

UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA  
JOSÉ IVANILDO FELISBERTO DE CARVALHO

**UM ESTUDO SOBRE OS CONHECIMENTOS DIDÁTICOS-MATEMÁTICOS DE  
PROBABILIDADE COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO  
ENSINO FUNDAMENTAL**

**SÃO PAULO**

**2017**

C824e Carvalho, José Ivanildo Felisberto de

Um estudo sobre os conhecimentos didáticos-matemáticos de probabilidade com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. / José Ivanildo Felisberto de Carvalho. – São Paulo, 2017.  
344 f.: il.; 30 cm

Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós-graduação - Universidade Anhanguera de São Paulo, 2017.

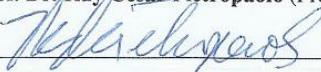
Orientador: Prof. Dr. Ruy Cesar Pietropaolo  
Co-orientadora: Profa.Dra. Tânia Maria Mendonça Campos

1.Ensino de Probabilidade. 2. Conhecimento didático-matemático. 3. Formação de professores. I. Título II. Universidade Anhanguera de São Paulo.

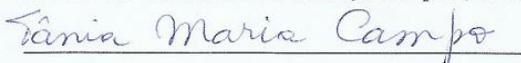
CDD 372.7

## BANCA EXAMINADORA

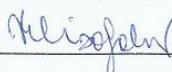
Prof. Dr. Ruy Cesar Pietropaolo (Presidente)



Profa. Dra. Tânia Maria Mendonça Campos (Co-orientadora)



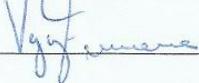
Profa. Dra. Maria Elisa Esteves Lopes Galvão - UNIAN-SP (1º Membro Titular Interno)



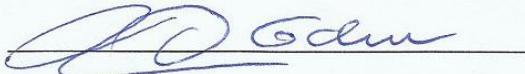
Profa. Dra. Lisbeth Kaiserlian Cordani - USP (2º Membro Titular Externo)



Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira - UFPE (3º Membro Titular Externo)



Prof. Dr. Juan Díaz Godino – Universidade de Granada (4º Membro Titular Externo)



*Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação/tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.*

UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA  
JOSÉ IVANILDO FELISBERTO DE CARVALHO

**UM ESTUDO SOBRE OS CONHECIMENTOS DIDÁTICOS-MATEMÁTICOS DE  
PROBABILIDADE COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO  
ENSINO FUNDAMENTAL**

*Tese apresentada à banca examinadora  
da Universidade Anhanguera de São  
Paulo, como exigência parcial para  
obtenção do título de Doutor em  
Educação Matemática, sob a orientação  
do Professor Doutor **Ruy Cesar  
Pietropaoolo** e sob a coorientação da  
Professora Doutora **Tânia Maria  
Mendonça Campos.***

**SÃO PAULO**

**2017**

## AGRADECIMENTOS

PERMITAM-ME OS LEITORES O PROTOCOLO QUEBRAR  
MEUS SINCEROS AGRADECIMENTOS, VOU AQUI CORDELIZAR.

AO PROFESSOR RUY CESAR PIETROPAOLO

BOM HUMOR E SIMPATIA, SUAS MARCAS DE AUTORIA  
PACIÊNCIA E DEDICAÇÃO NOS DIAS DE ORIENTAÇÃO  
RESPEITOSO COM MINHAS OPINIÕES,  
MAS BRILHANTE NA CONTRA-ARGUMENTAÇÃO  
OBRIGADO MUI, AO PROFESSOR RUY.

À PROFESSORA TÂNIA M. M. CAMPOS

DE CORAÇÃO SOU GRATO  
À PROFESSORA TÂNIA CAMPOS  
QUE ME ENSINOU GRANDE LIÇÃO  
COMPARTILHAR CONHECIMENTOS  
COM MUITO INCENTIVO NOS ESTUDOS ACADÊMICOS  
SEMPRE COM COMPETÊNCIA E MOTIVAÇÃO  
AGRADEÇO COM EMOÇÃO  
SENTIMENTO DE ACOLHIDA NESSA PASSAGEM  
AQUI PRESTO MINHA HOMENAGEM.

À PROFESSORA VERÔNICA G. F. GITIRANA

AS ABELHAS FAZEM UM MEL SABOROSO  
DA FLOR GITIRANA  
AGRADEÇO UMA INCENTIVADORA CONSTANTE  
QUE É A PROFESSORA VERÔNICA GITIRANA  
PENSE NUMA PESSOA IMPORTANTE  
NESSA JORNADA SEMPRE PARTICIPANTE.

AOS PROFESSORES JUAN DÍAZ GODINO E CARMEN BATANERO

DO OUTRO LADO DO OCEANO  
NAS TERRAS DE GRANADA  
GODINO E BATANERO  
RECEBERAM MINHA CHEGADA  
GRACIAS VOS DOU POR CONTRIBUIR COM MINHA CAMINHADA.

ÀS PROFESSORAS LISBERTH K. CORDANI E MARIA ELISA E. L. GALVÃO

AGRADEÇO TANTAS VALIOSAS SUGESTÕES  
PELO OLHAR ATENCIOSO, PELA LEITURA DEDICADA  
PELAS INESTIMÁVEIS CONTRIBUIÇÕES  
A ESTA TESE REALIZADA.

AOS PROFESSORES DO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PROFESSORES DO PROGRAMA  
ATENCIOSOS SEMPRE ESTAVAM  
MUITAS DISCUSSÕES COM AS TEORIAS QUE DOMINAVAM  
AGRADECIDO ESTOU POR CADA ENSINAMENTO  
VOCÊS TÊM PARTE NESSE MOMENTO.

AOS COLEGAS E AMIGOS DO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DE TODO BRASIL, MESTRANDOS E DOUTORANDOS, NÃO FALTAVAM  
OBRIGADO AOS COLEGAS  
FOI UMA EXPERIÊNCIA ARRETADA

COM TROCAS DE CONHECIMENTOS  
SEGUIMOS NOSSA ESTRADA  
GRATIDÃO É A PALAVRA PARA OS AMIGOS DESSA JORNADA.

DOIS DELES EM ESPECIAL,  
PRECISO AQUI FALAR  
LICENÇA AOS OUTROS COLEGAS, QUE AGORA VOU CITAR  
É o ROBSON CANDEIAS QUE QUERO DESTACAR  
E o JOSÉ CÍCERO QUE NÃO PODE FALTAR.

AOS PROFESSORES DA REDE ESTADUAL DE SÃO PAULO  
PARTICIPANTES DO OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO

PROFESSORES DE MATEMÁTICA  
AOS SÁBADOS DESPERTARAM NA ALVORADA  
PARA TROCAS DE CONHECIMENTOS,  
TALVEZ ATÉ LONGE DE SUA CASA  
O CAFÉ DA ROSANA DA DIRETORIA LOGO NOS ANIMAVA  
DIGO  
SEM VOCÊS ESSA PESQUISA SERIA NADA.

COLEGAS DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO EM GRANADA

FORAM BONS OS ESTUDOS  
BEM COMO AS ESCAPADAS  
BOAS LEMBRANÇAS EM MINHA MENTE  
FICARAM GUARDADAS.

À COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DO ENSINO SUPERIOR  
OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO

A CAPES NÃO ESQUECEREI, POIS DINHEIRO EU PRECISEI  
AGRADEÇO A BOLSA DE ESTUDOS  
PARA A PESQUISA QUE NESTE TEXTO APRESENTEI.

AOS COLEGAS DA UFPE

AOS COLEGAS DE TRABALHO  
QUE MUITO ME INCENTIVARAM  
DO APOIO AGRADEÇO, COM MUITO APREÇO.

AOS MEUS FAMILIARES, A MINHA MÃE MARIA HELENA DE AZEVEDO  
E AO REGINALDO SOARES DA S. FILHO

DA QUERIDA IRMÃ DANI E DOS FAMILIARES, BOAS ENERGIAS EMANADAS  
COISA BOA TER VOCÊS AO LONGO DE MUITAS ESTRADAS

MAS PRECISO DESTACAR UMA QUE É QUERIDA E DANADA  
QUE NO SEU CORAÇÃO TEM MINHA MORADA  
POR TUDO QUE FEZ PRA ME VER NESSE MOMENTO  
OBRIGADO MINHA MÃE POR CADA ENSINAMENTO.

REGI COMPANHEIRO TAMBÉM NESSA JORNADA  
AQUELE QUE MUITO ESCUTOU EXPLICAÇÕES DESSA EMPREITADA  
PELA PACIÊNCIA DE TODAS AS HORAS, OBRIGADO MEU CAMARADA.

A TODOS OS MEUS AMIGOS

NO DECORRER DESSA PELEJA QUE FIZ  
OS AMIGOS VIRAM QUE NÃO TEVE MOLEZA  
EM MOMENTOS DE ANGÚSTIAS  
NÃO ME DEIXARAM CAIR EM TRISTEZA  
CADA UM TORCEU FELIZ  
DISSO TENHO CERTEZA.

**O HOMEM É A MEDIDA DE TODAS AS COISAS,  
DAS COISAS QUE SÃO, ENQUANTO SÃO,  
DAS COISAS QUE NÃO SÃO, ENQUANTO NÃO SÃO.**  
PROTÁGORAS DE ABDERA

## **DEDICATÓRIA**

DEDICO ESTE TRABALHO A LUKAS GABRIEL,  
A LARA BEATRIZ E LUAN BRENO.  
E AOS MEUS PAIS,  
QUE SEMPRE TORCERAM E LUTARAM  
PELA CONCRETIZAÇÃO DOS MEUS SONHOS.

## **RESUMO**

O presente estudo tem como objetivo investigar como um programa formativo favorece a construção dos conhecimentos didáticos-matemáticos sobre probabilidade com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. Esta investigação foi desenvolvida no âmbito do projeto de pesquisa “Investigações sobre o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos concernentes à probabilidade e estatística”, pertencente ao Programa Observatório da Educação do Ministério da Educação (OBEDUC - UNIAN). Descreve-se uma experiência formativa para o desenvolvimento do conhecimento didático-matemático sobre probabilidade e noções associadas com professores de matemática em exercício nos anos finais do Ensino Fundamental no Brasil (estudantes de 11 a 14 anos).

Para esta investigação foi utilizado como marco teórico, a teoria do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – (EOS), o modelo do Conhecimento Didático-Matemático do professor de matemática, a teoria da Idoneidade Didática e a Engenharia Didática baseado no EOS. Metodologicamente, são discutidas as fases dessa engenharia didática (estudo preliminar, desenho, implementação e avaliação) que se constituiu como o fio condutor para o desenvolvimento desta experiência. Da mesma forma se aplicaram as categorias do modelo do conhecimento didático-matemático do professor de matemática (conhecimento comum, avançado e especializado do conteúdo). O processo formativo foi vivenciado com 40 professores durante sete encontros, envolvendo uma adaptação das sequências de atividades propostas no programa de ensino de Bryant e Nunes (2012) sobre Probabilidade e Risco e atividades da literatura que complementem as reflexões sobre Probabilidade e seu ensino.

Identificou-se que os conhecimentos iniciais que demonstraram ter o grupo de professores participantes, sobre probabilidade e seu ensino, são insuficientes para um processo de ensino e aprendizagem idôneo com os alunos do Ensino Fundamental. Constatou-se também, que os professores desenvolveram e ampliaram conhecimentos concernentes à probabilidade e ao seu ensino. Nessa ampliação, constatou-se ainda, um processo de ressignificação dos professores sobre o significado da probabilidade e das noções que sustentam este conceito como as noções de aleatoriedade, espaço amostral e quantificação de probabilidades. Foi destacada a noção de risco por meio do estudo da associação entre variáveis em tabelas de dupla entrada como um conhecimento emergente para o ensino nos anos finais do Ensino Fundamental. Avaliou-se que o programa de formação favorece a construção dos conhecimentos didáticos-matemáticos uma vez que a idoneidade didática geral foi considerada alta. Observou-se que o modelo formativo experimentado, é um aporte que permite apoiar e formar adequadamente os professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental no tema específico da probabilidade e sua didática.

**Palavras-chaves:** Probabilidade; Ensino de Probabilidade; Conhecimento Didático-Matemático; Formação de professores; Enfoque Ontosemiótico.

## **RESUMEN**

El presente estudio tiene como objetivo investigar cómo un programa de formación favorece la construcción de conocimientos didácticos-matemáticos sobre probabilidad con los profesores de matemáticas de los últimos cursos de Educación Primaria. Esta investigación se ha desarrollado en el ámbito del proyecto de investigación nombrado " Investigaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos concernientes la probabilidad y estadística" que pertenece al Programa Observatorio de la Educación del Ministerio de Educación (OBEDUC - UNIAN). Se describen una experiencia formativa para el desarrollo de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la probabilidad y nociones asociados con profesores de matemáticas en ejercicio de los últimos cursos de Educación Primaria en Brasil (estudiantes de 11 a 14 años).

Se utilizan como marco teórico, la teoría del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), el modelo del Conocimiento didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas, la teoría de la Idoneidad Didáctica y la Ingeniería Didáctica basados en EOS. Metodológicamente, se presentan las fases de la ingeniería didáctica (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación) que se constituyó como principio rector para el desarrollo de esta experiencia. Del mismo modo se aplicó las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas (conocimiento común, avanzado y especializados del contenido). El proceso de formación se experimentó con 40 profesores durante siete encuentros, que involucra una adaptación de las secuencias de las actividades propuestas en el programa de Bryant y Nunes (2012) sobre la probabilidad y el riesgo y las actividades de la literatura que complementan las reflexiones de Probabilidad y su enseñanza.

Se identificó que los conocimientos iniciales que han demostrado el grupo de profesores que participaron en la investigación sobre la probabilidad y su enseñanza, son insuficientes para un proceso de enseñanza y aprendizaje adecuado para los alumnos de esta etapa educativa. También se constató que los maestros han desarrollado y ampliado el conocimiento sobre la probabilidad y la enseñanza. En esta ampliación, se identificó también un proceso de resignificación sobre el significado de la probabilidad y las nociones que apoyan este concepto como las nociones de aleatoriedad, el espacio muestral y cuantificación de probabilidades. Destacamos la noción de riesgo por medio del estudio de la asociación entre las variables en la tabla de doble entrada como un conocimiento emergente para la enseñanza en los últimos cursos de Educación Primaria. Se evaluó que el programa de formación contribuye con la construcción de los conocimientos didácticos-matemáticos una vez que la idoneidad didáctica general se consideró alta. Se observó que el modelo de formación experimentado, es un aporte que permite apoyar y capacitar adecuadamente profesores de matemáticas de los últimos cursos de Educación Primaria en el tema específico de la probabilidad y su didáctica.

**Palabras clave:** Probabilidad; Enseñanza de la probabilidad; Conocimiento didáctico-matemáticos; Formación de profesores; Enfoque Ontosemiótico.

## ABSTRACT

The objective of this study is to investigate how a formative program favors the construction of didactic-mathematical knowledge about probability with the math teacher of the final years on Elementary School. This research was developed on the scope of search project “*Investigações sobre o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos concernentes à probabilidade e estatística*” [Investigations about the teaching and learning process of concepts related to probability and statistics], which belongs to “*Programa Observatório da Educação do Ministério da Educação*” [Ministry of Education observatory of education program] (OBEDUC - UNIAN). We describe a formative experience for the development of didactic-mathematical knowledge about probability and notions associated with active math teacher of the final years on Elementary School in Brazil (11 to 14-year-old students).

We use as theoretical framework the Onto-semiotic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction (EOS) theory, the Knowledge Didactic-Mathematical model of the math teacher, the theory of Didactic Adequacy and the Didactic Engineering based on EOS. Methodologically, the phases of this didactic engineering (preliminary study, design, implementation and evaluation) are presented as the guiding thread for the development of this experiment. In the same way, the categories of the didactic-mathematical knowledge model of the math teacher (common knowledge, advanced and specialized knowledge of the content) are applied. The training process was carried out with 40 teachers during seven meetings, involving an adaptation of the sequences of activities proposed in the Bryant and Nunes (2012) about Probability and Risk and literature activities which complement the reflections about probability and its teaching.

We identified that initial knowledge which the group of participating teachers showed about probability and its teaching are insufficient for a suitable teaching and learning process with students in the school phase. We also verified that teachers developed and expanded knowledge concerning the probability and its teaching. In this expansion, we verified a resignation process of the teachers about the meaning of probability and notions which support this concept as the notions of randomness, sample space and quantity quantification. We highlighted the risk notion through association study among variables in double entry tables as an emerging knowledge to the Elementary school final years teaching. We evaluated that the formation program favors the construction of didactic-mathematical knowledge since general didactic suitability was considered high. We observed that he tried formative model is a contribution that allows to support and properly train math teachers of the Elementary school final years in the specific subject of probability and its didactics.

**Key Words:** Probability; Teaching of Probability; Knowledge didactic-mathematical; Teacher education; Onto-semiotic approach.

## **LISTA DE FIGURAS**

Figura 1: Conjunto de noções teóricas do EOS .....	25
Figura 2: Facetas e componentes do Conhecimento Didático-Matemático (Modelo CDM) .....	32
Figura 3: Dinâmica das configurações didáticas .....	38
Figura 4: Esquema de configurações didáticas e trajetória didática .....	39
Figura 5: Exemplo de aplicação de um hexágono de idoneidades .....	43
Figura 6: Etapas metodológicas .....	44
Figura 7: Hexágono das Idoneidades Didáticas .....	49
Figura 8: linha de extremos A e B .....	56
Figura 9: círculo A e B .....	57
Figura 10: Elementos da Investigação de Ives (2009).....	94
Figura 11: Questão de quantificação de probabilidades (conhecimento comum do conteúdo) .....	122
Figura 12: item 8 do diagnóstico inicial.....	126
Figura 13: gráfico de barras - item 8 .....	127
Figura 14: principais elementos de uma configuração didática instrucional ...	156
Figura 15: slide inicial do programa formativo .....	163
Figura 16: slide sobre a função random .....	165
Figura 17: slide das situações aleatórias versus determinísticas .....	166
Figura 18: exemplo da imagem do jogo Caça-Níqueis.....	169
Figura 19: exemplo de resolução de alunos.....	170
Figura 20: atividade com o número Pi .....	174
Figura 21: atividade com o número Pi .....	175
Figura 22: atividade com o número Pi .....	176
Figura 23: coleta dos dados do experimento do lançamento de dois dados ..	185
Figura 24: gráfico representando o lançamento de um professor .....	186
Figura 25: gráfico representando o lançamento de 20 professores .....	186
Figura 26: sistematização na lousa pelo formador .....	189
Figura 27: exemplo de tabela do Matrix Game.....	208
Figura 28: exemplo da folha para respostas .....	209
Figura 29: exemplo do jogo Matriz Game.....	210
Figura 30: exemplo do jogo Matrix Game.....	210
Figura 31: aplicação do jogo Matriz Game com os professores .....	211
Figura 32: problema 7 do jogo Matriz Game .....	213
Figura 33: folheto de registro para previsões - atividade com dados .....	215
Figura 34: resolução de uma criança com a atividade dos dados .....	216
Figura 35: primeira solução – intuitiva .....	218
Figura 36: segunda solução – formal: regra do produto de probabilidades....	219
Figura 37: diagrama de árvore da solução da atividade 9.1 .....	222
Figura 38: diagrama de árvore da solução 9.2 .....	223
Figura 39: professores vivenciando atividade dos Blocos no Saco .....	224
Figura 40: feedback da atividade Blocos no Sanco.....	225

Figura 41: utilização do material manipulável.....	226
Figura 42: espaço amostral da atividade Fábrica de bolos .....	229
Figura 43: diagrama construído por uma criança na resolução da atividade da Fábrica de bolos.....	231
Figura 44: Vivência do Jogo Igba-Ita pelos professores.....	233
Figura 45: mapeamento das possibilidades no lançamento das 4 conchas (B : para baixo e C: para cima) .....	235
Figura 46: espaço amostral da solução 1 .....	237
Figura 47: espaço amostral da segunda solução .....	238
Figura 48: mobilização das conchas pelo professor P27 .....	248
Figura 49: primeiro grupo de itens da atividade O Jantar na escola .....	256
Figura 50: primeiro item - atividade O jantar na escola .....	257
Figura 51: folheto para resposta da atividade Clube de Danças .....	260
Figura 52: pares para sorteio na atividade Clube de danças .....	260
Figura 53: folheto para comparação das relações na horizontal .....	263
Figura 54: folheto para comparação das relações na vertical .....	263
Figura 55: resolução de um aluno na atividade de risco .....	264
Figura 56: resolução do professor P17 n atividade sobre risco.....	268
Figura 57: solução da situação-problema 1 com o uso da árvore de possibilidades.....	280
Figura 58: solução da situação-problema 2 com o uso da árvore de possibilidades.....	282
Figura 59: protocolo do professor P14 na atividade Tigela de doces .....	291
Figura 60: protocolo do professor P5 na atividade Tigela de doces .....	292
Figura 61: situação reflexiva utilizada no início do quinto encontro.....	306
Figura 62: atividade do Clube de danças .....	314
Figura 63: hexágono da idoneidade geral do experimento formativo .....	320

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1: Exemplo de comparação de risco por meio da razão de chances ...	65
Tabela 2: quantitativo de professores (respostas erradas, corretas e em branco)	
.....	122
Tabela 3: quantidade de respostas por subitem.....	123
Tabela 4: frequências relativas condicionadas por coluna .....	128
Tabela 5: frequência das estratégias iniciais.....	253

## **LISTA DE QUADROS**

Quadro 1: Modelo de Grossman (1990) .....	28
Quadro 2: Elementos do bloco 5 do currículo espanhol .....	71
Quadro 3: Resumo das investigações selecionadas considerando temáticas, nível, país, quantidades de professores e tipo do texto. ....	90
Quadro 4: Formato típico de uma tabela de contingência 2x2 .....	126
Quadro 5: Configuração epistêmica por unidade de estudo.....	137
Quadro 6: Resumo dos recursos instrucionais.....	158
Quadro 7: Padrões e variáveis do Jogo Caça-níqueis .....	168
Quadro 8: Facetas com indicadores de IDM com base no EOS .....	303

## SUMÁRIO

Introdução .....	14
1. Marco teórico e Metodologia .....	22
1.1 Enfoque Ontosemiótico do conhecimento e da instrução matemática (eos).....	22
1.2 Modelos de Conhecimentos dos Professores.....	27
1.3 Engenharia Didática baseada no Enfoque Ontosemiótico .....	35
1.4 Método e Contexto da pesquisa .....	43
2. Estudo Preliminar.....	50
2.1 Estudo Preliminar – dimensão epistêmica-ecológica.....	50
2.1.1 O acaso e a aleatoriedade – uma breve discussão.....	51
2.1.2 Probabilidade: um conceito multifacetado .....	53
2.1.3 Estudos sobre Risco Probabilístico .....	61
2.1.4 A probabilidade e o currículo escolar .....	67
2.2 Estudo Preliminar – dimensão cognitivo-afetivo .....	76
2.2.1 Investigações sobre conhecimentos de estudantes com probabilidade .....	76
2.2.2 Investigações sobre Conhecimentos e Formação de professores com probabilidade.....	89
2.3 Estudo Preliminar – dimensão instrucional .....	105
3. Um olhar para os dados da fase diagnóstica na perspectiva do Conhecimento Didático-Matemático (CDM) .....	113
3.1 Análise dos Itens do Conhecimento Especializado do Conteúdo .....	114
3.2 Análise dos Itens do Conhecimento Comum e Avançado do Conteúdo.....	121
4. Desenho do Programa de Formação .....	134
4.1 Configuração epistêmica-ecológica .....	135
4.1.1 Subconfiguração epistêmica-ecológica aleatoriedade .....	138
4.1.2 Subconfiguração epistêmica-ecológica espaço amostral e quantificação de probabilidades .....	142
4.1.3 Subconfiguração epistêmica-ecológica quantificação de probabilidades e risco .....	148
4.1.4 Subconfiguração epistêmica-ecológica explorando probabilidades .....	151
4.2 Configuração Instrucional (mediacional – interacional).....	155
4.3 Configuração cognitiva-afetiva.....	159

5.	Trajetórias didáticas .....	162
5.1	Descrição da trajetória didática gerada para o desenvolvimento da unidade Aleatoriedade .....	163
5.1.1	Tipos de problemas e práticas (matemáticas e didáticas) .....	163
5.1.2	Análise dos conhecimentos dos professores na unidade Aleatoriedade .....	191
5.2	Trajetória didática gerada para o desenvolvimento da unidade Espaço Amostral e Quantificação de probabilidades.....	205
5.2.1	Tipos de problemas e práticas (matemáticas e didáticas) .....	205
5.2.2	Análise dos conhecimentos dos professores na unidade espaço amostral e quantificação de probabilidades .....	239
5.3	Trajetória didática gerada para o desenvolvimento da unidade Quantificação de probabilidades e Risco .....	255
5.3.1	Tipos de problemas e práticas (matemáticas e didáticas) .....	255
5.3.2	Análise dos conhecimentos dos professores na unidade quantificação de probabilidades e risco .....	266
5.4	Trajetória didática gerada para o desenvolvimento da unidade Explorando Probabilidades .....	272
5.4.1	Tipos de problemas e práticas (matemáticas e didáticas) .....	272
5.4.2	Análise dos conhecimentos dos professores na unidade explorando probabilidades .....	285
5.5	O olhar dos professores para o seu próprio conhecimento de probabilidade, ensino de probabilidade e o processo formativo. ....	295
6.	Idoneidade do Processo Formativo sobre Didática da Probabilidade .....	302
6.1	Idoneidade Epistêmica.....	303
6.2	Idoneidade Ecológica.....	313
6.3	Idoneidade Cognitiva .....	314
6.4	Idoneidade Afetiva .....	315
6.5	Idoneidade Interacional.....	317
6.6	Idoneidade Mediacional .....	318
6.7	Perspectiva geral da idoneidade didática .....	320
7.	Considerações Finais.....	322
	Referências .....	328
	Anexo – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.....	i

## **INTRODUÇÃO**

---

A presente tese intitulada “Um Estudo sobre os Conhecimentos Didáticos-Matemáticos de Probabilidade com Professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental” insere-se na linha de pesquisa “Formação de Professores que Ensinam Matemática” do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática promovido pela Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN) com a participação de professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.

Este estudo integra um conjunto de ações desenvolvidas no âmbito do projeto de pesquisa “Investigações sobre o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos concernentes à probabilidade e estatística”, pertencente ao Programa Observatório da Educação - Capes<sup>1</sup> (OBEDUC - UNIAN), coordenado pelo Prof. Dr. Ruy César Pietropaolo, com cooperação da Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Terezinha Nunes e do Prof. Dr. Peter Bryant (ambos da Universidade de Oxford – Inglaterra) e em parceria com a Secretaria Estadual de Educação de São Paulo.

O projeto de pesquisa que originou esta tese foi devidamente submetido para avaliação ao Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) em 31/03/2014 e aprovado mediante Parecer Consustanciado número 645.337 em 12/05/2014.

De novembro de 2014 a fevereiro de 2015, como parte do desenvolvimento da pesquisa, realizamos uma parceria com o Departamento de Didática da Matemática da Universidade de Granada – Espanha para vivência de um estágio doutoral acompanhado pelo professor Dr. Juan Díaz Godino e também financiado pela Capes<sup>1</sup>. No referido estágio aprofundamos os estudos sobre a teoria do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS.

Nossa opção pelo tema justifica-se por ser, cada vez mais urgente, o letramento estatístico da sociedade. É perceptível nos dias de hoje uma diversidade de situações que exige de nós habilidades no tratamento de dados

---

<sup>1</sup> Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

que demandam conhecimentos de estatística e probabilidade. As características da nossa vida contemporânea exigem constantemente a mobilização de conhecimentos estatísticos, combinatórios e probabilísticos. Tomar decisões coerentes na vida diária e interpretar informações com mais fidedignidade levam em conta, por exemplo, um raciocínio probabilístico.

Algumas das situações relacionadas às ideias que dão suporte ao conceito de probabilidade podem ocasionar dificuldades de compreensão por apresentar características contra-intuitivas, ou seja, que ferem a nossa intuição. É comum, algumas pessoas interpretarem “maior chance” quase como uma certeza; por exemplo, ao argumentar que se tem maior chance de sair amarelo em determinada situação, cria-se a expectativa de que caso não saia amarelo a resposta estaria errada. Desta forma, as noções de chance e de probabilidade podem ser difíceis de serem compreendidas. Trabalhar com situações que tratem da matemática da incerteza, particularmente da probabilidade, é um mote para o nosso estudo que objetiva discutir os conhecimentos cruciais para o professor poder ensinar com eficácia este conteúdo matemático.

Salientamos que esses conhecimentos se tornam fundamentais para que o professor desempenhe de forma eficiente sua atividade docente no que concerne ao conceito de probabilidade, pois a questão não é apenas sobre o que os docentes devem ensinar, mas sobre o que necessitam saber e serem capazes de realizar essa atividade de forma inovadora.

Diversos pesquisadores (KATAOKA et al., 2008; CAMPOS E PIETROPAOLO, 2013) investigando o cenário do ensino de probabilidade no Brasil constataram que os professores normalmente têm formação em Probabilidade e Estatística na graduação, mas os mesmos não têm conhecimento sobre como ensinar tais conteúdos. Inclusive, professores em exercício podem até duvidar da legitimidade sobre o ensino da probabilidade, como pontuam Campos e Pietropaolo,

muitos docentes não estão sequer convencidos de que a probabilidade seja importante para ser desenvolvida no Ensino Médio; quanto ao Fundamental, têm uma posição ainda mais

restritiva: consideram a inclusão desse tema totalmente inadequada e desnecessária. (2013, p.58).

Temos como pressuposto que o viés determinista da matemática se torna um entrave para o trabalho do professor com a probabilidade. Existe nos professores uma ideia sobre a Matemática alicerçada numa concepção platônica, com uma visão na qual a matemática é estática, a-histórica e portadora de dogmas previamente estabelecidos. No ensino da matemática, o professor, em geral, não considera a probabilidade como um conteúdo “nobre”, digno do ensino tal como o status que é dado, por exemplo, aos conteúdos que envolvem a álgebra e a geometria.

Neste sentido, parece-nos importante um estudo focado nos significados que são atribuídos aos conceitos probabilísticos por professores de matemática, visando o estabelecimento de um programa de formação que dê suporte à construção do conhecimento probabilístico, incluindo uma discussão sobre a importância desses conhecimentos para os alunos da Educação Básica.

Serradó, Cardeñoso e Azcárate (2005) concluem em suas pesquisas que professores apresentaram obstáculos associados ao caráter determinista de suas concepções sobre o conhecimento probabilístico, que não lhes permitiram uma construção adequada das noções de aleatoriedade e probabilidade. A percepção do acaso, experimentos aleatórios e o conceito de probabilidade são elementos que devem ser trabalhados visando o letramento probabilístico dos estudantes (COUTINHO, 2001; GAL, 2005) e os professores devem estar preparados para lidar com esses elementos. Corroboramos ainda com a afirmação de Santana (2011) ao salientar que os professores se sentem *despreparados para o ensino de noções probabilísticas devido às dificuldades encontradas na elaboração de conceitos que exigem construção reflexiva sobre a ideia de acaso e aleatoriedade* (2011, p.88).

Percebemos o quanto é complexo, e ao mesmo tempo necessário, desenvolver propostas de formação que possibilitem ao professor construir conhecimentos mais favoráveis sobre probabilidade e refletir sobre como se dá o ensino desse conhecimento no chão da sala de aula. Os professores devem

estar suficientemente preparados para o ensino de probabilidade e aproveitar os diferentes recursos didáticos existentes para discutir e aprofundar os conhecimentos referentes a esse tema com os estudantes. Tal exploração de recursos didáticos pode ser objeto de novas investigações inclusive utilizando o ambiente computacional e outros tipos de materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da probabilidade.

Para uma boa compreensão dos fenômenos aleatórios, os estudantes devem entrar em contato desde cedo com estas noções. Felisberto de Carvalho e Rocha (2014) advogam que desde os anos iniciais do Ensino Fundamental é necessário que o aluno reconheça que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória. Além disso, o trabalho com as noções de acaso e incerteza deve ocorrer em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos aleatórios.

No Brasil, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) destinados ao Ensino Fundamental, destaca-se que, ao final desta etapa de escolaridade, os estudantes devem ter desenvolvido uma boa compreensão das noções probabilísticas, tais como questões que envolvam a contagem de casos no mapeamento do espaço amostral e seu significado e a utilização de diagramas de árvore (BRASIL, 1998). Além dos PCNs, alguns estados brasileiros, como São Paulo e Pernambuco, em seus currículos prescritos, recomendam também a inserção dos conteúdos probabilísticos nesse grau de ensino.

Com relação aos anos finais do Ensino Fundamental no currículo do estado de São Paulo, está previsto o trabalho com este tópico para o 7º e 9º anos. Esse documento recomenda que o professor trabalhe problemas de contagem e a introdução ao conceito de probabilidade (SÃO PAULO, 2010). Também no currículo do estado de Pernambuco há recomendações para o ensino deste tópico do 6º ao 9º ano de escolaridade.

Assim, torna-se evidente a necessidade de uma discussão sobre o ensino e aprendizagem de probabilidade nos processos de formação inicial e continuada de professores. Nesse sentido, Batanero, Díaz e Cañadas (2013)

sugerem melhorar a formação de professores para o ensino de probabilidade para prepará-los mais adequadamente para a sua atividade docente.

Considerando a necessidade de melhores formações com os docentes de matemática, existem diversos modelos teóricos que tecem reflexões sobre os conhecimentos que os professores devem pôr em cena para favorecer a aprendizagem dos estudantes. Estes modelos dão suporte ao trabalho com a formação inicial e continuada de professores. Mais ainda, Godino (2009) pontua que há um consenso geral que os professores devem dominar os conteúdos da disciplina de matemática, mas não há acordo semelhante sobre a forma de ser alcançado esse domínio e nem a projeção sobre o ensino desse conteúdo. Como em nosso experimento trabalhamos com os professores em exercício, assumimos as ideias de Godino ao dizer que

Do nosso ponto de vista, os modelos de “conhecimento matemático para o ensino” elaborado desde as investigações em educação matemática, incluem categorias muito gerais. Consideramos que seria útil dispor de modelos que permitam uma análise mais detalhada de cada um dos tipos de conhecimentos que se pode pôr em jogo em um efetivo ensino (proficiente, eficaz, idôneo) de matemática. Isso permitiria orientar um desenho de ações formativas e da elaboração de instrumentos de avaliação dos conhecimentos do professor de matemática (GODINO, 2009, p. 19, tradução nossa<sup>2</sup>)

O modelo do Conhecimento Didático-Matemático do professor - CDM, que está embasado na Teoria do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – no qual as categorias podem ser usadas como ferramentas para identificar e classificar os conhecimentos requeridos para o ensino de matemática – é útil, para analisar os conhecimentos postos em jogo pelo professor em um processo formativo. Temos como pressuposto que revisitando este conhecimento dentro de uma proposta integrativa das noções que sustentam e se articulam com o conceito de probabilidade, o professor avance em seu conhecimento didático-matemático de probabilidade.

---

<sup>2</sup> Desde nuestro punto de vista, los modelos de “conocimiento matemático para la enseñanza” elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías muy generales. Consideramos que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas. Ello permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor de matemáticas.

Em face disto, apresentamos o objetivo geral desta pesquisa: *Investigar como um programa formativo favorece a construção dos conhecimentos didáticos-matemáticos sobre probabilidade com os professores dos anos finais do Ensino Fundamental.*

Para tanto, propomos os seguintes objetivos específicos:

- Elaborar um programa de formação para professores dos anos finais do Ensino Fundamental sobre probabilidade e seu ensino;
- Investigar os conhecimentos didáticos-matemáticos sobre probabilidade com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.

E estabelecemos as seguintes questões de pesquisa deste estudo:

- ✓ *Quais os conhecimentos iniciais que os professores demonstraram sobre probabilidade e seu ensino?*
- ✓ *Quais são os conhecimentos desenvolvidos e ampliados por professores de matemática participantes do programa de formação, sobre probabilidade, destinado aos anos finais do Ensino Fundamental?*
- ✓ *Quais são os conhecimentos didáticos-matemáticos necessários ao ensino de probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental?*
- ✓ *Como este programa de formação favorece a construção dos conhecimentos didáticos-matemáticos com professores dos anos finais do Ensino Fundamental?*

O desenvolvimento de nossa investigação em busca de respostas que satisfizessem essas questões culminou na elaboração da presente tese que, em resumo, configura-se com a estrutura apresentada a seguir.

No primeiro capítulo apresentamos o marco teórico da pesquisa e a metodologia desenvolvida com base nesse marco. Discorremos sobre os construtos teóricos do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (GODINO, 2002; 2012; GODINO, FONT, CONTRERAS E WILHELCMI, 2006) tais como: a teoria do Conhecimento Didático-Matemático do professor (GODINO, 2009; GODINO E PINO-FAN, 2015), a Engenharia

Didática do EOS (GODINO, 2012; 2013) e a teoria da Idoneidade Didática (GODINO, 2011).

O segundo capítulo consta de um estudo preliminar sobre o objeto epistêmico foco desta pesquisa – probabilidade, sobre os conhecimentos e dificuldades de alunos e professores envolvendo a probabilidade, e também sobre os recursos didáticos para a abordagem da probabilidade em sala de aula.

Para construir o desenho do programa formativo destinado aos professores dos anos finais do Ensino Fundamental procedemos a aplicação de um questionário inicial para o diagnóstico dos conhecimentos dos professores participantes do estudo sobre probabilidade e ensino de probabilidade. Esse questionário e o respectivo diagnóstico estão apresentados e discutidos no capítulo três.

O capítulo quatro inclui o desenho da formação destinado para desenvolvimento dos conhecimentos didáticos-matemáticos dos professores de matemática em exercício nos anos finais do Ensino Fundamental. Esse desenho foi elaborado mediante as etapas anteriores e apresentamos por meio de diferentes configurações, a saber: configurações epistêmicas, instrucionais e cognitivo-afetivas.

No quinto capítulo discorremos sobre as trajetórias didáticas mediante a implementação do desenho com o grupo de professores por meio de quatro unidades de estudos: aleatoriedade; espaço amostral e quantificação de probabilidades; quantificação e risco probabilístico; explorando probabilidades. Analisamos os conhecimentos comum e avançado (conhecimento de probabilidade) e o conhecimento especializado do professor (conhecimento sobre o ensino de probabilidade) mobilizado pelos professores. Apresentamos ainda avaliação dos professores sobre a formação com eles desenvolvida.

No capítulo seguinte analisamos os limites e avanços deste programa formativo sobre probabilidade e seu ensino por meio da teoria da Idoneidade Didática subjacente ao Enfoque Ontosemiótico. Valoramos em que medida a

formação contribuiu para as ampliações dos conhecimentos dos professores e se este processo foi adequado.

Por fim, no sétimo capítulo, apresentamos as considerações finais sobre o estudo e apontamos questões pertinentes aos processos de formação continuada de professores de matemática. Discorremos sobre possíveis estudos futuros que esta investigação pode suscitar.

## 1. MARCO TEÓRICO E METODOLOGIA

---

### 1.1 ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA (EOS)

O Enfoque Ontosemiótico (EOS) do conhecimento e da instrução matemática é um marco teórico integrativo para a investigação em Educação Matemática, com o propósito de articular diferentes pontos de vista e noções teóricas sobre o conhecimento matemático, seu ensino e sua aprendizagem. Foi elaborado desde o início dos anos 90 (século XX) por Juan Diaz Godino. Em 2003 o referido autor apresenta sob o título de Teoria das Funções Semióticas o desenvolvimento do EOS para obtenção da Cátedra na Universidade de Granada – Espanha. Esse desenvolvimento pode ser compreendido por meio de três fases. A primeira trata do sistema de práticas pessoais e institucionais associadas a um campo de problemas. Nessa fase há uma tentativa de responder a questionamentos de cunho epistemológico e cognitivo:

Problema Epistemológico: O que é um objeto matemático? Ou, de outra forma, qual é o significado de um objeto matemático (número, derivada, média, etc.) em um contexto ou marco institucional determinado? Este problema epistemológico, isto é, referente ao objeto matemático como entidade cultural ou institucional, complementa-se dialeticamente com o problema cognitivo associado, ou seja, o objeto como entidade pessoal ou psicológica. Problema Cognitivo: o que significa o objeto O para um sujeito em um determinado momento e numa determinada circunstância dada? (GODINO, 2012, p.52, tradução nossa<sup>3</sup>).

As noções de “significado institucional e pessoal de um objeto matemático” entendidas em termos de sistemas de práticas foram desenvolvidas para dar resposta a esses questionamentos.

Em uma segunda fase apresenta a noção de função semiótica e a elaboração de uma ontologia matemática explícita (tipos de objetos e processos matemáticos) em que é possível descrever, de maneira operacional,

---

<sup>3</sup> PE (problema epistemológico): ¿Qué es un objeto matemático?; o de manera equivalente, ¿Cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, media, ...) en un contexto o marco institucional determinado? Este problema epistemológico, esto es, referido al objeto matemático como entidad cultural o institucional, se complementa dialécticamente con el problema cognitivo asociado, o sea, el objeto como entidad personal o psicológica: PC (problema cognitivo): ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

o significado do objeto matemático tanto na perspectiva institucional, como pessoal.

Por fim, com a terceira fase de desenvolvimento do EOS se tem uma constituição de ferramentas teóricas para analisar processos de instrução matemática envolvendo a dimensão epistemológica e cognitiva. Dessa forma, esse marco é considerado um modelo ontológico e semiótico para compreensão e possíveis melhorias dos processos de ensino e aprendizagem em matemática. O EOS discute questões decisivas para o planejamento de um processo de instrução matemática, tais como: “Que tipos de interações didáticas deveriam ser implementados nos processos de ensino que permitam aperfeiçoar as aprendizagens em matemática?” (GODINO, 2012, p.53).

Para encontrar respostas a indagações como essas as teorias da Didática da Matemática disponíveis até então foram revisitadas. No EOS são elaboradas ferramentas mais flexíveis de análise dos processos de ensino e aprendizagem. Neste sentido, para uma boa compreensão desse marco teórico apresentaremos as noções teóricas básicas que o constituem.

Uma primeira noção a discorrer é o que entendemos por prática matemática. Godino e Batanero (1994) consideram prática matemática toda ação, *performance*, manifestação ou expressão (verbal, gráfica, gestual, etc.) realizada para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros as soluções obtidas, e ainda, validar ou generalizar para outros contextos e problemas.

Outra noção importante envolve a problemática entre significação e representação na matemática. O EOS enfrenta essa questão mediante a elaboração de uma ontologia matemática que explicita os pressupostos iniciais do tipo antropológico em que se considera a origem humana da atividade matemática e uma relatividade sócio-epistêmica dos significados. Dessa forma, é possível considerar acontecimentos, atividades ou ideias como se fossem entidades (objetos, coisas, etc.), de tal modo que tudo que se possa “individualizar” na matemática possa ser considerado como objeto (um conceito, uma propriedade, uma representação, um procedimento, etc.).

Portanto, objeto matemático é qualquer entidade ou coisa referida no discurso matemático. (GODINO, FONT, CONTRERAS E WILHELM, 2006)

Partindo da noção de situação-problema<sup>4</sup>, esse modelo teórico concebe que o objeto matemático emerge progressivamente do sistema de práticas socialmente compartilhadas, ligadas à resolução de certo campo ou tipo de problemas matemáticos. Para Assis, Godino e Fraude (2012) o Enfoque Ontosemiótico pode ser categorizado como uma perspectiva semiótico-cultural, pois assume uma concepção pragmática, em que o significado é dependente do contexto. Assim, o significado do objeto seria uma entidade composta, formada pelo conjunto de práticas operatórias e discursivas relacionadas com este campo de problemas.

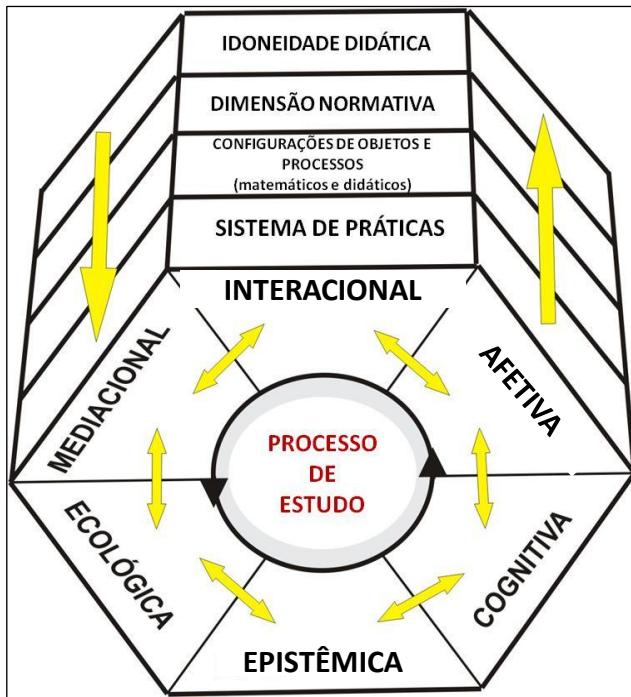
No caso da probabilidade, diferenciamos entre o conjunto de práticas ligadas à resolução do campo de problemas correspondente (estudos, análises e predições de fenômenos aleatórios) e o objeto matemático probabilidade. Esse objeto emergiu historicamente do sistema de práticas (engloba tudo o que socialmente é feito e decidido com respeito à probabilidade) e segue evoluindo como consequência de tais práticas (BATANERO, 2005).

Em síntese, o conjunto de noções teóricas que vai compor o EOS se classifica em quatro grandes grupos (Figura 1) nos quais cada um permite um nível de análise dos processos de ensino e aprendizagem de conteúdos da matemática (GODINO, 2012):

---

<sup>4</sup> Os autores informam que utilizam o termo “situação-problema” com o mesmo sentido utilizado por Brosseau na Teoria das Situações Didáticas, ou como problema-matemático utilizado por Douady com a Teoria Dialética (Instrumento-Objeto) e Jogo de Quadros, ou ainda, análogo à noção de tarefa/problemática definida por Chevallard na Teoria Antropológica do Didático.

**Figura 1: Conjunto de noções teóricas do EOS**



Fonte: Adaptado de Godino (2014).

(1) *Sistema de práticas* (operativas, discursivas e normativas) que assume uma concepção pragmatista – antropológica da matemática, desde o ponto de vista institucional (sociocultural) como pessoal (psicológico). A atividade de resolução de problemas se adota como elemento central na construção do conhecimento matemático. Por exemplo, as ações matemáticas ou estatísticas que os alunos realizam na resolução dos problemas colocados se configuram como um sistema de práticas.

#### (2) *Configurações de objetos e processos*

*Matemáticos:* objetos de Matemática (problemas, procedimentos, conceitos, propriedades, linguagem e argumentos) e processos (por exemplo, a generalização, a representação) que intervêm e emergem das práticas supramencionadas. Assume-se uma noção interacionista do objeto e pragmatista do significado (conteúdo das funções semióticas) articulando de maneira coerente a concepção antropológica com posições realistas (não platônicas) da matemática.

*Didáticos:* como sistema articulado de ações docentes (a fim de promover a aprendizagem e contextualizar o conteúdo) e discentes, a propósito de uma configuração de objetos e processos matemáticos ligados a uma

situação-problema, constitui a principal ferramenta para a análise do ensino da matemática. As configurações didáticas e sua sequência em trajetórias didáticas consideram as facetas epistêmica (conhecimentos institucionais), cognitiva (conhecimentos pessoais), afetiva, mediacional (recursos tecnológicos e temporais), interacional e ecológica que caracterizam os processos de ensino e aprendizagem em matemática.

(3) *Dimensão normativa*: sistema de regras, hábitos e convenções que condicionam e tornam possível o processo de ensino e aprendizagem e afetam cada faceta e suas interações. Generaliza a noção de contrato didático e normas sócio-matemáticas. O reconhecimento do efeito das normas que intervém nas diversas facetas é o principal fator explicativo dos fenômenos didáticos.

(4) *Idoneidade (adequação) didática*: critérios objetivos que servem para melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática, além de orientar a avaliação desse referido processo. Avalia a adequação e pertinência das ações dos agentes educativos, dos conhecimentos postos em jogo e dos recursos usados em um processo de instrução de um tema específico da matemática.

Na seção ulterior discutiremos os principais modelos de conhecimento do professor, especificamente, o modelo do Conhecimento Didático-Matemático do professor (CDM) que foi desenvolvido ancorado nas noções teóricas do EOS. Esse modelo propõe ferramentas para discutir, identificar e classificar os conhecimentos requeridos para o ensino de Matemática, tornando-se útil não só em um processo de estudo em sala de aula, como também em programas de formação de professores, além de ser uma ampliação das noções já discutidas no modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT)<sup>5</sup> (HILL, BALL E SCHILLING, 2008).

O conhecimento que ora ressaltamos que o professor deverá ter para um ensino adequado da Matemática, como afirmam Godino, Batanero, Rivas e Arteaga (2013), “implica em uma articulação entre o matemático e o didático” (p.71). Esse conhecimento é necessário para que o professor desempenhe de

---

<sup>5</sup> Sigla em inglês que faz referência ao termo “Mathematical Knowledge for Teaching”.

forma eficiente sua atividade em um determinado campo do conhecimento, em nosso caso o da probabilidade, pois a questão não é apenas sobre o que os docentes devem ensinar, mas sobre o que necessitam saber, e se são capazes de realizar essa atividade de forma inovadora (BALL, HILL e BASS, 2005).

## **1.2 Modelos de Conhecimentos dos Professores**

Existem diversos modelos teóricos que tecem reflexões sobre os conhecimentos que os professores devem pôr em cena para favorecer a aprendizagem dos estudantes. Um dos pioneiros nessa área foi Shulman (1986) que identificou um domínio especial do conhecimento do professor, ao qual ele se referiu como *conhecimento pedagógico do conteúdo* (PCK<sup>6</sup>). O autor propôs três categorias para o conhecimento do professor: *conhecimento do conteúdo*, *conhecimento pedagógico do conteúdo* e *conhecimento do currículo*.

O *conhecimento do conteúdo*, segundo Shulman (1986), é o conhecimento do universo de conceitos e procedimentos específicos da disciplina que o professor leciona. No caso da categoria do *conhecimento pedagógico do conteúdo* envolve o conhecimento do conteúdo da disciplina em questão, porém com o foco voltado para o ensino dessa disciplina e das estratégias para desenvolver satisfatoriamente um determinado conceito em sala de aula. O *conhecimento do currículo* para Shulman (1986) inclui, por exemplo, conhecer sobre diferentes abordagens curriculares para o ensino de determinados conceitos e a relação com os níveis de escolaridade ao qual o ensino está orientado, bem como compreender a articulação entre os temas dentro (intradisciplinar) e fora (extradisciplinar) da disciplina em questão.

Shulman (1987) recomenda diversas categorias para analisar o conhecimento profissional do professor em um contexto mais amplo para o ensino, além das três descritas anteriormente. São elas: *conhecimento pedagógico em geral*; *conhecimento dos estudantes*; *conhecimento do contexto educacional*; *conhecimento das finalidades* e *propósitos educacionais*. Nos estudos de Pietropaolo, Campos, Silva e

---

<sup>6</sup> Sigla em inglês que faz referência ao termo “Pedagogical Content Knowledge”.

Felisberto de Carvalho (2015) são possíveis encontrar discussões dessas categorias associadas ao conhecimento probabilístico.

Estudos posteriores como os de Grossman (1990) propõem um modelo de conhecimento do professor em que considera as categorias base desenvolvidas por Shulman. Nesse modelo apresenta quatro componentes principais, que apresentamos no quadro 1:

1. Conhecimento pedagógico geral	Inclui um corpo de conhecimentos gerais, crenças e habilidades relacionadas com o ensino: conhecimento e crenças concernentes à aprendizagem e aos estudantes; conhecimento de princípios gerais de instrução tais como o tempo de aprendizagem acadêmica, tempo de espera ou instrução em pequenos grupos; conhecimento e habilidades relacionadas com a gestão da sala de aula; e conhecimento e crenças sobre a finalidade e objetivos da educação.
2. Conhecimento do conteúdo	Refere-se aos conceitos e fatos principais dentro de um campo e as relações entre esses campos.
3. Conhecimento Pedagógico do Conteúdo	Está composto de quatro componentes centrais: concepções das propostas de ensino de um conteúdo, conhecimento da compreensão dos estudantes, conhecimento curricular e conhecimento das estratégias de ensino.
4. Conhecimento do contexto	Os professores deveriam se basear em sua compreensão do contexto particular em que ensinam para adaptar seu conhecimento geral às necessidades específicas da escola e de cada um dos estudantes.

**Quadro 1: Modelo de Grossman (1990)**

Fonte: Grossman, 1990, p. 6.

No caso do modelo desenvolvido por Hill, Ball e Schilling (2008), esses autores propõem um refinamento das categorias propostas por Shulman (1987) visando, entre outras questões: o que os professores necessitam saber e do que são capazes de fazer, efetivamente, para desenvolver o trabalho de ensinar Matemática? Hill et al. (2008) desenvolvem a noção de *conhecimento matemático para o ensino* (MKT) distinguindo seis categorias principais que

envolvem essa noção, organizadas em *conhecimento do conteúdo matemático* e *conhecimento pedagógico do conteúdo*.

O *conhecimento do conteúdo matemático*, segundo Hill et al. (2008), dividi-se em três subcategorias. O *conhecimento do conteúdo comum* é o conhecimento colocado em jogo por qualquer pessoa para resolver determinados problemas matemáticos. O *conhecimento do conteúdo especializado* inclui, por exemplo, aspectos como identificar ideias matemáticas que dão base a resolução de um problema. E por fim o *conhecimento horizontal do conteúdo*, que é o conhecimento da relação com outras disciplinas e as conexões intradisciplinares, a título de exemplo, com a história da matemática e da própria probabilidade.

Da mesma forma, para o *conhecimento pedagógico do conteúdo*, os autores apresentam três subcategorias que compõe esse conhecimento. O *conhecimento do conteúdo e do currículo* está relacionado com a compreensão dos programas curriculares para um determinado conteúdo. O professor, por exemplo, deve ter um conhecimento sobre a pertinência ou não da inclusão de um conteúdo em um determinado nível escolar e as implicações didáticas que advém desta escolha. O *conhecimento do conteúdo e dos estudantes*, ou seja, o conhecimento de como os estudantes aprendem, raciocinam e desenvolvem estratégias de compreensão sobre determinados conteúdos; por exemplo, o professor, ao saber que seus alunos têm dificuldades no mapeamento do espaço amostral, deve incentivar que eles busquem estratégias para a superação dessa dificuldade. O *conhecimento do conteúdo e do ensino* é resultante da integração do conhecimento do conteúdo matemático e do ensino desse conteúdo; por exemplo, o professor poderá discutir com seus alunos diferentes registros para a determinação do espaço amostral, como tabelas de dupla entrada e diagramas de árvore. Nesse âmbito, o professor deverá também ter conhecimento de estudos e pesquisas indicando questões relativas ao ensino e aprendizagem do tema da matemática em estudo.

Carrillo, Climent, Contreras e Munoz-Catalán (2013) destacam algumas dificuldades de aplicação do MKT e sugerem uma reformulação do modelo de Hill et al. (2008). Dentre as dificuldades, Carrillo et al. (2013) mencionam que o

MKT omitem outras dimensões igualmente importantes, tais como as crenças e os conhecimentos dos professores que não estão especificamente relacionadas a questões matemáticas como, por exemplo, o gerenciamento de uma sala de aula. Os autores apontam também uma problemática com respeito aos domínios do MKT questionando o início e o término de cada domínio.

Carrillo et al. (2013) apresentam o modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) concebido para refletir as crenças dos professores incluindo o ensino e aprendizagem. No MTSK o foco é a matemática, mas assumindo as distintas maneiras em que o professor percebe essa disciplina e o que revela conhecer e utilizar em um processo de ensino. Desta forma, inclui as reflexões que o professor estabelece na interação com a própria matemática em sua prática como professor nos quais aspectos da didática surgem naturalmente.

Outro modelo existente na literatura sobre o conhecimento do professor de matemática é a proposta intitulada como “Quarteto do Conhecimento”. (ROWLAND, HUCKSTEP E THWAITES, 2005; ROWLAND, 2014). Esse grupo de pesquisadores estabeleceu o modelo para estudar o conhecimento profissional do professor, por meio da observação de aulas direcionando um olhar para quais as contribuições que podem emergir do conhecimento do conteúdo matemático do professor. O objetivo com esse modelo é compreender o que o professor sabe e o que o mesmo acredita (crenças) sobre um tópico matemático a ser ensinado e como identificar oportunidades para melhorar o ensino. Tal conhecimento e crenças evidenciados no ensino de matemática podem ser observados por meio de quatro dimensões: fundação, transformação, conexão e contingência<sup>7</sup>. Esse quadro baseia-se no modelo teórico de Shulman, mas enquanto Shulman apresenta as categorias dos diferentes tipos de conhecimento do professor, o Quarteto do Conhecimento visa às situações em que esse conhecimento é evidenciado. (ROWLAND, HUCKSTEP E THWAITES, 2005).

Percebemos que mesmo com as reelaborações e refinamentos os modelos que versam sobre o conhecimento do professor, para o ensino da

---

<sup>7</sup> Possibilidade de que alguma coisa aconteça ou não.

matemática ou outra disciplina, apontam que apenas o domínio do conteúdo não é suficiente em um processo de ensino e aprendizagem. Isso nos leva a refletir sobre quais elementos são significativos para se desenvolver como um bom professor de matemática.

Neste ínterim outra investigação que contribui para a especificação dos conhecimentos que o professor deve ter para que o seu ensino em matemática seja adequado são os estudos sobre a proficiência no ensino de matemática de Schoenfeld e Kilpatrick (2008). Os autores propõem as seguintes dimensões:

- 1) Conhecer as matemáticas escolares com profundidade e amplitude;
- 2) conhecer os estudantes como pessoas que pensam;
- 3) conhecer os estudantes como pessoas que aprendem;
- 4) desenhar e gerir entornos de aprendizagem;
- 5) desenvolver as normas da sala de aula e apoiar o discurso dos alunos como parte do “ensino para a compreensão”;
- 6) construir relações que apóiem a aprendizagem;
- e 7) refletir sobre a própria prática. (SCHOENFELD E KILPATRICK, 2008, p. 322).

Tais dimensões guardam grande relação com o modelo teórico que aplicamos em nossa formação e que, doravante vamos discorrer sobre o mesmo.

Indicamos que diversos modelos poderiam ser aqui mencionados, no entanto, não constitui nosso objetivo nesse apartado discutir um grande número de teorias do conhecimento do professor, e sim, apenas apresentar sucintamente as que podem situar o leitor na discussão. Esses modelos dão suporte a inúmeros trabalhos com a formação inicial e continuada de professores.

Os diversos modelos que discutem o conhecimento do professor de matemática apresentados pelas pesquisas em Educação Matemática incluem categorias muito amplas e disjuntas. São necessários modelos que permitam a realização de uma análise mais precisa de cada componente do conhecimento que éposta em prática em um ensino eficaz de matemática. Neste sentido, consideramos e apresentamos o modelo do Conhecimento Didático-Matemático (CDM) baseado no EOS.

Esse modelo inclui as seis facetas que intervêm nos processos de ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos específicos segundo o EOS. Apresentamos na figura 2 as seis facetas e as categorias de conhecimento do professor segundo o CDM:

**Figura 2: Facetas e componentes do Conhecimento Didático-Matemático (Modelo CDM)**



Fonte: o autor, 2017

Embora na figura 2 os componentes estejam separados, a fim de salientar as suas diferenças, na verdade todos eles interagem entre si. Discorreremos brevemente sobre cada categoria e suas respectivas facetas.

- O *conhecimento comum do conteúdo* (CCC) é o conhecimento do conteúdo matemático em questão. Pode ser entendido como o conhecimento compartilhado com os alunos da etapa educacional em que o professor vai desenvolver um processo de ensino e aprendizagem referente a um determinado conteúdo matemático. Em nosso desenho formativo, as atividades foram selecionadas e adaptadas para dar conta dos conteúdos probabilísticos necessários aos professores nos anos finais do Ensino Fundamental.

- O *conhecimento avançado do conteúdo* (CAC) é o conhecimento compartilhado com os alunos da etapa educativa posterior. O professor deve ter um bom domínio dos conceitos probabilísticos e uma compreensão profunda deles para levar a cabo a organização do ensino e colocá-lo em prática. Incluímos atividades que discutissem probabilidade condicional, diferentes distribuições de probabilidades e a curva normal, que no currículo brasileiro é destinado à etapa do Ensino Médio.
- O *conhecimento especializado do conteúdo* (CEC) é um tipo de conhecimento específico do professor e que leva em consideração as facetas apresentadas na figura 2, tais como a diversidade de significados do conceito e as correspondentes configurações de objetos e processos ligados a eles. As atividades em nosso desenho formativo que abordam essa categoria foram selecionadas de forma a permitir ao professor tecer reflexões profundas e/ou elaborar justificativas e argumentações acerca da probabilidade. Por exemplo, compreender a importância de “abordar primeiro a noção de chance e aleatoriedade antes de trabalhar com quantificação de probabilidades”. Ademais, ajudá-los a propor atividades matemáticas significativas e saber lidar com os erros dos alunos.

Apresentamos as facetas do conhecimento especializado do conteúdo, e que em nosso caso são orientadas para o estudo da probabilidade e das noções que sustentam esse conceito:

- *Faceta epistêmica*: conhecimento matemático de acordo com os significados institucionais em um contexto particular e seus diferentes componentes, tanto objetos matemáticos (problemas, linguagens, conceitos, propriedades, argumentos e procedimentos) como os processos correspondentes, tal como a representação. Acreditamos que, para alguns professores adquirirem esse componente de seu conhecimento probabilístico, se torna mais complexo que para outros

conteúdos matemáticos, em virtude das diferenças inerentes à aleatoriedade relativa ao determinismo e à falta de unicidade epistemológica interna em que se apresentam cinco significados institucionais válidos da probabilidade, como apontados por Batanero, Henry e Parzysz (2005), a saber: intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e axiomático.

- *Faceta cognitiva:* conhecimento do progresso dos significados pessoais alcançados pelos alunos, o grau de dificuldade na aproximação destes aos significados pretendidos, a acessibilidade dos significados pretendidos ou implementados de acordo com as características cognitivas ou de outro tipo dos alunos. Por exemplo, compreender as formas de raciocínio, as dificuldades e os significados pessoais que os alunos podem apresentar em face do trabalho com probabilidade.
- *Faceta afetiva:* conhecimento do grau de implicação (interesse ou motivação) dos alunos no processo de estudo, de seus sentimentos e de todos os componentes emocionais (atitudes, emoções, crenças).
- *Faceta mediacional:* conhecimento do uso dos recursos didáticos de todo tipo (livros, textos, recursos tecnológicos ou manipulativos) apropriados para cada temática e da distribuição temporal adequada para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, segundo o nível ao qual se destina o ensino.
- *Faceta interacional:* conhecimento de modelos de comunicação entre os atores do processo de instrução (em particular, reconhecimento de conflitos semióticos potenciais e sua resolução entre professor-aluno ou os alunos entre si) com o fim de promover o alcance de acordo com a construção de significados compartilhados e a fixação destes.
- *Faceta ecológica:* conhecimento do alcance em que o processo de estudo se ajusta ao currículo, ao projeto educativo da instituição (ou comunidade), relações com a vida cotidiana e profissional, assim como

os condicionamentos do entorno e/ou da comunidade em que se desenvolve.

### **1.3 Engenharia Didática baseada no Enfoque Ontosemiótico**

Recentemente o desenho e análise de atividades em Educação Matemática têm despertado interesse a nível internacional. Na literatura anglo-saxônica as investigações baseadas em desenho e seu reflexo na Educação Matemática se somam ao já tradicional estudo sobre engenharia didática (ARTIGUE, 1989; 2011), que por sua vez se apóia na Teoria das Situações Didáticas<sup>8</sup>. (GODINO, BATANERO, CONTRERAS, ESTEPA, LACASTA E WILHELM, 2013).

Um grupo de pesquisadores (The Design Based Research Collective) desse campo defende que os estudos baseados em desenho propiciam resultados enquanto teoria e enquanto propostas de melhoria efetiva dos processos de ensino e aprendizagem da matemática. Esses pesquisadores argumentam que “a investigação baseada em desenho pode ajudar a criar e ampliar o conhecimento sobre o desenvolvimento, implementação e manutenção de ambientes de aprendizagem inovadores.” (DBRC, 2003, p.5, tradução nossa<sup>9</sup>). Esse grupo atribui cinco características para “métodos de investigação baseado em desenho” (design-based research methods):

- (1) A finalidade central do desenho dos ambientes de aprendizagem e o desenvolvimento de teorias ou proto-teorias de aprendizagem estão entrelaçados.
- (2) O desenvolvimento e a investigação têm lugar mediante ciclos contínuos de desenho, implementação e análises.
- (3) A investigação baseada em desenho deve utilizar teorias que possam ser compartilhadas com os professores e designers educativos para comunicá-los implicações relevantes.
- (4) A investigação deve explicar como funcionam os desenhos em contextos reais. Não só deve documentar o êxito ou fracasso senão também informar sobre as interações que refinam nossa compreensão das questões de aprendizagem implicadas.
- (5) O desenvolvimento de tais implementações se baseia em métodos que se podem documentar e que permitem conectar os processos de intervenção com os resultados de interesse. (DBRC, 2003, p.5).

---

<sup>8</sup> Brousseau (1998).

<sup>9</sup> Argumentamos que la investigación basada en el diseño puede ayudar a crear y ampliar el conocimiento sobre el desarrollo, implementación y sostenimiento de entornos de aprendizaje innovadores.

Em Godino et al. (2013) encontramos uma discussão e comparação sobre a Investigação Baseada em Desenho (IBD) e a Engenharia Didática. Ao fazer a comparação entre esses enfoques metodológicos os autores apontam que a Engenharia Didática com sua estreita relação com a TSD proporciona critérios explícitos em todas as suas fases (desenho, implementação e análise retrospectiva) articulados com o desenvolvimento da própria TSD. De forma contrária, embora com objetivos semelhantes, a Investigação Baseada em Desenho, não toma partido por marcos teóricos específicos, nem tem em princípio vinculação direta com um marco teórico explícito. Discorre que

a investigação baseada em desenho, como paradigma metodológico, especifica como conduzir estudos de desenho, quer dizer, investigações de certa duração sobre interações educativas provocadas por um conjunto desenhado de tarefas curriculares usualmente inovadores e/ou de tecnologias educativas. (GODINO et al., 2013, p. 3)

Cobb e Gravemeijer (2008) distinguem as fases constitutivas das investigações baseadas em desenho: 1) planificação do experimento, 2) experimentação e 3) análise retrospectiva dos dados gerados no experimento.

Em nosso experimento a Investigação Baseada em Desenho (IBD) é utilizada em um contexto de aprendizagem com professores de matemática com objetivos de melhorias dos processos de ensino e aprendizagem de noções probabilísticas elementares. Uma vez que as investigações de intervenções educativas dependem da maneira em que um marco teórico é utilizado para fundamentar as fases que constituem essa intervenção, Godino et al (2013) afirmam que devemos entender a IBD como uma família de metodologias ou enfoques de investigação educativa que podem ou não estarem entrelaçados com alguma teoria-base; levando em consideração que dessa investigação deve-se ter como resultado um produto tais como uma proposta curricular, uma sequência didática ou um software educativo, por exemplo.

A metodologia aplicada em nossa investigação é a engenharia didática entendida em um sentido generalizado proposto em Godino et al. (2013; 2014). Essa engenharia didática baseada no EOS coaduna com os princípios da

Investigação Baseada em Desenho (IBD) e se constitui em quatro fases: estudo preliminar, desenho, implementação e avaliação/análise retrospectiva. Todas essas fases consideram as seis facetas da teoria do EOS. Inclusive o que vai caracterizar a Engenharia Didática baseada no EOS é o uso das referidas facetas.

Distinguimos agora as quatro fases de investigação pertencentes a Engenharia Didática-EOS:

- *Estudo preliminar*: estudo de textos, levantamento bibliográfico, constituição dos significados de referências dos objetos matemáticos em estudo.
- *Desenho*: seleção das situações-problemas e análise à priori dos mesmos, organização de apresentação das atividades, indicação dos comportamentos esperados dos alunos e da planificação das intervenções controladas do professor.
- *Implementação* da trajetória didática: observação das interações entre os alunos-professores e os recursos e, descrição das aprendizagens alcançadas.
- *Avaliação ou Análise Retrospectiva*, que se realiza mediante um contraste entre o previsto no desenho e o observado na implementação. Também é possível a reflexão sobre as normas que condicionam o processo instrucional. A análise sobre a respectiva idoneidade didática se dá também nesta fase.

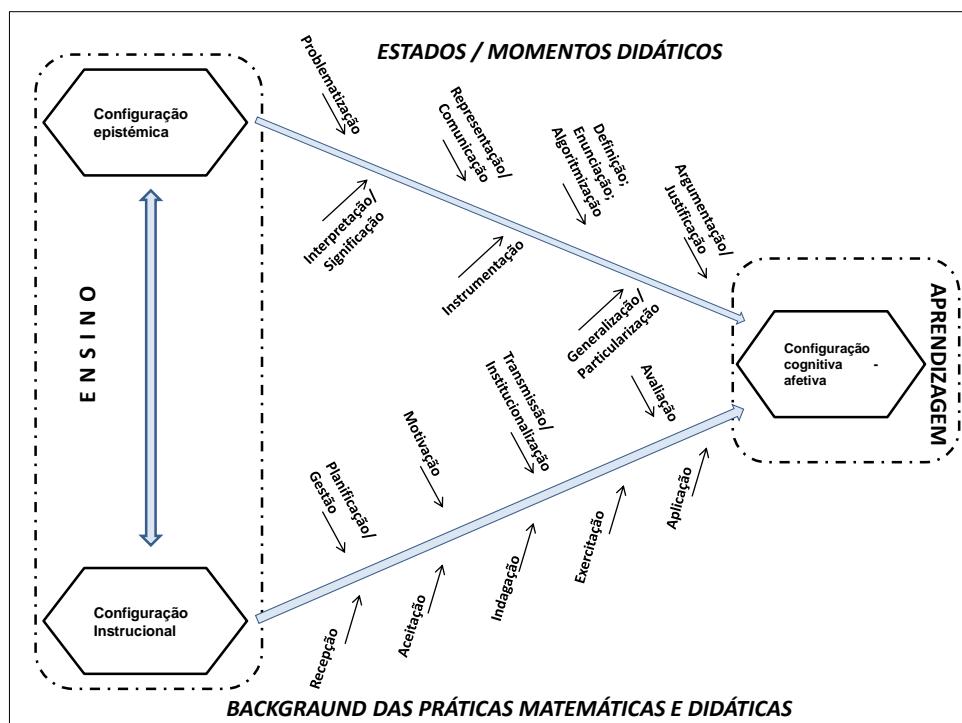
Um processo de instrução matemática, inclusive de formação de professores, pode ser descrito por meio da noção de configurações didáticas e trajetórias didáticas. De fato, um processo de instrução sobre um conteúdo ou tema matemático se desenvolve em um tempo dado mediante uma sequência de configurações didáticas.

Uma configuração didática é qualquer segmento de atividade didática (ensino e aprendizagem) compreendida entre o início e a finalização de uma atividade ou situação-problema. (GODINO, BATANERO, CAÑADAS E CONTRERAS, 2015, p.9). Conforme esses autores, em toda configuração

didática há uma configuração epistêmica (sistema de práticas, objetos e processos matemáticos institucionais), uma configuração instrucional (sistema de funções docentes, discentes e meios instrucionais) e uma configuração cognitiva (sistema de práticas, objetos e processos matemáticos pessoais) mediante o qual se descreve a aprendizagem. Na figura 3 explicitamos os componentes dessa configuração que inclui as ações dos estudantes e do professor e os meios requeridos para abordar o conjunto da atividade ou situação-problema em estudo.

Os estados e/ou momentos didáticos que compõe as configurações didáticas (epistêmicas, instrucional e cognitiva-afetiva) são apresentadas na figura 3.

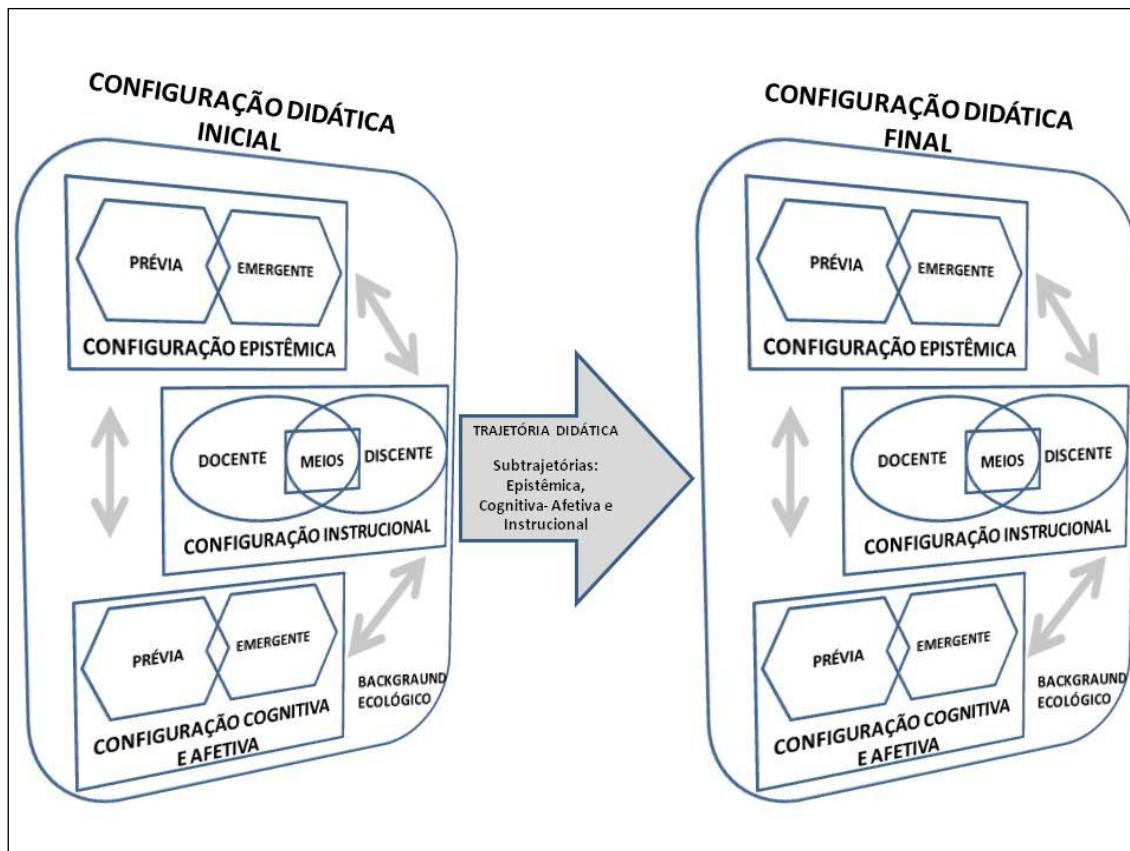
**Figura 3: Dinâmica das configurações didáticas**



Fonte: O autor, 2017 (Adaptação de Godino, 2014, p. 31).

Entre uma configuração didática inicial e final a estrutura permanece; entre uma e outra haverá uma trajetória didática envolvendo uma configuração epistêmica, uma configuração instrucional e outra cognitiva-afetiva (Figura 4).

**Figura 4: Esquema de configurações didáticas e trajetória didática**



Fonte: O autor, 2017 (adaptado de Godino, 2014, p.30).

Esta imbricação entre a matemática e a didática da matemática é o que leva a introduzir o construto “Conhecimento Didático-Matemático – CDM”, já apresentado na seção anterior, e, a propor o estudo integrado da matemática e da didática da matemática na formação de professores de matemática (GODINO et al., 2013, p.71) e que empregamos neste estudo.

No EOS encontramos ainda uma discussão sobre a noção de *idoneidade (adequação) didática* de um processo de estudo. A idoneidade didática tem como objetivo identificar melhorias potenciais de um processo de instrução matemática quer seja em sala de aula, quer seja nos processos de formação de professores, como em nosso caso.

A idoneidade didática com seus respectivos critérios possibilita avaliar o grau de adequação para cada uma das seis facetas do EOS descritas anteriormente, pois um processo de estudo pode ser adequado do ponto de vista estatístico e não adequado, por exemplo, do ponto de vista afetivo.

Consequentemente, seis tipos diferentes de adequação podem ser considerados e articulados de forma coerente e sistêmica (GODINO, 2009), a saber: idoneidade epistêmica, cognitiva, afetiva, mediacional, interacional e ecológica. Todavia, essas facetas não devem ser consideradas de forma independentes – há conexões entre elas.

Mesmo tendo claro o que preconiza as facetas é difícil avaliar a idoneidade didática global em um processo de instrução matemática. Muitas vezes as dimensões e componentes não podem ser observáveis diretamente, desse modo, apresentamos uma descrição de indicadores empíricos que, inclusive, nos guiou na fase avaliativa do nosso experimento. Descrevemos de forma breve esses indicadores (GODINO, BATANERO, RIVAS E ARTEAGA, 2013):

✓ *Idoneidade Epistêmica* – Conteúdo didático-matemático, entendido desde o ponto de vista institucional. Um processo formativo dos professores deverá incluir como objetivo central o estudo e a discussão de uma epistemologia educativa da matemática. Essa idoneidade nos processos de formação de professor se alcança quando se prevê, organiza e deseja que o professor conheça, comprehenda e domine o conhecimento especializado do conteúdo no que se refere a variedade de situações problemas, linguagens, estruturas, argumentações e conexões, para o nível educativo em que o professor exerce sua atividade profissional (conhecimento comum) e tratando do conhecimento avançado, isto é, da articulação com o nível educativo posterior. O critério global de idoneidade epistêmica de um processo de formação de professores será a inclusão no programa de estudo de uma seleção representativa do sistema de conhecimentos didáticos-matemáticos (incluindo compreensão e domínio prático) que a “comunidade de educadores matemáticos” considera como pertinentes para um ensino idôneo da matemática naquele nível correspondente. Por exemplo, é sugerido como uma característica da idoneidade epistêmica do processo formativo de professores que se contemple uma seleção de “casos representativos”, isto é, de situações de contextualização dos conhecimentos didáticos-matemáticos. Estes casos representativos podem consistir em atividades centradas em tópicos ou incidentes didáticos específicos (análises de texto, sessões de vídeos de

professores experientes ensinando tópicos particulares, análise de material de alunos, etc.).

✓ *Idoneidade Cognitiva* – O critério geral de idoneidade cognitiva deveria incluir os conhecimentos considerando a orientação profissional dos estudos. Parece razoável exigir um nível de conhecimentos prévios dos candidatos a professor. As adaptações curriculares às capacidades individuais dos professores em formação também constituem um componente que se requer contemplar. O principal indicador da idoneidade cognitiva do processo formativo será o resultado efetivo das expectativas de aprendizagem sobre a didática da matemática. Deve-se levar em consideração o sistema de conhecimentos, compreensões e competências previamente explicitados como expectativas de aprendizagem do conteúdo didático-matemático.

✓ *Idoneidade Afetiva* – Dado o caráter profissionalizante do programa formativo supomos atitudes e motivações positivas por parte dos professores frente ao ensino da matemática, e por tanto, em relação aos conteúdos e atividades correspondentes. Esta motivação inicial deverá ser potencializada mediante a seleção de casos para sua análise e implementação em atividades relacionadas com sua futura ou atual prática profissional. A adequada conexão teoria-prática será um indicador da idoneidade afetiva, que indiretamente induzirá interesse, motivação e compromisso dos professores. Uma consideração especial será o componente das crenças e valores dos professores em formação sobre a matemática e seu ensino. O programa formativo deverá contemplar a avaliação dessas crenças e valores dos professores, a reflexão sobre os mesmos e as possíveis evoluções.

✓ *Idoneidade Interacional* – O desenvolvimento de competências comunicativas dos professores em formação, e do trabalho autônomo, deverão ser levadas em conta no desenho e na implementação do plano formativo.

✓ *Idoneidade Mediacional* – O uso de recursos manipulativos e tecnológicos de maneira pertinente e oportuna para a aprendizagem de temas matemáticos específicos é um componente do conhecimento especializado do

conteúdo e forma parte, por tanto, das expectativas de aprendizagem. Por exemplo, o uso de recursos informáticos e audiovisuais para a abordagem de casos relacionados com a prática de ensino e análise retrospectiva dos mesmos. Do mesmo modo deverão utilizar recursos disponíveis para a comunicação virtual (fóruns e plataformas virtuais). Dada a amplitude dos conteúdos didático-matemáticos, relativos aos distintos blocos de conteúdo e temas específicos, é provável que não se disponha de tempo suficiente para um estudo sistemático dos mesmos durante o tempo de ensino disponibilizado. Isto levará a selecionar algumas unidades temáticas cuja planificação e análise didática se realizará em tempo disponível; tais unidades deverão ter características prototípicas.

*Idoneidade Ecológica* – É razoável requerer que, a) os conteúdos, sua implementação e avaliação se correspondam com o currículo previamente estabelecido. b) O desenho e implementação das ações formativas tenham em conta os resultados das investigações prévias sobre formação de professores, em particular o uso das novas tecnologias. c) Os conteúdos e atividades formativas giram sobre a formação e o desenvolvimento profissional do professor de matemática, tendo em conta e integrando os aportes de outras matérias do currículo e áreas disciplinares. d) Se contempla a formação em valores democráticos e o pensamento crítico.

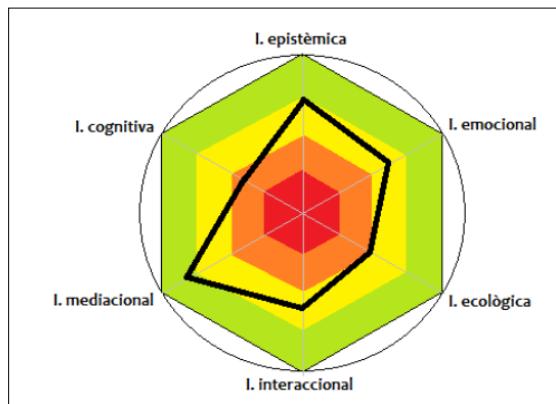
Nos últimos anos já é possível encontrar diversas investigações que se interessaram em analisar o uso dos critérios de idoneidade na formação de professores de Matemática. Em nosso caso, utilizamos os critérios para nortear a etapa de avaliação; porém os critérios apresentam estreita relação com as facetas que foram levadas em consideração na fase de estudo preliminar e desenho. Em Breda, Font e Lima (2015) encontramos diversas investigações realizadas no âmbito da formação de professores em distintos níveis educativos e em países como Espanha, Argentina, México, Chile e Brasil. Esses autores acreditam que,

Os critérios de idoneidade podem servir, em primeiro lugar, para guiar os processos de ensino e aprendizagem de Matemática e, em segundo lugar, para avaliar a sua implementação. Os princípios e critérios de idoneidade são regras de correção úteis em dois momentos do processo de estudo matemático. A *priori*, os critérios

são princípios que orientam “como as coisas devem ser feitas”. A *posteriori*, os critérios servem para avaliar o processo de estudo efetivamente implementado. (BREDA, FONT E LIMA, 2015, p. 36).

Em Giménez, Vanegas, Font e Ferreres (2012) encontramos algumas figuras de estudos recentes e que servem para clarificar a utilização dos critérios de idoneidade didática. Segue exemplo de uma dessas figuras (figura 5):

**Figura 5: Exemplo de aplicação de um hexágono de idoneidades**



Fonte: Giménez, Vanegas, Font e Ferreres (2012).

Na próxima seção apresentamos o nosso método investigativo – no qual o marco teórico nessa seção já nos dá indícios de alguns aspectos da referida metodologia – incluindo uma descrição do contexto da pesquisa.

