, o que me permite apresentar também a vocês o que foi trabalhado no módulo. Vasculhem o que quiserem no ambiente. Para melhor familiarizá-los, sugiro que acessem e leiam as ferramentas que se encontram à esquerda, iniciando por Estrutura do Ambiente e Dinâmica do Curso.**

**Para os que participaram do módulo, é uma oportunidade de reverem os conteúdos abordados e as tarefas desenvolvidas, postar mais alguma coisa se assim o quiserem, além de interagir com os colegas anteriores e com os novos.**

### O que vamos fazer?

Nesta **Agenda 2012**, vamos dar continuidade ao que tratamos no Encontro Presencial de 29/03/2012, preparando-nos para o próximo e último Encontro Presencial do módulo em 12/04/2012.

Vamos aproveitar a animação demonstrada por todos e dar continuidade à resolução das atividades iniciadas nesse Encontro em que objetivamos a sistematização dos conceitos envolvidos no estudo das noções básicas e conceitos elementares de probabilidade que possibilitem serem (re)aproveitados para uso em sala de aula na educação básica.

## Objetivo

Sistematizar os conceitos de **probabilidades** por meio de atividades e experimentos.

## *Prazo de realização da Agenda 2012:*

## *de 01 a 30 de abril de 2012*

## Roteiro

*Nesta **Agenda 2012** daremos continuidade à resolução das atividades que compõem a Sequência de Atividades preparadas para aquele Encontro, refletindo e compartilhando, via Fórum, suas observações com os colegas.*

*Disponibilizei na ferramenta **Atividades** a Sequência de Atividades (parte 1, parte 2, parte 3) que preparei para o Encontro do dia 29/03/2012.*

*A parte 1 da sequência, já tratamos e discutimos naquele Encontro. A parte 2, foi trabalhada em grupo, começamos a discussão, mas ainda não finalizamos. A parte 3 ainda será trabalhada e discutida aqui e no próximo encontro.*

***O que deve ser feito então?***

**1) Acessem a Parte 2 da Sequência de Atividades**, completem a resolução iniciada, incorporem o que já foi discutido, e postem em seus portfólios individuais **compartilhando com formadores.** Também não deixem de ir ao **Fórum>Sequência-parte2**, para discutir suas dúvidas, sugestões e comentários sobre os exercícios e conceitos ali abordados.

**2) Acessem a Parte 3 da Sequência de Atividades**, iniciem sua resolução, participem do **Fórum>Sequência-parte3** para discutir suas dúvidas, sugestões e comentários sobre os exercícios e conceitos ali abordados e postem a resolução em seus portfólios individuais **compartilhando com formadores.**

Façam estas atividades, preferencialmente, até nosso próximo Encontro Presencial da quinta-feira, 12/04/2012.

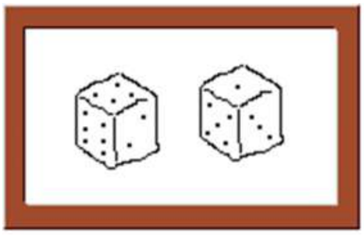
**Participem!**

**Bom trabalho!**

## APÊNDICE C – Sequências de Atividades

**Exercícios-Lista 1.**

1) Lançaram-se dois dados numerados de 1 a 6.

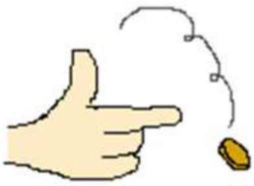


a) Quais são as ocorrências elementares possíveis?

b) Calcule a probabilidade de:

- sair dois 5
- não sair 6
- a soma ser 7
- a soma de dois números consecutivos ser primo
- a soma ser 10 ou maior que 10

2) Agora vamos lançar moedas.



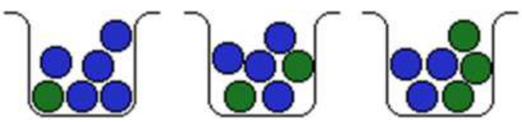
- Se lançarmos duas vezes uma moeda, qual a probabilidade de obter cara pelo menos uma vez?
- Se lançarmos uma moeda três vezes, é mais provável obter "três lados iguais" ou "dois iguais e um diferente"?
- Agora vamos fazer um experimento: vamos agora lançar uma moeda 30 vezes e anotamos os resultados em uma tabela. O que aconteceu? Era o esperado?

3) Alice propôs a Paulo o seguinte jogo.

- Atiram 20 vezes dois dados ao ar e anotam o produto dos pontos das faces superiores;
- Se o produto é um número par, Alice ganha 1 ponto;
  caso contrário, Paulo ganha 1 ponto;
- O vencedor será o que tiver maior pontuação no final dos 20 lançamentos.

Parece-lhe que os dois jogadores têm igual probabilidade de ganhar? Justifique sua resposta.

4) Existem três urnas que contém bolas iguais, azuis e verdes, segundo o esquema:



Escolhendo ao acaso uma urna, é retirada dessa urna, ao acaso, uma bola.

