UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO
WANDERLEI APARECIDA GRENCHI

CONTRIBUIÇÕES DE UM PROGRAMA DE ENSINO PARA O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

SÃO PAULO
2016

WANDERLEI APARECIDA GRENCHI
CURSO DE DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CONTRIBUIÇÕES DE UM PROGRAMA DE ENSINO PARA O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Tese apresentada à Banca Examinadora da Universidade Anhanguera de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática, sob orientação da Prof.ª Dr.ª Maria Elisabette Brisola Brito Prado e coorientação do Prof. Dr. Ruy César Pietropaolo.

SÃO PAULO
2016

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese, desde que a fonte seja devidamente citada.

São Paulo, 27 de setembro de 2016.

Wanderlei Aparecida Grenchi

Ficha Catalográfica elaborada por:
Bibliotecária Roselaine R. de Bastos Novato CRB/8 9676

G847c Grenchi, Wanderlei Aparecida

Contribuições de um programa de ensino para o letramento probabilístico na educação básica. / Wanderlei Aparecida Grenchi. – São Paulo, 2016.
216 f.: il.; 30 cm

Tese (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós-graduação - Universidade Anhanguera de São Paulo, 2016.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Elisabette Brisola Brito

1. Educação matemática. 2. Letramento probabilístico. 3. Probabilidade e risco. 4. Formação de professores. I. Título II. Universidade Anhanguera de São Paulo.

CDD 372.7

Aos meus pais Mario e Alaide

Aos meus filhos Gabriel e Raul

À minha neta Alice

AGRADECIMENTOS

Expresso minha mais profunda gratidão às pessoas que sempre estiveram presentes nessa empreitada.

A Professora Dr.ª Bette Prado, orientadora desse trabalho, que, mais que orientar, cedeu-me sua amizade, carinho, dedicação e paciência para guiar meus passos por caminhos certos;

Ao Prof. Dr. Ruy Pietropaolo, coorientador desse trabalho e mentor de capacidade indubitável;

Às Professoras Rute Borba, Cláudia Borim, Angélica Fontoura e Rosana Nogueira de Lima pela participação na Banca Examinadora e pelas inestimáveis contribuições;

Aos professores da linha de pesquisa "Formação de Professores que Ensinam Matemática" da UNIAN: Angélica da Fontoura Garcia Silva, Maria Elisabette Brisola Brito Prado, Nielce Meneguelo Lobo da Costa e Ruy César Pietropaolo, pela dedicação que tornavam nossas aulas muito prazerosas e, sobretudo, pelos conhecimentos compartilhados;

Aos queridos docentes: Janete Bolite Frant, Luiz Gonzaga Xavier de Barros, Lulu Healy, Tânia Mendonça Campos, Vera Helena Giusti de Souza e Verônica Yumi Kataoka por converterem seus profundos conhecimentos em aulas memoráveis;

Aos professores de Matemática e alunos que participaram da nossa pesquisa;

À Capes pela bolsa de estudos que possibilitou-me a oportunidade de realizar o doutoramento;

Ao Observatório da Educação da Universidade Anhanguera de São Paulo (OBEDUC – UNIAN).

Aos amigos do curso de doutoramento, pelos momentos de reflexão coletiva e troca de experiências.

O autor

RESUMO

A presente tese possui como objeto de estudo um programa de ensino concebido originalmente por uma equipe de pesquisadores do Departamento de Educação da Universidade de Oxford visando o ensino e a aprendizagem de probabilidade e risco, principalmente, quanto a quatro demandas cognitivas, a saber: aleatoriedade; espaço amostral; quantificação de probabilidades; e compreensão do risco. O referido programa foi adaptado pelo Observatório da Educação da Universidade Anhanguera de São Paulo (OBEDUC – UNIAN) num projeto intitulado "Investigações sobre o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos concernentes à probabilidade e estatística". O objetivo da pesquisa consistiu em analisar, identificar e compreender as possíveis contribuições do programa de ensino sobre probabilidade e risco para a aprendizagem significativa de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, como também, para a prática letiva dos professores de Matemática que lecionam para estes alunos. Os principais aportes teóricos da pesquisa são: Nunes, Bryant, Piaget, Inhelder, Heitele, Garfield, Ahlgrem, Borovcnik, Batanero, Watson, Ireland, Gal, Gigerenzer, Hoffrage, Evans e Brant. A metodologia utilizada na pesquisa abrangeu duas etapas: Na primeira etapa contamos com a participação de 319 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental oriundos de 5 unidades escolares distintas, para os quais foram preparadas e desenvolvidas atividades didáticas que culminaram num processo de intervenção pedagógica. Como fonte de coleta de dados, esses alunos também realizaram atividades de pré e pós-teste. A segunda etapa envolveu 5 professores de Matemática pertencentes a rede estadual de educação paulista e que lecionavam para os alunos participantes da pesquisa. Valemo-nos de entrevistas semiestruturadas para identificar as percepções dos professores acerca da contribuição do programa de ensino sobre probabilidade e risco para sua prática letiva. Os dados foram analisados qualitativa e quantitativamente. Os principais resultados da pesquisa apontam que o programa de ensino sobre probabilidade e risco ofereceu contribuições significativas para que os alunos compreendessem melhor os conceitos de aleatoriedade, espaço amostral e quantificação de probabilidades. Todavia, quanto à compreensão do risco, os alunos demonstraram possuir conhecimentos prévios ou intuitivos sobre assunto. Quanto aos professores investigados, identificamos que o programa de ensino contribuiu para melhorar suas práticas letivas, sobretudo, por meio da utilização de materiais concretos e de atividades específicas para o ensino probabilístico. Os resultados da pesquisa possibilitaram concluir que, mediante as intervenções e testes realizados com os alunos e as entrevistas com os professores, há evidências de que o programa de ensino sobre probabilidade e risco configura-se como um importante meio didático para o letramento probabilístico na educação básica.

Palavras chave: Educação Matemática. Letramento Probabilístico. Programa de Ensino sobre Probabilidade e Risco. Formação de Professores.

ABSTRACT

This thesis has as object of study a teaching program originally designed by a team of researchers from the Department of Education, University of Oxford aimed at teaching and learning of probability and risk, especially as four cognitive demands, namely: randomness; sample space; quantification of probabilities and; understanding of risk. This program was adapted by the Observatory for Education Anhanguera University of São Paulo (OBEDUC - UNIAN) in a project entitled "Research on the process of teaching and learning concepts concerning the probability and statistics." The objective of the research was to analyze, identify and understand the possible contributions of the teaching program on probability and risk for meaningful learning of students in 9th grade of elementary school, as well as to the teaching practice of mathematics teachers who teach these students. The main theoretical contributions of the research are from: Nunes, Bryant, Piaget, Inhelder, Heitele, Garfield, Ahlgrem, Borovcnik, Batanero, Watson, Ireland, Gal, Gigerenzer, Hoffrage, Evans and Brant. The methodology used in the research involved two stages: first we had the participation of 319 students in the 9th grade of elementary school come from 5 different school units, to which were prepared and developed educational activities culminating in an educational intervention process. As data collection source, these students also made pre and post-test activities. The second stage involved five mathematics teachers belonging to the state network of São Paulo education and who teaching to the students participating in the survey. We have used semi-structured interviews to identify the perceptions of teachers about the contribution of education program on probability and risk to their teaching practice. Data were analyzed qualitatively and quantitatively. The main results of the research show that the teaching program on probability and risk offered significant contributions to the students better understand the concepts of randomness, sample space and quantification of probabilities. However, as the understanding of risk, students were found to have previous or intuitive knowledge about it. As for the teachers investigated, we found that the teaching program contributed to improve their teaching practices, especially through the use of specific materials and specific activities for probabilistic education. The research results allowed us to conclude that, through interventions and tests with students and interviews with teachers, there is evidence that the teaching program on probability and risk is configured as an important educational means for literacy Probabilistic in basic education.

Keywords: Mathematics Education. Probabilistic Literacy. Education Program on Probability and Risk. Teacher Training.

RÉSUMÉ

Cette thèse a pour objet d'étude un programme d'enseignement à l'origine conçu par une équipe de chercheurs du Département de l'éducation, Université d'Oxford vise à l'enseignement et l'apprentissage de la probabilité et de risque, d'autant plus que quatre exigences cognitives, à savoir: aléatoire; l'espace échantillon; quantification des probabilités et; compréhension du risque. Ce programme a été adapté par le Observatoire d'éducation Anhanguera Université de São Paulo (OBEDUC - UNIAN) dans un projet intitulé ”La recherche sur le processus d'enseignement et d'apprentissage des concepts concernant la probabilité et les statistiques.” L'objectif de la recherche était d'analyser, d'identifier et de comprendre les contributions possibles du programme d'enseignement sur la probabilité et le risque pour un apprentissage significatif des étudiants en 9e année de l'école primaire, ainsi que la pratique de l'enseignement des professeurs de mathématiques qui enseignent ces étudiants. Les principales contributions théoriques de la recherche sont: Nunes, Bryant, Piaget, Inhelder, Heitele, Garfield, Ahlgrem, Borovcnik, Batanero, Watson, Ireland, Gal, Gigerenzer, Hoffrage, Evans et Brant. La méthodologie utilisée dans la recherche en cause deux étapes: premièrement, nous avons eu la participation de 319 élèves en 9e année de l'école primaire viennent de 5 unités scolaires différentes, qui ont été préparés et développés activités éducatives aboutissant à un processus d'intervention éducative. Comme source de collecte de données, ces étudiants ont également mené des activités pré et post-test. La deuxième étape a consisté à cinq professeurs de mathématiques appartenant au réseau public de l'éducation de São Paulo et qui a enseigné aux étudiants participant à l'enquête. Nous avons utilisé des entrevues semi-structurées pour identifier les perceptions des enseignants au sujet de la contribution du programme d'éducation sur la probabilité et les risques pour leur pratique pédagogique. Les données ont été analysées qualitativement et quantitativement. Les principaux résultats de la recherche montrent que le programme d'enseignement sur la probabilité et le risque offert des contributions significatives aux élèves de mieux comprendre les concepts de l'aléatoire, l'espace d'échantillonnage et la quantification des probabilités. Cependant, que la compréhension du risque, les élèves se sont avérés avoir des connaissances préalables ou intuitive à ce sujet. En ce qui concerne les enseignants étudiés, nous avons constaté que le programme d'enseignement contribue à améliorer leurs pratiques d'enseignement, en particulier par l'utilisation de matériaux spécifiques et des activités spécifiques pour l'éducation probabilistes. Les résultats de la recherche nous a permis de conclure que, grâce à des interventions et des tests avec des étudiants et des entrevues avec les enseignants, il existe des preuves que le programme d'enseignement sur la probabilité et le risque est configuré comme un moyen d'éducation importants pour l'alphabétisation probabilistes dans l'éducation de base.

Mots-clés: L'enseignement des Mathématiques. Alphabétisation Probabilistes. Probabilité et Programme d'Éducation des Risques. La formation des Enseignants.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Séries mostrando o efeito de estabilização para frequências relativas ... 66
Figura 2 – Variação "regular" das frequências relativas ... 66
Figura 3 – Estrutura conceitual do concreto ao abstrato ... 71
Figura 4 – Representação de probabilidades condicionais e frequências naturais .. 87
Figura 5 – Esquema da pesquisa ... 110
Figura 6 – Kit com os materiais da intervenção de probabilidade e risco ... 111
Figura 7 – Jogo 1 – Máquina caça-níqueis com sequências alfabéticas ... 112
Figura 8 – Jogo 2 – Máquina caça-níqueis com sequências numéricas ... 113
Figura 9 – Exemplo da folha de respostas de Impossíveis contra Improváveis ... 114
Figura 10 – Ilustrações utilizadas na atividade Show de Dança ... 125
Figura 11 – Primeira imagem do Problema 1: Troca de Figurinhas ... 128
Figura 12 – Segunda imagem do Problema 1: Troca de Figurinhas ... 128
Figura 13 – Terceira imagem do Problema 1: Troca de Figurinhas ... 128
Figura 14 – Primeira imagem do Problema 2: Troca de Livros ... 129
Figura 15 – Segunda imagem do Problema 2: Troca de Livros ... 130
Figura 16 – Terceira imagem do Problema 2: Troca de Livros ... 130
Figura 17 – Primeira imagem do Problema 3: Troca de CDs ... 131
Figura 18 – Segunda imagem do Problema 3: Troca de CDs ... 131
Figura 19 – Terceira imagem do Problema 3: Troca de CDs ... 131
Figura 20 – Primeira imagem do Problema 4: A Caminhada de Diana e Elaine ... 132
Figura 21 – Segunda imagem do Problema 4: A Caminhada de Diana e Elaine ... 133
Figura 22 – Terceira imagem do Problema 4: A Caminhada de Diana e Elaine ... 133
Figura 23 – Primeira imagem do Problema 5: A Receita de Panquecas ... 134
Figura 24 – Segunda imagem do Problema 5: A Receita de Panquecas ... 134
Figura 25 – Justificativa da aluna B. B. na questão 2 da Atividade Diagnóstica ... 144
Figura 26 – Justificativa da aluna B. B. na questão 2 da Atividade de Verificação ... 144
Figura 27 – Justificativa do aluno J. C. M. na questão 2 da Atividade Diagnóstica .. 145
Figura 28 – Justificativa do aluno J. C. M. na questão 2 da Atividade Verificação ... 145
Figura 29 – Justificativa do aluno A. S. N. na questão 2 da Atividade Diagnóstica .. 145
Figura 30 – Justificativa do aluno A. S. N. na questão 2 da Atividade Verificação ... 145
Figura 31 – Imagem da questão 4 da Atividade Diagnóstica ... 149