#### **1.4 MÉTODO E CONTEXTO DA PESQUISA**

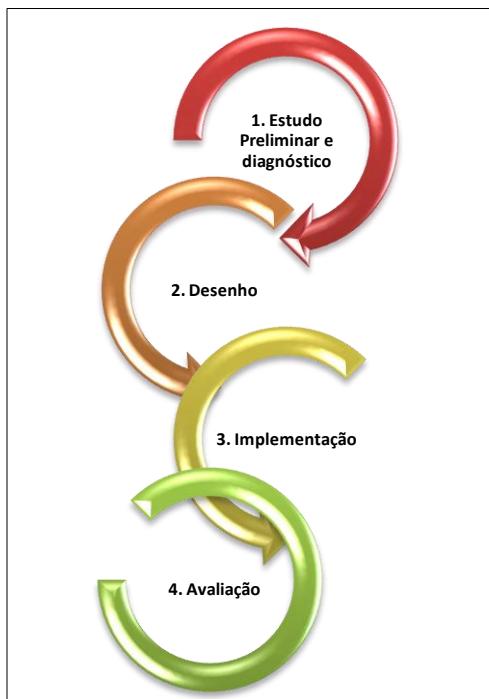
A investigação desenvolveu-se no âmbito do projeto Observatório da Educação da Universidade Anhanguera de São Paulo em cooperação com a Secretaria de Educação do estado de São Paulo. O propósito do Observatório da Educação conforme Pietropaolo, Campos e Silva (2012) discorrem,

é a constituição de um grupo colaborativo de formação e pesquisas, cuja finalidade é promover e analisar o desenvolvimento profissional de professores de Matemática quando inseridos em processos de implementação de inovações curriculares e de reflexão sobre as práticas docentes. Além disso, o grupo de pesquisadores que participa deste projeto pretende contribuir com propostas de apoio efetivo ao trabalho do professor nas aulas de Matemática da educação básica, com vistas à melhoria do desempenho dos alunos. (PIETROPAOLO, CAMPOS E SILVA, 2012, p. 379).

O processo formativo foi vivenciado com 40 professores durante sete encontros, envolvendo uma adaptação das sequências propostas no programa de ensino de Nunes et al. (2012) sobre Probabilidade e Risco e atividades da literatura que complementem as reflexões sobre Probabilidade e seu ensino.

O método desenvolvido para esta pesquisa consta de quatro etapas. A figura 6 ilustra as etapas desenvolvidas na pesquisa.

**Figura 6: Etapas metodológicas**



Fonte: O autor, 2017.

Na etapa 1 realizamos o estudo preliminar e o diagnóstico dos conhecimentos dos professores.

No estudo preliminar incluímos uma discussão da literatura e de investigações antecedentes ao nosso estudo; organizamos a apresentação desse estudo por meio de três dimensões, a saber: dimensão epistêmica-ecológica, dimensão cognitiva-afetiva e dimensão instrucional.

O diagnóstico dos conhecimentos dos professores foi realizado por meio da aplicação de um questionário de entrada ao grupo de 40 professores em um encontro inicial do Observatório da Educação realizado antes do início dos

encontros formativos em que também apresentamos aos professores os objetivos da formação e a metodologia a ser vivenciada. Explicitamos sobre a proposta de pesquisa e extensão que envolve o Observatório da Educação com a formação de professores, e ainda, quais seriam os papéis do formador/pesquisador e dos professores participantes. Consideramos importante que os professores compreendessem a proposta formativa que eles estariam prestes a vivenciar. Com isto os professores poderiam ter um maior compromisso na participação das atividades e assiduidade nos encontros. Houve espaço para apresentação do formador e dos professores.

No que diz respeito aos oito itens do questionário, distinguimos entre seis itens orientados para diagnosticar o conhecimento especializado do conteúdo (itens do 1º ao 6º) e dois itens orientados apenas para o conhecimento comum e avançado do conteúdo (itens 7º e 8º).

Solicitamos que todos respondessem e que se sentissem à vontade para escrever tudo que pensavam e compreendiam sobre o tema; chamamos a atenção para o fato de que os acertos e erros seriam discutidos posteriormente e que eles não seriam identificados. Explicamos que os itens e conceitos envolvidos no diagnóstico seriam amplamente discutidos ao longo da formação. Estes itens serão apresentados concomitantemente à discussão dos resultados no capítulo 3.

Na etapa do desenho realizamos a seleção, adaptação e organização das atividades construindo uma configuração para aplicação durante os encontros formativos. Essa configuração do desenho também considera uma dimensão epistêmica-ecológica, uma dimensão cognitiva-afetiva e uma dimensão instrucional.

Baseamo-nos na sequência de atividades concebidas por Bryant e Nunes (2012) que propõe um estudo gradual que perpassa desde as ideias mais simples sobre aleatoriedade até a quantificação de probabilidades e o entendimento sobre risco. Pontuamos, de forma geral, as ideias que sustentam o entendimento sobre probabilidade, a saber: Aleatoriedade, Espaço Amostral, Quantificação de Probabilidades (chance e medida da chance) e Risco

(correlações entre variáveis em tabelas de contingências). Adotamos outras atividades da literatura sobre probabilidade tais como jogos e falácia.

Este conjunto de atividades foi articulado para desenvolver as categorias de conhecimento didático-matemático do professor (*conhecimento comum do conteúdo* (CCC), *conhecimento avançado do conteúdo* (CAC) e *conhecimento especializado do conteúdo* (CEC)) sobre probabilidade.

A implementação (etapa 3) deste estudo constou de sete encontros com os professores participantes. Estes encontros, de aproximadamente 4 horas cada um, aconteceram aos sábados com intervalos de 15 dias. Participaram 40 professores, destes 23 (57,5%) do sexo feminino e 17 (42,5%) do sexo masculino. Nessa formação mobilizamos as categorias do conhecimento didático-matemático dos professores sobre probabilidade em suas diversas facetas conforme previsto no desenho planificado.

Os formadores deste grupo foram o pesquisador e autor desta tese, e o professor que ora coordenava o Observatório da Educação sendo este também o orientador da referida pesquisa. No entanto, como todo o processo formativo foi parte constitutiva do Observatório da Educação durante a realização de alguns encontros outros pesquisadores (professores, doutorandos e mestrandos) também participaram destes encontros.

Descrevemos no capítulo 5 a implementação desse processo formativo por meio da noção de configurações e trajetórias didáticas segundo Godino (2014) apresentadas na seção anterior. Uma vez que a pesquisa se debruça sobre um processo de instrução voltado para a formação continuada de professores de matemática em exercício apontaremos as ações dos professores e formadores.

Decompormos a trajetória didática que reflete este processo formativo em duas subtrajetórias:

- 1. Formação em probabilidade: que envolve o conhecimento comum e avançado do conteúdo.

- 2. Formação dos aspectos didáticos: que envolve o conhecimento especializado do conteúdo em suas diversas facetas e componentes.

Na primeira subtrajetória elaboramos as atividades aplicadas ao professor para o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo de probabilidade (comum e avançado). Algumas dessas atividades, inclusive, podem ser trabalhadas com o professor da mesma forma como pode ser aplicada aos estudantes.

Na segunda, as atividades foram direcionadas a desenvolver o conhecimento especializado de probabilidade guardando estreita relação com as seis facetas do EOS. Desta forma, possibilitamos uma imersão concernente ao ensino da probabilidade.

Esta divisão é apenas didática, por que, no trabalho com a formação de professores, uma atividade pode em uma primeira parte estar orientada para o desenvolvimento do conhecimento probabilístico do ponto de vista matemática e em uma segunda parte estar relacionada com o desenvolvimento das competências para o ensino desse conhecimento em sala de aula.

Nesse sentido, na descrição das trajetórias didáticas discorremos sobre fatos didáticos significativos que segundo Godino et al. (2014) são as ações ou práticas didáticas que os compõem e desempenham uma função, ou admitem uma interpretação em termos do objetivo instrucional pretendido. Esta “significatividade” pode ser entendida desde o ponto de vista do professor, do estudante, do formador; ou ainda, do ponto de vista instrucional externo ao sistema didático, isto é, da pessoa que realizou o estudo preliminar e o desenho instrucional.

Na análise dessas trajetórias – entendida do ponto de vista de nós, formadores e pesquisadores – investigamos os conhecimentos dos professores identificando dificuldades e conflitos semióticos apresentados no decorrer dos encontros. Apontamos não unicamente dificuldades e conflitos, mas também as aprendizagens alcançadas pelos professores.

Os dados desta pesquisa se constituem nos registros audiovisuais dos encontros formativos e em atividades impressas respondidas pelos professores quando necessário. Ressaltamos que nos encontros o diálogo e a reflexão se constituíram também como os dados do nosso estudo.

Utilizaremos a letra maiúscula F para o formador e a letra P acompanhada de um sub-índice numérico para identificar os professores, do P1 ao P40, a sigla Pf indica as situações em que não foi possível identificar os professores em uma discussão, e por fim, a sigla P? indicará as situações em que um professor fala mas que não se conseguiu identificá-lo no registro audiovisual.

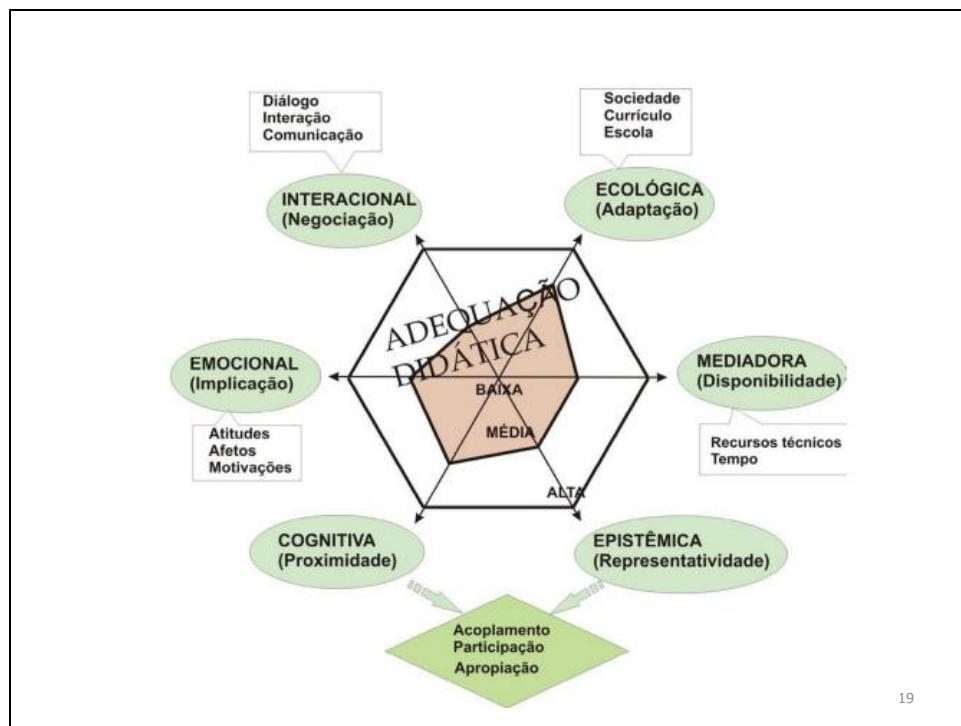
A reflexão dos professores no grupo nos ajudou a compreender os conhecimentos que circulavam durante os encontros formativos. À luz das ideias defendidas por Zeichner (1992; 1998), as falas, os pensamentos, os posicionamentos individuais, pode ser interpretados como manifestação do crescimento de cada professor no grupo formativo. Corbo (2012), pautada nos estudos de Zeichner, em uma pesquisa também com professores de matemática em um processo de formação continuada, diz que não há perda de individualidade quando da apresentação de opiniões por um participante do grupo, passando ao longo do experimento, a ser aceitas (após as devidas discussões) como representações das ideias do grupo inteiro, e ainda, eliminado assim qualquer sentimento de exposição diante do grupo, ou de julgamento por parte do mesmo. Nesse mesmo sentido, a análise da experiência por nos aplicada, considera as opiniões dos professores no grupo, como seres individuais e ao mesmo tempo, como representação do coletivo.

Para a etapa quatro – avaliação – do processo formativo investigamos a *idoneidade didática* deste processo de estudo com os professores de matemática.

Ainda nessa etapa avaliativa foi possível revelar a adequação global do conjunto das configurações didáticas que compõe o programa de formação visando responder a nossa quarta questão de pesquisa, a saber: *Como este programa de formação favorece a construção dos conhecimentos didáticos-*

*matemáticos com professores dos anos finais do Ensino Fundamental?* Utilizamos o exemplo do hexágono (figura 7) proposto por Godino (2011) para apresentarmos a idoneidade do processo formativo por nós implementado.

**Figura 7: Hexágono das Idoneidades Didáticas**



Fonte: Godino (2011)

Os resultados que envolvem a referida avaliação estão apresentados no capítulo 6.

## 2. ESTUDO PRELIMINAR

---

A Engenharia Didática baseada no Enfoque Ontosemiótico é constituída por quatro fases, conforme o contexto da pesquisa apresentado no capítulo anterior, a saber: estudo preliminar, desenho, implementação e avaliação ou análise retrospectiva. Apresentamos neste capítulo o estudo preliminar por nós desenvolvido sobre o conceito de probabilidade e seu ensino e aprendizagem. Esse estudo preliminar considera as facetas desenvolvidas no EOS e assim, para apresentar tais estudos e investigações agrupamos nas seguintes dimensões: epistêmico-ecológico; cognitivo-afetivo e instrucional.

Convém deixar claro que a fase de estudo preliminar da engenharia didática por nós aplicada não significa a mesma coisa que “análise à priori” das atividades. A referida análise *a priori* das atividades selecionadas para o programa de intervenção com os professores estará presente na etapa do desenho. Discutiremos aqui pontos de vista teóricos e investigações de diversos níveis que subsidia a etapa subsequente: desenho.

Salientamos ainda, que a divisão que aqui faremos, tem um caráter didático e de organização conforme os pressupostos do nosso marco teórico. Por exemplo, uma determinada investigação pode estar vinculada a uma dimensão cognitiva, mas que envolve uma dimensão instrucional. Deixamos clara a opção que faremos no momento de inclusão dos estudos nessas três grandes categorias: epistêmico-ecológico; cognitivo-afetivo e instrucional.

### 2.1 ESTUDO PRELIMINAR – DIMENSÃO EPISTÊMICA-ECOLÓGICA

Nesta dimensão do estudo preliminar – epistêmica-ecológica – discutiremos estudos e pesquisas que consideram o conhecimento matemático, em nosso caso, o conhecimento probabilístico, de acordo com os significados institucionais e o ajustamento desse conhecimento ao currículo de matemática nos anos finais da Educação Básica e, consequentemente, na formação continuada de professores nesta etapa de escolaridade. Destacamos pesquisas que ajude na compreensão dos conhecimentos didáticos-matemáticos que são pertinentes para um ensino de probabilidade idôneo nos anos finais do Ensino Fundamental.

As quatro seções que se seguem abarcam uma introdução teórica sobre o acaso e aleatoriedade, seguido de uma discussão sobre os significados do conceito de probabilidade, uma discussão sobre o conceito de risco e a associação de variáveis em tabelas de dupla entrada, e por fim, a probabilidade no currículo escolar de matemática.

### **2.1.1 O ACASO E A ALEATORIEDADE – UMA BREVE DISCUSSÃO**

O significado de acaso e aleatoriedade são tratados por muitas pessoas como sinônimos. Porém, a noção de acaso e a noção de aleatoriedade apresentam algumas particularidades. O acaso origina-se do latim *a casu*, sem causa. É algo que surge ou acontece a esmo, sem motivo ou explicação aparente. Já a palavra aleatoriedade é utilizada para exprimir quebra de ordem, propósito, causa, ou imprevisibilidade em uma terminologia não científica. Podemos dizer que um fenômeno aleatório acontece quando os seus resultados não descrevem um padrão determinístico, mas que podem seguir uma distribuição de probabilidade. Acaso e aleatoriedade conceitualmente são diferentes. O acaso tem a ver com causa e aleatoriedade tem a ver com padrão, propósito, finalismo. Aqui, o acaso diz respeito a um lapso do conhecimento e não da natureza, como diz o matemático Émile Borel, “o acaso é apenas o nome dado a nossa ignorância”. Assim, o acaso pode ser entendido como a ignorância do conhecimento de uma causa. E não conhecer o padrão de algo recebe tem o nome de aleatoriedade. Chauí pontua que,

O acaso sempre foi colocado sob duas espécies de fatos: ou fatos cuja causa ainda permanece desconhecida, mas virá a ser conhecida (portanto, o acaso é apenas uma forma de ignorância); ou acontecimentos individuais, como, por exemplo, um vaso que cai sobre a cabeça de um passante (portanto, o acaso é apenas uma ocorrência singular que não afeta as leis universais da Natureza). (CHAUÍ, 2000, p.335)

Um exemplo que mencionamos para trazer luz à discussão é o utilizado por Chauí:

Caminhando por uma rua, para ir ao mercado, posso passar sob uma janela, da qual despenca um vaso, que cai sobre minha cabeça e, em vez de ir ao mercado, vou parar num hospital. Foi um acaso. No entanto, para esse cientista, minha ida pela rua é necessária do ponto de vista da anatomia e da fisiologia de meu corpo; passar por uma rua determinada é necessário se, por exemplo, ficar estabelecido

geométrica e geograficamente que é o trajeto mais simples e mais rápido para chegar ao mercado; pela posição do vaso na janela, pelo vento ou pelo toque de alguma coisa nele, é necessário, segundo a lei universal da gravitação, que ele caia. (CHAUÍ, 2000, p.336).

Poderíamos nos perguntar então “O que é o acaso?” Os cientistas defendiam que o acaso seria o encontro fortuito de séries de acontecimentos independentes, cada uma delas perfeitamente necessária e causal em si mesma, como no exemplo da ida ao supermercado destacado acima. No ínterim desta discussão filosófica, segundo Abbagnano, existem três definições sobre acaso: a) o conceito subjetivista em que a imprevisibilidade e a indeterminação do evento casual são atribuídas à ignorância ou à confusão do homem; b) o conceito objetivista que atribui o evento casual à mistura e à interseção das causas e; c) a interpretação moderna que considera o acaso como a insuficiência de probabilidade na previsão (ABBAGNANO, 2000).

Desde os séculos de 1600 e 1700, nos primórdios do seu desenvolvimento, a Teoria das Probabilidades se ocupava de problemas do cotidiano da época como os seguros de vida e mercadorias. A partir dos trabalhos do matemático e físico Johann Carl Friedrich Gauss, por volta do ano 1800, a Teoria das Probabilidades foi aplicada pela primeira vez no campo científico como, por exemplo, na Teoria dos Erros Experimentais e na quantificação da física dos gases. Isso vai culminar com a descrição probabilista do comportamento microscópico da matéria, por meio da Física Quântica.

Com os estudos provenientes da Física Quântica houve uma retomada sobre a ideia do acaso. Por volta do início do século XX, no meio científico difunde-se a ideia de que há apenas a alternativa de se conhecer parcelas da realidade, descartando-se a possibilidade de um conhecimento absoluto e ainda, que a realidade é dinâmica e instável. Isso se dá, sobretudo, pela formulação do “*princípio da incerteza ou da indeterminação*” de Werner Heisenberg que é baseado no fato de não se saber de forma exata o deslocamento realizado por partículas atômicas e assim, não se consegue definir a localização dessas partículas no espaço, o trajeto percorrido, o tempo determinado, e ainda, não se consegue determinar a direção e o sentido; tal

dificuldade é decorrente da movimentação tridimensional das partículas; bem como a teoria da relatividade elaborada por Einstein, que vem a contribuir para o fortalecimento da ideia de existência do acaso. Dessa forma, no século XX deixa-se de falar em certezas absolutas para se falar de incertezas e probabilidades e, tem início uma maior sistematização da Teoria das Probabilidades.

Nos dias de hoje, a linguagem, as técnicas, os métodos, enfim, todo um arcabouço da Probabilidade e Estatística pode ser encontrado em nosso cotidiano em um grande número de situações e utilizações, como por exemplo, nos meios de comunicação.

Mlodinow (2011) apresenta que os mecanismos pelas quais as pessoas analisam situações que envolvem o acaso são um produto complexo de fatores evolutivos, da estrutura cerebral, das experiências pessoais, do conhecimento e das emoções. Em nosso cotidiano é possível percebermos que empregamos inúmeras vezes nossa intuição ao fazermos avaliações e escolhas em situações de incerteza. Tversky e Kahneman (1983) sugerem que mesmo os indivíduos com uma formação superior, quando lidam com processos aleatórios numa diversidade de situações, tais como questões de negócios ou médicas, as crenças e a intuição muitas vezes os deixam em maus lençóis.

Na próxima seção avançamos para uma discussão sobre o conceito de probabilidade do ponto de vista das diferentes situações que conferem significado a este conhecimento matemático.

### **2.1.2 Probabilidade: um conceito multifacetado**

Por conta da natureza multifacetada do significado de probabilidade torna-se crucial levantarmos estudos que discutam as relações, limitações e avanços que constituem a epistemologia do conhecimento probabilístico. Batanero (2005) sistematiza cinco significados da probabilidade, a saber: intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e axiomático.

Ainda que algumas pessoas, crianças ou até adultos, nunca tenham estudado a probabilidade, as suas experiências nas situações com jogos de sorte-azar permite que elas utilizem suas ideias intuitivas e expressões

coloquiais para acreditar e justificar a crença em tais situações. Para essas situações Batanero (2005) classifica como Significado Intuitivo da Probabilidade.

Ao utilizar as noções ligadas a jogos de aposta, a esperança e a ganância, se começa a apontar a necessidade da atribuição de um número a essas ocorrências e com isso, essas teorias foram, ao longo do tempo, recebendo várias interpretações sobre a natureza objetiva ou subjetiva da probabilidade. (BATANERO, 2005).

O Significado Clássico de Probabilidade, também conhecido por “regra de Laplace” é denominado, entre outras, como probabilidade clássica, formal ou até laplaciana. Esta abordagem centra-se na ideia da atribuição de um valor, representado por uma fração, que indica a probabilidade de um evento ocorrer de modo que o seu numerador representa os casos considerados sucessos em um experimento aleatório e o denominador representa todos os casos possíveis deste mesmo experimento.

A citação a seguir mostra a definição dada por Laplace, largamente utilizada no ensino até nossos dias: “a razão deste número àquele de todos os casos possíveis é a medida desta probabilidade, que é assim não mais que uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis.” (LAPLACE, 1814, p. 35 *apud* COUTINHO, 2007). Ao tratarmos a probabilidade de um evento A: P(A), de acordo com o significado clássico da probabilidade temos a seguinte expressão:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Onde n(A) representa os casos favoráveis e n(Ω) é o número de elementos do conjunto de todos os resultados possíveis. Comumente a letra Ω é utilizada em probabilidade por espaço amostral.

Reiteramos que o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é denominado de espaço amostral e que cada um desses resultados recebe o nome de evento.

A seguir, destacamos um exemplo de um problema matemático envolvendo o significado clássico:

**Exemplo 1:** Um cartão será retirado, ao acaso, de uma sacola contendo 6 cartões brancos, 8 verdes e 9 azuis. Qual a probabilidade do cartão retirado ser da cor verde?

Para resolução desse problema é necessário apenas identificar o evento ao qual desejamos calcular a probabilidade, que nesse caso é sortear um cartão da cor verde e dividir pelo total de cartões contidos nessa urna; dessa forma utilizamos a regra de Laplace.

Esta é uma abordagem para encontrar a probabilidade *a priori*, uma vez que não é necessário realizar o experimento para que encontremos o valor da probabilidade de um evento desejado. “A definição clássica de probabilidade esteve historicamente relacionada aos jogos de azar”, (GUIMARÃES e CABRAL, 1997, p. 75). Tal significado apresenta uma limitação por não dar conta de diversas situações de caráter probabilístico, tais como experimentos em que os resultados não são equiprováveis. Ou ainda experimentos em que a variável aleatória é de natureza contínua e não discreta.

Esse significado de probabilidade apresenta fragilidades, pois para eventos não equiprováveis ou com um espaço amostral infinito não é possível a aplicação desse significado para o cálculo de uma probabilidade. Se considerarmos o Significado Geométrico de Probabilidade é possível o trabalho com um espaço amostral infinito. Dessa forma, é necessário estender o cálculo de probabilidade de experimentos aleatórios para as situações nos quais os resultados possíveis constituem conjuntos contínuos. Amâncio (2012) comprehende o significado geométrico como uma aplicação da definição clássica de probabilidade, uma vez que é possível atribuir uma probabilidade às grandezas geométricas. Em nossa pesquisa também assumimos esta noção do significado geométrico como uma ampliação do significado clássico para grandezas geométricas que possuem por sua natureza um espaço amostral infinito. Alguns pesquisadores defendem que a probabilidade geométrica pode ser constituir em mais um significado para a probabilidade, no entanto, em

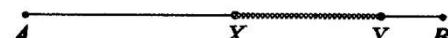
nosso estudo a geometria entra como um contexto, ou seja, a probabilidade no contexto geométrico.

Problemas de probabilidade geométrica e as respectivas resoluções foram primeiramente estudados no século XVIII, sendo a resolução do problema da “agulha de Buffon”, em 1777, considerada o marco inicial dos estudos sobre probabilidade geométrica. Segue o problema: Qual é a chance de que uma agulha largada aleatoriamente em um chão marcado com linhas retas paralelas igualmente espaçadas cruze com uma das retas? Assim, algumas situações-problemas que envolvem a probabilidade geométrica equivalem a uma seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas.

Nos modelos em questão, a probabilidade de um determinado evento se reduz à relação – ou ao seu limite, caso exista – entre medidas geométricas homogêneas, tais como: comprimento, área ou volume (TUNALA, 1995). Na probabilidade geométrica o cálculo é realizado por meio da razão entre duas grandezas geométricas. Tunala (1995) e Wagner (1997) em seus trabalhos apresentaram as situações que descrevemos a seguir para caracterizar uma prática matemática de Probabilidade Geométrica.

Situação 1: Escolher um ponto de uma determinada “linha”: se X e Y são pontos de uma linha de extremos A e B (figura 8), admitimos que a probabilidade de que um ponto da linha AB pertença à linha XY (contida em AB) é proporcional ao comprimento de XY e não depende da posição dos pontos X e Y sobre AB. Portanto, selecionando um ponto ao acaso de AB, a probabilidade de que ele pertença a XY será:

**Figura 8: linha de extremos A e B**

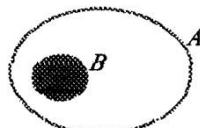


Fonte: O autor, 2017

$$P = \frac{\text{comprimento de } XY}{\text{comprimento de } AB}$$

Situação 2: Escolher um ponto de uma determinada “figura plana”: analogamente, suponhamos que uma figura plana  $B$  (figura 9) seja parte de uma outra figura plana  $A$  e que se tenha escolhido ao acaso um ponto de  $A$ . Se admitirmos que a probabilidade de esse ponto pertencer a  $B$  é proporcional à área de  $B$  e não depende do lugar que  $B$  ocupa em  $A$ , então a probabilidade de que o ponto selecionado esteja em  $B$  será:

**Figura 9: círculo A e B**



Fonte: O autor, 2017

$$P = \frac{\text{Área de } B}{\text{Área de } A}$$

Agora, consideremos que, no decurso de  $N$  realizações de uma experiência aleatória, um acontecimento  $A$  ocorre  $N_A$  vezes ( $0 \leq N_A \leq N$ ). A probabilidade do acontecimento é definida como o limite, quando  $N$  tende ao infinito, da frequência relativa de ocorrência do acontecimento  $A$ . Esta é a definição do Significado Frequentista de Probabilidade.

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$$

Como podemos observar a probabilidade frequentista é calculada com base na realização de um número suficiente grande de ensaios. Podemos dizer que é uma probabilidade calculada *à posteriori*. Assim, a abordagem frequentista vai relacionar a probabilidade da experiência aleatória com a frequência relativa do acontecimento, que tende a estabilizar quando se repete esta experiência um número grande de vezes sob as mesmas condições. Segue exemplo de uma prática matemática com uma série de lançamentos de tachinha para verificação da probabilidade aplicada por Coutinho (1994) em uma sequência de ensino com alunos franceses: no lançamento de uma tachinha, qual a chance de obtermos a posição “ponta”, ou seja, qual a chance que ela caia com a ponta tocando o solo?

De acordo com Batanero (2005), “Bernoulli sugeriu que podemos atribuir a probabilidade aos sucessos aleatórios que aparecem em diversos campos a partir da frequência relativa observada em uma série grande de ensaios do experimento”. A forma de se obter a probabilidade de um evento apresentada por Bernoulli é conhecida no estudo da probabilidade como a Lei dos Grandes Números. Trata-se da realização de um experimento diversas vezes nas mesmas condições. Ao realizar um experimento, um grande número de vezes, a frequência dos resultados observados tende a estabilizar em um valor próximo da probabilidade de que o evento ocorra.

Coutinho (1994) nos aponta que, alguns estudantes com base em suas experiências de vida, utilizam a noção de frequência relativa de um evento para estimar sua probabilidade, mesmo de forma bastante intuitiva, independente da realização de experimentos para verificar sua estabilização. A autora nos coloca a importância de uma abordagem com o conceito de probabilidade por meio da concepção frequentista. Por outro lado, Batanero e Díaz (2012) colocam como uma limitação da abordagem frequentista o fato da mesma não fornecer o valor exato da probabilidade de um evento e não podermos encontrar uma estimativa quando o experimento não for possível de repetição um grande número de vezes. E ainda é difícil decidir quantos testes são necessários para obter uma boa estimativa para a probabilidade de um evento.

Vejamos esta situação-problema: Na próxima segunda-feira você participará de um curso de nivelamento profissional para compor o quadro de funcionários de uma empresa. Sabe-se que a pessoa responsável por esse curso terá critérios pessoais para avaliar. Além disso, o curso é único. Qual é a probabilidade de que você tenha sucesso neste curso?

Em situações desse tipo empregamos o Significado Subjetivo de Probabilidade definido como o grau de crença com base em um conhecimento pessoal e nas experiências que é atribuído por uma pessoa em um determinado evento.

O significado subjetivo de probabilidade normalmente é empregado naquelas situações em que o experimento não pode ser repetido ou que não pode ser realizado em idênticas condições. Nestes casos nem a abordagem

clássica e nem a frequentista dão conta para solucioná-los. Entretanto, são abrangidos pela interpretação Subjetiva de probabilidade e constituem parte legítima da Teoria da Probabilidade. (AMÂNCIO, 2012, p.136).

No que concerne ainda a este significado, sabemos que a teoria bayesiana permitiu a descoberta das probabilidades de várias causas quando uma de suas consequências é observada. A probabilidade fica sujeita a novas informações e perde seu caráter objetivo postulado pelos outros significados já discutidos. No entanto, a controvérsia sobre o status científico de resultados que dependem de julgamentos pessoais ainda permanece. (BATANERO E DÍAZ, 2012, p.5).

Nessa direção, Cordani e Wechsler (2006) reiteram que o desenvolvimento da estatística clássica se dá na mesma época do predomínio da filosofia positivista, e logo se pode pensar em uma influência das ideias positivistas sobre a mesma com críticas à subjetividade defendida pela escola bayesiana.

Nas situações de inferência estatística, em que a estatística e a probabilidade estão imbricadas fortemente, Cordani e Wechsler (2006) discorrem sobre um predomínio da abordagem clássica no ambiente escolar e que pelo fato de deficiências na formação dos professores os conceitos da teoria bayesiana não tem a devida atenção: *como os professores não têm nada diferente para apresentar aos seus alunos, eles quase sempre oferecem a versão clássica.* (CORDANI E WECHSLER, 2006, p.1, tradução nossa<sup>10</sup>).

Ao longo do século XX diferentes matemáticos contribuíram para uma organização e estruturação da teoria matemática das probabilidades. (BATANERO, 2005). Temos em Kolmogorov o matemático que sistematiza a teoria matemática da probabilidade que temos hoje conhecida como a axiomatização de Kolmogorov, tomando por base as ideias apresentadas por Borel, outro matemático da época, na qual a probabilidade é estudada como um tipo especial de medida.

---

<sup>10</sup> As the teachers have nothing different to present to their students, they almost always offer the classical version.

Kolmogorov uniu à ideia de Borel a Teoria dos Conjuntos e a Teoria das Medidas para estabelecer um conjunto de axiomas da probabilidade que foi aceito por escolas de diferentes correntes filosóficas acerca da natureza da probabilidade. (BATANERO, 2005).

Batanero (2005) apresenta um estudo em que se debruça sobre os significados históricos da probabilidade. O estudo apresenta os diferentes significados de probabilidade, a saber: intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e axiomático. A autora levanta um questionamento que dialoga com nosso estudo no sentido de identificar quais são os componentes fundamentais do significado de probabilidade, assim como os níveis de abstração adequados em que cada componente deve ser ensinado, para ajudar os estudantes a superar as possíveis dificuldades.

Batanero (2005) advoga que o significado polifacético da probabilidade não pode ser negligenciado e que o ensino não se pode limitar a uma destas diferentes perspectivas, pela razão de estarem ligadas dialeticamente. Os estudos de Fernandes (1999), que discutiremos na próxima seção, sobre intuição probabilística com estudantes do ensino secundário em Portugal estão nesta mesma diretriva, nos apresentando a probabilidade como um conceito multifacetado (conceito clássico, frequentista ou empírico, subjetivista e axiomático).

Diversos pesquisadores brasileiros também apontam tal problemática com o ensino e aprendizagem da probabilidade e seus diferentes significados. Na década de 90, Coutinho (1994) já sugeria um trabalho com o enfoque frequentista “como sendo mais adequado e vantajoso para o ensino dos primeiros conceitos de probabilidade, uma vez que se podem utilizar experimentos ligados à realidade dos alunos, não precisando necessariamente estar limitado à hipótese de equiprobabilidade” (COUTINHO, 1994, p. 9). Carvalho e Oliveira (2002) apontam como relevante que os professores propiciem aos alunos a mobilização de diferentes concepções de probabilidade.

Diante do exposto defendemos um processo de ensino e aprendizagem de probabilidade caracterizado pela existência de um trabalho envolvendo as distintas concepções de probabilidade.

### **2.1.3 ESTUDOS SOBRE RISCO PROBABILÍSTICO**

Inicialmente, apontamos que o tema sobre risco probabilístico não será tratado com profundidade e consta neste trabalho para que o leitor perceba a extensão do uso da probabilidade. Advertimos que o tema sobre risco probabilístico é bem complexo e dever somente ser introduzidos depois de abordagem profunda de probabilidade condicional em tabelas de dupla entrada. A nossa abordagem se dá por meio da compreensão dos significados das probabilidades condicionadas obtidas em uma tabela de dupla entrada.

Em investigações sobre o campo de problemas probabilísticos diversos autores (GIGERENZER, 2002, 2011; GIGERENZER E HOFFRAGE, 1999) trazem à tona a importância de compreender a noção de risco probabilístico. Compreender o risco – que é outro aspecto do pensamento probabilístico – tem estreita relação com o raciocínio correlacional. Esse raciocínio exige o reconhecimento que as relações entre variáveis não são absolutas, mas existem em graus (ROSS E COUSINS, 1993) e, assim, envolvem raciocínio probabilístico. Assim, o grau de relacionamento entre duas variáveis pode ser determinado pelas frequências relativas nas tabelas de dupla entrada.

Na vida cotidiana normalmente nos questionamos sobre relações que envolvem variáveis relevantes em nossas vidas pessoais, como por exemplo, na área financeira: se existe uma relação entre obter o nível superior de escolaridade e o quantitativo de dinheiro que se ganha no futuro; no campo da saúde: existe relação entre diferentes comportamentos sexuais e a infecção por HIV? A análise dessas relações permeia o entendimento sobre risco probabilístico. Tal entendimento se torna significativo tanto para a matemática como para outras disciplinas do currículo escolar como ciências, geografia, biologia. Nunes et al. (2012) apontam também que precisamos saber correlações para nos ajudar a comparar os riscos em diferentes ações: qual dos projetos propostos por dois políticos diferentes é melhor? Quais os riscos que decorrem utilizando uma forma de tratamento médico e não outro?

Boa parte das decisões tomadas pelas pessoas em seu cotidiano poderia ser diferente se elas compreendessem melhor sobre probabilidades e riscos. Gigerenzer (2002) discorre que todos os dias as pessoas comuns são confrontadas com informações baseadas em estatísticas que podem significar a diferença entre a vida e morte, liberdade e prisão, ou dificuldades econômicas e segurança financeira.

Neste estudo de Gigerenzer (2002) sobre risco encontramos uma grande quantidade de situações envolvendo as tabelas de dupla entrada e como as pessoas entendem o risco por meio das informações apresentadas por frequências e estabelecendo relações comparando com as apresentadas por probabilidades (usando porcentagens ou frações). O autor conclui que as pessoas compreendem melhor a noção de risco quando lhes são apresentadas as informações por meio de relações, inclusive afirma que até mesmo profissionais como médicos interpretam melhor informações sobre riscos se a ele são informados como relações ao invés de porcentagens ou frações. Bryant e Nunes (2012) também destacam que problemas apresentados sob a forma de relação (por exemplo, 1 : 3) muitas vezes são mais fáceis para as crianças que os mesmos problemas apresentados como proporções de 1 (por exemplo, 0,25) ou frações (por exemplo,  $\frac{1}{4}$ ). Ensinar as crianças usando a linguagem da relação parece ter mais sucesso do que ensinar usando a linguagem das frações.

Em um estudo anterior ao de 2002, Gigerenzer e Hoffrage (1999) desenvolveram e testaram uma representação chamada de frequências naturais (estabelecendo relações entre as frequências apresentadas em tabelas de dupla entrada) a qual ajuda as pessoas de inteligência normal (sem precisar ter curso de estatística) a fazer inferências bayesianas corretamente. Inclusive esses pesquisadores aplicaram tal método com estudantes do 4º período de medicina nos EUA e constataram que eles são capazes de fazer inferências corretas.

Neste mesmo sentido, Bryant e Nunes (2012) apontam que as tabelas revelam mais claramente a ligação entre o raciocínio correlacional e probabilístico. Vejamos um exemplo (CAÑADAS, BATANERO, CONTRERAS E

ARTEAGA, 2011): para verificar se sofrer de insônia tem relação com os transtornos de estresses as informações devem ser organizadas de maneira que as frequências de todas as quatro combinações – ter insônia (sim ou não) e padecer de estresses (sim ou não) – são exibidas em uma tabela. Na tabela 1 na página 65 apresentaremos um exemplo.

Para uma tomada de decisão correta é necessário utilizar um raciocínio do tipo correlacional envolvendo uma coordenação entre as noções de probabilidade e proporções. É comum as pessoas, mesmo quando as informações são apresentadas nas tabelas, olharem apenas para uma célula, o que eles podem julgar como relevante para confirmar a relação entre as duas variáveis, sem ter em conta a frequência desta célula em relação ao total. Nesse exemplo, olhar-se-ia apenas para a célula que se refere a sofrer de insônia e padecer de estresses. Esta tendência é parecida com a incapacidade de pensar nos casos que refutem a hipótese e é conhecido como viés de confirmação (NICKERSON, 1998).

Em Brant (2004) temos que para um evento com um dado valor de probabilidade  $p$ , as chances correspondentes desse evento resultam num valor numérico dado por:

$$\text{Chance } \{\text{evento}\} = \frac{p}{1-p}$$

Como exemplo, Brant (2004) apresenta um problema oriundo dos jogos de sorte-azar, a saber: se você apostar na ocorrência de um evento (por exemplo, Cavalo A ganhar uma corrida) e este evento tem uma probabilidade conhecida  $p(A)$  = *probabilidade do cavalo “A” vencer*. Então, apostando-se um dólar nesse cavalo, deve-se ter um retorno justo para igualar as chances. Desta forma, se o cavalo “A” possui 50% de chance de ganhar ( $p(A) = 0,5$ ), logo, a chance de  $\{A\} = \frac{0,5}{1-0,5} = 1$ , ou seja, o retorno equitativo para uma aposta de um dólar é de um dólar. No entanto, se o cavalo possuir 25% de chance de ganhar ( $p(A) = 0,25$ ), daí a chance de  $\{A\} = \frac{0,25}{1-0,25} = \frac{1}{3}$ , ou seja, caso o cavalo vença a corrida, o retorno equitativo será de três dólares para cada dólar apostado.

Para Brant (2004) os valores das chances são uma simples conversão de um-para-um das probabilidades. Se os valores das chances são apresentados com uma probabilidade, eles podem ser convertidos em chances como acima. Agora, se apresentados como chances, eles podem ser convertidos em probabilidades de acordo com a seguinte fórmula:  $p = \frac{chance}{1+chance}$ .

Assim, se sabe que as chances de um evento são de 1 em 10, ou seja, 0,10, a probabilidade do evento será de  $p = \frac{0,1}{1+0,1} = \frac{0,1}{1,1} \approx 0,091$ . Observamos que neste exemplo, a probabilidade de 0,091 é bem próxima da chance 0,1. Logo, a partir deste exemplo, consideraremos que quando as chances possuem um valor pequeno se constituem em uma aproximação razoável para a probabilidade, e vice-versa.

Outro conceito importante é o de razão de chances ou razão de possibilidades definido como a razão entre a chance de um evento ocorrer em um grupo e a chance de ocorrer em outro grupo (BRANT, 2004; WAGNER E CALLEGARI-JACQUES, 1998). Esses grupos podem ser constituídos por amostras como, por exemplo, de pessoas com ou sem uma enfermidade ou grupos para análises estatísticas como homens e mulheres, tratados e não tratados, etc.

Para Brant (2004) a razão de chances é considerada como uma medida comparativa entre duas chances relativas de eventos diferentes, assim, para duas probabilidades,  $p_A = Pr \{ocorrer\ o\ evento\ "A"\}$  e  $p_B = Pr \{ocorrer\ o\ evento\ "B"\}$  as chances de ocorrência correspondentes de “A” em relação a “B” são:

$$\text{Razão de chances } \{A \text{ versus } B\} = \frac{chance\ \{A\}}{chance\ \{B\}} = \frac{p_A/(1-p_A)}{p_B/(1-p_B)}$$

Estatisticamente, uma razão de chances 1 indica que a condição ou evento que se está analisando é igualmente provável de ocorrer nos dois grupos. Uma razão maior do que 1 indica que a condição ou evento tem maior probabilidade de ocorrer no primeiro grupo. Finalmente, uma razão de chances menor do que 1 indica que a probabilidade é menor no primeiro grupo do que no segundo.

Por meio do exemplo citado no início desta seção, explicitamos os cálculos da razão de chances: supondo a realização de um estudo sobre a relação entre ter insônia e padecer de estresses, a tabulação padrão dos dados resultantes dos eventos e as respectivas frequências observadas resultam na seguinte tabela de dupla entrada:

**Tabela 1: Exemplo de comparação de risco por meio da razão de chances**

	Padecer de estresses	Não padecer de estresses	Total
Ter insônia	w	x	w + x
Não ter insônia	y	z	y + z
Total	w + y	x + z	n

Fonte: O autor, 2017.

De acordo com os dados da tabela 1, observa-se que a variável insônia (ter ou não) relacionada com a variável estresses (padecer ou não) propicia as seguintes comparações:

$$\text{Razão de chance} = \frac{w \cdot z}{x \cdot y}$$

Brant (2004) considera que, num sentido matemático, a razão de chances mostra-se como a medida comparativa mais natural, pois algebricamente é mais simples (e esteticamente agradável).

Com base nas investigações de Gigerenzer e Hoffrage (1999) uma boa representação pode ser crucial para encontrar a solução de um problema. Estes pesquisadores mostraram que as representações em termos de frequências naturais, em vez de probabilidades condicionais, facilitam o cálculo da probabilidade de uma causa dado um efeito – problema geralmente referido como raciocínio bayesiano.

Chamamos atenção para o fato de que os conceitos de risco discutidos – diferença de risco e risco relativo possa ser utilizada em comparações probabilísticas. Esse tipo de abordagem não está incluso no programa de ensino sobre probabilidade e risco de Nunes et al. (2012) e, também não está em nosso desenho formativo. Citamos para compreensão de que as referidas

atividades que trabalhamos foram baseadas nas ideias defendidas por Gigerenzer (2002, 2011) e Gigerenzer e Hoffrage (1999), sobretudo, concernente à utilização de frequências naturais para representar dados probabilísticos.

Ressaltamos que a abordagem sobre risco em nosso estudo se dá de forma bem mais simples, na qual partimos do conhecimento dos dados em tabelas de dupla entrada em determinadas situações em que há a necessidade de tomada de decisão com respeito aos dados e variáveis envolvidos. O leitor poderá encontrar no capítulo da trajetória didática (capítulo 5) as atividades sobre risco com as tabelas de dupla entrada vivenciadas com os professores onde se estuda as correlações das variáveis e a tomada de decisões baseadas no estudo das frequências naturais.

Na literatura encontramos diversos estudos envolvendo as tabelas de dupla entrada e as estratégias que são colocadas em práticas ao resolver atividades desta natureza. Perez Echevarría (1990) apresenta uma classificação por meio de cinco níveis com respeito às estratégias de análise para decidir sobre a associação de duas variáveis em tabelas de dupla entrada, a saber:

- Nível 1: usa somente uma célula, usualmente (a)
- Nível 2: Compara (a) com (b) **ou** (a) com (c)
- Nível 3: Compara (a) com (b) **e** (a) com (c)
- Nível 4: Usa as quatro células, fazendo comparações aditivas
- Nível 5: Usa as quatro células, fazendo comparações multiplicativas

Nos estudos de Cañadas, Batanero, Contreras e Arteaga (2011) encontramos reconstruções de estratégias com base nos níveis de Perez Echevarría (1990) e outros estudos desenvolvidos com esta temática. Os referidos autores destacam que no campo da Educação Matemática este tema não tem recebido a devida atenção. Apresentamos as estratégias conforme classificação a seguir:

- Estratégias corretas. (E1) comparar todas as distribuições das frequências relativas condicionadas de uma variável para os distintos valores da outra variável; (E2) comparar todas as frequências relativas condicionadas de uma variável para um único valor da outra variável com a frequência marginal da primeira variável, e (E3) comparação de possibilidades a favor e contra B em cada valor da variável A.
- Estrategias parcialmente corretas. (E4) comparar a distribuição das duas frequências absolutas de uma variável para um único valor da outra variável com a frequência marginal da primeira variável; (E5) comparar somente uma das duas de uma variável para um valor da segunda com a frequência marginal da primeira variável; (E6) comparar as frequências bsolutas duplas entre sí; las frecuencias absolutas dobles entre sí; (E7) comparar a soma das frequências nas diagonais.
- Estrategias incorretas. (E8) usar somente a célula de maior frequência; (E9) usar somente uma distribuição condicional; (E10) comparar frequências conjuntas com o número total de observações, e (E11) comparar frequências marginais entre sí.

#### **2.1.4 A probabilidade e o currículo escolar**

Nesta seção discorremos sobre a probabilidade no currículo escolar de matemática. Em uma cultura escolar na qual o estudo da probabilidade é abordado unicamente no Ensino Médio e envolvendo apenas o contexto de jogos de sorte-azar, as pessoas são conduzidas a acreditarem que a Teoria das Probabilidades serviria unicamente para a compreensão desse tipo de jogo. Desconstruir tal deturpação torna-se urgente nos dias de hoje; e a inclusão da probabilidade nas orientações curriculares, dentre outro motivos que já discutimos neste texto, pode contribuir nesta perspectiva.

No Brasil, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) destinados ao Ensino Fundamental, destaca-se que, ao final desta etapa de escolaridade, os estudantes devem ter desenvolvido uma boa compreensão das noções probabilísticas, tais como questões que envolvam a contagem de

casos no mapeamento do espaço amostral e seu significado e a utilização de diagramas de árvore (BRASIL, 1998).

Para o ensino de Matemática, nos terceiro ciclo (atuais 6º e 7º anos) dos anos finais, os PCN com relação ao conceito de probabilidade apontam que,

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno comprehenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1998, p.52).

Os PCN nos coloca a importância de um trabalho que possibilite aos estudantes o contato com os acontecimentos de natureza aleatória e a exploração por meio de realização de experimentos e observação de eventos; contudo Coutinho (2004) nos chama a atenção para a limitação de um trabalho que envolva apenas espaços equiprováveis.

Além dos PCN, alguns estados brasileiros, em seus currículos prescritos, recomendam também a inserção dos conteúdos probabilísticos.

Com relação aos anos finais do Ensino Fundamental no currículo do estado de São Paulo, está previsto o trabalho com este tópico para o 7º e 9º anos. Recomenda que o professor trabalhe problemas de contagem e a introdução ao conceito de probabilidade (SÃO PAULO, 2010).

O currículo do estado de Pernambuco recomenda que o estudo da probabilidade perasse por todos os anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) apoiando-se em situações elaboradas de tal forma que o estudante possa experimentar e realizar simulações, e em anos posteriores, tal conteúdo seja ampliado com mais profundidade (PERNAMBUCO, 2013).

Ainda, no Brasil, o Guia de Livros Didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental – PNLD 2014 – do Ministério da Educação, apresenta diretrizes inequívocas para a inclusão da probabilidade nesse segmento de ensino destacando as competências que os estudantes devem desenvolver:

Fazer inferências com base em informações qualitativas ou dados numéricos, e saber lidar com os conceitos de chance e de incerteza também são competências de grande utilidade. Em muitas aplicações do conceito de probabilidade faz-se necessário recorrer à contagem de um conjunto discreto de elementos. Para resolver tais problemas, além de outros, de modelagem discreta, os conteúdos de combinatória ganham crescente importância na formação matemática. (GUIA PNLD, 2013, p.17).

O Programa Internacional de Avaliação dos Estudos – PISA em suas diretrizes justifica a importância de incluir o tema Incerteza e do estudo das probabilidades pela presença nas ciências, nas tecnologias e na vida cotidiana.

A incerteza é, portanto, um fenômeno central na análise matemática de muitas situações-problema, e a teoria de probabilidade e estatística bem como as técnicas de representação e descrição de dados foram criadas para lidar com elas. A categoria de conteúdo de Incerteza e Dados inclui reconhecer o lugar da variação nos processos, tendo em conta a quantificação dessa variação, o reconhecimento da incerteza e do erro na medida, e conhecimento das probabilidades. Isso também inclui formar, interpretar e avaliar conclusões tiradas em situações onde a Incerteza é aspecto central. (OECD, 2013, p.35).

Neste excerto podemos perceber a importância de um trabalho que perpassasse pela incerteza e abordagens que valorizem a estatística e a probabilidade. Este é um movimento vislumbrado no cenário internacional – o estudo que envolva uma matemática da incerteza – e não se pode mais fazer vista grossa a esse respeito.

Curriculos de outros países, como os Estados Unidos (NCTM, 2000) e o da Espanha (REAL DECRETO 1513, 2006) defendem que desde os primeiros anos escolares as crianças entrem em contato com as noções concernentes ao conceito de probabilidade. Particularmente, o Principles and Standards for School Mathematics (NCTM , 2000) para os graus 6-8, recomenda que todos os alunos deveriam:

- compreender e usar a terminologia apropriada para descrever eventos complementares e mutuamente exclusivos;
- usar proporcionalidade e uma compreensão básica de probabilidade para fazer e testar conjecturas sobre os resultados de experimentos e simulações;

- calcular probabilidades para eventos compostos simples, utilizando métodos tais como listas organizadas, diagramas de árvore e modelos da área.

No currículo espanhol de matemática no bloco de estatística e probabilidade são apresentados os conteúdos, os critérios de avaliação e os padrões de aprendizagem destinados para a Educação Primária (alunos dos 6 aos 12 anos de idade), como podemos conferir no quadro 2.

BLOCO 5: ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE		
CONTEÚDOS	CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO	PADRÕES DE APRENDIZAGEM
<p>Gráficos e parâmetros estatísticos.</p> <p>Coleta e classificação de dados qualitativos e quantitativos.</p> <p>Construção de tabelas de frequências absolutas e relativas.</p> <p>Iniciação intuitiva às medidas de centralização: média, moda e intervalos.</p> <p>Construção e interpretação de gráficos simples: diagramas de barras, polígonos e setoriais.</p> <p>Análise crítica das informações que se apresentam mediante gráficos estatísticos.</p> <p>Caráter aleatório de algumas experiências.</p> <p>Iniciação intuitiva ao cálculo de probabilidade de um sucesso.</p>	<p>1. Coletar e registrar uma informação quantificável, utilizando alguns recursos simples de representação gráfica: tabelas de dados, blocos de barras, diagrama de linhas, comunicando a informação.</p> <p>2. Construir, ler e interpretar representações gráficas de um conjunto de dados relativos ao ambiente ao qual se está inserido.</p> <p>3. Fazer estimativas com base em experiências que envolvam resultados (possíveis, impossíveis, certos, mais prováveis ou menos prováveis) de situação simples em que há intervenção aleatória e comprovar o referido resultado.</p> <p>4. Observar e verificar que há eventos impossíveis, eventos que com quase toda certeza ocorrem ou que se repetem, sendo mais prováveis ou menos prováveis está repetição.</p> <p>5. Identificar, resolver problemas da vida cotidiana, adequados ao seu nível, estabelecendo conexões entre a realidade e a matemática, valorar a utilidade</p>	<p>1.1 Identificar dados qualitativos e quantitativos em situações familiares.</p> <p>2.1 Coletar e classificar dados qualitativos e quantitativos, em situações do seu entorno, utilizando-os para construir tabelas de frequências absolutas e relativas.</p> <p>2.2 Aplicar de forma intuitiva às situações familiares, as medidas de centralização: média, moda e</p> <p>2.3 Construir e interpretar gráficos simples: diagramas de barras, de polígonos e de setores, com dados obtidos de situações bem próximas.</p> <p>3.1 Realizar análises críticas argumentando sobre as informações que se apresentam mediante gráficos estatísticos.</p> <p>4.1 Identificar situações de caráter aleatório.</p> <p>4.2 Criar conjecturas e estimativas sobre alguns jogos (com moedas, dados, cartas, loterias, ...).</p> <p>5.1 Resolver problemas que implique no domínio dos conteúdos próprios da estatística e da probabilidade, utilizando estratégias heurísticas, raciocínios (classificação, reconhecimento das relações, uso de contraexemplos), fazendo conjecturas,</p>

	<p>dos conhecimentos matemáticos e refletir sobre o processo aplicado para a resolução de problemas.</p>	<p>construindo, argumentando e tomando decisões, avaliando as consequências das mesmas e a conveniência de sua utilização.</p> <p>5.2 Refletir sobre o processo de resolução de problemas: revisando as operações utilizadas, as unidades dos resultados, comprovando e interpretando as soluções no contexto, propondo outras formas de resolução.</p>
--	--	---

**Quadro 2: Elementos do bloco 5 do currículo espanhol**

Fonte: Boletín Oficial del Estado, n.52, de 2014, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria da Espanha. Real Decreto 126/2014. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014.

Outro currículo que destacamos em nosso texto é o da Austrália (ACARA, 2015). Segundo esse currículo as conexões entre a estatística e a probabilidade são constituídas progressivamente ao longo dos anos escolares compreendendo a Educação Primária e Secundária. Segundo as prescrições para a Educação Primária, por exemplo, os estudantes reconhecem e analisam dados e fazem inferências. Os alunos devem trabalhar com representação, resumo e interpretação de dados, além de realizarem experimentações envolvendo a coleta e a interpretação dos dados.

Segundo o currículo australiano (ACARA, 2015) devem-se realizar abordagens experimentais e teóricas para o cálculo de probabilidades. Nesse sentido, os estudantes desenvolvem uma habilidade sempre crescente de avaliar criticamente os conceitos de chance e de dados, fazer julgamentos e tomar decisões fundamentais, além do que constroem habilidades para avaliar criticamente informações estatísticas e desenvolver intuição sobre dados.

Atualmente, no Brasil, está em discussão a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2016). A versão preliminar deste documento, na área de matemática (unidade de conhecimento *Estatística e Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental*) aponta para uma abordagem da probabilidade, que já seria iniciada nos anos iniciais do Ensino Fundamental, acompanhando outros currículos internacionais e resultados de pesquisas que advogam sobre a necessidade de inclusão dessa temática.

O currículo australiano, o NCTM e o PISA, citados anteriormente, exercem influências sobre a construção deste documento.

A seguir apresentamos os objetivos de aprendizagem (OA) que constam no documento BNCC nos quatro anos que compõem os anos finais do Ensino Fundamental:

- Indicar a probabilidade de um evento por um número racional (na forma fracionária, decimal e percentual) e analisar o significado dessa medida por meio de experimentos. (EF06MT09).
- Compreender o significado de termos como aleatoriedade, espaço amostral, resultados favoráveis, probabilidade, tentativas, experimentos equiprováveis, dentre outros, aplicando-os no planejamento de experimentos aleatórios ou simulações e na resolução de problemas que envolvam estimar ou calcular probabilidades obtidas por meio de frequências. (EF07MT10).
- Calcular a probabilidade de eventos, a partir da construção do espaço amostral do experimento utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de cada elemento do espaço amostral é igual a 1. (EF08MT07).
- Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de ocorrência nos dois casos. (EF09MT08).

Acreditamos que os referidos objetivos de aprendizagem descritos anteriormente não limitam o que deve ser abordado em sala de aula e que, os professores podem ir além do previsto aqui, inclusive articulados com os objetivos propostos para a Estatística e a Combinatória; porém o debate entre pesquisadores sobre a referida BNCC ainda é atual.

Outro estudo com documentos curriculares que gostaríamos de ressaltar foi o realizado por Papaiерonymou (2010) a qual investigou o conceito de probabilidade nos documentos curriculares de dez estados dos Estados Unidos da América e nas diretrizes do *National Council of Teachers of Mathematics – NCTM*, além do *Mathematics Association of American - MMA* e *American Statistical Association - AMS*. O seu objetivo foi descrever os tópicos ou temas de probabilidade que professor de matemática no nível secundário daquele país precisa ser preparado para ensinar. Esses tópicos na verdade tem relação

com o campo conceitual da probabilidade, como por exemplo, características dos eventos aleatórios e representações do espaço amostral; porém incluem ainda que os professores compreendam equívocos de probabilidade na resolução de problemas.

Papaiерonymou explicita que,

refinamentos dos principais temas identificados estão atualmente em curso, a fim de identificar os conceitos de probabilidade e conhecimento dos professores associados a esses temas que professores de matemática de nível secundário devem adquirir e usar em suas salas de aula de matemática. (PAPAIЕRONYMOU, 2010, p.8)

Os resultados deste estudo indicam temas importantes, de acordo com a literatura e o currículo prescrito de diversos países sobre o ensino e aprendizagem de probabilidade, os quais professores devem saber e serem capazes de ensinar. Citamos alguns desses tópicos: história da probabilidade; terminologia; equívocos de probabilidade; probabilidade teórica versus experimental, incluindo simulações; dentre outros.

Nos estudos apresentados por Fernandes (1999) o autor chama atenção para temas importantes no ensino e aprendizagem das probabilidades na Educação Básica. Enfatiza que o trabalho nesta etapa de escolaridade não assuma um caráter excessivamente trivial e assim, não seria merecedor de fazer parte do ensino. O autor apresenta uma proposta de conteúdos a abordar no tema de probabilidades ao nível do 9º ano de escolaridade (o 9º ano é o último ano do 3º ciclo que vai do 7º ao 9º ano com alunos na idade de 12 aos 15 anos; tem a mesma correspondência com o 9º ano dos anos finais do Ensino Fundamental no sistema educativo brasileiro) partindo, fundamentalmente, dos resultados do estudo efetuado e pressupondo mais tempo disponível para a sua realização, em relação ao que está estabelecido nos programas oficiais atuais do Ministério da Educação em Portugal.

Proposta de conteúdos a abordar ao nível do 9º ano de escolaridade (FERNANDES, 1999):

1. Termos e conceitos probabilísticos (conceitos clássico e subjetivista)

- 1.1. Objeto das probabilidades: experiências aleatórias, casuais ou fortuitas e experiências deterministas ou causais.
  - 1.2. Acontecimentos certos, muito prováveis, prováveis, poucos prováveis e impossíveis. Distinção entre acontecimentos quase certos e certos e entre acontecimentos quase impossíveis e impossíveis.
  - 1.3. Atribuição de um valor de probabilidade a um acontecimento. Caráter objetivo e subjetivo do valor da probabilidade.
  - 1.4. Acontecimentos envolvendo os conectivos e, ou e não.
2. Probabilidade em experiências simples (conceitos clássico, frequentista e subjetivista)
    - 2.1. Avaliação intuitiva de probabilidades.
    - 2.2. Conceito clássico de probabilidade ou probabilidade a priori: exploração de objetos aleatórios comuns.
    - 2.3. Estruturas estocásticas equivalentes.
    - 2.4. Conceito frequentista de probabilidade ou probabilidade a posteriori: exploração de objetos aleatórios comuns, para relacionar os conceitos frequentista e clássico de probabilidade, e de situações do dia-a-dia, para aplicação do conceito frequentista.
    - 2.5. Probabilidades de acontecimentos envolvendo os conectivos e, ou e não.
    - 2.6. Dependência estocástica por restrição do espaço amostral.
  3. Probabilidade em experiências compostas (conceitos clássico, frequentista e subjetivista)
    - 3.1. Avaliação intuitiva de probabilidades.
    - 3.2. O conceito frequentista de probabilidade como meio de validar ou refutar intuições e como primeira etapa na explicitação

dos casos possíveis, dos casos favoráveis e do cálculo de probabilidades pela lei de Laplace.

3.3. Cálculo de probabilidades a priori, recorrendo à representação do espaço amostral através de diagramas de árvore e de tabelas de dupla entrada e ao uso de esquemas que relacionem a probabilidade numa experiência composta com as probabilidades nas experiências simples envolvidas.

3.4. Dependência e independência estocástica: extração com e sem reposição e lançamento simultâneo e consecutivo de objetos aleatórios.

Tal proposta de conteúdos apresentada por Fernandes (1999) no final da década dos anos 90 guarda estreita relação com os currículos prescritos e não menos importante com os conteúdos que ora vamos abordar neste programa formativo.

Sobre a questão curricular da probabilidade, bem como da estatística, Lopes (2009) ao discutir, por meio da análise dos currículos do Brasil e dos EUA, aponta que mesmo com a indicação para o trabalho com esses conhecimentos (PCN no Brasil que data de 1997/1998 e o documento curricular dos EUA de 1980) se constitui um desafio para a efetiva implementação de um estudo significativo da estatística e probabilidade nas aulas de matemática da escola básica.

Sem dúvida, acreditamos na importância das indicações nos currículos prescritos, todavia temos um grande desafio para que as propostas curriculares se constituam em significativos processos de ensino e aprendizagem com a probabilidade na Educação Básica.

Concernente ao ensino e aprendizagem da probabilidade na Educação Básica as prescrições curriculares anteriormente destacadas orienta para a aprendizagem seja de conteúdos, de procedimentos, de habilidades – partindo desde as noções de acaso e aleatoriedade perpassando pela quantificação de probabilidades, e ainda orienta para um estudo articulado da probabilidade com

a estatística, fato este, que se alinha com o nosso desenho de intervenção junto aos professores de matemática.

## **2.2 Estudo Preliminar – dimensão cognitivo-afetivo**

A faceta cognitiva do EOS trata de compreender como se desenvolvem os significados pessoais alcançados pelos estudantes (ou professores em formação) e o grau de dificuldade na aproximação dos significados pretendidos – significados institucionais. Por exemplo, quais as formas de raciocínio, as dificuldades e os significados pessoais que podem ser revelados em face do trabalho com a probabilidade?

Uma vez que, nós formadores, estamos trabalhando com professores também acreditamos ser importante analisar investigações que envolvam essas características com os professores. As adaptações curriculares às capacidade individuais dos professores em formação também constituem um componente que se requer contemplar em nosso processo formativo. Uma consideração especial será o componente das crenças e valores dos professores em formação sobre a matemática e seu ensino. Assim, propomos duas seções: uma sobre os conhecimentos apresentados por estudantes e outra sobre os conhecimentos dos professores.

### **2.2.1 Investigações sobre conhecimentos de estudantes com probabilidade**

Nesta seção discutiremos estudos que nos apontam resultados sobre o conhecimento dos estudantes sobre o conceito de probabilidade, uma vez que, na dimensão cognitivo-afetiva descrevem-se os significados pessoais dos estudantes e ainda podemos compreender o grau de interesse ou motivação dos estudantes nos processos de ensino e aprendizagem de probabilidade, envolvendo estados afetivos (atitudes, emoções, crenças, valores, etc.) com relação aos referidos objetos matemáticos – a probabilidade – e aos processos de ensino e aprendizagem desenvolvidos.

Iniciamos esta seção com o artigo *"Probability Literacy" for all Citizens: Building Blocks and Instructional Dilemmas* de Gal (2005). Com este artigo Gal (2005) tem como objetivo primordial destacar a noção de Letramento

Probabilístico e sua importância em nosso mundo contemporâneo. Para isto, apresenta primeiro uma discussão sobre a Literacia (Literacy), a Numeracia (Adult Numeracy) e a Literacia Estatística (Statistical Literacy). Advogo que tal discussão é importante por que situa e fundamenta o leitor com os termos aqui destacados. Podemos entender Literacia como análogo a letramento tal qual proposto por Paulo Freire.

Numeracia estaria no mesmo sentido de Letramento Matemático donde chegamos à noção de Literacia Estatística ou Letramento Estatístico. No que tange ao entendimento do que é o Letramento Estatístico, temos que é a capacidade de uma pessoa interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, levando em consideração os argumentos relacionados aos dados ou aos fenômenos apresentados em qualquer contexto. O autor ainda pontua que o letramento probabilístico está intimamente ligado ao letramento estatístico, tendo em conta o pressuposto de que a maioria dos adultos serão os consumidores, em vez de produtores, de informação estatística.

O autor discorre sobre a importância da construção do conhecimento probabilístico por estudantes do Ensino Básico. Levanta questões cruciais sobre o ensino e aprendizagem da probabilidade em que destaca elementos constituintes para o desenvolvimento do letramento probabilístico dos estudantes. Acreditamos que os professores de matemática devem conhecer a referida discussão para um melhor desempenho em sua prática profissional concernente ao conceito de probabilidade.

Concordamos com o autor ao esclarecer que a probabilidade é um tema útil na vida de todas as pessoas, além de constituir um saber instrumental em outras disciplinas. A probabilidade constitui-se também como um conhecimento necessário em diversas profissões e tem interferência na tomada de decisões. Em uma de nossas unidades de estudo do programa formativo por nós desenvolvidos levamos em consideração tal premissa e garantimos uma abordagem de atividades que estudam a noção do risco que tem a ver com tomada de decisão.

Na escola, inclusive desde os anos iniciais de escolaridade, convém propor situações que propiciem o raciocínio probabilístico dos estudantes. Por

exemplo, como apontado pelo autor, no campo da probabilidade, tarefas com situações de incerteza que conseguem captar o interesse dos alunos, que enfrentem algumas "grandes ideias" de probabilidade e que exigem que se desenvolva um raciocínio probabilístico.

Para Gal (2005) um indivíduo “letrado” em probabilidade deve ser capaz de ler e interpretar informações probabilísticas em seu dia-a-dia, desenvolvendo um conjunto de habilidades básicas que o torne capaz de lidar com uma série de situações reais que envolvam uma interpretação probabilística, bem como tomar boas decisões em situações de incerteza.

Para contribuir com este desenvolvimento é apresentado um modelo com elementos do conhecimento (cognitivos) e elementos disposicionais que dão base há um processo de letramento probabilístico.

São cinco os elementos do conhecimento<sup>11</sup>. O primeiro foca na abordagem de grandes tópicos/grandes ideias, a saber: variação, aleatoriedade, independência, previsão/incerteza. Estes tópicos são de natureza abstrata e perpassam por uma compreensão intuitiva. Aos estudantes devem ser propiciadas situações que levem a uma discussão e compreensão desses tópicos.

O segundo aborda as diversas formas de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos. As diversas formas do cálculo de probabilidade e os diferentes contextos - como o geométrico - devem ser estudados e desenvolvidos.

A linguagem – o terceiro elemento - diz respeito ao entendimento dos termos e a familiaridade com vários conceitos como chance e risco. Esses termos podem apresentar diferentes significados no que diz respeito ao que o professor trabalha (significado institucional) e o que o aluno já possui do cotidiano (significado pessoal), ou seja, um conflito do tipo semiótico.

---

<sup>11</sup> Knowledge elements 1. Big ideas: Variation, Randomness, Independence, Predictability/Uncertainty. 2. Figuring probabilities: Ways to find or estimate the probability of events. 3. Language: The terms and methods used to communicate about chance. 4. Context: Understanding the role and implications of probabilistic issues and messages in various contexts and in personal and public discourse. 5. Critical questions: Issues to reflect upon when dealing with probabilities.

O quarto elemento é o contexto das situações probabilísticas e sua relação com o nosso cotidiano. Este é um elemento relevante que explica e justifica a necessidade de ser letrado em probabilidade para lidar com diversas situações da vida que são de natureza aleatória.

Por fim, o último elemento é a importância de refletir sobre as questões quando se lida com probabilidade - questões críticas dos estudantes. Uma vez que visamos o letramento probabilístico dos estudantes é preciso que os docentes estejam familiarizados com as questões aqui postas. Tem como propósito possibilitar ao aluno refletir e questionar criticamente uma estimativa ou uma declaração probabilística.

Gal apresenta também três elementos disposicionais<sup>12</sup>, a saber: 1. Postura crítica. 2. Crenças e atitudes. 3. Sentimentos pessoais sobre a incerteza e risco (por exemplo, a aversão ao risco). É necessário também compreender estes elementos disposicionais e mobilizá-los em sala de aula, pois estão articulados com os elementos cognitivos. Um estudante pode ter uma determinada dificuldade devido a uma forte crença relacionada com alguma situação probabilística.

As ideias discutidas por Iddo Gal neste texto são pertinentes. O autor por meio de suas pesquisas, além de outras existentes na literatura, consegue defender, justificar e orientar a inserção da probabilidade como um conhecimento matemático carente de um olhar mais atento por todos que lidam com os processos de ensino e aprendizagem da matemática, desde professores até os sistemas educacionais.

Amir e Williams (1994) nos alertam que as crenças parecem ser os elementos da cultura com a maior influência sobre o pensamento probabilístico. Esses autores entrevistaram crianças com idades entre 11 e 12 anos sobre seus conceitos e crenças referentes ao azar e a sorte, além das experiências relevantes para as crianças sobre o pensamento probabilístico. Os autores apontam que alguns alunos pensavam que Deus controla tudo o que acontece no mundo, enquanto outras pensavam que Deus escolhe o que quer controlar

---

<sup>12</sup> Dispositional elements: 1. Critical stance. 2. Beliefs and attitudes. 3. Personal sentiments regarding uncertainty and risk (e.g., risk aversion).

ou não algo no mundo. Diversos alunos dessa pesquisa acreditavam em superstições, como andar debaixo de uma escada, quebrar um espelho e números que dão sorte ou azar. Havia também crenças diretamente relacionadas ao lançamento de moedas e dados; por exemplo, ao lançarmos uma moeda e sair coroa é sinal de mais sorte. Os autores concluíram ainda que a maioria das crianças acreditam que é mais difícil obter 6 do que outros números (17 dos 21 entrevistados).

Como vemos as crenças por nós construídas ao longo da vida, podem interferir em nossas tomadas de decisões em meio a situações de natureza aleatória. Tais crenças podem ser também compreendidas como conhecimentos e/ou experiências anteriores e que afetam o nosso raciocínio probabilístico. Um exemplo comum apontado por diversos teóricos (FISCHBEIN, 1987; BOROVCIK E PEARD, 1996) são os casos de sorteios das loterias; mesmo que probabilisticamente seja praticamente impossível ganhar em uma loteria nacional há ganhadores a cada semana, ou seja, as regras da probabilidade são difíceis de inferir em nossas experiências cotidianas, nos deixando muitas vezes confusos.

Chiesi, Primi e Morsany (2011) realizaram uma pesquisa com três grupos de estudantes (dois grupos do ensino secundário e um grupo de estudantes universitários) para compreender como os conhecimentos e experiências podem afetar de forma positiva ou negativa o raciocínio probabilístico das pessoas. Utilizaram o termo supersticioso quando as pessoas revelam algum tipo de crenças, conhecimento ou experiência anterior que afetasse em suas decisões. Nesta pesquisa foram realizados três experimentos. O experimento 1 envolveu 302 alunos no 6º, 7º e 8º grau e um questionário com 6 tarefas de raciocínio probabilístico. O experimento 2 somou 400 alunos dos 6º, 7º e 8º graus, os quais não tomaram parte no experimento 1 e responderam a um questionário com 10 tarefas de raciocínio probabilístico (quatro tarefas foram adicionadas às seis tarefas do experimento 1). O último experimento contou com 97 alunos dos 7º e 8º graus e 60 estudantes universitários de diferentes cursos e neste utilizou-se o mesmo questionário usado no experimento 2.

As autoras constataram que crianças mais supersticiosas tiveram desempenho pior do que as menos supersticiosas, independente do nível de escolaridade ou da capacidade cognitiva. Constataram também que o pensamento supersticioso pode impedir o uso de regras normativas, mesmo nos estudantes que possuíam um conhecimento relevante. Os resultados suportam a afirmação de que a capacidade do raciocínio probabilístico depende crucialmente da aquisição de conhecimentos relevantes. Houve um efeito maior de instruções, no caso dos estudantes universitários que presumivelmente possuem conhecimento mais relevante sobre o raciocínio probabilístico, e também têm a capacidade cognitiva maior do que os alunos do ensino médio. Esses resultados confirmaram mais uma vez o papel da capacidade cognitiva e nível de escolaridade no raciocínio probabilístico. Além disso, verificou-se que os estudantes universitários foram menos influenciados pelas superstições do que os alunos do ensino médio. Neste grupo, todos os alunos possuíam conhecimento suficiente, e tinha a capacidade cognitiva necessária para seguir as instruções, e ao mesmo tempo eles foram minimamente afetados pelo pensamento supersticioso.

Um estudo bem pertinente para nossa reflexão foi o desenvolvido por Fernandes (1999) em sua tese de doutorado intitulada “Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidade no 9º ano de escolaridade” na Universidade do Minho em Portugal. A investigação realizada compõe-se de dois estudos: (1) um primeiro ‘Estudo sobre intuições probabilísticas’, em que se identificaram e caracterizaram intuições probabilísticas de alunos do 8º ano e do 11º ano, e (2) um segundo ‘Estudo sobre o ensino de probabilidades’, em que se concebeu, implementou e avaliou uma experiência de ensino contemplando as intuições probabilísticas em alunos do 9º ano, por comparação com um ensino tradicional. Esses anos de escolaridade são os mesmos anos escolares no sistema de ensino brasileiro.

Fernandes (1999) verificou que os alunos de ambos os anos escolares (8º e 11º) revelaram intuições mais limitadas e primitivas nas probabilidades em experiências compostas (exemplo, lançar dois dados, três moedas ou extrair duas bolas) do que nas probabilidades em experiências simples (exemplo, lançar um dado, uma moeda ou extrair uma bola). Além disso, as elevadas

porcentagens de respostas corretas obtidas na classificação de acontecimentos em certos, possíveis e impossíveis, sugerem que os alunos possuem intuições corretas sobre esta classificação de acontecimentos. Neste último caso, os alunos revelaram mais dificuldades nos acontecimentos certos e/ou que envolviam os conectivos e, ou e não.

No segundo estudo, formulou-se a seguinte questão de investigação: No 9º ano de escolaridade, um tipo de ensino que considere as ideias intuitivas dos alunos tem um maior impacto na aprendizagem de probabilidades, comparativamente com um ensino tradicional? Como conclusões deste segundo estudo, o autor discorre que ao nível das intuições probabilísticas, comparativamente com a estratégia de ensino tradicional, a estratégia que contemplou as intuições teve um maior impacto na adoção de raciocínios gerais (segundo o autor, são tipos de raciocínios que levam a resposta correta) e na diminuição da adesão a comparações baseadas em contagens e na referência ao fato de os acontecimentos serem possíveis. Entre as duas estratégias de ensino, a estratégia experimental favoreceu a seleção das respostas corretas e o desempenho dos alunos em cálculo de probabilidades, neste último caso, essencialmente nas probabilidades em experiências compostas. Em ambas as estratégias de ensino, tanto nas respostas corretas como no cálculo de probabilidades, o desempenho dos alunos aumentou com o desempenho em matemática. Na condição de ensino experimental os alunos de desempenho médio e elevado progrediram de forma semelhante e mais do que os alunos de baixo desempenho. Na condição de ensino tradicional, observou-se um progresso crescente com o melhor desempenho em matemática.

Tal como a estratégia de ensino baseada nas intuições, implementada no presente estudo, Fernandes (1999) salienta também que uma estratégia de ensino destacando os conceitos clássico e frequentista de probabilidade e promovendo a atividade dos alunos em pequenos grupos aliada a uma estratégia de ensino baseada na mudança conceitual revelaram-se estratégias mais eficazes para lidar com as intuições dos alunos, quando comparadas com um ensino tradicional.

Na França, Coutinho (2002) realizou uma pesquisa com alunos do Ensino Fundamental deste país com objetivo de discutir a introdução do conceito de probabilidade por meio de um enfoque experimental permitindo um processo de modelização. Modelização para Coutinho (2002) é um processo desencadeado pelo aluno quando lhe é solicitado o reconhecimento do modelo probabilístico, no caso a urna de Bernoulli, que melhor representa e interpreta a situação da realidade que ele quer estudar. O contexto utilizado foi o da probabilidade geométrica que propõe aos alunos a identificação do modelo que melhor representa o jogo de *Franc-carreau*.

O jogo de *Franc-carreau* consiste em lançar uma moeda em um piso de azulejos de forma quadrada. Os jogadores então apostavam na posição final de tal moeda: imobilizar-se-ia completamente sobre um único azulejo (posição chamada franc-carreau), sobre uma junta entre dois azulejos ou sobre uma junta entre quatro azulejos?

A atividade realizada pelos alunos nesta pesquisa foi dividida em duas fases. Na primeira, que corresponde aos primeiros passos da modelização, o aluno deve reconhecer o caráter aleatório do experimento assim como se inicia no processo de abstração visando o modelo de Urna de Bernoulli em que temos dois resultados possíveis – fracasso e sucesso. A segunda fase da atividade se passa em ambiente computacional: o aluno vai utilizar a simulação do jogo de *Franc-Carreau* para estimar a Urna de Bernoulli que melhor lhe representa.

Coutinho (2002) constatou que os alunos aceitaram a utilização do modelo de Urna de Bernoulli para representar o jogo de *Franc-Carreau*. Eles foram capazes de formular uma composição para esta urna a partir da associação entre o jogo e o sorteio no pote com contas coloridas e com o sorteio de um pixel ao acaso em uma figura-Cabri. A pesquisadora observou também que tais atividades favorecem a construção pelos alunos da relação entre uma ideia intuitiva de probabilidade e a frequência estabilizada como medida aproximativa desta probabilidade.

A estratégia utilizada pela autora com os alunos permitiu a confrontação dos dois principais pontos de vista quando definimos uma probabilidade: o

ponto de vista clássico ou laplaciano e o ponto de vista frequentista. Nestas condições, a construção do conceito pelo aluno é feita de forma a que ele tenha menos possibilidades de mobilizá-lo fora do seu domínio de validade, ou seja, com menos possibilidades de que este conceito torne-se um obstáculo para aprendizados futuros no domínio do cálculo de probabilidades.

As atividades que propomos em nosso programa intervентivo permitem também um trabalho sobre conhecimentos já adquiridos pelos alunos em séries anteriores do Ensino Fundamental tais como proporcionalidade e frequências. Destacamos a importância do trabalho sobre todas as formas de representação destes objetos matemáticos: frações, porcentagens, etc.

Apresentamos a seguir um estudo que também aponta para uma abordagem articulada entre a probabilidade clássica e a frequentista com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Neste caso, Abe (2011) utiliza a palavra visão no lugar de significado e/ou enfoque e inclui a probabilidade geométrica como o ensino de probabilidade no contexto geométrico. Este estudo teve como objetivo investigar a aprendizagem de probabilidade por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental a partir de situações que envolvessem duas visões de probabilidade, a clássica e frequentista. Além disso, pretendeu-se evidenciar as vantagens de se trabalhar com a dualidade dessas duas abordagens na introdução desse conceito. Para isto, a autora construiu uma sequência de atividades compostas por seis sessões envolvendo diversos experimentos inclusive com o uso da tecnologia. Os sujeitos pesquisados foram seis estudantes do 9º ano que ainda não haviam estudado o conteúdo de probabilidade.

Abe (2011) constatou que o recurso tecnológico – simulador da roleta, propiciou uma observação concreta do que acontece ao realizamos um experimento aleatório uma quantidade pequena de vezes diferente de um número significativamente grande de vezes, algo que se tornaria mais difícil sem este recurso. A autora pode observar que os estudantes assimilaram a proporção com probabilidade inicialmente em duas situações específicas e, em seguida, conseguiram calcular a probabilidade dos outros experimentos aleatórios, mesmo que em diferentes contextos. Considerou que a articulação

das duas visões de probabilidade (clássica e frequentista) favoreceu a aprendizagem de alguns conceitos de probabilidade por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Na seção em que discutimos sobre os diferentes significados probabilísticos já apontávamos para este fato, de um trabalho articulado entre os tais significados.

Hernández (2015) desenvolveu um estudo para avaliar o conhecimento dos términos verbais associados com sucessos aleatórios e com probabilidade em alunos do 1º e 2º curso de Educação Secundária Obrigatória (ESO) na cidade de Cádiz – Espanha. Foram selecionados 89 alunos, 56 alunos de 1º curso e 33 alunos do 2º curso da ESO.

Aplicou-se um questionário com oito itens tomados de investigações prévias ou de livros didáticos. O questionário se compõe de dois grandes blocos: o primeiro trata de compreender se os alunos discriminam sucessos aleatórios e não aleatórios e se são capazes de reconhecer situações aleatórias em diferentes contextos; o segundo bloco analisa o vocabulário que os alunos possuem com relação aos fenômenos aleatórios e a valoração qualitativa de probabilidades.

Em geral, os itens que resultaram mais difíceis para os alunos foi o item que solicitava exemplos de aleatoriedade na vida diária (distinto de jogos) em que intervém o azar (com 26,8% do 1º ESO e 30,3% do 2º ESO de alunos sem responder) e o item em que se pedia uma lista de palavras utilizadas para aludir ao azar, além do item onde se pedia sinônimos de certas palavras relacionadas com aleatoriedade.

As principais carências/dificuldades dos alunos apontadas por Hernández (2015) por meio da análise do questionário foram: erros na diferenciação entre fenômenos aleatórios e deterministas e certas dificuldades para oferecer exemplos fora dos jogos de azar; carência de vocabulário relativo ao azar e dificuldade na busca de sinônimos de probabilidade relacionados com os distintos níveis; dificuldade para proceder a uma valoração da probabilidade em diversas situações cotidianas com uma especial confusão

entre os términos “impossível” e “improvável” que os referidos alunos tratam como sinônimos.

Já nos estudos da dissertação de MAÑEZ (2015) desenvolvido em Utrillas – Espanha analisou-se os significados que os estudantes de secundária (ESO) atribuem às sequências de resultados que se obtém com experimentos aleatórios. Para isto, foi construído um questionário com atividades que na literatura atual denomina-se de reconhecimento da aleatoriedade. A amostra foi formada por 159 alunos, matriculados nos seguintes cursos de ESO: 2º de ESO ( $n = 51$ ), 3º de ESO ( $n = 64$ ) e 4º de ESO ( $n = 44$ ).

O questionário utilizado consta de três problemas, que há sido adaptado de outras investigações prévias.

O primeiro problema (com 4 itens) solicitou uma análise e posicionamento/justificativa dos alunos com respeito a identificar no problema quais as “os alunos teriam trapaceado ou não no lançamento de uma moeda 20 vezes”. Foram observadas poucas respostas em branco, que segundo o autor, indica o interesse dos alunos em completar o questionário. Quando encontramos um problema que os alunos demonstram interesse e motivação, podemos dizer que a faceta afetiva está contemplada de uma forma alta.

Observou-se ainda uma alta porcentagem de não apresentar argumentação em todos os itens, o que pode significar que alguns alunos não percebem bem as características das sequências aleatórias ou ainda que não tenham capacidade argumentativa. Foi também muito frequente em todos os itens o argumento da imprevisibilidade; estes alunos compreendem que, por ser um experimento aleatório imprevisível, não se pode dar um motivo para considerar uma sequência aleatória ou não. Entre os alunos do 4º ESO há uma maior proporção de crianças que associam o fato de que as frequências observadas estão próximas das frequências esperadas com a aleatoriedade; isto implicaria uma melhor compreensão do significado frequentista de probabilidade.