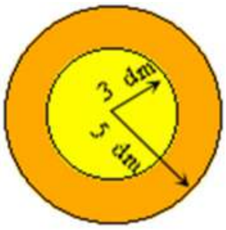
- Qual a probabilidade de sair azul?
- Qual a probabilidade de sair verde, sabendo que foi retirada da terceira urna?

5) Considere um baralho de 52 cartas.

- Qual a probabilidade de sair uma figura quando retiramos ao acaso uma carta desse baralho?
- Qual a probabilidade de sair uma carta de copas ou de ouros quando retiramos ao acaso uma carta desse baralho?
- Se retirarmos ao acaso duas cartas, sem reposição, qual a probabilidade de a primeira carta ser um ás de paus e a segunda um rei de espadas?

6) De dois baralhos de 52 cartas retiram-se, simultaneamente, uma carta do primeiro baralho e uma carta do segundo. Qual a probabilidade de a carta do primeiro baralho ser um rei e a do segundo ser o 5 de paus?

7) Tiro ao alvo.




O Jorge e o Rui divertem-se atirando uma seta para o alvo.

O Jorge aposta que acerta na região amarela e o Rui na região laranja.

Tendo em conta que:

- todas as setas acertam no alvo;
- a probabilidade de qualquer seta atingir uma região do alvo é diretamente proporcional à área da região.

Determine a probabilidade de a seta acertar:

a) na região amarela;

b) na região laranja.

Qual dos amigos tem maior probabilidade de ganhar?

**Exercícios-Lista 2.**

**Já vimos na Lista 1 alguns exercícios sobre Probabilidades.**

Com exceção do exercício 7 (do alvo), que trata de probabilidade geométrica os outros trabalhavam conceitos do ponto de vista da probabilidade clássica, ou seja, o que se segue.

Considere um evento A e n(A) o número de elementos de A e seja S o seu espaço amostral, finito e não vazio, e n(S) o número de elementos de S. Temos então que A sendo um evento de S, ocorre A⊂S, isto é, A é um subconjunto de S. A probabilidade de A ocorrer, P(A) é dada por:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{total de casos possíveis}}}$$

Obs: Essa definição só terá validade se, e somente se, todos os elementos de S forem equiprováveis, isto é tiverem as mesmas chances de ocorrer.

Dessa definição temos que: $0 \leq P(A) \leq 1$ (mostre!)

E também, como $S = A \cup A^c$ temos que $P(A^c) = 1 - P(A)$ e, logicamente, $P(\emptyset) = 0$

Nesse caso, dizemos que $A^c$ é o evento complementar de $A$ e $\emptyset$ é o evento impossível de ocorrer.

Se $A = \emptyset$ então $P(A) = 0$, dizemos que A não ocorre, mas se $P(A) = 0$ dizemos que A é um evento que não ocorre, mas será que podemos concluir que $A = \emptyset$ ? (verifique!)

**Isso posto, vamos resolver mais alguns exercícios:**

1) Lançando-se sucessivamente uma moeda (honesta) três vezes, qual a probabilidade de não ocorrer a mesma face nas três vezes?

2) Numa pesquisa feita com 600 pessoas de uma comunidade, verificou-se que 200 lêem o jornal A, 300 lêem o jornal B e 150 lêem os dois. Qual é a probabilidade de, sorteando-se uma pessoa qualquer, ela seja leitora:

a) apenas do jornal A

b) dos dois jornais

c) do jornal A ou do jornal B

O que podemos dizer em relação aos itens (b) e (c) ?

3) Extraindo-se ao acaso uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de sair uma dama ou um rei?

4) No lançamento simultâneo de dois dados, qual é a probabilidade de termos números pares nas duas faces, sabendo que a soma é 6?

5) Numa urna contendo 8 bolas amarelas e 6 bolas verdes, qual é a probabilidade de retirarmos 2 bolas sucessivamente, sem reposição, sendo a primeira verde e a segunda amarela?

6) Considere dois atiradores A e B, e que a probabilidade de a atingir o alvo é $P(A) = \frac{1}{3}$ e a de B é $P(B) = \frac{1}{2}$. Qual é a probabilidade de que o alvo seja atingido, de modo que os atiradores A e B atirem no alvo?

7) Em uma caixa existem 10 lâmpadas. Sabe-se que 3 estão com defeito (queimadas). Retirando-se 2 lâmpadas da caixa, ao acaso, uma após outra, qual é a probabilidade de que as duas não estejam queimadas?

8) O que você pode dizer sobre:

a) eventos independentes? Exemplifique

b) eventos mutuamente exclusivos (ou excludentes)? Exemplifique

c) dois eventos independentes são mutuamente excludentes? Justifique

d) dois eventos mutuamente excludentes são também independentes? Justifique.

e) quais conceitos ou propriedade de probabilidades foram trabalhados até agora, isto é, nas duas listas de exercícios? Discorra, é uma forma de sistematizar.

Bom Trabalho!

Ana Lucia

27/10/2011

**Exercícios-Lista 3.**

O Caderno do Professor compõe o Currículo do Estado de São Paulo e vocês todos devem conhecer e trabalhar com ele como material de apoio às suas aulas.