Figura 32 – Imagem da questão 4 da Atividade de Verificação 149
Figura 33 – Preenchimento correto do quadro questão 4 Atividade Diagnóstica 150
Figura 34 – Preenchimento correto do quadro questão 4 da Atividade Verificação . 150
Figura 35 – Imagem da questão 5 da Atividade Diagnóstica 152
Figura 36 – Imagem da questão 5 da Atividade de Verificação 152
Figura 37 – Imagem da questão 6 da Atividade Diagnóstica 154
Figura 38 – Imagem da questão 6 da Atividade de Verificação 154
Figura 39 – Justificativa da aluna B. B. na questão 6 da Atividade Diagnóstica..... 156
Figura 40 – Justificativa da aluna B. B. na questão 6 da Atividade de Verificação... 156
Figura 41 – Justificativa da aluna T. S. G. na questão 6 da Atividade Diagnóstica .. 157
Figura 42 – Justificativa da aluna T. S. G. na questão 6 da Atividade Verificação ... 157
Figura 43 – Justificativa da aluna A. N. S. na questão 6 da Atividade Diagnóstica .. 157
Figura 44 – Justificativa da aluna A. N. S. na questão 6 da Atividade Verificação ... 158
Figura 45 – Imagem da questão 8 da Atividade Diagnóstica 161
Figura 46 – Imagem da questão 8 da Atividade de Verificação 162
Figura 47 – Resolução da aluna J. V. S. na questão 8 da Atividade Verificação 164
Figura 48 – Resolução da aluna T. R. F. L. questão 8 da Atividade Verificação 164
Figura 49 – Resolução da aluna A. C. E. S. questão 8 da Atividade Verificação 165
Figura 50 – Resolução do aluno H. D. P. S. questão 8 Atividade de Verificação 165
Figura 51 – Resolução da aluna I. B. na questão 8 da Atividade de Verificação..... 166
Figura 52 – Justificativa da aluna T. R. F. L. questão 9 da Atividade Diagnóstica ... 172
Figura 53 – Justificativa da aluna T. S. G. na questão 9 da Atividade Diagnóstica .. 172
Figura 54 – Justificativa do aluno K. C. na questão 9 da Atividade de Verificação .. 172
Figura 55 – Boxplot referente ao total de acertos no pré e pós-teste 180
Figura 56 – Diagrama de caixa com teste da média no pré e pós-teste 181

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Habilidades propostas pelo NCTM 34
Quadro 2 – Critérios de avaliação e padrões de aprendizagem do Currículo Básico da Educação Primária da Espanha 40
Quadro 3 – Habilidades propostas no Currículo Australiano de Matemática 42
Quadro 4 – Conhecimentos propostos na Base Nacional Comum Curricular 47
Quadro 5 – Elementos caracterizando diferentes significados da probabilidade 62
Quadro 6 – Exemplo para tomada de decisão na contratação de seguro veicular ... 64
Quadro 7 – Resumo dos conceitos e atividades desenvolvidas nas intervenções pedagógicas 111
Quadro 8 – Questão 2 da Atividade Diagnóstica 142
Quadro 9 – Questão 2 da Atividade de Verificação 142
Quadro 10 – Questão 3 da Atividade Diagnóstica 147
Quadro 11 – Questão 3 da Atividade de Verificação 147

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Blocos de construção dos elementos do conhecimento cognitivo e dos elementos de disposição 76
Tabela 2 – Exemplo de comparação de risco por meio da razão de chance 83
Tabela 3 – Distribuição dos alunos por gênero 105
Tabela 4 – Distribuição dos alunos por unidade escolar 106
Tabela 5 – Estrutura dos questionários de pré e pós-teste 135
Tabela 6 – Distribuição dos alunos por tipo de atividade desenvolvida 136
Tabela 7 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 1ª questão 141
Tabela 8 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 2ª questão 143
Tabela 9 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 3ª questão 148
Tabela 10 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 4ª questão 150
Tabela 11 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 5ª questão 153
Tabela 12 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 6ª questão 155
Tabela 13 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 7ª questão 160
Tabela 14 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a primeira pergunta da 8ª questão 163
Tabela 15 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a segunda pergunta da 8ª questão 167
Tabela 16 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a terceira pergunta da 8ª questão 168
Tabela 17 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 9ª questão 171
Tabela 18 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 10ª questão 174
Tabela 19 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 11ª questão 176
Tabela 20 – Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 12ª questão 178
Tabela 21 – Média dos resultados gerais referente ao tipo de intervenção 179
Tabela 22 – Média dos resultados gerais no pré e no pós-teste 179

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....17
CAPÍTULO 1: O PROGRAMA DE ENSINO SOBRE PROBABILIDADE E RISCO.....21
1.1 O projeto da Universidade de Oxford 21
1.2 O projeto do OBEDUC – UNIAN.....29
CAPÍTULO 2: PRESCRIÇÕES REFERENTES AO ENSINO DA PROBABILIDADE ...31
2.1 O ensino probabilístico de acordo com os PCN 31
2.2 Alguns preceitos constantes no Currículo do Estado de São Paulo para o ensino da probabilidade no Ensino Fundamental 32
2.3 Considerações do NCTM para o ensino probabilístico.....34
2.4 Prescrições do PISA para o ensino de probabilidade.....37
2.5 O Currículo Espanhol de Matemática.....39
2.6 Prescrições do Currículo Australiano de Matemática.....41
2.7 As propostas brasileiras contidas na Base Nacional Comum Curricular.....45
CAPÍTULO 3: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES ACERCA DA IMPORTÂNCIA DO LETRAMENTO PROBABILÍSTICO E DO CONCEITO DE RISCO 50
3.1 Os estágios do desenvolvimento cognitivo sobre a ideia do acaso.....50
3.2 Algumas contribuições epistemológicas sobre a probabilidade e o letramento probabilístico.....52
3.3 A relevância da formação docente para o ensino de probabilidade.....78
3.4 O conceito de chance e sua utilização na comparação de riscos 82
3.5 A utilização das frequências naturais para comparação do risco.....84
CAPÍTULO 4: A PROBABILIDADE E O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO PELA ÓTICA DE ALGUMAS PESQUISAS.....89
4.1 Investigações acerca da aprendizagem dos alunos por meio de atividades didáticas envolvendo probabilidade.....89
4.2 Os conhecimentos que precisam ser mobilizados pelos professores para o ensino da probabilidade 96
CAPÍTULO 5: MÉTODO E PROCEDIMENTOS METOLOGÓGICOS.....104
5.1 Objetivo geral.....104
5.2 Objetivos específicos.....104
5.3 Caracterização dos sujeitos de pesquisa 105
5.4 Estratégias adotadas para realização da pesquisa 107

5.5 A sequência didática da intervenção sobre probabilidade e risco 110
5.5.1 Atividade 1: Computer Game: Sequências aleatórias e padrões 112
5.5.2 Atividade 2: Impossíveis contra improváveis 114
5.5.3 Atividade 3: Jogo das bolinhas 115
5.5.4 Atividade 4: Jogo com dados (soma de dois dados) 118
5.5.5 Atividade 5: Saco de doces 119
5.5.6 Atividade 6: Fábrica de bolos 121
5.5.7 Atividade 7: Biscoitos do Ben 124
5.5.8 Atividade 7: Show de dança 125
5.6 A sequência didática da intervenção sobre resolução de problemas 127
5.6.1 Problema 1: Troca de figurinhas 127
5.6.2 Problema 2: Troca de livros 129
5.6.3 Problema 3: Troca de CDs 130
5.6.4 Problema 4: A caminhada de Diana e Elaine 132
5.6.5 Problema 5: A receita de panquecas 133
5.7 A coleta de dados 135
5.7.1 Os questionários de pesquisa utilizados com os alunos 135
5.7.2 As entrevistas realizadas com os professores de Matemática 136
CAPÍTULO 6: APRESENTAÇÃO E ANÁLISES DOS DADOS DA PESQUISA 139
6.1 Resultados oriundos do pré e pós-testes realizados pelos alunos 139
6.1.1 Resultados da 1ª questão (aleatoriedade) 140
6.1.2 Resultados da 2ª questão (aleatoriedade) 142
6.1.3 Resultados da 3ª questão (aleatoriedade) 146
6.1.4 Resultados da 4ª questão (espaço amostral) 148
6.1.5 Resultados da 5ª questão (espaço amostral) 151
6.1.6 Resultados da 6ª questão (espaço amostral) 154
6.1.7 Resultados da 7ª questão (quantificação de probabilidades) 158
6.1.8 Resultados da 8ª questão (quantificação de probabilidades) 161
6.1.9 Resultados da 9ª questão (quantificação de probabilidades) 169
6.1.10 Resultados da 10ª questão (compreensão do risco) 172
6.1.11 Resultados da 11ª questão (compreensão do risco) 174
6.1.12 Resultados da 12ª questão (compreensão do risco) 176
6.1.13 Resultados referentes ao total de acertos no pré-teste e no pós-teste ... 178
6.2 Resultados das entrevistas realizadas com os professores 182
6.2.1 Resultados oriundos das questões introdutórias 182

6.2.2 Resultados acerca das contribuições do programa de ensino sobre probabilidade e risco para a aprendizagem dos alunos 184
6.2.3 Resultados referentes às possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento do programa de ensino 186
6.2.4 Resultados relativos às possíveis contribuições do programa de ensino sobre probabilidade e risco para a prática letiva dos professores 188
6.3 Discussões sobre as análises dos resultados da pesquisa 191
CONCLUSÕES 193
1. As respostas que atendem nossas questões de pesquisa 193
2. Perspectivas futuras 196
REFERÊNCIAS 198
ANEXO A – Parecer consubstanciado do CEP i
APÊNDICE A – Folha de resposta para o Computer Game iii
APÊNDICE B – Folha de resposta para o jogo: Impossíveis contra Improváveis iv
APÊNDICE C – Folha de resposta para o Jogo das Bolinhas vii
APÊNDICE D – Folha de resposta para o Jogo com Dados viii
APÊNDICE E – Folha de resposta para o jogo Saco de Doces xi
APÊNDICE F – Folha de resposta para o jogo Fábrica de Bolos x
APÊNDICE G – Folha de resposta para o jogo Biscoito do Ben xii
APÊNDICE H – Folha de resposta para o Show de Danças xiii

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho de pesquisa consiste em analisar e identificar quais são as principais contribuições de um programa de ensino sobre probabilidade e risco para o aprendizado de alunos do 9º ano da educação básica e para a prática letiva[1] de professores de Matemática, sobretudo, no sentido de oferecer contribuições para que possamos entender melhor de que forma os ensinamentos alicerçados nas ideias de aleatoriedade, espaço amostral, comparação de probabilidade e compreensão do risco favorecem a aprendizagem significativa[2] dos alunos quando envolvidos num processo de letramento probabilístico[3].

A presente tese intitulada "Contribuições de um programa de ensino para o letramento probabilístico na educação básica" insere-se na linha de pesquisa "Formação de Professores que Ensinam Matemática" do Programa de Pós-Graduação do curso de Doutorado em Educação Matemática promovido pela Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN).

O desenvolvimento do estudo ocorreu no âmbito do projeto de pesquisa "Investigações sobre o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos concernentes à probabilidade e estatística", pertencente ao Programa Observatório da Educação - Capes[4] (OBEDUC - UNIAN), coordenado pelo Prof. Dr. Ruy César Pietropaolo, com cooperação da Prof.ª Dr.ª Terezinha Nunes e do Prof. Dr. Peter Bryant (ambos da Universidade de Oxford – Reino Unido) e em parceria com a Secretaria Estadual de Educação de São Paulo.

O projeto de pesquisa foi devidamente submetido para avaliação ao Comitê

---

[1] Reputamo-nos ao termo "prática letiva" com base nas definições de Ponte e Serrazina (2004), ou seja, como o campo de atuação docente caracterizado pelas seguintes atividades: tarefas propostas; materiais utilizados; comunicação na sala de aula e; práticas de gestão.

[2] No presente estudo, consideramos o termo "aprendizagem significativa" segundo as definições de Ausubel (1973), ou seja, a aprendizagem que ocorre quando um novo conhecimento incorpora-se às estruturas cognitivas do aluno, sendo que, a interação dos conhecimentos prévios do aluno com esse novo conhecimento, proporciona-lhe significado e provoca mudanças em sua estrutura cognitiva.

[3] Consideramos o termo "letramento probabilístico" de acordo com a perspectiva de Gal (2005), ou seja, o conhecimento e as disposições que os alunos precisam desenvolver para serem considerados alfabetizados sobre questões probabilísticas do mundo real.

[4] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

de Ética e Pesquisa (CEP) em 04/11/2014, protocolado com o número CAAE 38415314.1.0000.5493 e aprovado mediante Parecer Consubstanciado número 893.661 em 01/12/2014 (Anexo A).

O processo de aprendizagem probabilística dos alunos participantes dessa pesquisa deu-se mediante intervenções didáticas realizadas por professores que participaram de um curso de formação continuada abordando conceitos e conteúdos sobre probabilidade e risco.

A relevância da temática apresenta-se evidente pelo fato de abordar um programa de ensino original e inovador desenvolvido para o ensino de conteúdos escolares voltados para o letramento probabilístico, como também, por acreditarmos que um dos principais objetivos provenientes dos cursos de formação seja oferecer subsídios didáticos aos docentes que contribuam efetivamente para a aprendizagem dos alunos. Sendo assim, consideramos que o programa de ensino e os conteúdos sobre probabilidade e risco abordados no curso de formação continuada do OBEDUC - UNIAN configuram-se como importantes meios para proporcionar novos conhecimentos para a prática letiva dos professores e, consequentemente, para o letramento probabilístico dos seus alunos.