O segundo problema solicita que os alunos reconheçam qual a sequência mais provável de acontecer. O problema utiliza o contexto de uma

fila de alunos (feminino (F) e masculino (M)) saindo de uma sala de aula ao azar. Todas as sequências têm a mesma longitude e o mesmo número de mulheres e homens. Variam em número de alternância de sucessos (um sucesso na sequência da letra a; dois na letra b e c; três na letra d e 4 na letra e). Por exemplo, a letra e: FMFMFM. A letra f apresenta a alternativa “todas iguais”. Com este problema foi encontrado uma alta porcentagem de alunos de todos os níveis que consideraram todas as sequências igualmente prováveis, o que seria a resposta mais correta. Em 38,8% dos alunos de 14 anos e em 53,8% dos alunos de 17 anos que responderam que todas as sequências têm igual probabilidade. Curiosamente, os alunos do 2º e 3º ESO apresentam melhores respostas do que os do 4º ESO.

O terceiro problema (itens de 6 a 10) também solicita dos alunos uma análise sobre sequências aleatórias. O problema enuncia o seguinte:

Um exame tem 10 perguntas; cada uma com quatro possíveis respostas: A, B, C e D. Apenas uma resposta é correta em cada pergunta. A seguir mostramos as respostas que elegeram alguns alunos:

- Item 6. Ana: A C C B D C A A D B;
- Item 7. Borja: C C C B B B B B B;
- Item 8. Carlos: C B C B B C B B B B;
- Item 9. Danilo: A A A C C C B B D D e
- Item 10. Emilia: A B C B A C D A C D.

Circule os nomes dos alunos que poderiam estar respondendo ao azar.

O autor, MAÑEZ (2015), aponta que as maioria dos alunos consideram que se está respondendo ao azar os itens 9 e 10, donde, por um lado, se apresenta todos os tipos de resultados. Nesses casos, os estudantes utilizam seu conhecimento do contexto, pois é difícil que um professor prepare um exame de opções múltiplas com respostas que sigam um padrão dado. Ademais, essas sequências são tipicamente aleatórias: aparecem todas as opções; há uma sequência larga e não há uma ordem evidente. Foi encontrada uma alta porcentagem de alunos que consideram aleatório o item 7, pois só aparecem dois resultados (o C e o B) e ainda uma sequência de resultados iguais. O item 6 donde por um lado aparecem todos os resultados, e por outro, não se percebe uma ordem na sequência, é aceito por uma alta porcentagem de alunos nos três cursos da amostra investigada.

Acreditamos ser pertinentes ainda, descrevermos as recomendações apontadas por Fernandes (1999) a partir dos resultados encontrados em sua pesquisa. Essas recomendações devem ser apresentadas nesta seção, uma vez que estamos debruçados sobre as facetas cognitiva e afetiva para um melhor trabalho em sala de aula com os alunos.

A primeira recomendação nos alerta que não devemos assumir que os alunos possuem uma definição clara dos termos “certo”, “possível”, “impossível”, “provável”, “muito provável” e “pouco provável”. As dificuldades dos alunos foram mais notórias na distinção entre acontecimentos certos e quase certos e entre acontecimentos impossíveis e quase impossíveis. Neste último caso, a verificação de que não se trata de um acontecimento certo ou impossível, respectivamente, pode constituir uma estratégia para ajudar os alunos a vencer tais dificuldades.

A recomendação número 2 diz que a promoção do raciocínio proporcional para avaliar probabilidades pode beneficiar com a demonstração da ineeficácia de raciocínios baseados em comparações resultantes de contagens e com a exploração subsequente de esquemas de comparações multiplicativas. Como terceira recomendação traz a tona que o estudo de acontecimentos envolvendo os conectivos *e*, *ou* e *não* deve ser efetuado ao longo de todo o tema, procurando-se que os alunos verbalizem e discutam os seus significados. Para além do tema de probabilidades, a correta compreensão e utilização destes conectivos são da maior importância na matemática em geral, e mesmo em outras disciplinas.

A recomendação número 4 versa sobre as dificuldades sentidas pelos alunos nas probabilidades em experiências compostas no contexto de urnas. Essas dificuldades podem ser explicadas pela multiplicidade de condicionantes envolvidos: a possibilidade de realização de um acontecimento de várias maneiras diferentes em cada experiência simples, a extração simultâneas versus extração consecutiva, ordem versus não ordem e reposição versus não reposição. O autor aconselha que se preste uma atenção especial a todos estes aspectos no ensino, implicando um maior tempo para explorar situações diversificadas e enfatizando representações através de diagramas de árvore,

de tabelas de dupla entrada e de esquemas simples de contagem e de probabilidade.

Sobre os temas que deve ser trabalhado ao nível do 9º ano de escolaridade, que discorremos na seção sobre currículo, se constitui a quinta recomendação pontuada por Fernandes (1999). No geral, os subtemas são 1.Terminologia e conceitos probabilísticos (conceitos clássico e subjetivista), 2.Probabilidades em experiências simples (conceitos clássico, frequentista e subjetivista) e 3.Avaliação intuitiva de probabilidades. A sexta recomendação tem haver com a formação de professores na qual cita que os professores devem apresentar um conhecimento e compreensão das intuições dos alunos, conhecer as limitações de um ensino tradicional para lidar com essas intuições e ser capaz de estabelecer estratégias de ensino capazes de vencer e substituir intuições inadequadas.

Diante desse cenário de pesquisas não há dúvidas, de como professores de matemática, torna-se necessário compreender e se apropriar das dificuldades que crianças e adolescentes apresentam ao lidar com o aleatório e a probabilidade na escola. Este conhecimento é de suma importância aos professores de matemática para que possamos desenvolver e experimentar estratégias de ensino e aprendizagem com o conhecimento probabilístico que possibilitem uma construção progressiva por parte dos alunos; e que essas estratégias respeitem os níveis de escolaridade, sejam criativas e motivadoras, além de serem fundamentadas na epistemologia do conhecimento probabilístico.

### **2.2.2 Investigações sobre Conhecimentos e Formação de professores com probabilidade**

Neste apartado iremos discutir investigações sobre conhecimentos de professores e a formação de professores em Probabilidade. Batanero (2015) apresenta alguns pontos referentes às investigações sobre o conhecimento do professor, a respeito da probabilidade e de seu ensino: poucas pesquisas comparadas as de outros temas; muitas pesquisas envolvendo futuros professores de educação básica; ênfase nos conhecimentos matemáticos;

Como já apontado, as investigações que envolvem a compreensão de probabilidade por professores são muito escassas e a maioria com foco nos professores de educação primária. No quadro 3 apresentamos os estudos e publicações selecionados para compreendermos as nuances que envolvem o conhecimento dos professores em diversos níveis escolares sobre probabilidade.

AUTORES	ANO	TEMÁTICA	NÍVEL ESCOLAR	PAÍS	QTD. DE PROFESSORES	TIPO DO TEXTO
LOPES	2003	O conhecimento profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade	EDUCAÇÃO INFANTIL	BRASIL	6	TESE
IVES	2009	Conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo de professores de matemática sobre probabilidade	EDUCAÇÃO SECUNDÁRIA	ESTADOS UNIDOS	5	TESE
CABRAL JÚNIOR	2009	Abordagem das noções iniciais de probabilidade	ENSINO MÉDIO	BRASIL	3	DISSERTAÇÃO
CONTRERAS, BATANERO, DÍAZ E FERNANDES	2011	Conhecimentos de professores sobre probabilidade (simples, conjunta e condicional)	EDUCAÇÃO SECUNDÁRIA	ESPAÑHA	183	ARTIGO
SANTANA	2011	Concepções e conhecimentos de professores sobre probabilidade	EDUCAÇÃO PRIMÁRIA E SECUNDÁRIA	BRASIL	8	DISSERTAÇÃO
DOLLARD	2011	Concepções de futuros professores sobre probabilidade	EDUCAÇÃO SECUNDÁRIA	ESTADOS UNIDOS	24	ARTIGO
ORTIZ, BATANERO E CONTRERAS	2012	Conhecimento de futuros professores sobre jogo equitativo e comparação de probabilidades	EDUCAÇÃO PRIMÁRIA	ESPAÑHA	167	ARTIGO
BATANERO, CONTRERAS, DÍAZ E CAÑADAS	2013	Conhecimentos de futuros professores sobre probabilidade simples e condicional	EDUCAÇÃO SECUNDÁRIA	ESPAÑHA	196	ARTIGO
JUNQUEIRA	2013	Formação continuada de professores de matemática sobre probabilidade	EDUCAÇÃO SECUNDÁRIA	BRASIL	15	TESE
PIETROPAOLO, CAMPOS, CARVALHO E TEIXEIRA	2013	Conhecimentos necessários ao professor para o ensino da probabilidade	EDUCAÇÃO PRIMÁRIA	BRASIL	27	ARTIGO
VÁSQUEZ	2014	Conhecimento didático – matemático sobre probabilidade com professores em exercício	EDUCAÇÃO PRIMÁRIA	CHILE	93	DISSERTAÇÃO

**Quadro 3: Resumo das investigações selecionadas considerando temáticas, nível, país, quantidades de professores e tipo do texto.**

Fonte: O autor, 2017.

A primeira pesquisa (LOPES, 2003) que apresentamos nesta seção articula dois grandes temas – Formação de professores da Educação Infantil e o Conhecimento sobre estatística e probabilidade. Os resultados dessa pesquisa estão baseados na reflexão epistemológica do professor sobre as ideias estocásticas. Dessa forma reflete-se sobre a necessidade de repensar o ensino probabilístico na formação de professores. Para a pesquisadora o

espaço pedagógico da Educação Infantil é uma ótima possibilidade para este estudo.

Lopes (2003) concorda com o pensamento e as ideias de Godino, Batanero e Flores (1998) considerando que

Um ponto importante no plano de formação de professores sobre um conteúdo matemático específico é a reflexão epistemológica sobre o mesmo, ainda que possa ajudar os professores a compreender seu papel dentro da Matemática e outras matérias, sua importância na formação dos alunos, assim como as dificuldades dos mesmos no uso dos conceitos para a resolução de problemas. (GODINO, BATANERO E FLORES, 1998, p.2-3).

Refletir epistemologicamente é essencial na construção do conhecimento matemático e, principalmente no caso da Educação Estocástica, uma vez que este campo de conhecimento pode ser difícil de ser ensinado, pois apresenta características especiais envolvendo juízos de valor e ideias controvertidas para todos nós, como a do azar e da causalidade.

A investigação foi realizada em uma instituição da rede privada de ensino do estado de São Paulo com um grupo de professores e coordenadores pedagógicos, todos profissionais desta escola. O estudo tem como objetivos responder às questões de pesquisa: “Que alterações podem provocar na formação e prática do professor um processo de reflexão sobre o ensino de Estatística e Probabilidade?” e “Que contribuições o estudo, a vivência e a reflexão sobre conceitos de Estatística e Probabilidade podem trazer para o desenvolvimento profissional e a prática pedagógica de um grupo de professoras da Educação infantil?”

Para a realização da pesquisa, Lopes (2003) articulou e instituiu o GEPEPEI - Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Estatística e a Probabilidade na Educação Infantil – no qual todo o percurso metodológico foi vivenciado. O grupo foi constituído por cinco professores, duas coordenadoras escolares e a pesquisadora. Desta forma, a intenção era de realizar uma pesquisa com e não sobre as professoras. Esse fato guarda uma analogia com a nossa investigação, uma vez que realizamos a pesquisa com professores (vivenciando e avaliando as atividades), mas também sobre eles (quais dificuldades e conflitos, quais as aprendizagens, etc.).

As informações foram construídas no decorrer do trabalho com as entrevistas e os questionários iniciais, cruzando as análises, com o intuito de definir regularidades acerca das elaborações das professoras. Em outro momento, compararam-se com as informações fornecidas pelos relatórios escritos, vídeos e/ou áudios dos encontros, questionário e entrevista finais.

Um primeiro resultado é que o currículo em ação de cada professora teve êxito de acordo com seu envolvimento, tendo em vista a temática, a reelaboração de sua prática e seu comprometimento com o próprio desenvolvimento profissional. As professoras também desenvolveram um processo de *raciocínio didático/pedagógico* e desenvolveram novas compreensões, aprimoraram intuições e elaboraram novos conhecimentos concernentes ao conhecimento probabilístico. Ao elaborar as atividades orientadas de ensino conseguiram expressar o domínio do conceito formal de Combinatória, Probabilidade e Estatística Básica, que lhes permitiu estabelecer relações entre conhecimentos de outras áreas, promovendo a aquisição de ideias conceituais não formalizadas, através de situações contextualizadas e inseridas nos projetos integrados de áreas disciplinares da Educação Infantil.

No que concerne aos conhecimentos estatísticos, abordaram as ideias estocásticas, conectadas a outras relações de conhecimentos diversos, à medida que formalizaram os conceitos estudados. A abordagem curricular realizada centrou-se em torno dos interesses das crianças e relações com a temática dos projetos. Lopes (2003) ainda pontua como resultados dessa pesquisa que o conhecimento didático da Matemática e da Estatística manifestou-se fortemente, na elaboração de problemáticas e na diversidade de estratégias de soluções implicando em um desenvolvimento profissional das professoras com constantes reflexões sobre suas práticas, promovendo o aprofundamento do conhecimento matemático, estatístico e didático.

Também, em nível internacional há diversos pesquisadores preocupados em compreender os conhecimentos dos professores sobre probabilidade. O próximo estudo destaca uma pesquisa realizada nos Estados Unidos da América.

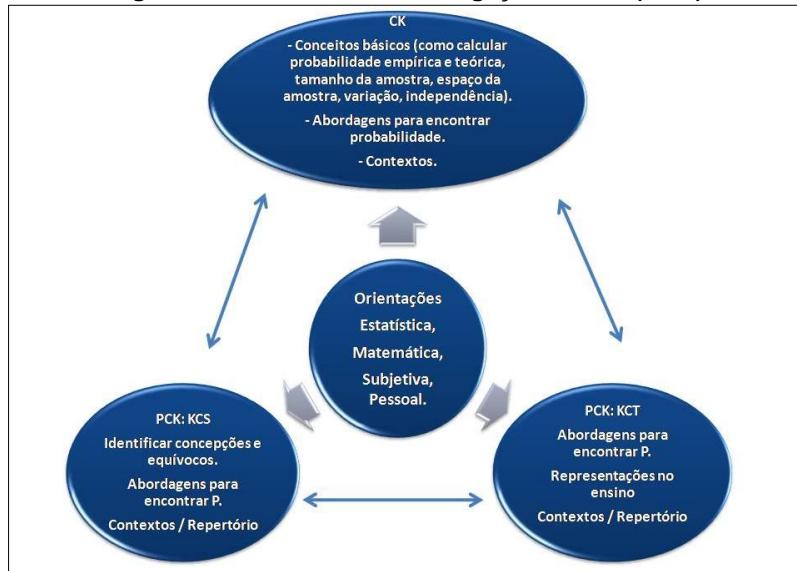
Ives (2009) utiliza as categorias desenvolvidas por Ball et al. (2008) para o desenho de uma pesquisa realizada com professores sobre probabilidade intitulada <sup>13</sup>Learning to Teach Probability: Relationships among Preservice Teachers' Beliefs and Orientations, Content Knowledge, and Pedagogical Content Knowledge of Probability. Os objetivos desse estudo de doutoramento se constituíram em investigar as orientações, o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo de probabilidade de cinco futuros professores de matemática (no Brasil denominamos como licenciando) bem como a utilidade das atividades vivenciadas com relação a examinar estes aspectos do conhecimento. A figura 10 mostra estes três aspectos investigados e as construções de interesse dentro de cada um.

Neste estudo a pesquisadora descobriu que os cinco futuros professores apresentam orientações que tendem a ser quase objetivas (matemática e estatística), com pouca evidência de orientações subjetivas. Para um futuro professor com uma orientação matemática mais forte, eles podem ter dificuldades em probabilidade ao lidar com situações que são mais de natureza estatística.

---

<sup>13</sup> Aprender e ensinar probabilidade: relações entre orientações, conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo de probabilidade com futuros professores. (tradução nossa)

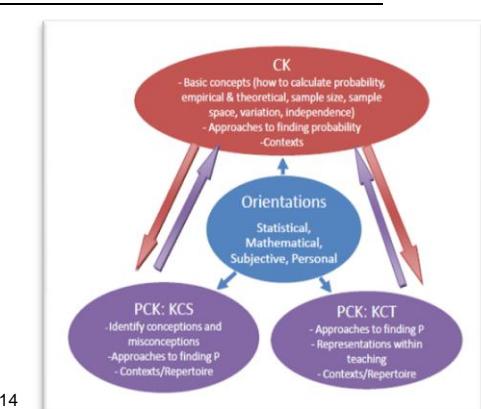
**Figura 10: Elementos da Investigação de Ives (2009)**



Fonte: Ives, 2009, tradução nossa<sup>14</sup>.

A autora afirma ainda, que os dados revelaram que existem relações entre as orientações dos professores e seu conhecimento do conteúdo, bem como com o seu conhecimento pedagógico do conteúdo. Estas relações foram mais encontradas em tarefas nas quais eles eram obrigados a fazer uma afirmação acerca de algum tipo de probabilidade dentro do contexto do mundo real. Ives (2009) advoga a partir dos resultados da sua pesquisa que as tarefas que envolvem situações pedagógicas tendem a ser mais eficazes em induzir conhecimento do que tarefas que envolvem apenas questões objetivas.

Deste estudo percebemos a defesa de um trabalho didático orientado para o desenvolvimento e aplicação em sala de aula de situações/atividades enriquecedoras tanto do ponto de vista didático como do conteúdo de probabilidade. Ressaltamos mais uma vez que não basta saber probabilidade,



é urgentemente necessário desenvolver estratégias para abordagem desse conteúdo na escola.

Na pesquisa realizada por Cabral Júnior (2009) com três professores do Ensino Médio em uma escola pública do Brasil o autor, por meio das análises de oito aulas dos professores e do estudo de uma sequência didática para investigação junto aos professores, levanta questões importantes sobre o ensino de probabilidade.

Uma primeira conclusão diz respeito aos resultados da análise de uma entrevista com os professores que citaram que a maior parte de suas aulas, ao abordarem a probabilidade, era conduzida por meio das propostas dos livros didáticos e que, tais livros não salientavam a diferenciação entre situações determinísticas e aleatórias.

Cabral Júnior (2009) observou que os professores que participaram do estudo têm conhecimento da abordagem laplaciana na introdução do conceito de probabilidade, no entanto carecem de embasamento teórico sobre a possibilidade de apreensão da noção de probabilidade utilizando-se da confrontação dos enfoques frequentista e laplaciano. Outra constatação de Cabral Júnior (2009) foi que os professores ignoram a lei dos grandes números e que não trabalhavam com espaços amostrais não equiprováveis, privando assim os alunos de um contraponto importante na compreensão de espaços amostrais que estão presentes no cotidiano.

Neste ínterim, as pesquisas são articuladas com campos teóricos que discutem os conhecimentos dos professores para o ensino da matemática. A próxima pesquisa, de Contreras, Batanero, Díaz e Fernandes (2011), considera os estudos de Ball et al. (2008) e as categorias desenvolvidas pela teoria do Enfoque Ontosemiótico (Godino, 2002; 2011) e nos apresenta resultados sobre o conhecimento de professores sobre probabilidade simples, conjunta e condicional.

A investigação supracitada foi realizada com uma amostra de 183 futuros professores na Faculdade de Educação da Universidade de Granada, na

Espanha. Contreras, Batanero, Díaz e Fernandes (2011) replicaram com estes estudantes uma atividade realizada por Estrada e Díaz (2006).

A atividade foi construída em duas partes, na primeira parte as três alternativas envolviam probabilidade simples, composta e condicional –  $P(A)$ ;  $P(A \cap B)$ ;  $P(A|B)$  – com o objetivo de identificar o conhecimento comum dos professores. Na segunda parte com objetivo de identificar o conhecimento especializado dos professores com a utilização dos elementos de uma configuração epistêmica baseada no Enfoque Ontosemiótico, ou seja, identificação de objetos matemáticos tais como: problemas, conceitos, linguagens, propriedades, procedimentos e argumentos.

Os resultados sugerem que a identificação de objetos matemáticos implícitos na tarefa não foi fácil para os participantes da amostra. Em geral, os autores concluíram que futuros professores do ensino primário, mesmo após terem frequentado uma unidade curricular sobre matemática e a sua didática, que incluía conteúdos de probabilidades, demonstraram muitas dificuldades e cometem muitos erros.

É perceptível como é delicado e ao mesmo tempo complexo o que as pesquisas nos apontam concernentes aos conhecimentos docentes e, que, a compreensão da probabilidade por professores, de quaisquer níveis escolares, é bastante deficitária.

Santana (2011) realizou uma pesquisa sobre as concepções e conhecimentos apresentados por professores dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental concernente à probabilidade. A autora evidencia que esses professores apresentaram dificuldades relacionadas à compreensão do conceito de probabilidade. Os professores exploram pouco o conceito probabilístico em sala de aula e justificam apontando a ausência de orientações dos livros didáticos.

Santana (2011) ressalta ainda que os professores dos anos iniciais inseridos na pesquisa utilizavam técnicas de contagem, mas se limitavam a contextos com jogos de azar ou escolhas de uma entre várias possibilidades de resultados de uma contagem. A autora destaca ser fundamental, na escola e

desde os anos iniciais, um trabalho mais aprofundado que envolva as noções de probabilidade como percepção do acaso e experiência aleatória. Aponta também a necessidade da formação inicial permitir condições para que os futuros professores desenvolvam competências e habilidades sobre esse conteúdo.

Também corroboramos com a advertência de Santana (2011) e de tantos outros pesquisadores sobre a necessidade de um melhor trabalho na formação inicial dos professores com o conhecimento probabilístico.

Em um estudo desenvolvido por Dollard (2011) sobre o pensamento probabilístico de professores de matemática em formação inicial, o autor constatou que muitos participantes demonstraram diversos equívocos sobre probabilidade particularmente em relação aos significados subjetivo, clássico e frequentista. Os participantes da pesquisa eram professores de matemática em formação que ainda não haviam estudado probabilidade como parte de sua formação inicial na referida instituição de ensino superior nos Estados Unidos. Os resultados que autor discute concentram-se nos significados de probabilidade e na lei dos grandes números.

Em uma das atividades aplicadas, Dollard trabalha com a definição de probabilidade. Em um primeiro momento solicita aos participantes responder diretamente: O que queremos dizer quando falamos sobre a probabilidade de um evento? A maioria dos participantes respondeu a esta pergunta envolvendo os termos “acaso” ou “chances” e foram classificadas como respostas adequadas. Quatro participantes restantes deram respostas que foram consideradas “insuficientes” por que eram claramente diferentes do significado matematicamente aceito da palavra “probabilidade”. Três destes participantes disseram que a probabilidade era o que poderia acontecer. Por exemplo, um deles disse: “Eu acho que isso significa que os diferentes resultados que podem acontecer, a partir de um evento ou um acontecimento específico. Todas as diferentes respostas que você pode obter”. Outro disse que a probabilidade era “se ou não vai acontecer”. Assim, as respostas a esta questão indicam que, embora a maioria dos futuros professores tenha um sentido intuitivo adequado do significado da palavra “probabilidade” alguns

deles apresentam equívocos significativos. Nenhum desses professores mencionou algo que envolvesse a noção da probabilidade frequentista ou a lei dos grandes números.

Outra parte do referido estudo focou em duas atividades que envolvem manipulação, uma com um dado de seis lados comum e a outra com uma casa de brinquedo. Na segunda atividade os participantes receberam um material manipulável – uma pequena casa de madeira com sete faces em vez de seis e com as faces de tamanhos e formas diferentes. Perguntou-se: o que quero que você pense sobre isto é, se eu lançar esta casa, qual é a probabilidade de que ela vai pousar em seu telhado? Se os participantes não responderem, pelo menos, que a forma irregular da casa afeta a probabilidade de pousar no telhado, ele foi convidado a responder: “Será que faz diferença o fato dos lados serem de tamanhos e formas diferentes?” e em seguida: “Existe alguma maneira de responder a essa questão lançando a casa?”. Deve-se notar que no desenho da entrevista, esta questão se destinava a ser uma questão de acompanhamento para aqueles que não sugerissem o lançamento da casa como resposta à pergunta anterior. No entanto, devido ao fato de nenhum dos participantes sugerir o lançamento da casa, esta questão tornou-se uma questão padrão na entrevista. Foi analisado se as explicações dos professores indicavam também a necessidade do lançamento da casa um grande número de vezes, caso não, os mesmos foram convidados a responder: Quantas vezes lançariam a casa? Porque os lados da casa não eram uniformes e não havia nenhuma razão para esperar que a casa pousasse sobre um dos lados fosse igualmente provável, esta questão apresenta uma situação que não preenche as condições necessárias para aplicação da probabilidade clássica. A única maneira razoável para determinar a probabilidade de pouso da casa em seu telhado era usar a interpretação frequentista de probabilidade e realizar uma série de testes.

Um dos pontos de interesse na análise desta questão por Dollard (2011) era justamente verificar o reconhecimento que devido à forma irregular da casa, não se pode aplicar a interpretação clássica de probabilidade e contar o número de lados. Outro ponto de interesse era saber se o participante reconheceu a interpretação frequentista de probabilidade como uma possível

maneira de abordagem e, se o fizessem se foi reconhecida a necessidade de realizar um grande número de ensaios. Os resultados sugerem que muitos professores que estão prestes a atuar no ensino elementar não estão familiarizados com a interpretação frequentista de probabilidade ou com a ideia de que se pode estimar a probabilidade de um evento através da experimentação.

Outra pesquisa que discute os conhecimentos dos professores é a de Ortiz, Batanero e Contreras (2012). Esses investigadores estudaram os conhecimentos de 167 futuros professores de educação primária na Espanha sobre probabilidade por meio de um jogo equitativo.

Neste estudo utilizam o marco teórico de Ball e colaboradores (2008). Para avaliar o *conhecimento comum do conteúdo*, foram analisadas as soluções dadas pelos docentes para dois problemas abertos. Também foram estudados dois componentes do conhecimento didático, considerando o trabalho dos mestres em pequenos grupos: para avaliar o *conhecimento especializado do conteúdo*, foi pedido aos participantes que identificassem os conteúdos matemáticos na tarefa, enquanto que para determinar o *conhecimento do conteúdo e dos estudantes*, foi solicitado que distinguissem entre um grupo de respostas na tarefa feita por alunos de educação primária, quais eram corretas e incorretas.

Um primeiro aporte do trabalho desenvolvido pelos autores mostra que a maior parte dos professores participantes revela um conhecimento comum suficiente do conteúdo em relação ao jogo equitativo. Nesse estudo 78,4% dos participantes classificam corretamente o jogo descrito no item 1 e 77,2% é capaz de encontrar o valor do prêmio necessário para transformar em equitativo o jogo descrito no item 2, aplicando corretamente a ideia de esperança matemática da quantidade a ganhar. Segundo os autores, a dificuldade na atividade em que muitos professores falharam se deve não à falta de compreensão da ideia de jogo equitativo, senão a falta de raciocínio combinatório (ao considerar, por exemplo, idênticas às combinações 56 e 65). Também as estratégias utilizadas para comparar probabilidades, com o objetivo de decidir se o jogo é ou não equitativo, foram em sua maioria

corretas, pois predominam as estratégias de correspondência ou multiplicativas. Há, no entanto, erros, respostas incorretas ou em brancos, em ambos os itens. No item 1, aproximadamente 20% dos futuros professores chegam a conclusão que o jogo não é equitativo ao aplicar estratégias incorretas na comparação de probabilidades, próprias de crianças nas etapas pré-operacional e concreta segundo Piaget e Inhelder (1951) e que seriam improcedentes nesses problemas. Em outros casos se obtém a conclusão de que o jogo é equitativo baseando-se em aspectos irrelevantes da atividade.

No item dois, alguns futuros professores, mesmo calculando corretamente as probabilidades, não aplicam a ideia de esperança matemática, já que calculam o valor do prêmio em função do número de casos possíveis, e não da probabilidade de ganhar (7,2%); compararam as probabilidades de ganhar dos jogadores sem chegar a estabelecer o prêmio (4,8%); ou conferem o mesmo prêmio, ou um valor não relacionado com a probabilidade dos jogadores (6%).

Para os autores, Ortiz, Batanero e Contreras (2012), um aporte original desse estudo é mostrar que o conhecimento especializado do conteúdo com respeito à ideia de jogo equitativo dos participantes é claramente insuficiente. Embora, ao pedir que os futuros professores identifiquem os conteúdos matemáticos nas atividades propostas, muitos grupos foram capazes de reconhecer nas atividades as ideias de probabilidade e o uso da regra de Laplace, somente uma terceira parte dos participantes identificou a comparação de frações. Menos professores, ainda, identificaram a proporcionalidade, aleatoriedade, espaço amostral, comparação de probabilidades, jogo equitativo, esperança matemática ou proporcionalidade inversa implícita nas atividades.

Para analisar o conhecimento do conteúdo e dos estudantes, se pediu aos futuros professores, trabalhando em grupos, que avaliassem as respostas dadas por alguns alunos de educação primária aos itens propostos. Ortiz, Batanero e Contreras (2012) discorrem que os futuros professores desse estudo apresentam alguns conhecimentos do conteúdo e estudantes, ao

reconhecer as respostas errôneas, porém a habilidade para explicar os erros dos estudantes é insuficiente.

No geral, estes pesquisadores concluem e corroboram o que já viemos discutindo ao longo desse texto, de que é fundamental desenvolver os conhecimentos didáticos desses futuros docentes, além dos conhecimentos matemáticos de probabilidade.

Contreras, Batanero, Díaz e Cañadas (2013) apresentaram um estudo com a finalidade de avaliar a competência de futuros professores do ensino secundário (alunos de 12 a 15 anos) e do bacharelado (alunos de 16 e 17 anos) na Espanha para definir, de forma adequada, a probabilidade simples e condicional. Foram investigados 196 professores nos quais 95 eram estudantes do último semestre do curso de licenciatura em matemática de diversas universidades da Espanha e 101 estudantes do *Máster de Secundária*; na Espanha há dois tipos de professores de matemática segundo sua formação prévia, ou são licenciados em matemática ou egressos do “*Máster de Secundaria*” (CONTRERAS, BATANERO, DÍAZ E CAÑADAS, 2013, p.2).

Os resultados que os pesquisadores obtiveram sugerem que apresentar uma definição correta não foi uma tarefa fácil para os participantes da pesquisa, os quais mostraram um baixo conhecimento comum de probabilidade. Apenas 15,9% dos futuros professores deram uma definição correta formal e precisa sobre as probabilidades em estudo; este índice é menor do que as definições errôneas que foram de 18,3%.

Nos estudos de doutoramento de Junqueira (2013) com o propósito de compreender as concepções dos professores sobre os conceitos básicos de probabilidade por meio de um processo formativo baseado no *design experiment* envolveu professores dos anos finais do Ensino Fundamental e professores do Ensino Médio da rede pública do Estado de São Paulo. Como em nossa pesquisa, os professores da pesquisa de Junqueira (2013) também participavam de outra turma do Programa Observatório da Educação da Uniban/Capes.

Ao longo do processo de formação vivenciado com os professores, a pesquisa detectou crenças e concepções dos professores-cursistas sobre probabilidade. Um aspecto observado foi que alguns professores demonstraram trabalhar as noções de probabilidade em suas aulas vinculadas quase que exclusivamente à análise combinatória, demonstrando dificuldades em pensar outras formas de trabalhar com as noções probabilísticas, por exemplo, com o significado frequentista de probabilidade. A pesquisadora aponta a dificuldade dos professores no desenvolvimento do raciocínio probabilístico. Outro achado foi o de que os professores não conhecem bem as orientações curriculares sobre esse tema. Também, durante o processo de formação, algumas resistências foram detectadas em relação ao uso da tecnologia em sala de aula.

Em relação a essa última referência, os estudos de Theis e Savard (2010) corroboram essa posição: os professores refletem a não familiaridade com o uso da tecnologia, não percebendo o potencial desse recurso para aprendizagem.

Ainda no âmbito das pesquisas desenvolvidas no Observatório da Educação, apresentamos outra investigação que tem estreita relação com a nossa . Vale ressaltar que nessa pesquisa foi realizada com outro grupo de professores, porém ambas fazem parte do mesmo projeto em que desenvolvemos este estudo de doutoramento. Pietropaolo, Campos, Carvalho e Teixeira (2013) apresentam uma análise dos resultados de instrumento diagnóstico com o objetivo de identificar as concepções e práticas de um dos grupos de professores participantes a respeito do processo de ensino e aprendizagem de noções relativas à probabilidade nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental.

Os autores tomaram como base as categorias de conhecimentos necessários ao professor de Matemática estabelecidas por Ball et al. (2008) também utilizados em outros estudos aqui discutidos, a saber: conhecimento do conteúdo (comum/especializado); conhecimento do conteúdo e dos estudantes e finalmente, conhecimento do conteúdo e do ensino. Para a análise das respostas dos professores aos questionários, além de categorias

de Conhecimento do Conteúdo Específico e do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo Pedagógico de Ball et al. (2008), foi considerada também a noção de imagem conceitual, definida por Tall e Vinner (1981).

Os pesquisadores aplicaram os questionários de entrada a um grupo de 27 professores que ensinam Matemática nos anos iniciais, sendo 24 mulheres e 3 homens. A média de idade desses professores era de 31,2 anos, variando de 23 a 52 anos. A coleta dos dados analisados teve o propósito de delinear a imagem conceitual constituída pelos professores em relação à probabilidade – conhecimento do conteúdo específico (comum e especializado) – e em relação aos conhecimentos pedagógicos concernentes a esse mesmo tema. Desta forma, foi aplicado um questionário com 13 questões, considerando que a imagem conceitual seria constituída, por exemplo, por: identificação de fenômenos aleatórios; compreensão das diferentes definições de probabilidade e respectivas limitações; significado e quantificação de espaços amostrais; quantificação de probabilidades; relações entre variáveis em tabelas de dupla entrada; conexões com outros conteúdos; estratégias diferenciadas de abordagem; dificuldades inerentes ao processo de construção desse conhecimento.

Pietropaolo, Campos, Carvalho e Teixeira (2013) analisando os resultados dessa coleta de dados sob a perspectiva de Tall e Vinner (1981), interpretaram que a imagem conceitual construída pela maioria dos participantes de nosso estudo, relativa ao ensino de probabilidade nos anos iniciais, era predominantemente constituída por um campo de problemas para aplicação de razão como um dos significados da fração. Ou seja, a probabilidade de um evento seria sempre traduzida por uma razão entre dois números inteiros positivos. Também não faziam parte da imagem conceitual desses professores outros pontos de vista sobre a probabilidade, decorrentes das definições algébrica e frequentista, fato que restringiu o leque de problemas propostos. Assim, o estudo da probabilidade ofereceria para esses professores poucas conexões com outros conteúdos matemáticos e seria um contexto pouco rico para desenvolver habilidades cognitivas importantes.

A noção de espaço amostral, conceito cuja discussão pode favorecer a compreensão do cálculo de probabilidades, não constava do repertório de conhecimentos do conteúdo específico acumulados pelos professores, indicando lacunas também nos conhecimentos pedagógicos necessários à apresentação desse conteúdo aos alunos. Alguns dos docentes sequer tinham domínio do princípio multiplicativo. Outro ponto que merece destaque foi a não utilização pela grande maioria dos professores de procedimentos sistematizados, como o diagrama de árvore, para a nomeação e contagem dos agrupamentos de um espaço amostral.

Em síntese, os autores afirmam, levando-se em conta as categorias de Ball et al. (2008), que os sujeitos participantes da pesquisa ainda não tinham os conhecimentos necessários para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais. Destacam ainda que tais resultados colocam em destaque a necessidade de promover, nos cursos de formação inicial e/ou continuada, discussões sobre a relevância de noções concernentes ao tema probabilidade, sobre as dificuldades vivenciadas pelos estudantes quando iniciam a construção desse conhecimento e sobre a importância de seu estudo nas diversas etapas escolares.

Entre os resultados do estudo que ora acabamos de apresentar, os autores mencionam sobre as dificuldades de professores com alguns conteúdos como, por exemplo, com o domínio do princípio multiplicativo e as dificuldades com o diagrama de árvore.

Em uma pesquisa realizada por Rocha, Lima e Borba (2015) também sobre conhecimentos de professores, neste caso para o ensino de combinatória, esses pesquisadores também apontam dificuldades dos professores com esses conteúdos, particularmente com o diagrama da árvore.

A investigação de Vásquez (2014) em sua tese de doutorado utiliza a teoria do Conhecimento Didático-Matemático para o ensino de probabilidade com professores atuantes na educação primária. Destacamos essa investigação por se aproximar do estudo por nós desenvolvido aqui no Brasil, no entanto, com professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.

O propósito dessa investigação de Vásquez foi avaliar o conhecimento didático-matemático para o ensino de probabilidade que professores de educação primária em atividade possuem. No referido estudo foi construído um instrumento de análise denominado Questionário CDM-Probabilidade. Para isto, a pesquisadora realizou um estudo histórico-epistemológico sobre o objeto matemática probabilidade e seus significados.

Este questionário foi aplicado a uma amostra de 93 professores chilenos de educação primária em exercício. Os resultados obtidos mostram um conhecimento didático-matemático para ensinar probabilidade muito insuficiente em todos seus componentes (conhecimento comum, avançado e especializado), pois os participantes não conseguiram superar 23% de respostas corretas em nenhum dos distintos aspectos avaliados. Com base nesses resultados, foi possível afirmar que este grupo de professores não conta com um nível de conhecimentos adequados que os permitam desempenhar de maneira exitosa o ensino de probabilidade na educação primária.

Esclarecemos que nesta seção é nosso propósito apresentar estudos e pesquisas que tivemos acesso e que de alguma forma trazem fundamentos para a nossa intervenção formativa com os professores. Os resultados de pesquisa aqui apresentados fortalecem a importância de novos estudos e pesquisas com o professor, particularmente os professores que ensinam matemática nos anos finais do Ensino Fundamental.

### **2.3 Estudo Preliminar – dimensão instrucional**

A dimensão instrucional tem a ver com as facetas interacional e mediacional. Dessa forma, está orientada para analisar os padrões de interação entre professor e estudantes e sua sequência de ensino, destinada a construção e negociação de significados. Descrevem-se ainda os recursos técnicos previstos e/ou utilizados e se valida o uso do tempo destinado a distintas ações e processos, assim como os agentes participantes e seu papel.

Incluímos algumas investigações que nos possibilitem uma discussão acerca das mediações docentes, dos recursos manipulativos e tecnológicos para contribuir com a aprendizagem em probabilidade; tanto de pesquisas com alunos como com professores.

Sobre questões relacionadas a com comunicação dos professores Marocci (2011) em sua dissertação – O movimento das significações probabilísticas proporcionado pela resolução de problemas e pela prática colaborativa numa turma de 1º ano do Ensino Médio – investigou as contribuições que um ambiente de cooperação investigativa traz para a elaboração conceitual probabilística dos alunos.

A pesquisadora em sua metodologia desenvolveu uma sequência de tarefas sobre probabilidade, baseada na resolução de problemas, para os quais os alunos deveriam apresentar soluções e, em seguida, discuti-las com seus pares e com a professora. Essas discussões foram o foco da observação no processo de pesquisa. Na primeira parte, o ponto central foi o movimento das significações apresentadas pelos alunos; e, na segunda, as mediações docentes tomaram lugar como foco na discussão. Embora esses dois aspectos estejam totalmente intrincados, a autora decidiu apresentá-los dessa maneira para facilitar a compreensão pelo leitor.

Marocci (2011) observou que o estudo da probabilidade por meio da resolução de problemas ajudou os alunos a avançarem em seu processo de elaboração conceitual, mesmo que em diferentes níveis. Também se constatou que, quando é dada aos alunos a oportunidade de se expressar por meio de diversos instrumentos, eles são capazes de fazer importantes inferências sobre o ambiente de aprendizagem no qual estão inseridos e sobre seu próprio aprendizado. A rotatividade de interlocutores proporcionada pelo uso de várias formas de comunicação pode ajudar os alunos a avançarem, tanto no que diz respeito à formação do pensamento matemático, quanto ao desenvolvimento humano. Este estudo (MAROCCI, 2011) nos mostra a importância de estratégias instrucionais para a construção do conhecimento probabilístico com os alunos.

Consideremos que os recursos e estratégias que possibilitem práticas docentes eficazes são diversos, dentre esses, citamos os recursos tecnológicos.

Theis e Savard (2010) investigaram os conceitos probabilísticos e a preparação de aulas de probabilidade por professores do Ensino Secundário utilizando um software que simulava jogos de sorte-azar. Vale salientar que o software não exigia habilidades para jogar. Este software interativo que faz simulações de jogos de sorte-azar foi desenvolvido por um grupo de professores-pesquisadores de matemática e especialistas em tecnologia educativa no Canadá. Estas ferramentas foram apresentadas para um grupo de professores do ensino básico por meio de oficinas. Após a experimentação com o software foram realizadas entrevistas semi-estruturadas com esse grupo participante.

Tal estudo tanto tem haver com os conhecimentos dos professores sobre probabilidade numa perspectiva da dimensão cognitiva-afetiva bem como tem haver com a dimensão instrucional, uma vez que investiga os professores face a um meio mediacional que é o software.

Os resultados apontaram uma valorização do rico potencial educativo das ferramentas interativas do software e os cenários pedagógicos que acompanham essa proposta. No entanto, os pesquisadores consideram que os professores não estavam suficientemente preparados para ensinar conceitos de probabilidade e não aproveitaram o uso do software para discutir os diferentes conceitos. Afirmam que os professores careciam de desenvolvimento profissional sobre como ensinar probabilidade e a necessidade de sequências tecno-pedagógicas e didáticas. Theis e Savard (2010) ainda julgam necessário aprofundar as discussões, em cursos de formação de professores, sobre o ensino desses conceitos, inclusive debatendo os erros cometidos pelos seus alunos.

Uma investigação que acreditamos ser conveniente destacar por utilizar uma proposta que se articula com esta faceta instrucional foram os estudos de Ferreira (2011) com sua dissertação de mestrado. Apesar de envolver estudantes do 3º ano do Ensino Médio este estudo está fortemente marcado

por uma discussão acerca dos recursos mediacionais utilizados na proposta didática para o ensino de probabilidade, particularmente o uso de um software.

Ferreira (2011) teve como objetivo investigar a aprendizagem de conceitos probabilísticos de alunos do 3º ano do Ensino Médio por meio da aplicação do experimento de ensino “Passeios Aleatórios da Carlinha” nos ambientes: Papel & Lápis e Computacional. Os resultados dessa investigação apontam avanços tanto no que se refere ao conceito de probabilidade como no nível de autonomia dos alunos na construção do conhecimento.

O recurso computacional utilizado proporcionou reflexões diferentes das usualmente desenvolvidas no ambiente Papel & Lápis, uma vez que possibilitou o trabalho com um número maior de simulações, bem como a discussão do conceito de não-equiprobabilidade.

O autor discorre que apesar das dificuldades pontuais apresentadas durante o experimento, a possibilidade de confronto entre a probabilidade frequentista e a teórica, potencializada pelo experimento, bem como pelo uso do software R, proporcionou aos alunos novas reflexões em torno dos conceitos probabilísticos. Aponta ainda que esses resultados parecem indicar que a utilização desse tipo de experimento pode se constituir em um importante recurso pedagógico para os professores trabalharem conceitos probabilísticos na educação básica, e, por conseguinte, possam contribuir para o letramento probabilístico dos alunos.

O autor trabalhou com o experimento de ensino denominado “Passeios Aleatórios da Carlinha”, experimento esse já explorado por outros pesquisadores no Brasil (SILVA, CAZORLA E KATOKA, 2015), em perspectivas diferentes e com públicos diferentes. Um ponto importante a ser destacado pelo autor, é que o trabalho, com um experimento que já foi explorado em perspectivas diferentes, oferece novas contribuições para que o professor, independente do nível em que atua, tenha a percepção que este experimento pode ser adaptado e aplicado à realidade na qual se encontra, o que representa uma das preocupações nesse estudo desde o início do trabalho.

Ferreira (2011) ressalta outros dois pontos fundamentais propiciados pelo recurso tecnológico (software R), primeiramente, no ato da simulação dos 12.000 experimentos, potencializando assim a visualização do fenômeno de convergência. E, posteriormente, quando ofereceu a possibilidade dos alunos trabalharem com uma probabilidade diferente de 0,5 da ocorrência da face cara de uma moeda, proporcionaram, assim, a oportunidade de reflexões que foram além da ideia de equiprobabilidade que, logo no início, já se mostrou bastante comum aos alunos.

Outro tipo de recurso instrucional não menos importante é o livro didático. Existem diversos estudos sobre como o conceito de probabilidade tem sido abordado pelos livros didáticos.

Diaz-Levicoy e Roa (2014) analisaram três coleções didáticas de 8º primária no Chile (estudantes de 13 a 14 anos) e encontraram diferenças na estrutura dos livros, entretanto predominou os exercícios rotineiros, de caráter puramente matemático. Ortiz (2002) realizou um estudo sobre os exemplos e exercícios de probabilidade propostos em uma amostra de livros didáticos espanhóis para alunos de 14 e 15 anos publicados no período de 1975 a 1991 revelando uma baixa frequência de atividades envolvendo as noções de experimento aleatório, espaço amostral, probabilidade condicional, dependência e independência de eventos. E ainda, uma limitação ao atribuir uma probabilidade a sucessos simples e compostos a regra de Laplace. Carranza e Kuzniak (2009) realizaram um estudo sobre os enfoques frequentista e clássico em exercícios de probabilidade em dois livros didáticos franceses voltados a estudantes de 16 e 17 anos. Destacam como resultados que os livros apresentam exercícios que focam mais no aspecto do cálculo do que em interpretações de probabilidade.

Destacamos o trabalho de Silva (2015) no qual buscou compreender a abordagem dos significados de probabilidade em livros didáticos destinados aos anos finais do Ensino Fundamental no Brasil. A pesquisa se deu em três coleções (12 livros) didáticas de matemática destinada aos anos finais do Ensino Fundamental selecionadas entre as 10 coleções aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD – 2014) no Brasil. Os significados

de probabilidade utilizados pelo autor para a pesquisa foram: intuitivo, clássico, geométrico, frequentista, subjetivo, formal; significados estes já discutidos por nós em seções anteriores.

Os dados desta investigação revelaram que as coleções analisadas não seguem uma tendência no que diz respeito à distribuição das atividades por volumes; apenas uma coleção, por exemplo, apresenta atividades de probabilidade nos quatro volumes (6º ao 9º ano). Em Coutinho (2004) a autora já apresenta um resultado similar com livros didáticos destinados ao Ensino Fundamental, em que pode constatar que nem todas as coleções apresentam o conteúdo “Probabilidades” em todos os volumes. Após, uma década do referido estudo pouca coisa se modificou. A não aparição deste conceito em alguns anos do Ensino Fundamental pode reverberar na não abordagem na sala de aula em todos os anos ou deixar a responsabilidade apenas com o professor.

Concernente aos significados, Silva (2015) conclui que as coleções analisadas apresentam unicamente o significado clássico em 82,1% do total das 179 atividades mapeadas. Os demais significados são pouco explorados. O significado frequentista, por exemplo, é pouco abordado – apenas 11 do total de 179 atividades mapeadas; acreditamos que este significado deveria ser mais bem enfatizado uma vez que as coleções estão destinadas à etapa de escolarização do Ensino Fundamental. Em suma, Silva (2015) considera que as coleções analisadas não contemplam satisfatoriamente o trabalho com o conceito de probabilidade por meio dos diversos significados, e ainda, não instigam um trabalho com a probabilidade experimental preconizado pelas orientações curriculares e pela literatura atual.

Ainda, nos estudo de Coutinho (2004), não se encontram nos livros destinados ao Ensino Fundamental, na época 5ª à 8ª série, sugestões para o trabalho com enfoque experimental, que pode contribuir para o desenvolvimento do ponto de vista frequentista do conceito de probabilidade. A autora também não encontra referências à probabilidade geométrica compreendida como razão entre áreas.

Para concluir esta reflexão sobre os estudos da probabilidade em livros didáticos, temos a pesquisa realizada por Viali e Oliveira (2009) com uma análise de conteúdos sobre probabilidade em livros didáticos do Ensino Médio. Os autores procederam a uma comparação entre cinco livros didáticos selecionados com relação aos seguintes conceitos probabilísticos: Experimento ou experiência aleatória; Espaço amostral e eventos; Conceitos de probabilidade: clássico, frequencial e axiomático; Probabilidade condicionada com noções de dependência e independência; Exemplos e Exercícios.

A constatação dos autores foi de que o conteúdo é normalmente inserido nos livros no último capítulo deixando perceber que foi agregado a textos já prontos, pois não existe relação com os conteúdos anteriores, nem mesmo os de estatística que geralmente acompanham os de probabilidade. Os livros analisados apresentam ênfase apenas na definição clássica da probabilidade, sem comentar sobre os conceitos frequentista e axiomático.

Os autores de livro são poucos criativos nos exemplos e exercícios onde adotam uma abordagem com ênfase apenas aos jogos de azar, moedas e dados, desconsiderando diversas situações que fazem relação com as áreas, inclusive a estatística. Talvez a constatação mais preocupante, segundo Viali e Oliveira (2009) foi a de que nenhum dos textos faz uso ou encoraja o professor a usar recursos tecnológicos, estando assim em desacordo com a modernidade e o preconizado pela legislação.

Rodrigues e Martins (2016) preocupam-se com o fato de livros didáticos recentemente aprovados (triênio 2015-2017) não trazerem em seu conteúdo uma abordagem significativa e coerente para o tema Probabilidade, uma vez que os mesmos apresentam quase que exclusivamente o tema simplesmente por sua abordagem Clássica. Pelo observado nas coleções analisadas a abordagem se deu quase que exclusivamente pelo viés clássico o que, segundo as pesquisas, não propicia ao aluno a construção de forma significativa do conceito de Probabilidade.

Ainda sobre livro didático, Martins e Rodrigues (2016) desenvolveram um estudo com objetivo principal de analisar e discutir como o tema Probabilidade é tratado nas seis coleções aprovadas para o Ensino Médio no

PNLD do triênio 2015-2017. Os autores apontaram que o conteúdo Probabilidade não é abordado em nenhuma das coleções analisadas na 1ª série do Ensino Médio e que, com exceção de duas dessas coleções que fazem a abordagem nos volumes 2 e 3, todas as demais somente o apresentam no segundo volume, ou seja, o conteúdo de Probabilidade para o Ensino Médio fica restrito a um único ano de todo o ciclo. Este fato caminha em direção oposta ao que as pesquisas apontam no que diz respeito à continuidade dos conceitos durante o Ensino Básico.

Martins e Rodrigues observaram também que, em média, as coleções dedicam apenas um pouco mais do que 3% de suas páginas para a abordagem do conteúdo Probabilidade, durante todo o Ensino Médio. A falta de exploração do tema nas coleções analisadas reflete o quanto este é deixado em segundo plano, o que corrobora com as pesquisas realizadas nos indicando que o tema Probabilidade não é trabalhado em sua plenitude no Ensino Básico e que o tratamento dado fica aquém daquilo que se espera e se julga ideal.

Entendemos que, uma vez que os professores que atuam no Ensino Básico têm no livro didático a fonte dos conteúdos programáticos a serem trabalhados no decorrer do ano letivo e também que para uma parte considerável desses professores o livro didático funciona como material para a formação continuada, parece-nos um tanto quanto preocupante o fato desses livros didáticos não trazerem em seu conteúdo uma abordagem significativa e coerente para o tema Probabilidade, uma vez que os mesmos apresentam quase que exclusivamente o tema simplesmente por sua abordagem Clássica. Pelo observado nas coleções analisadas a abordagem se deu quase que exclusivamente pelo viés clássico o que, segundo as pesquisas, não propicia ao aluno a construção de forma significativa do conceito de Probabilidade.

No que remete à discussão instrucional, destacamos anteriormente estudos que nos revelam por um lado processos de mediação que possibilitam um melhor trabalho docente, e por outro lado, uma reflexão sobre recursos que devem ser levados em consideração nos processos de ensino e aprendizagem com a probabilidade.

### **3. UM OLHAR PARA OS DADOS DA FASE DIAGNÓSTICA NA PERSPECTIVA DO CONHECIMENTO DIDÁTICO-MATEMÁTICO (CDM)**

---

Neste capítulo apresentamos e discutimos o instrumento diagnóstico (questionário) orientado para analisar conhecimentos iniciais sobre noções probabilísticas elementares de professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental (estudantes de 11 a 14 anos). O referido questionário foi aplicado aos professores participantes de uma turma do programa de formação Observatório da Educação no Brasil que integra esta pesquisa de doutoramento com objetivos de compreender o conhecimento probabilístico de professores e desenvolver o conhecimento didático-matemático dos professores sobre noções probabilísticas elementares de matemática por meio do referido programa de formação.

Como nosso marco teórico é o Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) tomamos para o desenho deste diagnóstico a teoria do Conhecimento Didático-Matemático do professor de matemática (CDM) subjacente ao referido marco teórico. Dessa forma, o questionário está orientado para diagnosticar as ideias iniciais dos professores envolvendo o conhecimento comum, avançando e especializado sobre probabilidade.

O referido diagnóstico foi aplicado em um encontro que antecedeu a fase de desenho e de implementação da formação constituindo-se como parte do nosso estudo preliminar. O olhar para os dados do diagnóstico constituíram o ponta pé inicial para o desenho que apresentaremos no capítulo seguinte. Os professores responderam ao questionário individualmente com um tempo concedido de duas horas. Compreendemos que essa fase possibilita ao professor uma reflexão a respeito da sua própria prática docente.

Para este instrumento diagnóstico inicial construímos um questionário com oito itens. Optamos por itens que envolvem elementos essenciais do conhecimento probabilístico e que estariam articulados com as atividades formativas a serem propostas aos professores. Incluímos também itens que envolvem ideias sobre o currículo, sobre as noções que sustentam o conceito de probabilidade como aleatoriedade e espaço amostral e sobre a

quantificação de probabilidades, além de um item envolvendo a noção de risco probabilístico.

No que diz respeito aos oito itens do questionário, destinamos seis itens para diagnosticar o conhecimento especializado do conteúdo – CEC (itens do 1º ao 6º) e, dois itens orientados para o conhecimento comum – CCC e avançado do conteúdo – CAC (itens 7º e 8º). Esses itens serão apresentados a seguir concomitantemente à discussão dos resultados.

Para análise das respostas dos professores referentes aos itens do conhecimento especializado do conteúdo não há uma intenção de quantificar ou classificar exatamente as referidas respostas. Nossa finalidade era indicar as ideias que os professores apresentavam e os conhecimentos mobilizados (ou não) que, com nosso olhar e interpretação, consideramos como necessários, naquele momento de análise e para futura formação. Com os itens do conhecimento comum e avançado é possível identificar acertos ou erros, entretanto o nosso olhar foi além dessa quantificação numa perspectiva qualitativa de análise dos dados.

### **3.1 Análise dos Itens do Conhecimento Especializado do Conteúdo**

Nesta seção vamos apresentar e discutir os itens que envolvem o *conhecimento especializado do conteúdo*; esse é um tipo de conhecimento específico do professor e que levam em consideração as facetas discutidas pelo EOS.

O objetivo do primeiro item – Em sua opinião, quais seriam os motivos da inclusão da probabilidade nos currículos do Ensino Fundamental e Médio? – foi diagnosticar as concepções iniciais dos professores sobre a inclusão da probabilidade no currículo da Educação Básica. Entendemos por concepção a posição dos professores perante o questionamento posto sobre currículo e como compreendem a inclusão do conteúdo de probabilidade.

Percebemos que alguns professores apontam a importância da inclusão como aplicação no cotidiano e/ou presença no cotidiano. Para Gal (2004) um indivíduo “letrado” em probabilidade deve ser capaz de ler e interpretar

informações probabilísticas em seu dia-a-dia, desenvolvendo um conjunto de habilidades básicas que o torne capaz de lidar com uma série de situações reais que envolva uma interpretação probabilística, bem como tomar boas decisões em situações de incerteza. Na fala a seguir o professor P3 discorre claramente como uma ampliação para discussão de problemas contextualizados e sobre vários temas do cotidiano.

P3: Os motivos da inclusão da probabilidade nos currículos do ensino fundamental e médio seria uma ampliação no desenvolvimento dos problemas contextualizado, as discussões sobre vários temas do cotidiano, etc.

O professor P27 apresenta o motivo da inclusão da probabilidade no currículo para que seja utilizada no Ensino Médio como uma ferramenta de trabalho. Gal (2004) esclarece que a probabilidade é um tema útil na vida de todas as pessoas, além de constituir um saber instrumental em outras disciplinas.

P27: O aluno tem que ter o contato com a probabilidade no Ens. Fundamental para que no Ensino médio isso se torne uma ferramenta de trabalho.

Um dos professores – P13 – discorre que:

P13: Acredito que a probabilidade é bem vista, pois estimula o desenvolvimento de certas habilidades, como investigação, senso crítico, autonomia, entre outros.

A concepção deste professor é ancorada por diversos pesquisadores (GAL, 2005; GODINO, BATANERO E CAÑIZARES, 1996) ao falar sobre habilidades que podem ser potencializadas ao se ter o conhecimento de probabilidade; porém poucos professores deste grupo fazem essa relação. Outros professores, em consenso, justificam por fazer parte de uma preparação para o mundo profissional do estudante. A discussão que o referido item propicia está imersa no conhecimento do conteúdo e do currículo que o professor deve também dominar. Um professor – P12 – chama a atenção para um fato comum relacionado ao conceito de probabilidade que é deixar a

abordagem para o final do ano letivo e que acarreta em não se ter tempo de ensiná-lo.

P12: Infelizmente os assuntos que envolvem probabilidade estão no final de cada ano, isso é sempre deixado de lado.

No entanto, como sugerido por Batanero e Díaz (2007) as mudanças necessárias ao ensino e aprendizagem de probabilidade não estão restritas somente em que momento deve ser iniciado o estudo desse conceito no Ensino Básico, mas também e, sobretudo, envolve a reflexão sobre abordagens e estratégias na sala de aula.

Os professores precisam ser preparados para um trabalho significativo nas salas de aula com a probabilidade. Campos e Pietropaolo (2013) discorrem que,

Em relação ao Brasil, muitos docentes não estão sequer convencidos de que a probabilidade seja importante para ser desenvolvida no Ensino Médio; quanto ao Fundamental, têm uma posição ainda mais restritiva: consideram a inclusão desse tema totalmente inadequada e desnecessária. (CAMPOS E PIETROPALO, 2013, p.58).

No item 2 indagamos: A probabilidade tem aplicações práticas? Quais? A ideia é que pudéssemos diagnosticar as ideias que professores apresentam sobre as aplicações práticas do conhecimento probabilístico. Encontramos respostas que envolvem jogos de sorte-azar e/ou situações de ganhar-perder; áreas profissionais tais como na saúde, finanças, administração ou particularmente citando as áreas de seguro, meteorologia, etc. Citam também aplicações em situações de tomada de decisão ou onde necessitamos fazer escolhas; em menor número são citados ocorrências de fatos do cotidiano.

O contexto mais apontado como aplicação da probabilidade pelos professores foram as situações de jogos de sorte-azar ou de ganhar-perder e situações em que é preciso fazer escolhas no cotidiano. Um professor falou na distribuição de elementos e outro cita o contexto matemático das frações. Destacamos as seguintes falas:

P8: Sim, chances de ganhar ou perder em um jogo.

P1: Sim, sempre temos opções e escolhas desde o momento que levantamos e escolhemos uma roupa, até quando em sala de aula os caminhos da aula.

P14: Sim. Sempre que pensamos em fazer distribuição de algum elemento e de quantas maneiras queremos distribuir.

Para investigar os conhecimentos dos professores sobre o conceito de probabilidade propusemos os itens – 3, 4 e 5 - a seguir:

3. Explique o que é um fenômeno aleatório?
4. Como você definiria probabilidade?
5. O que é espaço amostral? Dê exemplo, Não é necessária uma definição formal.

Em relação a estes itens Zazkis e Leikin (2008) assinalam que a capacidade de dar uma definição em suas próprias palavras mostra a compreensão de um conceito por parte dos professores e pode indicar suas preferências pedagógicas.

Com relação ao item 3, os dados do questionário revelaram um bom posicionamento dos professores em explicar essa noção utilizando-se de exemplos envolvendo a aleatoriedade por meio de jogos, dados e/ou urnas. A seguir a explicação de alguns professores:

P27: Por exemplo, uma caixa com 3 bolinhas brancas e 2 azuis, qual a probabilidade de sair uma bolinha azul?

P38: É aquele que não podemos interferir, por exemplo, se um time está invicto a cinco jogos, isto não me garante que vai ganhar sempre ou se jogar um dado (honesto) não tenho a certeza que vai sair sempre o número 5.

P29: Quando é lançado um dado sem destino certo.

P17: Por exemplo, jogar um dado ou uma moeda K ou C para se obter o resultado possível de um dado evento.

P15: É quando em fenômeno irá acontecer sem uma intervenção direta, ou melhor, quando você joga uma moeda a possibilidade de cair em pé e não dar cara e coroa seria aleatoriamente.

P26: Aleatório seria o fato de pegar uma moeda, exemplo cara-coroa.

No entanto, não há um consenso quanto à definição de aleatoriedade. Temos respostas relacionando com a ideia de acaso, outros explicando com

base nas ideias de regularidade, regra, ordem e até sequências; porém essas respostas não se contradizem.

P7: É um fenômeno ao acaso, tanto para sim, quanto para não.

P35: É a possibilidade de algo ocorrer sem previsão, ao acaso.

P22: Pode acontecer sem seguir uma ordem, ou regra.

P20: Algo que ocorre de uma maneira sem regularidade ou sequência.

P33: É um fenômeno que não tem uma razão uma sequência que podemos calcular o prever.

Destacamos que, as falas de um número pequeno de professores, apresentaram distanciamento da noção de aleatoriedade na sua explicação e que são difíceis de categorizar. São pensamentos do tipo:

P37: Não eliminar nenhuma hipótese dentro de um conjunto.

P13: É aquele que possui alguma forma de conclusão.

P2: Algo acontece sem planejamento.

P11: É aquilo que não é comprovado.

O que percebemos é uma grande mistura na utilização dos termos; existe certa confusão na compreensão do que é um experimento, um fenômeno, um evento e as possibilidades envolvidas.

Entretanto, encontramos respostas que nos levam a uma melhor compreensão do fenômeno aleatório, tais como:

P39: É aquele que possui algumas formas de conclusão, onde podemos prevê-las, porém sem saber qual será a exata.

P24: É um evento em que o resultado não se sabe, mas podemos determinar quais são as possibilidades de resultado.

Já no item 4 com as respostas à pergunta “Como você definiria probabilidade?” boa parte dos professores explicaram relacionando a probabilidade com chance de ocorrência de um evento.

P33: Chance de algo acontecer.

P23: Estudo das chances possíveis ou impossíveis de um evento aleatório.

P38: “Estudo das chances.”

P25: A chance de um evento aleatório ocorrer ou não.

Encontramos ainda respostas de uma forma mais generalista situando a probabilidade como parte da matemática ou como uma ciência, a saber:

P4: parte da matemática que estuda fenômenos aleatórios.

P21: É o tópico da matemática que desmitifica sorte ou azar.

P32: É uma parte da ciência que estuda os eventos e suas consequências diante das variáveis estudadas.

P37: É o ramo da matemática que estuda a chance de um determinado evento ocorrer.

Há também os professores que definiram por meio da explicação da abordagem clássica da probabilidade (regra de Laplace) como podemos observar nas falas a seguir:

P6: É a razão entre número de casos favoráveis – o que eu quero que ocorra – pelo total de possibilidades.

P11: É dado um conjunto universo que é o espaço amostral, ou seja, todas as possibilidades de ocorrer tal evento. Logo é dado um subconjunto e a partir a probabilidade. [Cita a fórmula].

Não estávamos exigindo uma explicação formal do conceito, de qualquer modo, algumas respostas revelaram dificuldades em definir probabilidade. Convém ressaltar que esses resultados são similares aos apresentados nos estudos de Pietropaolo, Silva, Campos e Carvalho (2015) também com professores dos anos finais e Campos e Pietropaolo (2013) com professores dos anos iniciais. Um professor apresenta erroneamente a definição ao colocar

que probabilidade seria “*a razão do espaço amostral com o número total de dados*”.

Concernente ao item 5 sobre espaço amostral os professores apresentaram dificuldades em responder este item, dois professores inclusive deixaram esta pergunta sem resposta. O Professor P12 e o Professor P15 confunde espaço amostral com amostra.

P12: Espaço amostral é a parte de uma população estatística em estudo. População: eleitores. Grupo de eleitores da Região Norte.

P15: O nome já diz amostral “amostra” é onde se trabalha com amostras de algo para uma análise, mais exata ou possibilidades de acontecer.

E ainda, os exemplos que os professores limitam os exemplos a dados, moedas e baralhos. Há uma dificuldade em perceber a probabilidade em outros contextos. Existe uma concordância no sentido de explicar espaço amostral envolvendo a noção de conjuntos, porém com erros conceituais:

P2: É um subconjunto de um conjunto universo, ou seja, é parte de um todo.

P14: É um subconjunto da população com as mesmas características.

E também encontramos respostas muito vagas, como:

P6: É o conjunto de situações que podem ocorrer.

P4: Tabela de jogos; provas avaliativas; ganhos e perdas; bolsa de valores. Espaço amostral é onde a visualização é possível.

P17: Pode ser um grupo de pessoas como homens e mulheres a fim de atingir algum objetivo e estudo em determinada situação.

Entendem espaço amostral como algo relacionado a espaço físico:

P31: Onde vou analisar os fenômenos que podem acontecer: um baralho, bolas coloridas, uma classe de alunos.

P39: Qual a chance de “mudança do tempo”? É só num determinado local?

Propusemos um item que nos permitisse uma análise do conhecimento dos professores sobre outros conceitos que poderiam ser articulados para o

ensino do conceito de probabilidade, a saber: 6. Dedique alguns minutos para escrever sobre quais tópicos ou conceitos relacionados com a probabilidade que você acha que são importantes para ensinar no Ensino Fundamental e Médio.

O objetivo com este item é inferir quais os conceitos mais frequentes apontados pelos professores e perceber como os mesmos compreendem a conexão da probabilidade com outros tópicos ou conceitos matemáticos.

Daqueles que responderem ao item, encontramos os conceitos de razão, proporção, porcentagem, combinação, conjuntos e subconjuntos, probabilidade condicional. Segue o texto de um dos professores:

P16: Para o fundamental: princípio fundamental da contagem, combinações simples. Para o Ensino Médio: arranjo, análise combinatória, estatística.

No entanto, poucos professores utilizaram este item para relacionar com outros conceitos matemáticos ou com os próprios conceitos elementares de probabilidade. Ora citaram como outros tópicos a relação necessária com o cotidiano e a preparação para a vida profissional, ora relacionaram com a abordagem por meio de jogos, brincadeiras, atividades lúdicas.

### **3.2 Análise dos Itens do Conhecimento Comum e Avançado do Conteúdo**

O *conhecimento comum do conteúdo* é o conhecimento do conteúdo matemático em questão. Pode ser entendido como o conhecimento compartilhado com os alunos da etapa educacional em que o professor vai desenvolver um processo de ensino e aprendizagem referente a um determinado conteúdo matemático.

Já o *conhecimento avançado do conteúdo* é o conhecimento compartilhado com os alunos da etapa educativa posterior. O professor deve ter um bom domínio dos conceitos probabilísticos e uma compreensão profunda deles para levar a cabo a organização do ensino e colocá-lo em prática.

Para estudar o conhecimento comum e avançado do conteúdo deste grupo de professores analisamos as práticas matemáticas presentes nas respostas obtidas no item 7 e 8 do questionário. Apresentamos o item 7 (figura 11) envolvendo a quantificação de probabilidades.

**Figura 11: Questão de quantificação de probabilidades (conhecimento comum do conteúdo)**

7. Observe a tabela com as quantidades de peças de formatos e cores diferentes que foram colocadas em um caixa. O total de peças é 80.			
	Triangulares	Circulares	Retangulares
Brancas	12	10	6
Pretas	15	11	7
Amarelas	8	9	2

Sorteando uma das peças dessa caixa, qual é a probabilidade de que a peça seja:

- Amarela e Retangular
- Apenas amarela
- Apenas retangular
- Se a peça é circular, qual a probabilidade de que seja branca?

Fonte: O autor, 2017.

Na tabela 2 apresentamos o quantitativo de professores que erraram e dos que acertaram todo o item, e também dos que deixaram todo o item em branco.

**Tabela 2: quantitativo de professores (respostas erradas, corretas e em branco)**

TODAS ERRADAS	TODAS EM BRANCO	TODAS CERTAS
4	3	11

Temos que 4 do total de 40 professores erraram todo o item devido à dificuldade de encontrar o espaço amostral correto. Interpretamos que o conhecimento comum dos professores desta amostra é insuficiente, uma vez que a média das respostas corretas no item (com 4 subitens) é de 2,375 acertos. Nossos resultados seguem os mesmos encontrados por Contreras (2011) em que futuros professores de educação primária possuem um conhecimento insuficiente em relação ao cálculo de probabilidade por meio de dados apresentados em tabelas de dupla entrada.

Com o subitem “a” nosso objetivo foi que o professor estivesse atento para a união de dois eventos (amarelas e retangulares) e proceder ao cálculo da quantificação, nesse caso,  $2/80 = 2,5\%$ . O subitem “b” e “c” é necessário realizar as somas dos valores da terceira linha (peças amarelas) para a “b” e a soma dos valores da terceira coluna (peças retangulares) para a “c”, ou seja,  $19/80 = 23,75\%$  e  $15/80 = 18,75\%$ , respectivamente. No caso do subitem “d” envolvemos a quantificação de uma probabilidade condicionada em que há uma redução do espaço amostral e com resposta  $10/30 = 33,33\%$ ; é possível também utilizar a fórmula da probabilidade condicional e encontrar a resposta.

A tabela 3 apresenta a quantidade de professores por acerto, erro e em branco em cada subitem.

**Tabela 3: quantidade de respostas por subitem**

	a)	b)	c)	d)
<b>ACERTOS</b>	<b>20</b>	<b>30</b>	<b>32</b>	<b>13</b>
<b>ERROS</b>	<b>16</b>	<b>7</b>	<b>5</b>	<b>11</b>
<b>EM BRANCO</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>16</b>
	<b>40</b>	<b>40</b>	<b>40</b>	<b>40</b>

Fonte: O autor, 2017.

Dos 40 professores que responderam ao diagnóstico, o maior índice de erro neste item apareceu no subitem “a” com 16 professores. Nesse subitem é solicitada a probabilidade de que uma peça seja amarela e retangular, ou seja, a união de dois eventos (amarela e retangular). O fato de solicitar a probabilidade com a união de dois eventos já causa grandes confusões na mente do professor. Tal procedimento para resolução envolve o conhecimento comum sobre a quantificação de probabilidades. Ora, os professores erraram no momento de identificar o espaço amostral – colocavam o conjunto dos resultados possíveis como a soma da coluna ou soma da linha; ora erraram em achar que a resposta era a probabilidade condicional; em alguns casos colocaram a probabilidade como apenas o valor da interseção.

Os subitens “b” e “c” são análogos; no “b” é necessário realizar a soma dos valores correspondentes à linha da cor amarela (19 peças) e no “c” a soma dos valores correspondentes à coluna do formato retangular (15 peças). Esses dois subitens não se mostraram difíceis para os professores. Os professores

que deixaram os referidos “b” e “c” em branco foram os mesmos que deixaram o item inteiro em branco.

No subitem “d” é necessário compreender a ideia de eventos dependentes e a condicionalidade dos eventos (conhecimento avançado do conteúdo). Retomando uma das possíveis definições de probabilidade condicional podemos dizer que a probabilidade condicional  $P(A|B)$  de um sucesso A dado outro sucesso B é a probabilidade de que ocorra A sabendo-se que B ocorreu. De um ponto de vista mais formal, define-se mediante a expressão:

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B), \text{ sempre que } P(B) > 0.$$

Assim, a probabilidade de que seja branca dado que é circular é igual a:

$$P(A|B) = 10 / 30 = 1/3.$$

Do total de professores, 13 realizaram o cálculo da probabilidade condicional corretamente e 11 erraram o referido cálculo.

Dos 11 que erraram esse subitem apresentaram erros do tipo em que não se levou em consideração um espaço amostral reduzido, ou seja, em vez de realizar o cálculo  $10/30$  utilizaram  $10/80$ , onde 80 é o total de peças anunciado no item.

Um dos erros que encontramos (professor P12) dentre as respostas foi trocar as direções da condicionalidade, ou seja, neste caso o professor calculou a probabilidade da peça ser circular dado que seja branca. Calculou  $10/28 = 35,71\%$ . Essa troca é conhecida como a Falácia da Condisional Transposta (Falk, 1986; Batanero, Contreras e Díaz, 2012) onde não se discrimina entre uma probabilidade condicionada e sua transposta, isto é, entre as duas probabilidades  $P(A | B)$  e  $P(B | A)$ .

Destacamos a resposta do professor, a seguir, que nos deixa intrigados:

P13: A princípio parece que as chances são iguais, mas o que irá definir são os números de vezes que essas peças serão sorteadas.

O professor P13 não responde nenhum dos subitens e apresenta essa justificativa. Parece-nos que o professor indica que só seria possível o cálculo das referidas probabilidades mediante a realização dos sorteios.

Separamos as respostas dos quatro professores que erraram todo o item 7 e observamos como os mesmos definem probabilidade (item 4) para averiguarmos se existem dificuldades relacionadas com os referidos itens.

Dois destes quatro professores apresentam respostas que se aproximam de uma definição informal da probabilidade, a saber:

P11: É um evento provável de acontecer.

P15: É a parte da matemática (por ser exata) que estuda um fenômeno aleatório.

Os outros dois professores se distanciam das definições, formais ou informais, da probabilidade explicando da seguinte forma:

P17: É o estudo de formatos diferentes através do qual diagnosticamos a quantidade de repetições que será evidenciado.

P9: Chance de pelo menos certeza positiva ou negativa.

Com isto, não podemos afirmar que todos os quatro que erram apresentam dificuldades com a definição de probabilidade.

Passaremos a seguir para a análise do item 8 em que se constitui em uma atividade adaptada de Batanero, Godino e Estepa (1998) envolvendo a associação de variáveis em tabelas de dupla entrada (também conhecidas como tabelas de contingência). Tal atividade também foi utilizada nos estudos de Fernandes, Mugabe e Correia (2012) com 57 professores de matemática em formação inicial. Cañadas, Contreras, Arteaga e Gea (2013) concordam que atividades de associação das variáveis em tabelas poderiam ser incluídas no 8º e/ou 9º do Ensino Fundamental ou no Ensino Médio. Bryant e Nunes (2012) denominam este tipo de atividade como situações probabilísticas que envolvem a noção de risco. O esquema de uma tabela de contingência é demonstrado no quadro 4.

	B	Não B	Total
A	a	b	a+b
Não A	c	d	c+d
Total	a+c	b+d	a+b+c+d

**Quadro 4: Formato típico de uma tabela de contingência 2x2**

Fonte: O autor, 2017.

Como já discutido no capítulo do estudo preliminar, diferentes estratégias podem ser colocadas em jogo na prática matemática dos professores ao resolver este item.

**Figura 12: item 8 do diagnóstico inicial**

8. Observe a seguinte tabela de dupla entrada:

	Pessoas com doença brônquica	Pessoas com nenhuma doença brônquica
Pessoas que tem o hábito de fumar	90	60
Pessoas que não fumam	60	40

Usando apenas as informações contidas nesta tabela, você acha que existe uma relação entre ter doença brônquica e o hábito de fumar?  SIM  NÃO

Explique, usando as informações da tabela, por que você pensa assim.

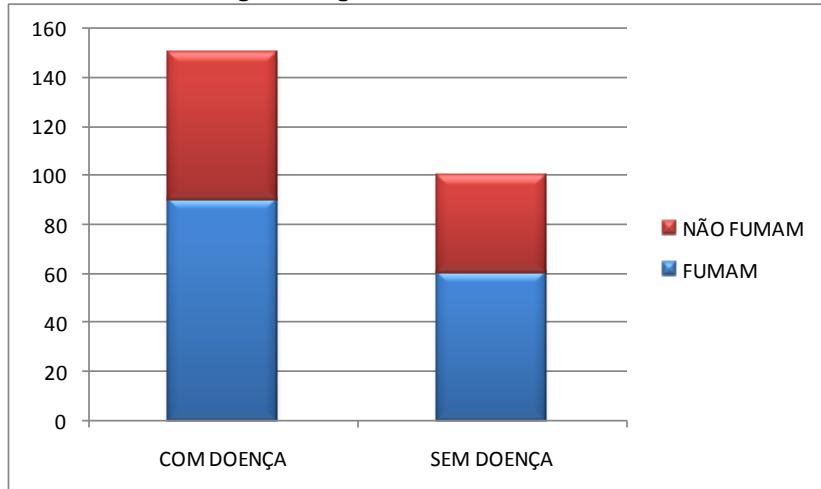
Fonte: O autor, 2017.

Para analisar este item vamos considerar a duas variáveis: a variável X que representa o hábito de fumar, com dois valores ( $x_1, x_2$ ), e a variável Y ( $y_1, y_2$ ) que se refere às doenças brônquicas. Vamos considerar que  $f_{ij}$  indica a frequência absoluta de cada célula – par ( $x_i, y_j$ ) – e  $h_{ij}$  a frequência relativa do par de valores ( $x_i, y_j$ ) onde verificamos a seguinte relação:

$$h_{ij} = f_{ij} / n$$

Uma possível representação gráfica desta tabela é o gráfico de barras (Figura 13), que pode ser apresentado ora com os valores absolutos ora com os valores relativos.

**Figura 13: gráfico de barras - item 8**



Fonte: O autor, 2017

A partir da tabela de contingência (bidimensional) podemos obter as diferentes distribuições de uma variável (unidimensional). Se na tabela se somam as frequências por colunas, obtemos em cada coluna  $j$ , o número de indivíduos  $f_{.j}$  com um valor da variável  $Y = y_j$ , independentemente do valor de  $X$ . A distribuição assim obtida se conhece como distribuição marginal da variável  $Y$ . No referido item há 150 pessoas com doença brônquica e 100 pessoas sem doença brônquica, 150 que fumam e 100 que não fumam, totalizando 300 pessoas.

Podemos fixar uma das variáveis e calcular as distribuições condicionais.

$$H(x_i | y_j) = f_{i,j} / f_{.j} = h_{i,j} / h_j$$

Podemos, por exemplo, comparar a proporção de pessoas com hábito de fumar entre os que possuem doença brônquica ou não. Obteríamos a tabela de frequências relativas condicionais por coluna (tabela 4), onde observamos que a proporção de pessoas com hábito de fumar ou não é a mesma entre os que possuem doença brônquica ou não, ou seja, as frequências relativas condicionais por coluna são iguais.

**Tabela 4: frequências relativas condicionadas por coluna**

HÁBITO DE FUMAR	POSSUIR DOENÇA BRÔNQUICA		total
	SIM	NÃO	
SIM	90/150 = 0,6	60/100 = 0,6	150/250 = 0,6
NÃO	60/150 = 0,4	40/100 = 0,4	100/250 = 0,4

Fonte: O autor, 2017.

Da mesma forma, as frequências relativas condicionais por colunas são também iguais as frequências relativas marginais por filas, a proporção de pessoas com hábito ou não de fumar (variável X) não muda quando se condiciona por um valor da variável Y.

Observamos que as duplas frequências absolutas dos valores de  $y_1$  e  $y_2$  são proporcionais a  $x_1$  e  $x_2$ , ou seja, as frequências relativas condicionais dos valores de  $Y_1$  e  $Y_2$  são iguais em  $x_1$  e  $x_2$ . Logo, podemos afirmar que as variáveis são independentes, pois as frequências relativas condicionais de uma delas não dependem do valor da outra.

Ao resolver este item, muitos dos professores poderiam pensar que as variáveis estariam relacionadas, pois a célula de maior frequência é a das pessoas que tem o hábito de fumar e que tem doenças brônquicas. Entretanto, seria um erro decidir sobre a associação baseando-se apenas nos dados de uma única célula.

Com base nos dados apresentados no item não existe uma relação entre ter doença brônquica e o hábito de fumar. Sobre a associação de variáveis existem três casos possíveis: dependência direta, dependência inversa e independência; em nosso item optamos pelas variáveis independentes. Como utilizamos um exemplo com variáveis independentes o valor do coeficiente de correlação é zero. A associação empírica dos dados não coincide com as teorias prévias sugeridas pelo contexto. E ainda o tipo de covariação (dependência causal unilateral, dependência direta e independência) neste item é de independência.

Neste item temos que apenas 16 professores acertaram a resposta (indicando a não associação das variáveis) e 22 erraram, 2 professores deixaram em branco. Não consideramos ainda neste momento a análise das estratégias e justificativas.

Elencamos as estratégias de Cañadas, Batanero, Contreras e Arteaga (2011) para utilizarmos para em nossa análise. Os referidos autores adaptaram estratégias e incluíram outras novas com base em estudos anteriores como os de Pérez Echeverria (1990) sobre os níveis de dificuldade, discriminadas entre estratégias corretas, parcialmente corretas e incorretas.

Identificamos seis professores que desenvolveram uma estratégia correta para analisar a associação das variáveis e decidir sobre o risco probabilístico. A estratégia empregada por esses professores foi a de comparar todas as distribuições de frequências relativas condicionais de uma variável para os diferentes valores da outra variável. Por exemplo, compararam as porcentagens de pessoas com doença brônquica no grupo de pessoas com hábito ou não de fumar.

Dois professores desenvolveram estratégias parcialmente corretas que são estratégias que usam todos os dados da tabela, no entanto se compara frequências absolutas em vez de se comparar as probabilidades. Por um lado, em vez de comparar probabilidades, compararam-se somente os casos favoráveis. Por outro lado, não se é consciente de que amostras de diferentes tamanhos não se podem comparar mediante frequências absolutas.

Uma estratégia incorreta já prevista na literatura e em nosso estudo preliminar é a de se utilizar apenas a célula que tem maior frequência para a tomada de decisão. Oito professores incorreram nesta estratégia. Neste caso os professores não utilizaram todas os dados presentes no item. Os professores realizaram o seu julgamento sobre a associação a partir da célula com maior valor. No item em questão o professor considerou apenas o valor da primeira célula com o valor maior 90. Fernandes, Mugabe e Correia (2012) encontraram que 24,6% dos participantes de sua pesquisa afirmaram a dependência entre as variáveis pelo fato de ser maior a frequência da célula

relativa a fumar e ter bronquite (célula a), conduzindo assim à resposta errada. Observemos duas justificativas dentre esses oito professores:

P6: Conforme o maior caso de doença é 90 e a interseção de sua respectiva linha com a coluna indica que pessoas com o hábito de fumar desenvolvem doenças brônquicas.

P3: De acordo com a tabela podemos concluir que o número de pessoas com doenças brônquicas são as que têm o hábito de fumar.

Outros professores, neste caso, doze, utilizaram a estratégia, também incorreta de usar somente uma distribuição condicional para deduzir a associação (ou seja, uso de uma coluna ou uma fileira) sem fazer comparações com a outra. Aqui o professor não comprehende este item como um problema de comparação de probabilidades e apresenta uma concepção local de associação. Um professor (P25) que incorreu nesta estratégia justifica afirmando que *no total de 150 pessoas com doença brônquica 90 têm o hábito de fumar (90 em 150)*.

Considerar as teorias prévias e “não utilizar os dados” foi uma estratégia incorreta realizada por três professores. Por exemplo, um professor (P33) ao explicar o seu pensamento coloca que *relação existe, porém a probabilidade de pessoas com doença brônquica é a mesma (3/5) e pessoas com nenhuma doença é de (2/5) nos dois casos*.

Por fim, dentre nove professores, cinco elencaram justificativas incorretas e quatro deixaram todo o item em branco (não sendo possível a identificação de uma estratégia). Um exemplo de uma justificativa incorreta foi a justificativa apresentada pelo professor P39 onde argumenta que *os dados não apresentam a quantidade de pessoas pesquisadas*.

Como podemos verificar, temos 28 professores que desenvolvem estratégias incorretas e 4 que deixaram o item em branco, fato este que nos chama atenção. Com este item esperávamos que os professores analisassem atentamente os dados descrevendo estratégias corretas ou parcialmente corretas, e que não utilizassem apenas uma única célula para a tomada de decisão. Fernandes, Mugabe e Correia (2012) concluem que nem sempre os

professores de matemática em formação inicial, participantes da pesquisa, utilizaram todos os dados relevantes do problema para decidirem sobre a existência ou não de associação. Os resultados obtidos no estudo levam a concluir que o conceito de associação não se revelou muito intuitivo para os estudantes, resistindo, em grande medida, ao ensino formal. Cañadas, Batanero, Contreras e Arteaga (2011) concluem que as estratégias erradas correspondem a 54,8% contra 19,4% de estratégias corretas, mostrando que os resultados não são satisfatórios na realização de juízos de associação nos estudantes de sua pesquisa.