No atual programa, o conceito de probabilidade é trabalhado desde a 5ª série relacionado à problemas de contagem e Estatística, compondo o eixo denominado Tratamento da Informação. Na 6ª série, por exemplo, a probabilidade foi introduzida como um tipo particular de razão, comparando números de casos favoráveis de determinado evento com número de casos possíveis.

No Caderno do Professor da 8ª série, volume 4, encontramos a Situação de Aprendizagem 4, que trata de Probabilidade e Geometria. Lá encontramos a recomendação da importância de, antes de iniciar esse tipo de atividade, retomar as principais ideias associadas ao cálculo das probabilidades. É o que vimos fazendo até então, com maior profundidade acerca desses conceitos básicos, uma vez que o professor deve conhecer bem o que vai ensinar a seus alunos.

Agora é chegado o momento de tratarmos da Probabilidade Geométrica aqui no curso.

Aparentemente o estudo da Probabilidade não tem ligação alguma com a Geometria. Até então, a probabilidade trata da razão entre eventos e a Geometria se ocupa de formas e medidas. Parece-nos improvável que haja uma interface entre estes dois assuntos. Contudo, ao analisar um problema aparentemente banal, um naturalista francês do século XVIII, conhecido como Conde de Buffon, descobriu uma curiosa ligação entre estes dois assuntos. Esse experimento ficou conhecido por:

**A Agulha de Buffon**

**1)** Para verificar uma representação do experimento A Agulha de Buffon clique no link abaixo:

http://www.uff.br/cdme/rdf/rdf-html/rdf-b-br.html

Atenção: para rodar o applet, você precisa ter instalado em sua máquina o software Geogebra, que é livre e pode ser baixado no link: http://www.geogebra.im-uff.mat.br/. Neste site você encontra instruções para baixar o software e tutoriais para quando precisar usá-lo como editor.

**Relate o que você pode observar no experimento da Agulha de Buffon.**

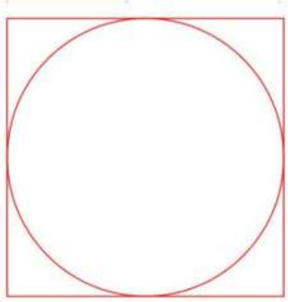
**2)** Vocês devem se lembrar do vídeo "Coisas de passarinho" que assistimos na no primeiro encontro presencial do curso. Quem quiser rever o vídeo, segue o link:

Vídeo: Coisas de passarinho

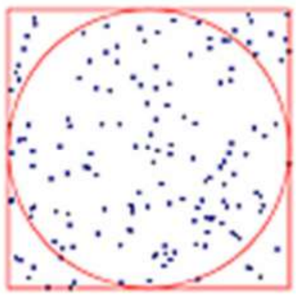
http://www.m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Videos/index.php?url=http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Videos/VideosM3Matematica/MatematicanaEscola/CoisadePassarinho/

Pois é, temos um experimento que pode ser adaptado a esta situação.

Considere um terreno de forma quadrada contendo um círculo no seu interior como na figura a seguir:



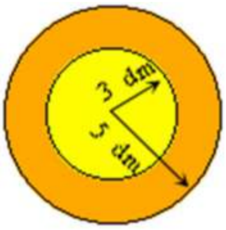
Agora imagine uma revoada de pássaros sobre este terreno, durante certo período, deixando cair várias sementes sobre ele. Qual é a probabilidade de que as sementes caiam dentro do círculo do terreno quadrangular?



Tal tipo de experimento se encaixa no Método de Monte Carlo e vocês podem verificar acessando o link: http://www.uff.br/cdme/rdf/rdf-html/rdf-s-br.html

**Relate o que você pode observar no experimento Método de Monte Carlo em 2D.**

**3)** Vimos na Lista 1 o exercício 7 (Tiro ao alvo) que relaciona probabilidade e geometria. Vamos rever este exercício:




O Jorge e o Rui divertem-se atirando uma seta para o alvo.

O Jorge aposta que acerta na região amarela e o Rui na região laranja.

Tendo em conta que:

- todas as setas acertam no alvo;
- a probabilidade de qualquer seta atingir uma região do alvo é diretamente proporcional à área da região.

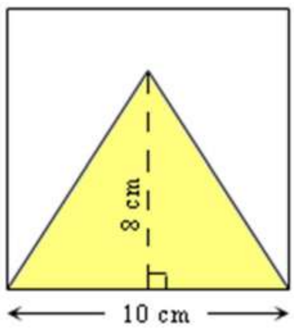
**Determine a probabilidade de a seta acertar:**

a) na região amarela;

b) na região laranja.