Diante de tais pressupostos, emergiram as seguintes indagações que nortearam nossa pesquisa:

I. Quais são as principais contribuições oriundas de um programa de ensino específico sobre probabilidade e risco para a aprendizagem dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental acerca dos conceitos de aleatoriedade, espaço amostral, quantificação de probabilidades e compreensão do risco?

II. Quais as perceptíveis habilidades desenvolvidas pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental após participarem de um programa de ensino sobre letramento probabilístico em comparação aos alunos que não participaram do programa?

III. Quais são as possíveis contribuições proporcionadas por um programa de ensino sobre probabilidade e risco para a prática letiva dos professores de Matemática?

O desenvolvimento dos nossos estudos em busca de respostas que satisfizessem essas questões culminou na elaboração da presente tese que, em resumo, configura-se com a seguinte estrutura:

No primeiro capítulo explanamos a concepção do programa de ensino sobre probabilidade e risco originalmente desenvolvido pela Universidade de Oxford, assim como, as adaptações realizadas pelo OBEDUC – UNIAN que culminaram no projeto "Investigações sobre o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos concernentes à probabilidade e estatística".

As prescrições referentes ao ensino probabilístico contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, no *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM)[5], no *Programme for International Student Assessment* (PISA)[6], no Currículo Espanhol de Matemática, no Currículo Australiano de Matemática e no projeto brasileiro da Base Nacional Comum Curricular são detalhadas no segundo capítulo.

No terceiro capítulo abordamos a importância da probabilidade e do letramento probabilístico para a Educação Matemática sob a perspectiva dos principais referenciais teóricos que subsidiam nossa pesquisa. Nesse sentido, conceituamos os estágios do desenvolvimento cognitivo sobre a ideia do acaso com base nas concepções de Piaget e Inhelder (1951). Discorremos sobre alguns conceitos fundamentais relacionados à probabilidade e sobre alguns aspectos importantes do letramento probabilístico, para tanto, aportamo-nos em Heitele (1975), Garfield e Ahlgrem (1988), Borovcnik (2008), Batanero (2005), Watson (2003), Ireland e Watson (2009), Gal (2012), Nunes e Bryant (2009), Nunes e Bryant (2011) e Bryant, Nunes, Evans, Gottardis e Terlektsi (2013). Também salientamos a relevância da formação docente para o ensino probabilístico mediante as

[5] Conselho Nacional de Professores de Matemática (tradução nossa).
[6] Programa Internacional de Avaliação de Alunos (tradução nossa).

concepções de Batanero (2009).

Ainda, no terceiro capítulo, tecemos algumas considerações sobre a utilização dos conceitos de chance e de frequências naturais para a comparação do risco, baseadas nas concepções de Brant (2004), Gigerenzer (2002, 2011) e Gigerenzer e Hoffrage (1995).

O quarto capítulo é dedicado para apresentar nossa revisão de literatura, por meio da qual, destacamos os resultados de algumas investigações e suas respectivas contribuições para o letramento probabilístico.

A descrição do método e dos procedimentos metodológicos utilizados em nossa pesquisa, incluindo os objetivos, as características dos sujeitos de pesquisa e a sequência das intervenções pedagógicas realizadas com os alunos são apresentadas no capítulo cinco.

Dedicamos o sexto capítulo para a apresentação, análise e discussão dos dados da pesquisa. Os resultados referentes aos pré e pós-testes realizados pelos alunos foram analisados qualitativa e quantitativamente, assim como, os resultados oriundos das entrevistas realizadas com os professores foram analisados valendo-se de uma abordagem qualitativa.

Por fim, tecemos nossas conclusões e reflexões a partir dos resultados da pesquisa, apresentamos as respostas que satisfazem nossas questões de pesquisa e indicamos possíveis possibilidades para estudos futuros.

CAPÍTULO 1

O PROGRAMA DE ENSINO SOBRE PROBABILIDADE E RISCO

Apresentamos neste capítulo as principais ideias que norteiam o projeto originalmente desenvolvido pela Universidade de Oxford para o ensino de probabilidade e risco, bem como, descrevemos como esse projeto foi adaptado e implementado no Brasil pelo OBEDUC – UNIAN.

1.1 O projeto da Universidade de Oxford

O Projeto "Compreensão das crianças sobre probabilidade e risco" foi originalmente desenvolvido pelo Departamento de Educação da Universidade Oxford sob a responsabilidade dos docentes pesquisadores: Prof. Dr. Peter Bryant, Prof.ª Dr.ª Terezinha Nunes e seus colaboradores, objetivando investigar meios educativos capazes de melhorar a compreensão de estudantes do Ensino Fundamental a respeito de conteúdos relacionados a probabilidade e risco e, consequentemente, desenvolver novos métodos de ensino para essa finalidade.

A concepção do projeto pela equipe de pesquisadores de Oxford baseou-se na hipótese de que seja possível ensinar conteúdos de probabilidade e risco mediante métodos que levem em conta as diferentes demandas cognitivas dos estudantes e viabilize, com êxito, o letramento probabilístico dos alunos.

De acordo com Nunes e Bryant (2011) e Bryant e Nunes (2012), entende-se por demandas cognitivas a compreensão das ideias relacionadas à aleatoriedade, ao espaço amostral, à quantificação de probabilidades e à compreensão do risco que, se ensinadas respectivamente nesta ordem, favorecem a aprendizagem da probabilidade.

A equipe de pesquisadores elaborou as atividades do projeto de aprendizagem sobre probabilidade e risco considerando o grau de escolaridade em

que essas ideias surgem prescritas no currículo inglês, dessa forma, o público alvo do projeto constitui-se por alunos que se encontram na faixa etária de 9 e 10 anos.

Outra importante expectativa dos pesquisadores consistiu no fato de que os resultados do projeto possibilitassem identificar não só como os conteúdos de probabilidade são ensinados aos alunos, mas também, o quanto os alunos podem aprender com os métodos propostos.

Os antecedentes que mobilizaram a equipe de pesquisadores de Oxford no desenvolvimento de um programa de ensino específico para o ensino de probabilidade e risco levaram em conta dois aspectos principais: i) a premente necessidade das pessoas compreenderem as leis da probabilidade de forma efetiva na sociedade contemporânea, principalmente, em relação às chances de determinadas ocorrências e as correlações necessárias para se comparar diferentes riscos; ii) o fato de que há evidências consistentes de que, tanto as crianças como muitos adultos, possuem grandes dificuldades em relação aos conceitos de chance, por conta disso, acabam cometendo graves erros ao tentarem resolver alguns problemas de probabilidade.

Os pesquisadores ingleses também consideram que embora as questões relacionadas aos erros ainda sejam polêmicas, eles são indiscutíveis e suscitam duas importantes questões educacionais: i) Há diferentes maneiras de ensinar regras de probabilidade aos alunos e aplicá-las de modo que apresentem resultados melhores do que os dos atuais métodos de ensino? e, ii) Os erros são oriundos de uma má compreensão das leis do acaso ou são ocasionados por distrações decorrentes do contexto dos problemas formulados?

Estas duas questões nortearam o desenvolvimento dos trabalhos da equipe de Oxford, cuja proposta pode ser resumida em quatro pontos principais: i) a aprendizagem sobre probabilidade mobiliza muitos e diferentes aspectos cognitivos dos alunos; ii) cada demanda cognitiva é parte de outros aspectos do desenvolvimento cognitivo da aprendizagem dos alunos; iii) investigações anteriores sobre esses outros aspectos do desenvolvimento cognitivo fornecem conhecimentos acerca de como os alunos podem adquirir habilidades cognitivas, que também são

centrais para a aprendizagem probabilística; iv) os resultados dessas investigações em outras áreas do desenvolvimento cognitivo podem ser utilizados para gerar métodos novos e eficazes para ensinar probabilidade e risco aos alunos.

Sucintamente, os objetivos do projeto de Oxford e as respectivas intervenções pedagógicas necessárias para o desenvolvimento de cada uma das quatro categorias de demandas cognitivas (aleatoriedade; espaço amostral; comparação de probabilidades; e compreensão do risco) são descritos nos parágrafos seguintes.

Os métodos adotados para assegurar os objetivos e a execução do projeto incluíram a colaboração de unidades escolares próximas de Oxford, nas quais foram realizadas as intervenções pedagógicas. As intervenções foram realizadas em duas fases. Na primeira fase foram realizadas três intervenções em condições de laboratório com pequenos grupos de alunos entre 9 e 10 anos de idade. Na segunda fase também foram realizadas três intervenções que ocorreram em salas de aula com a participação de todos os alunos entre 9 e 10 anos de idade. Os pesquisadores optaram por essa faixa etária por considerarem-na apropriada, uma vez que alguns aspectos de probabilidade fazem parte do currículo escolar e, de acordo com Piaget e Inhelder (1951), normalmente essa é a idade em que ocorre o desenvolvimento do raciocínio proporcional nas crianças.

Dos alunos participantes, um grupo foi selecionado aleatoriamente para formar o grupo de intervenção sobre probabilidade e risco, um segundo grupo constituiu-se no grupo de controle com o qual foram desenvolvidas intervenções de resolução de problemas e, o terceiro grupo de alunos, compôs um grupo de controle desassistido.

O design do estudo caracterizou-se pela participação dos alunos do grupo de probabilidade e risco nas três intervenções pedagógicas previstas, sendo que, em cada uma das intervenções, os alunos realizaram pré e pós-testes com fins de testar a hipótese dos pesquisadores de que cada intervenção configura-se como um bloco de construção para a próxima intervenção.

Na primeira fase do projeto foram realizados três estudos de intervenção: i) a

compreensão da aleatoriedade como causa de incerteza; ii) a capacidade de analisar o espaço amostral em problemas envolvendo probabilidade e quantificar probabilidade proporcionalmente; iii) a compreensão do risco.

Também foram realizados três estudos de intervenção na segunda fase do projeto, a saber: i) aleatoriedade como causa de incerteza, seleção aleatória como parte necessária de muitos jogos e aleatoriedade como forma justa de distribuição de uma recompensa escassa; ii) definição, análise e quantificação proporcional do espaço amostral; iii) riscos e raciocínio correlacional.

Os pesquisadores de Oxford identificaram que há duas inovações importantes no programa de ensino proposto. A primeira inovação consiste em possibilitar que os alunos participantes aprendessem a partir das sessões anteriores e, nesse contexto, possam utilizar o que aprenderam com as intervenções, permitindo-lhes pensar em associações oriundas de distribuições aleatórias e quantificar essas informações em termos proporcionais. A segunda inovação caracteriza-se pela diferenciação do conteúdo, principalmente, por conta da utilização de questões relevantes para a vida cotidiana dos estudantes.

A avaliação da eficácia do ensino proposto foi baseada nos resultados dos pré e pós-testes realizados pelos alunos do grupo de probabilidade e risco comparados com os resultados do grupo de alunos da intervenção de resolução de problemas e com os resultados dos alunos do grupo de controle desassistido.

Como o programa de ensino sobre probabilidade e risco configura-se como nosso objeto de estudo, os conceitos de aleatoriedade, espaço amostral, quantificação de probabilidades e compreensão do risco assumem grande importância em nosso estudo, uma vez que, de acordo Bryant e Nunes (2012) e Nunes e Bryant (2011), esses conceitos fazem parte das demandas cognitivas necessárias para a aprendizagem probabilística.

A ideia de aleatoriedade relaciona-se à ideia do acaso, ou seja, os possíveis resultados dos experimentos são conhecidos, mas também são imprevisíveis, mesmo quando realizados repetidamente e com a manutenção das mesmas

condições, por esses motivos, esses experimentos são denominados aleatórios ou não determinísticos. Sendo assim, Coutinho e Novaes (2009) afirmam que os resultados dos eventos aleatórios não podem ser previstos ou calculados antes que o processo seja concluído.

De acordo com Bryant e Nunes (2012), desconsiderar a independência dos eventos sucessivos em situações aleatórias constitui-se num erro comum cometido por crianças e adultos, tais erros são denominados como efeito de recência negativa ou efeito de recência positiva.

Para as autoras Chiesi e Primi (2009, p. 260), o efeito de recência negativa (ou falácia do apostador) ocorre quando se acredita que a probabilidade de um evento está relacionada com os resultados de lançamentos anteriores, isto é, não se considera os lançamentos individuais como eventos independentes. Como exemplo, as autoras citam que ao se lançar uma moeda por quatro vezes e, consecutivamente, nas quatro vezes se obter “coroa” (K), as pessoas geralmente acreditam que o próximo lançamento resultará em “cara” (C), ou seja, desconsideram que a probabilidade de obter cara ou coroa seja igual, porque acreditam que ocorrerá uma sequência de “caras” para equilibrar a proporção.

Ainda, segundo as autoras, o efeito de recência positiva ocorre quando os resultados de eventos aleatórios passados são usados como indicadores de eventos futuros, assim, de acordo com o que se aprendeu com a experiência, um determinado resultado é considerado mais provável. Por exemplo, ao se lançar uma moeda por quatro vezes e, consecutivamente, nas quatro vezes se obter “coroa” (K), uma pessoa pode estimar uma probabilidade diferente por conta do resultado da sequência e acreditar que a moeda não seja honesta, isto é, $p(K) > p(C)$.

Um dos estudos realizados por Chiesi, Primi e Gronchi (2007) revelou um viés de recência negativa no desempenho de crianças mais novas e também nos adultos, por outro lado, as crianças mais velhas praticamente não sofrem os efeitos da recência negativa. O estudo também identificou haver uma tendência de recência positiva no desempenho das crianças mais jovens.