Analisamos as respostas dos professores sobre os conceitos e tópicos citados para identificar se os mesmos fariam uma relação com as noções sobre risco probabilístico. De forma direta nenhum professor citou a palavra risco, porém se pensarmos em proporcionalidade alguns professores mencionam os conceitos de razão e proporção. Encontramos apenas um professor citando *tipos de tabela: entrada dupla*. Este fato nos faz acreditar que os professores do grupo não relacionam ou desconhecem as ideias sobre risco e tabelas de contingências como parte do estudo de probabilidade, ou ainda, desconhecem da possibilidade do trabalho com estes conceitos no nível de escolaridade da Educação Básica.

### 3.1. CONCLUSÕES DO DIAGNÓSTICO INICIAL

O diagnóstico inicial nos aponta que com este grupo de professores, muitos dos quais em exercício há mais de uma década, apresentam lacunas nos conhecimentos comum, avançado e especializado do conteúdo distinguidos pela teoria do Conhecimento Didático-Matemático do professor de matemática.

Pensar na probabilidade apenas como uma ferramenta para outros conteúdos do Ensino Médio torna-se uma visão limitada e que pode limitar o desenvolvimento de um trabalho significativo nos anos finais do Ensino Fundamental. Convém destacar que a probabilidade contribui para um raciocínio matemático mais estruturado e que leva em consideração situações contra intuitivas.

Acreditar na probabilidade como um conjunto de conhecimentos que vai estimular o desenvolvimento de certas habilidades nos estudantes tais como investigação, senso crítico e autonomia, é desejado quando nos espelhamos nos princípios do letramento probabilístico dos estudantes, porém poucos professores deste grupo fazem essa relação.

O diagnóstico nos aponta ainda dificuldades dos professores com o conhecimento probabilístico, seja no momento de explicar o que é aleatório ou em definir probabilidade – por exemplo, ou ainda nos cálculos que envolvem a quantificação de probabilidades, como pudemos observar nos dois últimos itens.

A fase diagnóstica que aqui apresentamos se constituiu em um momento crucial para podermos compreender os conhecimentos iniciais deste grupo de professores. Após responder o questionário os professores assumiram as suas próprias dificuldades com alguns itens e, isto os deixou mais motivados e abertos para a etapa posterior, que denominamos como subfase formativa. O objetivo no desenho do questionário foi não sobrecarregar os professores com apenas questões do conhecimento de probabilidade do ponto de vista matemático. Incluímos itens que envolvessem ideias sobre o currículo, sobre as noções que sustentam o conceito de probabilidade tais como aleatoriedade e espaço amostral. E o modelo de conhecimento de professores de matemática (CDM) proposto pelo Enfoque Ontosemiótico do conhecimento e da instrução matemática nos serviu de referência para a seleção dos itens e a referida discussão que ora aqui apresentamos.

Em resumo, diagnosticamos que com base nos resultados obtidos a maioria dos professores que participaram desta fase possui um nível muito elementar e insuficiente do conhecimento comum do conteúdo sobre probabilidade, ou seja, não dominam adequadamente os conceitos básicos sobre probabilidade orientados para o ensino ao nível dos anos finais do Ensino Fundamental em que os mesmos atuam.

Estudos como estes nos revelam a necessidade de um olhar mais atencioso para a formação inicial de professores e, não menos importante a

formação continuada, para que os professores possam desenvolver os conhecimentos sobre probabilidade e sobre o ensino de probabilidade.

As reflexões sobre os dados deste diagnóstico complementando o nosso estudo preliminar nos serviram como esclarecimento sobre as nuances que permeiam o ensino e aprendizagem da probabilidade e a formação de professores relacionados com esta temática.

#### 4. DESENHO DO PROGRAMA DE FORMAÇÃO

---

Neste capítulo descreveremos o desenho do programa de formação explicitando as atividades por nós selecionadas e como essas atividades estão organizadas neste programa formativo com os professores dos anos finais do Ensino Fundamental da rede estadual de São Paulo. Explicitaremos a configuração didática de uma forma geral, para que se possa compreender o fio condutor em todas as unidades de estudo planejadas e a forma de abordagem das referidas atividades. Descreveremos, ainda, as opções tomadas por nós, formadores e pesquisadores, para o desenvolvimento deste desenho.

Relembramos que uma configuração didática é qualquer segmento de um processo didático (ensino e aprendizagem) compreendido entre o início e a finalização de uma atividade ou situação-problema. Conforme Godino (2014) em toda configuração didática há uma configuração epistêmica (sistema de práticas, objetos e processos matemáticos institucionais), uma configuração instrucional (sistema de funções docentes, discentes e meios instrucionais) e uma configuração cognitiva (sistema de práticas, objetos e processos matemáticos pessoais) mediante ao qual se descreve a aprendizagem.

Retomamos que o desenho deste programa segue por um lado uma trajetória para o professor desenvolver o conhecimento sobre probabilidade, e por outro lado uma trajetória para o desenvolvimento de habilidades didáticas para o trabalho com este conceito em sala de aula.

Schoenfeld e Kilpatrick (2008) ao discutirem uma Teoria da Proficiência na educação afirmam algo importante: *que as pessoas precisam desenvolver habilidades para se tornar proficientes* (2008, p.350). No EOS essa teoria é interpretada como *uma referência aos conhecimentos (e competências) que deveriam ter os professores para que seu ensino se possa considerar de qualidade* (Godino, 2002, p.18).

Poderíamos nos perguntar como desenvolver as competências dos professores de matemática para o trabalho com a probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental. Este desenho formativo foi construído e implementado

para possibilitar ao professor ter conhecimento e competência para identificar a diversidade de objetos e significados que intervém na resolução de atividades matemáticas escolares para alcançar um ensino idôneo da probabilidade.

Clarificamos que propomos atividades que mobilizam o Conhecimento Comum do Conteúdo (CCC) e algumas que mobilizam o Conhecimento Avançado do Conteúdo (CAC) sobre probabilidade. Como já abordado em nosso marco teórico, o Conhecimento Comum do Conteúdo é conhecimento que o professor deve possuir para ensinar os conceitos destinados ao nível escolar ao qual se propõe, neste caso, os anos finais do Ensino Fundamental; já o Conhecimento Avançado do Conteúdo é o conhecimento dos conceitos previstos para as etapas posteriores ao nível escolar em foco.

Com respeito ao Conhecimento Especializado do Conteúdo (CEC) apontamos que é aquele específico do trabalho pedagógico do professor e que no marco teórico do EOS pode ser compreendido por meio das facetas epistêmica, ecológica, cognitiva, afetiva, mediacional e interacional.

Para a mobilização dos conhecimentos especializados dos conteúdos probabilísticos, diversas estratégias foram adotadas, tais como responder a atividades em que é necessário justificar e argumentar sobre as resoluções; tecer reflexões sobre atividades que apresentem respostas construídas por alunos, mesmo que fictícias, tal decisão é similar aos estudos de Ives (2009); envolvimento com atividades de diferentes tipos, tais como jogos e situações-problemas; e atividades que articulam diferentes recursos instrucionais, como por exemplo, o uso do computador e/ou materiais manipuláveis.

Temos a intenção de provocar no professor a percepção de que o formato das atividades que estamos vivenciando o processo didático com eles pode ser adaptado e aplicado com os seus estudantes na sala de aula.

#### **4.1 CONFIGURAÇÃO EPISTÊMICA-ECOLÓGICA**

Em toda configuração didática há uma configuração epistêmica, ou seja, um sistema de práticas, objetos e processos matemáticos institucionais. Neste apartado escreveremos em linhas gerais a configuração epistêmica planejada para ser realizada na fase de implementação. Tal configuração epistêmica está

entrelaçada com as diretrizes curriculares nacionais e internacionais para o ensino e aprendizagem da probabilidade no Ensino Básico, mais especificamente, nos anos finais do Ensino Fundamental, uma vez considerando o que preconizam as orientações curriculares essa configuração epistêmica é também ecológica. É possível pensar que as atividades planejadas podem ter uma conexão intradisciplinar e interdisciplinar, além de conectarem-se também com outros fatores condicionantes tais como o contexto social e cultural dos professores e alunos.

Apresentaremos a configuração epistêmica-ecológica por unidade de estudo apontadas no quadro 5.

Observando o resumo dos conteúdos desenvolvidos desde o primeiro encontro até o último é possível perceber a evolução progressiva que tem início com o estudo da aleatoriedade culminando com a exploração de situações probabilísticas envolvendo a quantificação.

As atividades serão detalhadas no capítulo 5 para que o leitor compreenda de forma mais clara, as trajetórias didáticas e a análise dos conhecimentos dos professores.

Encontros	Unidades de estudo	Atividades	Resumo de conteúdos desenvolvidos	Categorias conhecimento matemático		
				CCC	CAC	
1º	Aleatoriedade	1. Jogo do caça níqueis	Padrões previsíveis e aleatórios.	X		
		2. Impossíveis x improváveis	Eventos impossíveis e improváveis.	X		
		3. Aleatoriedade do $\pi$	Percepção da aleatoriedade; frequências.	X		
2º		4. Bolsa com contadores	Eventos mais prováveis ou menos prováveis.	X		
		5. Jogo com dados	Frequências; gráficos; lei dos grandes números.	X		
		6. Caso das moedas	Lei dos grandes números.	X		
3º	Espaço amostral e quantificação de probabilidades	7. Matrix games e máscaras das matrizes.	Noção de espaço amostral. Árvore de possibilidades.	X		
		8. Jogo com dados e dominós.	Árvore de possibilidades.	X		
		9. Saco de doces e variações	Eventos dependentes e independentes; espaço amostral restrito; probabilidade condicional.	X	X	
		10. Blocos no saco	Índices para comparar espaços amostrais.	X		
4º		11. Fábrica de bolos	Probabilidades simples. Redução do espaço amostral.	X		
		12. Jogo igba-itá	Composição do espaço amostral.	X		
		13. Jogo das 3 fichas	Probabilidade condicional.		X	
5º	Quantificação de probabilidades e risco	14. O jantar na escola	Razão; Tabela cartesiana.	X		
		15. Biscoitos do bem	Quantificação de probabilidades.	X		
		16. Show de danças	Quantificação de probabilidades, diagramas.	X		
		17. Decisões cotidianas	Noção de Risco. Associação de variáveis.		X	
6º	Explorando probabilidades	18. Probabilidades 1	Significados de probabilidade.	X	X	
		19. Que carro comprar?	Probabilidade e tomada de decisão.	X		
		20. Que grupo trapaceou?	Padrões aleatórios; representações gráficas.	X		
7º		21. Probabilidades 2	Modelos de distribuição de probabilidades.		X	
		22. A tigela de doces	Quantificação de probabilidades. Amostragem.	X		

Quadro 5: Configuração epistêmica por unidade de estudo

Fonte: O autor, 2017.

#### **4.1.1 SUBCONFIGURAÇÃO EPISTÊMICA-ECOLÓGICA ALEATORIEDADE**

Esta unidade comprehende o 1º e 2º encontros formativos. No primeiro, está previsto o início com as atividades selecionadas para a mobilização do objeto epistêmico aleatoriedade, a saber: Jogo dos caça-níqueis; Impossíveis versus Improváveis e Aleatoriedade das casas decimais do número  $\pi$ . As duas primeiras atividades são integrantes do programa de ensino de Nunes, Bryant, Evans, Gottardis e Terlektsi (2012) e a terceira se encontra no Caderno do Professor de Matemática de São Paulo (São Paulo, 2009). Discutimos os significados de termos importantes para a compreensão da aleatoriedade, tais como: determinísticos, aleatórios, sequências aleatórias, possíveis, impossíveis, prováveis, improváveis.

Para o segundo encontro o foco continua no objeto epistêmico aleatoriedade, porém ampliamos o estudo para os eventos mais prováveis ou menos prováveis e uma exploração com a probabilidade frequentista para desencadear em uma discussão sobre a Lei dos Grandes Números. As três atividades vivenciadas neste encontro são todas integrantes do programa de ensino de Nunes et al. (2012) e adaptadas para este desenho formativo com os professores. São as seguintes atividades: Bolsa com contadores; Jogo com Dados e o Caso das Moedas. A sequência com essas três atividades tem como objetivos possibilitar aos participantes, particularmente os professores, desenvolver o raciocínio sobre os eventos mais prováveis ou menos prováveis de acontecer. Os professores devem perceber que é possível fazer algumas previsões globais embora não se possa dizer o que vai acontecer para cada evento. Outra importante observação é compreender que quando as coisas são aleatórias, não significa necessariamente que todos os resultados são igualmente prováveis, alguns resultados podem ser mais prováveis do que outros. Mais importante ainda, no final, os professores devem perceber que é possível pensar logicamente sobre eventos aleatórios e que podem instigar tal compreensão com os seus alunos.

A seguir vamos destacar os principais objetos e processos envolvidos nesta unidade de estudo; optamos em descrever tais elementos de forma coletiva e não separada por atividade; relembramos que as atividades estão

incluídas no próximo capítulo. Dentre esses objetos e processos descreveremos de forma sucinta elementos indicados pela teoria do EOS (GODINO, 2002; 2011) tais como: elementos linguísticos, elementos conceituais, propriedades, proposições, procedimentos e argumentos. Tal procedimento se dará também na apresentação das próximas subconfigurações epistêmica-ecológicas.

Os elementos linguísticos que esta unidade de estudo evoca, implica no significado institucional pretendido, como expressar (escrita, oral): *i) diferenças entre aleatório e determinístico; ii) o que é mais provável acontecer? iii) qual a melhor chance? iv) aproximação do valor da frequência relativa de um acontecimento para o valor da verdadeira probabilidade quando uma experiência é repetida um grande número de vezes.* Estão presentes ainda notações e representações envolvendo tabelas, gráficos e o diagrama da árvore de possibilidades.

Na representação da atividade do lançamento de dois dados a linguagem gráfica foi utilizada para possibilitar a visualização do comportamento de uma distribuição normal, de forma que com as frequências acumuladas é possível ver o gráfico se aproximando de uma distribuição normal de probabilidades.

Supomos que os professores participantes, que já estão no exercício docente, estejam familiarizados com estes elementos linguísticos próprios do estudo da probabilidade tais como experimentos, eventos, possibilidades, chance, frequências absolutas e relativas.

Descrevemos os objetos conceituais essenciais nesta unidade de estudo, a saber:

- Padrões previsíveis e aleatórios;
- Fenômenos determinísticos e fenômenos aleatórios;
- Eventos impossíveis, improváveis e possíveis;
- Independência de eventos;
- Eventos mais prováveis ou menos prováveis;
- Iguais chances de um evento ocorrer;

- Frequências
- Gráfico das frequências de lançamentos aleatórios;
- Lei dos grandes números (probabilidade frequentista);
- Seleção aleatória com reposição e não-reposição.

Mesmo que os professores possam estar familiarizados com alguns desses conceitos, convém lembrar que o estudo em sua formação inicial, por muitas vezes, não possibilita uma compreensão significativa do mesmo; os professores aprendem por vezes partindo diretamente para aplicação das fórmulas e dos cálculos da combinatória (arranjo, permutações, etc.) para a quantificação das probabilidades. A noção da Lei dos grandes números pode ser um objeto emergente da prática matemática nesta unidade de estudo.

Para o desenvolvimento do conjunto das atividades é necessário ter conhecimento de significados de expressões, propriedades ou proposições (algumas de maneira implícita), tais como:

- Fenômenos determinísticos (não-aleatórios) são fenômenos em que o resultado é conhecido antes mesmo da ocorrência do referido experimento; podem ser totalmente caracterizados a priori.
- Experimentos aleatórios são fenômenos em que não se pode prever com certeza qual o resultado; não é possível saber o resultado a priori.
- Todo e qualquer resultado de um experimento aleatório é denominado de evento. Desse modo, perguntas ou conjecturas formuladas a respeito do experimento são denominadas de eventos.
- Na matemática um evento pode ser definido como um subconjunto do espaço amostral, e o próprio espaço amostral é um evento.
- Evento certo apresenta 100% de chance de acontecer, ou seja, o próprio espaço amostral.
- Evento impossível apresenta 0% de chance de acontecer, isto é, não pode ocorrer.
- Existem experimentos em que os eventos possuem as mesmas chances de ocorrer.
- Existem experimentos em que os eventos possuem diferentes chances de ocorrer (mais prováveis ou menos prováveis).

- Dois eventos são independentes quando não há nenhuma conexão entre eles e aquilo que ocorre em um deles não ocorre no outro. Dois eventos são dependentes quando eles estão ligados de tal maneira que a probabilidade de que um ocorra é alterada pela ocorrência do outro.
- Com a lei dos grandes números se um evento é observado repetidamente durante independentes realizações, a razão entre a frequência observada deste evento e o número total de repetições converge para  $p$  conforme o número de repetições se torna arbitrariamente grande;  $p$  é a probabilidade clássica calculada mediante a regra de Laplace.
- O gráfico de frequências de um experimento aleatório quando o número de repetições tende ao infinito faz com que o gráfico tender a um tipo de distribuição de probabilidade.

Podemos destacar um conjunto de procedimentos na realização das atividades, como a necessidade de escrever sobre os diferentes significados dos objetos em discussão nesta unidade. Estes procedimentos são de natureza mais descritiva, não envolvem cálculos complexos e fórmulas. Na atividade do Jogo com Contadores e do Jogo com Dados pode ser que os professores realizem pequenos cálculos com frações e/ou porcentagens para justificar os argumentos concernentes às atividades. Esperamos que os professores possam escrever, por exemplo, em que consiste a aleatoriedade das casas decimais do número  $\pi$ , ou ainda, realizar as simulações com as atividades que envolvem os dados e tomar nota para poder discorrer sobre resultados mais prováveis ou menos prováveis. Mesmo que na definição de evento tivéssemos que partir da noção de espaço amostral, os procedimentos esperados giram em torno da distinção dos eventos aleatórios.

Almejamos que os professores construam argumentos como, por exemplo, que levem em consideração as diferenças entre determinismo e aleatoriedade na matemática e/ou o fato de um evento ser pouco provável de acontecer não significa que ele é impossível. É também desejável que os docentes identifiquem e argumentem sobre situações nos quais os resultados dos eventos são independentes. Um argumento que poderia vir à tona seria a

utilização da lei dos grandes números para justificar os procedimentos da resolução de um problema. Outros argumentos são as justificativas para diferentes procedimentos de cálculo em situações em que há reposição de elementos em experimentos (similares à urna de Bernoulli) daquelas em que não há essa reposição.

#### **4.1.2 SUBCONFIGURAÇÃO EPISTÊMICA-ECOLÓGICA ESPAÇO AMOSTRAL E QUANTIFICAÇÃO DE PROBABILIDADES**

Para esta unidade de estudo selecionamos atividades que envolvem o conhecimento sobre estratégias de mapeamento do espaço amostral e em seguida o início de um trabalho envolvendo a comparação e quantificação de probabilidades. Esta unidade comprehende o 3º e 4º encontro formativo.

No 3º encontro aplicamos as atividades denominadas Matrix Game, Jogo com Dados e Dominós, Saco de doces e Blocos no saco. Todas essas atividades são também integrantes do programa de ensino de Nunes et al. (2012) e adaptadas para este desenho formativo com os professores. Juntamente com a atividade Saco de doces incluímos duas outras atividades como variação desta para discutir de uma forma ainda mais contundente o conceito de espaço amostral e as modificações quando os eventos são dependentes ou independentes articulados com o estudo da probabilidade condicional sem focar nas fórmulas e sim, no significado de uma probabilidade condicionada.

O objeto epistêmico condutor de todas as atividades neste encontro é o conceito de espaço amostral. Por meio dele pretendemos discutir as diferentes possibilidades de mapeamento e registro dos referidos espaços amostrais, a distinção entre eventos dependentes e independentes e a modificação do espaço amostral quando dessa distinção, expansão e restrição de casos do espaço amostral, a noção de probabilidade condicional e os índices para comparar diferentes espaços amostrais.

Com exceção da probabilidade condicional, todos esses conceitos e noções que circundam o objeto epistêmico espaço amostral são previstos para os anos finais do Ensino Fundamental constituindo-se desse modo como Conhecimento Comum do Conteúdo; a probabilidade condicional é um Conhecimento Avançado do Conteúdo.

Os conhecimentos estudados por meio da subconfiguração anterior – como os de eventos mais prováveis ou menos prováveis em um espaço amostral – estão permeando a construção processual desses outros conhecimentos que ora estão sendo mobilizados nessa subconfiguração.

Nesta perspectiva de construção processual e articulada, as atividades do Saco de Doces, ao qual incluímos propositalmente duas variações da mesma, e a dos Blocos no Saco, orientam para um estudo com comparação e quantificação de probabilidades; há uma ampliação processual do objeto epistêmico, ou seja, do espaço amostral para a quantificação de probabilidades.

Para o 4º encontro as atividades aplicadas foram a Fábrica de bolos, o Jogo Igba-Ita e o Jogo das três fichas. O foco dessas atividades continua perpassando pela reflexão sobre espaços amostrais, comparação e quantificação de probabilidade e a probabilidade condicional. Esses objetos epistêmicos em verdade estão estritamente relacionados, entretanto cada atividade oferece uma forma de ver e compreender essas relações.

O cerne da atividade da Fábrica de bolos, do programa de ensino de Nunes et al. (2012) está no fato de agregar ou eliminar casos quando da composição de um espaço amostral de um determinado evento, além de reforçar a compreensão entre o espaço amostral e a quantificação de probabilidade simples. E ainda as diferentes representações que podem ser utilizadas para registrar o mapeamento sem esquecer nenhuma das possibilidades.

Especificamente, o jogo do Igba-Ita propicia uma discussão sobre a distinção entre chance e probabilidade e ainda, os erros na composição de um espaço amostral que direcionam para decisões equivocadas, como por

exemplo, ao decidir se é um jogo justo ou não. O contato inicial com o jogo por nós pesquisadores deu-se por meio da leitura do livro *Jogos e atividades matemáticas do mundo inteiro* da pesquisadora Cláudia Zaslavsky (Zaslavsky, 2009).

Como última atividade deste encontro lançamos mão do Jogo das Três Fichas apresentado por Contreras (2011). Encontramos também o jogo em diversas publicações (CARVALHO E OLIVEIRA, 2002; CONTRERAS, BATANERO, ARTEAGA, E CAÑADAS 2012; BATANERO, CONTRERAS, DÍAZ E CAÑADAS, 2014) que discutem o ensino e aprendizagem da probabilidade condicional. Este jogo foi sistematizado com base no Paradoxo das Caixas de Bertrand, assim conhecido por ter sido estudado pelo matemático francês do século XIX Joseph Bertand. A natureza da probabilidade condicional precisa de uma atenção especial dos professores de matemática por que o mapeamento do espaço amostral se revela mais complexo. A utilização apenas procedural da fórmula não propicia uma compreensão deste conceito. Este conceito é utilizado tanto na estatística clássica como na bayesiana reforçando a necessidade de uma abordagem diferenciada e significativa do mesmo.

A seguir descreveremos os principais objetos e processos abordados nesta unidade de estudo.

Os elementos linguísticos que este conjunto de atividades evoca implicam no significado institucional pretendido tais como as expressões: *Como provar, em um mapeamento de espaços amostrais, que todas as possibilidades/combinações foram descritas? Como representar as diferentes possibilidades? Que possibilidades são mais prováveis de um evento acontecer? Qual a melhor chance? A melhor previsão? O melhor palpite? etc.* E ainda expressões que conotam sobre a noção de justiça em jogos probabilísticos como: *Este é um jogo justo ou não?* Todas essas expressões nos levam a compreender o conceito de probabilidade.

Algumas expressões linguísticas são utilizadas para dar suporte a uma compreensão posteriormente necessária. Ao solicitar todas as combinações possíveis no Matrix Game na verdade estamos desenvolvendo a noção do

mapeamento de todas as possibilidades de um espaço amostral. Ao solicitar também um posicionamento sobre a justeza do jogo Igba-Ita estamos conduzindo os jogadores para uma análise das possibilidades e consequentemente, do espaço amostral ali envolvido. Pode-se supor que os professores em exercício estão familiarizados com estas expressões linguísticas próprias do estudo da probabilidade, tais como espaço amostral, combinações, possibilidades, eventos, chance, probabilidade. Pode haver confusões com respeito ao discernimento entre possibilidade, chance e probabilidade.

Na vivência e resolução das atividades é utilizada uma linguagem simbólica para expressar, por exemplo: os sucessos, as probabilidades, além de elementos icônicos que representam sucessos e resultados. E ainda uma linguagem numérica necessária em diversas etapas resolutivas.

Uma notação que aparece nessa unidade é a distinção entre utilizar “:” no uso da razão para decidir sobre a melhor chance de um evento e a notação em forma fracionária da probabilidade. A notação  $1 : 4$  é diferente de  $1/4$ , porque no primeiro caso estamos usando para comparar quantidades, por exemplo 1 ficha amarela para 4 fichas pretas.

Continuam presentes representações envolvendo tabelas, gráficos e o diagrama da árvore de possibilidades. A atividade Matrix Game, por exemplo, tem um foco maior nas representações com tabelas de dupla entrada.

Destacamos noções essenciais tais como “eventos mais prováveis ou menos prováveis”, “possibilidades”, “chance” e “probabilidade” como conceitos que quando estudados na formação inicial do professor assumem uma característica de definição com abordagem apenas de um ponto de vista procedural. Salientamos que os professores podem estar familiarizados com o conceito de “espaço amostral” e com o “cálculo de probabilidades”. Pontuamos ainda que as ideias de “chance” e de “condicionalidade” de um evento podem ser objetos emergentes da prática realizada na vivência com este conjunto de atividades.

Principais objetos conceituais envolvidos na prática das referidas atividades:

- Espaço Amostral; Sucessos
- Eventos mais prováveis ou menos prováveis
- Razão
- Chance
- Espaços amostrais restritos
- Probabilidade Condicional; Condicionalidade de eventos
- Probabilidade Clássica
- Probabilidade Frequentista; Frequência Relativa
- Justiça
- Experimento aleatório
- Experimento simples e composto
- Sucesso em experimento composto (produto cartesiano dos espaços amostrais anteriores)
- Convergência (tendência da frequência a um valor fixo)
- Estimação frequencial (limite da frequência)
- Regra da soma
- Distribuição de probabilidades (conjunto de valores com suas probabilidades)

Para o desenvolvimento dessa unidade é necessário ter em conta propriedades (algumas de maneira implícita), tais como:

- Em determinados eventos ter elementos em uma maior quantidade nem sempre implica maior chance.
- Eventos independentes são aqueles que quando a realização ou não-realização de um não afeta a probabilidade de realização do outro.
- Probabilidade de eventos dependentes supõe uma restrição do espaço amostral.
- Algumas combinações podem representar a mesma possibilidade em um determinado tipo de experimento, mas diferentes possibilidades em outro experimento.

- 1:3 mesma chance que 2:6
- Para que um jogo seja justo, do ponto de vista das diferentes possibilidades, é necessário que as chances dessas referidas possibilidades sejam equiprováveis no contexto de desenvolvimento do jogo. Caso contrário, a não-equiprobabilidade confere ao jogo uma situação de injustiça.

Procedimentos comuns, quando da implementação do conjunto de atividades dessa unidade, envolvem a enumeração do espaço amostral e o cálculo de probabilidades pela regra de Laplace, bem como, a elaboração de tabelas de dupla entrada ou do diagrama de árvore para mapeamento do espaço amostral. Acreditamos que para os professores é fácil o diagrama de árvore com as probabilidades em forma fracionária ou em porcentagem.

Do procedimento de construir ou complementar uma tabela de dupla entrada na realização das atividades pode-se progredir para o diagrama da árvore de possibilidades. É possível também a manipulação de materiais concretos como figuras e blocos para justificar o raciocínio na resolução de algumas atividades ou vivência dos jogos; a manipulação das figuras e a atribuição de códigos às mesmas é um procedimento possível para organizar os elementos na tabela de dupla entrada.

Será possível, na implementação, incluir procedimentos de comparação com o uso da razão para argumentar sobre a melhor escolha, melhor chance de algo acontecer. O trabalho com os blocos unifix na atividade dos Blocos no Saco tem um grande foco neste tipo de procedimento. Esperamos que os professores utilizem procedimentos para a resolução das atividades utilizando a comparação entre razões sem necessariamente realizar o cálculo da probabilidade e daí, argumentar algo que seja mais provável ou não de acontecer.

Com a resolução das atividades deve-ser-ia envolver argumentos que ajudem na decisão quando realizadas previsões ou tomadas de decisões sobre determinadas situações probabilísticas. Esses argumentos devem por em cena um raciocínio contra-intuitivo característico das situações probabilísticas. É

preciso, por meio de algumas atividades, elaborar argumentos que envolvam a ideia do espaço amostral com restrição e, progressivamente, desenvolver argumentos que considerem a conexão entre o mapeamento do espaço amostral e a quantificação de probabilidades. Um procedimento errado nesse mapeamento poderá levar a argumentos errôneos, tais como a decisão sobre a justeza de um jogo.

Na atividade da Fábrica de Bolos, por exemplo, construir o diagrama da árvore de possibilidades pode se constituir em um procedimento bem trabalhoso por envolver 27 combinações diferentes. Um argumento errôneo em uma determinada solução seria estabelecer a razão 3 em 27 em vez de 9 em 27 .

A repetição de experimentos para observação e registro dos resultados justificando o uso de um procedimento que possibilita encontrar a probabilidade de um evento *à posteriori* – probabilidade frequentista – se constitui em um procedimento plausível nessa unidade de estudo. Comparar os resultados calculados dessas probabilidades com a probabilidade clássica dos mesmos eventos vivenciados também é um procedimento significativo do estudo da probabilidade.

#### **4.1.3 SUBCONFIGURAÇÃO EPISTÊMICA-ECOLÓGICA QUANTIFICAÇÃO DE PROBABILIDADES E RISCO**

Esta unidade foi desenhada para ser implementada em apenas um encontro formativo. Nesta unidade continuamos com atividades de quantificação de probabilidade, no entanto avançamos para o desenvolvimento das noções sobre risco (associação de variáveis). Salvaguardamos que o estudo com a noção de risco, nesse desenho, envolve unicamente a utilização dos dados de duas variáveis apresentados em uma tabela de dupla entrada e a comparação dessas frequências por meio do estabelecimento de relações, sem o uso de porcentagens ou frações. As atividades aplicadas foram as que denominamos O jantar na escola, Biscoitos do Ben, Show de Danças e Decisões cotidianas. Todas as atividades foram adaptadas de Nunes et al (2012).

As atividades abordam o uso da razão para comparar as melhores chances de um evento e levam à necessidade de sistematização dessas chances por meio da árvore de possibilidades para o cálculo da probabilidade. Especificamente, a atividade Decisões cotidianas envolve o estudo do objeto epistêmico risco probabilístico. Este estudo se constituiu em uma análise sobre associação de variáveis em tabelas de dupla entrada para tomada de decisões. Uma vez que o risco, ou seja, a análise da associação de variáveis, não está prevista para os anos finais do Ensino Fundamental no currículo brasileiro, esta abordagem configura-se como conhecimento avançado do conteúdo.

Os elementos linguísticos envolvem as expressões como: *Qual a melhor chance?* E progride para expressões que envolvem o termo probabilidade como: *Qual a probabilidade?* Este nos leva ao significado institucional que analisamos sobre diferentes perspectivas.

Nos registros escritos e nas falas se tomam expressões para a estimativa das melhores chances e, tal linguagem favorece uma melhor compreensão ao se tomar decisões em situações de incerteza.

A expressão “tem alguma ligação” tem haver com a noção de associação de variáveis, porém trabalhada numa linguagem mais coloquial: *Você acha que comer cerais no café da manhã tem ligação com as taxas de colesterol?*

É necessário utilizar o registro escrito da interpretação dos valores nas tabelas e da decisão sobre a associação. Estudam-se as representações do espaço amostral por meio de tabelas e diagramas, incluindo diferentes representações construídas por alunos.

Há o uso do número racional para quantificação das probabilidades na forma fracionária. O ícone “ : ” que é utilizado para estabelecer os dois valores da razão é também utilizado aqui para possibilidade o significado das razões; há casos que será importante discutir o significado do número com duas casas decimais, por exemplo, quando se compara 1 : 3 com 1 : 3.2. Na sua prática docente o professor deve estimular a linguagem verbal e oral para ter a certeza que os alunos estão raciocinando corretamente.

Como a atividade foi planejada para o trabalho com alunos os números usados nas atividades de risco são pequenos, uma vez que não se quer que o raciocínio possa ser prejudicado por dificuldades de cálculo; os números são simples a fim de permitir que os alunos se concentrem no raciocínio em vez do cálculo.

Destacamos os conceitos principais nesta unidade:

- Estimativas
- Eventos mais prováveis ou menos prováveis
- Chance
- Probabilidade clássica
- Espaço Amostral
- Razões
- Tabela de dupla entrada
- Risco probabilístico

Uma propriedade que se deve levar em consideração é que a associação entre as variáveis pode ser positiva - isto é, mais em um, a mais no outro, mas também podem ser negativa - mais em um, a menos no outro. Correlações negativas são muito mais difíceis de compreender, no programa de Nunes et al. (2012) não se incluiu atividades utilizando a correlação negativa. Em nosso estudo também não o incluímos.

Os procedimentos comuns às atividades envolvem a comparação das razões e, por meio destas, constituir argumentos para as escolhas das melhores chances. Na comparação dessas razões poderá ser útil a simplificação do número fracionário. Continuam presentes procedimentos como o desenho da árvore de possibilidades para observação das melhores chances.

Algumas das atividades dessa unidade implicam em induzir para a comparação dos resultados encontrados com as previsões registradas antes da realização dos experimentos.

Na atividade Clube de Danças um procedimento importante é utilizar a comparação das chances em vez de ir direto para o cálculo da fração

encontrando o valor da probabilidade. A realização do sorteio na hora possibilita a visualização da modificação do espaço amostral.

Na resolução há procedimentos de comparar as razões, tomar a decisão e escrever a explicação argumentando sobre as correlações existentes ou não; é esperado que nessa resolução não se levem em consideração informações da experiência social, do cotidiano de vida. Por exemplo, na atividade que envolve o risco probabilístico, é preciso ver alguma evidência que vai confirmar se existe uma associação ou não e argumentar por meio da observação das quatro células da tabela. É desejável, neste trabalho, que se chegue a argumentos do tipo que ao estudar probabilidades deve-se pensar “é mais provável que A acontece se B acontecer”, mas que se entenda que se trata de probabilidades, e não sobre certezas; esperamos argumentos que tenham em consideração este tipo de raciocínio.

#### **4.1.4 SUBCONFIGURAÇÃO EPISTÊMICA-ECOLÓGICA EXPLORANDO PROBABILIDADES**

A última unidade foi por nós denominada Explorando Probabilidades. Ressaltamos que uma vez já perpassado pelas unidades de aleatoriedade, espaço amostral, quantificação de probabilidades e risco, era necessário uma exploração que envolvesse e retomassem os objetos epistêmicos já estudados, conferindo uma ampliação na abordagem dos mesmos, principalmente com respeito às atividades que mobilizem uma reflexão didática pelos professores de forma mais acentuada.

Selecionamos um conjunto de atividades para aprofundar e desenvolver os conhecimentos dos professores sobre a probabilidade do ponto de vista epistemológico que retomassem conhecimentos avançados dos professores como modelos de distribuição de probabilidades. Usamos o termo retomar por que poderíamos em nosso grupo ter professores que já tivessem desenvolvidos tais conhecimentos em sua formação inicial ou continuada. Sem ter esta certeza, acreditamos ser condizente falar em retomada dos conhecimentos.

Na atividade Probabilidades 1 foi apresentado aos professores um exemplo sobre a probabilidade no lançamento de um dado e quatro distintas situações sobre este lançamento. Tal atividade possibilita discutir sobre a epistemologia do conhecimento probabilístico sistematizando os diferentes significados de probabilidade. A atividade possibilita ainda percebermos como os professores se posicionam frente aos exemplos baseados nos diferentes significados de probabilidade. Na pesquisa de doutoramento de Ives (2009), discutida em nosso estudo preliminar, encontramos a aplicação desta atividade com os professores participantes do estudo. Trabalhamos com o estudo de Batanero (2005) em que a autora se debruça sobre os significados históricos da probabilidade. O estudo apresenta os diferentes significados de probabilidade, a saber: intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e axiomático. A autora levanta um questionamento que dialoga com nosso estudo no sentido de identificar quais são os componentes fundamentais do significado de probabilidade, assim como os níveis de abstração adequados em que cada componente deve ser ensinado, para ajudar os estudantes a superar as possíveis dificuldades.

A atividade Que carro comprar foi adaptada do projeto Assessment Resource Tools for Improving Statistical Thinking desenvolvido por Joan Garfield da Universidade de Minnesota nos Estados Unidos da América, disponível em <https://apps3.cehd.umn.edu/artist/>. Esta atividade leva à uma reflexão dos professores sobre como os mesmos prosseguiriam com uma aula envolvendo probabilidade por meio da análise das respostas de três grupos de estudantes. Essas respostas são fictícias e foram criadas para possibilitar a referida reflexão.

Com a atividade Que grupo trapaceou, adaptada dos estudos de Ives (2009), gostaríamos de perceber como os professores entendiam os gráficos construídos por estudantes (também fictícios) para representar os 50 lançamentos de uma moeda.

Na atividade Probabilidades 2 aplicamos duas situações-problemas que envolveram diferentes modelos de distribuição de probabilidades. Ambas as atividades foram retiradas e aplicadas tal como constavam no livro Noções de

Probabilidade e Estatística de Magalhães, M.N; Lima. A.C – Editora EDUSP de São Paulo, edição de 2004.

Por fim, a atividade A tigela de doces, também adaptada dos estudos de Ives (2009) se constitui em uma atividade que apresenta um contexto experimental para que seja estimada a probabilidade de seleção de um dos doces e como isto pode ser feito uma vez que as quantidades não são reveladas.

As atividades 19 e 20 (Que carro comprar e Que grupo trapaceou) do 6º encontro e a 22 do 7º (A tigela de doces) encontro foram selecionadas também como uma forma de avaliar os conhecimentos dos professores ao longo do processo formativo e que ajudassem na nossa análise dos conhecimentos dos professores. Recolhemos as referidas respostas para uma análise posterior.

Os elementos linguísticos mobilizados nesta unidade de estudo perpassam expressões que envolvem a probabilidade junto com a estatística, como por exemplo: “encontrar a probabilidade sem saber antecipadamente as quantidades que compõe o espaço amostral”.

Dados estatísticos são apresentados utilizando-se frações e porcentagens para analisar eventos que sejam mais prováveis ou não de acontecer.

Há representações por meio de um gráfico de pontos (bolinhas agrupadas) e o diagrama da árvore de possibilidades.

Os conceitos principais nesta unidade são:

- Árvores de possibilidades simétricas e não simétricas
- Quantificação de probabilidades
- Significados de Probabilidades
- Variabilidade
- Amostra
- Amostragem Estatística
- Distribuição de probabilidades

Destacamos uma propriedade significativa que com o método de amostragem estatística podemos extrapolar a estimativa para todo o conjunto de dados.

Quando se aplica a teoria de probabilidade à vida real não é preciso formular um modelo matemático para cada caso (GODINO, BATANERO E CAÑIZARES, 1996), existem diversos modelos de distribuições discretas e contínuas com uma aplicabilidade muito ampla. Utilizamos o modelo de distribuição normal de probabilidades na discussão de algumas atividades.

Com o conjunto de atividades implementadas nesta unidade esperamos que os professores se posicionem, no mínimo, validando a probabilidade frequentista como um dos significados probabilísticos importantes e que traz à tona a quantificação de probabilidade por meio da observação das frequências de um determinado sucesso. Dentre os procedimentos possíveis, destacamos a compreensão da realização experimental, como o uso de simulações para encontrar uma determinada probabilidade. Um procedimento estritamente válido seria se posicionar com base na lei dos grandes números.

Acreditamos no surgimento de argumentos em que os professores demonstrem uma compreensão entre a probabilidade clássica e a experimental e, que uma pode ser utilizada para confirmar a outra. A probabilidade subjetiva vai aparecer para reflexão em duas atividades dessa unidade de estudo (na atividade Probabilidades.1, que envolve uma discussão das sentenças sobre a quantificação de probabilidades, bem como na atividade Que carro comprar?). Frequentemente os professores terão que fazer escolhas para tomar decisões com base em uma quantificação de probabilidade por meio da observação de frequências ou com base em opiniões pessoais. Optar por uma tomada de decisão baseada sobre um conjunto de dados maior em vez de uma decisão subjetiva ou pessoal revela também uma compreensão mais coerente com a estatística.

Esperamos que os professores utilizem a árvore de possibilidades para encontrar as respostas às situações-problemas implementadas; sabemos que é possível chegar às respostas sem a construção da árvore e por fórmulas, no

entanto, o melhor procedimento, inclusive para abordar na Educação Básica é o uso do diagrama da árvore.

Nos procedimentos como a utilização de amostras e o tamanho da amostra – por exemplo, os professores podem considerar que um milhão de lançamentos seria mais que suficiente para determinação da probabilidade e utilizar este argumento para validar algumas resoluções por eles realizadas.

Nos argumentos levantados pelos professores também poderemos encontrar referências sobre as limitações da probabilidade clássica – ou seja, que necessitam de um espaço amostral finito e cada resultado sendo igualmente provável. Contudo, acreditamos que o procedimento mais preferido pelos professores será o uso da probabilidade clássica. Um possível procedimento com a atividade da Tigela de Doces é fazer uso de uma abordagem experimental.

Em atividades que envolvem uma análise gráfica, podemos encontrar equívocos de representatividade e que o professor possa não compreender a distribuição de uma amostra estatística; o professor pode pensar que uma distribuição uniforme seria representativa de uma distribuição da amostra estatística, ou de forma contrária que uma distribuição espalhada revelaria a não compreensão da variabilidade de uma amostra.

#### **4.2 CONFIGURAÇÃO INSTRUCIONAL (MEDIACIONAL – INTERACIONAL)**

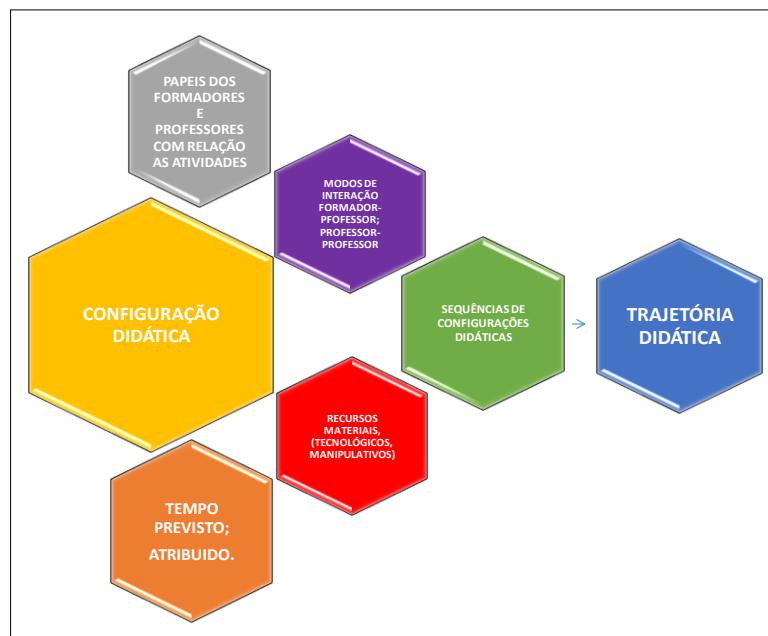
A descrição dos recursos instrucionais utilizados para implementação do desenho pode ser entendido como uma articulação entre as facetas mediacional e interacional do EOS. A mediacional trata dos recursos tecnológicos e da atribuição do tempo envolvidos nas distintas ações e processos de estudo. A interacional trata da interação entre os formadores e professores e a sequência de atividades desenvolvidas para o aprendizado e a negociação de significados que um processo de estudo envolve. Dessa forma descrevemos os recursos instrucionais desenhados para este processo formativo.

Um caráter deste desenho, que considera a formação em aspectos didáticos sobre probabilidade, consiste numa intervenção nossa, em momentos

cruciais, para favorecer uma discussão sobre as referidas atividades pensando no trabalho do professor na sala de aula com os estudantes; é preciso provocar discussões, durante a formação que levem o professor à reflexão sobre sua prática docente. Zeichner (1992; 1998) aponta que uma atitude de reflexão do professor sobre a sua própria prática é fundamental e necessária.

Apresentamos na Figura 14 o diagrama dos principais elementos que envolvem uma configuração didática instrucional.

**Figura 14: principais elementos de uma configuração didática instrucional**



Fonte: O autor, 2017.

Pautados nas ideias de Imbernón (2009) sobre formação de professores a nossa comunicação com os professores se deu de forma horizontal e no conhecimento compartilhado pelo grupo em formação. Ainda segundo este autor,

a assessoria (formação) tem sentido quando, a partir da igualdade e da colaboração, diagnostica obstáculos, fornece ajuda e apoio ou participa com os professores, refletindo sobre sua prática. Isso significa que o professor, que parte de uma realidade determinada, busca soluções para as situações problemáticas que a prática comporta. (IMBERNÓN, 2009, p.94).

Neste sentido, o nosso papel na formação foi o de formadores mediadores. Desde o primeiro contato com os professores, explicitamos a

nossa postura ideológica concernente ao processo formativo que ora estava para se desenvolver.

Para cada encontro os professores recebiam uma pauta com a proposta a ser vivenciada durante o encontro. Em cada pauta incluímos uma frase para instigar reflexões iniciais sobre a temática do encontro. Essas frases serão apresentadas no capítulo da implementação.

Organizamos uma apresentação de slides que fosse guiando o desenvolvimento conceitual e promovendo uma facilitação das interações nos encontros durante todo processo formativo. Os professores tinham um tempo para vivenciar as atividades e posteriormente um tempo para a discussão. Para uma melhor interação entre os professores e a praticidade na aplicação das atividades, na maioria das atividades os professores trabalharam em duplas não fixas, ou seja, a cada encontro os professores poderiam escolher o seu par, podendo ser o mesmo ou não; no entanto, dependendo da natureza da atividade, a mesma foi vivenciada em grupo e/ou individualmente. Ao fim da discussão de cada atividade sistematizávamos os objetivos daquela respectiva atividade e como ela se enquadrava no desenho geral da formação.

Neste texto compreendemos por atividades os jogos em computador, os jogos com materiais manipuláveis, problemas e situações-problemas, que foram selecionadas para o desenvolvimento das unidades de estudo. Em algumas destas atividades recolhemos as respostas dos professores de forma impressa para que fosse possível uma análise da prática matemática, quando necessária.

Um dos recursos instrucionais utilizados na implementação das quatro unidades de estudo constitui-se na elaboração de um livreto para acompanhamento das atividades pelo professor e para registros quando necessário. Também, ao final da implementação de uma determinada unidade de estudo os professores recebiam um texto denominado Texto de Estudo e Guia de Aplicação sobre a unidade estudada; desta forma ao final da formação o professor teve consigo todas as atividades desenvolvidas junto com algumas reflexões teóricas incluindo sugestões de aplicação em sua sala de aula.

Outro recurso para ajudar na celeridade com respeito à apresentação das atividades, momentos de resolução e socialização, foi a utilização de slides em todos os encontros.

Com respeito aos recursos utilizados lançamos mão de materiais manipulativos e tecnológicos. Ora tínhamos atividades que envolviam diferentes tipos de material manipulativo (figuras, dados, conchas, etc.), ora atividades que era necessário o uso do computador e outras em que apenas um material impresso foi utilizado (Quadro 6).

Como podemos verificar no quadro 6 algumas atividades se constituem em jogos; na aplicação com os professores alguns desses jogos eram vivenciados para podermos ter um entendimento do mesmo, contudo, no guia das atividades fornecido aos professores descrevímos que na aplicação com os estudantes uma pontuação pode ser registrada para condizer com as características de um jogo; o livreto oferece este suporte. Na verdade todas as atividades do programa de ensino de Nunes et al. (2012) se constituem em jogos; das atividades que selecionamos, algumas delas, jogamos com o intuito de compreender como se dá tal atividade e não apenas jogar.

Principais recursos e tics	Atividades	Natureza das atividades	Fontes
Material impresso	2, 3, 6, 9, 11, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22	Situação-problema e problema	Nunes et al. (2012); caderno do professor de sp (2009); Ives (2009); Garfield – Projeto Artist; Magalhães e Lima (2004).
Material manipulativo	4 (bolas de gude), 8 (dados e dominós), 12 (conchas), 13 (fichas), 16 (figuras)	Jogo e situação-problema	Nunes et al. (2012) ; Zaslavsky (2009); Contreras (2011).
Computador	1	Jogo	Nunes et al. (2012).
Material manipulativo associado com uso do computador	5 (dados), 7(figuras), 10 (post-it)	Jogo	Nunes et al. (2012).

Quadro 6: Resumo dos recursos instrucionais

Fonte: O autor, 2017.

As atividades foram adaptadas de diferentes fontes da literatura sobre o ensino e aprendizagem de probabilidade, desde autores nacionais como internacionais. Como parte constitutiva da nossa configuração didática houve momentos durante os encontros para enunciações, definições, procedimentos e justificações, por nós e pelos professores sobre os conhecimentos em jogo. Além de momentos de interação, de trabalho em grupo, de compartilhamento das ideias (explicar, questionar, argumentar) e socialização coletiva de respostas e estratégias.

Com respeito ao tempo, desenhamos o encontro de forma que não excedesse a quatro atividades por encontro, uma vez que junto com essas atividades lançávamos mão de uma configuração que demandava um tempo maior, como por exemplo, o tempo para socialização e discussão. Como cada encontro foi planejado com duração de 4 horas acreditávamos que o tempo disponibilizado era suficiente.

#### **4.3 CONFIGURAÇÃO COGNITIVA-AFETIVA**

Com já discorrido em nosso estudo preliminar, sabemos por meio da literatura e da nossa convivência com os professores as nossas dificuldades com relação ao conhecimento probabilístico por uma diversidade de motivos.

Almejávamos que os professores criassesem uma maior identificação com os conhecimentos probabilísticos e reelaborassem significados atribuídos ao ensino da probabilidade na Educação Básica. Conforme Pietropaolo et al. (2015) os professores nem sequer estão convencidos da dignidade do ensino de probabilidade no currículo de matemática na Educação Básica.

Uma das questões por nós já apontadas no estudo preliminar em relação à aprendizagem e aos conhecimentos didáticos-matemáticos sobre probabilidade são que “a tradição cultural e educativa orienta para um pensamento mediante explicações determinísticas” (KONOLD, 1989) e que os docentes de matemática do Ensino Básico apresentam dificuldades sobre os referidos conhecimentos quando se trata da probabilidade. Logo, pretendíamos que eles aprendessem muito mais sobre a probabilidade, e não menos importante sobre o ensino de probabilidade.

Um fato curioso foi que, em outros observatórios da educação realizados pelo grupo de pesquisadores ao qual este projeto de pesquisa está incluído, os próprios professores que ora participavam dos encontros e palestras apontaram a importância de uma formação que abordassem a probabilidade na Educação Básica. Assim, acreditamos na possibilidade de um envolvimento afetivo dos professores pelo fato da formação atender a uma solicitação deles. Muitos destes professores participaram deste nosso programa formativo.

A proposta de formação por nós desenvolvida tem estreita relação com a afetividade do professor. Altefender (2005) reitera que,

os professores, muitas vezes, ao avaliarem os processos de formação mencionam sentimentos como o de serem usados como objetos de pesquisa, de não serem respeitados em seus interesses, necessidades, ritmo e processo, ou apresentam queixas como dicotomia entre teoria e prática por parte dos formadores e sobre a falta de isomorfismo entre a formação que recebem e o tipo de educação que lhes é pedido que desenvolvam. Os formadores, por seu lado, apontam nos professores resistência, medo de mudar, pouco comprometimento e falha na formação inicial. (ALTEFENDER, 2005, p.4)

Para uma formação que visa uma ampliação dos conhecimentos que o professor possui e um maior desenvolvimento cognitivo, de um grupo que se propõe a estudar, particularmente as noções que envolvem a aleatoriedade e a probabilidade, imprime em nós esta necessidade em que a faceta cognitiva articulada com a afetiva, permite-nos que nos posicionemos como escrito por Fusari, “descobrir, desvelar aquilo que está coberto, velado, permitindo o seu posicionamento consciente”. Tal posicionamento implica um olhar crítico para que possamos desenvolver ações que levem em conta as necessidades do professor e ainda, promovam condições para que ele seja proficiente em sua prática profissional.

O que pretendemos, ainda do ponto de vista cognitivo-afetivo, por meio da implementação do desenho, é uma integração que considere as condições de vida e de trabalho dos professores participantes. Gatti (2003) ressalta que os processos de formação continuada só se tornam significativo quando levam em consideração as condições sociopsicológicas e culturais de existência das pessoas em seus nichos de habitação e convivência, e não apenas suas

condições cognitivas. Corroboramos com o pensamento de Gatti que, “metaforicamente, diríamos que a alavanca tem que se integrar ao terreno para mover o que se pretende mover” (GATTI, 2003, p.6).

## 5. TRAJETÓRIAS DIDÁTICAS

---

A descrição das trajetórias didáticas, de acordo com o nosso referencial teórico, consiste na observação das interações entre os professores, entre professores e os recursos e avaliação do formador sobre as aprendizagens alcançadas. Em nosso caso para descrever as interações acontecidas e as referidas aprendizagens na fase de implementação do desenho, analisamos o registro audiovisual e, quando necessário, analisamos as atividades por meio dos protocolos elaborados pelos professores.

A aplicação das noções de configuração e trajetória didática (GODINO, CONTRERAS E FONT, 2006) permite realizar uma análise detalhada de:

- a) a implantação progressiva dos significados institucionais implementados;
- b) as aprendizagens e sua dependência dos formatos de interação que em realidade ocorrem, e finalmente;
- c) o uso dos recursos e da organização do tempo.

Neste tipo de análise o foco da atenção é:

- O conteúdo efetivamente tratado.
- Os padrões de interação entre os formadores e docentes.
- O reconhecimento dos conflitos semióticos e interacionais que ocorrem e a forma em que são abordados pelo formador e os docentes.

Com intuito de deixar mais claro para o leitor, a descrição das trajetórias didáticas geradas mediante a implementação foram organizadas pela ordem das unidades de estudo, a saber: aleatoriedade, espaço amostral, quantificação de probabilidades e risco, e explorando probabilidades. Optamos em apresentar o estudo das atividades por meio dos tipos de problemas e práticas (matemáticas e didáticas) também neste capítulo.

## 5.1 DESCRIÇÃO DA TRAJETÓRIA DIDÁTICA GERADA PARA O DESENVOLVIMENTO DA UNIDADE ALEATORIEDADE

Esta unidade foi implementada em dois encontros com todo o grupo de professores participantes. Na teoria do EOS essas atividades podem ser compreendidas como tipo de problemas e práticas que podem ser aplicadas para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores. Particularmente, nesta unidade, estes problemas e práticas envolvem as noções sobre o objeto epistêmico aleatoriedade.

### 5.1.1 TIPOS DE PROBLEMAS E PRÁTICAS (MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS)

De início apresentamos aos professores uma figura no slide para contextualizar a temática da formação. A figura, de domínio público, retratava antigos jogadores de dados na cidade italiana de Pompeia (Figura 15).

**Figura 15:** slide inicial do programa formativo



Fonte: O autor, 2017.

Explicitamos as noções que sustentam o conceito de probabilidade e como se daria o processo formativo por meio de unidades de estudo. Chamamos ainda a atenção para a inovação curricular presente no programa formativo: “Habitualmente na escola com nossos estudantes iniciamos o estudo da probabilidade já pela quantificação, muitas vezes, com definições e fórmulas; aqui propomos o inverso”. As unidades de estudo propostas para o

programa formativo são: aleatoriedade, espaço amostral e quantificação de probabilidades, incluindo uma unidade denominada Explorando Probabilidades.

Uma vez expostos os objetivos da formação e da temática desta unidade de estudo interrogamos os professores com o seguinte questionamento: Como poderíamos definir aleatoriedade? Como explicar um fenômeno aleatório? Almejávamos que os professores burlassem suas ideias sobre aleatoriedade e sobre como explicar o que seria um fenômeno aleatório tendo em vista que no diagnóstico inicial constatamos que nem todos dominavam a noção de aleatoriedade. Procedemos a uma discussão coletiva da noção de aleatoriedade antes da realização das três atividades que protagonizaram este primeiro encontro. Disponibilizamos um tempo para que os professores falassem no grande grupo as suas opiniões sobre o questionamento em hora. Mediante o que foi discutido nessa socialização, que apresentaremos posteriormente intervimos com uma explicação envolvendo as ideias provenientes da física moderna. Questionamos sobre o fato de a matemática escolar trabalhar pouco com os fenômenos não-determinísticos aos quais afirmamos a importância dessa discussão.

Seguidamente, apresentamos dois slides intercalados pelas reflexões dos professores. Um slide apresentava o questionamento sobre a função *random* (encontrada em diversos equipamentos de música; é uma palavra da língua inglesa que significa aleatório) e o outro slide apresentava diversos exemplos sobre situações aleatórias e que são possíveis de levar para uma discussão em sala de aula.

**Figura 16: slide sobre a função random**



Fonte: O autor, 2017.

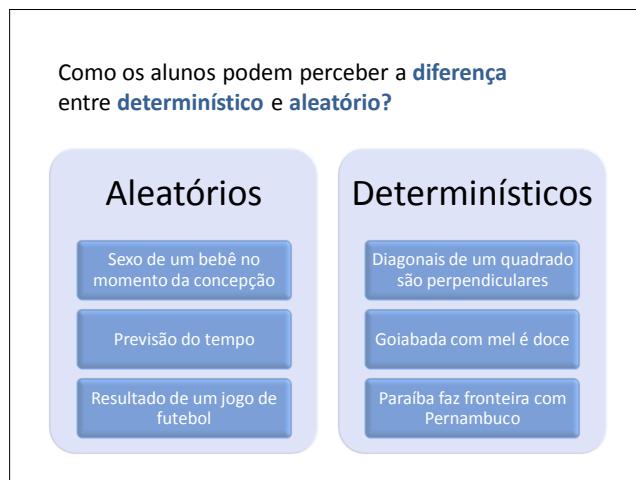
Selecionamos um exemplo de situação aleatória que podemos encontrar em nosso contexto cotidiano, neste caso, a função *random*, muito comum nos aparelhos de música. Com isto, tínhamos a pretensão de aproximar os professores da temática e facilitar a percepção de situações que envolvem um evento aleatório. Na discussão sobre a função *random*, a princípio alguns professores dizem que sim e outros que não com respeito à aleatoriedade desta ferramenta. Um dos professores ao afirmar que “não”, justificou pelo fato da possibilidade de programar a ferramenta musical para escolher uma determinada música, mas o próprio grupo se encarregou de esclarecer a função desta ferramenta *random*.

Continuamos sistematizando a noção de que em uma seleção aleatória podemos conhecer os resultados possíveis; direcionamos para o grupo pensar sobre exemplos que podem ser trabalhados na sala de aula dos anos finais do Ensino Fundamental. Por fim apresentamos uma lista de exemplos nos quais diferenciados entre os fenômenos determinísticos e os fenômenos aleatórios.

Para dar conta de uma discussão sobre as diferenças entre fenômenos determinísticos e aleatórios apresentamos alguns exemplos que nos servissem de fundo para desencadear essa discussão. Mesmo que acreditássemos que os professores de matemática apresentam uma concepção formada sobre os referidos eventos incluímos um momento para essa reflexão guiada para conduzir a uma discussão que envolvesse a prática docente do professor de

matemática. O questionamento foi: Como os alunos podem perceber a diferença entre determinístico e aleatório? E nesse espaço reflexivo pensar em como nós professores poderemos levar esses questionamentos para a escola. Incluímos frases que diferenciam situações determinísticas das aleatórias.

**Figura 17: slide das situações aleatórias versus determinísticas**



Fonte: O autor, 2017.

Na figura 17 temos as frases apresentadas aos professores. A proposta se constituía em analisar, discutir e envolver os professores em temas polêmicos sobre o que é determinístico e o que é aleatório. Além disso, esta ação serve como certa revisitação desses conceitos para que possamos adentrar e aprofundar as discussões posteriores.

Houve grande polêmica entre os professores sobre a lista de exemplos apresentados, no entanto, com a discussão ficou claro para os professores as diferenças entre situações determinísticas e situações aleatórias. Após deixarmos os professores apresentarem seus pontos de vista, retomamos a fala clarificando a importância de situações que nos levem a discutir noções que são necessárias ao conhecimento probabilístico. Exemplificamos a importância da probabilidade para o desenvolvimento cognitivo das pessoas com a situação de que um casal pode ter tido oito filhas, no nono, a probabilidade de ter uma filha ainda é a mesma. Contribuindo ainda mais, trouxemos um exemplo do contexto cultural internacional sobre o fato da probabilidade está ligada às tomadas de decisões em nosso cotidiano com o caso da atriz Angelina Jolie. A atriz tomou uma decisão para realizar uma

mastectomia preventiva (cirurgia de retirada dos seios), tendo em vista a grande probabilidade de manifestação deste câncer em casos análogos ao dela.

Concluído este episódio anterior, partimos para a implementação das atividades desta unidade sobre aleatoriedade, são elas: 1.Jogo de Caça-Níqueis, 2.Impossíveis versus Improváveis e, 3.Atividade com o número Pi, descritas a seguir.

O Jogo de Caça-Níqueis é um jogo de computador sobre sequências aleatórias e determinísticas. O jogo foi explicado e os professores, organizados em duplas, começaram a jogar e a pensar as diversas estratégias para descobrir as chaves-lógicas inerentes ao objetivo do jogo.

#### 1. Jogo de Caça-Níqueis

Objetivos: Identificar padrões previsíveis e aleatórios por meio de um jogo no computador. O jogo propicia aos participantes pensar e aprender sobre sequências de eventos (neste caso, sequências de respostas corretas) como uma forma útil de tentar ver se algo é aleatório ou não. Ao identificar um padrão é possível verificar se este padrão se aplica ou não para a sequência em questão; os participantes podem questionar a existência de um padrão.

Materiais:

- Computador para uma dupla • Lápis
- Livreto para registro das jogadas, das estratégias e decisões sobre os padrões

Como fazer:

Dois participantes por computador. O primeiro jogo pode ser colocado na tela como exemplo para garantir que todos compreenderam. Cada par pode iniciar por um jogo diferente para não ser influenciado por ouvir o raciocínio de outros participantes.

Jogo 1a	Jogo 1b	Jogo 2	Jogo 3	Jogo 4a	Jogo 4b
abc	cba	257	hbt	132	213
bot	tob	143	clu	376	637
acp	pca	872	sbp	548	485
clo	olc	761	ssd	794	479
acg	gca	793	sbp	928	289
bdc	gab	269	tlb	124	241
bds	sdb	186	jmu	248	248
chl	lhc	326	hbp	168	681
cls	slc	971	cbw	346	463
ops	spo	247	dsj	137	137
cdg	gdc	182	mst	594	459
los	sol	389	ljd	396	639
acp	pca	968	hsb	378	837
dps	spd	695	ttd	158	815
aco	oca	921	sbb	356	635
cps	spc	941	smp	792	279
cdo	odc	659	bjw	154	415
cds	sdc	875	cmu	748	487
clt	tlc	134	htw	526	265
				374	437
previsível	previsível	previsível	previsível	previsível	previsível
imprevisível	imprevisível	imprevisível	imprevisível	imprevisível	imprevisível

Circule os jogos que você acha que são previsíveis ou imprevisíveis / aleatórios.

Explique quaisquer padrões que você consegue identificar:

Jogo 1a	
Jogo 1b	
Jogo 2	
Jogo 3	
Jogo 4a	
Jogo 4b	

Há seis jogos diferentes; cada jogo tem 20 imagens (simulação de uma máquina de caça-níqueis). Alguns são jogos onde se pode descobrir a chave (o padrão) que lhes permitirá obter a resposta correta, porque há uma lógica por trás disso que deve ajudá-los a prever. Em outros jogos, não existe uma chave. Não há lógica na sequência, que foi gerada aleatoriamente por um computador e, assim, não se pode prever a resposta certa.

Apresentamos no quadro 7 os jogos e seus padrões e variáveis.

JOGOS	VARIÁVEL	PADRAO
Jogo 1A	Letras	Alfabético crescente
Jogo 1B	Letras	Alfabético decrescente
Jogo 2	Números	Sem padrão (aleatório)
Jogo 3	Letras	Sem padrão (aleatório)
Jogo 4A	Números	Números ímpares primeiro em ordem crescente e depois os pares em ordem crescente
Jogo 4B	Números	Números pares primeiro em ordem crescente e depois os ímpares em ordem crescente

Quadro 7: Padrões e variáveis do Jogo Caça-níqueis

Fonte: O autor, 2017.

Os participantes têm que entrar com a sequência que eles pensam ser a resposta correta para o padrão e clicar em conferir.

**Figura 18: exemplo da imagem do jogo Caça-Níqueis**



Fonte: Nunes et al. (2012)

Caso erre, a resposta correta vai aparecer. Utilizar o livreto de registro para ajudar a verificar se há algum padrão emergente e usar isso para tentar prever a próxima sequência. Discutir em pares e escrever qualquer coisa que notar sobre as sequências. Se os jogadores decidirem que esta não era uma ideia correta sobre a sequência, eles devem escrever por que não funcionou. No jogo com números, é preciso usar o conceito de número par e ímpar e, no caso de se jogar com crianças, elas podem precisar de uma explicação sobre pares e ímpares.

Reservamos um tempo para a vivência do jogo pelos professores .Para o jogo 1a alguns professores pensaram em rotação – mudar de lugar as figuras. Uma professora disse que ao analisar as sequências, pensou nos intervalos entre as letras do alfabeto. No jogo 1b a chave-lógica foi encontrada mais rapidamente por ser também de ordem alfabética, porém no sentido inverso. Convidamos todos os presentes a socializar as observações, conjecturas e possíveis descobertas; nós, como formadores, conduzimos a reflexão dos professores abordando a noção de previsível/determinístico versus aleatório.

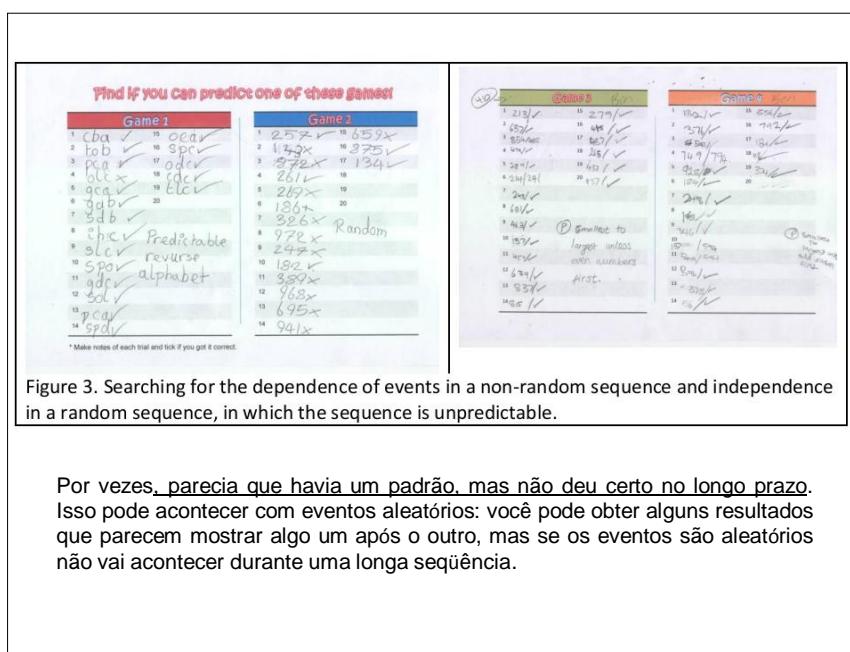
Discorremos sobre a possibilidade de adaptação das chaves-lógicas criando outros padrões. Nesse momento de socialização apresentamos algumas estratégias testadas por algumas duplas ao vivenciar o jogo 2 (números aleatórios). Instigamos os professores a falar o que se pode dizer sobre a referida sequência. Um terceiro grupo disse que a mudança tem a ver com a mudança da cor, seguiram a teoria dizendo: cores diferentes colocar na ordem crescente. Voltaram ao inicio para constatar o que haviam levantado

como hipótese. Chegaram a fazer uma tabela em Excel; por fim o grupo percebeu que a hipótese levantada não era a correta. Concluímos junto com os professores que a referida sequência é imprevisível, bem como a sequência do jogo 3 também é imprevisível.

Continuamos com o jogo 4 (padrão previsível: números ímpares primeiro em ordem crescente e depois os pares em ordem crescente) em que propomos resolver coletivamente, professores e formadores. Chamamos a atenção informando que responder coletivamente perde um pouco do potencial da atividade, mas é uma possível forma de se trabalhar quando se tem dificuldades com o quantitativo de computadores, por exemplo. Os professores pensaram diversas lógicas e nós as testamos na hora, até a descoberta da chave-lógica por um dos professores.

Ao final, reservamos um pequeno tempo para a socialização e discussão com a seguinte indagação apresentada em slide: O que podemos dizer ao experimentar o jogo? Selecionamos também resoluções de alunos com o jogo e apresentamos aos professores. Apresentamos a figura 19 com resoluções de um grupo de alunos, fruto da aplicação da intervenção de Nunes et al. (2012).

**Figura 19:** exemplo de resolução de alunos



Por vezes, parecia que havia um padrão, mas não deu certo no longo prazo.  
Isso pode acontecer com eventos aleatórios: você pode obter alguns resultados que parecem mostrar algo um após o outro, mas se os eventos são aleatórios não vai acontecer durante uma longa sequência.

Fonte: Nunes et al. (2012).

Salientamos a importância de trazer para o seio da discussão resoluções de estudantes para serem apreciadas e discutidas pelos professores. Os professores afirmavam que o jogo é mais fácil do que eles imaginavam, e que, a atividade pode fazer com que os alunos raciocinem de maneira agradável em busca de estratégias, desenvolvendo uma competência de investigação. No geral todos concordaram que é um jogo estimulante.

Para as considerações finais sobre o jogo, retomamos algumas reflexões para amarrar as ideias envolvendo a aleatoriedade com o objetivo da atividade; tal ação mediada pela apresentação dos slides. Complementamos a discussão trazendo o que é interessante no jogo e o objetivo do mesmo dentro do programa formativo. Falamos sobre a forma do trabalho na sala de aula, a importância de colocar para os alunos que se deve pensar sobre as estratégias, levantar conjecturas e não apenas jogar por jogar. Retomamos que não podemos tirar conclusões quando repetimos um experimento um número pequeno de vezes, isto tem haver com a lei dos grandes números.

Passamos agora para a atividade do Impossível versus Improvável. Explicamos a atividade e propomos que os professores respondessem em duplas. As discussões das sentenças geraram um bom debate entre os mesmos.

### 1. Impossíveis versus Improváveis

Objetivos: Explorar a diferença entre eventos impossíveis e improváveis. Discriminar as sentenças impossíveis das improváveis e justificar o seu raciocínio. A razão para focar esta diferença é que mesmo os adultos tendem a tratar eventos improváveis como impossíveis e cometer erros que poderiam ter sido evitados se tivessem considerado algo que é improvável, mas possível.

Materiais:

- Conjunto de pares de sentenças impossíveis/improváveis.

Como fazer:

Em duplas, os professores devem ler cada par de frases e identificar a sentença impossível e a improvável. Por motivos didáticos os pares de frases foram organizados por grupos com seis pares de frases. Em seguida, todas as duplas apresentam as razões para a escolha da resposta. Discutir após o término de cada grupo de frases.

Resultados Improváveis e Impossíveis (Aleatoriedade) Grupo 1. Para cada par de sentenças, decida qual deles é impossível ou improvável. Registre o que você escolher.

1. Fazer um guarda-chuva de vidro. / Fazer um guarda-chuva de ar.
2. Crescimento do adulto até voltar a ser criança. / Crescimento do cabelo até os dedos dos pés.
3. Contagem dos pelos do rabo do cachorro. / Contagem das estrelas em uma noite nuvizada.
4. Capturar uma sombra. / Capturar uma mosca com pausinhos.
5. Não comer por 10 dias. / Não comer por 10 meses.
6. Ler os pensamentos de alguém. / Ler os lábios de alguém.

Resultados Improváveis e Impossíveis (Aleatoriedade) Grupo 2. Para cada par de sentenças, decida qual deles é impossível ou improvável. Registre o que você escolher.

1. Andar sobre um fio de telefone. / Andar sobre a água.
2. Viver sem coração. / Viver sem nariz.
3. Nunca esquecer o nome de ninguém. / Saber o nome de alguém sem conhecê-la.
4. Desbloquear uma porta com a mente. / Desbloquear uma porta com um clipe de papel.
5. Viver por 120 anos. / Viver por mil anos.
6. Ouvir um som antes de ser produzido. / Identificar a raça de um cão por seu latido.

Resultados Improváveis e Impossíveis (Aleatoriedade) Grupo 3.

Para cada par de sentenças, decida qual deles é impossível ou improvável. Registre o que você escolher.

1. Colagem de uma casca de ovo quebrada de volta no ovo. / Desembralar um ovo mexido.
2. Uma mulher dando a luz a um canguru. / Uma mulher dando a luz a 20 crianças em uma vida.
3. Falar sem mover os lábios. / Falar duas línguas simultaneamente.
4. Atravessar uma parede. / Atravessar o fogo.
5. Permanecer acordado durante 5 dias. / Permanecer acordado por 5 meses.
6. Ler um livro sem abrir a capa. / Ler um livro de cabeça para baixo.

Esperávamos com esta atividade uma apropriação pelos professores das diversas características de um evento aleatório. Tal apropriação facilita a compreensão ao resolver determinadas situações de conhecimento probabilístico, tanto em uma perspectiva de sua prática profissional para que se tenham elementos para uma boa abordagem em sala de aula, como pessoal na tomada de decisões cotidianas.

Após o estudo dos três grupos de sentenças fechamos a atividade e discorremos sobre o que a mesma mobiliza, sistematizando as noções de possível, provável, improvável e impossível, além disto, salientamos que a proposta da atividade era justamente provocar uma discussão sobre os referidos termos.

Com objetivos de dar continuidade e provocar ainda mais a discussão sobre aleatoriedade trouxemos à tona a atividade que envolve as casa decimais do número Pi do Caderno do Professor de Matemática de São Paulo. Escolhemos também esta atividade por fazer parte de um material que se encontra disponível para os professores dos anos finais do Ensino Fundamental em todas as escolas da rede estadual paulista. A atividade vai sendo respondida na ocasião da leitura e discussão, além de ser apresentada no slide. Nas figuras 20, 21 e 22 apresentamos a referida atividade.

**Figura 20: atividade com o número Pi**

É importante ressaltar, contudo, que, na prática, não precisamos conhecer o valor de  $\pi$  com tantas casas decimais. Na maioria das aplicações, uma aproximação do valor de  $\pi$  com duas casas (3,14) é bastante adequada para garantir precisão em construções, desenhos, etc. Em cálculos científicos, uma aproximação com quatro casas decimais é mais do que suficiente. Por exemplo, o valor de  $\pi$  com 11 casas decimais permitiria calcular a circunferência da Terra com uma precisão de milímetros.

#### **Atividade 5 – Tratamento da informação: a frequência dos dígitos de $\pi$**

O fato de  $\pi$  ser um número irracional, por si só, não é o fator que determina o grau de dificuldade em relação ao seu cálculo. Existem números irracionais cuja representação decimal é previsível, como o número 3,1011011101110... . Nesse caso, embora irracional, é possível identificar um padrão de crescimento nos algarismos decimais. O  $\pi$ , por sua vez, é difícil de calcular porque é um irracional imprevisível: sua representação

decimal não mostra nenhuma regularidade, pois seus algarismos se distribuem aleatoriamente.

A atividade de investigação que propomos a seguir tem como principal objetivo fazer com que o aluno verifique, na prática, a distribuição aleatória dos algarismos que compõem a parte decimal do número  $\pi$ . Com base na sequência dos 260 primeiros algarismos de  $\pi$ , eles deverão analisar a frequência de aparição de cada algarismo e calcular sua porcentagem em relação ao total.

1. Podemos iniciar a atividade questionando os alunos sobre o significado do termo **aleatório**. No dicionário *Aurélio*<sup>1</sup>, encontramos a seguinte acepção: *dependente de fatores incertos, sujeitos ao acaso; casual, fortuito, accidental*. No contexto do estudo do número  $\pi$ , a aleatoriedade está relacionada à dificuldade de prever a sequência dos algarismos que compõem a parte decimal desse número.
2. Em seguida, apresentamos aos alunos a seguinte imagem:



© Conexão Editorial

<sup>1</sup> Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa. 3 ed. Curitiba: Positivo, 2004.

**Figura 21: atividade com o número Pi**

Matemática – 8<sup>a</sup> série – Volume 4

Solicite a eles que observem atentamente a imagem e tentem identificar algum tipo de padrão que se repete nas cores, ou se há alguma lógica na distribuição das cores ao longo da imagem. Dificilmente eles encontrarão algum padrão na sequência de cores exposta.

Essa figura é, na verdade, a representação das primeiras 260 casas decimais do número  $\pi$ , em que cada algarismo foi substituído por uma cor. Por exemplo, os cinco primeiros quadrados correspondem a 3,1415, onde o 3 é representado pelo azul, o 1 pelo vermelho, o 4 pelo amarelo e o 5 pelo laranja. Traduzindo as cores em números, obtemos a representação das 260 casas decimais do número  $\pi$ .

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	3	8	4	6
2	6	4	3	3	8	3	2	7	9	5	0	2	8	8	4	1	9	7	1	
6	9	3	9	9	3	7	5	1	0	5	8	2	0	9	7	4	9	4	4	
5	9	2	3	0	7	8	1	6	4	6	2	8	6	2	0	8	9	9	0	
8	6	2	8	0	3	4	8	2	5	3	4	2	1	1	7	0	6	7	9	
8	2	1	4	8	0	8	6	5	1	3	2	8	2	3	0	6	6	4	7	
0	9	3	8	4	4	6	0	9	5	5	0	5	8	2	2	3	1	7	2	
5	3	5	9	4	0	8	1	2	8	4	8	1	1	1	7	4	5	0	2	
8	4	1	0	2	7	0	1	9	3	8	5	2	1	1	0	5	5	5	9	
6	4	4	6	2	2	9	4	8	9	5	4	9	3	0	3	8	1	9	6	
4	4	2	8	8	1	0	9	7	5	6	6	5	9	3	3	4	4	6	1	
2	8	4	7	5	6	4	8	2	3	3	7	8	6	7	8	3	1	6	5	
2	7	1	2	0	1	9	0	9	1	4	5	6	4	8	5	6	6	9	2	

3. Peça a eles que construam uma tabela de frequência contendo o número de vezes em que cada algarismo aparece na parte decimal. Em seguida, devem calcular a frequência relativa, isto é, a razão entre o número de aparições do algarismo e o total de algarismos considerados, expressa em porcentagem. A tabela obtida deve apresentar os seguintes resultados:

Algarismo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
<b>Frequência</b>	22	26	30	24	30	26	25	17	32	28	<b>260</b>
<b>Porcentagem</b>	8,5%	10,0%	11,5%	9,2%	11,5%	10,0%	9,6%	6,5%	12,3%	10,8%	<b>100%</b>

4. A seguir, proponha que analisem os dados obtidos e respondam às seguintes questões:

a) Qual é o algarismo que mais aparece na sequência? Com que frequência relativa?  
*É o algarismo 8, com frequência relativa de 12,3%.*

b) Qual é o algarismo que menos aparece na sequência? Com que frequência relativa?  
*É o 7, com frequência relativa de 6,5%.*

c) Qual a diferença entre a maior e a menor frequência?  
*A diferença é de 5,8% pontos porcentuais.*

Fonte: Caderno do Professor de São Paulo

**Figura 22: atividade com o número Pi**

d) Se a distribuição fosse equilibrada entre todos os algarismos, qual deveria ser a frequência relativa de cada um?

*Deveria ser de 10%.*

**5. Comentários sobre os resultados obtidos.**

É importante comentar que as frequências obtidas são relativas a uma amostra de 260 algarismos. Se, por exemplo, aumentássemos a amostra para 780 algarismos, o número com a maior frequência não seria mais o 8, e sim o 1 (11,4%) e, com a menor frequência, seria o 5 (9,1%). A diferença entre o número de maior frequência e o de menor frequência cairia para 2,3% pontos porcentuais.

Conforme já havíamos mencionado, um dos interesses em calcular grandes quantidades de dígitos do  $\pi$  é verificar se a distribuição de seus dígitos é aleatória ou não. Os cálculos já realizados tendem a confirmar essa conjectura. Por exemplo, examinando os 200 bilhões de dígitos iniciais do  $\pi$ , Kanada e Takahashi obtiveram a seguinte distribuição:

Algarismo	Frequência	Porcentagem
0	20 000 030 841	10,00002%
1	19 999 914 711	9,99996%
2	20 000 136 978	10,00007%
3	20 000 069 393	10,00003%
4	19 999 921 691	9,99996%
5	19 999 917 053	9,99996%
6	19 999 881 515	9,99994%
7	19 999 967 594	9,99998%
8	20 000 291 044	10,00015%
9	19 999 869 180	9,99993%
<b>Total</b>	<b>200 000 000 000</b>	<b>100%</b>

18

Como é possível notar, a frequência relativa dos algarismos se aproxima muito de 10%, evidenciando um equilíbrio entre os algarismos e confirmando a aleatoriedade dos dígitos de  $\pi$ .

### Considerações sobre a avaliação

Ao final desta Situação de Aprendizagem, a expectativa é de que os alunos tenham ampliado seu conhecimento sobre o número  $\pi$ . A perspectiva histórica, os inúmeros estudos e pesquisas realizadas, a aproximação de Arquimedes, o cálculo gigantesco dos pesquisadores japoneses, a aleatoriedade dos algarismos de  $\pi$  são algumas características que fazem desse número um dos objetos matemáticos mais intrigantes dentro dessa disciplina. Passar pelo Ensino Fundamental sem saber o significado do número  $\pi$  é ser privado de uma das heranças culturais mais valiosas da humanidade.

Ainda que não seja possível tratar desse assunto de forma completa, esperamos que o professor consiga levar para a sala de aula ao menos uma das atividades desenvolvidas. Acreditamos que esse conhecimento mais detalhado do número  $\pi$  vai contribuir para uma aprendizagem mais significativa da Matemática.

O professor poderá incluir uma ou outra questão a respeito das características do número  $\pi$  nas avaliações do bimestre. É importante que essas questões contemplem algumas características importantes, por exemplo:

- que o número  $\pi$  representa uma razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro;

- que esse valor não pode ser expresso por meio de uma razão entre inteiros, ou seja, é um número irracional;

- que é possível obter aproximações cada vez melhores e com mais dígitos das casas decimais do  $\pi$ .

Fonte: Caderno do Professor de São Paulo

Gostaríamos com essa atividade que os professores entrassem em contato com um material que, além de discutir uma temática envolvendo

aleatoriedade, também propiciasse uma reflexão sobre a sequência didática disponibilizada para eles por meio dos Cadernos do professor de Matemática institucionalizado pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo.

Chamamos a atenção para o trecho: “os algarismos se distribuem aleatoriamente” e alertamos que se poderia ter a impressão que na atividade se estaria afirmando que número  $\pi$  é aleatório, mas não é isso, o número  $\pi$  já está determinado; logo, perguntamos: o que quer dizer aleatório aqui? Esse é o objetivo da atividade. Salientamos que de fato existe uma probabilidade de cada algarismo ser 10% e que é preciso compreender que as casas decimais se comportam de forma aleatória.

Concluímos este dia destacando para os professores que as referidas atividades podem culminar com o desenvolvimento da compreensão concernente às noções de aleatoriedade e das características dos eventos aleatórios, particularmente a distinção entre eventos impossíveis e improváveis.