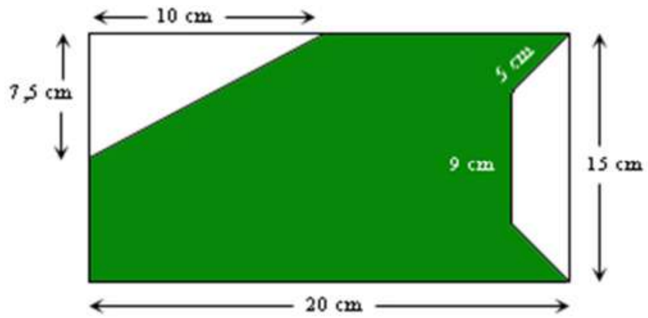
**Qual dos amigos tem maior probabilidade de ganhar?**

**4)** Num quadrado, de lado 10 cm, desenhamos um triângulo de altura 8 cm e a base igual ao lado do quadrado. Supondo que lançando uma moeda ao ar, o centro da moeda caía em qualquer ponto do quadrado com a mesma probabilidade, **calcule a probabilidade do centro da moeda cair na parte colorida do quadrado.**



**5)** A moeda e o retângulo.

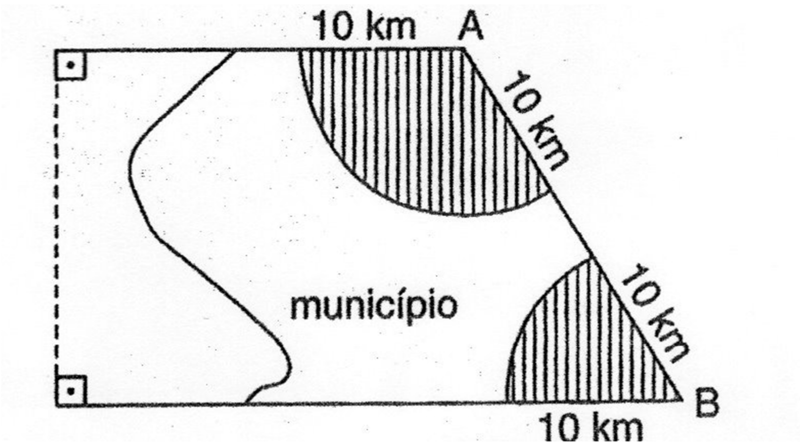
Uma moeda é lançada ao acaso neste retângulo. **Calcule a probabilidade do centro da moeda cair na região colorida.**




**6)** Um município de 628 km$^2$ é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mosta a figura abaixo. Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras. Essa probabilidade é de, aproximadamente:

a) 20% b) 25% c) 30% d) 35% e) 40%

**Justifique sua resposta.**




**Agora, vamos sistematizar o conceito:**

**7)** O que você pode dizer sobre probabilidade geométrica? Descreva o que entendeu e relate suas impressões.

**Bom Trabalho!**

Ana Lucia

19/11/2011

**Exercícios-Lista 4.**

**Atividades**

As atividades apresentadas nesta sequência de ensino são baseadas no jogo da roleta.

Vamos relacionar probabilidade e geometria abordando a relação entre ângulos, setores circulares, áreas e probabilidade. Construir roletas e fazer experimentos de probabilidades com elas é bastante divertido, os alunos costumam apreciar muito esse tipo de tarefa.

Antes de começar pode-se contar ao aluno um pouquinho da história desse jogo: Fortuna, equivalente à deusa grega Tique, era a deusa da fortuna e a personificação da sorte na mitologia romana. Ela podia trazer boa ou má sorte, pois distribuía seus desígnios aleatoriamente, sendo algumas vezes representada com a vista vendada, como a moderna imagem da justiça, ou cega. Em outros quadros e desenhos, Fortuna é representada girando sua Roda de forma aleatória, e dependendo da posição das pessoas na roda, sofrem grande infortúnio ou ganham lucros inesperados.

Em seguida, para estimular a curiosidade, pode-se apresentar ao aluno a roda da fortuna e perguntar, por exemplo:

- Quem conhece ou já brincou com esse jogo?
- Notaram que a “fatia” destinada para o maior prêmio na roda é muito menor que os outros?
- O tamanho da “fatia” na roda afeta ou não que a roda pare nessa fatia?

Dando início à sequência:

**Atividade 1**

Esta atividade propicia a oportunidade de discutir a geometria dos círculos e em particular a razão entre a área de um setor circular e a área total deste círculo. Pensando no conceito de probabilidade geométrica, esta atividade permite trabalhar a relação entre probabilidade geométrica de um setor circular e o seu ângulo central.

Então vamos **recordar**:

Dado um setor circular de ângulo central $\theta^{o}$, de um círculo de área $A$, podemos determinar a sua área, $X$, através de uma simples regra de três. Observe a Figura 1:

$360^{o}$ ------------- $A$

$\theta^{o}$ ------------------ $X$

*Figura 1*: roleta 1

Assim, a razão entre a área deste setor circular e a área total do círculo pode ser calculada da seguinte forma:

$$\frac{X}{A} = \frac{\theta^{o}}{360^{o}} = \frac{\theta}{360}.$$

Nessa atividade a roleta deverá ter 3 setores circulares. Reflitam sobre as seguintes questões:

- Como construir uma roleta "democrática" de três setores, isto é uma roleta em que cada setor circular tenha a mesma probabilidade de ocorrência na parada do ponteiro?

  Qual será essa probabilidade?

- Na roleta da Figura 2, se o setor verde tem ângulo central de $60^0$, qual a probabilidade do ponteiro parar no setor vermelho?