Em estudos realizados por Fischbein e Schnarch (1997), observou-se que no desempenho de crianças com mais de 10 anos de idade a recência positiva é quase ausente.

Diante dessas explanações, ressalvamos que, no contexto do programa de ensino sobre probabilidade e risco, Bryant e Nunes (2012) consideram que a aleatoriedade deve ser ensinada para que os alunos compreendam sua natureza, suas consequências e sua utilização na vida cotidiana. Para tanto, o ensino da aleatoriedade precisa possibilitar a confrontação da ilusão cognitiva de que existe um padrão em tudo quando se compara os eventos aleatórios com os eventos previsíveis, bem como, valer-se de jogos nos quais a aleatoriedade proporcione partilhas equitativas quando os recursos são limitados, ou seja, proporcione divisões em partes iguais num espaço amostral definido.

Segundo Gondim (2013), o espaço amostral pode ser definido como o conjunto que contém todos os possíveis resultados de um experimento. Por exemplo, considerando o lançamento de um dado honesto e utilizando a notação Ω para representar o espaço amostral, então, o conjunto dos resultados possíveis (espaço amostral) será: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Para Bryant e Nunes (2012), os problemas de probabilidade sempre envolvem sequências aleatórias sobre as quais não se pode afirmar o que acontecerá, porém, na maioria das vezes, pode-se tentar descobrir a probabilidade de eventos específicos ou de determinados tipos de eventos, no entanto, para fazer isso, torna-se necessário saber exatamente quais são todos os possíveis eventos, por esse motivo, o conceito de espaço amostral possui papel fundamental nos processos de ensino e de aprendizagem sobre probabilidade.

Bryant e Nunes (2012) consideram que a identificação do espaço amostral depende tanto do raciocínio combinatório como do raciocínio contrafactual[7]. Os autores defendem também que as pesquisas sobre probabilidade sempre

[7] Raciocínio contrafactual pode ser entendido como a capacidade da nossa imaginação permitir-nos criar suposições sobre possibilidades e impossibilidades, ou seja, o pensamento sobre estados de coisas contrários aos fatos (Byrne e Quelhas, p. 713, 1999).

reconheceram a importância do raciocínio combinatório, contudo, embora haja uma grande quantidade de pesquisas relevantes sobre o raciocínio contrafactual, percebe-se pouca atenção sobre esse tipo de raciocínio envolvendo as crianças.

Para Nunes e Bryant (2011), a compreensão da associação entre duas variáveis desperta, pelo menos, três demandas quanto ao raciocínio das crianças: i) necessidade de entender aleatoriedade e espaço amostral; ii) capacidade de reconhecer os casos nos quais podem-se apoiar e quais são os casos que contrariam a ideia de uma associação entre as variáveis; iii) ter a capacidade de quantificar os casos positivos em comparação aos casos negativos e avaliar se os casos positivos são suficientemente frequentes para sugerir que a concomitância observada não se deve ao acaso. Por esses motivos, Nunes, Bryant, Evans e Barros (2012) consideram que o programa de ensino sobre probabilidade e risco estimula o raciocínio combinatório e o raciocínio contrafactual na identificação do espaço amostral em problemas quem envolvem a probabilidade.

De acordo com o ponto de vista de Ara (2006, p. 28), os fenômenos aleatórios, envolvendo o acaso e a incerteza, só podem ser explicados por meio da teoria da probabilidade, principalmente, porque ela possibilita a quantificação da incerteza e o pensamento adequado para o entendimento desses fenômenos.

Bryant e Nunes (2012) consideram que as probabilidades são quantidades baseadas em proporções, sendo que estas proporções precisam ser calculadas para se realizar a maioria (mas não todas) das comparações relacionadas à probabilidades de dois ou mais eventos.

Para o programa de ensino sobre probabilidade e risco, Nunes et al (2012) tomam por base que a quantificação de probabilidades permite a utilização do raciocínio proporcional quando as frequências simples não podem ser utilizadas por conta de não se ter a mesma quantidade total de eventos possíveis numa comparação. Por exemplo, ao comparar a probabilidade de se tirar um cartão verde de dois sacos que possuem cartões verdes e brancos, porém, se esses sacos não possuem a mesma quantidade de cartões, pode-se considerar apenas a quantidade de cartões verdes em cada saco. Os resultados da pesquisa piloto sobre o programa

de ensino mostram que as crianças entendem melhor tais comparações entre grandezas quando representam as quantidades em proporções. No caso desse exemplo, se houver 6 cartões verdes e 3 cartões brancos em um saco e 18 verdes e 9 brancos no outro, as crianças apresentam maior facilidade em comparar os índices de cartões verdes para brancos (2 verdes para 1 branco) do que usar outras representações matemáticas, como frações (2/3 verdes) ou porcentagens (aproximadamente 67% verde).

Nesse sentido, o programa de ensino fornece apoio para o pensamento das crianças sobre razões usando comparações visuais, ou seja, incentivado-as a mover contadores ou blocos de modo que possam encontrar razões simples. Dessa forma, nota-se que as crianças aprendem a transitar rapidamente das representações visuais para as representações simbólicas e utilizá-las para fazer comparações, oportunizando, inclusive, que as crianças se valham do mesmo raciocínio para trabalhar com razões e frações.

A pesquisa piloto inglesa sugere que as crianças e os adultos possuem fortes ideias intuitivas a respeito da probabilidade, sendo que, muitas vezes, essas ideias interferem no aprendizado da probabilidade. Para tentar minimizar essas interferências, o programa de ensino aborda a quantificação de probabilidades por meio da utilização de jogos, contendo informações em linguagem de relação, para que os alunos possam realizar correspondências de um para muitos e também fazer uso de diferentes representações para comparar probabilidades proporcionais.

Os autores Nunes, Bryant, Evans e Barros (2012) discorrem que a compreensão do risco constitui-se num dos aspectos importantes do pensamento probabilístico, pois depende do raciocínio correlacional[8]. Uma associação entre dois tipos de evento pode ocorrer de forma aleatória ou, alternativamente, pode representar um relacionamento genuíno. Para descobrir se existe ou não uma relação não aleatória, torna-se necessário atentar para a relação entre a confirmação e refutação de provas, como também, verificar se a frequência de casos confirmados poderia ter ocorrido por acaso.

[8] Entende-se o raciocínio correlacional como sendo o tipo de raciocínio envolvido na determinação da natureza e da força de uma relação mútua entre duas variáveis (Adi,Karplus, Lawson e Pulos, 1978).

Ainda, segundo esses autores, no programa de ensino sobre probabilidade e risco, o desenvolvimento do raciocínio correlacional pode ser obtido mediante leituras e interpretações de tabelas de dupla entrada, a partir das quais, os alunos obtêm informações referentes a frequências e relações e, posteriormente, como viés de confirmação, eles são incentivados a pensar sobre o significado das diferentes células da tabela para a realização das correlações. A partir das correlações realizadas, espera-se que os alunos sejam capazes de utilizar as informações resultantes para tomar decisões em situações que envolvem riscos.

1.2 O projeto do OBEDUC – UNIAN

O projeto “Investigações sobre o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos concernentes à probabilidade e estatística”, pertencente ao Programa Observatório da Educação da Universidade Anhanguera de São Paulo (OBEDUC - UNIAN) e encontra-se vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática desta universidade. O referido projeto foi desenvolvido com base no projeto da Universidade de Oxford, por isso, conta com a colaboração de seus principais idealizadores, a Prof.ª Dr.ª Terezinha Nunes e o Prof. Dr. Peter Bryant.

O projeto do OBEDUC – UNIAN possui o propósito de promover e analisar o desenvolvimento profissional de professores quando inseridos em processos formativos que objetivam contribuir efetivamente para com sua prática letiva e a melhoria da aprendizagem matemática dos alunos da Educação Básica.

No Brasil, como parte integrante das atividades do projeto do OBEDUC – UNIAN, foi desenvolvido e implementado um programa específico para o ensino de probabilidade e risco destinado aos alunos da Educação Básica. Porém, como os professores e alunos participantes deste programa pertencem à rede estadual paulista de ensino, que por sua vez, possui responsabilidade educacional voltada para o Ensino Fundamental II (escolarização do 6º ao 9º ano e faixa etária dos alunos entre 11 e 14 anos), houve a necessidade de se fazer algumas alterações em relação ao projeto de Oxford, originalmente idealizado para alunos com idades ente 9 e 10 anos.

As principais alterações realizadas no programa de ensino sobre probabilidade e risco, em comparação ao projeto inglês, deram-se em relação aos conteúdos abordados no curso de formação dos professores e às atividades de intervenção realizadas junto aos alunos. Os conteúdos abordados na formação dos professores foram adaptados para atender o nível de escolarização matemática referente ao Ensino Fundamental II, da mesma forma, as situações de aprendizagem destinadas aos alunos foram adequadas ao contexto dos mesmos.

Outra variante importante do nosso estudo, em relação às pesquisas realizadas pela equipe de Oxford, refere-se ao fato de ampliarmos o foco investigativo abrangendo também os professores que desenvolveram as atividades com os alunos. Dessa forma, além de verificarmos a eficácia do programa de ensino em relação aos alunos, também buscamos identificar e compreender as possíveis contribuições deste programa para a prática letiva dos professores.

CAPÍTULO 2
PRESCRIÇÕES REFERENTES AO ENSINO DA PROBABILIDADE

Abordamos neste capítulo algumas prescrições e considerações acerca do ensino probabilístico com base em documentos oficiais nacionais e internacionais para apresentar a ótica desses documentos em relação ao que se espera que os alunos aprendam no decorrer de sua trajetória escolar na educação básica.

2.1 O ensino probabilístico de acordo com os PCN

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática dos Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) destacam a importância de se trabalhar com os conteúdos de probabilidade e combinatória no Ensino Fundamental a fim de atender a demanda social e possibilitar o tratamento dos fenômenos que envolvem o acaso e a probabilidade nos tempos presentes. Os PCN afirmam também que os currículos de Matemática devem contemplar conteúdos que possibilitem ao cidadão tratar adequadamente as informações do seu cotidiano e raciocinar com base nas ideias de probabilidade e combinatória.

Nessa mesma linha de raciocínio, Borba (2010) salienta que o raciocínio combinatório é extremamente relevante e deve ser priorizado na Educação Básica, uma vez que o mesmo se faz necessário para o levantamento do espaço amostral e, por conseguinte, constitui-se num conceito fundamental que auxilia na análise de probabilidades.

Já em relação ao pensamento probabilístico, Batanero e Godino (2002), com base em resultados de várias investigações, consideram-no como um conjunto de conhecimentos que os alunos precisam desenvolver para que possam: observar e diferenciar os fenômenos aleatórios dos fenômenos determinísticos; prever o comportamento e os resultados desses fenômenos e sua probabilidade; organizar coleta de dados experimentais e comparar suas previsões com os resultados produzidos, bem como, reavaliar suas crenças com base nesses resultados;

identificar a imprevisibilidade de resultados discrepantes e a variabilidade de pequenas amostras quando comparadas com amostras semelhantes (de cada aluno ou pares); e apreciar o fenômeno da convergência mediante a acumulação de resultados (de toda a classe) e comparar a confiabilidade de pequenas e grandes amostras.

Especificamente, quanto ao tratamento da informação, os PCN sugerem a necessidade de se ter um bloco de conteúdo específico para estudos relacionados à estatística, probabilidade e problemas envolvendo contagem, principalmente por conta da importância do seu uso na sociedade. Contudo, sem a necessidade de que esse trabalho seja desenvolvido com base em definições e fórmulas.

Quanto à principal finalidade dos conteúdos de probabilidade, espera-se que os alunos sejam capazes de compreender que “muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória” e que, inclusive, pode-se estimar o grau da possibilidade de suas ocorrências. No tocante “as noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente,” estas podem ser exploradas no ambiente escolar por meio de situações que possibilitem aos alunos realizar experimentos e fazer observações de eventos em espaços equiprováveis.

Com relação aos problemas de contagem, objetiva-se que os alunos saibam “lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório” (BRASIL, 1998, p. 52). Afinal, as noções elementares de probabilidade propiciam a aprendizagem de se determinar as chances de ocorrência de alguns eventos (como por exemplo, mediante o uso de jogos que utilizam moedas, dados e cartas), como também, fazem com que os alunos comecem a se familiarizar com as previsões matemáticas.

2.2 Alguns preceitos constantes no Currículo do Estado de São Paulo para o ensino da probabilidade no Ensino Fundamental

O Currículo do Estado de São Paulo – Matemática e suas Tecnologias (SÃO PAULO, 2010) determina o ensinamento dos seguintes conteúdos para o Ensino

Fundamental:

- No 6º ano do Ensino Fundamental devem ser abordados conteúdos de contagem, objetivando que os alunos desenvolvam as habilidades de saber utilizar diagramas de árvore para resolver problemas simples de contagem e compreender a ideia do princípio fundamental da contagem.

- Para o 7º ano, são estabelecidos conteúdos com problemas de probabilidade, por meio dos quais se espera que os alunos desenvolvam as habilidades de saber resolver problemas simples envolvendo a ideia de probabilidade, principalmente, reconhecendo porcentagens que representam possibilidades de ocorrências.

- Os conteúdos pertinentes ao 8º ano envolvem problemas de contagem, cujas habilidades que se espera que os alunos desenvolvam estejam relacionadas com o saber realizar operações com valores expressos em frações.

- Estabelecem-se para o 9º ano conteúdos referentes a problemas de contagem e introdução à probabilidade, para os quais se deseja que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas ao saber resolver problemas envolvendo processos de contagem (princípio multiplicativo) e resolver problemas que envolvam as ideias simples sobre probabilidade.