Para o 2º encontro formativo as atividades implementadas continuam com objetivos de possibilitar aos professores uma melhor compreensão sobre a aleatoriedade; contudo podemos ir além das noções sobre impossível, possível, provável e improvável chegando à discussão sobre eventos mais prováveis ou menos prováveis e a noção da lei dos grandes números. As atividades selecionadas para este encontro devem propiciar, de forma cumulativa com as atividades anteriores, o conhecimento do professor sobre as noções que dão base ao conceito de probabilidade, como as diferentes características dos eventos aleatórios, incluindo mapeamentos e representações do espaço amostral, além de uma reflexão para o ensino das mesmas nos anos finais do Ensino Fundamental.

As atividades implementadas foram: 4.Jogo com contadores, 5.Jogo com dados e 6.O caso das moedas.

A atividade Jogo com Contadores foi explicada aos professores e vivenciada de forma individual. Os contadores utilizados foram bolinhas de gude. Pusemos na frente dos participantes as bolinhas de gude nos sacos e demos início ao jogo. O questionamento que faz parte da atividade, após o

sorteio e a primeira previsão, é: Agora, você quer ficar com a sua previsão de cor para o próximo sorteio, ou você quer mudar isso? Alertamos para fazer a previsão em função do sorteio.

#### 4. Jogo com contadores

**Objetivos:** Desenvolver o raciocínio sobre os eventos que são mais prováveis ou menos prováveis de acontecer; compreender que é possível fazer algumas previsões globais embora não se possa dizer com certeza o que vai acontecer para cada evento. Um objetivo importante é que os participantes ao vivenciar o jogo compreendam que é possível pensar logicamente sobre eventos aleatórios.

**Materiais:**

.Bolsa com contadores de 2 cores (em nosso caso utilizamos bolas de gude)

.Lápis

.Livroto:

Jogo 1: Previsões \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

Jogo 2: Previsões \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

Jogo 3: Previsões \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

O que fez você ficar com sua previsão e o que fez você mudar?

.....

.....

**Como fazer:**

Neste jogo, os professores têm de fazer previsões sobre quais cores serão retiradas de um saco opaco. Para cada jogo, o formador ao iniciar diz quantos contadores de cada cor existem no saco e os participantes terão que prever qual a cor é mais provável de ser retirada a cada sorteio. Eles devem escrever uma previsão de cada vez. Os dois primeiros jogos são de não-reposição, os contadores sorteados são deixados de fora do saco. Para o terceiro jogo, os contadores são retornados ao saco cada vez após o sorteio.

**Comando:**

No próximo jogo você tem que fazer previsões sobre as retiradas de bolinhas de gude do saco. Vou dizer-lhe quantas de cada cor há no saco e você tem que prever quais as cores serão retiradas a cada sorteio. Você deve escrever sua previsão de cada vez.

**Jogo 1: (não-reposição) (utilizando como contadores 10 bolinhas de gude)**

Há 10 bolas de gude no saco, 6 são azuis e 4 são verdes. Anote qual a cor da bolinha que você acha que vai ser retirada primeiro.

(Retirar uma azul sem os participantes perceberem)

Agora, você quer ficar com a sua previsão de cor para o próximo sorteio, ou você quer mudar? Anote a sua previsão para a próxima cor da bolinha a ser retirada. O que você decide fazer, ficar ou mudar? Por quê?

(Retire outra azul sem os participantes perceberem, então agora há 04/04).

Agora, você quer ficar com a sua previsão de cor para o próximo sorteio, ou você quer mudar? Anote a sua previsão para a próxima cor da bolinha a ser retirada. O que você decide fazer, ficar ou mudar? Por quê?

Continuar a retirar bolinhas e conduzir os participantes a escrever a sua previsão; ao final da vivência do jogo 1 socializaremos as justificativas do grupo em ficar ou mudar a sua previsão.

#### Jogo 2: (não-reposição) (utilizando 8 bolinhas)

Neste jogo eu tenho 4 bolinhas azuis e 4 bolinhas verdes no saco. Anote qual a cor da bolinha que você acha que será sorteada primeiro. (Olha para a cor chamada/sorteada pela primeira vez)

Agora, você quer ficar com a sua previsão de cor para o próximo sorteio, ou você quer mudar? Anote a sua previsão para a próxima cor da bolinha a ser retirada. O que você decide fazer, ficar ou mudar? Por quê?

Continuar a retirar bolinhas e conduzir os participantes a escrever a sua previsão; após a vivência desta fase, socializar com o grupo porque mudou ou não a sua previsão. Quando estiver faltando apenas um contador para ser retirado, o resultado pode ser determinado e os participantes devem ser capazes de explicar a mudança de incerteza para certeza.

#### Jogo 3: (Reposição) (com 11 bolinhas)

Neste jogo eu tenho 5 bolinhas verdes e 6 azuis no saco. Anote qual a cor de bolinha você acha que vai ser retirado primeiro. (Olha para a cor retirada pela primeira vez)

Vou devolver a bolinha extraída de volta no saco. Agora, você quer ficar com a sua previsão de cor para o próximo sorteio, ou você quer mudar? Anote a sua previsão para a próxima cor da bolinha a ser retirada. O que você decide fazer, ficar ou mudar? Por quê?

Fazer alguns empates para se perceber que a reposição faz diferença comparadas com as situação de não-reposição.

O que fez você mudar suas previsões nos dois primeiros jogos? Como isso foi diferente no último jogo?

Após a realização deste jogo, pretendíamos que os professores raciocinassem sobre a mudança de probabilidades para cada cor nos dois primeiros jogos, enquanto no terceiro jogo as probabilidades são sempre as mesmas porque o contador retirado é reposto de volta no saco. Ao vivenciar o jogo estaremos discutindo os tipos de eventos que surgem no desenvolvimento do mesmo quando prosseguimos com o sorteio dos contadores.

No 1º sorteio saiu uma bolinha azul. Questionamos os professores se continuam com a previsão ou mudam de previsão e, solicitamos a justificativa por escrito. No 2º sorteio saiu outra bolinha azul e fizemos o mesmo questionamento aos professores. No 3º sorteio saiu uma verde. No 4º outra azul e no 5º também foi sorteada uma azul. Explicitamos que já saíram 4 azuis e 1 verde e indagamos ao grupo se alguém gostaria de explicar suas previsões. Após uma rápida socialização sistematizamos os sorteios no quadro. Mencionamos que antes do primeiro sorteio tínhamos 6 azuis versus 4 verdes. Alguns professores explicaram as suas previsões.

Prosseguimos com o jogo 2 onde se tem 4 bolinhas azuis e 4 bolinhas verdes. Durante o sorteio os professores se envolveram com a dinâmica do jogo e vibraram em seus acertos. Continuamos com os sorteios e após alguns sorteios ficamos com apenas 3 bolinhas verdes, daí questionamos que tipo de evento temos com esta situação.

Prosseguindo, iniciamos o jogo 3. Realizado alguns sorteios indagamos sobre as referidas previsões e sobre a ideia mobilizada pelo jogo 3 que envolve a reposição dos contadores.

Sistematizamos quais os eventos podemos pensar com os três jogos de retirada das bolinhas do saco. Para concluir revelamos que no Jogo 1, apenas para o primeiro e o segundo sorteio, houve uma manipulação nos sorteios de bolinhas da cor azul. E ainda, explicitamos que caso se revele para os alunos, a revelação se dê por meio de uma discussão, e que esses casos poderiam sim acontecer; pode até soar estranhos para os alunos – mas poderiam sim

acontecer. Também ressaltamos que ainda não estamos no momento de quantificar e sim de compreender as melhores chances em um determinado evento, ou seja, reiterando a noção sobre as características dos eventos aleatórios.

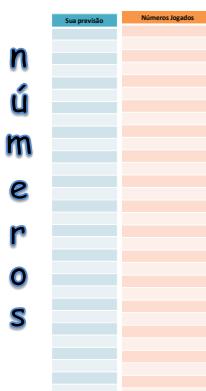
A segunda atividade selecionada para este encontro foi o Jogo com Dados – atividade de número 5. Os professores foram organizados em duplas e na dupla, cada um faz a sua jogada. A primeira parte consiste em fazer uma previsão do resultado do lançamento de um dado e em seguida, realizar o lançamento.

## 5. Jogo com dados

Objetivos: Perceber as diferenças entre eventos que tem a mesma chance de acontecer (espaços amostrais equiprováveis) e eventos com diferentes chances de ocorrer (espaço amostral não-equiprovável).

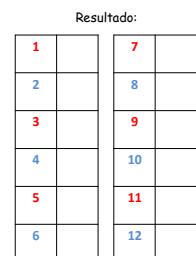
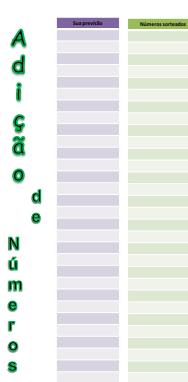
## Materiais:

- .dois dados
  - .lápis
  - .livreto:

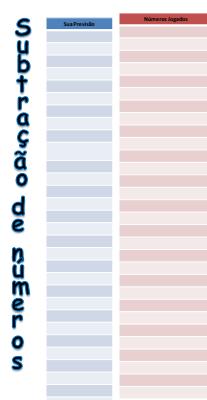


Será que todos os números aparecem com a mesma quantidade de vezes (frequência)?

Você fez boas previsões



Alguns totais são mais prováveis de que outros?  
Por que?



E neste caso, quais totais são mais prováveis de que outros?  
Por que?

**Parte 1 - Previsão de um número (lançamento de um dado)**

Comando:

Vamos tentar prever alguns números que você acha que vai sair ao jogar com os dados. Em primeiro lugar, anote 30 previsões de números entre 1 e 6. Quando tiver terminado as suas previsões, você pode jogar os dados e anotar os números que aparecem nos dados ao lado do suas previsões, para ver quantas você acertou.

Em seguida, com o seu parceiro componha o número total de vezes em que cada resultado (de 1 a 6) foi sorteado nos 60 lançamentos. Observar a frequência total da dupla em que difere do seu resultado individual (30 lances).

Almejávamos que os professores questionassem se todos os números aparecem tão frequentemente como qualquer outro bem como a forma em que realizaram as suas previsões, externalizando as ideias em uma discussão coletiva. Ao final deste jogo esperávamos ter incentivado os professores a levá-lo para a sala de aula e havendo tempo, encontrar os resultados para toda a sala de aula – somando as frequências encontradas por cada dupla, e comparar com os resultados individuais.

Professores discutiram entre si as suas apostas e os resultados dos lançamentos do dado; eles se envolveram com a atividade. Na socialização com o grande grupo, os professores externalizaram a forma como realizavam as previsões.

Fizemos uma reflexão de como poderia ser com os estudantes. Propomos a soma das quantidades das duplas, pois ao somar teríamos o resultado com 60 lançamentos. Estamos aumentando o número de lançamentos e quando aumentamos o número de lançamentos desse experimento ele vai tender para a probabilidade clássica.

Os professores terão que prever agora o resultado da soma dos pontos obtidos no lançamento de dois dados. Também nesta parte da atividade 5, os professores demonstraram envolvimento e se divertiram. Brincaram com os dados. Deram bravos como “acerteiii!!!”.

### Parte 2 - Previsão da soma (lançamento de dois dados)

Comando:

Vamos tentar prever algumas somas dos resultados dos números obtidos com o lançamento de dois dados. Anote 30 previsões da soma dos resultados, por exemplo,  $1 + 4 = 5$ . Quando terminar, jogue os 2 dados e adicione os resultados. Anote os totais ao lado de suas previsões, para ver quantas previsões você acertou.

De um conjunto de resultados possíveis, existe um conjunto especial de casos em que, mesmo que não seja possível prever com segurança o resultado que irá ocorrer, podemos ter um conhecimento confiável da proporção com que esses resultados ocorrerão num grande número repetido de situações semelhantes. Neste momento a atenção está voltada para o fato de que embora não seja possível prever um número específico do resultado da soma, existem algumas somas que são mais prováveis de acontecer do que por exemplo outras: 2 e 12 são as mais improváveis.

Queremos compreender como os professores se posicionarão frente à estas questões importantes e relacionadas com a gênese conceitual de probabilidade. Investigações de situações como esta, tem estreita relação com o desenvolvimento da teoria das probabilidades.

As chances da soma 7 no lançamento dos dois dados, por exemplo, é o total de variação que produz essa soma (1+6; 2+5; 3+4; 4+3; 5+2; 6+1) que é igual a 6, assim, a probabilidade é  $6/36 = 1/6$ .

A distinção entre os dois jogos é que para um único dado os números são igualmente prováveis, mas para a soma dos resultados de dois dados, não são da mesma forma. Logo, a atividade contribui para a compreensão sobre as distinções entre eventos com espaços amostrais equiprováveis e eventos com espaços amostrais não-equiprováveis.

### Parte 3 - Previsão subtração (dois dados)

Comando:

Vamos tentar prever algumas subtrações de números que você vai jogar, anote 30 previsões da subtração dos números obtidos com o lançamento dos dois dados, por exemplo,  $6-1=5$ . Quando terminar, jogue os 2 dados e subtraia o menor do maior número. Anote os totais ao lado de suas previsões, para ver quantas você acertou.

Da mesma forma poderemos enfatizar com este jogo o fato de que embora não seja possível prever um número específico, há alguns que são mais prováveis de acontecer do que outros.

Para abordagem desta atividade, construímos antecipadamente uma planilha para coletar os dados levantados pelos professores na atividade do lançamento de dois dados. O nosso objetivo é que o professor possa compreender a curva normal que representa a frequência do resultado da soma dos números do lançamento de dois dados de uma forma mais dinâmica e com o aparato da tecnologia. Entretanto, não é nosso objetivo discutir os modelos de distribuição de probabilidades.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q
RESULTADO DA SOMA/DUPLAS	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14	D15
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															

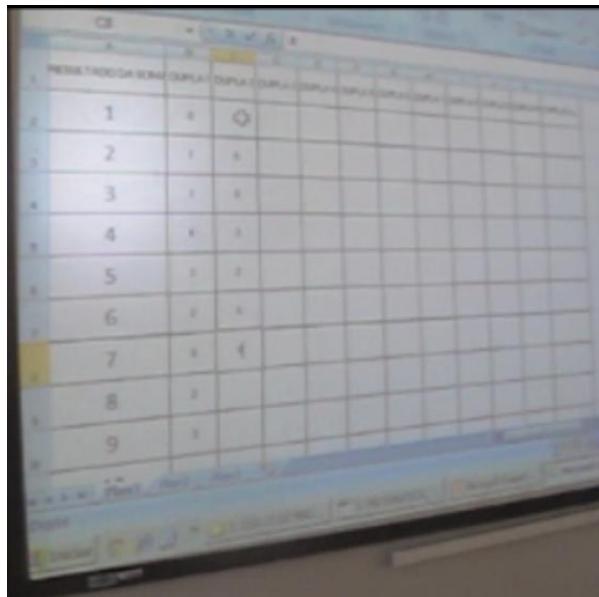
Nessa mesma planilha de forma oculta tínhamos uma tabela programada para a soma das frequências acumuladas. A partir desta tabela também programamos a plotagem dos gráficos conforme as celulas fossem alimentadas com os valores informados pelas duplas de professores.

D1	D1 D2	D1 D2 D3	D1 D2 D3 D4	...
=B2	=B2+C2	=N2+D2	=O2+E2	...
=B3	=B3+C3	=N3+D3	=O3+E3	...
=B4	=B4+C4	=N4+D4	=O4+E4	...
...	...	...	...	...

O primeiro gráfico gerado (coluna D1) vai apresentar a distribuição dos resultados concernentes a 30 lançamentos e últimos gráficos vai representar a distribuição dos resultados concernente ao número de participantes multiplicado por 30.

Coletamos os resultados da soma no lançamento dos dois dados dos professores e fomos alimentando a planilha. Apresentamos o primeiro gráfico que reproduziu os 30 lançamentos de apenas um professor. Continuamos coletando os dados e observando como os gráficos se modificavam por meio do preenchimento da tabela (figura 23).

**Figura 23: coleta dos dados do experimento do lançamento de dois dados**

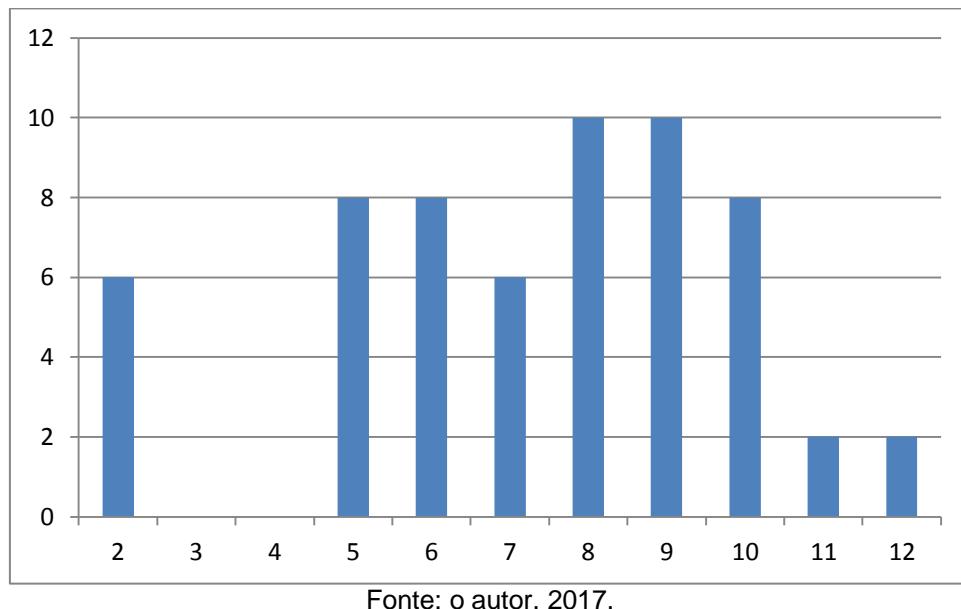


Fonte: O autor, 2017.

Ao final destacamos que o primeiro gráfico (figura 24) representa os 30 lançamentos de um professor e o último gráfico (figura 25) representa 600 lançamentos das frequências acumuladas de vinte professores. A animação dos gráficos permitiu visualizar a modificação que vai ocorrendo na curva da distribuição das frequências. Os professores se surpreenderam e em seus

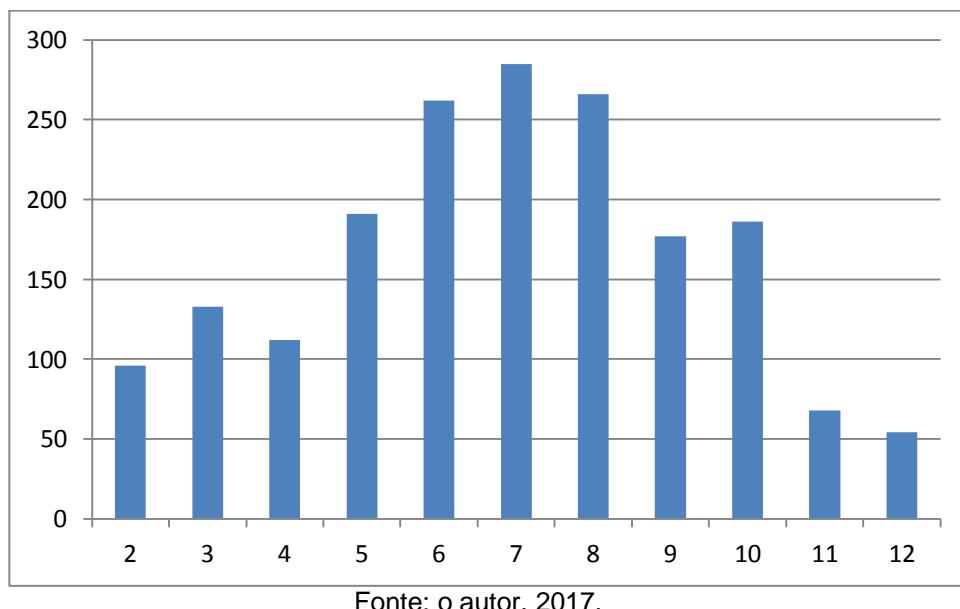
rostos podemos perceber expressões de espanto, inclusive alguns professores externalizaram uma expressão verbal e gestual: “ahhh”.

**Figura 24: gráfico representando o lançamento de um professor**



Fonte: o autor, 2017.

**Figura 25: gráfico representando o lançamento de 20 professores**



Fonte: o autor, 2017.

Consideramos esta atividade como uma prática matemática emergente do conhecimento do professor.

Ista abordagem facilitará a percepção do professor no que diz respeito a ideia sobre a lei dos grandes números. A lei dos grandes números nos diz que a probabilidade de um resultado em um grande número de jogadas idênticas

repetidas está intimamente relacionado com as frequências dos resultados, logo isso tem haver e caracteriza a probabilidade frequentista. A lei dos grandes números foi sistematizada por Bernoulli em torno de 1689 como um dos principais teoremas da teoria das probabilidades, mencionando que a frequência relativa de um evento tende para a probabilidade desse evento, quando  $n$  (número de repetições do experimento) tende ao infinito.

No caso do lançamento de uma moeda, seria correto pensar que em um número reduzido de lançamentos esperarmos que saia a face “cara” metade das vezes, uma vez que sabemos que a probabilidade no lançamento de uma moeda em sair cara é  $\frac{1}{2}$ . E se o número de lançamentos for ímpar poderíamos pensar que isso seria impossível de acontecer. E ainda mesmo que o número de lançamentos seja par, é de se esperar que o resultado real seja diferente de  $\frac{1}{2}$  dada qualquer sequência de lançamentos? Discutiremos essas questões junto com a atividade 6 que vem logo a seguir.

Propomos em nosso desenho o trabalho com os resultados da subtração dos pontos do lançamento de dois dados, mas não realizamos na prática devido à limitação de tempo. Contudo, mencionamos para os professores que poderiam também realizar tal atividade envolvendo a subtração dos pontos. Isto não fere a implementação do desenho e o desenvolvimento da formação com os professores.

A próxima atividade trabalhada com os professores ajuda na compreensão desses pontos possibilitando a continuidade da discussão sobre a lei dos grandes números. Continuadamente, realizamos a atividade 6 – O caso das moedas. Como de costume, a atividade foi explicada para todos os professores e definimos C para cara e K para coroa. Concedemos um tempo para a realização da atividade.

#### 6. O caso das moedas

**Objetivos:** Compreender que em um número relativamente pequeno de lances poderia acontecer por acaso; para identificar um viés é necessário um número suficientemente grande de lances.

**Materiais:**

.Lápis

.Livreto:

<p style="text-align: center;"><b>Aluno 1</b></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; width: fit-content;"> <tr><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>K</td><td>K</td></tr> <tr><td>K</td><td>C</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td></tr> <tr><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>K</td><td>K</td></tr> <tr><td>K</td><td>K</td><td>K</td><td>K</td><td>K</td></tr> <tr><td>C</td><td>K</td><td>C</td><td>K</td><td>K</td></tr> <tr><td>K</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>K</td></tr> <tr><td>C</td><td>K</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td></tr> <tr><td>K</td><td>K</td><td>K</td><td>K</td><td>K</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; width: fit-content; margin-top: 10px;"> <tr><td></td><td style="text-align: center;">Frequencia</td></tr> <tr><td>Cara</td><td></td></tr> <tr><td>Coroa</td><td></td></tr> </table>	C	C	C	K	K	K	C	C	K	C	C	C	C	K	K	K	K	K	K	K	C	K	C	K	K	K	C	C	C	K	C	K	C	K	C	K	K	K	K	K		Frequencia	Cara		Coroa		<p style="text-align: center;"><b>Aluno 2</b></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; width: fit-content;"> <tr><td>C</td><td>K</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td></tr> <tr><td>K</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td><td>K</td></tr> <tr><td>C</td><td>K</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td></tr> <tr><td>K</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td><td>K</td></tr> <tr><td>C</td><td>K</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td></tr> <tr><td>K</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td><td>K</td></tr> <tr><td>C</td><td>K</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td></tr> <tr><td>K</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td><td>K</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; width: fit-content; margin-top: 10px;"> <tr><td></td><td style="text-align: center;">Frequencia</td></tr> <tr><td>Cara</td><td></td></tr> <tr><td>Coroa</td><td></td></tr> </table>	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K	C	K		Frequencia	Cara		Coroa	
C	C	C	K	K																																																																																									
K	C	C	K	C																																																																																									
C	C	C	K	K																																																																																									
K	K	K	K	K																																																																																									
C	K	C	K	K																																																																																									
K	C	C	C	K																																																																																									
C	K	C	K	C																																																																																									
K	K	K	K	K																																																																																									
	Frequencia																																																																																												
Cara																																																																																													
Coroa																																																																																													
C	K	C	K	C																																																																																									
K	C	K	C	K																																																																																									
C	K	C	K	C																																																																																									
K	C	K	C	K																																																																																									
C	K	C	K	C																																																																																									
K	C	K	C	K																																																																																									
C	K	C	K	C																																																																																									
K	C	K	C	K																																																																																									
	Frequencia																																																																																												
Cara																																																																																													
Coroa																																																																																													
<p style="text-align: center;"><b>Aluno 3</b></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; width: fit-content;"> <tr><td>C</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td><td>K</td></tr> <tr><td>C</td><td>C</td><td>K</td><td>K</td><td>C</td></tr> <tr><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td></tr> <tr><td>K</td><td>K</td><td>C</td><td>C</td><td>K</td></tr> <tr><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>K</td><td>K</td></tr> <tr><td>K</td><td>C</td><td>K</td><td>K</td><td>C</td></tr> <tr><td>K</td><td>C</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td></tr> <tr><td>K</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>K</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; width: fit-content; margin-top: 10px;"> <tr><td></td><td style="text-align: center;">Frequencia</td></tr> <tr><td>Cara</td><td></td></tr> <tr><td>Coroa</td><td></td></tr> </table>	C	C	K	C	K	C	C	K	K	C	C	C	C	C	C	K	K	C	C	K	C	C	C	K	K	K	C	K	K	C	K	C	C	K	C	K	C	C	C	K		Frequencia	Cara		Coroa		<p style="text-align: center;"><b>Aluno 4</b></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; width: fit-content;"> <tr><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>K</td><td>K</td></tr> <tr><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td></tr> <tr><td>C</td><td>C</td><td>K</td><td>K</td><td>C</td></tr> <tr><td>C</td><td>C</td><td>K</td><td>C</td><td>C</td></tr> <tr><td>C</td><td>K</td><td>K</td><td>C</td><td>C</td></tr> <tr><td>C</td><td>K</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td></tr> <tr><td>K</td><td>K</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td></tr> <tr><td>K</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>K</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; width: fit-content; margin-top: 10px;"> <tr><td></td><td style="text-align: center;">Frequencia</td></tr> <tr><td>Cara</td><td></td></tr> <tr><td>Coroa</td><td></td></tr> </table>	C	C	C	K	K	C	C	C	K	C	C	C	K	K	C	C	C	K	C	C	C	K	K	C	C	C	K	C	C	C	K	K	C	C	C	K	C	C	C	K		Frequencia	Cara		Coroa	
C	C	K	C	K																																																																																									
C	C	K	K	C																																																																																									
C	C	C	C	C																																																																																									
K	K	C	C	K																																																																																									
C	C	C	K	K																																																																																									
K	C	K	K	C																																																																																									
K	C	C	K	C																																																																																									
K	C	C	C	K																																																																																									
	Frequencia																																																																																												
Cara																																																																																													
Coroa																																																																																													
C	C	C	K	K																																																																																									
C	C	C	K	C																																																																																									
C	C	K	K	C																																																																																									
C	C	K	C	C																																																																																									
C	K	K	C	C																																																																																									
C	K	C	C	C																																																																																									
K	K	C	C	C																																																																																									
K	C	C	C	K																																																																																									
	Frequencia																																																																																												
Cara																																																																																													
Coroa																																																																																													

**Comando:**  
Algumas crianças foram convidadas a jogar uma moeda 40 vezes e registrar os seus resultados. Algumas dessas crianças não chegaram a lançar as moedas e inventaram os seus resultados. Você pode dizer quais crianças que trapacearam?

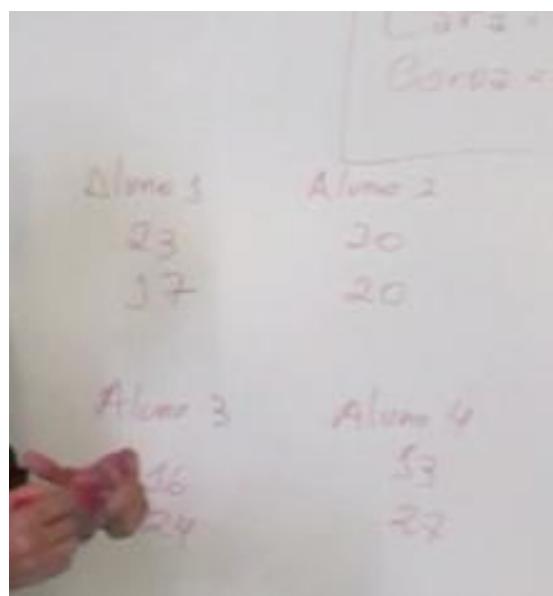
Esta atividade também se encontra no programa de ensino de Nunes et al. (2012). Inicialmente, apresentamos aos professores a atividade e dispusemos um tempo para a discussão entre eles. Os professores podem detectar padrões previsíveis em pelo menos um, e, se observarem com mais atenção, em dois: o aluno 2 constrói a sequência C, K, C, K e assim sucessivamente; o aluno 4 constrói a sequência 3C, 2K, 3C, 1K e, em seguida, essa sequência é repetida.

A ideia é a discussão de padrões previsíveis durante uma sequência longa de lançamentos. Padrões podem emergir se olharmos para apenas uma série menor de lançamentos, mas isso pode acontecer por acaso; é importante o conhecimento sobre a distinção entre o que pode ocorrer ao repetir um experimento um pequeno número de vezes (neste caso, os lançamentos) e aumentar significativamente a quantidade de repetições do experimento. Isso leva em conta a lei dos grandes números discutida na atividade anterior com o jogo de dados. Sobre as questões lançadas anteriormente, concernentes ao lançamento de uma moeda, não seria correto pensar e esperar que tenhamos

a face “cara” metade das vezes em uma sequência reduzida de lançamentos justificando pelo fato da probabilidade teórica de 50%; por que se assim fosse, não nos seria possível ter o valor exato quando nos deparássemos com um número ímpar de lançamentos. A probabilidade frequentista nos traz justamente o fato de se esperar um resultado real diferente de 50% dada qualquer sequência, contudo, quando maior for a repetição do experimento esse valor vai girar em torno dos 50% para cada face da moeda.

Sistematizamos ainda as informações na lousa para deixar mais clara a reflexão resumindo as quantidades de cara e coroa de cada criança. Abrimos espaço para que os professores se posicionassem com respeito à atividade. Diversos professores argumentaram sobre a atividade em questão.

**Figura 26: sistematização na lousa pelo formador**



Fonte: O autor, 2017.

Seguidamente interrogamos os professores com respeito à diferença discutida acima: Como você explicaria essa diferença para um aluno do 7º ano, por exemplo? Dessa forma, o professor se vê diante da necessidade de argumentar sobre a lei dos grandes números e o significado da probabilidade frequentista pensando na referida etapa de escolaridade – 7º ano. O professor deve conhecer a gênese do conceito de probabilidade e as dificuldades históricas na construção desse conceito, ou seja, compreender o conceito do ponto de vista epistemológico. Erros pontuados na história do conceito de probabilidade podem se repetir na sala de aula pelos alunos.

Um dos pontos que acreditávamos estar presente na argumentação dos professores é que, com o número de lances ficando cada vez maior, o desequilíbrio entre caras e coroas tende a desaparecer, o que também envolve a probabilidade estimada com base na frequência dos resultados.

Partimos agora para mobilizar de forma mais enfática o conhecimento didático dos professores relativos às atividades vivenciadas sobre aleatoriedade tomando por base essa unidade de estudo. Retomamos as atividades realizadas nos dois encontros – unidade de estudo aleatoriedade. Indagamos sobre os conteúdos matemáticos que ficaram mais evidentes (para que os professores pensassem nos objetos epistêmicos em termos de conteúdos matemáticos desenvolvidos durante a implementação); sobre as atividades que despertariam maior ou menor interesse dos alunos (estariam assim, pensando no envolvimento e motivação dos estudantes para com as referidas atividades); e sobre a contribuição da sequência de atividades para os anos finais do Ensino Fundamental (fazendo com o que o professor argumentasse sobre as contribuições das atividades para a compreensão dos alunos sobre a aleatoriedade, porém especificamente nos anos finais do Ensino Fundamental).

Concedemos um tempo para os professores respondessem os itens sobre as atividades formativas e recolhemos para também compor nossa análise, caso necessário. Quatro professores falaram sobre as atividades vivenciadas nesta unidade de estudo.

Realizamos uma discussão e sistematização do que tínhamos visto até agora. Conforme estabelecido em nosso desenho formativo foi entregue aos professores o texto Aleatoriedade e Guia das Atividades. Esta ação é para que a cada unidade de estudo os professores tenham todas as atividades discutidas, pois, caso queiram aplicar em suas salas de aula, já terão o material em mãos.

### 5.1.2 ANÁLISE DOS CONHECIMENTOS DOS PROFESSORES NA UNIDADE ALEATORIEDADE

Analisamos nesta seção a ampliação dos conhecimentos dos professores, bem como, a existência de dificuldades e/ou de conflitos semióticos com respeito à implementação da unidade de estudo aleatoriedade.

Como já descrito anteriormente na discussão inicial desta unidade, abordamos o objeto epistêmico aleatoriedade. Foram diversas as ideias dadas pelos professores para definir aleatoriedade. Os professores definiram este termo, ora associando com a palavra acaso, ora como algo que não segue uma lei ou até que não tem interferência externa. Um exemplo é a fala do professor P1: *Aleatoriedade é algo pego ao acaso.*

Aqueles que apresentam uma definição de aleatoriedade associando com o acaso, a nosso ver, têm uma maior consistência com respeito ao significado matemático deste termo. Tal como no diagnóstico inicial algumas definições ainda se distanciavam de uma explicação plausível para este termo. Uma vez já explorados na análise do diagnóstico não entraremos profundamente na análise dessas falas, inclusive, até por que muitas das respostas dos professores aqui estavam repetindo o que eles escreveram no questionário do diagnóstico inicial.

Segundo Azcárate, Cardeñoso e Pórlan (1998), o núcleo do conhecimento probabilístico é a noção de aleatoriedade, que, por ser considerado habitualmente como um conceito óbvio, seu significado nem sempre é analisado com profundidade. Desta forma, os professores em geral podem apresentar dificuldades com o objeto epistêmico aleatoriedade. No entanto, pontuamos que definir aleatoriedade não se revelou uma grande dificuldade para todos os professores participantes do grupo investigado.

Como na fala dos professores percebemos o emprego de palavras como acaso e aleatoriedade, daí aproveitamos e instigamos à uma reflexão sobre a diferença entre acaso e aleatoriedade. Alguns professores começaram a explicar intuitivamente suas ideias e pontuaram que os significados dessas palavras são bem próximos; no entanto, um dos professores conseguiu identificar a diferença envolvendo inclusive a noção de conjuntos e elementos

para dar suporte a sua argumentação. O professor P4 conseguiu construir um exemplo para explicar a aleatoriedade, como podemos observar no trecho a seguir:

P4: No aleatório a gente tem um conjunto determinado, dentro desse conjunto temos os elementos e podemos fazer a seleção desses elementos sem nenhum critério.

F: Então no aleatório podemos conhecer os resultados possíveis.

Pfs: sim! Sim!

P4: Se eu falo que nesta sala alguém vai ganhar um premio, eu sei que o ganhador será alguém dessa sala. Agora se eu falo dar um carro para alguém, e se esse alguém não está dentro de um conjunto determinado, então não temos como saber.

É perceptível que o P4 apresenta tal explicação utilizando como argumento a noção de conjuntos. Indicou que se há a possibilidades de contagem e identificação desses elementos se tem um conjunto determinado, em outras palavras, o professor indicou que é possível conhecer o espaço amostral; com o aleatório é possível pensar sobre esses elementos por que tem conhecimento deles.

Na discussão das diferentes frases sobre determinismo e aleatoriedade os professores puderam amadurecer sua compreensão sobre os significados que envolvem esses termos. Um trecho do diálogo entre os professores, quando da apresentação de um exemplo sobre o sexo de um bebê no momento da concepção, apresentamos a seguir:

P13: Não é aleatório, já é determinado por meio dos gametas; já tem um determinante, quem determina isso é o masculino. [Grande polêmica]

P17: é no momento da concepção e não no momento de nascer. 50% de probabilidade de masculino e 50% de probabilidade em ser feminino.

Batanero, Green e Serrano (1998) dizem que o termo aleatório é usado normalmente como um adjetivo, como: número aleatório, experimento aleatório, variável aleatória. Esse uso tende a se concentrar no objeto que está

sendo descrito como aleatório em vez do significado de aleatório em si. A palavra *aleatório* tanto aparece em termos de linguagem cotidiana, como em termos matemáticos nas salas de aula. De fato, a definição de aleatoriedade é ambígua, e talvez por esse motivo professores e estudantes possam apresentar dificuldades ao lidar com as situações que envolvem a noção de aleatoriedade.

Com a atividade 1 – Jogo dos Caça-níqueis – os professores desenvolveram diversas estratégias para identificar a existência ou não de um padrão para 6 conjuntos de sequências. Esse trabalho permitiu fortalecer a oposição entre a ideia de determinismo e aleatoriedade quando as sequências utilizadas no jogo são possíveis ou não de prever. Destacamos um exemplo a seguir:

F: quando descobrimos a chave lógica o jogo se torna?

Pfs: fácil; previsível; determinístico.

F: Alguém falou determinístico, por que determinístico?

P: por que já sabemos a ordem, a chave do padrão.

F: Agora assim, antes de descobrir que era em ordem alfabética, o que é que vocês conjecturaram? Pensaram?

P5: pensamos que era por animal, por vegetal, por frutas.

P6: pensamos que era para inverter, girar a ordem que aparece.

No momento destinado à socialização, as falas estavam mais relacionadas com a existência ou não dos padrões. Depois conduzimos para que os mesmos pensassem e relacionassem com a aleatoriedade. Com isto os professores compreenderam que quando se descobre a chave-lógica as sequências tornam-se previsíveis. De forma contrária, quando não há um padrão, a ordem dos elementos não pode ser prevista, tornando-a uma sequência aleatória. Na fala do professor P40 temos uma colocação importante que envolve a tarefa de identificar se há ou não padrão nas sequências apresentadas:

P40: de qualquer forma na primeira resposta que ele dá é uma tentativa, por que ele não observa nenhuma regularidade ali. Na primeira vez ele chuta a resposta, ele não vai observar uma regularidade ali. Ai ele vê se acertou a resposta e começa a observar se existia um padrão.

Concernente aos termos e linguagens associados ao campo de problemas da probabilidade tais como: possível, provável, improvável e impossível, os professores parecem confundir os significados desses termos, principalmente, porque consideram o significado de improvável como o mesmo de impossível. Vejamos a fala de P3 e de P19:

P3: Primeiro eu acho assim, em debate com minha colega, a gente tem que explicar o que quer dizer improvável, como é que você está tratando improvável? Por que essas situações que temos aqui, colocamos improvável, mas que é provável.

F: então coloco a questão para o grupo. Vocês têm outro entendimento de improvável?

P19: aqui tem possível também e não só improvável e impossível; mas na discussão encontramos possível.

Quando o P3 fala *colocamos improvável, mas que é provável*, isso pode indicar conflito na compreensão dos significados desses termos. E o professor P19 entende improvável como não sendo possível, ou seja, o improvável significando impossível.

Ainda neste ínterim de discussão entre a contraposição determinístico e aleatório, na atividade 3 – número  $\pi$  –, debatemos se as casas decimais do número  $\pi$  são ou não aleatórias. Ao realizar a atividade proposta, os professores compreenderam que essas casas decimais se “comportam” de forma aleatória. Vejamos as falas de dois professores argumentando sobre essa aleatoriedade:

P6: seria a quantidade de vezes de cada algarismo, de aparecer, que a gente não sabe determinar, a quantidade de cada algarismo.

P25: não tenho um parâmetro para encontrar o próximo, por isso é aleatório; Qual é o próximo?

Este é um fato novo para os professores, por que se comprehende o número  $\pi$  como determinístico; mas discutir sobre a “aleatoriedade” das casas decimais constitui-se em algo enriquecedor tanto do ponto de vista dos exemplos apresentados sobre determinístico e aleatório, como do ponto de vista de um exemplo dentro do conjunto dos números irracionais.

Nas atividades que abordavam eventos mais prováveis ou menos prováveis de acontecer, como a atividade 4 – jogo com contadores – e como a atividade 5 – jogo com dados – mobilizaram as habilidades dos professores em prever a ocorrência de resultados de eventos aleatórios.

Prever algo – seja um acontecimento, seja um sucesso de um evento, em meio a uma situação de incerteza – requer compreender as características desta situação ou evento. Nas diversas situações de caráter probabilístico encontramos eventos mais prováveis ou menos prováveis de acontecer, inclusive por que a maioria das situações de probabilidade no contexto real contempla uma natureza não-equiprovável, ou seja, a probabilidade de diferentes resultados de um experimento não são as mesmas.

Na atividade 4 – jogo dos contadores – os professores realizavam previsões acerca dos resultados (cores das bolinhas) conforme íamos realizando uma série de sorteios. Por meio da análise das falas dos professores identificamos que eles compreenderam o fato de ser sorteada uma cor, modifica o espaço amostral para o sorteio seguinte, já que não houve reposição de bolinhas durante o sorteio neste jogo. Uma vez que o espaço amostral vai se modificando, para realizar a previsão deve-se considerar esta modificação nas quantidades das cores. Entretanto, alguns professores afirmaram que estavam realizando suas previsões com base na intuição. Vejamos o diálogo a seguir em um dos momentos da realização do jogo com as bolinhas de gude:

P2: por que aí entra a maior probabilidade e a probabilidade igual

F: E aí como você explica isso: probabilidade ou probabilidade igual? Por que ainda não estamos falando de probabilidade; estamos falando o que é que faz você mudar de previsão.

P2: na primeira eu coloquei o azul por que tinha mais azuis do que verde; usei quantidade, sem usar probabilidade, usei quantidade!

F: na 1<sup>a</sup> alguém colocou verde? Podem falar, não tem certo nem errado; vamos discutir.

P1: eu coloquei azul. Eu senti que seria azul rsrsrs e acertei.

F: E o segundo lançamento? Após sair uma azul, ficamos com 5A x 4V.

P2: eu continuei com a mesma.

P8: eu coloquei a verde, levei a intuição, por meio da variação, variar os resultados.

F: então você acredita que devemos levar a intuição em conta?

P8: não necessariamente, eu errei né.

P9: a gente leva a intuição não, eu quero verde! Poderia sair na primeira, existe uma possibilidade né, só que levando em consideração a azul é bem maior.

F: E aí, saiu uma azul. Para o terceiro sorteio ficamos com 4A x 4V. E agora você continua com a mesma ou você troca de previsão?

Outro ponto ao vivenciar os dois jogos sem reposição nesta atividade, é que se pode em um dado instante ficar apenas com bolinhas de uma única cor. Esse fato aconteceu na formação, em que foram sorteadas todas as bolinhas azuis, restando, apenas três bolinhas verdes. Naquele momento, questionamos os professores sobre as previsões anteriores e sobre a atual previsão e como poderíamos denominar esse tipo de evento. Não houve dificuldades nas respostas dos professores que corretamente indicaram que seria uma situação determinística ou um evento certo.

Nos jogos em que há sorteios com reposição dos elementos, os professores, de uma forma geral, também não apresentaram dificuldades com respeito à compreensão de que as chances eram as mesmas e que os resultados eram equiprováveis. Entretanto, destacamos a fala de um dos professores:

P2: aí eu mudei.

F: por quê?

P2: Por que eu achei que ia ser muita repetição, como a quantidade agora é igual, então eu alterei por que achei que seria demais sair de novo azul. E também por intuição eu coloquei verde.

F: Você está falando pra gente aqui pelo fato de ter saído azul?

P2: Achei que três vezes na sequência sair azul [pensa] Então eu acho que seria demais; eu mudei para verde.

Observando este episódio, percebemos que a professora P2 afirma que preferiria mudar de cor da bolinha por que já saiu muito uma mesma cor. Dessa forma a professora P2 ao discorrer que os sorteios anteriores poderiam influenciar o próximo sorteio revela um conflito semiótico que está em desacordo com o significado de referência para essa situação probabilística. Em sorteios com reposição dos elementos as probabilidades desses elementos se mantêm.

Também na previsão do número no lançamento de um dado, foi perceptível a compreensão sobre a equiprobabilidade nos resultados desse experimento quando os professores afirmaram que não tinham preocupação em escolher um determinado número em sua previsão. Incluímos algumas falas socializadas nessas situações:

P6: eu nem pensei! Fui colocando qualquer número.

P38: eu pensei aleatório!

F: por que você foi colando qualquer número sem pensar?

P6: Porque não dá pra prever assim, é muito aleatório; eu não tive sequência, eu não tive padrão, eu fui jogando qualquer número, às vezes eu repetia, às vezes não repetia.

Em uma dada justificativa (professor P8) é citada a palavra intuição. Daí, entramos com uma pergunta intencional sobre intuição, e aí, mais um professor (P7) relatou que decidiu de forma intuitiva.

F: quem foi pela intuição?

P7: Eu fui pela intuição.

F: Por que você foi pela intuição?

P7: Por que tem as mesmas quantidades né? O que viesse aí né... qualquer uma que viesse.

F: Será que pelo fato de sabermos que são as mesmas quantidades, será que vamos pela intuição mesmo ou estamos fazendo uma análise dessas quantidades?

Por conseguinte, o professor P25 rebate e valida o fato de não se deixar levar pela intuição.

P25: mas se fosse 10A e 4V. Quando eu levo a intuição, penso errado, posso errar pela intuição.

Vejamos que com este pensamento o professor alerta para a situação que mesmo que exista uma maior chance de sorteio da cor azul, mesmo assim, poderíamos errar, pela intuição. Apesar de que realmente é mais provável o sorteio de uma cor azul, mas não temos essa garantia. Diríamos ainda, que na verdade, os professores estão falando a palavra intuição, mas implicitamente estão realizando um estudo das quantidades. Também ressaltamos que ainda não estamos no momento de quantificar e sim de compreender as melhores chances em um determinado evento, ou seja, reiterando a noção sobre as características dos eventos aleatórios.

Curiosamente, na previsão do número no lançamento de um dado, identificamos professores que afirmam apostar sempre no mesmo número ou em um número médio. Amir e Williams (1994) nos alerta que as crenças parecem ser os elementos da cultura com a maior influência sobre o pensamento probabilístico. No extrato a seguir apresentamos as falas desses professores:

P23: eu coloquei todos iguais.

F: por quê?

P23: Por que é sorte, é a loteria. A chance de sair um ("número") é tudo igual; Peguei o número médio, o 4 né e coloquei. Acertei seis vezes, foi o segundo que mais saiu. Foi uma previsão razoável.

P25: comecei aleatoriamente, é 1 em 6, escolhi um aleatoriamente e chutei. Por que é igual aí né, é 1 em 6. Aqui no nosso lançamento, o 4 saiu duas vezes, o 2 saiu sete vezes. Quanto maior os lançamentos a tendência é eles se equiparem, se igualarem.

P10: eu entendi que se eu colocasse sempre o mesmo número, éee, eu estaria com uma possibilidade mais fácil né de acertar; por que se eu ponho o 2, sai 3, por que se eu ponha o 3 sai o 2 – risos – então eu achei que eu posso colocar sempre o mesmo número.

P?: eu escolhi o 4 por que tava no meio

A estratégia de P23 (colocar todos os iguais) ou a do P25 (colocar aleatoriamente) são estratégias corretas por que evidenciam o fato da equiprobabilidade dos números, e daí, não importaria repetir, escolher sempre o mesmo ou escolher aleatoriamente, sem contar que cada sorteio é um evento independente. No entanto, o P23 diz que a escolha para esse número igual foi o 4 que ele considera um número médio, seguido de outro professor (P?) que também afirma ter escolhido o 4 por que estava no meio. Este fato nos indica que, estes professores – P23 e P? – tem uma noção limitada da equiprobabilidade dos resultados. O professor P25 já apresenta em sua fala uma noção sobre a lei dos grandes números.

Em relação às previsões para o resultado da soma dos pontos a serem obtidos em trinta lançamentos de dois dados, destacamos a conversa do P1 com P23:

P1: isso aqui que é importante, essa simetria final. Eu acertei 2 em 30.

P23: os dois extremos [refere-se aos resultados 2 e 12] deram zero, só tinha uma possibilidade. Engraçado quando você joga dois dados o resultado mais possível é o 6, 7 mais o 8, que é um número bastante provável; o 6, 7 e 8 são os números mais prováveis.

P1: mas aqui não foi assim.

P23: não por que o 9 saiu mais vezes.

P1: o 4 também saiu bastante.

P23: você consegue determinar qual é o mais provável de sair, tem um que é mais fácil sair e outros mais difíceis de sair. No outro não, eram todos iguais.

Os dois professores discutem sobre o que aconteceu no experimento deles, mesmo os números mais prováveis de sair não aparecerem e também, números menos prováveis, como o 4, aparecerem em seus lançamentos em uma quantidade maior. Outro professor, em sua fala, também revelou seu pensamento sobre os resultados mais prováveis e que em seus lançamentos foram os que menos saíram. Analisando este diálogo parece-nos que os professores esperavam que nos 30 lançamentos realizados por eles houvesse uma distribuição frequencial atendendo aos resultados mais prováveis ou menos prováveis de acontecer. Tal situação traz a evidência de que a convergência não se manifesta em um número pequeno de tentativas (BATENERO, FERNANDES E CONTRERAS, 2009). Essa concepção, segundo Mlodinow (2011) foi denominada como Lei dos Pequenos Números, pois, este é um nome sarcástico para descrever a tentativa errônea da aplicação da Lei dos Grandes Números, em situações que envolvem um pequeno número de tentativas. É comum no cotidiano, as pessoas tirarem conclusões e tomar decisões a partir de observações esparsas e insuficientes.

Percebemos certa descrença de alguns professores com as afirmações de que as somas mais prováveis seriam a 6, 7 e 8. O professor comenta:

P7: então, mas os resultados mais prováveis foram os que menos deram.

Com a colocação do professor P7 há claramente uma insatisfação e uma descrença devida ao fato de os mais prováveis terem sido os de menor frequência para algumas duplas de professores. Temos aqui um conflito semiótico no qual o professor tenta validar as chances de um resultado em uma pequena sequência de lançamentos, em um pequeno número de repetições desse experimento. Com isso, se revela não compreender o que preconiza a lei dos grandes números.

Diversos autores (DOLLARD, 2011; CABRAL JÚNIOR, 2009) em estudos que envolvem professores indicam conflitos com a ideia da lei dos grandes números e probabilidade frequentista. Tais estudos apontam que os professores ignoram a lei dos grandes números, que é o suporte teórico para esta abordagem.

Chamamos atenção para o grupo de professores sobre a diferença entre as duas situações nesta atividade com os dados; a primeira envolvendo um espaço amostral equiprovável, uma vez que as chances dos resultados no lançamento de um dado são as mesmas com probabilidade de 1/6; a segunda atividade um espaço amostral não-equiprovável, pois temos resultados das somas dos pontos obtidos no lançamento de dois dados com mais chances de ocorrer, como a medida da chance de se obter o resultado da soma 2 com probabilidade de 1/36 diferente do resultado da soma 7 que é 6/36. Como discorremos na seção anterior esse momento se constituiu como uma prática emergente do conhecimento dos professores. A visualização dos gráficos possibilitou que os professores aprendessem sobre a lei dos grandes números e dissipassem as dúvidas que ora alguns ainda pudessem ter com respeito às diferenças das frequências observadas em um número pequeno de lançamentos para as frequências observadas quando se aumenta este número de realização do experimento. Entretanto, não houve um aprofundamento com respeito a aprendizagem dos diferentes modelos de distribuição quando do estudo do gráfico, apenas citamos que tal gráfico se comporta mediante uma distribuição normal de probabilidades.

A atividade 6 – O Caso das Moedas – na qual se analisam resultados fictícios de quatro alunos sobre quarenta lançamentos de uma moeda, contribuiu com a compreensão dos professores envolvendo ainda a lei dos grandes números. Observando as falas na socialização verificamos que os professores alcançam a compreensão sobre a importância de analisar padrões quando se tem um número pequeno de realização de um experimento.

.P12: O aluno dois a gente já começa pensando: deu muito certinho; aí tem dois pontos: mas pode acontecer? Pode!; por que a gente vai chegar pro aluno e falar, olha você tem 50% de sair um e 50% de sair outro, agora na prática acontece? pode acontecer!

.P6: Mas olhando a tabela o padrão é muito certinho.

.P12: Ai deixa um ponto de interrogação nas outras da seguinte forma, se é 50% por que em um deu 23 e no outro 17, aí já não é mais 50% para cada um. Deixa uma incógnita na cabeça da criança, no caso falando da criança, eu to falando que é 50% então tem que dar 20 e 20, então por que ta dando 23 e 17?

.P6: Mas os 50% é em um lançamento só, uma vez. Esses 50% é em uma vez.

.P40: A distribuição aí está muito forçada.

.P37: cara, coroa, cara, coroa, não foi uma jogada do aluno por isso tem 50% e 50%.

.P1: foi um ajeitado; uma enrolada.

Analizando a fala do professor P12 percebemos que ele aborda uma questão interessante sobre a probabilidade teórica. A fala do professor P6 pode indicar que o mesmo não entende a probabilidade frequentista. Entretanto, ao explicar novamente o significado dos 50% de probabilidade no lançamento de uma moeda sair cara ou coroa; o professor P6 demonstra compreender que este valor é a probabilidade teórica. Na continuidade do dialogo é perceptível que as ideias estão se acomodando:

F: o professor P12 trouxe uma questão aqui, que o aluno pode fazer um questionamento sobre os resultados finais e achar que deveria aqui no final também dizer 50 e 50%. E como a gente pode explicar isso?

P6: Que 50% é em um lançamento; então em um lançamento você tem 50% cara e 50% coroa[ ]. Mas em 10 lançamentos você não tem a certeza de ter 50% cara e 50% coroa, que vai acontecer.

Com a implementação deste conjunto de atividades pertencentes à unidade de estudo sobre aleatoriedade podemos sintetizar que os professores construíram ou revisitaram o significado de acaso e aleatoriedade versus determinismo. Adentraram em discutir sobre sequências de padrões previsíveis e aleatórios. Apropriaram-se dos significados dos diferentes tipos de eventos de um experimento aleatório, tais como: evento certo, evento provável, evento improvável e evento impossível. Contrapondo com estes tipos de eventos também se apropriaram das situações em que abordam eventos mais prováveis ou menos prováveis de acontecer e que uma análise de tais situações é necessária para pode tomar boas decisões, como no caso das previsões de um número resultante da soma no lançamento de dois dados. Realizar previsões em meio a situações de incerteza é uma prática matemática primordial no estudo de probabilidade.

Além disto, vivenciaram e discutiram situações probabilísticas análogas à urna de Bernoulli com e sem reposição dos elementos. E nos casos em que não há reposição de elementos o espaço amostral se modifica e desta forma as chances de sucesso de um determinado evento também. Somando-se a isto temos também as diferenças entre eventos com espaços amostrais equiprováveis e eventos com espaços amostrais não-equiprováveis.

Convém destacar que houve aprendizado com respeito à linguagem característica do estudo da probabilidade, uma vez que os professores confundiam termos tais como experimentos e eventos, e também possibilidades, chances e probabilidades.

O cálculo da probabilidade por meios das frequências observadas também se constitui em um aprendizado para os professores, este tipo de cálculo não era validado por eles; na atividade de construção dos gráficos vivenciamos com eles uma probabilidade calculada *a posteriori*, depois de realizar o experimento. Assim, foi desenvolvido o raciocínio de que é aceitável aproximar o valor da frequência relativa de um acontecimento para o valor da probabilidade teórica quando da experimentação repetida um grande número de vezes. Indicamos esta como uma prática emergente para o desenvolvimento do conhecimento comum dos professores e que tínhamos previsto em nosso desenho.

Possibilitamos aos professores mergulhar em questões importantes e se posicionar frente a situações que resgatam a epistemologia do conceito de probabilidade. Ao investigar, vivenciar e discutir coletivamente as situações que implicaram nos termos probabilísticos, tipos de eventos aleatórios, lei dos grandes números e a probabilidade frequentista estreita-se com o desenvolvimento do raciocínio probabilístico.

Assim, do ponto de vista cognitivo, é possível afirmar que os professores desenvolveram o raciocínio que em eventos de natureza aleatória os resultados nem sempre são igualmente prováveis e ainda, que é possível pensar logicamente sobre esses resultados. Os professores compreenderam que é possível pensar logicamente sobre eventos aleatórios, ou seja, é

possível fazer previsões de resultados de eventos aleatórios com maior consciência ainda que não se tenha certeza do resultado.

Concernentes a esta unidade e as reflexões voltadas para a sala de aula os professores apresentam pensamentos que evidenciam essa articulação entre a atividade que ora estão vivenciando e a sua referida prática docente.

Os professores consideraram os seguintes conteúdos matemáticos relacionados à probabilidade: razão, proporção, frações e os diferentes resultados de eventos aleatórios.

A professora P40 apresenta uma reflexão bem elaborada sobre a possibilidade de se trabalhar com os alunos os números irracionais e a probabilidade:

P40: um dos conteúdos são os conjuntos numéricos. [...] Os cálculos envolvem os números racionais, mas também com os irracionais é possível fazer uma relação com a probabilidade, ainda mesmo que seja só com o  $\pi$ ; entre dois racionais existem infinitos racionais e o trabalho com a probabilidade, se avançarmos, pode mostrar que se nós colocarmos uma ponta de lápis bem fininha sobre uma reta a probabilidade de tocar um racional é zero, são muito mais irracionais; é com a probabilidade que isso é provado. São conteúdos que estão ligados e não podemos deixar a oportunidade de mostrar.

Quanto a questão sobre quais atividades que poderiam despertar o maior ou menor interesse dos alunos, destacamos a fala do professor P32:

P32: Talvez o que causasse menos interesse seria o do  $\pi$ . O  $\pi$  ta longe da vida dos alunos. Os outros vão despertar; o primeiro [Computer Game] vai despertar bastante.

A maioria dos professores apontou a atividade do Computer Game e a do Jogo das Bolinhas e Jogo com Dados os que despertariam maior interesse dos alunos em sala de aula e, o que despertaria menos interesse seria a atividade do Impossível versus Improvável e a do número Pi. Entremeio às discussões das atividades destacamos pensamentos que revelam que os professores constantemente faziam referência a sala de aula, comentando, por exemplo, se os alunos teriam ou não dificuldade de realizar determinadas atividades.

Sobre as contribuições das atividades para a compreensão dos alunos sobre aleatoriedade nos anos finais do Ensino Fundamental unanimemente os professores pontuaram que há contribuições. Em relação às atividades propostas os professores destacaram que elas poderiam:

P9: Desenvolver o ato de pensar de varias maneiras

P10: facilitar o entendimento da parte teórica por meio do lúdico

P14: iniciar a discussão sobre eventos aleatórios, e introduzir de forma lúdica, noções que são apenas definidas formalmente nos livros didáticos.

Em relação à atividade do Pi os professores em geral a consideraram difícil e que ela poderia ser desenvolvida a partir do 9º ano. A fala do professor P19 pode atestar esse fato:

P19: Do Pi seria interessante apresentar no 9º ano quando faz a conclusão final de conjuntos.

De modo geral, com essa unidade de estudo pudemos apontar que houve ampliações de forma consistente na base de conhecimentos dos professores sobre o conceito de aleatoriedade e sobre o ensino do mesmo.

## **5.2 TRAJETÓRIA DIDÁTICA GERADA PARA O DESENVOLVIMENTO DA UNIDADE ESPAÇO AMOSTRAL E QUANTIFICAÇÃO DE PROBABILIDADES**

O desenho da unidade espaço amostral e quantificação de probabilidades foi organizado para ser implementado em dois encontros distinguidos como 3º e 4º encontros. Aplicamos as atividades selecionadas e apresentadas no desenho com o grupo de professores para a mobilização de práticas matemáticas e didáticas para mapeamentos e representações de espaços amostrais, eventos dependentes e independentes, comparação entre razões para decisão da melhor chance e quantificação de probabilidade.

### **5.2.1 TIPOS DE PROBLEMAS E PRÁTICAS (MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS)**

O terceiro encontro é iniciado com uma explicação sobre a disponibilização do material da primeira e segunda unidade de estudo em meio virtual, além do texto que denominamos como Guia sobre Aleatoriedade.

Perguntamos se alguém leu o referido texto. Como resposta, boa parte dos professores não tinham tido tempo de ler o material; todavia o objetivo desta ação é que os professores tenham consigo o material para futuras aplicações caso desejem.

Logo a seguir, retomamos o que foi discutido sobre aleatoriedade e introduzimos o objeto epistêmico pertinente à 2<sup>a</sup> unidade. Situamos em que parte do programa formativo nós estávamos: espaço amostral e quantificação de probabilidades. Realizamos uma rápida reflexão sobre a frase inicial do encontro: *“Deus quis que os homens se divertissem com muitos e muitos jogos, pois eles trazem conforto e dissipam preocupações.”* (Alfonso X, rei de Castela, 1252-1284).

Os processos que envolvem este encontro têm como foco possibilitar a compreensão e a construção de conhecimentos sobre as diversas formas de mapeamento de espaço amostral. A ideia é romper com uma perspectiva comum na epistemologia do ensino de probabilidade que consiste diretamente na apresentação de fórmulas e algoritmos para cálculos, além da possível articulação com o que já discutimos na primeira unidade de estudo.

Como de costume, mas não menos importante, relembramos a importância da interação e participação de todos, bem como da importância do diálogo. As atividades implementadas neste 3º encontro foram: 7.Matrix Game; 8.Jogo com Dados e Dominós; 9.Saco de Doces e suas variações e, por último, 10.Blocos no Saco.

Este conjunto de atividades implementadas com foco no objeto epistêmico espaço amostral, pretende desenvolver as habilidades de mapeamento e o registro dos elementos do espaço amostral com uso de diferentes representações tais como tabelas e o diagrama da árvore de possibilidades. Pretende ainda discutir sobre a importância do mapeamento por meio da árvore de possibilidades e seu uso nos problemas de probabilidade, além da imersão em situações nas quais é necessária a redução dos elementos de um espaço amostral e o desenvolvimento do raciocínio para pensar sobre os eventos mais prováveis ou menos prováveis. Em atividades de probabilidade é preciso determinar quais são todas as possibilidades de

resultados de um experimento no contexto desta referida atividade. O conjunto de todos os resultados possíveis, geralmente definido como *Espaço Amostral*, desempenha um papel essencial para compreensão das chances e da probabilidade dos resultados de um experimento aleatório. De acordo com Novaes e Coutinho (2009), não podemos calcular o resultado de um experimento aleatório com precisão, no entanto, podemos determinar o grau de incerteza na sua ocorrência, ou seja, a probabilidade.

O leitor perceberá que neste apartado as atividades 7 e 8 serão apresentadas tal como estão direcionadas para o trabalho com os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Todavia, na implementação, este fato é trabalhado com os professores como reflexão para a aplicação em suas salas de aula.

Solicitamos a organização dos professores em duplas. Explicamos a primeira atividade deste encontro, no nível 1, com um exemplo para todo o grupo.

#### 7. Matrix Game

O referido jogo está dividido em três partes que estão articuladas. Em cada parte descreveremos os respectivos objetivos.

Materiais:

- .Computador para cada par de participantes
- .Problemas Matrix Game dos níveis 1 ao 5
- .Livreto (com todas as figuras pertinentes ao jogo)
- .Figuras impressas para manipulação durante o jogo (ex: chapéus, copos, bocas)

1<sup>a</sup> parte - objetivos: Interpretar uma tabela de dupla entrada, identificando regularidades de modo a prever corretamente as imagens que faltam, descrevendo suas características e justificar as escolhas. Logo, a habilidade envolvida é a de analisar e fazer previsões.

Comando:

Para cada pergunta você vai ver uma tabela. Você pode notar que algo está faltando. Em pares, vocês vão se revezar para responder as perguntas sobre a imagem que falta em cada tabela. Você tem um livreto com uma página para cada tela do computador, com as respostas possíveis rotuladas de A – F.

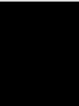
Como fazer

O jogador busca a solução indicando cada uma das propriedades em falta e diz

ao seu parceiro, por exemplo: “Eu estou procurando um carro que é amarelo”, ou “Eu estou procurando um barco que é cor de rosa”. Desta forma, o jogador, não devem fazer suposições ou chutes, mas sim pensar, e dizer a seu parceiro as propriedades. Para cada propriedade que identificam corretamente, é marcado um ponto.

Na figura 27 segue um exemplo da tabela apresentada na tela do computador.

**Figura 27: exemplo de tabela do Matrix Game**

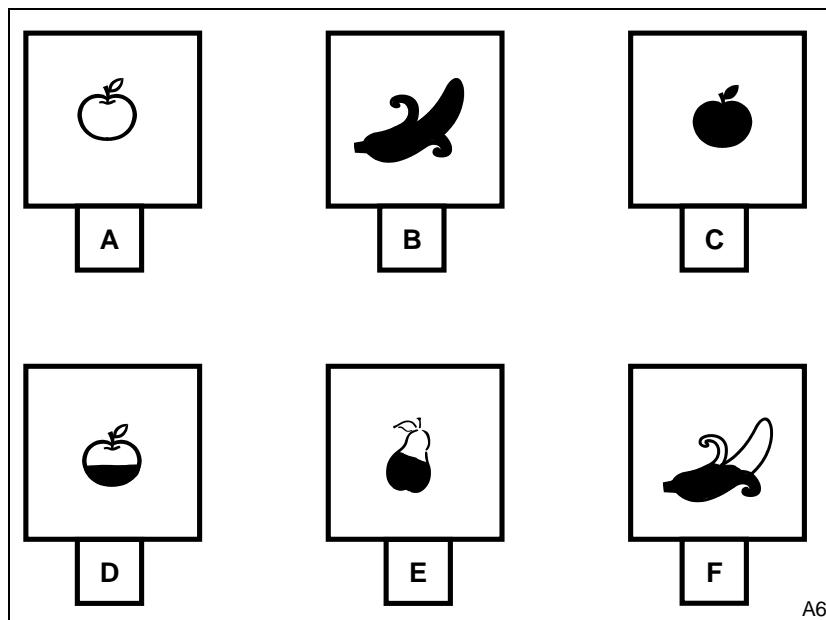
	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
			
			
			
<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D
<input type="checkbox"/> E	<input type="checkbox"/> F		

A6b

Fonte: Nunes et al., (2012).

O jogador deve escolher uma resposta dentre as apresentadas no livreto (A, B, C, D, E ou F). O outro jogador registra sua escolha na folha de pontuação antes de clicar na tela do computador sua resposta.

**Figura 28: exemplo da folha para respostas**

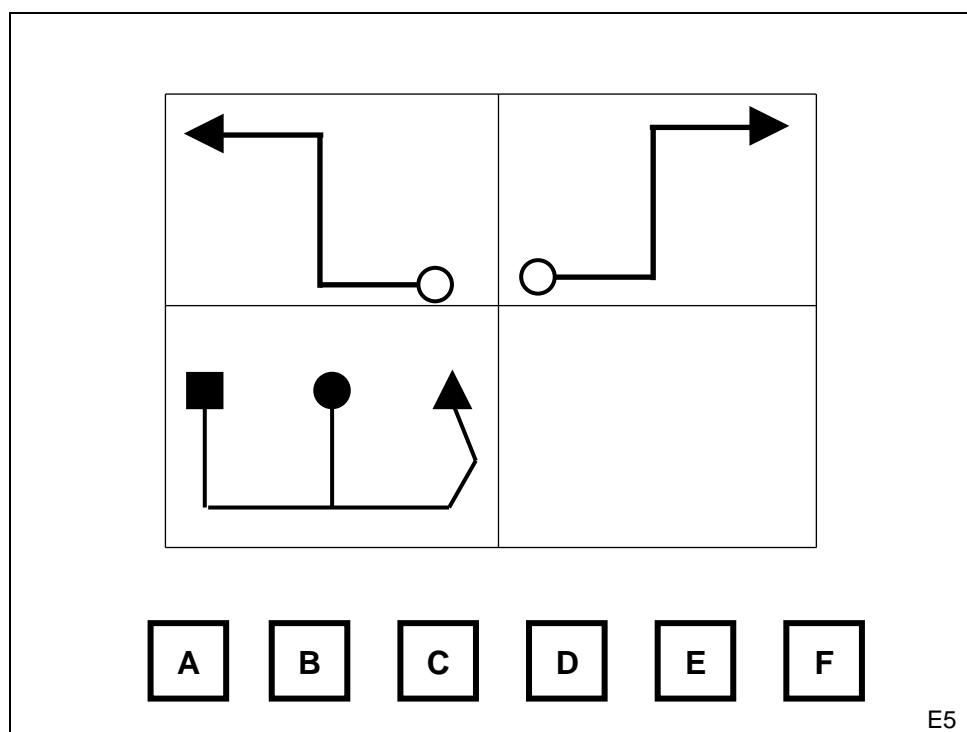


Fonte: Nunes et al., (2012).

Depois de clicada a resposta, aparecem na tela dois símbolos: um para correto e outro para errado. Se a resposta for correta, ele ganha 2 pontos, caso contrário ele deverá fazer uma segunda tentativa, e se acertar marca 1 ponto. Se ainda estiver incorreta, ele deverá fazer tentativas até que acerte a resposta. Na terceira, quarta e quinta tentativas ele não ganhará pontos. Na sexta e última tentativa ele perderá um ponto.

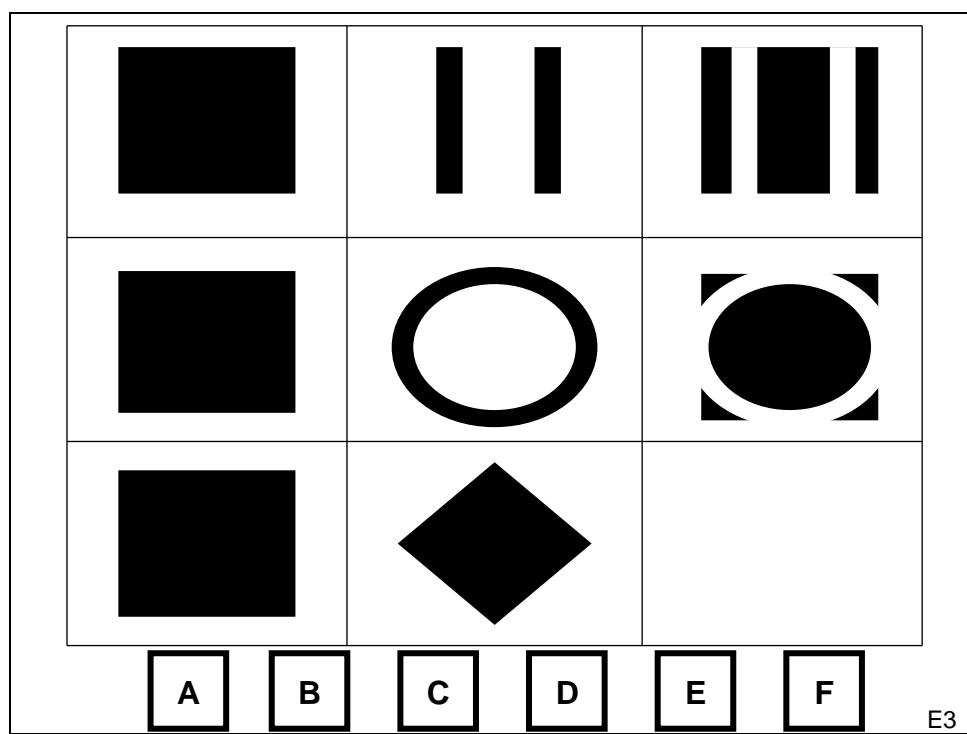
Os jogadores de cada dupla a cada jogo deverão trocar de função (o “clicador” passará a ser o marcador e vice-versa). Os participantes devem se revezar para iniciar o jogo quando de níveis diferentes. Os diferentes níveis articulam diferentes propriedades dos elementos utilizados em cada tabela; por exemplo, perceber a rotação de uma forma geométrica envolvendo a ideia de simetria e/ou formas sobrepostas, como nas figuras 29 e 30.

Figura 29: exemplo do jogo Matrix Game



Fonte: Nunes et al., (2012).

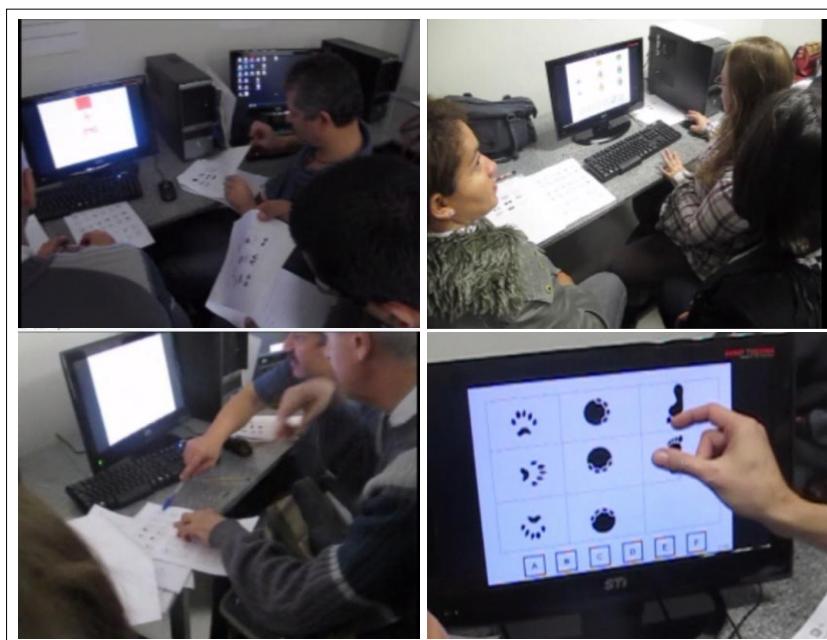
Figura 30: exemplo do jogo Matrix Game



Fonte: Nunes et al., (2012).

Os professores jogaram durante um tempo destinado para a vivência do jogo. É possível perceber o envolvimento deles com a atividade. Os professores tentam compreender, trocam ideias entre as duplas, comentam sobre a lógica e discutem as características das imagens; um professor comenta que parece pegadinha, há descontração na realização da atividade. Apresentamos quatro imagens provenientes da implementação desta atividade (Figura 31).

**Figura 31: aplicação do jogo Matriz Game com os professores**



Fonte: O autor, 2017.

Transcorrido o tempo para a vivência do jogo perguntamos se os professores estavam gostando do jogo e eles responderam afirmativamente. A maioria das duplas conseguiu chegar até o nível 3. Questionamos sobre os diferentes níveis e sobre o que os jogos nos diferentes níveis mobilizam. Discorremos sobre a origem do nome (Matrix Game) atribuído pela autora do jogo e sistematizamos que o jogo trabalha com as matrizes articuladas com a questão da tabela de dupla entrada. No primeiro nível há uma identificação das categorias como suporte e a partir do segundo nível já não existe essa identificação das categorias; é o próprio jogador que tem que fazer essa identificação. Pontuamos que isso pode ajudar a compreender melhor a ideia da interseção na tabela de dupla entrada.

Dando continuidade, ainda com este jogo, partimos para a atividade com as Máscaras das matrizes (2<sup>a</sup> parte). Induzimos o grupo de professores a pensar na relação com o conceito de espaço amostral.

**2<sup>a</sup> parte – objetivos:** desenvolver a habilidade de mapear todas as possíveis combinações das categorias oriundas das matrizes.

Em primeiro lugar, solicitar uma construção do espaço amostral com combinação 2x2 a partir dos níveis 1 e 2 do Jogo Matrix, utilizando material manipulável e uma tabela como suporte para organizar as combinações.

a) Você tem uma pilha de figuras e tem uma tabela para combinar duas dessas categorias (chapéus/óculos/bocas) organizando de forma a preencher as células vazias. Então, veja se você pode manipular as figuras para ajudar a lembrar quais as imagens foram combinadas.

Em seguida, também por meio do material manipulável, construir o espaço amostral com combinação 3x3 a partir dos níveis 3, 4 e 5 do Jogo Matrix sem a utilização de uma tabela.

b) Agora você tem 3 categorias (chapéus/bocas/óculos) e você precisa descobrir muitas combinações possíveis que se pode fazer, sem repetir imagens ou deixar faltar alguma combinação possível. Você pode usar as figuras para ajudá-lo a descobrir as combinações, mas você não tem desta vez uma tabela para ajudá-lo. Como você pode anotar as combinações?

Devido à limitação do tempo, não realizamos a atividade e sim, procedemos a uma reflexão sobre a mesma. Dessa forma, refletimos como se estivéssemos propondo o jogo com os alunos. Este tipo de ação torna-se crucial também por enfatizar a importância de pensar na prática docente.

Em meio à essa reflexão, chama-se a atenção para o fato de que, por exemplo, se a figura do chapéu azul é usada para preenchimento de uma célula, como colocar o chapéu azul em outra célula? Por que só existe uma figura (material físico) com chapéu azul. Daí o questionamento do que é necessário fazer e qual seria a ideia do grupo para preencher as células vazias sem utilizar as figuras.

**3<sup>a</sup> parte - Expandindo o espaço amostral – objetivos:** desenvolver a habilidade para construção de um diagrama de árvore de possibilidades ao expandir uma matriz.

Na primeira parte da atividade (Matrix Game) nem todas as combinações possíveis aparecem numa matriz. Os participantes são convidados a descobrir quais estão faltando.

Comando: Trabalhando em pares com as figuras impressas dos problemas do Matrix, você vai observar os detalhes do espaço amostral e desenhar um diagrama de árvore.

Na figura 32 temos um exemplo com animal, cor e direção. Questionamos junto aos professores: Que outras combinações possíveis de animal, cor e direção você pode fazer? Por exemplo, porco vermelho, virado para direita, etc. Como você pode provar que fez todas as combinações possíveis?

**Figura 32: problema 7 do jogo Matriz Game**

		<i>virada para esquerda</i>
	<i>vermelho</i>	
		?
<i>porco</i>		
		?
		?
<i>elefante</i>		
		?

Fonte: Adaptado de Nunes et al., (2012).

Damos continuidade informando que nem todas as combinações possíveis aparecem em uma matriz e como poderíamos provar que fizemos todas as combinações. Discorremos sobre a ideia envolvida que é a de forçar a construção do espaço amostral. Pegamos a tabela em discussão e começamos a identificar as propriedades. Salientamos que devemos perceber que há mais combinações do que as mostradas na matriz. Oferecemos diferentes matrizes para os professores realizarem a expansão do espaço amostral.

A próxima atividade a ser implementada, atividade de posição 8 no desenho, é com os dados e dominós.

## 8. Jogos com Dados e Dominós

Objetivos: Estudo de espaços amostrais com eventos mais prováveis ou menos prováveis. Desenvolver habilidades de boas previsões com base na percepção do espaço amostral. Interpretar situações em que é necessário eliminar casos do espaço amostral.

Materiais:

- .Dois dados de cores diferentes
- .Conjunto com 28 dominós

### a) Dados – adição

Comando:

Você tem dois dados e irá jogá-los para obter uma pontuação total. Em pares, quero que cada integrante da dupla faça a previsão de três totais (entre 2 e 12) que você acha que vão aparecer e faça a anotação de suas previsões.

Agora você vai jogar 15 vezes e anotar sua pontuação total entre os dois dados no seu livreto.

Observe os totais e se dê um ponto para cada total que corresponde a uma das três previsões feita por você.

Quais os totais de pontos apareceram mais vezes? Será que você escolheu as suas três previsões das somas com sabedoria? Quais são os melhores palpites quando você olha para a pontuação que obteve neste exemplo? Por quê? Colocar o 12 ou o 2 é uma boa escolha?

### b) Dados - subtração

Comando:

Você tem dois dados e estará jogando-os, mas agora desta vez fará uma subtração entre o maior e o menor número, formando a pontuação total.

Em pares, quero que cada um de vocês faça uma previsão de três resultados entre os dois dados que você acha que vai aparecer na maioria das vezes quando você jogar os dados. Anote suas três previsões.

Agora você vai fazer dez jogadas e anotar sua pontuação total em seu livreto a cada jogada feita.

Observe os totais e conte um ponto para cada total correspondente a uma das suas previsões.

Quais totais apareceram mais vezes? Será que você escolheu seus três totais com sabedoria? Quais são os melhores palpites quando você olha para a pontuação que obteve neste jogo? Você faria escolhas diferentes agora?

### c) Dominó

Comando:

Sua tarefa é trabalhar em conjunto para prever todas as combinações de uma caixa de dominó, e depois dizer o número exato de dominós.

Se você não estiver familiarizado com dominós, o menor número é o 0 e maior número é o 6 dentro deste conjunto. Em cada dominó existem dois números representados como pontos em cada peça. (Mostrar alguns dominós para se certificar que todas as crianças estejam familiarizadas com eles).

Eu quero que você descubra quais as combinações possíveis no dominó e quantos dominós existem no conjunto completo. Por exemplo: existe 0 e 1; 0 e 2, etc. Você tem um grade para ajudá-lo a trabalhar as combinações possíveis.

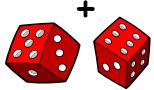
Você acha que o espaço para a amostra completa do dominó funcionou. Eu me esqueci de dizer que em um conjunto de dominó você não pode ter dois dominós com a mesma combinação, por exemplo, 2 e 1 com 1 e 2.

Você pode precisar do espaço amostral para riscar os que se repetem. Quantos dominós você acha que existem no conjunto completo, sem repetição?

O jogo dos dados, que já é uma retomada, não foi implementado na prática por motivo de tempo. Contudo, foi recordado que mais uma vez se pede uma previsão sobre os três totais mais prováveis do resultado da soma dos pontos obtidos no lançamento dos dois dados.

É apresentado o slide (figura 33) que se constitui no mesmo folheto recebido pelos professores para registro, com espaço para as três previsões e os 15 resultados obtidos nos lançamentos.

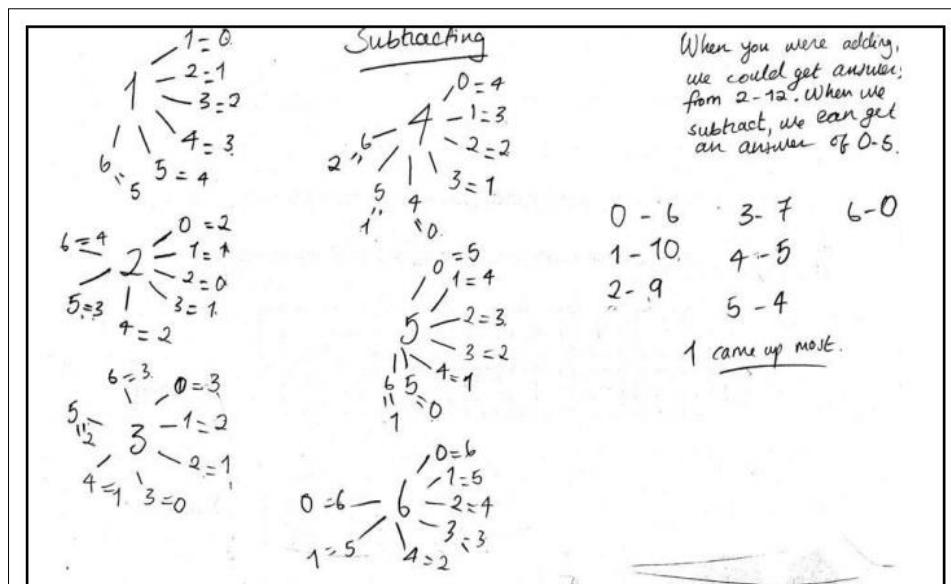
**Figura 33: folheto de registro para previsões - atividade com dados**

Previsões	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	+ 			
Jogadas	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Quantas vezes você acertou a suas previsões?				<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	
Você fez previsões boas ou não? Explique porque: ..... .....							

Fonte: Adaptado de Nunes et al., (2012).

Em nossa intervenção, resolvemos mostrar o gráfico das frequências acumuladas dos lançamentos construídos no segundo encontro da unidade anterior. E em seguida, apresentamos aos professores construções de crianças que participaram de pesquisa com as referidas atividades, vide exemplo na figura 34.