- Se num dos setores circulares dessa roleta, a probabilidade do ponteiro parar nela é $\frac{1}{8}$, qual é o ângulo central desse setor. Dê possíveis probabilidades para os outros dois setores e os respectivos ângulos centrais.

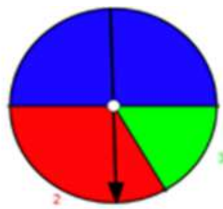


*Figura2:* roleta 2

- É possível construir uma roleta cujos setores circulares tenham probabilidades: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{12}$? Explique sua resposta.

  Agora a roleta deve ser assim, como na Figura 3:

  Vamos jogar? Aqui estão as regras do jogo:

  O **jogador 1** ganha 10 pontos se o ponteiro parar no vermelho.

  O **jogador 2** ganha 16 pontos se o ponteiro parar no azul.

  O **jogador 3** ganha 24 pontos se o ponteiro parar no verde.

  A regra é justa? Justifique.

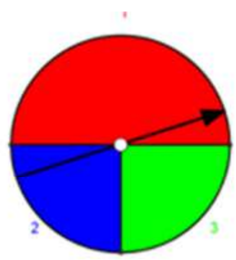


*Figura 3:* roleta 3

- Que possibilidades tem cada jogador de ganhar pontos nesse jogo?
- Qual a probabilidade que cada um tem de ganhar pontos nesse jogo?
- Se uma partida tivesse 100 rodadas de roleta, quem poderia ganhar o jogo?

**Atividade 2**

Nesta atividade serão feitas simulações computacionais com o *applet* "Rodas da Fortuna"[205].

No *applet* podemos escolher: número de setores circulares; ângulos centrais, dentro das possibilidades que as regras da probabilidade permitem; cores para os setores circulares; número de experimentos.

[205] O endereço do *applet* é: http://www.uff.br/cdme/rdf/rdf-html/rdf-br.html

Este jogo permite de uma forma lúdica:

- Discutir a geometria dos círculos, ~~e~~ em particular a razão entre a área de um setor circular do círculo e a área total deste círculo.
- Estabelecer relação entre probabilidade e geometria.
- Reconhecer a diferença entre probabilidade frequentista e teórica.
- Verificar empiricamente que a probabilidade frequentista se aproxima da probabilidade teórica (no caso, a geométrica) depois de um número grande de experimentos.
- Estabelecer relação entre a probabilidade (possível!) que se quer dar para cada setor da roda e o grau do ângulo central desse setor.

A seguir faça três simulações usando o *applet* “Rodas da Fortuna” mencionado acima. Os setores circulares serão identificados pela sua cor.

**Simulação 1**: Escolha em “número de possibilidades” o valor 5 e clique em atualizar. A roda terá 5 setores circulares.

**Responda:** Qual é o ângulo central de cada setor circular. A probabilidade do ponteiro da roleta parar em cada setor é a mesma? Justifique sua resposta.

Agora faça 50 experimentos. Para isso vá clicando no botão “Sortear”, até completar 50 cliques e **responda**:

- Qual a probabilidade frequentista do ponteiro parar em cada um dos setores circulares?
- Qual a probabilidade geométrica do ponteiro parar em cada um dos setores circulares? Responda na forma percentual.
- Para cada setor circular, compare os valores obtidos nos dois itens anteriores. O que você pode dizer sobre isso?
- O que acontecerá se aumentar o número de experimentos? Teste! Aumente o número de experimentos, e observe os resultados das probabilidades frequentista e geométrica. A que conclusão você chegou?

**Simulação 2:** Escolha em “número de possibilidades**”** o valor 5 e clique em atualizar.

A roda terá 5 setores circulares. Agora, faça escolhas no jogo de forma a obter setores circulares com ângulos centrais de $45^{\underline{o}}$, $60^{\underline{o}}$, $90^{\underline{o}}$, $45^{\underline{o}}$, $120^{\underline{o}}$ e com as seguintes cores: amarelo, azul, vermelho, verde, rosa, respectivamente.

**Responda:**

- Esses setores têm a mesma probabilidade de ocorrência na parada do ponteiro? Justifique sua resposta.

- Se sua resposta para a pergunta anterior foi não, diga qual setor tem maior probabilidade de ocorrência na parada do ponteiro e qual tem menor probabilidade. Explique como tirou suas conclusões.

Agora, faça 50 experimentos. Para isso vá clicando no botão “Sortear”, até completar 50 cliques.

**Responda:**

- Qual a probabilidade frequentista do ponteiro parar no setor circular amarelo? E no setor circular rosa?
- Qual a probabilidade geométrica do ponteiro parar no setor circular amarelo? E no setor circular rosa? Responda na forma percentual.
- Compare os valores obtidos para o setor amarelo e para o setor rosa nos dois itens anteriores. O que você pode dizer sobre isso?
- O que acontecerá se aumentar o número de experimentos? Teste! Aumente o número de experimentos, e observe os resultados das probabilidades frequentista e geométrica. A que conclusão você chegou?