De acordo com os conteúdos citados, constata-se que o ensino da probabilidade para o Ensino Fundamental prescrito no currículo paulista mostra-se aquém das expectativas de aprendizagem propostas no programa de ensino sobre probabilidade e risco que utilizamos, sobretudo, porque os conteúdos deste currículo focam apenas as aprendizagens relacionadas à construção da árvore de possibilidades, problemas de contagem mediante o princípio multiplicativo da contagem, problemas envolvendo probabilidade e suas representações percentuais e fracionais. Ou seja, apesar do currículo paulista ser relativamente recente, as prescrições contidas neste documento não abordam aprendizagens relacionadas à aleatoriedade, ao espaço amostral e à compreensão do risco.

2.3 Considerações do NCTM para o ensino probabilístico

As orientações curriculares dos Estados Unidos presentes no *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2002) prescrevem alguns princípios e padrões para a Matemática educacional da pré-escola ao 12º ano da escolarização básica. Os conteúdos dos programas de ensino relacionados à análise de dados e à probabilidade devem possibilitar que todos os alunos desenvolvam as seguintes habilidades centrais: i) Formular questões que possam ser abordadas por meio de dados, bem como, recolher, organizar e apresentar os dados relevantes para respondê-las; ii) Selecionar e utilizar métodos estatísticos adequados para analisar dados; iii) Desenvolver e avaliar inferências e previsões baseadas em dados; iv) Compreender e aplicar conceitos básicos de probabilidade.

Essas habilidades centrais variam de acordo com a faixa de escolaridade dos estudantes, por esse motivo, são subdivididas em habilidades complementares que representam as expectativas do NCTM (2002) em relação à aprendizagem dos conteúdos relacionados à análise de dados e à probabilidade, conforme resumidas no Quadro 1:

Quadro 1: Habilidades propostas pelo NCTM (2002) para os conteúdos relacionados com a análise de dados e a probabilidade

(Continua)

Habilidade / Ano	Formular questões que possam ser abordadas por meio de dados, bem como, recolher, organizar e apresentar os dados relevantes para respondê-las.
Pré-escola ao 2º ano	Fazer perguntas e reunir dados sobre si mesmos e seus arredores; classificar objetos de acordo com seus atributos e organizar dados sobre os objetos; representar dados utilizando objetos concretos, imagens e gráficos.
3º ao 5º ano	Projeto de investigação para lidar com uma questão e considerar como os métodos de coleta de dados afetam a natureza do conjunto de dados; coletar dados por meio de observações, pesquisas e experimentos; representar dados usando tabelas e gráficos de linha e de barras; reconhecer as diferenças de representação de dados categóricos e numéricos.
6º ao 8º ano	Formular questões, estudos de concepção, e recolher dados sobre uma característica partilhada por duas populações ou características diferentes dentro de uma população; selecionar, criar e usar representações gráficas apropriadas dos dados, incluindo histogramas, diagramas de caixa, e gráficos de dispersão.

Quadro 1: Habilidades propostas pelo NCTM (2002) para os conteúdos relacionados com a análise de dados e a probabilidade

(Continuação)

9º ao 12º ano	Compreender as diferenças entre os vários tipos de estudos e quais são as inferências legitimas que podem ser retiradas deles; conhecer as características de estudos bem desenhados, incluindo o papel de randomização em pesquisas e experimentos; compreender o significado de dados de medição e os dados categóricos, de dados univariados e bivariados, e da variável de prazo; compreender histogramas, gráficos de caixas paralelas e gráficos de dispersão e usá-los para exibir dados; calcular estatísticas básicas e compreender a distinção entre uma estatística e um parâmetro.
Habilidade / Ano	Selecionar e utilizar métodos estatísticos adequados para analisar dados.
Pré-escola ao 2º ano	Descrever partes dos dados e o conjunto de dados como um todo para determinar o que os dados mostram.
3º ao 5º ano	Descrever as características de forma, a importância de um conjunto de dados e comparar conjuntos de dados relacionados com ênfase na distribuição; usar medidas centrais, com foco na média, entendendo seu significado sobre o conjunto de dados; comparar diferentes representações dos mesmos dados e avaliar como cada representação mostra aspectos importantes dos dados.
6º ao 8º ano	Encontrar, utilizar e interpretar medidas de centro e propagação, incluindo média e intervalo interquartil; discutir e compreender a correspondência entre conjuntos de dados e suas representações gráficas, especialmente histogramas, gráficos de caule e folhas, gráficos de caixas, e gráficos de dispersão.
9º ao 12º ano	Para dados de medição univariada, ser capaz de mostrar a distribuição, descrever sua forma, selecionar e calcular estatísticas de resumo; para dados de medição bivariada, ser capaz de exibir um gráfico de dispersão, descrever sua forma e determinar coeficientes de regressão, equações de regressão e coeficientes de correlação usando ferramentas tecnológicas; apresentar e discutir dados bivariados nos quais pelo menos uma variável é categórica; reconhecer como transformações lineares de dados univariados se espalham e afetam a forma e o centro; identificar tendências nos dados bivariados e encontrar funções que modelam os dados ou transformam os dados para possam ser modelados.
Habilidade / Ano	Desenvolver e avaliar inferências e previsões baseadas em dados.
Pré-escola ao 2º ano	Discutir os acontecimentos relacionados às experiências dos alunos como prováveis ou improváveis.
3º ao 5º ano	Propor e justificar conclusões e previsões baseadas em dados de projetos de estudos para investigar as conclusões ou previsões.
6º ao 8º ano	Usar observações sobre as diferenças entre duas ou mais amostras para fazer conjecturas sobre as populações; conjecturar sobre as possíveis relações entre duas características de uma amostra com base em gráficos de dispersão; usar conjecturas para planejar novos estudos, formular novas questões e respondê-las.

Quadro 1: Habilidades propostas pelo NCTM (2002) para os conteúdos relacionados com a análise de dados e a probabilidade

(Conclusão)

9º ao 12º ano	Usar simulações estatísticas para explorar a variabilidade das amostras de uma população e para a construção de distribuições de amostragem; entender como as amostras estatísticas refletem os valores dos parâmetros populacionais e fazer inferência informal com base em distribuições de amostragem; avaliar relatórios publicados e examinar a base de dados, o desenho do estudo, a adequação da análise e a validade das conclusões; entender como as técnicas estatísticas são usadas como base para monitorar as características do processo no local de trabalho.
Habilidade / Ano	Compreender e aplicar conceitos básicos de probabilidade.
Pré-escola ao 2º ano	Descrever eventos como prováveis ou improváveis e discutir o grau de probabilidade usando palavras tais como: certos, igualmente prováveis e impossíveis;
3º ao 5º ano	Prever a probabilidade de resultados de experiências simples e testar as previsões; entender que a medida do risco de um evento pode ser representada por um número de 0 a 1.
6º ao 8º ano	Compreender e usar a terminologia apropriada para descrever eventos complementares e mutuamente exclusivos; usar a proporcionalidade e uma compreensão básica de probabilidade para fazer e testar conjecturas sobre os resultados de experimentos e simulações; calcular probabilidades para eventos compostos simples, utilizando métodos tais como: listas organizadas, diagramas de árvores e modelos na área.
9º ao 12º ano	Entender os conceitos de espaço amostral e distribuição de probabilidade e construir espaços amostrais e distribuições em casos simples; usar simulações para a construção de distribuições de probabilidades empíricas; calcular e interpretar o valor esperado de variáveis aleatórias em casos simples; entender os conceitos de probabilidade condicional e eventos independentes; compreender como calcular a probabilidade de um evento composto.

Quadro 1: Habilidades propostas pelo NCTM (2002) para os conteúdos relacionados com a análise de dados e a probabilidade.

Comparando as prescrições do NCTM (2002) com as dos PCN (1998) e do Currículo do Estado de São Paulo (2010), consideramos que as expectativas sobre a aprendizagem probabilística presentes nas orientações curriculares dos americanos mostram-se mais contundentes, principalmente, porque abarcam uma quantidade maior de habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, sendo que, para tanto, torna-se necessário também um maior aprofundamento dos conteúdos de probabilidade a serem ensinados nas escolas.

2.4 Prescrições do PISA para o ensino de probabilidade

O *Programme for International Student Assessment* (PISA) também apresenta algumas considerações interessantes para ao ensino da probabilidade. Em seu quadro de avaliação denominado "*Key Competencies in Reading, Mathematics and Science*"[9] (OECD, 2009), destaca-se que os conteúdos matemáticos possuem quatro ideias abrangentes: espaço e forma; mudanças e relações; quantidade; e incerteza.

As descrições apresentadas denotam que a incerteza constitui-se na quarta ideia abrangente dos conteúdos matemáticos, por essa razão, lidar com a incerteza de uma perspectiva matemática e científica torna-se cada vez mais essencial. Nesse contexto, a incerteza é empregada em vários problemas que podem ser vistos a partir da perspectiva de mudança e relacionamentos, nos quais a probabilidade exigida é a proporção de todos os resultados comparados com todos os resultados possíveis, configurando uma dependência funcional.

O quadro de avaliação do PISA salienta que a ciência e a tecnologia raramente lidam com a certeza. Na verdade, o conhecimento científico é raramente, ou nunca, absoluto – sendo por vezes, errado – por isso, sempre permanece alguma incerteza até mesmo nas previsões mais científicas. Como não poderia deixar de ser, a incerteza faz parte da vida diária, como, por exemplo: nos resultados eleitorais incertos, nas pontes que desmoronam, nas quedas dos mercados de ações, nas previsões meteorológicas pouco confiáveis, nas previsões ruins para o crescimento populacional e, no desalinhamento dos modelos econômicos.

O relatório do PISA considera que a incerteza sugere dois tópicos relacionados: dados e oportunidade, que respectivamente, são fenômenos do estudo matemático em estatística e probabilidade. Sendo assim, requerem o estudo de conceitos matemáticos específicos e atividades que incluem a recolha de dados, análise e visualização de dados, probabilidade e inferência. Contudo, quanto às recomendações referentes aos dados, observa-se que os currículos escolares

[9] As competências Essenciais em Leitura, Matemática e Ciência (tradução nossa).

enfatizam a análise de dados, por conseguinte, reduzindo a visão da estatística em um conjunto de habilidades específicas. No entanto, torna-se oportuno destacar que a estatística oferece algo único e importante para a Educação Matemática: a possibilidade de se raciocinar a partir da incerteza dos dados empíricos. Portanto, este tipo de raciocínio estatístico deve ser parte integrante do processo cognitivo de cada indivíduo, levando em consideração os seguintes elementos centrais: onipresença das variações nos processos; necessidades de dados sobre processos; projeto de produção de dados considerando a variação; quantificação da variação; e explanação da variação.

Com relação aos dados probabilísticos, o relatório do PISA considera que estes não são meros números, mas sim, números que fazem parte de um contexto, uma vez que os dados são obtidos por meio de medições e representados por números. A análise dos dados enfatiza a compreensão de que os dados que se têm em mãos representam uma população maior. Por esse motivo, o conceito de amostras aleatórias simples é essencial aos estudantes com 15 anos de idade, principalmente, para que possam compreender as questões relacionadas à incerteza.

No tocante ao conceito de probabilidade, o PISA baseia-se em situações nas quais as chances são relativas, tais como jogos (moedas, dados e roletas) e situações não muito complexas do cotidiano que possam ser analisadas intuitivamente ou serem modeladas por meio da realização de jogos.

Esse conceito de probabilidade defendido pelo PISA afina-se com a proposta do programa de ensino de probabilidade e risco do nosso estudo, principalmente, por também valer-se de jogos simples que facilitam a modelagem das soluções, situações da vida cotidiana nas quais as intuições dos alunos servem como base nas análises e, inclusive, por conta da utilização de valores numéricos pequenos cujos significados quantitativos aproximam-se da realidade dos estudantes e facilitam a compreensão probabilística.

Observamos que o relatório do PISA descreve que a incerteza aparece também a partir de fontes simples para coleta de dados, tais como: a variação

natural das estaturas dos alunos, as notas das avaliações, os rendimentos de um grupo de pessoas etc. Ainda, segundo o relatório, um passo muito importante para a aprendizagem, mesmo para estudantes de 15 anos de idade, é ver o estudo de dados como uma oportunidade coerente. Nesse sentido, um desses princípios consiste na progressão das ideias da análise de dados simples para a obtenção de resultados para a probabilidade e a inferência. Para tanto, os conceitos importantes e as atividades matemáticas específicas para essa área são: a produção de dados; a análise e visualização de dados; a probabilidade; e a inferência.

Nota-se, de acordo com as informações do relatório do PISA, uma presente preocupação no tocante à idade dos estudantes – no caso, 15 anos – e o que se espera quanto à aprendizagem dos conceitos relacionados à incerteza e aos dados probabilísticos. Tal fato chamou-nos a atenção porque coincide com a idade dos alunos participantes do nosso estudo, ou seja, nossos sujeitos de pesquisa são do 9º ano do Ensino Fundamental, portanto, com idade de 14 para 15 anos.

2.5 O Currículo Espanhol de Matemática

No currículo espanhol para a Educação Primária, os conteúdos matemáticos são organizados em cinco grandes blocos: Processos, métodos e atitudes em Matemática; Números; Medida; Geometria; e Estatística e Probabilidade.

O quinto bloco destina-se à estatística e probabilidade contemplando os seguintes conteúdos: i) coleta e classificação de dados qualitativos e quantitativos; ii) construção de tabelas de frequências absolutas e relativas; iii) iniciação intuitiva referente às medidas de tendência central: média aritmética, mediana e moda; iv) a realização e interpretação de gráficos simples: gráficos de barras, poligonal e setor; v) análise crítica da informação apresentada em gráficos estatísticos; vi) o caráter aleatório de algumas experiências; vii) iniciação intuitiva para calcular a probabilidade de um evento.