**Figura 34: resolução de uma criança com a atividade dos dados**



Fonte: Nunes et al., (2012).

Após conversarmos sobre as resoluções constantes na figura 34, prosseguimos com a atividade dos dominós. Destinamos um tempo para a resolução da atividade em duplas.

Discutimos com os professores sobre o fato de que é preciso eliminar as repetições para saber qual o espaço amostral correto. Destacamos ainda que estamos analisando a natureza do espaço amostral.

Seguidamente adentramos na situação-problema Saco dos Doces e Variações. Fizemos a leitura junto com os professores e impelimos a questão para eles se posicionarem. A partir daqui as atividades direcionam para a quantificação de probabilidades de forma mais explícita e direta. O objeto epistêmico espaço amostral avança progressivamente para a quantificação de

probabilidades; os referidos objetos apareceram juntos muitas vezes a partir de agora.

### 9. Saco dos Doces e Variações

Objetivos: Desenvolver uma melhor compreensão sobre eventos mais ou menos prováveis de acontecer e decidir sobre as melhores chances. Desenvolver habilidades no uso de diversas representações para o mapeamento do espaço amostral. Ser capaz de identificar que a probabilidade de eventos dependentes supõe uma restrição do espaço amostral e quantificação de uma probabilidade condicional.

Material: livreto com a situação-problema

Comando – Saco dos Doces:

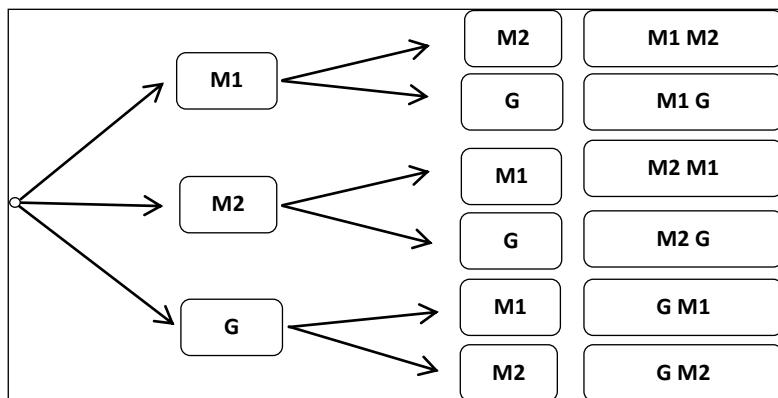
Samantha pode pegar dois doces de um saco, sem olhar, e há três doces no saco. Há dois doces de sabor morango e um sabor groselha. Seu sabor favorito é morango. Ela pode pegar dois doces de morango ou ela pode pegar um de morango e um de groselha. Você pode, antes de tudo dar seu palpite se ela tem uma melhor chance de conseguir dois doces de morango ou de obter uma mistura, ou se a chance de escolher dois doces de morango ou uma mistura é a mesma? Faça uma observação e escreva as suas suposições: como pensam que ela tem uma maior chance de escolher dois doces de morango? Como pensam que ela tem uma maior chance de escolher uma mistura? Como pensam que a chance de escolher dois de morango ou uma mistura é a mesma?

A situação-problema que ora vamos discutir faz parte do conjunto de atividades do programa de ensino de Nunes et al. (2012); ancora-se em um exemplo do clássico problema: "um saco contém uma ficha branca (B) e duas fichas vermelhas (Va, Vb) e você pode retirar duas fichas ao acaso sem reposição. Você retirará duas fichas vermelhas ou uma vermelha e uma branca. Esses dois resultados são igualmente prováveis ou um é mais provável do que o outro?" No espaço amostral, há duas vezes mais a combinação *vermelho-branco* que *vermelho-vermelho*, porque há quatro maneiras de produzir a combinação mista (B\_Va, B\_Vb, Va\_B, Vb\_B) e duas maneiras de produzir somente o vermelho-vermelho (Va\_Vb, Vb\_Va) (Lecoutre, 1992).

Esta situação-problema apresenta questionamentos que envolvem o aspecto intuitivo: solicitar que se dê um palpite; como se pensa a maior chance; escrever as suposições; etc. Não indica o uso direto de uma fórmula para

calcular a probabilidade, inclusive fala-se em chance em vez de probabilidade. Observamos que a atividade induz para pensar em todas as possibilidades possíveis de escolha e escrever o raciocínio para justificar a resposta dada. Apresentamos na figura 35 uma solução intuitiva para esta situação-problema:

**Figura 35: primeira solução – intuitiva**



Fonte: o autor, 2017.

Para responder aos questionamentos que a atividade apresenta, pode-se observar o resultado dos pares das diferentes combinações dos sabores dos doces. Temos que das seis combinações possíveis há quatro combinações que envolvem uma mistura diferente dos sabores dos doces da mesma forma apresentada na versão de Lecoutre (1992). Isto comprova que a chance de se ter uma mistura é maior contrariando a intuição, que pode levar ao erro, de que o fato de haver mais doces sabores morango se levaria a uma maior chance de tirar dois doces de morango.

Ao considerar esta solução como intuitiva embasamo-nos em Fischbein (1993) ao discorrer que o componente intuitivo (compreensão intuitiva, cognição intuitiva, solução intuitiva) diz respeito a uma compreensão que o indivíduo considera autoevidente, que o faz aceitar um conhecimento ou uma ideia sem questionar a necessidade de justificativa que legitime essa ideia.

É possível constatar o fato de qual combinação seria mais provável sem necessariamente utilizar o cálculo da probabilidade e contrastar com sua resposta. Utilizaremos a regra de Laplace para confirmar que a probabilidade de uma mistura é mais provável. Denominaremos o espaço amostral como “EA” e a probabilidade como “P”.

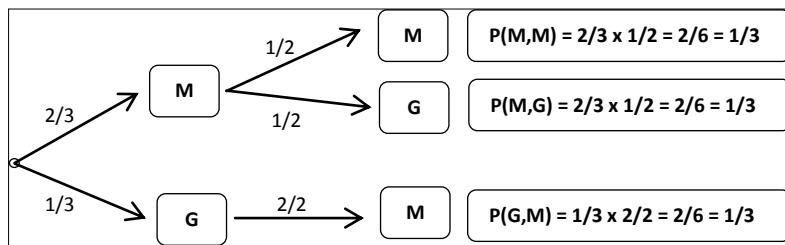
$$EA = \{M1M2; M2M1; M1G; M2G; GM1; GM2\}$$

$$P(\text{mesmo sabor}) = P(M1M2) + P(M2M1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$\begin{aligned} P(\text{mistura}) &= P(M1G) + P(M2G) + P(GM1) + P(GM2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{4}{6} \end{aligned}$$

Uma segunda solução descrita abaixo envolve a regra do produto de probabilidades e um diagrama de árvores de probabilidades incompleto.

**Figura 36: segunda solução – formal: regra do produto de probabilidades**



Fonte: o autor, 2017.

$$EA = \{M,M; M,G; G,M\}$$

$$P(\text{mesmo sabor}) = P(MM) = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{mistura}) = P(M,G \cup G,M) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Com esta segunda solução, observamos que temos um componente formal em jogo. Para Fischbein (1993), o componente formal diz respeito aos conhecimentos relativos às definições, axiomas, teoremas e provas, que devem ser aprendidos, organizados e aplicados pelo estudante. Para ele, esse componente seria indispensável em um processo educativo, visto que a compreensão do que é rigor e coerência em Matemática não é adquirida espontaneamente pelo estudante.

Com esta atividade esperamos que os professores raciocinem sobre as diferentes formas de resolução e as específicas probabilidades de cada resolução. Como a escolha é aleatória na prática de *tirar dois doces de um saco com três doces*, na primeira retirada temos que a chance é de 1 em 3 para a retirada de um doce qualquer; na segunda retirada temos:

- a chance é de 1 em 2 se na primeira retirada sair um doce de morango;
- a chance é de 2 em 2 se na primeira retirada sair um doce de groselha – um evento certo.

Dessa forma, dizemos que a segunda retirada está condicionada pelo que pode acontecer na primeira, ou seja, *o segundo evento é dependente do primeiro*.

Provavelmente os professores em exercício estudaram na graduação em Licenciatura em Matemática conteúdos concernentes à probabilidade; prevemos que tenham estudado o mapeamento do espaço amostral de um evento e o uso da combinatória para encontrar determinados espaços amostrais, bem como a quantificação de probabilidade e os casos específicos como a probabilidade condicional e bayesiana. Essa situação demanda compreender o caráter dos eventos certos, impossíveis, prováveis, mais prováveis ou menos prováveis, eventos dependentes e independentes, e diversas representações para o mapeamento do espaço amostral, tais como uso de diagramas e tabelas.

Houve diversos momentos de socialização dos professores e intervenção nossa para ir conduzido à progressão da atividade. Continuamos esclarecendo que justamente é um tipo de situação que a gente vai trabalhar essa questão do tipo contra-intuitiva e já utilizando os conhecimentos do diagrama de árvore para comprovar as melhores chances. Nesta situação ainda não estamos calculando nada de probabilidade, só estamos verificando o que é uma melhor chance.

Ampliamos esta atividade para o estudo da probabilidade condicional. Uma vez que as orientações curriculares brasileiras (MEC-SEF, 1998) não direcionam o ensino de probabilidade condicional para os anos finais do Ensino Fundamental este conhecimento é concebido como um conhecimento avançado do conteúdo – embora acreditemos que em um processo de inovação curricular esta temática possa também ser incluída para os anos finais do Ensino Fundamental. Tecemos duas perguntas em termos de probabilidade condicional que denominamos item 9.1

9.1) Há três doces no saco. Há dois doces de sabor morango e um sabor groselha. Extraímos dois doces do saco sem olhar, um após o outro, sem reposição.

- Qual a probabilidade de extrair um doce de groselha na segunda retirada, havendo extraído um doce de morango na primeira retirada? (Probabilidade condicional direta)
- Qual a probabilidade de extrair um doce de groselha na primeira retirada, havendo extraído um doce de morango na segunda retirada? (Probabilidade condicional transposta)
- Qual a probabilidade de extrair um doce de morango na segunda retirada, havendo extraído um doce de groselha na primeira retirada?

Enfatizamos que em ambos os casos temos um contexto de espaço amostral sem reposição, logo deve ser levado em conta a composição do saco uma vez extraído um doce de morango. A probabilidade condicional supõe uma restrição do espaço amostral. Segue o cálculo das probabilidades condicionais:

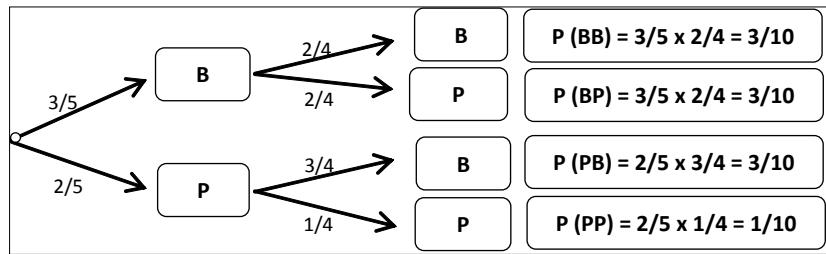
$$\begin{aligned} \text{a)} \quad P(G_2|M_1) &= \frac{P(G_2, M_1)}{P(M_1)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2} \\ \text{b)} \quad P(G_1|M_2) &= \frac{P(G_1, M_2)}{P(M_2)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2} \\ \text{c)} \quad P(M_2|G_1) &= \frac{P(M_2, G_1)}{P(G_1)} = \frac{1/3}{1/3} = 1 \end{aligned}$$

Com estas probabilidades podemos inferir que é um evento certo (100%) se ter uma mistura dado que se extraiu groselha (G) na primeira retirada e que ter uma mistura dado que se extraiu morango na primeira retirada ou na segunda é de 50%.

Em seguida, discutimos com os professores mais dois itens (denominamos como item 9.2 e item 9.3) que apresentamos como variantes da situação-problema do Saco de Doces, com objetivo de mobilizar os conhecimentos avançados do conteúdo.

Item 9.2) Antes de ir para a escola, ainda meio sonolento, o estudante abre uma gaveta onde há 3 pares de meia brancas e dois pares de meias pretas. Ao pegar dois pares de meias, aleatoriamente, você tem mais chances de pegar dois pares brancos? Ou uma mistura? Como pode explicar?

**Figura 37: diagrama de árvore da solução da atividade 9.1**



Fonte: o autor, 2017.

Denominaremos B para par de meias brancas e P para par de meias pretas; EA para espaço amostral e P(...) para probabilidade.

$$EA = \{BB; BP; PB; PP\}$$

$$P(\text{dois pares brancos}) = P(BB) = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{dois pares misturados}) = P(BP \cup PB) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$

Podemos observar que também neste item a probabilidade de pares diferentes é maior que a probabilidade de dois pares iguais analogamente com a probabilidade da mistura de doces com a probabilidade de doces iguais.

Na mesma árvore já desenhada na lousa começamos a modificar com as novas referências relacionadas com o problema. Mostramos que existem mais dois elementos na árvore, pois agora temos 3 pares brancos e 2 pares pretos, e daí mapeamos todo o espaço amostral. Colocamos esse item como uma variante por que realmente mobiliza a mesma ideia. Temos a tendência de acreditar que se tem mais chance de pegar um par de meias brancas, mas se você construir esse espaço amostral vamos ver que a chance de pegar uma mistura é maior.

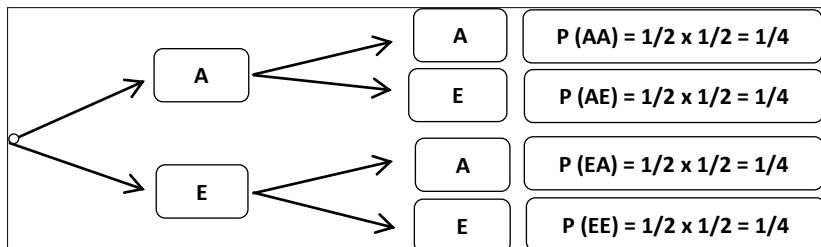
Após a discussão que descrevemos, o item 9.3 é introduzido. Esse item é parte de uma sequência didática extraída da dissertação de Souza (2002) sobre distribuição binomial. Como proposto no desenho este item também foi considerado uma variante da primeira por ser possível estabelecer relações concernentes ao objeto epistêmico de forma progressiva e concatenada. A referida atividade é apresentada aos professores. Os professores analisam o problema. Deixamos transcorrer um tempo de debate entre eles e perguntamos o que eles responderiam. Jogamos mais perguntas para ajudar na reflexão e resolução.

Item 9.3) Um professor pede a seus alunos que respondam duas questões do tipo V ou F. Um dos alunos, Pedro, responde às questões ao acaso.

É mais provável que:

- i) Pedro acerte as duas questões;
- ii) Pedro erre as duas questões;
- iii) Pedro acerte apenas uma das questões;
- iv) as alternativas i), ii) e iii) são igualmente equiprováveis.

Figura 38: diagrama de árvore da solução 9.2



Fonte: o autor, 2017.

$$EA = \{AA; AE; EA; EE\}$$

$$P(\text{acertar apenas uma}) = P(AE \cup EA) = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

Neste item a probabilidade de acertar apenas uma questão (análoga à probabilidade da mistura) é maior do que acertar ou errar as duas questões; no entanto, os eventos são independentes.

Seguimos para explicar a solução esperada para este item. Completamos a árvore na lousa utilizando os códigos C para certo e E para errado. Foi nosso objetivo dar uma ênfase ao uso da árvore.

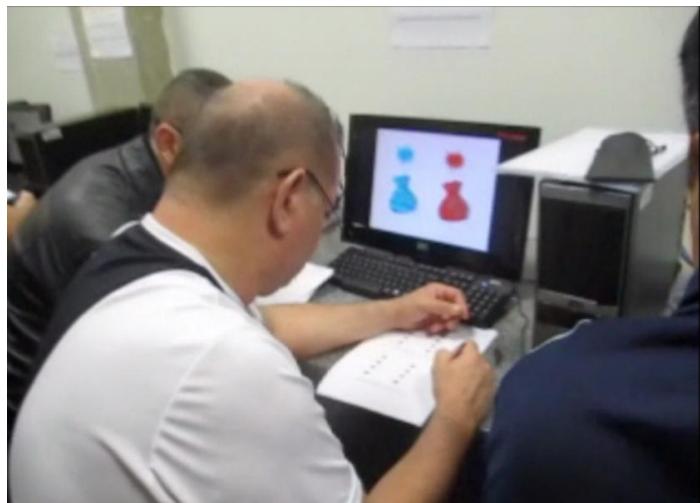
Pensando na segunda retirada/tentativa estas atividades podem ser resolvidas em termos de probabilidade condicional (item 9.1 e 9.2) confrontadas com o item 9.3 (probabilidade envolvendo eventos independentes).

Salientamos que foi proposital colocar estas situações variadas para demonstrar a importância de trabalhar desde o primeiro momento com espaço amostral em níveis de complexidade diferentes.

Segue-se agora para mais um jogo no computador, atividade Blocos no Saco. Primeiro fazemos coletivamente com todo o grupo de professores e depois solicitamos que os professores se organizassem em duplas para a

realização da atividade. Explicamos também a folha de registro fazendo um desenho no quadro para não deixar dúvidas quanto a forma de registro inerente à atividade. É concedido um tempo para professores realizarem a atividade (figura 39). Eles se envolvem; refletem; discutem.

**Figura 39: professores vivenciando atividade dos Blocos no Saco**



Fonte: o autor, 2017.

#### 10. Blocos no saco

**Objetivos:** Ser capaz de comparar probabilidades examinando o espaço amostral, para tornar-se consciente de que, se os espaços amostrais são diferentes, talvez seja necessário reorganizar a distribuição para fazer uma comparação, e ver como índices podem ser utilizados neste rearranjo do espaço amostral. Decidir a melhor chance utilizando a razão. Os participantes treinam em sucessivas decisões a comparação de probabilidades em eventos (sacos de cores diferentes) com espaços amostrais diferentes.

##### Material:

- .Computador por pares de participantes carregado com jogo
- .Dois diferentes marcadores de cores (bloco amarelo e preto)
- .Livreto

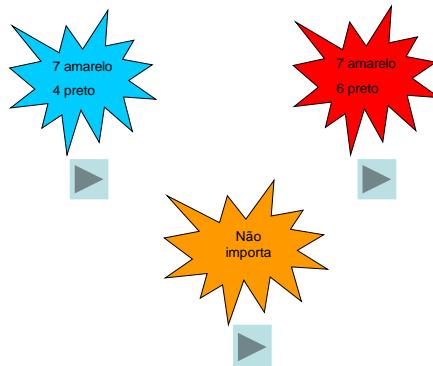
##### 1<sup>a</sup> Parte - Como fazer:

Decidir para cada pergunta que saco deve-se escolher para ter uma melhor chance de conseguir um bloco amarelo e ganhar pontos. Passar por cada um das primeiras 9 telas coletivamente. Após, para o segundo conjunto de telas, trabalhar em pares.

##### Comando:

"Neste jogo de computador você vai ver que existem dois sacos contendo blocos da cor amarela e preta. Para ganhar 10 pontos, você tem que pegar o saco que você acha que lhe dá a melhor chance de conseguir um bloco amarelo. Você tem que decidir qual saco você vai escolher – o saco vermelho

ou o saco azul, ou você pode decidir que poderia ser tanto um como outro, não importando qual saco, se você acha que eles oferecem a mesma chance. Dê um clique fazendo sua escolha".



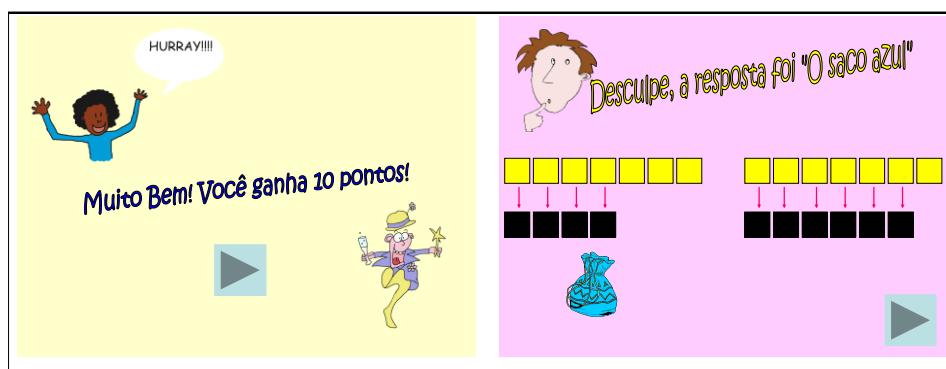
#### 2ª parte - Como fazer:

Usar os blocos unifix manipulando-os para explicar ao parceiro a sua decisão com relação ao saco que dá a melhor chance de retirar um bloco amarelo. A ideia é utilizar os blocos para demonstrar a relação e em seguida clicar para conferir se acertou ou não. Caso erre, comparar a resposta correta com seus blocos para perceber como a sua resposta foi diferente.

O comando é o mesmo e será utilizado um terceiro conjunto de imagens.

Os participantes podem fazer um julgamento sobre qual saco que iriam pegar para ter uma melhor chance de conseguir um bloco amarelo. Clique em sua escolha. Após clicar aparece uma tela com um *feedback* (conforme a figura 40) com a resposta correta. Se a resposta estiver correta aparece uma saudação, caso contrário, aparecerá uma tela mostrando a resposta correta e uma explicação visual relacionado os blocos amarelos com os blocos pretos.

**Figura 40: feedback da atividade Blocos no Saco**



Fonte: Adaptado de Nunes et al. (2017).

Em ambos os conjuntos de telas, a dificuldade é que o espaço amostral não é do mesmo tamanho, para o qual precisa usar índices para ver qual saco lhe dar uma melhor chance.

Quando os professores já tinham vivenciado o jogo, indagamos os mesmos sobre qual seria a ideia por traz dessa atividade. Chamamos atenção para o fato que o que se faz no jogo são comparações entre os dois sacos. Clarificamos que não estamos trabalhando com a ideia do espaço amostral, estamos trabalhando apenas com a identificação de onde é que se tem mais chance. Isso é importante uma vez que vai fortalecer a ideia do conceito de chance ao pensar onde é mais provável de conseguir um bloquinho amarelo.

Prosseguindo para o jogo 2 é possível utilizar os blocos (unifix) amarelo e preto para demonstrar e justificar as escolhas dos sacos fazendo a relação da quantidade de amarelos para a quantidade de pretos em cada saco. É um material que você pode manipular e justificar o raciocínio (figura 41). No trabalho com os alunos, importante o registro das pontuações nas três fases do jogo e a soma das pontuações ao final. Discutir ainda com os alunos como explicar e demonstrar com os blocos unifix, por exemplo, como  $2 : 12$  oferece a mesma chance que  $1 : 6$ .

**Figura 41:** utilização do material manipulável



Fonte: o autor, 2017.

Discutimos com os professores sobre as diversas estratégias que podem aparecer na resolução, no entanto o mais importante é estabelecer a comparação entre as quantidades e não seguir direto para a representação em forma fracionária.

Com respeito aos jogos 2 e o 3 apenas apresentamos aos professores pois não daria tempo para realizar todos eles. Situamos o jogo na unidade de estudo para que se perceba que as atividades têm um encadeamento.

No 4º encontro implementamos as atividades 11.Fábrica de bolos, 12. Jogo Igba-Ita e 13.Jogo das Três fichas; trabalhando desde o objeto epistêmico probabilidade simples até a probabilidade condicionada. Relembramos que estávamos na unidade de estudo envolvendo o objeto epistêmico espaço amostral progredindo para a quantificação de probabilidades.

Mais uma vez, no início deste encontro, retomamos o que já foi trabalhado nos encontros anteriores e situamos a pauta do dia no contexto do desenvolvimento das unidades de estudo.

Apenas a primeira atividade faz parte do programa de Nunes et al. (2012); as outras duas atividade foram selecionadas da literatura atual conforme explicitado no capítulo do desenho.

Dando prosseguimento apresentamos a frase de La Fontaine: *Um astrólogo, certo dia, deixou-se cair, no fundo de um poço. e disseram-lhe: grande tolo se mal podes ver onde põe os pés, como te atreves a decifrar o que não enxergas?* – por que desde o primeiro encontro sobre aleatoriedade, tocamos na questão sobre a epistemologia do conhecimento probabilístico. Discutimos a princípio a associação dos jogos de sorte-azar com a vontade dos deuses, ou seja, imperava uma questão divina. Ressaltamos que com o progresso da ciência e do próprio conhecimento matemático, a probabilidade começa a ser sistematizada, matematizada – podemos assim dizer.

De início os professores receberam a atividade Fábrica de Bolos impressa. Apresentamos e fizemos a leitura da atividade no slide. Indicamos que os professores poderiam adaptar a atividade, modificar os sabores, os recheios, as coberturas, para deixá-la melhor contextualizada quando de uma possível aplicação aos seus alunos.

## 11. Fábrica de Bolos

Objetivos: Com o uso de diagramas, ser capaz de elaborar a composição do espaço amostral, agregar e eliminar os casos e reforçar a compreensão da conexão entre o espaço amostral e quantificação das probabilidades.

Material: livreto com a situação-problema.

Como fazer – Comando:

Você trabalha na fábrica de bolos que está preparando bolos para a comemoração do Dia do Estudante nas quais diversas escolas estão se organizado.

A fábrica tem:

- 3 sabores: laranja, limão, morango
- 3 recheios: baunilha, chantilly, geleia
- 3 coberturas: nozes, gotas de chocolate, cerejas

Você precisa fazer caixas para cada combinação diferente de bolo. 1 bolo por caixa. Quantas caixas diferentes você precisa fazer? Como podes ter certeza que você não vai repetir ou deixar de fora alguma combinação? Este é o número de caixas que você entrega a cada escola.

Há um imprevisto! Você carregou a van de entrega e separou as caixas para as diferentes escolas, mas agora os gestores das escolas chamaram e disseram que não gostam de algumas combinações:

- Escola A não quer nozes em cima do bolo de limão.
- Escola B não quer recheio de geleia com cobertura de cereja.
- Escola C não quer recheio de chantilly com as gotas de chocolate.

Você pode descobrir quantas caixas terão que ser retiradas da van, pois nelas contêm os bolos com combinações de sabores que as escolas não querem?

Há outro imprevisto!

Você não escreveu as combinações de bolo sobre as caixas e você não tem tempo para abrir todas as caixas para verificar as combinações, de modo que você tem que escolher apenas algumas caixas e tira-las para fora.

Você acha que é mais provável tirar uma caixa que realmente você quer tirar ou você acha que é mais provável tirar uma caixa que realmente você queria deixar na van? Explique por que.

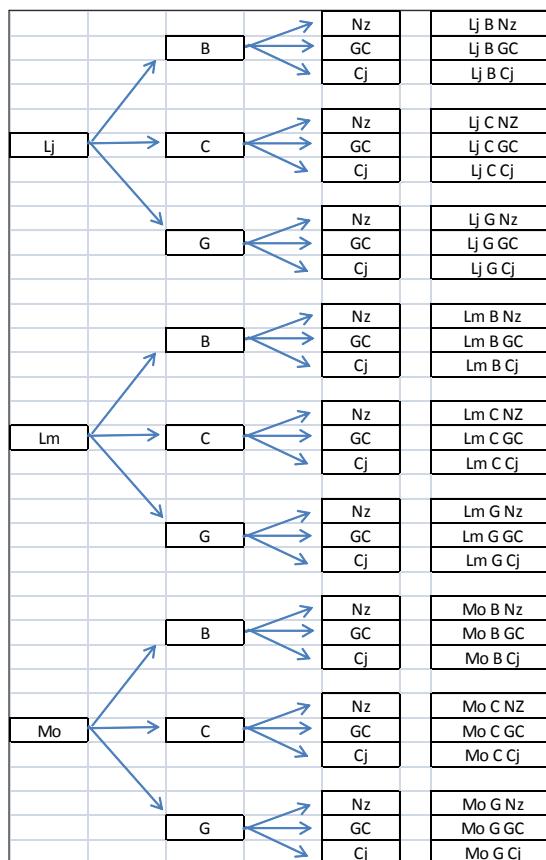
Uma solução para a primeira pergunta que solicita a quantidade de bolos diferentes considerando as combinações de sabor, recheio e cobertura seria a aplicação do princípio fundamental da contagem:

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

27 possibilidades diferentes de bolos

Os professores de matemática certamente lançaram mão deste princípio para a resolução. No entanto, cabe uma reflexão voltada para os alunos, em que nesta etapa de estudo é mais interessante instigar ao procedimento de algum registro para mapeamento do espaço amostral. Na figura 42 temos um dos registros possíveis por meio da árvore de possibilidades das 27 possibilidades diferentes de bolos.

**Figura 42: espaço amostral da atividade Fábrica de bolos**



Fonte: o autor, 2017.

Para a segunda parte é necessário compreender que das 27 combinações algumas dessas são indesejadas pelas escolas e se deve utilizar o diagrama para eliminar os casos.

Da atividade sabemos que cada escola receberá 27 bolos. Com a restrição por escola é necessário a retirada de 9 bolos, uma vez que não sabemos quais as caixas, podemos compreender que em um grupo de 27 bolos se tem 9 opções indesejadas por que os bolos estão juntos; é como se as três restrições fossem uma restrição única. Lembramos que estamos pensando no evento mais provável ou menos provável e não em retirar

realmente os bolos.

Para chegar à solução é preciso pensar na probabilidade de retirar da van uma caixa com bolos indesejados que será 9 em 27, simplificando, 1 de 3. E a probabilidade de retirar uma caixa com bolos que as escolas realmente queriam ter é de 18 em 27, logo 2 de 3.

Discutimos com os professores como eles elaboraram as suas respostas, que representações utilizaram e/ou as estratégias empregadas. Tal momento de reflexão também deve fazer parte da atividade em uma posterior aplicação em sala de aula; os alunos devem ser encorajados a se referir aos seus diagramas para os bolos indesejados relacionando com o espaço amostral.

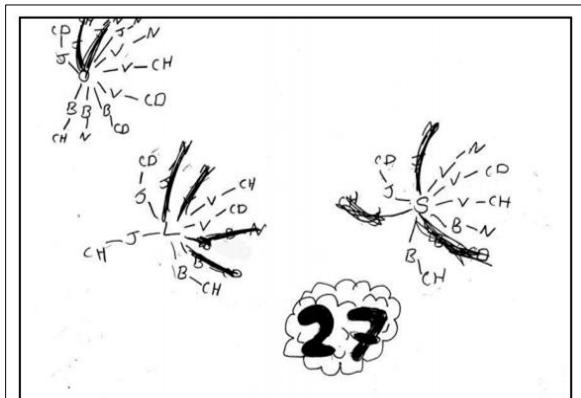
Propomos uma resolução coletiva e convidamos os professores para responder na lousa e, que, não se preocupassem em errar ou acertar: quem gostaria de mostrar aqui pra gente na lousa? Os professores apresentaram as suas resoluções; houve grande debate.

Continuando com a atividade: Há outro imprevisto! Fizemos a leitura e ratificamos que as 27 caixas estão na van, você quer tirar 9. O que acha que é mais provável?; alertamos para que eles pensassem como fariam o registro da resolução e acionamos um tempo para a resolução. Os professores discutiram muito entre si. Convidamos mais um professor para ir à lousa explanar a sua forma de raciocínio.

A partir desse momento iniciamos uma sistematização com a resolução esperada da atividade. Informamos que o material da atividade já nós conduz para a necessidade de quantificar. Reapresentamos as perguntas no slide e seguimos preenchendo junto com os professores. Começamos a trabalhar com os elementos da atividade como 9 em 27 e 18 em 27 prosseguindo com a ideia de quantificar e perceber o que é mais provável ou não te acontecer. Discorremos sobre a comparação de razões, estabelecer a razão e chamamos a atenção para se o aluno construir erroneamente a fração 9/24 discutir com eles. Depois haverá o momento de comparar uma quantidade com o total.

Continuadamente, apresentamos aos professores um slide com a resolução de um aluno participante da pesquisa de Nunes et al. (2012) em que utiliza um arranjo espacial diferente.

**Figura 43: diagrama construído por uma criança na resolução da atividade da Fábrica de bolos**



Fonte: Nunes et al. 2012.

A figura 43 mostra o diagrama de uma criança. O diagrama parece diferente, mas é sistemático e apresenta todas as combinações. Isso mostra que a criança usou a ideia de um diagrama de árvore, mas um arranjo espacial diferente. Segundo Nunes et al. (2012) o professor dessa criança ficou confuso, mas a criança explicou que os sabores do bolo estavam no centro (laranja, limão, morango), e cada um foi emparelhado com três recheios (baunilha, chantilly, geléia), que foram escritas em torno de 3 vezes os sabores do bolo, e então uma cobertura diferente foi colocada em cada um desses bolos cheios (cerejas, gotas de chocolate, nozes).

Alguns professores nesse momento falaram sobre as atividades que constam no material do projeto da rede estadual de São Paulo denominado Projeto de Educação Matemática nos Anos Iniciais - EMAI. Citaram que há atividades que abordam o princípio multiplicativo e apresentam diagrama de árvores para ajudar os alunos com as combinações. Os professores que falaram sobre o EMAI dizem ser um bom projeto. Outro professor deu um exemplo da escola que ele trabalha, na qual se pode trabalhar metodologicamente de forma processual. Terminamos essa atividade trazendo alguns fatos importantes sobre o pensamento combinatório e as representações das possibilidades.

Na sequência vivenciamos o jogo Igba-Ita, um jogo de sorte-azar praticado pelo povo Igbo da Nigéria que significa “pegue e jogue para cima”. O contato inicial com o jogo deu-se por meio da leitura do livro Jogos e atividades matemáticas do mundo inteiro da pesquisadora Cláudia Zaslavsky (2000) e com o livro *Among the Ibos of Nigeria* de G. T. Basden com edição de 1921 no qual discorre sobre o jogo em referência. Solicitamos aos professores que se organizem em dois grupos ao redor de duas mesas grandes. Para explicação do jogo utilizamos o slide para facilitar a compreensão.

## 12. Jogo Igba-Ita

**Objetivos:** Desenvolver habilidades para o mapeamento do espaço amostral e quantificação de probabilidades. Construir uma demonstração matemática para representar as combinações particulares ao jogo. Oferecer aos professores outros contextos possíveis de desenvolvimento do raciocínio probabilístico para o trabalho em sala de aula com envolvendo espaço amostral e quantificação de probabilidades.

**Material:** 12 conchas de cauri para cada jogador. 04 conchas para o desafiador.



**Número de jogadores:** dois ou mais jogadores.

**Como jogar:**

Uma pessoa, chamada desafiador, apanha quatro conchas. Os jogadores apostam uma, duas ou três conchas no centro, chamando de “bolo”. O desafiador lança as quatro conchas.

O desafiador ganha o bolo de apostas quando as conchas caírem de uma das seguintes maneiras:

- .Quatro conchas com as aberturas para cima
- .Quatro conchas com as aberturas para baixo
- .Duas conchas para cima e duas conchas para baixo

O desafiador pega todas as conchas do bolo e continua a lançar quatro conchas. Se o desafiador perder, o “bolo” permanece no centro passando a vez para o próximo jogador que se torna o novo desafiador. O vencedor é aquele que tiver mais conchas. Se a qualquer momento um jogador não tiver no mínimo 4 conchas para apostar, sairá do jogo.

Durante a vivência do jogo pelos professores (figura 44), percebemos o envolvimento e a empolgação dos mesmos.

**Figura 44: Vivência do Jogo Igba-Ita pelos professores**



Fonte: o autor, 2017.

Após isto, demos prosseguimento à discussão coletiva e propomos alguns questionamentos sobre situações características do jogo no qual envolvem um raciocínio probabilístico, tais como: Você concorda que o jogo seja justo? Justifique. Qual a probabilidade de conseguirmos uma combinação vencedora ao lançar as quatro conchas? Justifique. Quais as estratégias utilizadas em relação ao número de conchas apostadas na hora do jogo? Qual a probabilidade do desafiador continuar sendo o desafiador bem como do próximo jogador torna-se desafiador? entre outros questionamentos.

Com relação ao jogo ser justo ou não, para explicar esse fato tomamos a noção de princípio multiplicativo, onde para cada concha lançada tem-se duas possibilidades de resultado e para cada um desses resultados, existem ainda os resultados das outras conchas, assim, tem-se duas possibilidades para a primeira, duas para a segunda e assim sucessivamente até se chegar ao produto  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  possibilidades.

Na segunda parte, trabalhamos com um desafio propondo a mudança de quantidade nas conchas que são lançadas e em que situações o jogo se torna justo ou injusto com essa mudança.

Discutimos com os professores a importância do mapeamento do

espaço amostral de um evento, além de trabalhar com a quantificação de probabilidades envolvendo a definição clássica e a frequentista. Para explorar a noção frequentista e inserir a ideia da lei dos grandes números, podemos indagar se a probabilidade de uma concha cair com a abertura para cima ou para baixo é a mesma? E convidar para realizar o lançamento de uma mesma concha cerca de 30 vezes e registrar os resultados e as suas conclusões. Repetir o experimento e questionar se o resultado mudou e quais as conclusões.

Informamos aos professores que dentro do material que eles receberão temos uma proposta de atividade envolvendo o lançamento de uma única concha. Informamos ainda que outros pesquisadores realizaram esse experimento e constataram que no experimento do lançamento das conchas são equiprováveis. Os professores podem fazer as simulações em sala de aula para verificar tal afirmativa. No entanto, em nossa atividade, consideramos que seja mesmo equiprovável – 50% e 50%.

Agilizamos a resolução devido ao tempo que já estava curto. Apresentamos a tabela (figura 45) com as diferentes possibilidades de posição das conchas para clarificar que não seria 2 em 5 e 3 em 5 como apontavam os professores.

**Figura 45: mapeamento das possibilidades no lançamento das 4 conchas (B : para baixo e C: para cima)**

CONCHA 1	CONCHA 2	CONCHA 3	CONCHA 4
B	B	B	B
B	B	B	C
B	B	C	B
B	C	B	B
C	B	B	B
B	B	C	C
B	C	B	C
C	B	B	C
B	C	C	B
C	B	C	B
C	C	B	B
B	C	C	C
C	B	C	C
C	C	B	C
C	C	C	B
C	C	C	C

Fonte: o autor, 2017.

Na implementação da próxima atividade – Jogo das Três fichas – como já corriqueiro, colocamos a importância de vivenciar o jogo dando continuidade às discussões sobre espaço amostral e quantificação de probabilidades. Explicamos o jogo mostrando as fichas e a folha de registro. Combinamos A para azul e R para roxo (mas no papel está escrito vermelho; são as adaptações de materiais que fazemos o que não implica dificuldades de compreensão).

Este jogo foi adaptado da tese de doutorado de Contreras, J. M. Evaluacion de conocimientos y recursos didácticos em la formação de professores, defendida na Universidade de Granada no ano 2011. Este jogo foi sistematizado com base no Paradoxo das Caixas de Bertrand, assim conhecido por ter sido estudado pelo matemático francês do século XIX Joseph Bertrand.

### 13.Jogo das Três Fichas

Objetivo: Ampliar as habilidades com a quantificação de probabilidades simples e condicionais. Refletir sobre as dificuldades para a quantificação correta por meio das estratégias realizadas durante a vivência do jogo.

Como jogar:

Se tomam 3 fichas da mesma forma e tamanho, das quais uma é vermelha em ambas as faces; outra é azul por uma face e vermelho na outra e a terceira é azul nas duas faces.

Coloca-se as três fichas em uma caixa, agita-se convenientemente a caixa e seleciona-se uma das três fichas ao azar. Mostrar uma das faces da ficha, mantendo a outra escondida, pedindo aos jogadores que apostem a cor do lado oculto.

Uma vez feita as apostas, se mostra o lado oculto. Cada participante que tenha acertado a previsão efetuada consegue um ponto.

Os professores receberam a folha para registro conforme a seguir:

Ensaio nº 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cor da face mostrada									
Cor prevista									
Cor da cara oculta									
Tens seguido alguma estratégia? Descreva.									
Por que segue esta estratégia ou por que não segue nenhuma? Dá uma explicação.									

Ensaio nº 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cor da face mostrada									
Cor prevista									
Cor da cara oculta									
Qual é agora a tua estratégia? Por quê?									
Se estiveres seguro da tua estratégia, dá uma demonstração matemática da mesma.									

Para aqueles que não estão seguros, faremos uma terceira rodada do jogo.									
Ensaio nº 3	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cor da face mostrada									
Cor prevista									
Cor da cara oculta									

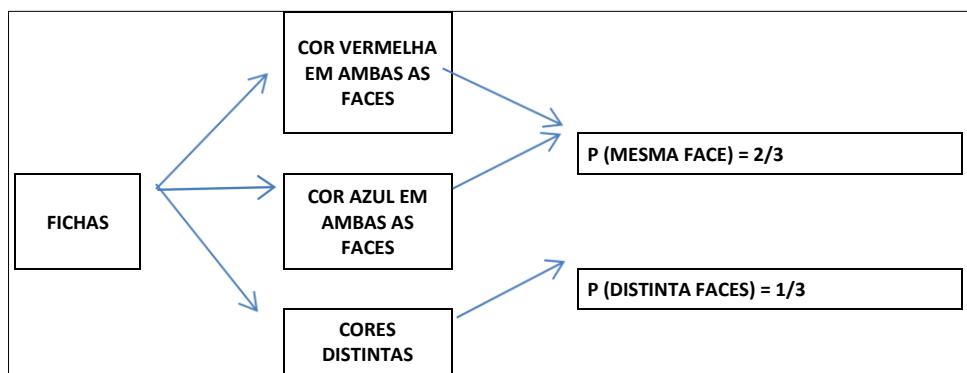
Disponibilizamos um tempo para o debate coletivo e a decisão da melhor estratégia analisando os diferentes argumentos apresentados pelos professores. Após a vivência do jogo solicitamos aos professores listar alguns possíveis conflitos e dificuldades por parte dos estudantes.

Dentre diversas formas (CONTRERAS, 2011) de encontrar a solução para comprovar matematicamente qual a melhor maneira de apostar, apresentamos duas soluções.

A primeira solução, a qual pode ser compreendida como uma forma mais fácil é pensar que das três fichas duas tem as faces de mesma cor. O experimento consiste em sortear uma ficha ao azar e assim temos três possibilidades (as três fichas). Os casos favoráveis são as duas fichas com as faces iguais. Uma simples aplicação da regra de Laplace pode ser utilizada para calcular a probabilidade solicitada:

$$P(\text{face oculta} = \text{face visível}) = P(\text{duas faces iguais}) = 2/3.$$

Figura 46: espaço amostral da solução 1



Fonte: o autor, 2017.

Na figura 46 segue o espaço amostral da solução 1. Nesta solução podemos observar que não se utiliza a noção de experimento composto e nem dependência ou independência, apenas experimento simples, sucesso e espaço amostral.

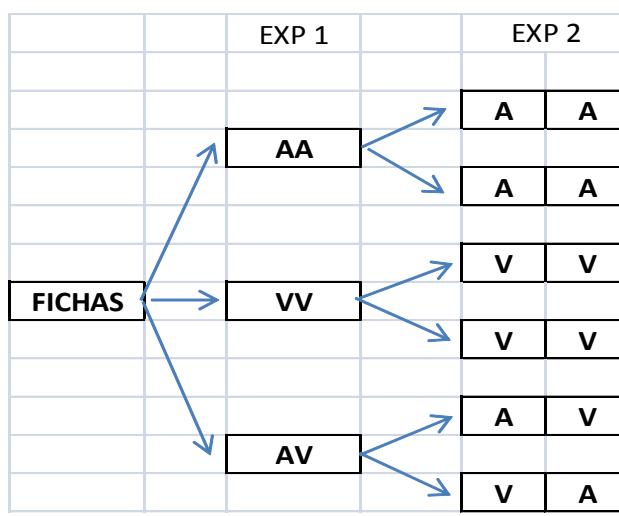
Vejamos uma segunda solução. Nesta podemos considerar o espaço amostral do experimento composto como dois experimentos simples:

Experimento 1: Sortear ao azar uma das três fichas. Cada uma tem probabilidade de  $1/3$ .

Experimento 2: Mostrar uma das duas faces da ficha sorteada ao azar. Em cada ficha, cada face tem uma probabilidade de  $1/2$ . Respeitando as cores, na ficha de das cores, cada cor tem probabilidade de  $1/2$ ; na azul, a única possibilidade é que a face oculta seja azul e na vermelha, que seja vermelha.

O espaço amostral consta de seis sucessos  $\{AA, AA, VV, VV, VA \text{ e } AV\}$  como podemos observar no diagrama de árvore (figura 47); nas fichas com faces iguais temos que considerar duas vezes a cor azul ou a vermelha, dependendo se mostra a face de cima ou de baixo.

**Figura 47: espaço amostral da segunda solução**



Fonte: o autor, 2017.

Quando a face mostrada é azul implica a redução do espaço amostral  $\{AA, AA \text{ e } AV\}$ . Aplicando a regra de Laplace, temos:  $P(\text{oculta } A/\text{mostrada } A) =$

2/3. Nesta segunda solução se usa a ideia de experimento composto e de dependência, pois a face mostra dependerá da ficha sorteada e a face oculta da face mostrada.

Outra solução que convém destacarmos é que se poderiam utilizar os dados obtidos durante o jogo e observar empiricamente qual é a solução correta fazendo uma estimativa das probabilidades a partir da frequência relativa. No entanto, com esta não se chegaria a compreender por que uma estratégia é mais preferível à outra.

Concernente às estratégias elencamos as seguintes utilizadas em outros estudos (CONTRERAS, 2011; FELISBERTO DE CARVALHO E MACEDO, 2015), a saber:

- E1 – Apostar na mesma cor da face que se vê (correta);
- E2 – Apostar na cor contrária da que se mostra;
- E3 – Considerar que não utilizou nenhuma estratégia - escolha aleatória;
- E4 – Eleger uma das cores em todos os ensaios;
- E5 – Uso dos resultados anteriores para a escolha;
- E6 – Mudar as estratégias ao longo da sequência dos ensaios;
- E7 – Propriedades não físicas das fichas.

Com este jogo finalizamos o desenho da unidade 2 denominada espaço amostral e quantificação de probabilidades.

### **5.2.2 ANÁLISE DOS CONHECIMENTOS DOS PROFESSORES NA UNIDADE ESPAÇO AMOSTRAL E QUANTIFICAÇÃO DE PROBABILIDADES**

Nesta seção analisamos os conhecimentos dos professores e as aprendizagens alcançadas com a implementação da unidade de estudo espaço amostral e quantificação de probabilidades. As atividades focaram no desenvolvimento de habilidades para o mapeamento e o registro dos elementos do espaço amostral com o uso de diferentes representações, além de incluir situações nas quais é preciso pensar sobre eventos mais prováveis

ou menos prováveis e sobre o espaço amostral de diferentes eventos dependentes e independentes.

Primeiramente, no que concerne às aprendizagens alcançadas pelos professores podemos destacar o desenvolvimento de um raciocínio sobre a categorização/classificação de propriedades para construção do espaço amostral tanto por meio das tabelas de dupla entrada como por meio do diagrama da árvore de possibilidades.

As atividades foram conduzidas de forma a utilizar para representações do espaço amostral inicialmente a construção de códigos e tabelas de dupla entrada e em seguida, percebendo as limitações no uso destes, lançar mão de outra representação como o diagrama da árvore de possibilidades.

Por exemplo, na atividade com as máscaras das matrizes, a ideia é justamente realizar combinações dos elementos de uma tabela e criar códigos para compreender as combinações que podem surgir ao identificar esses elementos. Ao identificar todas as combinações possíveis de uma matriz do jogo estaremos na verdade identificando todo o conjunto de possibilidades – o espaço amostral. Em uma dessas tabelas tínhamos duas cores, dois tamanhos e duas expressões faciais e que a organização desses elementos na árvore nos ajuda a identificar todas as combinações, no caso, oito combinações, decorridas do produto  $2 \times 2 \times 2 = 8$ . Neste momento, uma professora, revela algo que nos surpreendeu bastante:

P33: eu nunca vi essa árvore

Essa fala se deu em um dos nossos momentos de sistematização, no qual organizamos a árvore com a inclusão dos valores nos ramos e o registro das possibilidades com os cálculos dos valores das chances. Tal como a professora externalizou, no diálogo com os professores, percebemos que não é muito comum o uso deste diagrama para as possibilidades e que, uma das aprendizagens nesta unidade é conhecer e fazer uso de diferentes representações do espaço amostral.

Ainda que se disponha de tabelas ou árvores os professores não sabem organizar ou escolher – aos menos nas atividades que trabalhamos com eles –

os componentes de um determinado evento probabilístico. Em diversas atividades treinamos a identificação dos elementos para o correto mapeamento das possibilidades.

Os professores tiveram que decidir sobre que elementos seriam utilizados nas tabelas de dupla entrada ou na árvore de possibilidades; a decisão sobre esses elementos traz à tona a competência sobre categorização e classificação dos elementos para posteriormente mapear as possibilidades desses “elementos” se constituindo no espaço amostral de um determinado evento. Como já dissemos, houve momentos durante a vivência das atividades que alguns professores revelaram dificuldades com esta categorização.

Há dificuldades no momento de decidir sobre as categorias. No trecho a seguir, sobre a discussão com uma das tabelas, é perceptível um conflito semiótico com respeito ao significado de uma tabela de dupla entrada:

P6: não é só isso, tem mais uma propriedade ali; só que ali não está mostrado na ordem, se é  $3 \times 3$  então quantas combinações diferentes temos. Naquela das patas, mostramos 9 mas são 27 combinações devido ao fato de três características diferentes. [fazendo referência à tabela]

P30: é por que foi feito um recorte aí, não temos todas as combinações; será que são mais de 27? Por que temos três variáveis para analisar.

O conflito se dá no sentido de que as tabelas  $3 \times 3$  continuam sendo tabelas de dupla entrada, ou seja, com duas variáveis. Os professores entenderam como envolvendo três variáveis e discorriam sobre quais seriam essas três variáveis com diversas sugestões. Por fim, com a discussão os professores identificaram que na verdade nesta referida tabela são duas variáveis envolvidas – o formato das patas (três formatos) e o posicionamento (três posições), ou seja,  $3 \times 3 = 9$  combinações diferentes.

Em outras atividades dessa unidade também encontramos essa dificuldade com relação à escolha correta dos elementos e decisões sobre categorias. Na resolução do item 9.3 os professores caem na dúvida se utilizam como categorização os símbolos V e F (para verdadeiro e falso) ou se utilizam Q1 e Q2 (para questão 1 e questão 2), no entanto as possibilidades

desse item são Acertar ou Errar; o que pode acontecer com a questão 1: ele pode estar certo ou ele pode estar errado. A questão é de verdadeiro e falso, mas não sabemos o que está correto; a resposta falso-falso pode ser a resposta correta. Então tenho que pensar em ACERTAR e ERRAR. Os professores têm dificuldades em decidir sobre essas categorias. Há momentos de discussão sobre quais elementos a serem utilizados em um mapeamento por meio do diagrama da árvore, inclusive de como começar o referido mapeamento; vejamos o trecho a seguir:

P4: começar pela massa, né?

F: não sei, É? O certo é começar pela massa? Então se começar pela cobertura dá errado?

Profs: não

F: mas tem uma certa lógica começar pela massa

[...]

P12: ou observa nas linhas de possibilidades as situações ou faz uma nova árvore com aquelas exceções.

P4: Faria a mesma árvore tirando as opções, no caso 9 e ficamos com 18.

Como aponta Nunes et al. (2012) o espaço amostral não é tão simples quanto pensamos. Acreditamos que após as discussões e as socializações, os professores perceberam sobre a importância de mapear corretamente o espaço amostral de um experimento e que tal fato tem estreita relação com a quantificação de probabilidades. A fala dos professores a seguir traz essa evidência:

P10: Quando a gente começar a trabalhar probabilidade, duas coisas ficaram bem claras, eu entendi. A primeira a árvore bem feita para ele visualizar, e a segunda uma boa interpretação do problema. [...]

P1: Dá para os alunos perceberem que tem relação com o número de possibilidades; vai se mostrar o número de possibilidades. Depois pode até se falar assim: na matemática deram um nome especial “espaço amostral”, poderia ter batizado como Maria, Paulo, mas na matemática batizaram como Espaço Amostral.

P25: acho que o interessante é esse, partir de 3 e/ou 4 elementos, para que o aluno entende que existe várias

combinações possíveis, pra depois você chegar no que seria essas combinações, isso é o espaço amostral, todas as possibilidades.

Ao retomarmos a atividade que solicita o resultado da soma dos pontos obtidos no lançamento de dois dados quais eram as mais prováveis, um professor que não tinha participado da atividade no encontro anterior, de súbito, apresenta seu pensamento:

P20: 10, 11 e 12.

F: por que?

P20: chute

Parece-nos que o professor P20 aposta nos resultados das somas mais altas, trazendo consigo a não compreensão dos resultados que são mais prováveis nesta situação. Um estudo do espaço amostral desse evento pode desconstruir esse raciocínio equivocado do professor. Os próprios professores, que já tinham vivenciado essa atividade anteriormente, explanaram ao professor sobre os eventos mais prováveis quando do resultado da soma de dois dados. Tal fato se condiz em uma evidência que acentua o aprendizado dos professores e, ainda, que na reflexão coletiva, os conhecimentos estão em constante re-elaboração.

Os professores raciocinaram sobre os cuidados no mapeamento do espaço amostral observando ainda situações em que se deve considerar ou não as repetições ou reposições de elementos. No dominó, por exemplo, a pedra 0 \_ 2 e 2 \_ 0 são as mesmas, já no contexto do lançamento de dois dados, não significam as mesmas possibilidades. Vamos analisar outras situações em que ter o domínio sobre essas particularidades são cruciais.

Na atividade do Saco dos Doces e do Jogo Igba-Ita apontamos um conflito semiótico que se revelou na decisão sobre escolhas aleatórias e sobre decidir se um jogo é justo ou não. O conflito semiótico se dá por não perceber as diferentes possibilidades dos resultados do evento envolvido na atividade e, inclusive, calcular erroneamente as probabilidades. O Jogo com Dados e Dominó induz refletir concomitantemente que para o lançamento de dois

dados, o resultado 4 com 1 e o resultado 1 com 4 indicam possibilidades diferentes dentro do espaço amostral, já no Dominó 4 com 1 e 1 com 4 indicam a mesma possibilidade uma vez que neste contexto representam a mesma pedra do dominó,

No sorteio de dois doces de um saco (lembrando que no saco temos dois de morango e um de groselha) alguns professores afirmaram que a chance maior seria de se pegar dois doces iguais e percebemos que uma grande parte dos professores concordava com tal fato. Algumas falas revelam tal conflito:

P1: se ele tem dois doces de um tipo e um do outro, por lógica, a chance maior seria dos dois.

P19: A única certeza é que vamos ter um morango; é a única certeza. Então a outra chance é de 50%.

P20: Depende, se eu pego o de groselha ai é certeza que vem morango; agora se pego morango já não tenho certeza de mais nada. Ai eu sei que é 50% cada um.

P3: [...] Na hora que você puxa, você elimina. Então fica 50% a 50%.

[...]

P5: É, mais no entanto... (coloca mão na cabeça – gesto de dúvida). É? Só que? É o mesmo sabor! O M1 e o M2 é o mesmo sabor né! Pra mim eu colaria como um!

P25: Então, no momento da primeira retirada, eu considerei só os sabores – morango e groselha – mesmo assim a mistura ainda é maior. Por que a mistura vai dá 3 em 4 (3/4). E morango-morango seria 1 em 4. Eu levei em consideração só os sabores.

F: É que você já está partindo do que a gente costuma já fazer com os alunos. (desenha a árvore colocando a fração ou a porcentagem nos ramos). Quando fazemos desse primeiro jeito estamos propiciando uma compreensão maior.

P25: Com certeza, só dizendo, que quando eu falei em relação aos sabores, não diferenciei, mesmo assim a resposta ainda confere, por que são  $\frac{3}{4}$ .

[...]

P4: Quando o professor no início falou 50% e 50%, eu pensei: eu concordo plenamente. Mas é por que eu pensei quando o exercício fala tem 2 morangos e 1 groselha, são números muitos próximos. Se fosse uma relação de 100 doces de morango e 1 de groselha, acho que eu já teria um pensamento diferente. A probabilidade de sair um de morango é bem maior. Se fosse 100 não seria automaticamente.

F: mas a questão do problema é por em cheque essa intuição da gente. O óbvio parece não ser tão óbvio assim. Eu não acho nada óbvio a resposta desse problema.

P12: Será que se a gente mudasse os elementos, ao invés de usar doces, falar 2 professores de matemática e 1 de geografia, será que teria a mesma... a mesma... em fazer grupos com esses professores será que daria esse mesmo embate? Por que quando a gente fala de doces de morango é uma intuição nossa de pensar que são dois doces iguais, mas quando a gente fala com dois professores – se agente já pensa no individual, já pensamos em dois indivíduos diferentes.

F: Mas são as mesmas disciplinas.

Esses equívocos estão ligados a raciocínio que conduz a erros, tanto no mapeamento do espaço amostral como na quantificação das probabilidades. Na aplicação da atividade Jogo Igba-Ita quando questionamos sobre o espaço amostral neste jogo, constatamos que os professores afirmaram que o espaço amostral limitava-se a cinco possibilidades, a saber: todas as conchas com a abertura virada para cima ou todas para baixo, duas conchas viradas para cima e duas para baixo, uma virada para cima e três para baixo e uma virada para baixo e três viradas para cima. Esses professores não reconhecerem que esse espaço amostral é composto de 16 possibilidades possíveis ( $2 \times 2 \times 2 \times 2$ ). O diálogo a seguir revela os referidos posicionamentos dos professores:

P20: então para perder é 1! Ou é 2? Então para perder é 1!

F: Onde que a chance é maior? De ganhar ou de perder?

Pfs: de ganhar!

F: Então, por quê? Como você pode explicar?

P3: Então é 3 por 1; você tem 3 possibilidades de ganhar contra 1 de perder.

P20: ou 3 por 4 e 1 por 4.

P1:  $\frac{3}{4}$  E  $\frac{1}{4}$

P10: não pode colocar como cara e coroa?

[...]

F: Então é mais provável você ganhar ou perder?

Pfs: Ganhar! Ganhar!

P1: se for pensar em conjunto, dá uma resposta, que é essa daí; se for pensar em individual, por que na hora que você joga, você joga de uma vez só. Então são três cinco, dois cinco.

P20: oxe?

P3: A confusão que está dando aí é que são 4 jogadores e 4 pedras. Tem que pensar na posição das pedras (reexplica as posições das pedras) então são 5 e não são 4.

P4: Se analisamos o exemplo do morango, as peças não são iguais; então a gente tem 3 para 1 para perder, a primeira pedra pode estar pra cima ou pra baixo, a segunda pedra pode estar pra cima ou pra baixo. Estamos analisando aí só o pra cima e pra baixo, não estamos analisando individual cada concha; eu acho que a chance de perder é maior que a de ganhar.

O professor P20 está perdido e não consegue visualizar todas as possibilidades. Mantivemos a palavra chance na pergunta para que os professores pudessem pensar nas possibilidades e se posicionar sem a necessidade do cálculo da probabilidade, mesmo que este esteja implícito nas respostas que eles apresentavam ( $3/5$  e  $2/5$ ). Os professores estavam seguros que o jogo não seria justo por que apresentava mais possibilidades de ganhar do que de perder; fizemos duas vezes a pergunta – Onde é que a chance é maior? Então é mais provável ganhar ou perder? – e os mesmos mantiveram a resposta ganhar.

O conflito que surge a partir desse raciocínio vincula-se ao fato de analisar a amostra com quatro conchas como uma situação única desconsiderando assim a permutação que pode ocorrer ao lançarmos quatro conchas de forma aleatória. Quando, por exemplo, lançamos as quatro conchas se obtivermos um resultado com três conchas com a abertura para cima e uma com a abertura para baixo, os participantes consideraram uma única possibilidade disso ocorrer, no entanto, não se sabe qual das conchas seria a

concha com a abertura para baixo e poderíamos ter como tal a primeira, a segunda, a terceira ou a quarta e dessa forma encontrariamos quatro possibilidades ao invés de uma.

Esta dificuldade é comum, pois a compreensão que se tem, por exemplo, duas possibilidades do resultado da soma ser 3, a saber: (1,2) e (2,1); as pessoas erroneamente argumentam como uma única possibilidade.

O conflito acima identificado é análogo ao famoso “Erro de D'Alembert”. Conta-se que ele cometeu um erro na resolução de um problema que lhe foi colocado, a saber: “*Qual é a probabilidade de obter pelo menos uma cara em dois lançamentos de uma moeda?*” D'Alembert apresentou como resposta  $(2/3 = 0,6666\dots)$  e teria explicado seu raciocínio da seguinte forma: *Há três casos possíveis: ou ocorrem duas caras, ou ocorre uma só cara, ou então não ocorrem duas caras. Há dois casos favoráveis: uma só cara ou duas caras.* Esta questão tem origem num artigo publicado por D'Alembert na “Encyclopédia Francesa” de 1754. E D'Alembert termina: “*Isto parece-me digno de merecer a atenção dos calculadores que irão reformular as regras por todos aceites sobre os jogos de azar*” É claro que D'Alembert estava a par da forma usada para calcular a probabilidade pedida, o que se indica é que ele queria chamar atenção para um erro comum no mapeamento do espaço amostral levando a uma resposta equivocada.

Um professor sistematiza na mesa, utilizando com as conchas as diferentes possibilidades.

P27: isso é uma possibilidade (modifica na mesa a posição), essa é outra possibilidade.

**Figura 48: mobilização das conchas pelo professor P27**



Fonte: o autor, 2017.

Ainda com este jogo os professores criaram regras envolvendo outras quantidades de conchas. Ao criar regras os professores estão mobilizando a compreensão do espaço amostral e assim ampliando os seus conhecimentos, inclusive, sobre o raciocínio combinatório. No jogo com as conchas o professor P8 consegue escrever a regra algébrica que representa a número de possibilidades existentes de acordo com o número de conchas que se tem.

P8: Para escrever da forma matemática seria 2 elevado ao número de conchas.

Logo, desta forma, se em um determinado jogo definirmos que 3 conchas serão lançadas, o número de possibilidades será de  $2^3$  ou seja,  $2 \times 2 \times 2 = 8$  possibilidades.

O trabalho com o espaço amostral implementado constituiu-se em fortalecer a ideia do conceito de chance e decidir em que situação um sucesso de um evento é mais provável acontecer. Foi comum os professores partirem direto para realizar o cálculo da probabilidade apresentando números decimais ou porcentagens.

Há diversas situações em que é necessário decidir sobre algo comparando as probabilidades em eventos com espaços amostrais diferentes; essa decisão pode entrar em conflito com o significado institucional caso os sujeitos não considerem o tamanho do espaço amostral de diferentes eventos.

Destacamos um exemplo com a atividade do Blocos no Saco (em que é preciso tomar sucessivas decisões para a escolha de um saco com espaços amostrais diferentes comparando as suas respectivas probabilidades) em que encontramos nas resoluções de alguns professores o cálculo da porcentagem. O professor P23 nos diz que fez por porcentagem e explicamos o que seria melhor nesse momento:

P23: eu fiz por porcentagem

F: Assim, você já calculou a probabilidade e tal, mas nesse momento, é poder ver as quantidades diferentes e estabelecer onde você tem a melhor chance.

Nesta mesma atividade, encontramos resolução de professores que estavam fazendo o cálculo da subtração, o que nem sempre leva a resposta correta. Seguindo este raciocínio, se tenho um saco com 3 amarelos e 3 pretos com total de 6 blocos:  $6 - 3$  pretos = 3 amarelos, e no outro saco tenho 4 amarelas e 4 pretos:  $8 - 4$  pretos = 4 amarelos e assim, erroneamente decidir pelo 2º saco; no entanto as chances são as mesmas pois temos 50% de sair amarelo no saco 1 e no saco 2.

P4: Fiz pela diferença, por que ao sobrar maior quantidade de amarelo tem maior probabilidade de sair.

Outros professores compreendem da importância de estabelecer as comparações entre amarelos e pretos e do poder da visualização dessa comparação.

F: [...]É que ao comparar nem sempre vai sobrar uma quantidade maior amarelo.

P20: Aí a gente faz o inverso.

F: Aí você tem que fazer um raciocínio inverso. Quando sobrar muitos mais pretos então aquele saco não é o mais favorável, tem que escolher o outro saco.

Os professores podem apresentar dificuldades com o conhecimento probabilístico por fortes crenças advindas do determinismo, como por exemplo, a crença em validar o cálculo por meio da probabilidade clássica como no exemplo a seguir:

P1: talvez outro jeito, mas é bem mais difícil, se eu somasse todas as cores dos dois lados embaixo e em cima, eu tenho um

espaço amostral total do total. Aí poderia ter o parcial do total do item 1 e do item 2.

Com as atividades foi possível mobilizar nos professores a linguagem concernente ao conhecimento probabilístico. Continuamos trabalhando com os significados de termos importantes ao conceito de probabilidade, como mais provável ou menos provável. No trecho a seguir o professor P4 fala sobre exceção, eventos e evento mais provável.

P4: trabalhar com a exceção

F: com a exceção de que?

P4: de eventos, posso falar eventos?

F: Acho que seria de casos; eliminar algumas dessas combinações, casos no espaço amostral. Como era lá no jogo do dominó que teríamos que eliminar os casos em que estavam repetidos. Então a gente tem o mapeamento do espaço amostral e a necessidade de eliminar alguns casos desse espaço amostral.

P4: acho que o que ficou não ficou claro é que se pergunta o que é o mais provável, tirar uma desejada ou indesejada; fala em mais provável, o problema não fala em correto e incorreto, fala em desejado e em indesejado, quer saber o mais provável das duas opções.

Pudemos identificar que há dificuldades dos professores em aceitar problemas abertos – inclusive bem característicos das situações probabilísticas – que possibilitam diversas formas de resolução reiterando um posicionamento de raciocínio determinista.

P1: eu posso provocar um problema em que os dois sejam coincidentes, aí não vai gerar nenhuma dúvida, o que a escola vai querer é aquele que você quer tirar, é “o que eu quero” com “o que eu quero”, acabou o problema.

P17 apresenta uma sugestão: observando assim o problema, eu achava legal também, por que se for uma van só para as três escolas, o que não é desejado para uma é desejado para outra. Na verdade para chegar à conclusão e bater esses dados precisa ter uma van para cada escola. Por que se for tudo numa van só não tem necessidade de tirar nenhuma caixa.

Verificamos também que em algumas falas dos professores ou em suas estratégias há a crença de que um resultado pode interferir no resultado subsequente, ora isto só acontece nos casos dos eventos serem dependentes.

Na atividade do Jogo das 3 fichas os eventos estão condicionados, porém não no sentido do que o professor P29 afirma ou no explicado pelo professor P32 descrito a seguir:

P29: estava apostando mais no roxo, por que no início estava saindo mais roxo e achei que isso iria se manter.

P32: sempre a mesma cor, por que sempre vai ter que sair uma.

F: será?

P32: E acertei 1 rsrsrsrs.

Outros professores testaram diversas estratégias, no entanto, essas estratégias não foram embasadas em um reconhecimento da probabilidade condicionada de eventos. O professor P1, inclusiva, começa com a estratégia correta e segue para duas estratégias que não são corretas neste mesmo jogo. Isto nos revela uma imprecisão, uma insegurança, ou melhor, uma dificuldade em perceber a dependência dos eventos.

P1: Apostei na que estava saindo, na mesma face, e acertei 40%. Na segunda desacreditei na que estava saindo e apostei no inverso da mostrada, acertei 40%. Na terceira misturei as duas, fiquei trocando e caiu para 30%.

Na literatura encontramos estudos que apontam dificuldades de professores de matemática com a probabilidade e a dependência de eventos. Mohr (2008) investigou 122 futuros professores aplicando um item no qual solicitava determinar a probabilidade de eventos dependentes e mais da metade desses professores erraram. Mohr (2008) afirma: “erros como esses revelam um mau entendimento nos conceitos de eventos independentes e dependentes” (p. 36). Em um estudo com professores de matemática mexicanos sobre eventos independentes, realizado por Sánchez (2000), os professores apresentaram ideias confusas diante de atividades sobre independência de eventos em que confundem eventos independentes com eventos mutuamente excludentes. Cordani e Wechsler (2006) apontam que o conceito de eventos independentes tem causado muita confusão teórica entre estudantes e professores; em seus estudos foi comum confundir a palavra independência com a palavra exclusão promovendo uma dificuldade em compreender estes conceitos.

Os professores validam qual a melhor estratégia corroborada nas falas dos professores P36 e P1:

F: e aí, o que vocês acham?

P36: a face mostrada ser a face prevista; acertei 7 vezes, só três que deu errada.

F: então a melhor estratégia seria apostar na face mostrada?

Pfs: isso! Correto!

P1: Temos AA RR RA, se você olhar, a chance de sair qualquer cartão é um 1/3. Só que depois que eu puxar um cartão, olha que interessante, a única que não repete é a terceira (RA), então seria 2 em 3. Só que se eu olhar, a chance de ser repetida é maior. Então quer dizer a chance de sair repetida é maior, que é 2 em 3.

Coletivamente, os professores sistematizam que não é uma forma de adivinhar, de acertar sempre e sim compreender a melhor estratégia. A melhor estratégia oferece maiores acertos, mas não significa que vai acertar sempre. Vejamos a fala do professor P31 e P12:

P31: Não é a forma de adivinhar, acertar sempre e sim a melhor estratégia. Não significa que vai acontecer sempre. E então a gente percebe que a melhor estratégia é apostar na mesma face mostrada. Você tem uma probabilidade de 2/3 em acertar. Dizemos para os alunos que a probabilidade é de 1/6 mais podemos jogar vinte vezes e não sair um número daquele, pode acontecer.

[...]

P12: 2/3 mostra que é mais provável acertar duas iguais do que duas diferentes. No meu segundo experimento já deu 85%.

Decidimos apresentar aqui a análise das estratégias iniciais apresentadas pelos professores na realização da primeira rodada do jogo (tabela 5).

**Tabela 5: frequência das estratégias iniciais**

<i>Estratégias</i>	<i>Freq.</i>	<i>Porc. (%)</i>
E1: Apostar na mesma cor da face que se vê (correta).	3	10,34
E2: Apostar na cor contrária da que mostra.	2	6,9
E3: Considerar que não utilizou nenhuma estratégia.	16	55,18
E4: Eleger uma das cores em todos os ensaios.	2	6,9
E5: Uso dos resultados anteriores para a escolha.	1	3,44
E6: Mudas as estratégias ao longo da sequência.	4	13,8
E7: Utilizar propriedades não físicas das fichas.	1	3,44
<b>TOTAL</b>	<b>29</b>	<b>100,00</b>

Fonte: O autor, 2017.

Os índices nos revelam que um maior grupo de professores (55,18%) considerou que não utilizavam nenhum tipo de estratégia em suas apostas ou que apostavam aleatoriamente (E3). Três dentre os professores elegeram a estratégia correta “E1” como estratégia inicial. Esses resultados estão na mesma direção dos resultados de Contreras (2011) em que a E3 é a de maior índice (47,6%) de indicações dos participantes da sua pesquisa com 166 professores em exercícios e futuros professores.

Alguns argumentos apresentados pelos professores foram errôneos por que apresentavam uma ideia de que os resultados de dar uma das cores seriam equiprováveis. Acreditamos que tal concepção conduziu a maior parte dos professores a não seguir nenhuma estratégia. Outras falas apontam que não seguiu nenhuma estratégia por ser um sorteio aleatório demonstrando uma concepção fragilizada, pois como já discutimos o fato de ser aleatório não

impede que identifiquemos resultados mais prováveis ou menos prováveis de acontecer.

P26: A primeira vez fiz aleatório, sem nenhuma estratégia e acertei 50%, 5 das 10; na segunda pensei sempre no inverso, quando saía uma cor, eu colocava outra e acertei 40%. E na terceira continuei com a mesma estratégia, sempre o inverso e caiu para 30%

P1: Apostei na que estava saindo, na mesma face, e acertei 40%. Na segunda desacreditei na que estava saindo e apostei no inverso da mostrada 40%. Na terceira misturei as duas, fiquei trocando e caiu para 30%.

Os dois excertos demonstram diferentes estratégias que os professores seguiram. O professor P26 não utiliza em nenhum momento a estratégia correta. E o professor P1, inicia com a estratégia correta, mas depois experimenta outras formas.

Nesta unidade em diversos momentos os professores refletiram sobre o rebatimento das atividades com os seus alunos. Tal reflexão amplia os conhecimentos dos professores. O professor P25 valida a importância de um trabalho que rompe com o paradigma de iniciar o estudo de um conceito matemático já direto pelas definições ou fórmulas e o professor P33 fortalece essa concepção, vejamos:

P25: por que se você já entra direto, o aluno pode dizer: o quê que é isso? Quando você coloca pra ele analisar, pra ele chegar nesse número total fica mais fácil. E essa é uma visão que não é a mesma coisa, de quando se trabalha no 2º ano do EM ou 9º ano, de ir direto à definição, você não se atém as definições de aleatoriedade, de espaço amostral; isso ajuda muito o aluno a entender.

P33: Ele vai fazer o desenho do bolo, do recheio, sem saber de uma árvore e depois ele pode ir combinando, sem saber que está fazendo uma árvore.

Alcançamos já nesta segunda unidade a compreensão dos professores sobre uma perspectiva diferenciada para o ensino da probabilidade que ultrapasse uma perspectiva apenas procedural e de uso de fórmulas. Além da socialização de diversos contextos probabilísticos que possam ser utilizados em sala de aula.

De modo geral, com essa unidade de estudo pudemos apontar que houve ampliações na base de conhecimentos dos professores sobre espaço amostral, sobre resultados mais prováveis ou menos prováveis, a respeito de eventos dependentes e independentes, a compreensão de razão e estudo das chances, sobre a quantificação de probabilidades simples e condicionadas e ainda, sobre o ensino desses conceitos em sala de aula. O conhecimento emergente, como observamos, foi o reconhecimento da importância da utilização da árvore de possibilidades. Houve a mobilização de práticas matemáticas e didáticas sobre a temática desta unidade de estudo.

### **5.3 TRAJETÓRIA DIDÁTICA GERADA PARA O DESENVOLVIMENTO DA UNIDADE QUANTIFICAÇÃO DE PROBABILIDADES E RISCO**

Esta unidade foi desenhada para ser aplicada em um único encontro formativo. Como de praxe iniciamos o encontro situando para os professores a unidade de estudo dentro do desenho do programa formativo.

As atividades selecionadas foram as 14.Jantar na Escola, 15.Biscoito do Ben, 16.Show de danças e 17.Decisões cotidianas. Todas estas atividades fazem parte do Programa de Ensino de Nunes et al. (2012). Mais uma vez salientamos que as atividades foram construídas para o trabalho com os alunos; contudo também nesta unidade houve espaço para reflexão das atividades e seu rebatimento nas salas de aula de matemática.

#### **5.3.1 TIPOS DE PROBLEMAS E PRÁTICAS (MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS)**

Segue a descrição da primeira atividade deste encontro.

##### **14. Jantar na Escola**

Objetivos: Avaliar as chances de um evento usando a comparação de razões. Interpretação dos valores das células em uma tabela de dupla entrada.

Materiais:

- .Livro
- .Calculadoras

Como fazer:

Apresentar 21 itens sobre uma pesquisa fictícia criada para o desenvolvimento da atividade. O contexto dessa pesquisa são as preferências de alunos para o jantar da escola. Para cada item é solicitado qual a classe que tem a melhor chance para encontrar uma preferência de comida em particular, que está marcada com um

símbolo do asterisco. Explicar que existem duas escolas que responderam à pesquisa para o serviço de merenda escolar sobre qual de dois pratos específicos eles preferem, o que vai permitir saber onde certas refeições devem ser entregues a cada dia para agradar a maioria das crianças. Nesta pesquisa nem todos os alunos têm merenda todos os dias, por isso o número total de crianças que utilizam a cantina da escola diferem dia a dia. Além disso, os grupos de anos escolares diferentes foram entrevistados em dias diferentes para que os números totais variem.

Didaticamente, para o trabalho em sala de aula, os itens foram agrupados em três grupos para serem apresentados em diferentes dias de aula. Na figura 49 apresentamos o primeiro grupo com os sete itens.

**Figura 49: primeiro grupo de itens da atividade O Jantar na escola**

		<b>Jantar na escola</b>					
		Escola da árvore		razão		Escola da cruz	
a)30	b)15	<input type="checkbox"/>	a) Geléia*	ou	b) Yogurte	<input type="checkbox"/>	a)27 b)9
a)49	b)20	<input type="checkbox"/>	a) sorvete *	ou	b) Panquecas	<input type="checkbox"/>	a)37 b)15
a)12	b)27	<input type="checkbox"/>	a) Pastoso	ou	b) Omelete *	<input type="checkbox"/>	a)9 b)22
a)19	b)6	<input type="checkbox"/>	a) Salada de macarrão ou	b) Bolo de peixe *	<input type="checkbox"/>	a)14 b)4	
a)3	b)22	<input type="checkbox"/>	a) Pizza de queijo *	ou	b) Batata assada	<input type="checkbox"/>	a)5 b)37
a)13	b)3	<input type="checkbox"/>	a) Frango assado	ou	b) Almondegas *	<input type="checkbox"/>	a)29 b)7
a)23	b)4	<input type="checkbox"/>	a) peixe com fritas*	ou	b) Paella	<input type="checkbox"/>	a)17 b)3

(Circule as razões que dão melhor chance de encontrar crianças que preferem alimentos que têm \*)

Fonte: Adaptado de Nunes et al. (2012).

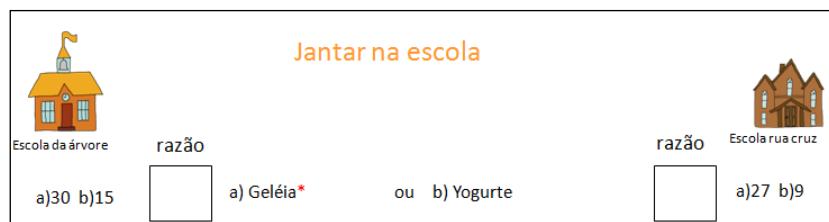
Discutimos coletivamente o primeiro grupo de itens (Figura 49); em seguida, para os outros dois grupos, os professores puderam discutir em duplas. No final da atividade realizamos uma discussão coletiva concedendo um tempo para explicação dos raciocínios envolvidos.

Esta atividade prepara para a última atividade dessa unidade, quando as informações serão apresentadas em tabelas de dupla entrada, na qual será necessário elaborar razões horizontalmente e verticalmente para

comparar as quatro células e dessa forma, compreender sobre associação de variáveis e a ideia de risco probabilístico.

Informamos aos professores que se deve realizar o cálculo da razão decidindo com relação a esse valor o que é favorável para você para realizar uma melhor escolha. Passamos ao estudo do primeiro item (figura 50) para verificar qual escola que apresenta uma melhor chance:

**Figura 50: primeiro item - atividade O jantar na escola**



Fonte: Adaptado de Nunes et al. (2012).

O comando da atividade pede que encontremos qual escola oferece a melhor chance de encontrar uma criança que prefere geléia (observe que geléia está marcada com um asterisco vermelho). Realizando a divisão, temos  $30/15 = 2$  e  $27/9 = 3$ . Nesse item é a Escola da Cruz que nos dá a melhor chance.

Os professores tem um tempo para realizar os outros itens da atividade em seu livreto. Em seguida partimos para a socialização.

Na lousa passamos por cada caso (cada item) e registramos onde temos uma melhor chance, se na escola da árvore ou na escola da cruz. Deixávamos os professores opinarem e instigávamos uma justificativa dos mesmos ao se pronunciarem.

Perguntamos aos professores o que temos de diferente do primeiro item para o segundo que pode se materializar como uma dificuldade para os alunos. No entanto os professores não respondem. E falamos que é o número decimal. No terceiro item os valores são  $12/27 = 0,44444$  e  $9/22 = 0,40909090$  e a resposta é na Escola da Cruz.

Ao chegar ao item que envolve Salada de Macarrão e Bolo de peixe dedicamos um tempo maior por haver alguns questionamentos dos professores. Esclarecemos que nem sempre a maior razão é a que se deseja.

A proposta intrínseca da atividade é treinar por meio da razão a opção em que se tem a melhor chance. Falamos sobre o que pode se passar com as crianças ao vivenciarem atividades deste tipo, que é a tendência em comparar pelo resultado da subtração e não pela razão. Relacionamos com uma situação análoga que aconteceu no encontro passado, uma dupla de professores, na atividade dos blocos pretos e amarelos, estava fazendo o seu estudo utilizando a operação de subtração.

Apresentamos aos professores a próxima atividade - Biscoitos do Ben. É parecida com a situação dos sacos de doces, já trabalhada anteriormente; só que aqui já temos o espaço para uma sistematização por meio do diagrama da árvore para a quantificação das probabilidades. Mostramos a atividade na tela do slide.

#### 15. Biscoite do Ben

**Objetivos:** Ser capaz de fazer boas estimativas. Posteriormente quantificar as probabilidades em eventos mais prováveis ou menos prováveis e utilizar a representação do diagrama da árvore para o registro das probabilidades. Comparar tais probabilidades com as estimativas para identificar se as estimativas foram boas ou não.

**Materiais:**

- .Livreto
- .Lápis

**Comando:**

Ben tem uma lata de biscoitos a partir do qual ele pode fazer 2 seleções. Dentro da lata há 3 biscoitos, 1 de chocolate e 2 de amendoim. Sua escolha preferida seria obter 2 biscoitos de amendoim. Qual você acha que é a probabilidade de ele obter 2 biscoitos de amendoim?

**Como fazer:**

Realizar uma primeira estimativa da probabilidade de isso acontecer e registre. Em seguida desenhe um diagrama para ver quais são as chances. Você estava certo? Discuta como as suas estimativas e os resultados de seu diagrama eram o mesmo/diferente e por quê.

Professores discutem as suas estratégias e resultados entre si. Sistematizamos tais resultados na lousa. Como estratégia didática, realizamos

todos os cálculos na lousa para desdobramento das possibilidades. Discutimos com os professores a utilização de diferentes estratégias considerando os níveis escolares na qual a atividade pode ser aplicada.

Lembramos que o interessante nestas situações expostas por nós é que estamos estudando as ideias, e aí a partir de cada nível escolar o professor pode ir aumentando a complexidade. Mas ainda, perceber como é importante partir do mapeamento das possibilidades para depois chegar a outras formas de resolução.

Continuamos com as atividades, desta vez a atividade - Clube de Danças. Essa atividade também envolve a ideia de eliminar/agregar casos de acordo com os eventos e a quantificação de probabilidades.

#### 16. Clube de Danças

**Objetivos:** Ser capaz de trabalhar a composição do espaço amostral, agregar e eliminar os casos para quantificar probabilidades de determinados eventos por meio do significado clássico. Desenvolver a compreensão sobre sorteios em urna sem reposição na qual o espaço amostral se modifica a cada sorteio.

**Materiais:**

- .Livro
- .Saco com as combinações de pares para dança
- .Papel grande e marcadores

**Comando:**

Em um clube de danças há 10 pessoas, 5 homens e 5 mulheres. Eles devem formar pares mistos para a dança, por isso (apenas nesse problema) os homens não podem dançar com outros homens, ou mulheres com mulheres.

**Verificar:**

- i) O número de danças que serão executadas?
- ii) Quantas vezes cada pessoa dança?

Marcar ou circular nos diagramas os dançarinos eliminados ou escolhidos para as seguintes perguntas (indica-se o uso de canetas de cores diferentes):

- iii) Qual é a probabilidade de que uma dança seja dançada por casais cujos nomes começam ambos com a mesma letra?
- iv) Qual é a probabilidade de que uma dança seja dançada por um casal que ambos estejam vestidos de vermelho.
- v) Qual é a probabilidade de se retirar o primeiro par de dançarinos com Billy no par?

Inserimos os pares com os nomes dos dançarinos no saco e começamos a realizar os sorteios. Retiramos um par de dançarinos do saco e anotamos o par. Em seguida, continuamos com os sorteios; dependendo dos pares de dançarinos sorteados deve-se perceber a mudança de probabilidade com a redução do espaço amostral.