**Simulação 3:**Escolha em **número de possibilidades** o valor 8 e clique em atualizar.

A roda terá 8 setores circulares. Agora, faça escolhas no jogo de forma a obter setores circulares, cujos ângulos centrais variam em sequência crescente, de 10 em 10 graus. O menor ângulo é de 10°. Use as seguintes cores, começando do setor de ângulo central de 10°: vermelho, marrom, verde, roxo, azul, amarelo, cinza, rosa.

**Responda:**

Qual setor tem maior probabilidade de ocorrência na parada do ponteiro e qual setor tem menor probabilidade? Explique como tirou suas conclusões.

Agora, faça 50 experimentos. Para isso vá clicando no botão “Sortear”, até completar 50 cliques.

**Responda:**

- Qual a probabilidade, em percentuais, do ponteiro parar no setor rosa? E no setor marrom?
- Compare essas probabilidades? O que você pode concluir? Você pode explicar essa conclusão geometricamente.
- As probabilidades frequentista dos setores rosa e marrom permitiriam você tirar as mesmas conclusões?

**Atividade 3**

Esta atividade explora, a probabilidade geométrica e suas propriedades: $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A|B)$.

Considere a roleta dividida em 8 setores circulares, cujos ângulos centrais correspondentes variam em sequência crescente, de 10 em 10 graus. O menor ângulo é de 10°.

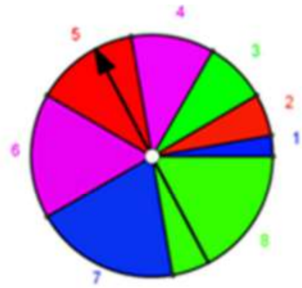



*Figura 4*: roleta 4

Esta roleta já foi abordada na simulação 3, porém com setores de outras cores.

Pense no que você entende por probabilidade geométrica e tente responder as seguintes questões:

- Em qual cor o ponteiro tem maior probabilidade de parar? E em qual tem menor probabilidade?
- Qual a probabilidade do ponteiro parar num setor circular de cor azul?
- Dado que o ponteiro não parou num setor circular de cor verde, qual a probabilidade dele ter parado num setor circular de cor azul?
- Dado que o ponteiro parou num setor circular de cor vermelha, qual a probabilidade de ter parado no setor vermelho de menor ângulo central?

Lembre-se de que a **probabilidade condicional** trata da probabilidade de ocorrer um evento A, tendo ocorrido um evento B, ambos do espaço amostral S, ou seja, ela é calculada sobre o evento B e não em função do espaço amostral S. **É muito importante que o aprendiz entenda a mudança no espaço amostral.** Por exemplo, no último item acima o espaço amostral deixa de ser a roda toda para ser apenas os setores circulares de cor vermelha.

A probabilidade condicional é denotada por $P(A|B)$ e $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

---

**Observação:**

Lista de atividade foi adaptada da Oficina "Uma sequência de ensino em probabilidade geométrica: o jogo da roleta", de autoria de Ana Lucia N. Junqueira, Maria Lucia Tavares de Campos e Leika Watabe, ministrada no XIII CIAEM, em julho de 2011.

## APÊNDICE D – Questionário e Sequências de Atividades – 2012

Caro Professor,

Esse questionário tem por objetivo fornecer subsídios para a compreensão do processo de ensino-aprendizagem no que tange ao tema Probabilidades, notadamente na Educação Básica. Mais especificamente, levantar dados sobre os conhecimentos acerca das noções básicas e conceitos fundamentais de probabilidades que podem estar sendo tratados e séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Juntamo-nos a vocês na preocupação com a qualidade de ensino e, nesse sentido, acreditamos que suas respostas e resoluções das atividades a seguir poderão nos ajudar a refletir sobre o tema e pensar melhorias para o processo de ensino-aprendizagem desse campo do conhecimento.

Agradecemos sua colaboração ao responder esse questionário, que foi elaborado levando em conta os conteúdos e a abordagem adotada no módulo desenvolvido no Projeto Observatório da Educação, de setembro a dezembro de 2011, intitulado ***Probabilidade Geométrica na Educação Básica: casos de acaso e incerteza.***

Informamos que os dados levantados serão analisados e servirão de base para uma pesquisa na qual vocês são nossos parceiros. Garantimos tanto o anonimato quanto o sigilo dos respondentes.

Cordialmente

Ana Lucia Junqueira

I) Dados pessoais:

Nome completo:_______________________________________________________________

Gênero: M(   )        F (   )

Escola(s) em que leciona:

Rede pública: ________________________________________________________________

Rede privada: ________________________________________________________________

Tempo de magistério: __________________________________________________________

Graduação: ________________________________________________________________________

Pós-graduação: _____________________________________________________________________

II) Informações complementares:

1) Na sua formação acadêmica (graduação ou outros) você teve a oportunidade de estudar Probabilidades?

_________________________________________________________________________________

2) Se sim, esses estudos serviram para lhe dar subsídios para trabalhar com os alunos? Comente sua resposta:

_________________________________________________________________________________

_________________________________________________________________________________

3) Você já teve oportunidade de trabalhar o tema Probabilidades em sala de aula? Em que nível de escolaridade? Comente sua reposta.