O currículo espanhol estabelece os seguintes critérios de avaliação e padrões de aprendizagem para o bloco de estatística e probabilidade:

Quadro 2: Critérios de avaliação e padrões de aprendizagem do currículo espanhol

Critérios de Avaliação	Padrões de Aprendizagem
1. Coletar, registrar e quantificar uma informação por meio de recursos gráficos simples: tabelas de dados, blocos de barras e diagramas de linha para comunicar informações.	1.1. Identificar os dados qualitativos e quantitativos em situações familiares.
2. Conduzir, ler e interpretar representações gráficas de um conjunto de dados relativos ao ambiente imediato.	2.1. Identificar os dados qualitativos e quantitativos em situações familiares. 2.2. Aplicar intuitivamente as situações familiares sobre as medidas de tendência central: média aritmética, mediana e moda. 2.3. Construir e interpretar gráficos simples: gráficos de barras e de setor poligonal com dados obtidos a partir de situações muito próximas.
3. Fazer estimativas com base na experiência sobre o resultado (possível, impossível, mais seguro, mais ou menos provável) de situações simples envolvendo a chance de intervir e verificar esse resultado.	3.1. Fazer análise crítica argumentativa sobre informações apresentadas em gráficos estatísticos.
4. Observar e verificar que há eventos impossíveis, eventos que quase certamente ocorrem, ou recorrentes, sendo esta repetição mais ou menos provável.	4.1. Identificar situações de caráter aleatório. 4.2. Fazer conjecturas e estimativas sobre alguns jogos (moedas, dados, cartões, roleta etc.).
5. Identificar, resolver problemas da vida diária adequados ao seu nível, estabelecendo conexões entre a realidade e a matemática, avaliar a utilidade do conhecimento matemático apropriado e refletir sobre o processo utilizado para a resolução de problemas.	5.1. Resolver problemas envolvendo o domínio de conteúdos próprios da estatística e da probabilidade, utilizando estratégias heurísticas de raciocínio (classificação, uso de contraexemplos e reconhecimento de relações), fazendo conjecturas, construção, argumentação e tomada de decisões, avaliando as consequências e conveniências de sua utilização. 5.2. Ponderar o processo de resolução de problemas: revendo operações utilizadas, unidades dos resultados, verificando e interpretando soluções no contexto, propondo outras formas de resoluções.

Quadro 2: Critérios de avaliação e padrões de aprendizagem para estatística e probabilidade contidos no Currículo Básico da Educação Primária da Espanha (Fonte: Boletín Oficial Del Estado, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014).

No tocante ao ensino probabilístico, observa-se que o currículo espanhol

enfatiza a aprendizagem de conteúdos relacionados com o acaso e a aleatoriedade, sendo que ambos alinham-se ao programa de ensino da nossa investigação.

Cumpre destacar que o currículo espanhol teve grande influência no Brasil como modelo para a elaboração dos PCN. Todavia, nem tanto quanto aos conteúdos a serem ensinados, mas ao que tange os aspectos relacionados com os objetivos gerais, principalmente, quanto à organização curricular por competências e habilidades, como também, baseada na resolução de problemas.

2.6 Prescrições do Currículo Australiano de Matemática

A estrutura curricular australiana organiza-se em torno da interação de três campos de conteúdos que descrevem o que deve ser ensinado e aprendido: Número e Álgebra, Medida de Geometria e Estatística e Probabilidade, como também, da interação de quatro elementos de proficiência que descrevem o pensar e o fazer matemática: Compreensão, Fluência, Resolução de Problemas e Raciocínio.

Quanto aos conteúdos de estatística e probabilidade, inicialmente, eles são desenvolvidos paralelamente ao currículo e, progressivamente, constroem-se conexões entre ambos.

Dentre as expectativas de aprendizagem, espera-se que os alunos:

- Reconheçam e analisem dados e façam inferências;
- Representem, resumam e interpretem dados e façam experimentações envolvendo a coleta e a interpretação de dados;
- Avaliem a verossimilhança e calculem probabilidades por meio de abordagens experimentais e teóricas;
- Desenvolvam habilidades crescentes para avaliar criticamente os conceitos de chance e de dados, fazendo julgamentos e tomando decisões fundamentadas, bem como, construam habilidades para avaliar criticamente as informações estatísticas e desenvolvam intuições sobre dados.

O currículo australiano apresenta as seguintes descrições de conteúdos para cada ano de escolarização:

Quadro 3: Habilidades propostas no Currículo Australiano de Matemática

(Continua)

Ano de escolarização	Representação e interpretação de dados	Acaso
Ano Fundamental	Responder sim/não a questões para coletar informação	----------
Ano 1	----------	Identificar resultados de eventos familiares que envolvam o acaso e os descrever usando linguagem cotidiana como ‘acontecerá’, ‘não acontecerá’, ou ‘pode acontecer’.
Ano 2	Identificar uma questão de interesses com base em uma variável categórica. Coletar dados relevantes para a questão. Coletar, verificar e classificar dados. Criar apresentações de dados usando listas, tabelas e gráficos pictóricos e interpretá-los.	Identificar atividades práticas e eventos cotidianos que envolvem o acaso. Descrever resultados como “provável” ou “improvável” e identificar alguns eventos como “certos” ou “impossíveis”.
Ano 3	Identificar questões ou assuntos para variáveis categóricas. Identificar fontes de dados e planejar métodos de coleta e registro de dados. Coletar dados, organizar em categorias e criar apresentações usando listas, tabelas, pictogramas e gráficos em barra simples, com e sem uso de tecnologias digitais. Interpretar e comparar apresentações de dados.	Realizar experimentos aleatórios, identificar e descrever resultados possíveis e reconhecer a variação nos resultados.
Ano 4	Selecionar e tentar métodos para a coleta de dados, incluindo questões de pesquisa e folhas de registro. Construir apresentações de dados adequadas, com e sem uso de tecnologias digitais, a partir de dados apresentados ou coletados. Incluindo tabelas, gráficos de coluna e gráficos pictóricos em que uma figura pode representar muitos valores de dados. Avaliar a eficácia de diferentes apresentações na representação de características de dados incluindo variabilidade.	Descrever possíveis eventos cotidianos e ordenar suas chances de ocorrências. Identificar eventos cotidianos em que um não pode ocorrer se o outro ocorrer. Identificar eventos em que a chance de um não será afetada pela ocorrência do outro.

Quadro 3: Habilidades propostas no Currículo Australiano de Matemática

(Continuação)

Ano 5	Propor questões e coletar dados categóricos ou numéricos por observação ou pesquisa. Construir apresentações, incluindo gráficos em barras verticais, gráficos de pontos e tabelas de dados, com e sem o uso de tecnologias digitais. Descrever e interpretar diferentes conjuntos de dados em contexto.	Reconhecem que probabilidades variam de 0 a 1. Listar resultados de experimentos aleatórios que envolvam resultados igualmente prováveis e representar probabilidades desses resultados usando frações.
Ano 6	Interpretar e comparar uma variedade de apresentações de dados, incluindo gráficos em barras múltiplas para duas categorias de variáveis. Interpretar dados secundários apresentados em mídia digital ou outro local. Descrever e interpretar diferentes conjuntos de dados em contexto.	Comparar frequências observadas através de experimentos com frequências esperadas. Realizar experimentos aleatórios com pequenos e grandes números de tentativas, usando tecnologias digitais apropriadas.
Ano 7	Descrever e interpretar apresentações de dados usando mediana, média e amplitude. Calcular média, mediana, moda e amplitude para conjuntos de dados. Interpretar estatísticas no contexto dos dados. Construir e comparar uma variedade de apresentações de dados, incluindo diagramas de ramo-e-folhas e gráficos de pontos. Identificar e investigar assuntos que envolvem dados numéricos coletados de fontes primárias e secundárias.	Associar probabilidades a resultados de eventos e determinar probabilidades de eventos. Construir espaços amostrais para experimentos de um único passo com resultados igualmente prováveis.
Ano 8	Investigar o efeito de valores individuais de dados, incluindo valores atípicos, sobre a média e a mediana. Explorar a variação de médias e proporções das amostras aleatórias extraídas da mesma população. Explorar as praticidades e implicações da obtenção de dados através de amostragem usando uma variedade de processos investigativos. Investigar técnicas para a coleta de dados, incluindo censo, amostragem e observação.	Representar eventos em tabelas de dupla entrada e diagramas de Venn e resolver problemas relacionados. Descrever eventos usando a linguagem de “pelo menos”, “ou” exclusivo (A ou B, mas não ambos), “ou” inclusivo (A ou B ou ambos) e “e”. Identificar eventos complementares e usar a soma de probabilidades para resolver problemas.

Quadro 3: Habilidades propostas no Currículo Australiano de Matemática

(Conclusão)

Ano 9	Identificar questões e problemas do dia a dia que envolvam pelo menos uma variável numérica e pelo menos uma variável categórica, e coletar dados diretamente ou de fontes secundárias. Comparar apresentações de dados usando a média, a mediana e a amplitude para descrever e interpretar conjuntos de dados numéricos em termos de localização (centro) e dispersão. Construir diagramas de ramo-e-folhas lado a lado e descrever dados, usando termos como “assimétrica” e “bimodal”.	Investigar relatórios de pesquisa em mídias digitais e outros locais para obter informação sobre como os dados foram obtidos para estimar médias e medianas populacionais. Calcular frequências relativas partir de um conjunto de dados para estimar probabilidades de eventos que envolvem “e” ou “ou”. Listar todos os resultados de experimentos aleatórios de dois passos, com e sem reposição, usando diagramas de árvore ou tabelas. Associar probabilidades aos resultados e determinar.
Ano 10	Avaliar relatórios estatísticos na mídia e outros locais, ligando afirmativas com apresentações, estatísticas e dados representativos. Investigar e descrever dados numéricos bivariados em que a variável independente é o tempo. Usar diagramas de dispersão para investigar e comentar sobre relações entre duas variáveis numéricas. Comparar formas de diagramas de caixa com histogramas e gráficos de pontos correspondentes. Construir e interpretar diagramas de caixa e os usar para comparar conjuntos de dados. Determinar quartis e amplitude interquartil.	Descrever os resultados de experimentos aleatórios com dois ou três passos, com e sem reposição, associando probabilidades aos resultados e determinando probabilidades de eventos. Investigar o conceito de independência. Usar a linguagem “se... então”, “dado”, “de”, “sabendo que” para investigar afirmativas condicionais e identificar erros comuns na interpretação de tal linguagem.
Ano 10A	Calcular e interpretar a média e o desvio padrão de dados e os usar para comparar conjuntos de dados. Usar tecnologias da informação para investigar conjuntos de dados numéricos bivariados. Onde apropriado, usar uma reta para descrever a relação, levando em conta a variação.	Investigar relatórios de estudantes em mídias digitais e outros para obter informação sobre seus planejamentos e implementações.

Quadro 3: Habilidades propostas no Currículo Australiano de Matemática para os conteúdos relacionados com o acaso e a representação e interpretação de dados (Fonte: ACARA, 2013).

Apesar de ser descrito por ano de escolarização, o currículo australiano fornece orientações para quatro agrupamentos de acordo com a idade dos estudantes:

- Do Ano Fundamental ao Ano 2: alunos de 5 a 8 anos de idade;
- Do Ano 3 ao Ano 6: alunos de 8 a 12 anos de idade;
- Do Ano 7 ao Ano 10: alunos de 12 a 15 anos de idade;
- Anos finais do ensino secundário: alunos de 15 a 18 anos de idade.

Além dos agrupamentos descritos, nota-se também a existência do Ano 10A, cujos conteúdos são optativos e destinados aos alunos do Ano 10 comum que requerem mais conteúdo para enriquecer seu estudo matemático, principalmente, os alunos que pretendem cursar Métodos Matemáticos ou Matemática de Especialista nos anos finais do ensino secundário.

Observando os conteúdos de estatística e probabilidade do currículo australiano, verifica-se que eles são muito mais abrangentes do que os conteúdos propostos nos PCN brasileiros, nos quais os conteúdos de probabilidade praticamente resumem-se ao significado de frações.

Outra importante característica patente do currículo australiano reside no fato de refletir claramente a atual tendência mundial para com a preocupação de incluir os conteúdos probabilísticos nos anos iniciais da educação básica.

2.7 As propostas brasileiras contidas na Base Nacional Comum Curricular

Atualmente, no Brasil, encontra-se em fase de discussão a Base Nacional Comum Curricular que, no momento, está em sua segunda versão revisada. Porém, como o país encontra-se envolto num processo de mudança política e o projeto da Base Nacional Comum Curricular foi idealizado pela antiga gestão pública federal, não se sabe ao certo se o processo de finalização terá ou não continuidade, uma vez que, historicamente, as mudanças curriculares da educação brasileira não são apartidárias. Todavia, cumpre destacar que esta seria a primeira proposta curricular concreta em nível nacional.

A proposta da Base Nacional Comum Curricular para o ensino das noções probabilística tem como finalidade a compreensão, desde cedo, de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Por esse motivo, nos três primeiros anos do Ensino Fundamental, a proposta de trabalho com probabilidade centra-se no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, principalmente, para que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. Nessa etapa de escolarização, torna-se interessante que os alunos verbalizem, em eventos familiares, envolvendo o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral (BRASIL, 2016, p. 266).