**Figura 51: folheto para resposta da atividade Clube de Danças**

**Clube de Danças**

- Você consegue verificar o número de danças que serão executadas?
- Quantas vezes cada pessoa dança?
- Qual a probabilidade de que uma dança seja dançada por casais cujos nomes começam pela mesma letra?
- Qual a probabilidade de que uma dança seja dançada por um casal que ambos estejam vestidos de vermelho?
- Qual a probabilidade de se sortear o primeiro par de dançarinos com Billy no par?  
 1ª seleção  
 2ª seleção  
 3ª seleção  
 4ª seleção  
 5ª seleção

Fonte: Adaptado de Nunes et al. (2012).

**Figura 52: pares para sorteio na atividade Clube de danças**

Billy e Amy	Sam e Amy	Marcos e Amy	Lucas e Amy	Dan e Amy
Billy e Suzie	Sam e Suzie	Marcos e Suzie	Lucas e Suzie	Dan e Suzie
Billy e Maria	Sam e Maria	Marcos e Maria	Lucas e Maria	Dan e Maria
Billy e Liza	Sam e Liza	Marcos e Liza	Lucas e Liza	Dan e Liza
Billy e Laura	Sam e Laura	Marcos e Laura	Lucas e Laura	Dan e Laura

Fonte: Adaptado de Nunes et al. (2012).

Tomemos um exemplo para o item 5: para a primeira seleção, a chance de termos Billy no par será 5 em 25 ou probabilidade igual  $5/25$ . Supomos que tenha sido sorteado o par “Billy e Maria”, assim para o próximo sorteio a chance será de 4 em 24: probabilidade  $4/24$ ; mas se o par sorteado for “Sam e Amy” a chance será de 5 em 24: probabilidade  $5/24$ . Como podemos perceber, a probabilidade será modificada a cada sorteio, pois não há reposição dos

pares, e ainda, será modificada também caso em um dos sorteios seja retirado o par com Billy ou não.

Essa atividade do Clube de Danças se constitui em um rico espaço para compreender sobre a quantificação de probabilidades e, por meio dela, dentro dessa proposta, é possível dar significado ao termo “probabilidade” como o número que mede a chance de algo acontecer e, como já destacamos anteriormente, compreender o significado clássico de probabilidade representado por uma razão. Todavia, tal como na atividade anterior, neste momento, torna-se mais interessante discutir com as crianças a distinção entre se ter a chance de 5 em 25 e a chance de 4 em 25, comparando também com o que significa a chance de 5 em 24 do que apresentar as probabilidades por meio das frações.

Realizamos o sorteio e sistematizamos com os professores. O espaço amostral vai se modificando. Questionamos sobre o que está acontecendo conforme vamos realizando o sorteio e os professores acompanham com as respostas.

Pontuamos que o interessante seria se saísse alguma dupla com Billy incluído alguma das vezes. Nesta atividade estamos eliminando casos do espaço amostral. Perguntamos o que os professores acharam e os mesmos se posicionaram positivamente com respeito a atividade.

Entramos agora para as atividades que discutem sobre a noção de risco probabilístico. Apresentamos uma tabela no slide e explicamos a atividade. Chamamos a atenção que é de acordo com a tabela, com os dados da tabela da atividade. Destinamos um tempo para os professores responder. Eles respondem e se envolvem, mas na socialização ficam um pouco calados. Temos quatro questões para serem trabalhadas com os professores, as mesmas que podem ser trabalhadas com os alunos.

#### 17. Decisões Cotidianas

**Objetivos:** Desenvolver habilidades no uso da razão que ajudem em uma melhor tomada de decisão na análise de possíveis associações entre variáveis com os dados apresentados em tabelas de dupla entrada. Interpretar o significado das razões envolvendo as quatro células elaborando conclusões sobre estas razões.

**Materiais:**

- .Livro
- .Lápis
- .Calculadoras

**Como fazer:**

Apresentar uma questão por vez e solicitar uma previsão/tomada de decisão com respeito se duas coisas tem relação ou não antes de olhar para a tabela.

Pergunta 1: Cereal de aveia e os níveis de colesterol (correlacionados)

Pergunta 2: Pais músicos e a capacidade da criança para tocar instrumento

Pergunta 3: Nível de decibéis de i-Pod e audição (correlacionados)

Pergunta 4: O contato com eczema e o desenvolvimento de eczema.

No início de cada questão solicitamos que se observem as evidências e os valores na tabela. Para a primeira pergunta o comando é: Você acha que comer cereais de aveia no café da manhã tem alguma ligação com os níveis de colesterol? Dar uma explicação breve e simples sobre o colesterol como depósitos de gordura que podem bloquear as artérias se for muito alta, para introduzir as crianças ao tema.

Pede-se que eles façam uma previsão antes de olhar para as tabelas. Depois de terem feito suas previsões, eles têm no livro 2 páginas de tabelas para analisar em cada questão. Pede-se que eles começem calculando as razões entre todas as quatro células da tabela, ou seja:

Comer cereais de aveia e ter colesterol alto

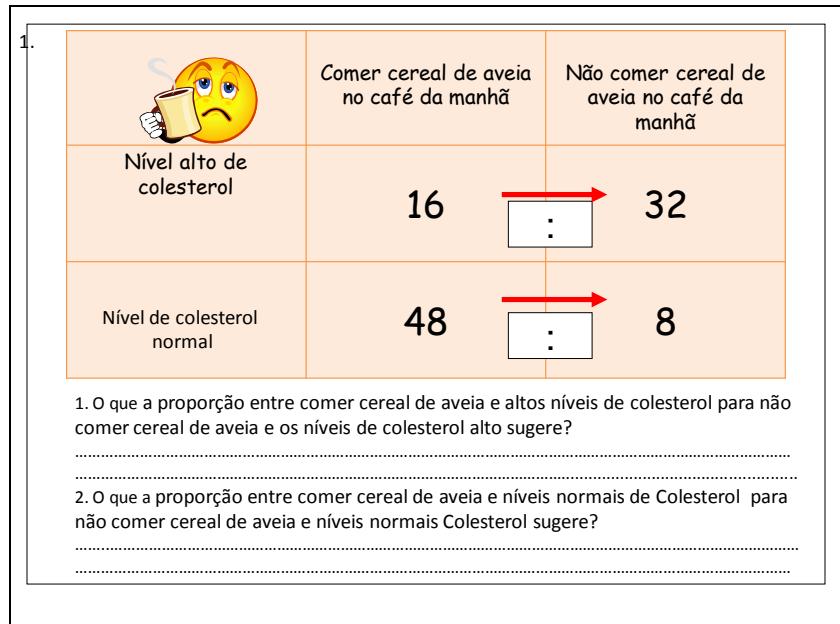
Comer cereais de aveia e ter colesterol normal

Não Comer cereais de aveia e ter colesterol alto

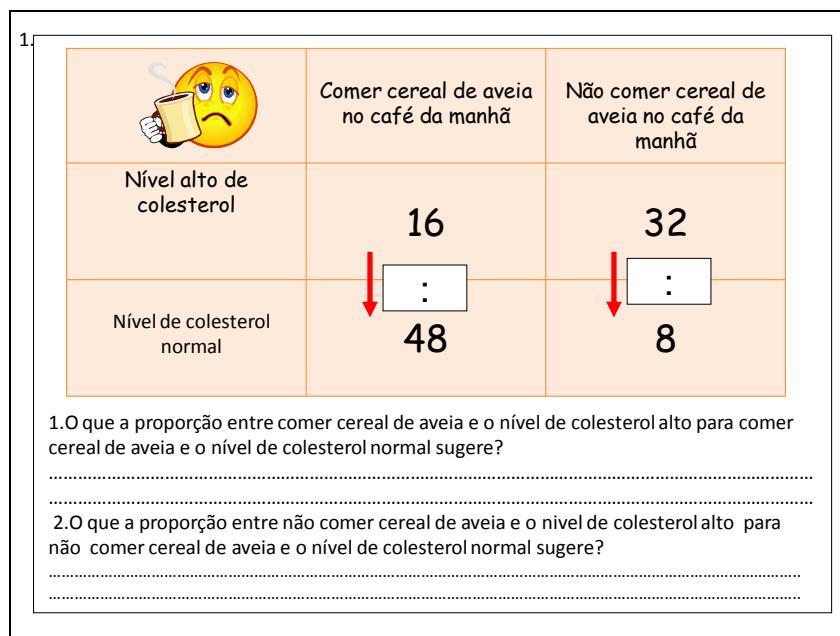
Não comer cereais de aveia e não ter colesterol alto

Para cada questão, na primeira página de relações há um indicativo para comparar as células na horizontal, para a segunda página comparar na vertical.

Vejamos as figuras como apresentadas no livro.

**Figura 53: folheto para comparação das relações na horizontal**

Fonte: Nunes et al. (2012).

**Figura 54: folheto para comparação das relações na vertical**

Fonte: Nunes et al. (2012).

Uma vez que se trabalharam todas as razões é preciso tentar interpretar o que isso significa para verificar se as duas coisas estão relacionadas. Temos quatro razões para comparar e interpretar e ver se há alguma coisa para dar suporte a uma relação, ou se há alguma coisa para refutar essa relação.

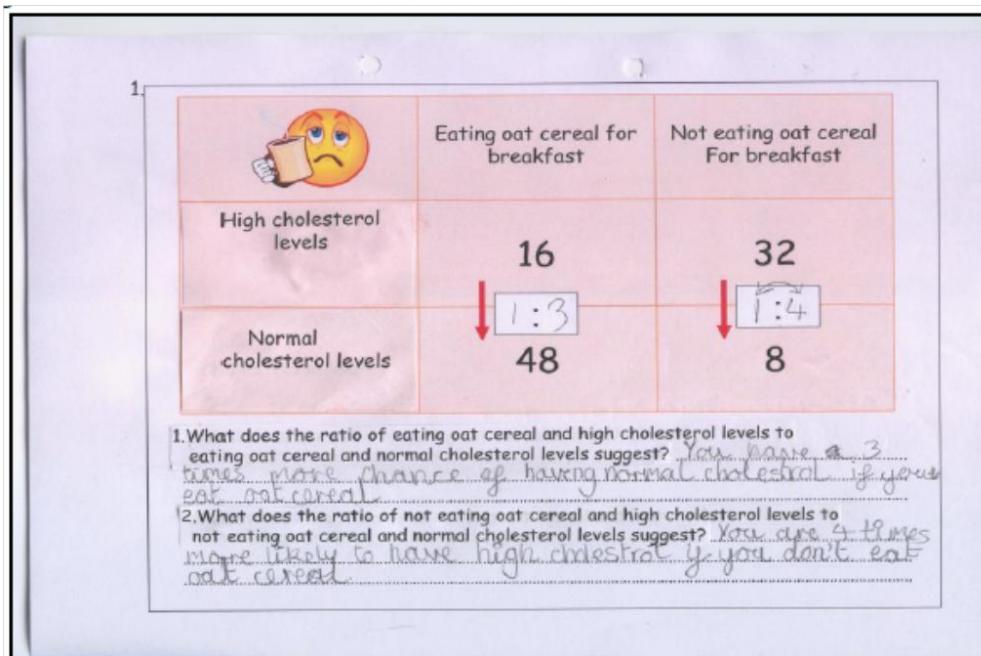
Ao realizar as comparações neste item, deve-se encontrar uma

correlação positiva entre o consumo de cereais de aveia e com níveis normais de colesterol quando as razões são comparadas.

Como antes, para cada pergunta, deve-se fazer uma previsão sobre se existe uma relação entre as duas coisas em questão. Para cada pergunta, os professores são convidados a calcular as razões e, então, interpretar o que isso significa para a questão. Por fim, os professores escreveram uma explicação para sua decisão final com relação à informação que eles interpretaram.

Selecionamos uma resolução (figura 55) de um aluno quando do contato com a atividade e apresentamos aos professores. Segundo Nunes et al. (2012) poder-se-ia imaginar que tal resposta seria muito sofisticada para alunos nos anos iniciais, porém os alunos vem raciocinando com base nas razões em diversas atividades. No programa de ensino aplicado pela autora, os alunos trabalharam com razões em mais de nove atividades e isso, faz esperar que no momento dessa atividade sobre a noção de risco elas já não tenham tantas dificuldades na análise das tabelas.

**Figura 55: resolução de um aluno na atividade de risco**



Fonte: Nunes et al. (2012).

Na resolução apresentada aos professores, figura 55, a criança

inicialmente escreveu a proporção seguindo o caminho errado e percebeu o erro ao interpretar a informação. A necessidade de interpretação estimula a reanálise e a verificar os números.

Convidamos para algum deles mostrar como realizou a atividade na lousa. Dois professores resolveram ir ao quadro, na próxima seção apresentamos os conhecimentos mobilizados neste momento de resolução.

Citamos que a atividade do Jantar na escola foi uma preparação para esta atividade; por isso que é preciso estabelecer as relações e decidir sobre qual a melhor razão com respeito às relações.

Demos continuidade onde apresentamos o diagrama com proposições e citamos a ideia do diagrama de Carroll. O diagrama de Carroll são tabelas retangulares que organiza os dados segundo critérios de sim/não. Indicamos que estamos trabalhando com uma análise por meio da razão, mas que não deixa de perder o caráter de uma questão de probabilidade.

Ressaltamos que esta é uma abordagem para irmos além do trabalho de quantificação de probabilidade por meio das fórmulas; usamos a razão para tomar decisões com respeito às variáveis envolvidas. Relemos a 2<sup>a</sup> questão e partimos para a socialização.

Com essas duas primeiras questões, discutimos que a associação da primeira é bem mais forte que essa (a segunda), nessa há um pouco de associação, mas não é significativa, é uma associação fraca.

Explicitamos que podemos ver o que é mais provável e não uma certeza. Estamos trabalhando com probabilidades. Por meio de uma apresentação de slides fizemos uma reflexão sobre as quatro questões e a noção de risco e prosseguimos com uma articulação das questões de risco com o conceito de probabilidade.

Concluímos este encontro - que foi destinado apenas para esta unidade de estudo sobre quantificação e risco. Os professores receberam o texto guia com as atividades e uma breve discussão sobre as mesmas.

### 5.3.2 ANÁLISE DOS CONHECIMENTOS DOS PROFESSORES NA UNIDADE QUANTIFICAÇÃO DE PROBABILIDADES E RISCO

De acordo com as análises desse encontro apontamos que os professores na resolução das atividades apresentam uma tendência na utilização da probabilidade clássica, questão que já pontuamos na discussão anterior da segunda unidade de estudo. Na atividade em que se tem que tomar uma decisão com base nas razões entre duas quantidades que representam preferências para identificar quantas vezes um tem a mais que o outro (exemplo: 30 preferem geléia e 15 prefere iogurte), o professor P7 discorre:

P7: não é 30 por 45? O total não são 45? A razão não é pelo total?

A referência que o professor faz em sua fala é justamente a tentativa de tomar a decisão realizando o cálculo da probabilidade por meio da fórmula de Laplace onde 30 é a ocorrência do sucesso desejado e os 45 a quantidade de observações – o espaço amostral.

Houve professores que para decidir sobre a relação das variáveis realizaram o cálculo da diferença entre os valores. Não perceberam que a ideia é estabelecer uma comparação identificando quantas vezes um tem a mais que o outro e não a diferença entre os valores. Um exemplo, consiste no caso de 8 crianças que preferem geléia e 4 preferem iogurte em uma determinada escola, fazendo pela diferença temos 4 e pela razão 2 : 1 (2 para 1) e em outra escola 12 preferem geléia e 6 preferem iogurte, fazendo pela diferença encontramos 6 e pela razão t também 2 : 1. Em ambos a razão é 2 e pela diferença obtem-se 4 e 6 respectivamente. Assim, optando pela razão nossa decisão é que as escolas apresentam as mesmas chances.

Novamente, nesta unidade de estudo, a linguagem probabilística é evocada. Refletimos sobre as diferentes representações possíveis e a adequação da proposta de abordagem metodológica em que se está acreditando. Nas decisões sobre que árvore utilizar é necessária levar em consideração o nível dos alunos. Observemos o diálogo:

P?: parecido com o do morango e da groselha. [fazendo referência à atividade Doces no Saco]

F: quem gostaria de fazer aqui na lousa?

[P6 fez na lousa.]

F: Aí você fez o mapeamento onde você pode ver o que é mais provável; agora qual a probabilidade?

[A professora calcula a probabilidade utilizando 2/3 para o sabor amendoim e 1/3 para chocolate]

P4: Eu coloquei mais uma linha de amendoim

P6: Então, se ele tirar da primeira seleção é amendoim ou chocolate, né isso? Se ele tirar a primeira amendoim ele ainda na segunda vez pode tirar um amendoim ou chocolate, mas se dá primeira ele tirar chocolate (fica pensativa) mas se são duas seleções não importa o que ele vai tirar. (continua bem pensativa).

[...]

P6: Na árvore já fiz assim: 2/3 e 1/3.

P4: Poderia ser assim, mas poderia ser 1/3, 1/3 e 1/3, ter os dois amendoins na árvore. Lógico que continua o mesmo.

Os professores discutem sobre essa questão levantada pelo P6 e P4 com foco na qual representação seria melhor para os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Os professores compreendem bem e não apresentam dificuldades na resolução. Discorrem que é um tipo de situação em que você vai ter que montar o espaço amostral e, ainda, um tipo de atividade para não ficar só nas moedas e nos dados. Os professores afirmam corretamente que as perguntas são eventos desse experimento.

Os professores compreenderam sobre a modificação do espaço amostral conforme se realiza as seleções aleatórias com ou sem reposição de elementos.

F: Ao sortear, o que estamos modificando?

Profs: modificando o espaço amostral.

F: Na segunda seleção saiu TAM E AMY. Qual a probabilidade agora?

Profs.: 5/23. [23 por que o espaço amostral se reduz]

Não houve dúvidas no que diz respeito à modificação do espaço amostral conforme a retirada/sorteios dos elementos. Fatos como esses nos apontam que os professores estão aprendendo e/ou resgatando

aprendizagens sobre essas noções que são elementares no estudo da probabilidade.

No trabalho com as atividades sobre risco, na questão 1 (variáveis: nível de colesterol e consumo de cereal), o professor P3 resolve ir ao quadro e apresentar a sua resolução.

P3: trabalhamos com a ideia de porcentagem, 16 para 32 = 50%. Por que a ideia também que gerou uma dúvida, que meu colega levantou, aqui a gente não tem que somar esses dois e esses dois (se refere as linhas e colunas) para ter uma análise global. Aí ele falou, mas a gente pode pensar o seguinte, somar as 4 células que dá 104 e usar essa valor com os valores de cada célula. Aí a gente ficou no impasse ali. No caso, eu fiz assim, o 48 eu invertei a posição, do menor para o maior e levei para a porcentagem, eu dividi 8/48 e cheguei a 166% de redução, foi isso que eu fiz.

Outro professor, P17, vai ao quadro e apresenta a sua resolução. Vamos descrever como o professor fez, pois no momento da resolução o mesmo verbalizou poucas vezes.

**Figura 56: resolução do professor P17 n atividade sobre risco**

nível alto	ñ come	32/16	2 vezes
nível normal	come	48/8	6 vezes
nível normal	come	48/16	3 vezes
nível alto	ñ come	32/8	4 vezes

Fonte: o autor, 2017.

O professor P17 realiza todos os cálculos, porém não consegue concluir.

F: e como você vai concluir a partir daí?

P17 em silêncio

F: Duas vezes o que? O que significa esse duas vezes?

O professor P17 conseguiu realizar os cálculos, porém é perceptível a grande dificuldade em argumentar e construir o raciocínio que o leve a uma tomada de decisão. Alguns professores intervêm colocando suas explicações, porém também com algumas dificuldades. O professor P4 sistematiza o significado do “duas vezes”, como veremos no trecho em destaque:

P7: é duas vezes o nível normal

P20: e qual a relação de um para o outro? Como vou concluir se devo ou não consumir cereal de aveia com esses dados aí?

F: ele (o professor) precisa convencer os outros, o raciocínio está correto.

P33: a seta para baixo é comer ou não comer; com a seta para baixo é isso que está sendo analisado. Eu vejo assim. Agora quando a seta está para o lado está analisando os níveis.

F: as setas estão induzindo, mas só que você não consegue ler só linhas, tem que relacionar com as colunas. Teria que explicar 2 vezes o que.

P33: 2 é a razão entre nível alto e não comer.

O professor P4 sistematiza a conclusão com respeito a associação de variáveis na questão 1, como podemos observar em sua fala:

P4: quem não come cereal tem duas vezes mais chance de ter colesterol alto do que quem come.

O professor P33 também consegue concluir sobre a associação explicando com base na análise das razões nas linhas e nas colunas, vejamos a sua observação:

P33: quando analisa a linha é igual, a razão é 2, e a coluna também é igual 2,4 e 2,4. Uma coisa não está relacionada a outra né, é independente.

F: Se você for calcular a porcentagem os valores estarão bem próximos do outro; acontece que os outros dois (dizer qual é a célula) vão dizer muito próximos.

P33: E ainda, nesse caso, o sim-sim não confirma o não-não.

As pessoas ao lidarem com situações como, por exemplo, eczema e contagio, podem acreditar que ter eczema é contagioso, o que não é correto. Ou ainda não acreditarem que o I-Pod em volume muito alto pode acarretar danos à saúde. As pessoas revelam suas crenças ao se depararem com a decisão sobre a associação entre duas variáveis. Batanero e Díaz (2011) falam que em termos gerais que quando os dados não refletem os resultados esperados pelas crenças, aparece nos sujeitos um conflito semiótico. Identificamos um conflito deste tipo em alguns dos professores, para a terceira questão apresentada o professor P33 coloca que:

P33: fazendo pela lógica da vida poderíamos dizer que sim, um filho com pai músico tem influência; pela razão você pode dizer que não é.

Este fenômeno, de perceber uma relação donde não existe nenhuma ou a percepção de uma relação mais forte do que a que existe na realidade, pode ser entendido em termos de conflitos potenciais nesta unidade de estudo. Segundo Chapman e Chapman (1969) as pessoas formam teorias sobre a relação entre variáveis que as impede de avaliar corretamente as contingências empíricas.

Ainda no trabalho com as tabelas de dupla entrada para análise da associação de duas variáveis, um conflito que já destacamos neste estudo, quando da análise do diagnóstico inicial, se dá nas situações de tomadas de decisão utilizando uma única célula, normalmente a de maior valor, constituindo-se em um conflito semiótico do que esperamos ao nível do significado institucional. Nunes et al. (2012) advertem que esta é uma das razões pela qual se solicita às crianças que considerem todas as quatro relações para chegar a uma decisão global sobre a associação entre as variáveis.

Observamos que os professores ampliaram seus conhecimentos sobre essas questões envolvendo a associação entre variáveis e o risco probabilístico. Os professores aprenderam sobre tomar decisões baseando-se nos dados apresentados em uma tabela de dupla entrada e compreenderam a estratégia correta de realizar o estudo de todas as células da tabela para entender a associação entre variáveis. Nas quatro questões que trabalhos os professores socializaram e sistematizaram os resultados. Por exemplo, quando perguntamos o que seria mais provável e menos provável acontecer se sorteamos uma pessoa ao caso, os professores responderam corretamente:

F: O que é mais provável acontecer se sorteamos uma pessoa ao acaso?

Pfs: ter nível alto e comer

E o que é menos provável acontecer?

Pfs: ter normal e não comer

Como já citamos anteriormente, o objetivo das atividades que envolvem o risco em nosso programa se constituiu na análise dos dados apresentados nas tabelas de dupla entrada e na decisão sobre o risco estabelecendo relações. Dessa forma, os professores alcançaram a aprendizagem com respeito a este tipo de análise para decidir sobre a associação de variáveis.

Antes da socialização recolhemos a referida atividade impressa e com respostas dos professores. Realizando a análise das quatro questões encontramos que 90,47% dos professores acertaram a pergunta 1, 61,90% acertaram a pergunta 2, 80,95% acertaram a pergunta 3 e por fim, também 61,90% acertaram a pergunta 4. Esses índices de acertos são satisfatórios uma vez que este é um conhecimento emergente e que os professores estão acomodando tal conhecimento de forma processual.

O que nos chama atenção é que as perguntas 1 e 3, nas quais as variáveis estão correlacionadas, os professores acertaram em uma porcentagem maior (90,47% e 80,95% respectivamente).

Neste encontro os professores verbalizaram/externalizaram de forma tímida sobre reflexões voltadas para as suas salas de aulas. Encontramos reflexões que os professores apontaram que, em sala de aula, se deveria incentivar os alunos a usar os conceitos que eles aprenderam, perguntando-lhes se a probabilidade de ter o colesterol alto é a mesma para as pessoas que comem cereais de aveia e para aquelas que não comem cereais de aveia. E ainda que os alunos devem sempre explicar a sua resposta utilizando as razões porque isso permite a comparação entre os grupos com números diferentes.

Mesmo que em alguns momentos apresentássemos resoluções de alunos com as atividades, as reflexões dos professores ficaram limitadas ao contexto da atividade e dos exemplos dos alunos ali mostrados. Acreditamos que a ausência dos próprios professores aludirem a uma reflexão desse tipo deu-se pelo fato de ser uma abordagem diferenciada para o conceito de probabilidade e que no momento, os professores se debruçaram em resolver as atividades que ora estavam vivenciando.

Os professores, nesta unidade de estudo, por meio das práticas matemáticas e didáticas, avançaram nos conhecimentos sobre a quantificação e a noção de risco na tomada de decisão. O conhecimento emergente desta trajetória foi primordialmente o estudo do risco nas tabelas de dupla entrada.

#### **5.4 TRAJETÓRIA DIDÁTICA GERADA PARA O DESENVOLVIMENTO DA UNIDADE EXPLORANDO PROBABILIDADES**

Esta unidade de estudo foi por nós intitulada como Explorando Probabilidades. Incluí o 6º e o 7º encontro implementado. Selecioneamos diferentes atividades para possibilitar um processo formativo mais urdido, e que de certa forma revistássemos os objetos epistêmicos já estudados, além de incluirmos atividades que envolveram o conhecimento avançado do professor de matemática sobre probabilidade. Predominam nestes dois últimos encontros atividades que envolvem os conhecimentos didáticos dos professores de uma forma objetiva.

##### **5.4.1 TIPOS DE PROBLEMAS E PRÁTICAS (MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS)**

Iniciamos o sexto encontro pontuando que após as diversas discussões, realização de jogos e atividades propostas nos cinco encontros anteriores, nesse encontro teríamos a oportunidade de se pensar sobre o conceito de probabilidade do ponto de vista epistemológico de forma mais contundente, discutindo assim, o caráter multifacetado desse conceito.

A primeira atividade vivenciada foi a Probabilidades1. Concedemos um tempo para a resolução da mesma. Para socialização pedimos que os professores se posicionassem, inclusive incentivamos que falassem também aqueles que nunca falaram. No entanto, deixamos os professores bem a vontade e que não se preocupassem com o certo e errado nas colocações, o que enriquece o encontro é a discussão. Essa atividade foi adaptada dos estudos de Ives, S. (2009) Aprender a Ensinar Probabilidade: Relações entre conhecimentos de futuros professores e suas Orientações, o Conhecimento do Conteúdo e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo de Probabilidade.

## 18. Probabilidades1

Objetivos: Desenvolver habilidades para o reconhecimento de situações que envolvem diferentes cálculos para encontrar uma probabilidade.

Comando:

1a) Leia as seguintes declarações e registre o que você pensa sobre cada uma

i. Eu quero descobrir a probabilidade de sair um 3 no lançamento de um dado. Simulei um milhão de lançamentos e o 3 apareceu 166.549 vezes. Assim, a probabilidade de obter um 3 é aproximadamente  $166.549 / 1000000 = 0,166549$ .

---



---

ii. Eu acho que a probabilidade de sair um 3 no lançamento de um dado não é muito boa. Com base na minha experiência de jogar com dados, 3 não vem com muita frequência. Eu diria que a probabilidade de sair um 3 é de cerca de 10%.

---



---

iii. Quero saber a probabilidade de sair 3 no lançamento de um dado. Eu sei que existem seis possíveis lados e que 3 é um desses lados, assim a probabilidade de sair o 3 é de 1/6.

---



---

iv. Eu quero encontrar a probabilidade de sair um 3 no lançamento de um dado. Eu pedi opinião a cinco amigos, assim como ao meu irmão e aos meus pais. Das oito pessoas que eu conversei, cinco deles me disse que era 1/6. Os outros três me disse que dependendo do dado, a probabilidade pode ser pequena ou grande, você nunca sabe. Então, eu não tenho certeza, mas com base no que a maior parte das pessoas falaram, eu diria que é 1/6.

---



---

1b) Destas quatro afirmações, qual delas você se identifica? Ou você concorda com a maioria?

Esta atividade possibilita identificar os posicionamentos e/ou pensamentos dos professores sobre um conjunto de declarações para a quantificação de uma probabilidade. Os professores escreveram sobre cada uma dessas declarações e ao final solicitados para escolher entre elas uma que mais se identifica. Estas declarações foram propositalmente concebidas no estudo de Ives (2009) para determinar as diferentes orientações (matemáticas ou estatísticas) que futuros professores possam apresentar; em nosso caso, utilizar para identificar o posicionamento dos professores perante as

declarações e se, esse posicionamento, poderia nos revelar algo sobre o conhecimento deles concernentes a validação de diferentes formas de quantificação de probabilidade e, posteriormente, relacionar com os diferentes significados probabilísticos.

A declaração i está associada com uma concepção fortemente estatística. É necessário conhecer e considerar a probabilidade calculada por meio da observação da frequência do evento em um número grande de repetições. A ii justifica o valor da probabilidade por meio de uma experiência pessoal e que, não condiz nem com a probabilidade frequentista e nem com a teórica uma vez que cada número no dado tem a mesma probabilidade de sair, ou seja, uma natureza equiprovável. No caso da declaração iii acreditamos que boa parte dos professores pode apontar esta como a que mais se identificam. Nos estudos de Ives (2009) três dos quatro professores investigados apontaram a declaração iii como a qual que se identificaram e estes foram professores que se enquadram com uma forte orientação matemática. Esta declaração envolve uma explicação por meio do significado clássico de probabilidade. E por último, com a declaração iv, a justificativa apresentada utiliza como evento as opiniões das oito pessoas entrevistas para uma tomada de decisão. Também envolve uma experiência pessoal, nesse caso, uma experiência apontada por um grupo de pessoas.

Os professores expressaram suas opiniões concernentes às afirmativas. Como uma prática já comum aos nossos encontros houve espaço para a socialização e o debate coletivo. Intervimos em alguns momentos para ajudar os professores a refletir sobre o trabalho com os alunos. Relacionamos também com algumas das atividades já vivenciadas por nós. Diversos professores debateram sobre a sala de aula, livro didático e caderno do aluno da rede estadual de SP. Após as colocações, falamos da importância de tal debate, mas que precisávamos retornar para a atividade. Realizamos um levantamento perguntando a cada alternativa quem concorda com a mesma. Alguns tecem explicações com relação às escolhas das alternativas e pontua ainda que acharam a atividade interessante.

Para a próxima atividade – Que carro comprar? – solicitamos que os professores se organizassem em duplas e discorremos que é uma atividade para fazer-nos pensar e discutir. Como de praxe concedemos um tempo para a realização da mesma. Após esse tempo partimos para a socialização. Os professores se posicionam e nós fazemos algumas intervenções pontuais. Esta atividade foi adaptada de Garfield, J. (2006) Projeto Assessment resource tools for improving statistical thinking (ARTIST).

#### 19. Que carro comprar?

**Objetivos:** Fortalecer as habilidades que envolvem as diferentes situações concernentes aos significados probabilísticos. Desenvolver as habilidades para abordagem em sala de aula com respeito às referidas situações.

Você está tentando decidir entre dois tipos de carros. Então, você resolve consultar uma reportagem da Revista Quatro Rodas, em que foram comparadas as taxas de reparos para vários tipos de carros. Registros de reparos feitos em 400 carros de cada tipo mostraram um pouco menos problemas mecânicos com Hondas do que com Toyotas.

Você tem dois amigos que possuem Toyotas e um amigo que é dono de um Honda.

Ambos os proprietários do Toyota relataram ter alguns problemas mecânicos, mas nada grave.

O proprietário do Honda, porém, deu a seguinte explicação quando lhe perguntaram sobre seu carro: "Em primeiro lugar, a injeção de combustível deu defeito e custou 750 reais. Em seguida, comecei a ter problemas com a traseira e tive que substituí-la. E finalmente decidi vendê-lo após estes reparos. Eu nunca irei comprar outro Honda."

Dado o que sabemos atualmente, qual carro você compraria? Justifique sua resposta.

Comando:

Professor imagine que você está ensinando em uma turma e colocasse este problema para os alunos. A seguir estão as respostas de três grupos diferentes. Como você prosseguiria com a discussão em classe?

a. Nós recomendamos que você compre o Toyota, principalmente por causa de todos os problemas que o seu amigo teve com o Honda. Já que você não ouviu falar nada de histórias desagradáveis sobre o Toyota, você deve ficar com ele.

b. Nós recomendamos que você compre o Honda, apesar da má experiência do seu amigo. Este é apenas um caso, enquanto as informações relatadas nos relatórios de consumo (reportagem da revista) são baseadas em muitos casos. De acordo com esses dados, o Honda é um pouco menos propenso a precisar de reparos.

c. Gostaríamos de dizer que não importa o carro que você compre. Mesmo que um dos modelos possa ser mais provável do que o outro para dar problemas, eles poderiam, ainda assim, apenas por acaso, escolher um tipo de carro e este precisar de um monte de reparos. Você pode muito bem jogar uma moeda para decidir.

A atividade utiliza um contexto verdadeiro do cotidiano, no qual os professores precisam tomar uma decisão com base nas informações que foram fornecidas sobre problemas mecânicos de carros da marca Toyota versus Honda<sup>15</sup> por uma revista americana e nas informações relatadas por dois amigos que possuem carros das referidas marcas. Para melhor contextualizar adaptamos a atividade utilizando uma revista nacional – Revista Quatro Rodas e modificamos o valor para a moeda brasileira – reais. Mesmo não tendo em conta os resultados reais do estudo para explorar, a atividade permite fazer conjecturas sobre os resultados relatados; isso indica o que pode ocorrer quando se tem a necessidade de tomar decisões com base em informações relatadas nos meios de comunicação.

Para a tomada de decisão nesta atividade, há envolvimento implicitamente de alguns dos significados probabilísticos. Na segunda parte é solicitado que os professores se posicionem sobre hipotéticas respostas construídas por estudantes e como direcionariam a conversa em uma sala de aula revelando os conhecimentos deles com respeito ao conhecimento comum envolvido nesta atividade. Claro, que como todo o conjunto de atividade que trabalhamos até o momento, envolve também o conhecimento especializado sobre probabilidade uma vez que faz refletir sobre o seu ensino.

Esperávamos que o melhor posicionamento dos professores fosse optar pela decisão com base no conjunto de dados maior, uma vez que este nos traz informações mais confiáveis do que apenas algumas opiniões pessoais. Optar por este fato para a tomada de decisão revela também uma compreensão mais coerente com a estatística baseando tal decisão sobre um conjunto de dados maior em vez de uma decisão subjetiva ou pessoal ao confiar nas respostas dos amigos.

Professores debatem muito entre si. Foi necessária uma intervenção nossa. No entanto deixamos que falassem um pouco mais. Fizemos outra intervenção nesse momento explicando sobre o risco que temos na compra de qualquer uma das marcas, porém ampliamos com outro exemplo cotidiano e

---

<sup>15</sup> Como na atividade original o pesquisador utilizou o nome das marcas, consideramos conveniente também deixar esses nomes em nossa atividade.

sobre a importância da discussão. Sistematizamos as ideias conduzindo para uma reflexão sobre o ensino da probabilidade articulada com a estatística.

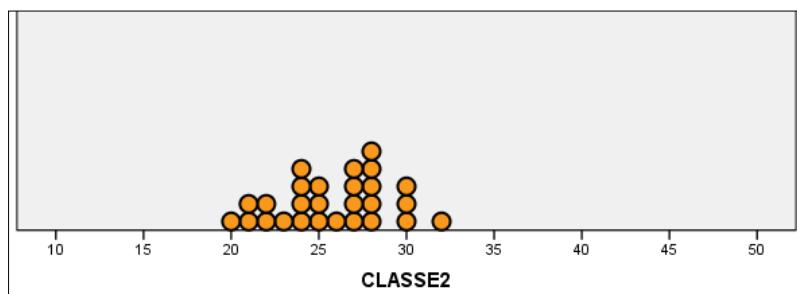
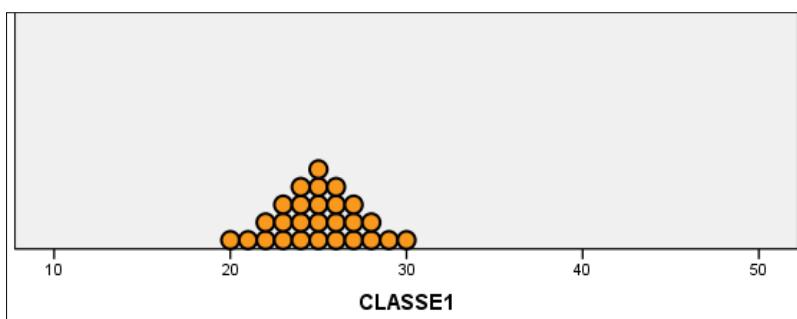
Concluindo a atividade lembramos aos professores das ideias de Paulo Freire em que *na prática e na reflexão a gente se refaz*. Seguimos com a explicação da próxima atividade - Que grupo trapaceou?. Depois de concedido tempo para realização iniciamos a socialização da mesma. Da mesma forma que a atividade 18 (sobre as afirmativas) essa atividade foi adaptada dos estudos de Ives, S. (2009).

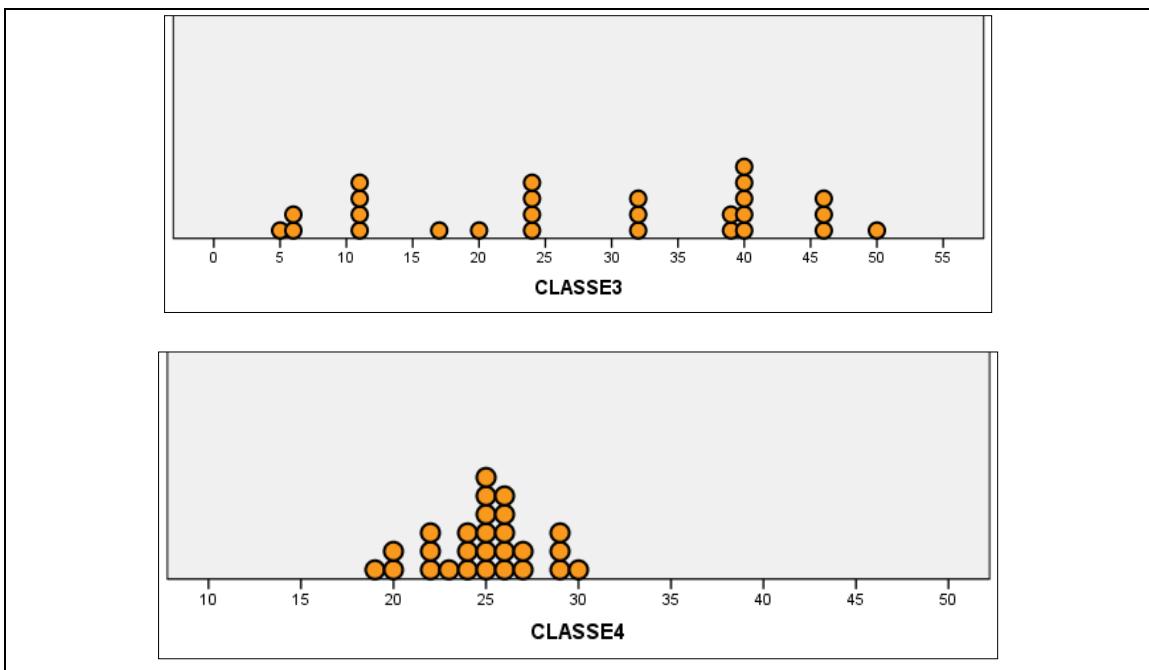
#### 20. Que grupo trapaceou?

Objetivos: Fortalecer abordagens envolvendo o significado frequentista de probabilidade e a interpretação de gráficos. Ser capaz de compreender o entendimento sobre a variabilidade esperada dentro de uma distribuição estatística por amostragem.

Comando:

Cada aluno em uma classe deveria realizar o experimento de jogar uma moeda 50 vezes e contar o número de coroas. Quatro classes diferentes produziram gráficos para os resultados desse experimento. Há um boato de que em algumas classes os alunos fizeram o gráfico sem realizar o experimento. Analise o gráfico de cada sala e indique a classe que pode não ter realizado de fato o experimento. Justifique.





Observando os gráficos podemos perceber que as classes 1 e 3 podem não ter realizado o experimento; e por outro lado, os gráficos das classes 2 e 4 é que mais indicam a realização do experimento. Escolher a classe 1 indicaria um equívoco de representatividade, ou seja, pensar que uma distribuição uniforme seria representativa de uma distribuição estatística por amostragem para o número de coroas. No caso da classe 3 que tem uma distribuição espalhada de 5 a 50 indicaria uma não compreensão da variabilidade da amostra.

Para desencadear essa discussão, perguntamos quem gostaria de falar. Os professores foram explicando como tinham realizado as análises dos gráficos.

Como essas atividades nos remetem aos significados de probabilidades incluímos uma sistematização e explicação pormenorizada dos significados do conceito de probabilidade. Pontuamos os diferentes significados de probabilidades e apresentando exemplos de cada tipo aos professores com as respectivas limitações de cada significado. Apresentamos, nesta ordem, os significados: clássico, geométrico, frequentista, subjetivo e axiomático. Foi um momento expositivo com o suporte da apresentação de slides. No entanto, os professores puderam pontuar algumas opiniões e dúvidas durante a apresentação.

Iniciamos o sétimo encontro apresentando as atividades do dia e ratificando que o raciocínio empregado no desenvolver das atividades sempre seja registrado. As atividades foram 21. Probabilidades2 (com duas situações-problemas) e 22. A tigela de doces.

Os professores receberam a situação-problema 1 sobre os galões de leite provenientes de três fazendas.

Destinamos um tempo para a resolução. É perceptível o envolvimento dos professores na resolução da atividade. Discutem entre si. Sete professores socializam e discutem como estão entendendo a referida atividade.

A atividade Probabilidades2 incluiu duas situações-problemas ambas envolvendo modelos de distribuição de probabilidades. O estudo de diferentes modelos de distribuição de probabilidades não está previsto no currículo de probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental; no entanto, foi nosso interesse abordar duas situações dessa natureza com os professores. A seguir apresentamos as duas situações-problemas.

#### 21. Probabilidades2

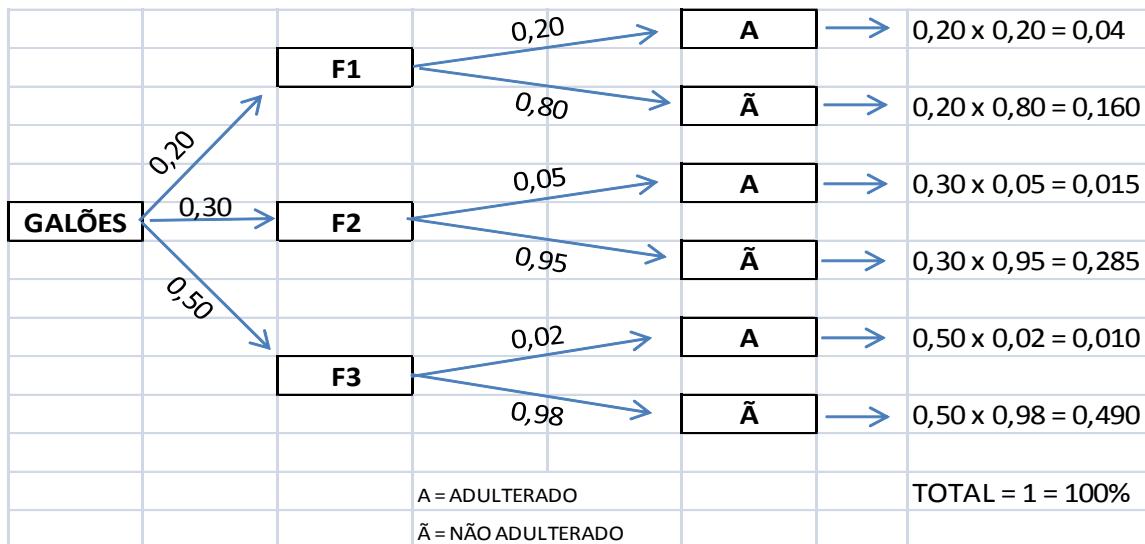
Situação-problema 1) Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F1, 30% de uma outra fazenda F2 e 50% de F3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F2 e F3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.

Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas. Sabe-se que um galão escolhido ao acaso está adulterado. Qual é a probabilidade de ele ter vindo da fazenda F1? E da F2? E da F3?

Fonte: Magalhães e Lima, 2004, p.46

Em uma das resoluções possíveis para esta situação-problema poder-se-ia utilizar o Teorema de Bayes. No entanto, não é nosso propósito ir direto para a aplicação de fórmulas ou construir o conhecimento sobre a teoria bayesiana. Optamos então em encontrar as respostas sobre as probabilidades por meio da análise da árvore de possibilidades (Figura 57).

**Figura 57:** solução da situação-problema 1 com o uso da árvore de possibilidades



Fonte: o autor, 2017.

Denotaremos  $P(A)$  como a probabilidade de comprar adulterado e  $P(\bar{A})$  como a probabilidade de comprar não adulterado. Do estudo da árvore temos:

$$P(A): 0,04 + 0,015 + 0,01 = 0,065 = 6,5\%$$

$$P(\tilde{A}) = 0,16 + 0,285 + 0,49 = 0,935 = 93,5\%$$

Para responder às probabilidades solicitadas, haverá uma redução do espaço amostral e ficaremos apenas com os “adulterados”: qual a probabilidade de, já que eu peguei adulterado, de ser da fazenda 1? E da fazenda 2 e 3?

$$P(F1 | A) = 0,04 / 0,065 = 0,6153 = 61,54\%$$

$$P(F2 | A) = 0,015 / 0,065 = 0,2307 = 23,08\%$$

$$P(F3 | A) = 0,010 / 0,065 = 0,1538 = 15,38\%$$

Assim, o leite adulterado tem maior probabilidade de ter vindo da fazenda 1.

Iniciamos a resolução no quadro com o diagrama da árvore. Solicitamos aos professores que não modifiquem as respostas, pois irão receber outra folha com os respectivos itens. Indagamos se a escrita em porcentagem seria boa opção para a árvore e os cálculos sugerindo que temos que pensar sobre isso. Decidimos escrever em forma decimal uma vez que facilita os cálculos.

Realizamos novamente a leitura do problema e desenvolvemos a resolução do mesmo na lousa acompanhado pelos professores.

Em seguida partimos para a quantificação das probabilidades de cada um dos eventos envolvidos na situação-problema.

Uma vez exposta a resolução e com as colocações feitas pelos professores P1, P6 e P20, apresentados no trecho acima, refletimos sobre a influência de uma matemática determinista, de um raciocínio que nos faz ir a busca de certezas. Continuamos discorrendo sobre uma matemática que envolve também incertezas e trazemos noções relacionadas com a física quântica: Para finalizar destacamos ainda um exemplo com amostras em pesquisas eleitorais e dois professores ainda se posicionam com exemplos que tomou conhecimento na mídia e que envolve a ideia de amostra estatística.

Após o tempo para resolução e discussão lançamos a segunda situação-problema. Os professores receberam agora a segunda situação-problema sobre o estudo do gasto com uma ida ao cinema. Daí, falamos sobre o que seria estudar o gasto com a ida ao cinema. Observamos que nesta situação não está explícito qual a probabilidade. É preciso fazer o estudo do gasto e verificar quais seriam os gastos possíveis.

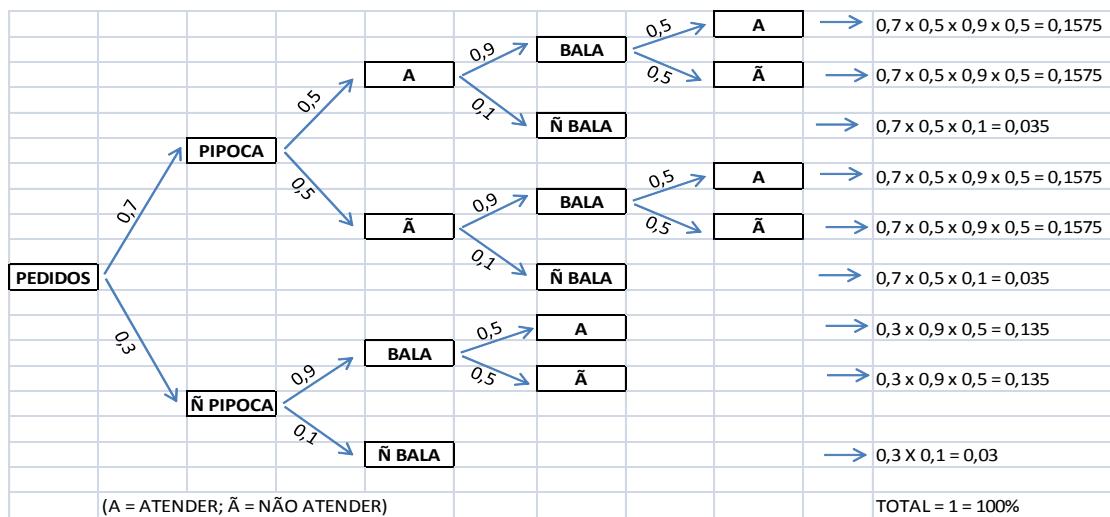
## 21. Probabilidades2

Situação-problema 2) Um pai leva o filho ao cinema e vai gastar com as entradas R\$ 17,00. O filho vai pedir para comer pipoca com probabilidade de 0,7 e, além disso, pode pedir bala com probabilidade 0,9. Esses pedidos são atendidos pelo pai com probabilidade de 0,5, independentemente um do outro. Se a pipoca custa R\$ 2,50 e a bala custa R\$ 1,50, estude o gasto efetuado com a ida ao cinema.

Fonte: Magalhães e Lima, 2004, p.67

Uma dos possíveis métodos para resolução desta situação-problema é utilizar o diagrama da árvore de possibilidades no qual apresentamos na figura 58 a seguir:

**Figura 58: solução da situação-problema 2 com o uso da árvore de possibilidades**



Fonte: o autor, 2017.

O que é estudar o gasto com a ida ao cinema? Nesta situação-problema não está explícito qual a probabilidade. Para a resolução é preciso realizar o estudo do gasto, ou seja, quais seriam os gastos possíveis?

O pai pode gastar apenas: R\$ 17,00; R\$ 18,50; R\$ 19,50 e R\$ 21,00. Realizando o estudo dos gastos, temos:

Qual a probabilidade do pai gastar R\$ 17,00? Voltando para a árvore de possibilidades observamos que temos 4 casos dos 9 em que isto acontece.

- Pedir pipoca e bala e o pai não atender: 0,1575
- Não pedir pipoca, pedir bala e o pai não atender: 0,135
- Não pedir bala, pedir pipoca e o pai não atender: 0,035
- Não pedir pipoca e nem bala: 0,03

Qual a probabilidade do pai gastar R\$ 18,50?

- Pedir pipoca e o pai não atender, pedir bala e o pai atender: 0,1575
- Não pedir pipoca, pedir bala e o pai atender: 0,135

Qual a probabilidade do pai gastar R\$ 19,50?

- Pedir pipoca e o pai atender, pedir bala e o pai não atender: 0,1575
- Pedir pipoca e o pai anteder, não pedir bala: 0,035

Qual a probabilidade do pai gastar R\$ 21,00?

- Pedir pipoca e bala e o pai atender: 0,1575

Para a resolução desta situação-problema considerando que o pai não irá consumir pipocas e balas, definimos a variável aleatória G: gasto total com a ida ao cinema, temos:

G	17,00	18,50	19,50	21,00
P (G=g)	0,3575	0,2925	0,1925	0,1575

Com esta tabela temos a função de distribuição de probabilidades ou função acumulada de probabilidades de uma variável discreta.

Uma das diferenças da primeira situação-problema para a segunda é que a árvore da primeira é simétrica. Mas o interessante mesmo é que na segunda situação-problema, a árvore não sendo simétrica a soma continua sendo 100%. Em problemas de probabilidade não podemos generalizar sempre para usar a árvore; se for em muitas possibilidades temos que criar outras estratégias.

Transpassado o tempo para os professores resolverem individualmente, convidamos um deles para apresentar na lousa com estava resolvendo a situação-problema. Sempre é nossa tônica deixar os professores à vontade para apresentar as respostas. Apontamos que socializar é importante por que aí poderemos ver se todos estão pensando do mesmo jeito ou se alguém está diferente.

Com as árvores construídas falamos da diferença entre elas; podemos perceber na árvore da figura 58 que o ramo não tem continuidade nas situações em que a criança não pediu bala, e se pediu, o pai pode aceitar ou não.

Continuamos com a apresentação da solução esperada nesta atividade. Realizamos os cálculos na lousa com auxílio dos professores. Fizemos o estudo de todos os oito casos da situação-problema. Daí, construímos uma tabela para as diferentes probabilidades.

Concluímos a resolução da atividade e nos posicionamos que o diagrama de árvore é um recurso importante para trabalhar com os alunos, e ao fazer sem a árvore podemos esquecer alguma possibilidade. Pontuamos que a diferença de um problema para o outro é que no primeiro a árvore é simétrica; mas o interessante mesmo que não sendo simétrica a soma continua sendo 100%. Salientamos que em problemas de probabilidade não posso generalizar sempre para usar a árvore; se for muitas possibilidades temos que criar outras estratégias.

Seguimos para a nossa última atividade do desenho. Primeiro os professores receberam a atividade Tigela de Doces e analisaram. Depois fizemos a leitura junto com os professores. Informamos que a atividade seria realmente sem saber as porcentagens. Instigamos os professores a falar se existia alguma maneira de fazer essa experimentação e que estratégias utilizariam com os alunos.

## 22. Tigela de Doces

Objetivos: Por meio da discussão das estratégias, ser capaz de estimar a probabilidade de um evento sem conhecer as quantidades dos elementos que compõe o espaço amostral (estimativa de uma probabilidade com base numa amostra de dados). Desenvolver habilidades na abordagem dessas estratégias em sua prática docente.

Comando:

- Dado esta tigela com 500 doces das cores roxa, vermelha e verde, você poderia explicar como fazer uma alegação/afirmação sobre a probabilidade de seleção de um doce vermelho?
1. Você usaria essa tarefa com alunos dos Anos Finais? Por que sim ou por que não? 2. Como você usaria essa tarefa?

Esta atividade foi adaptada dos estudos de Ives (2009) e aplicada aos professores participantes da pesquisa e teve por base a utilização de um contexto experimental. Não sabemos do estudo se a autora apresentou mesmo a tigela com os doces. Na discussão da atividade a autora nos informa que dos 500 doces embrulhados 20% são roxos, 50% são vermelhos e 30% são verdes

e que os professores entrevistados não sabiam estes percentuais. Em nosso caso optamos em apresentar um slide com uma imagem de uma tigela e informamos que na tigela teríamos 500 doces embrulhados e também não informamos os percentuais.

Poder-se-ia utilizar uma amostra e contar a frequência de doces vermelhos dividido pelo total da amostra. Este procedimento pode ser justificado pela probabilidade frequentista e de caráter experimental. Nesta ideia deve-se levar em conta que uma amostra pequena não seria representativa, um procedimento seria utilizar a amostragem repetida. Como solução compreender que a média das frequências em uma amostragem repetida pode ser um procedimento para a estimativa da probabilidade que se busca. Mesmo que a atividade envolva um contexto em que há um conjunto grande de elementos, um procedimento possível é contagem dos elementos e uma prova fisicamente a partir dos dados. Implicitamente teríamos um argumento teórico para indicar a probabilidade, o que não é o mais indicado para essa atividade. Imagine contar todas as cores dos doces e só a partir daí calcular a probabilidade. Um procedimento errôneo seria sabendo quantos doces de cada sabor existem, assumir o argumento da equiprobabilidade de retirada de um desses doces. Neste caso, temos cinco sabores diferentes de doces e a probabilidade seria 20% para cada sabor.

Em um segundo momento, apresentamos as questões sobre a abordagem em sala de aula. Nas respostas voltadas para a sala de aula, talvez possamos encontrar outros procedimentos como dividir a sala em grupos e realizar a contagem; solicitar que cada aluno realize o sorteio de um doce e ir anotando as frequências, etc. Após as ideias colocadas pelos professores trouxemos à tona o conceito de amostragem e o do que seria uma boa amostra. Com esta atividade, concluímos esta unidade de estudo.

#### **5.4.2 ANÁLISE DOS CONHECIMENTOS DOS PROFESSORES NA UNIDADE EXPLORANDO PROBABILIDADES**

De início os professores apresentaram indícios de aceitação da probabilidade frequentista, como é possível observar nos trechos das falas

quando da implementação da atividade sobre as afirmativas para o cálculo de uma probabilidade:

P11: Bom, começando quando fala probabilidade e vai para um cálculo, e depois vai para simulação, essa simulação pode ou não reproduzir a realidade do cálculo, se aproximar do cálculo; mas a gente observa que 1 em 6 vai dizer a mesma coisa que esse valor em relação a 1 milhão. Por que a quantidade da simulação é 1 milhão. Mas fizesse 100, fizesse 1000, será que iria reproduzir a realidade ou a probabilidade disso ocorrer?

P5: Mas nesse caso seria uma tendência né? O que vai acontecer, conforme então ele vai aumentar mesmo, se você pegar um 1 milhão vai ter essa situação para o número 3; E para o número 4? Se você começar a observar aqui que número corresponde a 0,1666 né, qual a tendência desse valor? Pra mim quando você faz a simulação você provoca o viável do que vai acontecer.

P3: Eu notei que nesse experimento indiferente da quantidade de um milhão, ele calcula em porcentagem 0,16 mais ou menos 17%, essa variação é a mesma se você fizesse pra um lançamento, a possibilidade de acontecer em comparação a um lançamento só do dado; Ele mostra que independente da quantidade de jogadas a variação vai ser mínima e não torna significativa em comparação a um lançamento só.

[...]

P4 fala sobre a 2<sup>a</sup> afirmativa: No exercício anterior sobre lançamentos, em que todos lançavam e depois a gente somou todos, fez aquela curva lá normal né e, por exemplo, o que dava o percentual pra mim de 3, não dava para ele; então em 1 milhão pode ser 16,6% mas se ele jogou 10 vezes, 15 vezes, pode dar 10%. A quantidade que ele jogou pode ser bem pequena e dá 10%. 1 milhão já é muito superior e pode dar os 16%. Então eu concordo acreditando em ser um número muito pequeno de lançamentos.

Procedendo a uma análise das respostas impressas dos professores a esta atividade identificamos que nenhum professor concorda com a afirmativa 2, que versa sobre a justificativa do valor da probabilidade de sair um resultado no lançamento de um dado por meio de uma experiência pessoal. E por outro lado a maioria dos professores apontam as afirmativas 1 ou 3 ou as duas juntas como aquelas que mais se identificam. No caso da afirmativa 4 apenas um professor concorda unicamente com a mesma; assim comprehende erroneamente que a probabilidade pode ser medida por outra probabilidade, no caso, a alta opinião das pessoas sobre um dos eventos.

Vejamos outras colocações de alguns professores em que discordam da afirmativa 4:

P5: não pode afirmar nada simplesmente em função da opinião das pessoas.

P12: aí eu venho novamente com uma situação de probabilidade, uma quantidade de pessoas disse que sim e outra disse que não. E qual eu vou acreditar? Volta para uma questão de probabilidade.

P30: é uma coisa interessante

P4: Em um primeiro momento ele identificou a probabilidade das pessoas e não a probabilidade dos dados. Acho que aí ele não identificou 1 para 6 do dado e sim das opiniões da pessoas de 5 para 8, eu achei isso interessante.

Nesses extratos verificamos que os próprios professores apontam que a probabilidade foi calculada com base na opinião das pessoas sobre o evento e não na observação do referido evento.

Neste sentido, o avanço nos conhecimentos dos professores sobre diferentes situações probabilísticas – que envolvem os diferentes significados – são contundentes. A fala a seguir revela sobre a compreensão com respeito ao significado probabilístico clássico e experimental:

P5: mas se jogar 5 vezes e não sair o número? Se você aumentar o número de simulações acaba encontrando uma tendência desse valor.

[...]

P5: E aí mostra por que é 1/6; quanto mais você aumentar essa simulação você vai ter essa tendência. Se você fizer com 5 ou 10 não vai chegar a esse valor.

Há professores inclusive que associam a probabilidade clássica com a matemática e a experimental com a estatística, como vemos no trecho do professor P1.

P1: De repente posso lançar 100 mil e não chegar a esse número. Por que se você considera o lançamento é estatística, pode ou não. Agora quando você faz a conta 1/6 é a matemática, você está pegando 1 em 6. Existe uma tendência de convergir e não uma certeza. É estatística, tendência e não uma certeza.

Observamos outras falas que colocam o fato de ao se trabalhar com lei dos grandes números envolve uma tendência, uma incerteza, compreendem assim uma característica fundamental no trabalho com estatística e probabilidade.

P25: Com o que o amigo falou (P1) o lançamento 3 é 1 em 6, então isso é fato, quanto maior o número de lançamentos eu vou ter essa certeza, eu vou chegar a esse valor. Se eu lançar 5, 10 vezes, talvez só apareça 1 em 10, 10% é o que tem falando no item 2; o item 1 quebra por completo o item 2; isso depende da quantidade de lançamentos e quanto maior o número de lançamentos eu vou chegar mais próximo do valor real, o número 1/6.

P23: O experimento que desmente a teoria. É um 1/6 não é outra coisa.

P25: vai se aproximar de 1/6.

P23: Mesmo sendo 100 milhões de vezes não vai dar um 1/6 certinho.

P3: É esse dilema [falando sobre a teoria e experimento na prática] que a matemática ou que a realidade monta.

P4: Eu coloquei aqui que primeiro a interpretação, a interpretação é o carro chefe, se você não interpretar não vai conseguir fazer. Segundo é o experimento, por que a probabilidade não é só o cálculo, tem que ter o experimento. Terceiro é o cálculo da probabilidade pode não ser um número tão grande. E o quarto aqui diz assim, você trabalhar na fração de 1 para 6, eles vão tender à frações quase que equivalentes.

[...]

P1: Na mesma questão tem dois aspectos, primeiro é o aspecto matemático, é 1 em 6, não tem o que se discutir; quando você parte para o experimento, está lidando com alguma coisa que a matemática te mostrou, são coisas distintas.

Apontamos como enriquecedor os professores tecerem esse tipo de reflexão em que norteia a natureza entre a teoria da matemática e a prática. Assim os docentes ao exporem seus raciocínios, concebem que a matemática não é apenas de natureza determinística. Observamos o pensamento do professor P40 sobre a articulação entre a probabilidade e a estatística:

P40: É que essas coisas são indissociáveis. Tem um pedacinho da probabilidade que a gente faz no Ensino Médio, que se descreve o espaço amostral, tem aquela definição clássica, depois na segunda parte a gente vai falar mais sobre

isso. Na verdade não dá pra tratar separado; elas não são coisas dissociadas. Nesse caso a probabilidade está associada aos casos estatísticos. A probabilidade é obtida através de uma estatística. Então é probabilidade e estatística. Fica difícil, tem hora, por que tem programas específicos de estatística e probabilidade. Essa história da probabilidade teórica de jogar um dado e anotar o espaço amostral, mas esse tipo de probabilidade é o que menos se utiliza na prática. Na prática é a probabilidade que vem da estatística.

O pensamento apresentado neste excerto (P40) corrobora com a ampliação coletiva das ideias dos professores sobre a articulação entre a probabilidade e a estatística. Acreditamos que tal momento se constituiu em uma abertura e ruptura para aceitação de uma matemática que envolve a incerteza e do uso da probabilidade para compreensão de dados estatísticos. Em outro momento este tipo de pensamento também aparece, vejamos:

P20: Essa daí, é, assim, quem considerar a parte técnica né, da matemática, só no indutivo, a gente já percebe que está muito certinho. Tá muito certinho, então, essa daí não fez o experimento. Não fez os lançamentos.

P10: eu já acho assim, você trabalhar com as possibilidades, todas elas podem não ter feito. Agora, essa sala não tá próximo dos 50%?

P25: quando nós analisamos na segunda achamos perfeitinho. Mas analisando aluno a aluno, por exemplo, 5 alunos, acertaram a probabilidade. 4 alunos 24 coroas. Há possibilidades de eles terem realizado.

P25: Se a gente conseguir quantificar uma situação dessas com porcentagem, poderíamos dizer o que? Esse resultado é 60% provável, ou 80% provável, improvável, como será que poderíamos determinar essa situação? A gente sabe que ele pode acontecer, mas, quanto? Será que com essa quantidade de lançamentos eu teria uma probabilidade de sair isso grande ou pequena?

Observamos que o professor P25 discorre sobre o que seria uma quantidade ideal de lançamento, o que põe em voga a noção da lei dos grandes números. Na discussão deixou-se claro que precisaríamos vários gráficos dessa situação, tipo 1000 classes e aí comprovaríamos o que é mais provável nesta situação. Destacamos as falas de mais três professores sobre os gráficos apresentados na atividade:

P3: O gráfico 1 está estranho, mas o três tá muito certinho. O um e o três tá muito perfeito, será que realmente foi feito?

P20: o três tem um dado também, que nenhum aluno chegou no 25 aqui. Nenhum. É possível isso, é possível, mais eu desconfio.

P6: Mas um aluno ter 100% de coroas; nenhum aluno ter 25 isso eu acho que é mais provável; mas 1 ter 50 coroas eu acho que é demais.

Com esta discussão os professores revisitam mais uma vez os termos que estão na base da linguagem probabilística como possível e provável, além da reflexão sobre qual ou quais gráficos representariam melhor a realização do experimento. As noções sobre improvável e impossível foram retomadas por eles quando analisaram os gráficos da atividade e não tiveram certeza sobre quais gráficos envolviam dados fictícios ou reais com respeito a realização do experimento.

No geral, são fortes as falas dos professores corroborando que estamos trabalhando com o imprevisível e com uma matemática da incerteza. Eles falam na importância de se analisar as “tendências” que uma situação de estatística e probabilidade possa envolver; essa tendência, ao nosso olhar, significa para eles uma ruptura na concepção que têm da matemática e, consequentemente, de seu ensino e aprendizagem. Também observamos nesta unidade de estudo que no discurso dos professores já há a utilização da palavra “risco” ao se referirem sobre a tomada de decisão. Ao final da atividade Decisões Cotidianas da unidade anterior os professores já concordavam que na situação apresentada em nenhuma das questões havia garantia de 100%, porém foi possível compreender o que seria uma melhor tomada de decisão.

Sobre a tomada de decisão com respeito a atividade que solicita a escolha de um tipo de carro, alguns professores pontuam que 800 carros para uma pesquisa estatística seriam poucos, já outros acham 800 um número suficiente. Esse tipo de reflexão, que envolve compreender quando a quantidade de dados de uma amostra se torna adequada, é significativo para o professor desenvolver um melhor raciocínio estatístico.

Entretanto, pela análise da atividade Tigela de Doces, que solicita estimar a probabilidade quando não se é dada a distribuição quantitativa dos elementos do espaço amostral, os professores utilizaram a concepção clássica de probabilidade inadequada para a resolução da tarefa. Uma possibilidade

dessa decisão pode ser oriunda do fato dos professores não estarem familiarizados com este tipo de atividade. O protocolo do professor P14 a seguir ilustra essa nossa observação:

**Figura 59: protocolo do professor P14 na atividade Tigela de doces**

*Separando os grupos de balas de acordo com as cores e calculando a razão entre a grandeza da coleta grupal (<sup>COR</sup>) referente aos totais de balas.*

Fonte: o autor, 2017.

O professor P20 em sua fala, também assume essa concepção:

P20: não tem como a gente fazer a estimativa; então separaríamos as balas por cor e contariam as vermelhas, e aí faríamos o cálculo.

Apesar disso, boa parte dos professores apresentou boas estratégias para estimar probabilidades. No trecho a seguir, o professor P5, por exemplo, sugere realizar sorteios aleatórios, porém não diz se esgotaria todas as 500 balas. Contudo, ao ser questionado, aponta a estratégia experimental utilizando uma amostra e sugere uma quantidade. Questionamos se 500 não demoraria muito e o que achavam sobre a sugestão do sorteio de 10 balas dada pelo professor P5.

P5: Ir tirando aleatoriamente. Tira uma bala e verificar a cor.

F: mas das 500?

P5: aí é que tá; fiquei com essa dúvida; mas pensei em uma quantidade menor; talvez dentro de umas 10.

F: Vocês concordam? O que pode acontecer com 10?

P3: o que eu complementaria o que ele está falando seria desenhar uma tabela na lousa ou no papel e ir anotando essas retiradas.

Na verdade, o professor P5 apresenta uma compreensão limitada com respeito a representatividade, pois acredita que uma amostra de 10 balas seria suficiente para representar toda a tigela.

Quando questionamos o professor se essa amostra de 10 balas em um total de 500 seria representativa, houve uma discussão bastante interessante ao respeito.

Figura 60: protocolo do professor P5 na atividade Tigela de doces

Pegaria um “punhado” de balas e faria a contagem das balas de cada cor. Realizaria o experimento algumas vezes e, a partir dos resultados, poderíamos inferir algo.

Fonte: o autor, 2017.

Segundo se expressou o professor P5, neste último excerto, no qual interpretamos um “punhado de balas” como uma amostra aleatória, conquanto o referido professor não apresenta qual a quantidade que deveria conter nessa amostra, ainda assim, discorre que realizaria o experimento algumas vezes. Logo, ao nosso olhar, o professor parece ser capaz de estimar uma probabilidade com base em uma amostra de dados por considerar uma amostragem repetida.

Foi perceptível que para alguns professores estimar esta probabilidade não era possível. Essa dificuldade pode ocorrer do fato do professor não utilizar diferentes estratégias que podem se postas em ação para realizar estimativas. Como vimos, nas estratégias de alguns deles houve a necessidade de contar os elementos para realizar os cálculos.

Particularmente, sobre como usariam essa atividade em sala de aula, os professores externalizaram suas ideias como podemos ver algumas delas a seguir:

P6: Eu teria outra dinâmica: separaria um montante em vários grupos com quantidades aleatórias, e cada grupo anotaria a quantidade que recebeu e a quantidade de cada cor nesse montante, depois somaríamos os valores; mas na minha sala não seria bala, seria algum outro objeto.

P1: Eu faria diferente, pegaria o pacote, o embrulho, seja lá o que fosse, tigela, eu passaria aluno por aluno, por exemplo: primeiro aluno tira uma e anotaria a cor na lousa. Passando aluno por aluno, se a sala tiver 40 alunos, eu passaria pelos 40. Passou a primeira rodada, eu passaria a segunda rodada e eles tirariam de novo. Vamos supor 35 alunos então teríamos 70; 70 em 500 acho que seria uma quantidade boa, mais ou menos 1/5 seria uma proporção boa.

As respostas transcritas dos professores P6 e P1, nos levaram ao entendimento, que no método de amostragem descrito é possível extrapolar a estimativa da probabilidade para todo o conjunto de dados. Inclusive, P1 advoga que uma amostra de 70 seria suficiente para representar os 500 elementos do conjunto. Essas abordagens juntamente com as duas destacadas a seguir, professor P10 e P11, nos indicam que os professores estão a um passo de uma concepção experimental, mas não abandonaram completamente a ideia de usar uma concepção clássica de probabilidade em que seria exigido contar todas as balas vermelhas e dividir pelo total de balas.

P10: Uma maneira seria solicitar aos alunos que retirassem quantidades regulares de balas (de 20 em 20 balas, por exemplo) e achar no meio dessas quantidades regulares a porcentagem de balas vermelhas. Através do experimento ele chega a resposta e não através apenas do cálculo.

P11: Nesse recipiente cada aluno vai pegar uma bala; daí faríamos a pergunta: quem tirou bala vermelha? Tantos! Registrarmos na lousa. No segundo momento, outros três potes, dividiria assim 4 grupos com 10 alunos, igual a 40 e pediria para eles observarem e confrontarem os dados.

Concluímos que a maioria dos professores procurou diferentes estratégias, inclusive experimentais. Assim, eles foram capazes de sugerir estratégias para estimar a probabilidade quando a distribuição das quantidades são desconhecidas.

Com respeito às reflexões sobre a sala de aula pontuada pelos professores em meio às atividades de toda a unidade de estudo destacamos as falas a seguir:

P30: Observando a conversa de todos e a do professor, acho que a gente tem que parar pra pensar, na matemática. Possuímos algumas convicções que levamos para a sala de aula. Eu pensei nessa situação [sobre os resultados do lançamento de um dado], imagina você fazer com os alunos o experimento e aí sim podermos discutir com eles. Podemos fazer uma simulação com menos lançamentos para ver o quanto que isso pode ou não divergir e discutir com os alunos.

[...]

P3: Não é nem uma réplica, é uma dúvida mesmo. O professor me fez pensar. Trabalhar sem fórmulas, jogar e ver o que é que aconteceu. Qual é a maneira mais correta de trabalhar com os alunos? Eu fui formado, estudei até na aeronáutica e a gente não podia trabalhar com conceitos jogados, “joga-se os dados e vê”. Não estou discordando, eu estou com uma dúvida, como levar para os meus alunos, ele vai descobrir o que? P3: É a

situação que eu vim aqui buscar, você desculpa eu fazer essa colocação, por que eu vim em busca de tentar resolver o meu problema de como levar isso para o aluno.

[...]

P12: Segundo o que ele ta falando eu acho que é um desafio grande pra gente, fazer essas situações. E se pensarmos muito lá traz, na história da matemática, como é que foi descoberto o conceito da probabilidade? Foi através de um experimento. Alguém em algum momento ficou se testando. E é isso, entre aspas, não sei se é certo, agente propor para aos alunos. Vamos jogar dados hoje! Vamos ficar jogando dado hoje e o conceito lá traz foi descoberto dessa forma. Ninguém sabia o que era probabilidade. O que ta acontecendo aqui, será que o número 3 saí tantas vezes, será que os outros saí tantas vezes. E aí o conceito surge. Será que essa forma de jogar o conceito e depois vivenciar é o certo, isso temos que pensar também!

P23: Você nunca pode jogar o conceito para o aluno. Com os dados, podemos dizer para os alunos: vamos experimentar isso! Jogando, jogando, precisava dividir o dinheiro da aposta, contrataram um matemático lá e assim que surgiu. A experimentação faz a teoria e não o contrário. Por que tá dando isso? Por que está tendendo assim? Não é fácil, principalmente em uma sala com 30, 40 alunos; mas o ideal é isso mesmo.

Identificamos que os professores levantam alguns desafios com respeito ao ensino, entretanto, eles mesmos, na discussão, sistematizam como é possível uma abordagem em sala de aula.

Nesta última unidade de estudo há um maior foco de atividades que instigam a reflexão sobre o ensino de probabilidade. Na retomada de situações que envolvem o reconhecimento dos diferentes significados de probabilidade estavam articuladas questões com respeito à abordagem em sala de aula dos anos finais do Ensino Fundamental. Tocamos, mesmo que rapidamente, nos conceitos de variabilidade de uma amostra estatística.

Sobre a árvore de possibilidades, que nas unidades de estudo anteriores, se constituiu como um objeto epistêmico emergente houve ampliação dos conhecimentos dos professores quando trabalhos com árvores em que em sua estrutura os ramos são completos e incompletos por conta da distribuição de probabilidades que a situação evoca.

Ressaltamos que os professores puderam construir ainda conhecimentos sobre a variabilidade dos dados e a possível estimativa da probabilidade de um evento ocorrer, e ainda, elaborar estratégias em meio a situações probabilísticas em que não conhecemos as quantidades dos elementos que compõem o espaço amostral. De forma geral, esses professores apontaram que o conjunto de atividades é significativo para o trabalho em sala de aula e que poderiam ser utilizados para as abordagens de diversos conceitos dentro da probabilidade.

### **5.5 O OLHAR DOS PROFESSORES PARA O SEU PRÓPRIO CONHECIMENTO DE PROBABILIDADE, ENSINO DE PROBABILIDADE E O PROCESSO FORMATIVO.**

Ao final da implementação do processo formativo construímos uma atividade com o intuito de analisar as ideias dos professores sobre o seu próprio conhecimento, sobre o ensino de probabilidade e o processo formativo. Chamamos a essa atividade de “Vamos Registrar” para que os professores registrassem as suas ideias e percepções.

No primeiro item dessa atividade o objetivo foi compreender por meio do próprio posicionamento dos professores o que eles apontavam como aprendizados após a vivência da formação. O item foi o seguinte: O que você aprendeu sobre probabilidade e seu ensino?

Dentre as respostas, encontramos diversas falas que apontam a representação do espaço amostral por meio do diagrama da árvore como um aprendizado. Seguem as respostas de alguns dos professores:

P7: Através das atividades e dos debates, houve um grande esclarecimento sobre dúvidas de soluções, e quanto é importante a aplicação do sistema da árvore.

P8: Que sem montar a árvore fica quase impossível de entender ou de realmente fazer os exercícios de probabilidade

P19: Tudo que aprendi no curso sobre probabilidade serviu para enriquecer ainda mais, pois trata de possibilidades e várias formas diferentes de se resolver. Trabalhar com a árvore é muito importante e fundamental para visualizar, ter base e fundamentos concretos sobre diversos assuntos.

P25: Aprendi que probabilidade é um estudo resultante de experimentos aleatórios ou ao acaso de uma determinada

ocorrência. Um curso que me ajudou muito através de atividades a trabalhar o tema probabilidade com os alunos. A árvore de possibilidades abre uma compreensão mais clara sobre o assunto a ser estudado.

P37: Eu aprendi alguns temas atinentes ao tema proposto para estudo neste módulo. Aprendi, também, a construir uma árvore de possibilidades, e, da importância dela no estudo de probabilidade.

Também encontramos professores que em suas falas apontam para uma compreensão e aceitação com respeito ao ensino da probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental.

P6: Aprendi muitas coisas, que o ensino de probabilidade é muito importante para os alunos do fundamental e médio. Traz maneiras e soluções de como resolver um determinado problema, e discutir uma situação que envolva probabilidade.

P21: Que a probabilidade é um campo muito extenso e complexo acreditava que suas aplicações deveriam ser aplicadas somente no Ensino Médio. Agora, abriu-me a cabeça sobre as diversas aplicações de probabilidade em diversas séries, entre elas, a do Ensino Fundamental.

As duas respostas transcritas a seguir representam, em nossa interpretação, aprendizagens sobre os conceitos abordados, inclusive, mesmo que implicitamente, a noção dos diferentes significados probabilísticos se faz presente nessas falas:

P11: Um dos pontos importantes é a retomada do significado do ensino de probabilidade, com o uso de atividades com árvores, na resolução de problemas.

P8: Fazendo as experimentações fica mais fácil o entendimento das situações. Não se deve esquecer-se de todas as possibilidades possíveis e prováveis.

P31: Novas maneiras de ver e encontrar a solução de determinado problema. Melhor análise e consequentemente possibilitar uma decisão adequada.

E ainda, as respostas representam ideias que revelam novas possibilidades para o ensino que o processo formativo possibilitou aos professores.

P1: Na minha visão ampliou os conceitos de probabilidade.  
Exemplo: de trabalhar os jogos mostrados no curso

P8: Que o ensino de probabilidade precisa ser gradativo a partir de situações cotidianas, analisando sobre diferentes prismas. A utilização de recursos audiovisuais proporciona um aprendizado mais significativo. A conceitualização deve vir após o desenvolvimento de atividades preparadas para esse fim.

P10: Aprendi que existem vários tipos e aprendi ótimas definições sobre o tema. Já sobre o ensino de probabilidade: algo ficou bem claro por sua importância no processo de ensino que é e são as perguntas. Nós (eu particularmente) ficamos preocupados com o resultado de um cálculo e nós nos esquecemos de pensar e refletir nas perguntas e no processo que levamos até chegar à resposta. Aprendi também a pensar e ver como um aluno e como ele pensaria. Algo que pode ser intuitivo ou básico para mim pode ser um obstáculo para ao aluno.

P27: Que o meu entendimento é muito pequeno e que a probabilidade - o ensino - é umas das áreas do ensino da matemática que deveria ser mais explorada nas escolas, fato que não ocorre por desconhecimento, na maioria dos casos, dos professores - me incluo nessa. Contudo, alguns conceitos de probabilidade, consegui aprender nesses encontros - pena que não foram mais profundos.

O segundo item tratou de identificarmos qual ou quais os principais conceitos que os professores apontariam pensando na aprendizagem dos alunos. A ideia era perceber que conceitos os professores retomavam e se, os conceitos que consideramos importantes eles discorriam como significativos. Segue o item: 2. Como professor, se você quiser que os alunos desenvolvam uma compreensão de probabilidade, que é aplicável à vida, quais são os principais conceitos que você gostaria que eles aprendessem?

Observando as respostas encontramos que alguns professores não apresentam conceitos e/ou fogem da pergunta do item. Apenas um dos professores citou sobre os diferentes significados probabilísticos, como consta no fala que podemos ver:

P5: Pegando como conceitos dos significados de probabilidade para que eles desenvolvam uma compreensão da probabilidade, que seja aplicável (totalmente). Eu não deveria ficar preso somente ao significado de probabilidade tradicional.

Apesar de não ser uma justificativa clara, compreendemos que o professor acredita que não se deve ficar focado em apenas um dos significados e, que, o que chama de tradicional, seria o significado clássico de probabilidade. Dentre as respostas encontramos citações com respeito à noção de aleatoriedade e aos diferentes tipos de eventos probabilísticos. Um professor citou como conceito o diagrama da árvore de possibilidades. Alguns professores, como a fala do professor P9 a seguir, citaram também a ideia de razão e proporção e a noção de risco.

P9: O principal seria que qualquer ação tem consequências e riscos, e esses riscos podem ser dimensionados. Aplicar esses conceitos no dia-a-dia é o meu desejo como professor.

Já com o item três foi nosso propósito verificar, após a formação, que estratégias os professores apontariam para ensinar os referidos conceitos do item 2. O enunciado do item foi: Que estratégias você usaria para ensinar esses conceitos? Desejávamos, mesmo que implicitamente, analisar a influência do processo formativo nas estratégias que eles adotariam.

Os professores adotariam como estratégias apresentar atividades que façam um link com o cotidiano; ora citam exemplos do cotidiano ora citam uma afirmação que trabalharia com contextualizações do cotidiano. O professor P17 afirma que a probabilidade é fácil de contextualizar, acreditamos que a afirmativa embasa-se na diversidade de situações-problemas que vivenciamos com eles na formação. É perceptível encontrar nas respostas deles termos relacionados com tomadas de decisão.

P17: Exemplos práticos com meus alunos. A probabilidade é muito fácil de ser contextualizada. Exemplos como seguros, produtos, investimentos e tomadas de decisão são ótimos para ser trabalhar com os alunos.

Os professores citam ainda a ludicidade, a resolução de problemas e as tecnologias digitais como estratégias que abordariam com os seus estudantes.

P13: Destacamos os pensamentos Jogos; resolução de problemas sem fórmulas; resolução de problemas com fórmulas; situações aplicáveis com a árvore de possibilidades; sites, simuladores.

Também queremos ressaltar exemplos das falas relacionadas com a experimentação:

P6: Começar pelos experimentos para depois concretizarmos com as definições.

P21: Trabalhar com exemplos; desenvolver experimentos; fazer resoluções de problemas.

Realizar experimentos e/ou desenvolver experimentos, em nossa interpretação, se constitui em um forte indicio de compreensão sobre uma probabilidade calculada a partir dos experimentos.

No caso do quarto item: Quais das atividades desenvolvidas na formação que chamou mais sua atenção e por quê? Pretendíamos verificar se houve alguma atividade que no geral dos professores tenha se destacado mais e compreender as justificativas apresentadas.

Boa parte dos professores não apontaram atividades específicas, conquanto, indicaram que as atividades por meio dos jogos de computador foram as que chamaram mais a atenção deles. Destacamos os comentários a seguir:

P1: Eu elogio o jogo das conchas. É um jogo diferente e desafiador.

P21: Pegar algo aqui e usar na sala de aula. Eu gosto de informática e não entendo de informática, mas pode se mostrar como pode levar para qualquer série. [...] Achei muito positivo o lado da informática e deveria ter mais em que ajudaria os colegas professores.

Um fato interessante foi neste item encontrarmos respostas que faziam referências para o uso do diagrama da árvore de possibilidades. Essa observação pode ser verificada na fala do professor P10 ao afirmar que “certeza que foi a árvore de possibilidades”.