_________________________________________________________________________________

_________________________________________________________________________________

4) Você gosta de Probabilidades? E de ensinar Probabilidades? Comente sua resposta.

_________________________________________________________________________________

_________________________________________________________________________________

5) Se já trabalhou com o tema, qual é a abordagem de sua preferência? Comente sua resposta.

_________________________________________________________________________________

_________________________________________________________________________________

6) O que tem a dizer sobre o tema Probabilidades (assinale quantas alternativas concordar):

a) (  ) Os livros didáticos não abordam ou abordam superficialmente esse conteúdo

b) (  ) Não domino bem esse conteúdo

c) (  ) É um conteúdo complexo para ser ensinado

d) (  ) Os alunos têm dificuldades em entender

e) (  ) Outros. Quais?

Comente sua resposta: ____________________________________________________________

_________________________________________________________________________________

7) Você conhece como esse conteúdo é abordado no Caderno do Professor?

( ) Sim ( ) Não

8) Já trabalhou esse conteúdo em sala de aula como abordado no Caderno do Professor?

( ) Sim ( ) Não

Se sim, comente o que achou: ___________________________________________________

___________________________________________________________________________

9) De que forma você usa o livro didático em suas aulas?

a) para acompanhamento das aulas: sempre ( ) raramente ( ) nunca ( )

b) para pesquisa: sempre ( ) raramente ( ) nunca ( )

c) para exercícios: sempre ( ) raramente ( ) nunca ( )

d) para trabalho em grupo: sempre ( ) raramente ( ) nunca ( )

10) Você costuma consultar o Manual do Professor?

sempre ( ) com certa frequência ( ) raramente ( ) nunca ( )

11) Qual é o seu grau de conhecimento sobre o conteúdos parâmetros curriculares institucionais (federal, estadual) em relação ao tema Probabilidades?

a) conheço profundamente ( )

b) conheço o essencial para aplicação cotidiana ( )

c) conheço superficialmente ( )

d) conheço apenas por meio de artigos e comentários ( )

e) não tenho nenhum conhecimento ( )

12) Você pensa que as orientações dos parâmetros curriculares e os livros didáticos estão em conformidade com as demandas atuais sobre o tema Probabilidades?

Sim ( ) Não ( ) Parcialmente ( ) Não sei ( )

13) Acrescente o comentário ou sugestão que achar pertinente:

___________________________________________________________________________

___________________________________________________________________________

## Sequência de Atividades-Parte 1

Caro Professor,

A sequência de atividades tem por objetivo fornecer subsídios relativos ao grau de conhecimento acerca das noções elementares e principais conceitos sobre Probabilidades, tanto dos novos participantes do Projeto Observatório da Educação quanto dos que já participaram do módulo desenvolvido de setembro a dezembro de 2011, intitulado ***Probabilidade Geométrica na Educação Básica: casos de acaso e incerteza.***

Todas as contribuições serão de muita valia e, nesse sentido, acreditamos que suas resoluções e respostas das atividades a seguir poderão nos ajudar a refletir sobre o tema e pensar melhorias para o processo de ensino-aprendizagem desse campo do conhecimento.

Reforçamos que os dados levantados serão analisados e servirão de base para uma pesquisa na qual vocês são nossos parceiros. Garantimos tanto o anonimato quanto o sigilo dos participantes.

Cordialmente

Ana Lucia Junqueira

**Atividades:**

1) Em relação à noção de acaso e incertezas qual asserção você considera mais apropriada:

a) ( ) nada acontece por acaso.

b) ( ) para um experimento probabilístico o acaso exerce papel que não deve ser desprezado, como o uso de modelos aleatórios ou não determinísticos que permitem prever as chances de um evento ocorrer.

c) ( ) eventos aleatórios, aparentemente inconsequentes, podem levar a grandes mudanças que não podem ser previstas.

d) ( ) o cálculo de *probabilidades* é um importante ramo da Matemática que trata situações sujeitas às leis do acaso.

2) Quanto ao **raciocínio probabilístico** costumamos afirmar que é uma forma de raciocínio um tanto peculiar, pois se baseia em informações sobre o que tem acontecido no passado e no presente para

considerar o que é mais provável de acontecer no futuro. Não nos permite ter certeza quanto ao que vai acontecer, mas aumenta nossas chances de acertar!

a) Você concorda com isto?

b) Você se lembra de uma situação envolvendo o raciocínio probabilístico? Se sim, descreva.

c) Tem diferença do raciocínio determinístico?

d) Você se lembra de uma situação envolvendo o raciocínio determinístico? Se sim, descreva.

3) Em relação à noção de experimento aleatório qual(ais) asserção (ões) você considera apropriada(s):

a) ( ) um experimento é aleatório quando é realizado de forma aleatória, sem planejamento prévio.

b) ( ) um experimento é aleatório quando, se for repetido diversas vezes e nas mesmas condições, pode gerar resultados diferentes ou imprevisíveis.

c) ( ) experimentos aleatórios produzem possíveis resultados denominados espaços amostrais.

d) ( ) um experimento aleatório é aquele em que as condições iniciais do experimento poderão determinar o resultado final.

4) Para você, o que é probabilidade?