Ainda, propõem-se para os dois anos seguintes (4º e 5° anos) a iniciação do trabalho com a quantificação de probabilidades. Contudo, antes que sejam iniciados os cálculos das probabilidades de resultados de fenômenos aleatórios, torna-se importante que os alunos listem, intuitivamente, os resultados que possuem maior e menor chance de ocorrer, como base na análise do espaço amostral e/ou mediante experimentações (BRASIL, 2016, p. 266).

No tocante aos anos finais do Ensino Fundamental, a partir do 6° ano, sugere-se trabalhar com o cálculo da probabilidade por meio da razão entre o número de casos favoráveis de um evento e o número de elementos do espaço amostral, incluindo, a realização de experimentos práticos para consolidar a diferenciação entre experimentos determinísticos e aleatórios. No 7º ano, reforça-se o uso de termos associados à probabilidade e à realização de experimentos aleatórios para investigar a probabilidade frequentista. Nos dois últimos anos, aprimora-se a capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral em problemas de contagem. Nessa etapa, o cálculo de probabilidade deve incluir apenas eventos independentes (quando a ocorrência de um evento não influencia a ocorrência do outro evento) e espaços amostrais equiprováveis (aqueles nos quais os eventos elementares tem a mesma probabilidade de ocorrer). Esses conhecimentos são ampliados para a compreensão das probabilidades condicionais, envolvendo eventos dependentes (quando a probabilidade de ocorrência de um evento depende do resultado de outro evento). Deve-se considerar também a proposição e a resolução de problemas no cálculo de probabilidades associado-as aos conceitos de

razão, porcentagem e princípios de contagem (BRASIL, 2016, pp. 418-419).

Quanto aos conteúdos estatísticos e probabilísticos, a Base Nacional Comum Curricular traz em seu bojo as seguintes prescrições para o Ensino Fundamental:

Quadro 4: Conhecimentos estatísticos e probabilísticos propostos na Base Nacional Comum Curricular

(Continua)

Ano de escolarização	Conhecimentos de Estatística e Probabilidade
1º Ano	• Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como,“acontecerá com certeza”, “talvez aconteça”, “e impossível acontecer”, entre outros, em situações do cotidiano do/a estudante. • Coletar dados em uma pesquisa envolvendo variáveis do interesse do/a estudante, tais como esporte preferido, meio de transporte utilizado, entre outros, e organizar os resultados por meio de representações pessoais.
2º Ano	• Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “prováveis”, “pouco prováveis”, “improváveis”. • Ler, identificar e comparar informações apresentadas em tabela simples ou em gráficos de colunas, envolvendo resultados de pesquisas significativas, para localizar um dado, o resultado de maior ou de menor frequência, ordenar resultados, determinar a diferença entre dois resultados, entre outros, apropriando-se desse tipo de linguagem para melhor compreender aspectos da realidade próxima. • Coletar dados em uma pesquisa, tendo como universo os/as estudantes da turma, organizar os resultados e representá-los por meio de tabelas e/ou gráficos de colunas.
3º Ano	• Identificar, em eventos familiares aleatórios, a variação dos resultados possíveis, como, por exemplo, o conjunto de respostas possíveis para uma pergunta, os resultados possíveis em sorteio. • Ler, interpretar e comparar dados apresentados em uma tabela simples, tabela de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas, envolvendo resultados de pesquisas significativas, para localizar um dado, o resultado de maior ou de menor frequência, ordenar resultados, determinar a diferença entre dois resultados, entre outros, apropriando-se desse tipo de linguagem para melhor compreender aspectos da realidade sociocultural. • Coletar dados em uma pesquisa, tendo como universo os/as estudantes da turma ou do ano escolar, organizar os resultados e representá-los por meio de listas, tabelas, gráfico de colunas simples.

Quadro 4: Conhecimentos estatísticos e probabilísticos propostos na Base Nacional Comum Curricular

(Continuação)

4º Ano	• Identificar, dentre eventos cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência de modo a reconhecer características de resultados mais prováveis, sem recorrer à quantificação. • Ler, interpretar e comparar dados apresentados em uma tabela simples, tabela de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas, envolvendo informações oriundas de outras áreas de conhecimento e produzir um texto a partir de suas observações. • Coletar dados em uma pesquisa (variáveis categóricas e numéricas), considerando populações além do universo da sala de aula, organizar os resultados e representá-los por meio de listas, tabelas, gráfico de colunas simples, incluindo o uso de tecnologias digitais.
5º Ano	• Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, indicando se esses resultados são igualmente prováveis ou não. • Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos simples, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis). • Ler, interpretar e resolver problemas envolvendo dados estatísticos, apresentados em textos, tabelas e gráficos, de outras áreas de conhecimento ou oriundos de contextos ambientais, da sustentabilidade, do trânsito, dentre outros. • Coletar dados em uma pesquisa (variáveis categóricas e numéricas), considerando populações além do universo da sala de aula, organizar os resultados, selecionar e produzir a representação mais adequada (texto, tabelas e gráficos) para comunicá-los.
6º Ano	• Indicar a probabilidade de um evento por um número racional (na forma fracionária, decimal e percentual) e analisar o significado dessa medida por meio de experimentos. • Identificar, em gráficos de barras ou colunas (simples ou múltiplas) divulgados pela mídia, as variáveis e seus valores e os elementos constitutivos do gráfico (título, eixos, legenda e fonte), interpretando-os para propor textos escritos que apresentem os resultados da pesquisa.
7º Ano	• Compreender o significado de termos como aleatoriedade, espaço amostral, resultados favoráveis, probabilidade, tentativas, experimentos equiprováveis, dentre outros, aplicando-os no planejamento de experimentos aleatórios ou simulações e na resolução de problemas que envolvem estimar ou calcular probabilidades obtidas por meio de frequência. • Compreender o significado de média estatística como um indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a variabilidade dos dados (dois conjuntos de dados podem ter a mesma media e serem distribuídos com amplitudes diferentes).

Quadro 4: Conhecimentos estatísticos e probabilísticos propostos na Base Nacional Comum Curricular

(Conclusão)

8º Ano	• Calcular a probabilidade de eventos, a partir da construção do espaço amostral do experimento utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de cada elemento do espaço amostral e igual a 1. • Identificar, em gráficos de barras, colunas ou setores, divulgados pela mídia, as variáveis e seus valores, os resultados e os elementos constitutivos do gráfico (título, eixos, legenda e fonte), interpretando-os para analisar a adequação do gráfico ao tema e aos dados e para propor outras formas de comunicação dos resultados da pesquisa, tais como texto escrito ou outro tipo de gráfico.
9º Ano	• Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de ocorrência nos dois casos. • Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas e histogramas) para apresentar um determinado conjunto de dados de uma pesquisa, destacando aspectos como as medidas de tendência central para compor um relatório descritivo dos resultados.

Quadro 4: Conhecimentos estatísticos e probabilísticos propostos na Base Nacional Comum Curricular (Fonte: BRASIL, 2016).

Nota-se que os conhecimentos propostos na Base Nacional Comum Curricular acompanham a tendência educacional mundial no sentido de que o ensino da probabilidade inicie-se nos primeiros anos da educação básica, como também, mostram-se alinhados com as proposições do programa de ensino sobre probabilidade e risco.

Diante das informações descritas neste capítulo, observamos que algumas relevantes prescrições curriculares defendem a importância do ensino probabilístico na formação escolar básica, principalmente, para que os alunos tenham conhecimentos necessários que os auxiliem adequadamente nas tomadas de decisões que possam surgir em situações reais do cotidiano.

Tal proposição reforça a importância do nosso estudo acerca de um programa de ensino voltado para o letramento probabilístico que apresenta similaridades e alinhamento com as atuais tendências curriculares mundiais.

CAPÍTULO 3

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES ACERCA DA IMPORTÂNCIA DO LETRAMENTO PROBABILÍSTICO E DO CONCEITO DE RISCO

No presente capítulo, apresentamos quais são as fases do desenvolvimento da ideia do acaso na criança propostas por Piaget e Inhelder, como também, as concepções de alguns educadores matemáticos a respeito da importância do letramento probabilístico e do conceito de risco.

3.1 Os estágios do desenvolvimento cognitivo sobre a ideia do acaso

As ideias intuitivas sobre probabilidade e risco estão presentes em nosso cotidiano. Piaget e Inhelder (1951) corroboram com essa perspectiva afirmando que "quase todas as atividades diárias parecem exigir, na realidade, uma noção de imprevisto e uma espécie de avaliação espontânea do caráter mais ou menos provável dos acontecimentos já esperados ou previstos" (PIAGET; INHELDER, 1951, p. 9) e citam, como exemplos: a noção de saber que há mais chances de se encontrar um objeto perdido em um ambiente pequeno do que em um grande; e a hipótese de que o risco de acidente ao atravessar uma rua está diretamente relacionado ao volume do tráfego e a velocidade dos automóveis.

Destacamos que, embora nosso estudo esteja voltado para a educação básica e, consequentemente, ensinar alunos do Ensino Fundamental, decidimos por manter, no texto do presente tópico, o termo "criança" originalmente utilizado por Piaget e Inhelder em suas pesquisas.

Em seus estudos, Piaget e Inhelder (1951) identificaram as fases em que o desenvolvimento cognitivo da criança permite-lhe compreender as ideias do acaso. Para tanto, classificaram essas fases em três estágios, a saber: o primeiro estágio compreende as crianças com idades de 4 a 7 anos, o segundo estágio caracteriza-se por crianças com idades de 7 a 11 anos e o terceiro estágio ocorre em crianças

com idades a partir de 11 e 12 anos.

Os autores consideram que, no primeiro estágio (4 a 7 anos), a criança não é capaz de distinguir o possível e o necessário, por esse motivo, move-se cognitivamente numa esfera de ação afastada tanto do acaso como da própria operação. Dessa forma, seu pensamento oscila entre o previsível e o imprevisto, sem levar em conta fatos que podem ser previsíveis ou não, ou seja, dedutíveis ou fortuitos. Por esse motivo, nessa faixa de idade, não se deve considerar como julgamentos de probabilidade as suas antecipações movidas pela subjetividade, uma vez que ainda não há a ideia do acaso sequer nas operações dedutíveis. Em suma, podemos considerar que durante o primeiro estágio não há diferenciação entre o que é dedutível e o não dedutível. Assim, a intuição deve funcionar como mediadora entre a operação e o acaso.

De acordo com Piaget e Inhelder (1951), o início do segundo estágio, por volta dos 7 ou 8 anos, marca o início do desenvolvimento da ideia do acaso, justamente porque também é nesta idade que surgem as estruturas cognitivas das operações lógico-aritméticas. Nesse sentido, os autores consideram que:

> [...] a descoberta da existência do acaso, como um fato, decorre por contraste da construção das necessidades operatórias, e o início da estruturação das relações de probabilidade se deve à possibilidade de conceber os conjuntos de elementos misturados, como totalidades formadas de partes quantificáveis. Além disso, a mistura como tal – quer dizer, a expressão física mais simples do acaso – começa a ser concebida como uma brassagem real e não mais apenas como uma desordem aparente a encobrir uma ordem subjacente (PIAGET; INHELDER, 1951, p. 296, tradução nossa).

Segundo os autores, tal fato ocorre porque nessa fase do desenvolvimento cognitivo “a criança consegue entrever a possibilidade das combinações, das permutações, ou dos arranjos fortuitos, que condicionam de fato toda mistura” (PIAGET; INHELDER, 1951, p. 296). Portanto, observa-se a existência da diferenciação no segundo estágio e, por conseguinte, há também a inicialização da antítese entre o acaso e as operações, o que possibilita que a criança tenha domínio do imprevisível.

Ainda, conforme Piaget e Inhelder (1951), o julgamento de probabilidade se organiza somente a partir terceiro estágio (11 ou 12 anos) e ocorre mediante uma espécie de choque em torno da operação sobre o acaso. Ou seja, nessa fase surge a síntese entre o acaso e as operações, o que possibilita a estruturação do campo das dispersões fortuitas em um sistema de probabilidade por meio de dois processos correlativos: a construção dos sistemas combinatórios e o pensamento formal.

Com base nos três estágios do desenvolvimento da ideia do acaso identificados por Piaget e Inhelder (1951), observa-se que o projeto desenvolvido pelo OBEDUC-UNIAN para o letramento probabilístico no Ensino Fundamental II (conforme descrito no Capítulo 1), destina-se aos alunos que se encontram no terceiro estágio (11 e 12 anos) e a partir dele (até os 14 anos), ou seja, trata-se da faixa etária caracterizada pelo pensamento formal que permite a descoberta de alguns sistemas combinatórios completos, isto é, o surgimento da composição probabilística.

Diante do exposto, observa-se que há uma diferença significativa entre o projeto da Universidade de Oxford e o projeto brasileiro do OBEDUC – UNIAN quanto aos estágios do desenvolvimento cognitivo dos alunos sobre a ideia do acaso. O projeto inglês destina-se aos alunos com idades que correspondem ao final do segundo estágio (9 e 10 anos), período no qual ocorre o surgimento da ideia do acaso, enquanto que, no projeto brasileiro, os alunos encontram-se numa faixa etária em que, além da ideia do acaso, também conseguem mobilizar as ideias relacionadas à composição probabilística.

3.2 Algumas contribuições epistemológicas sobre a probabilidade e o letramento probabilístico

Dentre as inúmeras abordagens existentes acerca do conceito da probabilidade e de sua importância dentro do contexto da Educação Matemática, optamos por descrever nesse tópico as perspectivas dos teóricos que, por meio dos seus estudos e pesquisas, trazem à tona alguns aspectos importantes que

contribuem para melhorar a nossa compreensão sobre as questões probabilísticas, principalmente, porque de acordo como nosso entendimento, tratam-se de questões que suscitam inquietações e promovem reflexões que vão além das abordagens teóricas tradicionais.