As justificativas da escolha das melhores atividades foram bastante imprecisas. Entretanto, o protocolo do professor P13, a seguir, ilustra uma justificativa sobre a aplicação das atividades:

P13: Todas! Elas podem ser aplicadas em diferentes momentos em diferentes turmas com diferentes níveis de aprendizado. Seja a atividade com os jogos de computador onde o aluno tenta prever a sequência e essa atividade pode

ser aplicada a uma turma mais nova até atividade da fábrica de bolos que exige um pouco mais do aluno e pode ser usada em uma turma mais velha.

O último item, a saber: 5 – Por que você acha que é importante para os alunos aprenderem a probabilidade? – gostaríamos de analisar como os professores se posicionam e o que justificam sobre a importância para o ensino de probabilidade.

A maioria dos professores, em suas respostas, revela que a importância dos alunos aprenderem probabilidade está relacionada com as situações do cotidiano. Destacam o cotidiano no sentido da tomada de decisão em situações do dia-a-dia como escolher um produto melhor, compreender sobre questões políticas, no campo profissional dos alunos, no entendimento de fenômenos naturais, dentre outros. Apontaram também para o desenvolvimento da inteligência e/ou no desenvolvimento enquanto ser humano. Há indicações afirmado que a probabilidade é de fácil contextualização e aplicação, contribuindo para o aprendizado dos alunos.

Vejamos as falas a seguir que traz evidências sobre o pensamento dos professores:

P4: Por estar na grade curricular e favorecer a compreensão de determinadas situações cotidianas, que podem ser resolvidas a partir do desenvolvimento desse tópico.

P10: Por que no dia a dia, há maior probabilidade de usar a probabilidade ao invés da álgebra, por exemplo, é bem maior (hahahah).

P40: Porque ela está ligada ao dia a dia do aluno, mesmo que seja da forma incorreta. A probabilidade ajuda o aluno em suas tomadas de decisões, poucos conteúdos matemáticos são tão aplicáveis para o aluno quanto a probabilidade. A probabilidade enriquece.

Neste último momento da formação concedemos um espaço para escutar os professores sobre a formação desenvolvida com eles. Retomamos as temáticas das unidades de estudo vivenciadas por meio dos sete encontros.

No geral os professores validaram positivamente o processo formativo tecendo comentário com respeito ao formato interacional vivenciado com eles.

P10: Eu fiquei maravilhada, eu adorei! Eu acho que eu dei muitos passos. O que adorei mesmo essa forma de tratar os assuntos... eu acho muito difícil. A forma como vocês tratam ... aqui eu me sinto uma aluna ...

P5: [...] Foi muito interessante, todo o curso, jogos, atividades.

P20: Realmente esse tema é gostoso de trabalhar e difícil de compreender. Eu agradeço a oportunidade de ter feito esse curso.

P4: Primeiro aprimorar, a gente vê a probabilidade só como para o Ensino Médio. Segundo, aqui a gente fica mais motivado. Terceiro, foi o modelo do curso e que será possível levar para a escola da gente.

P27: Parece-me que essa sala de aula pela caminhada, nós já temos um QI um pouco melhor que os nossos alunos em sala de aula; eu estou aprendendo, continuo aprendendo ...

P3: Primeiramente agradecer a paciência dos formadores e dos colegas; para nós professores sair do pedestal e escutar os colegas ou nossos alunos. Achei o curso super interessante. O lado negativo do curso foi que o tempo foi muito curto, algumas situações foram muito rápidas, para que pudéssemos discutir mais. Obrigado.

Os professores apresentaram suas opiniões sobre seu aprendizado concernente a probabilidade e ao ensino da probabilidade. Por meio da nossa interpretação dessas falas, o olhar dos professores sobre a formação foi positivo e que, os mesmos, consideram significativo o processo instrucional desenvolvido com eles. Acreditamos e torcemos que, com base na análise dessa reflexão realizada pelos professores, que se demonstraram favoráveis ao processo formativo, possíveis práticas docentes provenientes deste estudo possam ser implementadas no Ensino Básico.

## 6. IDONEIDADE DO PROCESSO FORMATIVO SOBRE DIDÁTICA DA PROBABILIDADE

---

Neste capítulo vamos discutir a valoração da idoneidade didática do processo formativo considerando a implementação do nosso desenho. Para dar conta dessa avaliação utilizaremos os indicadores de idoneidade didática desenvolvidos no marco teórico do Enfoque Ontosemiótico (GODINO, BENCOMO, FONT E WILHELCMI, 2006, 2007; GODINO, RIVAS, CASTRO E KONIC, 2012; GIMÉNEZ, FONT E VANEGAS, 2013;). Na metodologia explicitada no capítulo 1 apresentamos indicadores empíricos que nos guiaram nesta fase de avaliação.

Os referidos indicadores podem também ser aplicados em processos de formação continuada com professores de matemática avaliando desta forma a Idoneidade Didática de Processos de Instrução em Didática da Matemática (GODINO, BATANERO, RIVAS E ARTEAGA, 2013).

Segundo Godino (2011) e Godino et al. (2013) com a descrição da idoneidade didática de um processo instrucional com professores é possível discutir tanto o processo de estudo matemático bem como a didática correspondente desenvolvida no processo formativo implementado. Esses indicadores estão organizados considerando as diferentes facetas do EOS. Godino et al. (2013) discorrem que,

O desenho, a implementação e avaliação de um processo de formação de professores em didática da matemática não somente requer ter em conta as expectativas de aprendizagem, ou faceta epistêmica (neste caso, referente aos conhecimentos institucionais sobre o ensino e aprendizagem da matemática). Também deverão ser contemplados as facetas cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica, as quais envolvem o formador com os professores em formação. (Godino et al., 2013, p. 63).

No quadro 7 temos as facetas e indicadores de um processo de Instrução de Didática da Matemática apresentados por Godino et al. (2013) que podem orientar processos de formação de professores. .

FACETA EPISTÊMICA (Conteúdo Didático-Matemático, entendido desde o ponto de vista institucional)	OUTRAS FACETAS IMPLICADAS NA FORMAÇÃO EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA
<b>CONTEÚDO MATEMÁTICO:</b> Problemas, linguagens, conceitos, procedimentos, propriedades, argumentos, conexões.	
<b>CONTEÚDO ECOLÓGICO:</b> Currículo, inovação didática, adaptação sócio-profissional, conexões interdisciplinares.	<b>FACETA ECOLÓGICA:</b> Currículo, inovação didática na formação dos professores, conexões interdisciplinares.
<b>CONTEÚDO COGNITIVO:</b> Conhecimentos prévios, adaptações curriculares, aprendizagem do conteúdo matemático por parte dos estudantes.	<b>FACETA COGNITA:</b> Aprendizagem do conteúdo didático-matemático pelos professores
<b>CONTEÚDO AFETIVO:</b> Interesses, atitudes, emoções frente a aprendizagem dos conteúdos matemáticos pelos estudantes	<b>FACETA AFETIVA:</b> Crenças, valores, interesses, atitudes, emoções dos professores frente à aprendizagem do conteúdo didático-matemático.
<b>CONTEÚDO INTERACIONAL:</b> Modos de interação e discurso no processo de ensino e aprendizagem da matemática	<b>FACETA INTERACIONAL:</b> Modos de interação e discurso no processo de formação de professores de matemática.
<b>CONTEÚDO MEDIACIONAL:</b> Uso de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem da matemática.	<b>FACETA MEDIACIONAL:</b> Uso de recursos tecnológicos no processo de formação de professores de matemática.

**Quadro 8: Facetas com indicadores de IDM com base no EOS**

Fonte: Adaptado de Godino et al. (2013).

Esta imbricação entre a matemática e a didática da matemática é o que leva a introduzir o construto “conhecimento didático-matemático – CDM” e a propor o estudo integrado da matemática e da didática da matemática na formação de professores de matemática (GODINO et al., 2013, p.71).

Esses indicadores nortearam nossa análise. No entanto, foi necessário em alguns momentos também considerar outros indicadores ou fatores. Partimos, nas próximas seções, para a avaliação do processo formativo, considerando as seis facetas do EOS.

## 6.1 IDONEIDADE EPISTÊMICA

A idoneidade epistêmica compreende o conteúdo didático-matemático, entendido do ponto de vista institucional (GODINO et al., 2013). Os elementos de referência para avaliar esta idoneidade devem ser os correspondentes ao significado institucional sobre probabilidade e sobre o ensino de probabilidade pretendido para os docentes. No capítulo do estudo preliminar apontamos textos e investigações publicadas como os de Batanero (2005) e diferentes prescrições curriculares (NCTM, 2000; ACARA, 2015; BRASIL, 2016; REAL

DECRETO, 2006) que se constituem em documentos de ampla difusão e consenso internacional sobre os significados de referência de probabilidade.

Um processo formativo com professores deverá incluir como objetivo central o estudo e a discussão de uma epistemologia educativa da matemática. Essa idoneidade nos processos de formação de professor se alcança quando se prevê, organiza e deseja que o professor conheça, compreenda e domine o conhecimento especializado do conteúdo no que se refere à variedade de situações problemas, linguagens, estruturas, argumentações e conexões, para o nível educativo em que o professor exerce sua atividade profissional (conhecimento comum) e tratando do conhecimento avançado, isto é, da articulação com o nível educativo posterior.

O critério global de idoneidade epistêmica de um processo de formação de professores será a inclusão no programa de estudo de uma seleção representativa do sistema de conhecimentos didáticos-matemáticos (incluindo compreensão e domínio prático) que a “comunidade de educadores matemáticos” considera como pertinentes para um ensino idôneo da matemática naquele nível correspondente.

Por exemplo, é sugerido como uma característica da idoneidade epistêmica do processo formativo de professores que se contemple uma seleção de “casos representativos”, isto é, de situação de contextualização dos conhecimentos didáticos-matemáticos. Estes casos representativos podem consistir em atividades centradas em tópicos ou incidentes didáticos específicos (análises de texto, sessões de vídeos de professores experientes ensinando tópicos particulares, etc.).

As atividades implementadas por meio das unidades de estudo possibilitaram aos professores aceitar a importância de se trabalhar com situações-problemas que permitem uma construção dos conhecimentos probabilísticos, situações essas que estão além de aplicações de fórmulas e algoritmos de cálculo. As atividades também contribuíram para que os professores tivessem uma visão antropológica da probabilidade, uma visão no sentido de entender que os problemas probabilísticos surgiram das experiências humanas e que se desenvolveram progressivamente frente aos

novos questionamentos sociais. Em meio à vivência das atividades trouxemos diversos tipos de questionamentos que podem conduzir para a compreensão de como se deu historicamente a construção do conhecimento probabilístico. Tal conhecimento era atribuído mais às questões divinas e só, tardiamente, se compararmos com outros eixos da matemática, é que a probabilidade vai se constituindo como um conhecimento matemático imbuído de teoremas, axiomas, provas.

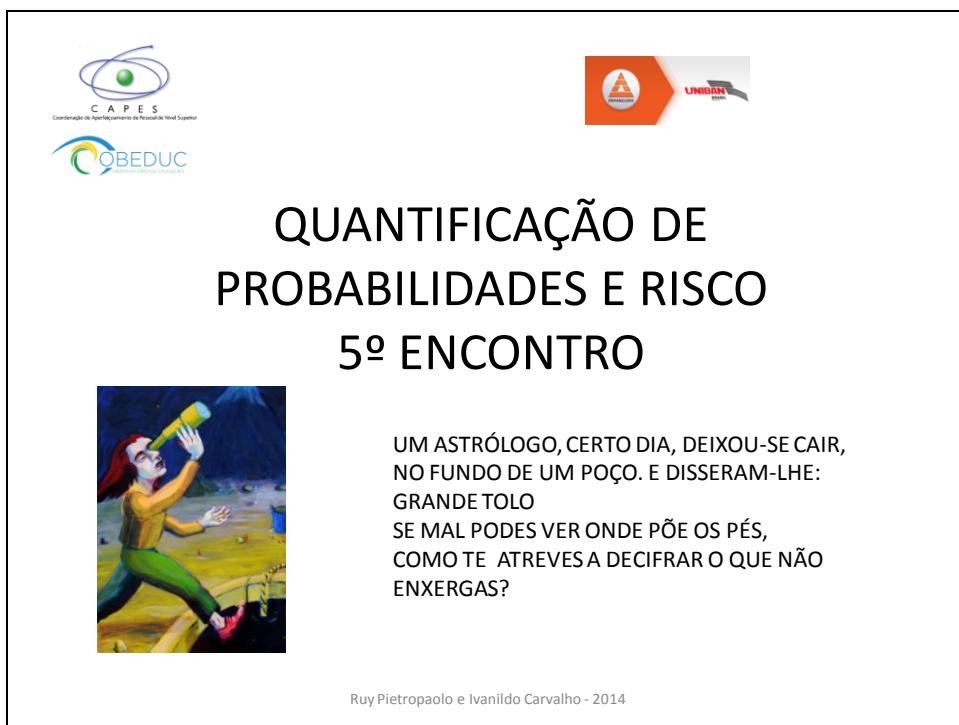
A discussão inerente aos significados probabilísticos – na qual apresentamos aos professores – também desperta essa compreensão, pois a sequência de estudo: aleatoriedade, espaço amostral e quantificação de probabilidades, apresentam a característica de constituição antropológica do conhecimento probabilístico. Logo de início, nas discussões sobre acaso e aleatoriedade, discorremos sobre a situação descrita a seguir:

Caminhando por uma rua, para ir ao mercado, posso passar sob uma janela, da qual despenca um vaso, que cai sobre minha cabeça e, em vez de ir ao mercado, vou parar num hospital. Foi um acaso. No entanto, para esse cientista, minha ida pela rua é necessária do ponto de vista da anatomia e da fisiologia de meu corpo; passar por uma rua determinada é necessário se, por exemplo, ficar estabelecido geométrica e geograficamente que é o trajeto mais simples e mais rápido para chegar ao mercado; pela posição do vaso na janela, pelo vento ou pelo toque de alguma coisa nele, é necessário, segundo a lei universal da gravitação, que ele caia. (CHAUÍ, 2000, p.336).

Reflexões deste tipo contribuem com o entendimento de que o conhecimento probabilístico surge com forte referencial social, não foi um grupo de matemáticos apenas que chega e constrói tal conhecimento, da mesma forma que a matemática, desde o início é e continua sendo um conhecimento socialmente compartilhado. Olhando para a historicidade da matemática, basta focar na civilização grega e percebermos a inumerável quantidade de axiomas, provas, teoremas, colorários, porém com foco na geometria e na álgebra. A probabilidade está no vício em apostas; nos astrágalos. Assim não houve esforço para entender as regularidades, não desenvolveram uma teoria das probabilidades que estava associada à vontade dos deuses.

Não é nosso propósito nos adentrar detalhadamente nessas questões, mas é sabido que no século XVII a astrologia começa a cair em descrédito por estudiosos, cientistas e intelectuais da época. Acreditamos tal ocorrência pelo fato, justamente, de alguns outros matemáticos e interessados, começarem a estudar o acaso, a aleatoriedade, as apostas, os jogos de sorte-azar e suas regularidades. A fábula de La Fontaine (1621-1695) – poeta e acadêmico francês – foi apresentada aos professores como na figura do slide a seguir:

**Figura 61: situação reflexiva utilizada no início do quinto encontro**



Fonte: o autor, 2017.

Inclusive esta referida situação reflexiva (figura 61) foi apresentada antes de vivenciarmos a unidade no qual fortemente trabalhamos a quantificação de probabilidades – 5º encontro.

Os conteúdos matemáticos abordados por meio da implementação do programa formativo foram significativos por que foram conteúdos que perpassavam desde as noções que sustentam o conceito de probabilidade como por conteúdos que se revelam mais complexos como o estudo da probabilidade condicional e da noção de risco. Além disso, estavam de acordo

com o que é preconizado pelas diretrizes curriculares em geral e pela literatura discutida por nós no capítulo do Estudo Preliminar.

As atividades vivenciadas também favoreceram o professor, a compreender a resolução de problemas como uma abordagem que possibilita dar sentido ao conteúdo matemático, particularmente ao conteúdo de probabilidade.

Godino, Batanero e Flores (1998) destacam que um ponto importante no plano de formação de professores sobre um conteúdo matemático específico é a reflexão epistemológica sobre o mesmo. Esta reflexão ajuda os professores a compreender o papel de um conteúdo matemático dentro da Matemática e outras matérias e sua importância na formação dos alunos. Ao longo do processo formativo foi possível refletir sobre o papel da probabilidade e sua importância na formação dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

A formação, no entanto, não possibilitou uma reflexão mais aprofundada sobre a probabilidade e seu papel articulado com o das outras disciplinas e áreas do conhecimento, apesar da forte articulação com o campo da Estatística. Esse ponto poderia ser mais destacado em outros processos formativos.

O conjunto de atividades perpassou por obstáculos epistemológicos tal qual se deu na construção progressiva do conhecimento probabilístico ao longo da história, ou seja, houve uma reflexão epistemológica sobre eles.

Um dos principais obstáculos epistemológicos, que tanto pode estar presente nas concepções de alunos como nas dos professores corresponde à ideia de conceber a matemática como a ciência dos números, dos resultados precisos, servindo como entrave para a compreensão do significado dos fenômenos aleatórios os quais se constituem como base da teoria das probabilidades. Rosa, Fernandes e Pinho (2006) discorrem que a ideia de uma ciência determinística surge como um obstáculo a essa “nova possibilidade” de experimentos.

Torna-se urgente desconstruir essa visão determinística e isso deveria se constituir em um dos desafios do professor de matemática ao ensinar probabilidade. As atividades favoreceram a desconstrução e a ressignificação desses conhecimentos. Outro ponto, é que chamamos a atenção nas atividades em que estávamos associando à noção de estatística a probabilidade, ou seja, determinando estatisticamente as probabilidades.

As atividades propiciaram situações contextualizadas voltada ao trabalho com os estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e não ficaram resumidas a apenas lançamentos de dados ou retiradas de bolas “brancas” ou “pretas” de urnas. Partimos do princípio que as situações de aprendizagem não podem ficar restritas a atividades como a de lançamentos de dados e anotação de resultados.

Ao trabalhar com as atividades citamos que foi possível transpor um importante obstáculo que é a desconstrução da ideia de que a matemática é uma ciência que envolve apenas situações de caráter determinístico. Quebramos com um paradigma muito forte na matemática (Skovsmose, 2007) de apresentar de maneira formal a definição de probabilidade e repetir a resolução exaustiva de problemas clássicos. Isso foi possível devido à diversidade de situações e problemas vivenciados. Tais situações devem ter o predomínio quase que exclusivo de aspectos experimentais do conhecimento. Propor boas situações didáticas não é uma tarefa simples. A passagem a seguir esclarece ainda mais esta questão.

É necessário que o professor tenha um conhecimento aprofundado sobre determinados assuntos, a fim de propor situações que estejam de acordo com os objetivos de ensino a serem alcançados, que sejam atividades motivadoras na busca da construção de um saber por parte dos alunos, que sirvam de instrumentos para garantir o contrato didático pré-estabelecido e que dentre outras coisas, possibilitem uma abordagem socrática a fim de potencializar quebras verdadeiras de obstáculos epistemológicos. (Rosa, Fernandes e Pinho, 2006, p.5)

Dessa forma, estamos retomando também o que historicamente suscedeu no trabalho com probabilidade uma vez visto que a definição clássica de Laplace não daria conta do trabalho com outras situações probabilísticas em

que é necessário a utilização das frequências de resultados para estimar a probabilidade de um evento. Reiteramos que a abordagem do conceito de probabilidade deve incluir diferentes tipos de problemas.

As diversas representações (linguagem ordinária, tabelas, gráficos, diagramas, etc.) utilizadas nos diferentes tipos de atividades possibilitou reconhecer a importância da linguagem característica da probabilidade e as suas representações. Estes diversos modos de representação das situações postas em jogo apoiaram a argumentação e a comunicação sobre o conhecimento probabilístico.

A diversidade de significados inerentes ao conhecimento probabilísticos, tanto formais como informais, estão presentes nas atividades matemáticas implementadas e nos possíveis métodos de trabalho em sala de aula. O encadeamento das unidades de estudo – aleatoriedade, espaço amostral, quantificação e risco, explorando probabilidades – propiciou um sistema interligado de conceitos, propriedades e procedimentos.

Um fato que não foi aprofundado e sistematizado é o reconhecimento da argumentação na construção do conhecimento matemático; houve diversos momentos de argumentação pelos professores, no entanto, tais argumentações não foram sistematizadas chegando-se à utilização de provas, axiomas, teoremas. Citamos alguns teoremas quando do estudo dos diferentes significados, mas não os descrevemos explicitamente. Esse fato pode ser mais evidenciado em outras propostas formativas conduzindo a argumentação dos professores em sistematização de provas com a probabilidade formal.

A formação não promoveu uma discussão sistematizada das diretrizes curriculares nacionais e internacionais. Contudo, salientamos que o desenho implementado se constitui em uma possibilidade de inovação curricular, e tal fato foi discutido com os professores.

Podemos dizer que nossa proposta pode, de certo modo, ser classificada como inovadora, tendo em vista não apenas a abordagem, mas, sobretudo, pelo estudo do risco por meio das tabelas de contingência. O

próprio título da formação Probabilidade e Risco já despertava o interesse sobre diferentes possibilidades para o ensino e aprendizagem da probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental. Ficou claro para os professores que a abordagem das atividades que mobilizam o conhecimento comum e avançado por meio de situações articuladas ao conhecimento especializado estava ancorada na literatura nacional e internacional sobre esta temática.

Um fator de alta idoneidade nesta faceta é também o desenvolvimento de boas práticas docentes na busca, seleção e adaptação de situações-problemas que envolvam o contexto real de probabilidade e que também fosse possível a interdisciplinaridade. Nesse sentido, poderíamos melhorar a abordagem considerando o desenvolvimento dessas práticas. No entanto, ressaltamos em diversos momentos da formação a forte aplicabilidade da probabilidade, inclusive quando a comparamos com outros eixos da matemática, como com o exemplo de que a probabilidade é muito mais aplicável do que a geometria analítica.

Por meio do programa formativo vivenciado os professores tiveram acesso às questões preconizadas pela literatura concernente à certa psicologia da aprendizagem de probabilidade, tais reflexões inclusa, por exemplo, no texto guia que ora recebiam ao final de cada unidade de estudo.

Abordamos as formas progressivas de saber e conhecer a probabilidade, considerando diferentes complexidades desse conhecimento. Os professores puderam entender os objetos matemáticos específicos: os diferentes significados de probabilidade, os erros e os obstáculos recorrentes dos estudantes.

Os professores, de acordo com o estudo realizado, podem justificar as adequações cognitivas de acordo com os diferentes significados de Batanero, Henry e Parszys (2005) que podem se constituir em uma modelo para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes. Em alguns momentos, com algumas atividades, alertamos para as complexidades envolvidas nas situações-problema, alertando que, talvez nem todos os alunos progredissem no mesmo ritmo. No entanto, convém destacar que não foram satisfatoriamente

desenvolvidas competências na concepção de instrumentos de avaliação; ou seja, não houve uma discussão explícita de e sobre a avaliação.

Dessa forma, foram desenvolvidas habilidades para projetar e implementar adaptações curriculares considerando as diferenças individuais dos estudantes. Discutimos a importância de o professor pesquisar, selecionar e adaptar tarefas que sejam interessantes para os alunos e que tenham utilidade em sua vida cotidiana, tanto pessoal como profissional. Isso tem relação com a competência do professor reconhecer o que é interessante para os alunos, reconhecer a afetividade que as atividades escolhidas possam propiciar.

Neste sentido também, ao se trabalhar na sala de aula, estaremos contribuindo para que os alunos não desenvolvam uma rejeição ou fobia à matemática, particularmente ao eixo da estatística e probabilidade. Assim, discutimos por diversas vezes se as atividades eram ou não interessantes para os alunos e o que poderiam promover nos mesmos. Infelizmente não foi possível organizar e estudar a construção de aulas pelos professores considerando a promoção da afetividade, o que destacamos como algo que pode ser mais enfatizado em futuros processos formativo.

Os espaços destinados às discussões e reflexões das 22 atividades vivenciadas e das atividades que se intercalavam às mesmas possibilitaram que os professores conhecessem a importância do discurso na sala de aula para a aprendizagem da probabilidade.

O desenvolvimento de competências para a comunicação adequada do conteúdo de probabilidade foi desenvolvido por meio de atividades que os próprios professores observavam a sua própria comunicação e como poderiam comunicar melhor o conteúdo de probabilidade, desde as noções de aleatoriedade até a quantificação de probabilidades.

Foi possível compreender o papel dos recursos manipuláveis e tecnológicos para a construção do conceito de probabilidade. Refletimos inclusive sobre as possibilidades e sobre as limitações dos referidos recursos.

Um exemplo foi a limitação com respeito ao uso do computador na escola pública e que adaptações poderiam ser realizadas. Houve inclusive professores que aplicaram algumas das atividades em suas salas de aula realizando modificações nas mesmas.

Depois de envolver e discutir o uso das diferentes TIC e recursos manipulativos na formação foram desenvolvidos competências para a integração desses recursos com os conteúdos probabilísticos. O jogo do Bloco no Saco, por exemplo, permite a exploração visual para tomadas de decisão estabelecendo a comparação das chances quando temos espaços amostrais diferentes e articuladamente; permite também uma manipulação com objetos para justificação das decisões tomadas – no caso do saco escolhido.

Um bom indicador nesta faceta é também o gerenciamento do tempo para o ensino das atividades na sala de aula. No geral, propomos algumas ideias em que o gerenciamento do tempo era considerado, como por exemplo, a atividade Impossível versus Improvável para ser aplicada em diferentes semanas para que tal noção probabilística fosse sendo abordada processualmente. Contudo, não houve uma forte reflexão profunda e sistematizada sobre esse gerenciamento.

Podemos considerar a idoneidade epistêmica do processo formativo como ALTA. A realização do conjunto de atividades organizadas por unidades de estudo traz a baila os conhecimentos necessários ao campo de problemas de probabilidades. As unidades de estudo permitiram um estudo progressivo desses conhecimentos. Foram postos em jogo conteúdos destinados a etapa posterior aos Anos finais do Ensino Fundamental como Probabilidade Condicional que no currículo está previsto para ser abordado no Ensino Médio (conhecimento avançado do conteúdo). Emergiram ainda novos conhecimentos probabilísticos referentes às diferentes representações do espaço amostral, os significados probabilísticos, a noção de risco por meio da associação de variáveis, dentre outros.

## 6.2 IDONEIDADE ECOLÓGICA

O estudo preliminar e o desenho para a formação – capítulo 2 e capítulo 4 – apresentam claramente que as ações formativas são oriundas de resultados de investigações prévias sobre a formação de professores, inclusive com o uso de recursos tecnológicos. Dentre esses estudos sobre a formação de professores incluímos estudos que envolvem a formação de professores sobre probabilidade.

Utilizamos uma considerável parte das atividades dos estudos de Nunes et al. (2012) com crianças, entretanto incluímos outras atividades que perpassam pelos mais importantes resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem da probabilidade, inclusive com a formação inicial e continuada com os professores de matemática nessa temática.

As atividades que trabalhamos e os conteúdos mobilizados giram em torno da formação docente com foco no desenvolvimento profissional do professor de matemática. As contribuições vão além do ensino e aprendizagem da probabilidade e implicitamente os professores podem tecer analogias para o ensino e aprendizagens de outros conteúdos matemáticos.

O tom do programa formativo dava-se não só para as aprendizagens dos conteúdos, mas também para aprendizagens sobre formas de ensino da probabilidade pelos professores.

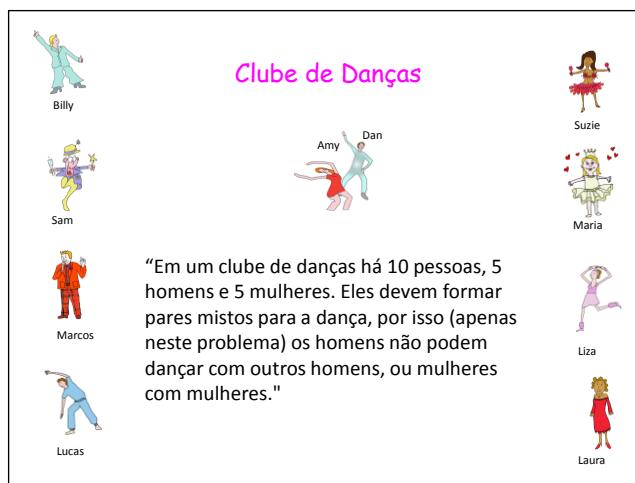
Contudo, apenas em alguns momentos é que conseguimos integrar as atividades com outras matérias do currículo de matemática fazendo reflexões sobre a importância de tal articulação. Em contrapartida há integração com pesquisas sobre os conhecimentos de professores advindas da Pedagogia, como as ideias de Shulman (1986).

Nesta faceta também se torna importante que os professores fortaleçam valores democráticos e o pensamento crítico da sua prática docente. A implementação contemplou essas questões. A forma de trabalho desenvolvida no processo formativo apresentava espaço para o diálogo e a troca de ideias. Houve espaço para respeito às dificuldades e conflitos semióticos apresentados pelos professores. No início da formação ficou claro que

tínhamos uma proposta dialógica. Inclusive em nossos objetivos enfatizamos que desenvolvemos um processo de estudo e pesquisa com professores, assim, a palavra “com” deixa forte a nossa postura.

Além disso, tivemos cuidado com os termos envolvidos nas atividades para não conduzir em reforço de preconceitos como, por exemplo, a descrição da atividade na figura a seguir:

**Figura 62: atividade do Clube de danças**



Fonte: Adaptado de Nunes et al. (2012)

Na descrição das trajetórias didáticas há trechos em que os professores foram constantemente instigados a falar, a externalizar suas opiniões e a tecer reflexões articuladas à prática docente por eles vivenciada.

Desta forma, consideramos a idoneidade ecológica do processo formativo como SATISFATÓRIA.

### 6.3 IDONEIDADE COGNITIVA

O principal indicador da idoneidade cognitiva do processo formativo será o resultado efetivo das expectativas de aprendizagem sobre o conteúdo didático-matemático de probabilidade. Logo, envolve as aprendizagens sobre a probabilidade e as aprendizagens sobre o ensino de probabilidade. O que os professores efetivamente aprenderam?

No capítulo 5 discutimos os conhecimentos que foram ressignificados e/ou construídos pelos professores com respeito ao conteúdo de probabilidade.

Os professores ampliaram a sua base de conhecimentos matemáticos, particularmente o probabilístico. Por meio da implementação das atividades foi possível revelar conflitos semióticos dos professores e uma abordagem dos mesmos.

O conhecimento didático para o ensino de probabilidade se deu por meio de uma ampla vivencia com as atividades e suas particularidades. Inclusive, havia atividades específicas para a reflexão didática dos professores sobre o ensino de probabilidade.

Avaliamos que o processo formativo atendeu às expectativas de ampliação dos conhecimentos sobre o ensino de probabilidade como os professores. Valoramos este processo como ALTA idoneidade cognitiva.

#### **6.4 IDONEIDADE AFETIVA**

Dado o caráter profissionalizante do programa formativo devem-se supor atitudes e motivações positivas por parte dos professores frente ao ensino da matemática, e, portanto, em relação aos conteúdos e atividades correspondentes. Esta motivação inicial deverá ser potencializada mediante a seleção de casos para sua análise e implementação em atividades relacionadas com sua futura prática profissional. A adequada conexão teoria – prática será um indicador da idoneidade afetiva, que indiretamente induzirá interesse, motivação e compromisso dos professores.

A prática reflexiva que a formação propiciou e as atividades que instigavam essa reflexão demonstraram a sintonia entre teoria e prática.

Entretanto, acreditamos que os exemplos que apresentavam casos de alunos para análise dos professores poderiam ter sido mais explorados. O que realizamos e apresentamos foram casos de aplicações de outros pesquisadores quando da formação de professores. Esse fato aumentaria a adequação didática uma vez que os exemplos poderiam se constituir dos próprios alunos da rede estadual de São Paulo. Ainda assim apresentamos casos fictícios de sala de aula que constituíam em algumas das atividades selecionadas.

Uma consideração especial será o componente das crenças e valores dos professores em formação sobre a matemática e seu ensino, componente que diversos autores incluem dentro da dimensão afetiva (ZAN, BROWN, EVANS E HANULLA, 2006; DEBELLIS E GOLDIN, 2006; PHILIPP, 2007).

O nosso programa formativo contemplou a avaliação dessas crenças e valores dos professores, a reflexão sobre os mesmos e as possíveis evoluções. Essa avaliação se deu em momentos que discutimos e discorríamos sobre as referidas crenças que permeiam o ensino da probabilidade na Educação Básica. Uma questão relativa a isso tem haver com o valor que culturalmente os professores atribuem à probabilidade quando comparamos com outros conceitos ou eixos da matemática. É exatamente isso que Pietropaolo, Campos, Carvalho e Teixeira (2013) descrevem no trecho a seguir.

muitos docentes sequer estão convencidos de que a probabilidade seja importante para ser desenvolvida no Ensino Médio; quanto ao Fundamental, têm uma posição ainda mais restritiva: consideram a inclusão desse tema totalmente inadequada e desnecessária. (PIETROPAOLO et al. 2013, p.2)

Ainda, segundo Campos e Pietropaolo (2013),

[...] para promover a inclusão da probabilidade no Ensino Fundamental, primeiro seria necessário convencer os professores de que a aprendizagem das noções relativas à probabilidade não é apenas útil para aplicação no cotidiano das pessoas, mas também pelo desenvolvimento de importantes habilidades cognitivas e de formas de pensar. (CAMPOS E PIETROPAOLO, 2013, p.59)

Sucintamente refletimos sobre determinadas concepções de ensino e aprendizagem de matemática que podem impactar no ensino e aprendizagem da probabilidade, como a questão da forte visão determinística presente nos professores de matemática, conquanto isso pudesse ter sido mais bem explorado de forma objetiva e direta.

Convém salientar que a formação ocorreu com professores que solicitaram a temática estatística e probabilidade. Estávamos, dessa forma, atendendo a uma demanda dos professores que participaram do programa Observatório da Educação em outros momentos. Constatamos que poucos

professores não participaram de todos os encontros, isso tem a ver com o compromisso pessoal do professor com a sua formação continuada.

Diante do exposto valoramos a idoneidade afetiva do programa como MÉDIA.

## **6.5 IDONEIDADE INTERACIONAL**

Os componentes e indicadores de idoneidade interacional para o ensino da matemática em um caráter geral, pode se aplicados também aos processos de formação de professores em didática da matemática. (Godino et al., 2013). O desenvolvimento de competências comunicativas dos professores em formação, e do trabalho autônomo, foram considerados em nosso desenho e na implementação do plano formativo.

Destacamos que o formato de interação principal implementado nos encontros foi o dialógico e cooperativo. No processo formativo os professores vivenciavam as atividades, compartilhavam as suas ideias/resoluções e discutiam em grupos. No início da formação combinamos com os professores a importância de se ter uma interação dialógica na formação ancorada em uma perspectiva dialógica.

Sempre que os professores eram convidados para compartilhar suas resoluções na lousa, por exemplo, discutíamos que não se estava querendo identificar quem acertava ou não, mas compreender e discutir diferentes estratégias de resolução.

Destacamos alguns dos momentos que balizaram a formação como espaço de compartilhamento nos trechos a seguir:

F: Agora assim, antes de descobrir que era em ordem alfabética, o que é que vocês conjecturaram? Pensaram? (1º encontro)

F: na 1ª alguém colocou verde? Podem falar; vamos discutir. (2º encontro)

F: quem gostaria de fazer aqui no quadro? Não se preocupem em errar ou acertar; quem gostaria de mostrar aqui pra gente no quadro? (4º encontro)

F: Podem ficar à vontade para socializar as ideias de vocês, o importante é discutir e aí analisamos a adequação ou não da resolução. (6º encontro)

Houve momentos em que os próprios professores instigaram a ida de colegas à lousa para compartilhar as resoluções, como no trecho a seguir:

[O professor P5 fala para o p20 ir ao quadro explicar as possibilidades.]

F: Sintam-se à vontade, mas ninguém é obrigado.

[O professor resolve ir e os colegas aplaudem a ida à lousa.]

[P6 fala algumas sugestões e ajuda o professor no quadro informado quais são as combinações que ele ainda não cortou.]

Pretendíamos que os professores atribuíssem sentido aos conhecimentos abordados por isso pensamos em um contexto que possibilitasse aos professores buscar as soluções, vivenciar as atividades e ainda, momentos para socialização, comunicação e validação coletiva das soluções. Zeichner (1992) discorre sobre a importância do aprendizado em grupo de estudos de professores em que as experiências e saberes são compartilhados reflexivamente.

Alguns professores, que inclusive eram bolsistas do projeto, aplicaram algumas das atividades em suas turmas, mas houve pouco tempo para um estudo e socialização dos resultados aplicados por eles em suas próprias turmas.

Concluímos que houve uma ALTA idoneidade interacional do processo formativo.

## **6.6 IDONEIDADE MEDIACIONAL**

Quanto a esta idoneidade – mediacional – para que a mesma seja considerada alta, deve-se fazer uso de materiais manipuláveis e tecnológicos e ainda, uma abordagem por meio de um conjunto articulado de situações-problemas. Godino et al. (2013) discorre que o uso de recursos manipulativos e tecnológicos de maneira pertinente e oportuna para a aprendizagem de temas matemáticos específicos é um componente do conhecimento especializado do

conteúdo e forma parte, por tanto, das expectativas de aprendizagem. Por exemplo, o uso de recursos informáticos e audiovisuais para a abordagem de casos relacionados com a prática de ensino e análise retrospectiva dos mesmos.

Como os conteúdos didático-matemáticos são amplos, mesmo que particularmente estejamos delimitados ao campo da probabilidade, é necessário selecionar unidades temáticas com características protótipicas para que o tempo seja suficientemente satisfatório.

A respeito dos recursos foram utilizados, por exemplo, computador, material manipulável, textos impressos, calculadoras dentre outros. Esses recursos foram apresentados de forma equilibrada e de acordo com as atividades. Com o uso deles, permitiu-se, por exemplo, justificar intuitivamente e visualizar a convergência dos resultados considerando a lei dos grandes números quando da atividade do lançamento de dois dados.

Não exploramos softwares de construção de diagramas de árvores que poderiam ser úteis e agregar mais conhecimento sobre recursos disponíveis para o ensino e aprendizagem da probabilidade.

O texto oferecido ao final de cada unidade de estudo também se constituiu em um material rico para o professor e para a sua autonomia caso desejasse aplicá-lo em suas salas de aula.

Tanto no desenho como na implementação do mesmo, o tempo destinado ao estudo foi satisfatório. A organização da formação por meio das quatro unidades de estudo possibilitou distribuir as atividades de uma forma mais equilibrada e ainda com espaços para reflexão e sistematização.

Apenas com algumas atividades é que foi necessário trabalhar de uma forma mais ligeira para não atrasar o percurso de implementação do desenho, mesmo assim não houve prejuízo da compreensão e dos objetivos das referidas atividades. Este fato poderá ser mais bem trabalhado em outros processos formativos, quiçá com uma quantidade menor de atividades.

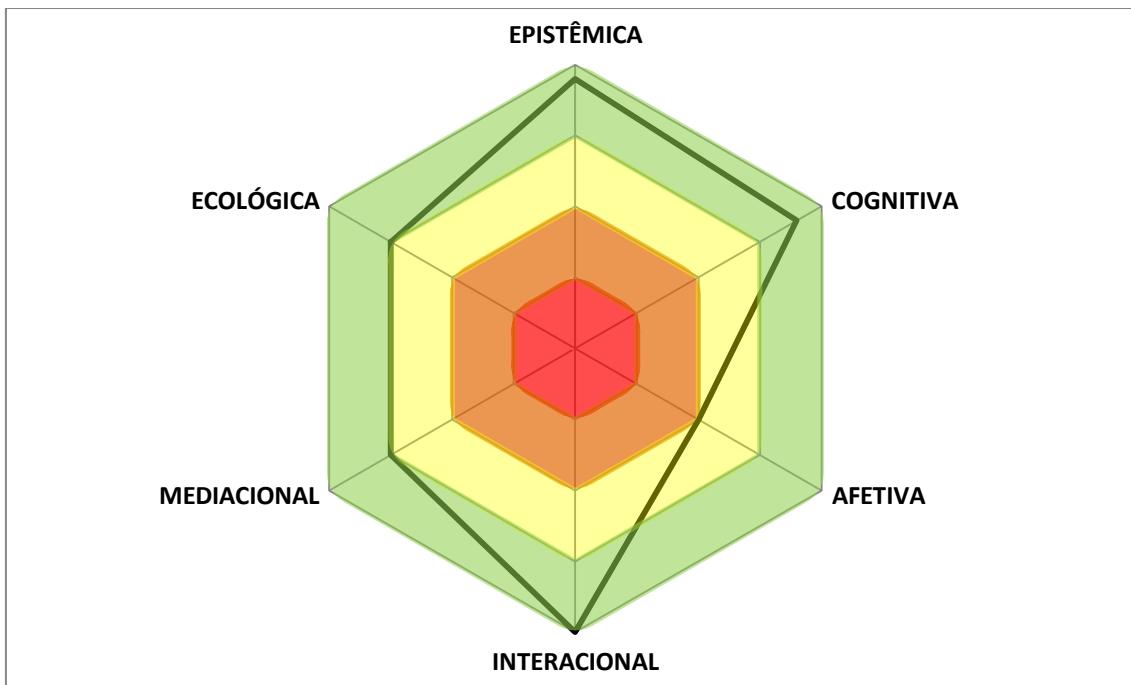
Diante do exposto consideramos que a idoneidade mediacional do programa formativo é SATISFATÓRIA.

### **6.7 PERSPECTIVA GERAL DA IDONEIDADE DIDÁTICA**

É comum em trabalhos que se debruçam sobre a compreensão de um processo formativo de professores e/ou de instrução matemática com base em um determinado conteúdo matemático (GIMÉNEZ, VANEGAS, FONT E FERRERAS, 2012; BREDA, FONT E LIMA, 2014; GODINO, 2002) construir um gráfico que represente o movimento das seis idoneidades avaliadas.

Em nosso caso, criamos uma categorização para construção do gráfico das idoneidades. Essa categorização tem um caráter apenas didático e com o intuito de situar o leitor na observação da idoneidade geral do programa formativo implementado. Criamos quatro categorias: baixa (faixa vermelha), média (faixa laranja), satisfatória (faixa amarela) e alta (faixa verde). A figura 63 apresenta o gráfico do hexágono que representa a nossa idoneidade geral.

**Figura 63: hexágono da idoneidade geral do experimento formativo**



Fonte: O autor, 2017.

Respondemos assim, a nossa terceira questão de pesquisa, a saber:  
*Como este programa de formação favorece a construção dos conhecimentos*

*didáticos-matemáticos com professores dos anos finais do Ensino Fundamental?*

O programa contribuiu com os conhecimentos didáticos-matemáticos dos professores com uma alta idoneidade epistêmica, cognitiva e interacional. A idoneidade ecológica e a mediacional consideramos como satisfatória. No caso da idoneidade afetiva adequamos como média. Observando todas as idoneidades, as mesmas estão entre as faixas amarelas e verdes do gráfico e assim, podemos valorar todo o programa formativo com alta idoneidade didática.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

O texto que segue apresenta uma síntese do percurso que se fez necessário à realização do nosso estudo e dialoga a respeito das questões de pesquisa que nos propusemos a responder. Incluímos ainda uma reflexão sobre aspectos que, ao nosso olhar, podem ser aprofundados em estudos posteriores e indicamos questões que, embora não tenham sido foco do nosso estudo, por sua importância, faz jus a novos objetos de estudo e investigação.

Retomamos que este estudo tem como objetivo: *Investigar como um programa formativo favorece a construção dos conhecimentos didáticos-matemáticos sobre probabilidade com os professores dos anos finais do Ensino Fundamental.*

Para a realização dessa investigação utilizamos as ferramentas teóricas desenvolvidas pela teoria do Enfoque ontessemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática - EOS (GODINO, 2002; 2012; GODINO, FONT, CONTRERAS E WILHELCMI, 2006) e a teoria do Conhecimento Didático-Matemático do professor de matemática (GODINO, 2009; GODINO E PINO-FAN, 2015) com os construtos do conhecimento comum, avançado e especializado do conteúdo.

Metodologicamente, as etapas realizadas consistiram nas fases apresentadas pela Engenharia Didática baseada no EOS, a saber: estudo preliminar, desenho, implementação e avaliação (GODINO, 2012; 2013).

A primeira etapa da pesquisa comprehende, além do estudo preliminar, um estudo sobre os conhecimentos prévios dos professores de matemática participantes por meio de um diagnóstico.

O estudo preliminar permitiu que comprehendêssemos o objeto epistêmico probabilidade e as noções teóricas elementares associadas, tais como, a noção de aleatoriedade, os diferentes significados probabilísticos e a noção de risco. Discutimos ainda a probabilidade em face de propostas de documentos curriculares oficiais. Esse estudo também incluiu um olhar nosso sobre investigações antecedentes e os seus resultados, realizadas com

estudantes, professores e recursos didáticos. Apresentamos esse estudo organizado em dimensões relacionadas com as facetas desenvolvidas no EOS: dimensão epistêmica-ecológica, dimensão cognitiva-afetiva e uma dimensão instrucional (mediacional e interacional).

Com a aplicação do instrumento diagnóstico inicial e sua análise foi possível identificar os conhecimentos prévios que demonstraram ter os professores sobre a probabilidade e seu ensino. Respondemos com essa análise a nossa primeira questão de pesquisa:

- ✓ *Quais os conhecimentos iniciais que os professores demonstraram sobre probabilidade e seu ensino?*

Esta análise nos apontou que os professores participantes de nossa pesquisa apresentam lacunas nos conhecimentos sobre o conteúdo e seu ensino: comum, avançado e especializado, caracterizados pela teoria do Conhecimento Didático-Matemático do professor de matemática. Concluímos que os professores, ao chegarem para a formação, possuíam um nível elementar e insuficiente do conhecimento sobre a probabilidade não dominando desta forma os conceitos e noções básicas sobre este objeto epistêmico previsto para o ensino ao nível dos anos finais do Ensino Fundamental que ora atuam como professores.

Esta primeira etapa, composta do estudo preliminar e do diagnóstico inicial, nos mobilizou para a construção do desenho do processo formativo com os professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.

Com respeito a esse desenho, o uso das ferramentas teóricas desenvolvidas pelo Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e Instrução Matemática (EOS) nos possibilitou perceber elementos importantes para a seleção e organização das atividades. O referido desenho consiste em um dos elementos da Engenharia Didática com base no EOS desenvolvida como parte desta investigação de doutorado e foi apresentado por meio de três diferentes configurações didáticas: epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva e instrucional.

Com a configuração epistêmica-ecológica do desenho, discutimos sobre os conceitos envolvidos, indicamos as atividades selecionadas e os respectivos tipos de conhecimento matemático (comum ou avançado) e especializado sobre probabilidade. Já na configuração instrucional discutimos sobre os principais recursos e interações considerados no desenho. E por fim, com a configuração cognitivo-afetiva discutimos sobre as dificuldades de docentes concernentes ao conhecimento probabilístico e características sobre afetividade, motivação e identificação com a proposta formativa relacionada ao grupo em que o desenho foi implementado.

Considerando a importância que em desenhos destinados à formação continuada de professores de matemática se deve por em prática um processo que esteja articulado formação matemática com formação didática, a nossa proposta formativa traz esta contribuição para futuros desenhos formativos.

Acreditamos que por meio de um desenho que leve em conta o desenvolvimento dos conhecimentos didáticos-matemáticos sobre probabilidade é possível contribuir, melhorar e ampliar a base de conhecimentos de professores em formação inicial e continuada.

Apresentamos a etapa da implementação por meio das trajetórias didáticas baseadas nas quatro unidades de estudo. Nessa etapa analisamos e descrevemos os conhecimentos revelados pelos professores, respondendo, desta forma, a seguinte questão de pesquisa:

- ✓ *Quais são os conhecimentos desenvolvidos e ampliados por professores de matemática participantes de um programa de formação, sobre probabilidade, destinado aos anos finais do Ensino Fundamental?*

Os conhecimentos desenvolvidos e ampliados pelos professores, com respeito à probabilidade consistem desde o entendimento sobre aleatoriedade e os termos que estão na base para a construção conceitual desse objeto até a quantificação de probabilidades. Destacamos alguns que, para nós, foram os mais relevantes, tais como, compreender as diferenças entre situações determinísticas e aleatórias, discernir as diferentes características dos eventos

aleatórios (impossível, improvável, provável, mais provável ou menos provável, possível), entender sobre os significados de probabilidade (clássico, frequentista, subjetivo e formal) e compreender as diferentes possibilidades de representação do espaço amostral.

Destacamos a noção de risco por meio do estudo da associação entre variáveis em tabelas de dupla entrada como um novo conhecimento para os professores; principalmente com respeito à abordagem com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Abordagem que deve considerar a compreensão dos significados relacionais dos valores apresentados em uma tabela de dupla entrada.

De uma forma geral, conforme planejado no desenho, os professores desenvolveram os conhecimentos que tínhamos previsto para o processo formativo. Ademais, as atividades e as reflexões que delas decorreram, impôs uma reconstrução e a reelaboração pelos professores de noções sobre probabilidade, incluindo o próprio significado de probabilidade.

Intrinsecamente foi propiciada aos professores uma ampliação também no que diz respeito às concepções que as pessoas têm sobre a matemática como ciência, desconstruindo a ideia de uma matemática como uma ciência unicamente determinística. Compreender que a matemática trabalha também com situações de caráter não-determinístico foi uma grande contribuição para os conhecimentos desse grupo de professores.

Retomamos as duas últimas questões de pesquisa:

- ✓ *Quais são os conhecimentos didáticos-matemáticos necessários ao ensino de probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental?*
- ✓ *Como este programa de formação favorece a construção dos conhecimentos didáticos-matemáticos com professores dos anos finais do Ensino Fundamental?*

Concernente a essas questões de pesquisa, os conhecimentos didáticos-matemáticos necessários se revelaram por meio das diferentes configurações didáticas e, nas quais destacamos que os professores

compreenderam que para o ensino de probabilidade, deve se ter um arcabouço de atividades (tarefas, jogos, materiais manipuláveis, etc.) que possibilite um processo de ensino e aprendizagem adequado com a probabilidade.

Diante das argumentações expostas por meio dos critérios de idoneidade didática (GODINO, 2012; 2013), apresentados no capítulo 6, consideramos que as referidas questões foram respondidas, uma vez que, analisamos e compreendemos as possíveis contribuições do programa de formação para construção dos conhecimentos sobre probabilidade e sobre o ensino de probabilidade com os professores de Matemática que participaram do presente estudo. Consideramos a idoneidade didática geral deste processo de formação como alta.

Por fim, o nosso papel ao longo deste experimento foi um duplo papel: ora como pesquisador, ora como professor de professores. Todavia, essa característica foi positiva, pois durante todos os momentos, os professores e nós, pesquisadores, estávamos à vontade, sem cerimônias, aprendendo uns com os outros, constituindo-nos como um grupo de estudos que igualmente avança junto. Nesse sentido, retomamos que esta foi uma pesquisa não só sobre professores, mas, sobretudo, com professores de matemática.

Tal como nas considerações de Zeichner (1992), o grupo de professores desta pesquisa, constitui-se como um grupo de estudo no qual os professores puderam apoiar o crescimento uns dos outros. Quando um professor amplia o seu conhecimento e socializa com o grupo, todos crescem coletivamente; isso é diferente de quando o professor fica isolado e passa a enxergar os seus problemas sem relação com os problemas dos outros professores. Acreditamos que este estudo acentuou a prática reflexiva com respeito aos conhecimentos didáticos-matemáticos relativos à probabilidade.

Aventamos questões que, embora não tenham sido foco do nosso estudo, por sua importância, fazem jus a novos objetos de estudo e investigação, tais como, a análise de prática didática de professores por meio das configurações que descrevemos em nosso estudo e utilizando-se do mesmo marco teórico, investigações sobre os conhecimentos de estudantes

com os diferentes recursos instrucionais para o ensino de probabilidade e ainda, investigações com a implementação em cursos de matemática com professores em formação inicial.

## REFERÊNCIAS

---

- ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. Editora Martins Fontes. São Paulo. 1998.
- ABE, T. S. **O ensino de probabilidades por meio das visões clássica e frequentista**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. 2011
- ALTENFELDER, A. H. Desafios e tendências em formação continuada. **Construção psicopedagógica**, 13 (10). 2005. Retrieved from [http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1415-69542005000100004&lng=pt&tlang=pt](http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1415-69542005000100004&lng=pt&tlang=pt).
- AMÂNCIO, J. R. **Planejamento e aplicação de uma sequência didática para o ensino de probabilidade no âmbito do PIBID**. 2012. 225 f. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.
- AMIR, G. S.; WILLIAMS, J. S. The influence of children's culture on their probabilistic thinking. In J. P. Ponte e J. F. Matos (Eds.), **Proceedings of the 18th Conference for the Psychology of Mathematics Education 2** (pp.24-31). Lisbon: Universidad de Lisboa. 1994.
- ARTIGUE, M. Ingenierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 9 (3), 281–308. 1989.
- ARTIGUE, M. L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. En C. Margolinhas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), **En amont et en aval des ingénieries didactiques** (pp. 225-237). Grenoble: La penséesauvage. 2011.
- ASSIS, A., GODINO, J.D., FRADE, C. As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório investigativas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, vol. 15, núm. 2, pp.171-198. 2012.
- AUSTRÁLIA. ACARA: **Autoridade de Relatório e de Avaliação do Currículo Australiano**. Versão do currículo 5.1, 2013.
- AZCÁRATE, P.; CARDEÑOSO, J.; PORLÁN, R. Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 1 n.16, p. 85 – 97, 1998.
- BALL, D. L., HILL, H. C., BASS, H. Knowing Mathematics for Teaching. Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide? **American Educator**, fall 2005.
- BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: what makes it special? In: **Journal of teacher education**. n.5, p. 389-407. 2008. Disponível em: <http://jte.sagepub.com/content/59/5/389>.

- BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.** Vol. 8. Nº3. México. pp.247-263. 2005.
- BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M.; DÍAZ, C. Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. **Revista Digital Matemática, Educación e Internet.** Vol. 12, No 2. 2012.
- BATANERO, C.; DÍAZ, C. Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. In: **Actas de las Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas**, Vol. 13, Granada, 2007.
- BATANERO, C.; DÍAZ, C. Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. **Actas de las XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.** Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas. España: Granada, 2007.
- BATANERO, C.; GODINO, J. D.; ESTEPA, A. Construcción del significado de la asociación estadística mediante actividades de análisis de datos. En, A. Olivier y K. Newstead (eds.), **Proceedings of the 22 nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Research Forum)**, Vol 1: 221-236. University of Stellenbosch, South Africa. 1998.
- BATANERO, C.; GREEN, D.R.; SERRANO, L. Randomness, its meanings and educational implications. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 29(1), 113-123. 1998.
- BATANERO, C.; HENRY, M.; PARZYSZ, B. The nature of chance and probability. In: JONES, G.A. (Ed.). **Exploring probability in school: challenges for teaching and learning.** New York: Springer, 2005, p.16-42
- BATANERO, C; CONTRERAS, J. M; DÍAZ, C; CAÑADAS, G. Definición de la probabilidad y probabilidad condicional: Un estudio con futuros profesores. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT.** Florianópolis (SC), v. 08, n. 1, p. 75-91, 2013. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p75>>. Acesso em: 28 mar. 2015.
- BATANERO, C; DÍAZ, C. **Estadística com proyectos.** Editora Facultad de Ciencias de La Educación, Universidad de Granada. 2011.
- BATANERO, C; DÍAZ, C. Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. **Chilean Journal of Statistics.** Vol. 3, No. 1, April 2012.
- BOROVICKA, M.; PEARD, R. **Probability.** En A. Bishop at al. (Eds): Un estudio exploratorio de las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes del profesorado de Biología. International handbook of mathematics education (239-288).Netherlands, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1996.

BRANT, R. Odds and Odds Ratio. **Home Page do autor**, 2004. Disponível em <<http://www.stat.ubc.ca/~rollin/teach/643w04/lec/node50.html>>. Acesso em 16 out. 2015.

**BRASIL. Base Nacional Comum Curricular Proposta Preliminar.** Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2016. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf>>. Acesso em: 20 maio 2016.

**BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática.** Brasília: MEC, 1998.

BREDA, A.; FONT, V.; LIMA, V. M. R. A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. **JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática IJSME – International Journal for Studies in Mathematics Education**, 8(2), 2014.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques**, [Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield], Grenoble: La Pensée Sauvage - Éditions, coll. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1998.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's Understanding of Probability: a literature review**. 2012. Disponível em: <[www.nuffieldfoundation.org](http://www.nuffieldfoundation.org)>. Acesso em: 10 jan. 2016.

CABRAL JÚNIOR, R. de S. **Abordagem das noções iniciais de probabilidade em uma perspectiva construtivista**. 103 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

CAMPOS, T. M. M.; PIETROPAOLO, R. C. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais**. In: Rute Borba; Carlos Monteiro (Organizadores). Processos de ensino e aprendizagem em educação matemática, 1. Recife: Editora Universitaria da UFPE, p. 55-61, 2013.

CAÑADAS, G. R.; CONTRERAS, J. M.; ARTEAGA, P.; GEA, M. M. Problemática y recursos en la interpretación de las tablas de contingencia. **Union – Revista Iberoamericana de Educación Matemáticas**. V.34. p.85-96, 2013.

CAÑADAS, G.; BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M.; ARTEAGA, P. Estrategias en el estudio de la asociación en tablas de contingencia por estudiantes de psicología. **Educacion Matemática**, 23(2), 5-32, 2011.

CARRANZA, P., KUZNIAK, A. Approche bayésienne. **Analyze Statistique Implicative**, p. 341-352, 2009.

CARRILLO, J., CLIMENT, N., CONTRERAS, L.C. Y MUÑOZ-CATALÁN, M.C. Defining specialized knowledge for mathematics teaching. **Actas del CERME8**. Antalya, Turquia. 2013.

CARVALHO, D. L.; OLIVEIRA, P. Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na licenciatura em matemática: clássica, frequentista, subjetiva e formal. In: 25a. Reunião Anual da Anped, 2002, Caxambu. **Anais da 25ª reunião anual da Anped**. Caxambu: ANPEd, 2002. p. 1.12. Disponível em: <<http://www.anped.org.br/reunioes/25/excedentes25/dionelucchesicarvalhot19.pdf>>. Acesso em: 20 jan. 2015.

CHAPMAN, L. J.; CHAPMAN, J. P. Illusory correlation as an obstacle to the use of valid Psycho diagnostic signs. **Journal of Abnormal Psychology**. 72, 271-280, 1969.

CHAUÍ, M. **Convite à Filosofia**. Ed. Ática, São Paulo, 2000.

CHIESI, F.; PRIMI, C.; MORSANYI, K. Developmental changes in probabilistic reasoning: The role of cognitive capacity, instructions, thinking styles, and relevant knowledge. **Thinking & Reasoning**, 17:3, 315-350. 2011.

COBB, P.; GRAVEMEIJER, K. Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R.A. Lesh, E J. Y. Baek (Eds.), **Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching** (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 2008.

CONTRERAS, J. M. **Avaliação de conhecimentos e recursos didáticos na formação de professores sobre Probabilidade Condicional**. Tese de doutorado – Departamento de Didáctica de la matemática – Universidade de Granada. 2011. Retrieved from <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/arteaga.pdf>.

CONTRERAS, J. M.; BATANERO, C.; ARTEAGA, P.; CAÑADAS, G. La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. **Epsilon**, 28(2), 7-20, 2012.

CONTRERAS, J. M; BATANERO, C; DÍAZ, C.; FERNANDES, J. **Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task**. CERME 7. Rzeszow, Polonia, 2011.

CORDANI, L. K.; WECHSLER, S. Teaching independence and exchangeability. In A. Rossman e B. Chance (Eds.), **Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics**. International Association for Statistics Education, Salvador (Brazil). [CDROM]. 2006.

CORBO, O. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica**. 289 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, Curso de Pós-Graduação em Educação. São Paulo, 2012.

COUTINHO, C. Q. S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V2.3, p.50-67, UFSC: 2007.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista – estudo epistemológico e didático.** 1994. 151 f.

Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

COUTINHO, C. Q. S. **Introduction aux situations aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II.** 2001. 338 f. Tese de Doutorado em Didática da Matemática. Université Joseph Fourier, Grenoble I, França, 2001.

COUTINHO, C. Q. S. Probabilidade Geométrica: Um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri. In: **Anais da 25ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação - ANPED**, Caxambu, Minas Gerais. 2002. Disponível em <http://www.anped.org.br/app/webroot/files/probabilidade.pdf>

DBRC. The Design Based Research Collective. Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. **Educational Researcher**, 32(1), 5-8. 2003.

DeBELLIS, V. A.; GOLDIN, G. A. Affect and Meta-Affect in Mathematical Problem Solving: a Representational Perspective. **Educational Studies in Mathematics**, 63(2), 131-147. 2006. Doi: [10.1007/s10649-006-9026-4](https://doi.org/10.1007/s10649-006-9026-4)

DIAZ-LEVICOY, D., ROA, R. Análisis de actividades sobre probabilidad en libros de texto para un curso de básica chilena. **Revista Chilena de Educación Científica**. v.13, n.1, p. 9-19, 2014.

DOLLARD, C. Preservice elementary teachers and the fundamentals of probability. **Statistics Education Research Journal**, 10(2), 27–47, 2011.

ESPANHA. Ministério da Educação. **Real Decreto 1513/2006**, de 7 de Diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de La educación primaria. 2006. Disponível em: [www.mec.es/files/rd-primaria-y-anexos.pdf](http://www.mec.es/files/rd-primaria-y-anexos.pdf)  
Acesso em: 25 jan. 2015.

Estrada, A., & Díaz, C. Computing probabilities from two way tables: an exploratory study with future teachers. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), **Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics**. Salvador (Bahia, Brazil): International Association for Statistical Education. 2006.

FALK, R. Conditional Probabilities: Insights and Difficulties, en R. Davidson y J. Swift (eds.), **Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics**, Victoria, Canada, International Statistical Institute, pp. 292-297. 1986.

FELISBERTO DE CARVALHO, J. I. ; ROCHA, C. A. **Probabilidade nos primeiros anos escolares.** In : Brasil. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: Educação Estatística / Ministério da Educação, Secretaria de

Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014.

FELISBERTO DE CARVALHO, J. I.; MACEDO, R. C. Conhecimentos Necessários para o Ensino de Probabilidade: Discussão de uma Sequência Didática Desenvolvida com Estudantes de Matemática. **Anais do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Pirenópolis – Goiás. 2015.

FERNANDES, J. A. da S. **Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidade no 9º ano de escolaridade**. Tese de Doutorado. Universidade do Minho. 1999.

FERNANDES, J. A; MUGABE, D. A; CORREIA, P. F. Associação Estatística em Tabelas de Contingência de 2x2. **Acta Scientiae**, v.14, n.3, p.374-390, 2012

FERREIRA, R. S. **Ensino de probabilidade com o uso do programa estatístico R numa perspectiva construcionista**. São Paulo: 155f; Dissertação (Mestrado Acadêmico) – Universidade Bandeirante de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. 2011.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics**. Dordrecht: D.Reidel, Publishing Company, 1987.

Fischbein, E. **The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity**. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strasser, & B. Winkelmann, (Eds.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, (pp. 231-245). Netherlands, Dordrecht: Kluwer. 1993.

FISCHBEIN, E. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1975.

FISCHBEIN, E.; GROOSMAN, A. Schemata and Intuition in combinatorial reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, Springer Netherlands, v. 34, n.1, pp. 27-47, 1997.

GAL, I. **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. 39-63p. 2005.

GARFIELD, J. B. Collaboration in Statistics Education Research: Stories, Reflections, and Lessons Learned, in **Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics**, eds. A. Rossman and B. Chance, Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute, pp. 1-11. 2006. [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/PL2\\_GARF.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/PL2_GARF.pdf)

GATTI, B. (2003). Formação continuada de professores: a questão psicosocial. **Cadernos de Pesquisa**, nº119. São Paulo.

GIGERENZER, G. **Calculated risks: How to know when numbers deceive you**. New York: Simon & Schuster, 2002.

GIGERENZER, G., & HOFFRAGE, U. Helping people overcome difficulties in Bayesian reasoning: a reply to Lewis and Keren and Mellers and McGraw. **Psychological Review**, 106, 425–430. 1999.

GIGERENZER, G., & HOFFRAGE, U. How to improve Bayesian reasoning without instruction: frequency formats. **Psychological Review**, 102, 684–704.1995.

GIMÉNEZ, J.; FONT, V.; VANEGAS, Y. Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. In: Margolinhas, C. (Ed.), Task Design in Mathematics Education. **Proceedings of ICMI Study 22**: Oxford, 2013.

GIMÉNEZ, J.; VANEGAS, Y.; FONT, V.; FERRERES, S. El papel del trabajo final de Máster en la formación del profesorado de Matemáticas. **UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas**, 61, 76-86, 2012.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, 20, 13-31, 2009.

GODINO, J. D. et al. Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 46-74, jul. 2013. ISSN 1981-1322. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/30102>>. Acesso em: 27 nov. 2016.

GODINO, J. D. Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Conferencia presentada en la XIII CIAEM-ICME**, Recife, Brasil. 2011.

GODINO, J. D. Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XVI** (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM. 2012.

GODINO, J. D. **Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas**. Universidad de Granada. 2014. Disponible en, [http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis\\_EOS\\_24agosto14.pdf](http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf)

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol. 22, nº 2.3, pp.237-284, 2002.

GODINO J. D.; CONTRERAS, A.; FONT V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactiques des Mathematiques**, 26 (1), 39-88. 2006.

GODINO, J. D., BATANERO, C. CAÑADAS, G. Y CONTRERAS, J.M. Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y

- aprendizaje de las matemáticas. En: B. D'Amore y M.I. Fandiño (Eds.). **Didáctica de la Matemática: Una mirada internacional, empírica y teórica.** (pp. 249-289). Universidad de la Sabana, Colombia. 2015.
- GODINO, J. D., BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos Matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol. 14, nº 3, pp. 325-355, 1994.
- GODINO, J. D., BATANERO, C., CONTRERAS, A., ESTEPA, A., LACASTA, E. & WILHELM, M. R. Didactic engineering as design-based research in mathematics education. **Proceedings of the CERME 8**, Turquía. 2013.
- GODINO, J. D., BATANERO, C., RIVAS, H. & ARTEAGA, P. Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v. 08, n.1, p. 46-74, 2013.
- GODINO, J. D., BENCOMO, D., FONT, V. e WILHELM, M. R. **Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática**. Documento no publicado del Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 2007. Disponible en: [http://www.ugr.es/local/jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm)
- GODINO, J. D., BENCOMO, D., FONT, V. e WILHELM, M. R. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. **Paradigma**, XXVII, (2): 221-252, 2006.
- GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FLORES, P. El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas. En: A. Olivier y K. Newstead (Eds), **Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. University of Stellenbosch, South Africa. 1998.
- GODINO, J. D.; BATANERO, C.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P. Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 46-74, jul. 2013. ISSN 1981-1322. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/30102>>. Acesso em: 28 mar. 2015. doi: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46>.
- GODINO, J. D.; BATANERO, M. C.; CAÑIZARES, M. J. **Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuesta curriculares**. Madrid, España: Editorial Síntesis, 1996.
- GODINO, J. D.; BENCOMO, D.; FONT, V.; WILHELM, M. R. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. **Paradigma**, XXVII, (2): 221-252, 2006.
- GODINO, J. D.; FONT, V.; CONTRERAS, A.; WILHELM, M. R. Uma visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e

instrucción matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v 9 (1), pp. 117-150. 2006.

GODINO, J. D.; PINO-FAN. L. R. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, Vol. XXXVI, Nº 1, 87-109, 2015.

GODINO, J. D.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P.; LASA, A.; WILHELM, M. R. Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 34 (2/3), 167-200. 2014.

GODINO, J. D.; RIVAS, M.; CASTRO, W. F.; KONIC, P. Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. v. 07, n. 2, p. 1-21, 2012. Doi: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p1>

GROSSMAN, P. L. **The making of a teacher: teacher knowledge and teacher education**. New York: Teachers College Press, 1990.

GUIA DE LIVROS DIDÁTICOS. **PNLD 2014 : matemática**. – Brasília : Ministério da Educação, secretaria de Educação Básica, 2013.

GUIMARÃES, R.C.; CABRAL, J.A.S. **Estatística**. Lisboa: Mac-Graw Hill, 1997.

HILL, H. C., BALL, D. L., SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge os students. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol.39, n.4, 372-400. 2008.

IMBERNÓN. F. **Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza**. 7<sup>a</sup> Ed. São Paulo: Cortez. 2009.

IVES, SARAH ELIZABETH. **Learning to Teach Probability: Relationships among Preservice Teachers' Beliefs and Orientations, Content Knowledge, and Pedagogical Content Knowledge of Probability**. Faculty of North Carolina State University - 2009.

JUNQUEIRA, A. L. N. **Probabilidade na educação básica: uma abordagem do design experiment na formação continuada de professores São Paulo**. Tese de doutorado - Universidade Bandeirante Anhanguera, 412 f., São Paulo, 2013.

KATAOKA, V. Y.; SOUZA, A. A.; OLIVEIRA, A. DE C. S.; FERNANDES, F.; PARANAÍBA, P.; OLIVEIRA, M. S. Probability Teaching in Brazilian Basic Education: Evaluation and Intervention. **Anais do ICME 11**, TSG 13, Monterrey, Mexico, 2008.

KONOLD, C. Informal Conceptions of Probability. **Cognition and Instruction**, 6(1), 59-98. 1989. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/3233463>

LECOUTRE, M. Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. **Educational Studies in Mathematics**, Springer Netherlands, v. 23, n. 6, p. 557-568, 1992.

LOPES, C. A. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil.** 290 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. 2003.

LOPES, C. E. A implementação curricular da Estatística e da probabilidade na educação básica. **Anais do IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.** Distrito Federal: SBEM, 2009. v. 1. p. 1-18.

MÁÑEZ, R. E. Concepciones sobre la Aleatoriedad de estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 2015.

MAROCCI, L. M. **O movimento das significações probabilísticas proporcionado pela resolução de problemas e pela prática colaborativa numa turma de 1º ano do ensino médio.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós- Graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco. Itatiba, 233 p. 2011.

MLODINOW, LEONARD. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

Mohr, M.J. **Mathematics knowledge for teaching: The case of preservice teachers.** In G. Kulm, (Ed.), Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics. (pp.19-43). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. 2008.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics.** Reston, Virginia. 2000. Disponível em: <http://standards.nctm.org>. Acesso em: 10 dez. 2015.

NICKERSON, R. S. Confirmation bias: a ubiquitous phenomenon in many guises, **Review of General Psychology**, 2, 175-220, 1998.

NOVAES, D. V.; COUTINHO, C. Q. S. **Estatística para educação profissional.** São Paulo: Atlas, 2009.

NUNES, T.; BRYANT, P.; EVANS, D.; GOTTARDIS, L.; TERLEKTSI, M. **Teaching primary school children about probability. Teacher handbook.** Departamento de Educação, Universidade de Oxford. [CD-ROM]. 2012.

OECD. **Matriz de avaliação de matemática do Pisa.** Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico. 2012.

ORTIZ, C. A. V. **Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo.** Programa de Doctorado en Educación, Universidad de Girona, 533f. 2014.

ORTIZ, J. J. **La Probabilidad en los Libros de Texto.** 264 p. Tese de doctorado. Universidad de Granada, Granada. 2002.

ORTIZ, J.; BATANERO, C.; CONTRERAS, C. Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. **Relime - Revista Latino Americana de Matemática Educativa**, México, v. 15, n. 1, p. 63-91. 2012.

PAPAIERONYMOU, I. **Essential Knowledge of Probability for Prospective Secondary Mathematics Teachers.** Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France © INRP 2010 <[www.inrp.fr/editions/cerme6](http://www.inrp.fr/editions/cerme6)>

PÉREZ ECHEVERRIA, M. P. **Psicología del razonamiento probabilístico.** Madrid: Universidad Autónoma. 1990.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco.** Secretaria de Educação de Pernambuco. 2013.

PHILIPP, R. A. **Mathematics teachers' beliefs and affect.** In: LESTER, F. K. (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 257–315). Charlotte, NC: Information Age. 2007.

PIAGET, J; INHELDER, B. **A origem da ideia do acaso na criança.** Rio de Janeiro: Record, 1951.

PIETROPAOLO, R. C.; CAMPOS, T. M. M.; FELISBERTO DE CARVALHO, J. I.; TEIXEIRA, P. Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais. **Anais do IV Seminário do Observatório da Educação da CAPES.** Brasil, 2013.

PIETROPAOLO, R. C.; SILVA, A. F. G.; CAMPOS, T. M. M.; FELISBERTO DE CARVALHO, J. I. Conhecimentos de professores para ensinar probabilidade nos anos finais do ensino fundamental. **JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática IJSME – International Journal for Studies in Mathematics Education**, p.126, 8(3), 2014.

PIETROPAOLO, R. C; CAMPOS, T. M. M; SILVA, A. F. G. Formação continuada de professores de matemática da Educação Básica em um contexto de implementação de inovações curriculares. **Revista Brasileira de Pós-Graduação RBPG**, supl. 2, v. 8, p. 377 – 399, 2012.

ROCHA, C. A.; LIMA, A. P. B.; BORBA, R. E. S. Conhecimentos de Professores para Ensinar Combinatória: contribuições de pesquisas. **Anais do VI SIPEM**, Pirenópolis, Goiás, Brasil, 2015.

RODRIGUES, M.R.; MARTINS. E.G. A abordagem do tema probabilidade nos livros aprovados pelo PNLD para o triênio 2015 – 21017 e suas implicações no processo de ensino e aprendizagem. **Anais do XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática**, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, São Paulo. 2016.

ROSA, H.A.D ; PINHO, M. O. ; FERNANDES, J.L. . EPISTEMOLOGIA, DIDATICA E ENSINO DE PROBABILIDADE. **Anais do XXXIV Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**, Passo Fundo, 2006. v. 1. p. 1-17.

ROSS, J.A.; COUSINS, J.B. Enhancing secondary school students' acquisition of correlational reasoning skills, **Research in Science and Technological Education**, 11(2), 191–205, 1993.

ROWLAND, T. The Knowledge Quartet: the genesis and application of a framework for analyzing mathematics teaching and deepening teachers'

mathematics knowledge. **SISYPHUS Journal of Education**, 1(3), pp. 15-43. 2014. [downloadable from <http://revistas.rcaap.pt/sisyphus/issue/view/293>]

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 8(3), pp. 255-281, 2005.

SALMERÓN, E. H. **El lenguaje del azar en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria**. Dissertação de Mestrado, 86 f. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 2015.

SÁNCHEZ, E. Investigaciones didácticas sobre el concepto de eventos independientes en probabilidad. **Recherches em Didactique dès Mathématiques**, 2(3), 305-330. 2000.

SANTANA, M. R. M. de. **O acaso, o provável, o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental**. Dissertação de mestrado, 94 p. Recife: UFPE, 2011.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática**. São Paulo: SEE, 2010.

SCHOENFELD, A. H.; KILPATRICK, J. Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. In: D. Tirosh & T. Wood (eds.), **Tools and Processes in Mathematics Teacher Education** (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers. 2008.

SERRADÓ, A.; CARDEÑOSO, J. M.; AZCÁRATE, P. **Las concepciones deterministas, un obstáculo para el desarrollo profesional del docente en el campo probabilística**. In: CONGRESO IBERO-AMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 5., 2005.

SHULMAN, L. S. Knowledge and Teaching: foundations of the New Reform. **Harvard Educational Review**, vol.57, n.1. 1987.

SHULMAN, L.S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Education Researcher**, v.15, n.2, p.4-14, 1986.

SILVA, C. B.; CAZORLA, I.M.; KATAOKA, V. Y. **TRAJETÓRIA E PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA NO BRASIL, 2010-2014: UM OLHAR A PARTIR DO GT-12**. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 17, p. 578-596, 2015.

SILVA, C. D. B. da. **Significados de probabilidade: uma análise em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 70 f. 2015.

SKOVSMOSE, O. **Educação Crítica - Incerteza, Matemática, Responsabilidade**. São Paulo: Cortez. 2007.

SOUZA, C. A. **A distribuição binomial no Ensino Superior.** Dissertação de Mestrado. 153 f. Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP. São Paulo: 2002.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, vol. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.

THEIS, L.; SAVARD, A. Linking probability to real-world situations: how do teachers make use of the mathematical potential of simulations programs? In: C. Reading (Ed.), Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. **Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics** (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.  
[www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php) [© 2010 ISI/IASE]

TUNALA, N. Determinação de probabilidades por métodos geométricos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 20, p. 16.22, 1995.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Extensional versus intuitive reasoning: the conjunction fallacy in probability judgment. **Psychological Review**. Volume 90. Nº4. 1983.

VIALI, L.; OLIVEIRA, P.I.F. Uma análise de conteúdos de probabilidade em livros didáticos do Ensino Médio. **Anais do IV SIPEM**, Taguatinga, DF, Brasil, 2009.

WAGNER, E. Probabilidade geométrica - o problema do macarrão e um paradoxo famoso. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 34, p. 28.35, 1997.

WAGNER, M. B.; CALLEGARI-JACQUES, S. M. Medidas de associação em estudos epidemiológicos: risco relativo e odds ratio. **Jornal de Pediatria**, 74 (3): 247-251, 1998;

ZAN, R.; BROWN, L.; EVANS, J.; HANNULA, M. S. Affect in mathematics education: an introduction. **Educational studies in mathematics**. 63 (2). pp. 113-121. 2006. Doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-9028-2>

ZASLAVSKY, C. **Jogos e atividades matemáticas do mundo inteiro**. São Paulo: Artmed, 2009.

ZAZKIS, R.; LEIKIN, R. Exemplifying definitions: A case of a square. **Educational Studies in Mathematics**. 69(2): 131–148. 2008.

ZEICHNER, K. M. Novos caminhos para o practicum: uma perspectiva para os anos 90. In: NÓVOA, A. (org.) **Os Professores e sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, p.115-138. 1992.

ZEICHNER, K. M. Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico In: GERALDI, C. M.; FIORENTINI, D. E PEREIRA, E. M. (orgs.) **Cartografia do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a)**. Campinas, Mercado de Letras, 1998. pp. 207-236.

## ANEXO – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

---

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

**Título da Pesquisa:** APRENDER E ENSINAR PROBABILIDADE NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM OLHAR PARA O CONHECIMENTO DO PROFESSOR.

**Nome do Coordenador da Formação:** Profº Drº RUY CESAR PIETROPAOLo

**Nome do Orientador da Pesquisa:** Profº Drª TÂNIA MARIA MENDONÇA CAMPOS

**Pesquisador:** Profº Ms. JOSÉ IVANILDO FELISBERTO DE CARVALHO

O senhor(a) está sendo convidado(a) a participar do Projeto de Pesquisa do PROGRAMA OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO, CNPq/ INEP/SECAD, nº 19378 edital 49/2012 por ser professor de Matemática da Educação Básica. As informações a seguir são fornecidas para sua participação no projeto de formação e pesquisas que tem por objetivo: desenvolver e analisar o processo de construção de um núcleo investigativo com e sobre o trabalho docente do professor de Matemática, com vistas à reconstrução da prática pedagógica e, consequentemente, a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos estruturantes do Ensino Médio. Consideramos sua contribuição fundamental para a produção de conhecimento da área de Educação Matemática.

Eu, Profº. Dr. Ruy Cesar Pietropaolo, coordenador desse Projeto de Pesquisa e Formação vinculado ao Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante Anhanguera, Campus Maria Cândida, sou responsável pela equipe de pesquisa que nele atua. Em qualquer momento do estudo, o Sr.(a) terá acesso para esclarecimento de eventuais dúvidas. Os contatos poderão ser feitos por telefone (11) 2967-9119 ou via e-mail [rpietropaolo@gmail.com](mailto:rpietropaolo@gmail.com).

O material coletado durante o projeto, as atividades realizadas, as gravações de áudio e vídeo, as transcrições, os registros escritos, são estritamente confidenciais. Somente os pesquisadores terão conhecimento dos dados. Os participantes terão seus nomes trocados por pseudônimos preservando o sigilo sobre sua identidade.

Os resultados dessa pesquisa poderão ser utilizados para publicações em periódicos, livros, eventos científicos, cursos e outras divulgações acadêmico-científicas. A veiculação de imagem de sujeitos em divulgações científicas só será realizada com o consentimento dos envolvidos.

A qualquer participante é garantida a liberdade de se recusar a participar e ainda se recusar a continuar participando em qualquer fase da pesquisa, sem qualquer prejuízo. A participação no Projeto de pesquisa não traz complicações legais aos participantes. Ressaltamos que, de acordo com a Resolução 466/2012 do Conselho Nacional de Saúde, toda pesquisa envolvendo seres humanos apresenta riscos, entretanto neste Projeto os riscos são mínimos, por exemplo, pode haver desconforto ao responder questões ou algum constrangimento pessoal ao participar das discussões sobre os aspectos didáticos dos conteúdos matemáticos que estão

sendo tratados. Nenhum dos procedimentos usados oferece riscos à dignidade e os procedimentos adotados obedecem aos Critérios da Ética em Pesquisa com Seres Humanos conforme a Resolução nº. 466/2012. Não há despesas pessoais para o participante em qualquer fase do estudo, assim como não há compensação financeira relacionada à sua participação.

A participação nesta pesquisa e nas reuniões quinzenais do projeto, assim como as aplicações de atividades em sala de aula não trará nenhum benefício, entretanto, esperamos que, como retorno os participantes tenham a oportunidade de participar em uma formação que pode contribuir para seu desenvolvimento profissional e para as práticas pedagógicas. Não haverá despesas pessoais para o participante em qualquer fase do estudo, assim como não haverá compensação financeira relacionada à sua participação.

Caso necessite entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa:

End: Rua Maria Cândida, 1813, Bloco G - 6º andar Vila Guilherme - São Paulo - SP  
CEP: 02071-013. Fone: (11) 2967-9015 e-mail: comissao.cep@ig.com.br

Após estes esclarecimentos, solicitamos o seu consentimento de forma livre para participar desta pesquisa. Portanto preencha, por favor, os itens que se seguem.

Confiro que recebi cópia deste termo de consentimento, e autorizo a execução do trabalho de pesquisa e a divulgação dos dados obtidos neste estudo.

Obs: Não assine esse termo se ainda tiver dúvida a respeito.

Tendo em vista os itens acima apresentados, eu, de forma livre e esclarecida, manifesto meu consentimento em participar da pesquisa.

---

Nome e Assinatura do Participante da Pesquisa

---

José Ivanildo Felisberto de Carvalho

---

Tânia Maria Mendonça Campos

---

Ruy Cesar Pietropaolo

Pesquisador: José Ivanildo Felisberto de Carvalho, TELEFONE PARA CONTATO: (11) 95711-2479  
e-mail:ivanfcar@hotmail.com

Orientador:Tânia Maria Mendonça Campos, TELEFONE PARA CONTATO: (11) 993128977  
e-mail:taniammcamps@hotmail.com

Coordenador da Formação: Ruy Cesar Pietropaolo, TELEFONE PARA CONTATO (11) 999028001  
Email:rpietropaolo@gmail.com

**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

Entendo que fui convidado(a) a participar como voluntário(a) dessa pesquisa e acredito ter sido suficientemente informado(a) segundo o que li e o que me foi explicado a respeito da mesma. Ficaram claros para mim quais os propósitos do estudo, as garantias de confidencialidade, o uso de imagens e de comunicações orais e escritas feitas por mim, exclusivamente para as pesquisas vinculadas a Projeto nº 19378 do Programa Observatório da Educação da Universidade Anhanguera de São Paulo. Entendo que minha participação é isenta de despesas ou reembolsos.

Eu, \_\_\_\_\_, concordo voluntariamente em participar deste estudo e poderei retirar o consentimento a qualquer momento, antes ou durante o mesmo, sem penalidades ou perda de qualquer benefício que eu possa ter adquirido com a minha participação nele.

Assinatura do participante: \_\_\_\_\_

RG: \_\_\_\_\_

Declaro que obtive de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido deste colaborador para a participação neste estudo.

Assinatura do pesquisador responsável pelo estudo.

\_\_\_\_\_  
SÃO PAULO, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_\_.  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_