UNIBAN

CAPES

Observatório da Educação

**Sequência de Atividades-Parte 2**

5) Em uma roleta há números de 0 a 36. Supondo que a roleta não seja viciada, calcule a probabilidade de ser sorteado um número:

a) par

b) menor que 25

c) par menor que 25

d) par ou menor que 25

e) ímpar, sabendo que é menor que 25

f) menor que 25, sabendo que é ímpar

Deixe aqui sua resolução:

6) Um artigo publicado por D'Alembert (1717-1783) em 1754, na "Enciclopédia Francesa", deu origem a um famoso paradoxo, denominado portanto de paradoxo de D'Alembert. Esse grande matemático encontrou resultados para problemas relacionados a jogos com dados (vimos que os jogos foram uma grande mola propulsora da Teoria das Probabilidades) e achava que a teoria estava errada, já que na prática os resultados não se confirmavam.

Um dos problemas era o seguinte: Qual a probabilidade de se obter pelo menos uma cara em dois lançamentos de uma moeda? D'Alembert achava que essa probabilidade era 2/3, ou seja, a obtenção de uma ou duas caras no lançamento de dois dados era de 2/3, ou aproximadamente 0,6667. Numa simulação feita no computador, obtivemos:

| Nº de repetições | 1 ou 2 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 69 | 0,69 |
| 1 000 | 778 | 0,778 |
| 10 000 | 7545 | 0,7545 |
| 50 000 | 37337 | 0,74674 |

Obtivemos então um resultado que parece tender para 0,75 e, portanto, distante do que era esperado por D'Alembert.

a) Discuta com o colega como resolver esse impasse e verificar qual dos dois resultados é o correto? Deixe seu comentário abaixo

b) O processo realizado via computador trabalha com que conceito de probabilidade?

7) Tem-se três caixas contendo bolas brancas e pretas. A caixa I contém 4 bolas brancas e 2 pretas, a caixa II contém 3 bolas brancas e 1 preta e a caixa III contém 1 bola branca e 2 pretas.

a) Extrai-se uma bola de cada caixa. Qual é a probabilidade de que todas as 3 bolas extraídas sejam brancas?

b) Escolhe-se ao acaso uma caixa e dela se extrai uma bola. Qual a probabilidade de que a bola extraída seja branca?

c) Dado que a bola extraída é branca, qual a probabilidade dela ter sido extraída da caixa II?

d) Discuta com o colega a diferença de raciocínio aplicado em cada um dos casos anteriores. Que noções ou conceitos foram utilizados?

## Sequência de Atividades-Parte 3

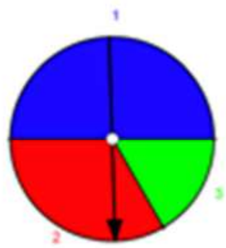
8) Considere um alvo circular subdividido igualmente em 12 fatias que são coloridas com 8 cores: amarelo, azul escuro, azul claro, verde, vermelho, vinho, rosa e marrom, conforme a figura ao lado. Suponha que um indivíduo, de olhos vendados, atire setas na direção do alvo e suponha ainda que o faça de maneira o mais regular possível. Responda V (verdadeiro) ou F (Falso) às asserções:

a) ( ) A maior chance de acerto do alvo é na cor azul escuro.
b) ( ) A chance de acertar o alvo na cor amarela é maior do que na cor verde.
c) ( ) A chance de acertar o alvo na cor amarela é de 2:3 em relação à cor azul escuro.
d) ( ) Se a fatia rosa fosse pintada de vermelho, dobraria a chance do alvo ser atingido na cor vermelha.
e) ( ) A chance de acertar o alvo independe da cor.

9) Na roleta abaixo, o setor verde tem ângulo central de 60°.

i) Qual é a probabilidade do ponteiro parar no setor vermelho?

ii) Qual probabilidade está sendo tratada nesta questão?



10) O que você pode afirmar sobre eventos mutuamente exclusivos? E sobre eventos independentes? Discuta com o colega e procure dar exemplos de cada um deles.

Vamos agora considerar famílias com 3 crianças (filhos) e os eventos:

Evento A: existem crianças de ambos os sexos.

Evento B: existe no máximo uma menina.

a) Faça uma representação do espaço amostral e dos eventos A , B e A∩ B (para uniformizar a escrita use M para sexo masculino e F para sexo feminino)

b) Calcule as probabilidades p(A), p(B) e p(A∩ B).

c) Lembrando que a probabilidade condicional é dada por $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ , calcule p(A|B) e p(B|A). O que você verifica?

d) Faça o mesmo para as famílias com 4 crianças. O que você notou agora em relação às probabilidades condicionais? Discuta com seu colega se tem alguma diferença em relação ao caso anterior.

e) Se usarmos a definiçao "dois eventos A e B são independentes se, e somente se, p(A|B)=p(A).p(B)", o que você pode concluir em relação aos eventos A e B no caso de famílias com 3 crianças e de famílias com 4 crianças?

f) Diante do que vimos nos itens anteriores podemos concluir então que a estrutura de um espaço amostral afeta as relações de dependência entre eventos. O que acha?