Retratamos a importância da probabilidade e do letramento probabilístico no contexto educacional mediante algumas investigações que decorreram ao longo do tempo para demonstrar que as preocupações sobre as dificuldades encontradas no processo da aprendizagem estatística e probabilística perduram há décadas e, mesmo assim, ainda figuram com notoriedade nas pautas das pesquisas atuais. Ao que parece, alguns dos problemas identificados em estudos passados insistem em caminhar concomitantemente com o desenvolvimento de novas pesquisas, denotando que, apesar de muitas soluções teóricas já terem sido apontadas, na prática, muitos problemas continuam presentes no âmbito educacional, fazendo com que alguns estudos mantenham-se atualizados e servindo como referência mesmo com o passar do tempo.

Na década de 1970, Heitele (1975) identificou algumas das ideias estocásticas fundamentais, isto é, os conceitos essenciais que possibilitam compreensões adequadas sobre a probabilidade e a estatística. Para tanto, o autor pautou-se nas seguintes proposições: i) o princípio determinante do ensino de um assunto é a transmissão de suas ideias fundamentais; ii) a hipótese de que qualquer assunto pode ser ensinado de forma eficaz, de alguma forma intelectualmente honesta, para qualquer criança e em qualquer fase de desenvolvimento, implica que as ideias fundamentais são necessárias como um guia do jardim da infância à universidade, a fim de garantir certa continuidade; iii) as ideias e conceitos fundamentais serão tratados em diferentes níveis cognitivos e linguísticos ao longo do currículo em espiral[10]; iv) a transição para um nível cognitivo mais elevado é facilitada se o assunto subjacente foi preparado com representação apropriada nos estágios cognitivos anteriores. Em particular, a compreensão intuitiva das relações

[10] De acordo com Bruner (1960), o conceito de aprendizagem em espiral compreende que qualquer ciência pode ser ensinada em qualquer idade, mesmo que de maneira simplificada, uma vez que os assuntos serão retomados e aprofundados nos posteriores anos de escolarização. Portanto, podemos entender o “currículo em espiral” como sendo o conjunto das atividades educacionais que acompanham este modelo de aprendizagem.

concretas deve ser cultivada na escola primária, contanto que a criança não consiga compreendê-los numa forma analítica mais elaborada (o princípio da prefiguração).

Estas proposições subsidiam o modelo de currículo em espiral para o ensino de probabilidade e estatística proposto por Heitele (1975). O princípio organizador deste currículo em espiral baseia-se nas seguintes ideias estocásticas fundamentais: a probabilidade e a normalização de crenças; o espaço amostral como um conjunto de todas as possibilidades; regra de adição de probabilidades; independência e regra do produto; equidistribuição e simetria; combinatória; sondagens e modelos de simulação; variável aleatória; a lei dos grandes números; e amostragem.

Ainda, de acordo com Heitele (1975), o modelo de currículo em espiral possibilita que o ensino das ideias estocásticas fundamentais seja desenvolvido desde as fases mais precoces da escolarização até os níveis de educação profissional e, por esse motivo, também oferece contribuições para minimizar os equívocos cognitivos relacionados aos raciocínios probabilístico e estatístico.

Outras concepções interessantes que sobrevivem ao tempo advêm dos estudos de Garfield e Ahlgrem (1988), pois, há quase três décadas, os autores já afirmavam que muitas vezes os alunos tendem a responder problemas matemáticos como se fossem meros processamentos numéricos, decorando fórmulas e passos a serem seguidos em problemas bem definidos, contudo, sem atentar para a lógica ou a possibilidade de utilizar os conceitos em novas situações.

Garfield e Ahlgrem (1988) afirmam que muitos alunos, de qualquer nível de escolarização, apresentam dificuldades para desenvolver corretamente as ideias fundamentais da probabilidade. Isso se deve, pelo menos por três razões: i) possuem dificuldades subjacentes aos conceitos de números racionais e raciocínio proporcional, ambos necessários para as interpretações e cálculos probabilísticos; ii) as ideias de probabilidade mostram-se conflitantes com suas experiências pessoais e a forma como veem o mundo; iii) mostram-se desgostosos para com a probabilidade por conta de terem sido expostos aos seus estudos de forma altamente abstrata e formal.

Para superar as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação à Matemática e a probabilidade, Garfield e Ahlgrem (1988) fazem as seguintes recomendações aos professores:

1. Introduzir temas mediante atividades e simulações ao invés de abstrações;
2. Tentar despertar nos alunos o sentimento de que a Matemática não se relaciona apenas à símbolos, regras e convenções, mas também de forma útil para a realidade;
3. Utilizar ilustrações visuais e enfatizar métodos de dados exploratórios;
4. Ensinar a estatística descritiva sozinha, sem relacioná-la à probabilidade;
5. Salientar para os alunos as aplicações abusivas da estatística, como por exemplo, em notícias e anúncios;
6. Utilizar estratégias com os alunos para melhorar os conceitos sobre os números racionais antes de ensinar o raciocínio proporcional;
7. Reconhecer e confrontar os erros comuns relacionados ao pensamento probabilístico dos alunos;
8. Criar situações que exijam raciocínio probabilístico correspondentes com as visões de mundo dos alunos.

Baseados em estudos de outros pesquisadores sobre o desenvolvimento cognitivo dos alunos, Garfield e Ahlgrem (1988) relatam que cerca de 50% dos alunos da escola secundária não conseguem pensar adequadamente no nível das operações formais, sobretudo, acerca da compreensão da proporcionalidade, dos argumentos hipotéticos, do conceito sobre as variáveis e da habilidade verbal para descrever com precisão as situações probabilísticas. Muitos alunos precisam desenvolver habilidades para lidar com as abstrações necessárias ao raciocínio e aos testes de hipóteses que fundamentam a inferência estatística e a probabilidade, como também, desenvolver competências para sanar as dificuldades relacionadas com as convicções intuitivas sobre os fenômenos estatísticos.

Garfield e Ahlgrem (1988) também discorrem a respeito dos equívocos relacionados com o raciocínio estatístico, sobre os quais alguns estudos identificaram que muitos alunos equivocam-se sobre as ideias que envolvem representatividades em combinações e amostragens, inferências de causalidades e correlações. Enquanto que, em relação à estatística descritiva, os principais

equívocos relacionam-se com às ideias de distribuição, média, amostragem e aleatoriedade. Ainda, segundo os autores, as pessoas tendem a manter os equívocos desenvolvidos mesmo diante das experiências que os contradizem, por esse motivo, a escola possui papel fundamental no sentido de minimizar ou sanar definitivamente os equívocos dos alunos.

Como sugestões para futuras pesquisas, Garfield e Ahlgrem (1988) alegam que, embora o ensino para uma compreensão conceitual da probabilidade pareça ser uma tarefa muito difícil, repleta de ambiguidades e ilusões, há de se direcionar as pesquisas para dois esforços de investigação que precisam ocorrer em paralelo. Um dos esforços deve ser pela continuidade da exploração de meios que induzam os alunos às concepções válidas da probabilidade, principalmente, ensinando ideias de inferência estatística independentemente de uma probabilidade tecnicamente correta. O segundo esforço precisa ser focado na redução dos equívocos que os alunos apresentam sobre estatística e probabilidade, uma vez que as prescrições de métodos para o ensino só serão eficazes quando as formas de aprendizagem dos conceitos estocásticos forem adequadamente compreendidas.

O trabalho desenvolvido por Batanero (2005) oferece-nos um modelo teórico associando os significados históricos da probabilidade com os componentes ou elementos da probabilidade. Segundo a autora, este modelo possibilita uma interpretação semiótica do raciocínio matemático[11] e dos conflitos semióticos[12] relacionados aos frequentes erros cometidos pelos alunos em resolução de problemas probabilísticos.

Em seu artigo, Batanero (2005) considera os seguintes significados históricos da probabilidade:

---

[11] De acordo com Lamizet (2004), A interpretação semiótica consiste na articulação que o sujeito de linguagem realiza entre as representações simbólicas das referências e as significações em que se baseia, por meio do reconhecimento e da aplicação de um sistema de interpretação.

[12] Conforme Godino (2002), os conflitos semióticos se referem a toda disparidade ou desajuste entre os significados atribuídos a uma mesma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituição) em interação comunicativa e podem explicar as dificuldades e limitações das aprendizagens e ensinamentos instaurados.

1. Significado intuitivo: Não se sabe ao certo sobre a origem dos jogos e tampouco as razões pelas quais o desenvolvimento dos cálculos probabilísticos ocorrerem muito mais tarde do que outros ramos da Matemática. A probabilidade esteve ausente como ideia matemática até o início do século XVII, e as primeiras ideias surgidas relacionavam-se aos jogos de azar, à esperança, ao ganho e ao conceito de jogo justo, no qual a atribuição de números era empregada aos graus de crença para comparar a probabilidade de diferentes eventos. Como exemplos, Bellhouse (2000) descreve um poema do século XIII no qual as possibilidades de diferentes somas possíveis, no lançamento dois dados, são calculadas por meio de técnicas de enumeração, como também, que em 1663, o matemático Cardano indicou aos jogadores todas as possibilidades de resultados para um jogo justo.

2. Significado Laplaciano (clássico): Em 1654, as correspondências trocadas entre Pascal e Fermat sobre o Problema dos Pontos proposto por *chavalier* de Méré, deram conta de resolver alguns problemas relacionados aos jogos de azar com base na divisão equitativa, por esse motivo, são consideradas como o ponto de partida da teoria da probabilidade. Embora a ideia de probabilidade estivesse implícita nas obras que se desenvolveram nesta época, a primeira definição sobre probabilidade surgiu em 1718 com Abraham De Moivre: "A probabilidade do acontecimento de dois eventos dependentes é o produto da probabilidade do acontecimento de um deles pela probabilidade de o outro ter acontecido, quando é considerado que o primeiro tenha ocorrido, e o mesmo se estenderá para o acontecimento de muitos eventos [...]" (MACHADO, 2008 *apud* TOTOHASINA, 1992, p. 68). Depois, em 1814, Laplace cunhou a seguinte definição: "Uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de tudo possíveis casos" (Laplace, 1985/1914, p. 28), indicando a necessidade de reduzir os eventos de um determinado tipo a uma série de casos igualmente possíveis. Contudo, a regra de Laplace, como conhecida e ensinada atualmente, não pode ser aplicada aos experimentos com um número infinito de possibilidades, em casos em que o espaço amostral seja finito ou quando

não se pode aceitar a condição e simetria, como, por exemplo, ao se lançar ao chão uma caixa de tachinhas.

3. Significado frequencial: Bernoulli, em 1713, sugeriu que se pode atribuir probabilidades a eventos aleatórios que aparecem em vários campos, a partir da frequência relativa observada em uma grande série de ensaios do experimento, assim como, sua demonstração sobre a Primeira Lei dos Grandes Números foi aceita na época como apoio ao caráter objetivo da probabilidade. Este teorema indica que a frequência relativa de um experimento repetido nas mesmas condições aproxima-se da probabilidade teórica na medida em que se aumenta o número de testes. Por esta visão, a probabilidade é definida como um número hipotético no qual a frequência relativa tende a se estabilizar, assim, assumindo a existência teórica deste limite, a frequência relativa observada é aproximada. Um problema prático deste significado consiste no fato de que na abordagem frequencial nunca se obtém o valor exato da probabilidade, mas apenas uma estimativa. Por outro lado, às vezes é impossível efetuar experimentos sob as mesmas condições, como também, torna-se difícil saber com certeza qual é o número de repetições de um experimento que precisam ser realizadas para se aceitar uma boa estimação da probabilidade. Além disso, determinados eventos aleatórios não são repetitivos (por exemplo, no campo da economia ou história), nestes casos, a teoria da probabilidade não se aplica ao estudo.

4. Significado subjetivo: Uma nova visão sobre a probabilidade surge com a regra de Bayes, permitindo transformar as probabilidades *a priori* (antes de realizar um experimento) de várias causas, uma vez observadas suas consequências, em probabilidades *a posteriori*, incorporando as informações dos dados analisados, possibilitando que a concepção frequencial perca seu caráter objetivo. Há também probabilidades que dependem do grau de crença pessoal advindas do conhecimento e experiências que as pessoas atribuem a um evento. Por conta disso, a forma encontrada para romper com estas dificuldades baseou-se numa regra que atribuísse valores numéricos para as probabilidades com uma abordagem subjetiva, considerando o grau de crença pessoal. Ramsey (1926) e Finetti (1937) deduziram uma teoria de

decisão consistente, permitindo separar as crenças de preferência a partir de um sistema de apostas e inferir os valores das probabilidades subjetivas. Na abordagem subjetiva, a repetição da experiência nas mesmas condições já não se faz necessária, ampliando o âmbito de aplicações. Atualmente, a escola de probabilidade bayesiana aplica-se a todos os tipos de eventos incertos, porém, as controvérsias sobre o *status* científico das probabilidades subjetivas ainda continuam.

5. Significado matemático (axiomático): Ao longo do século XX, diversos autores contribuíram para o desenvolvimento de uma teoria da probabilidade matematicamente formalizada. Borel contemplou a probabilidade como um tipo de medida especial, enquanto Kolmogorov valeu-se desta ideia aplicando-a a teoria dos conjuntos e das medidas para deduzir um axioma aceito por todas as escolas, independentemente do significado filosófico dado a natureza da probabilidade. A partir de então, a probabilidade passou a ser vista simplesmente como um modelo matemático que podemos usar para descrever e interpretar a realidade de eventos aleatórios, mostrando-se útil em quase todos os campos de atividade humana.

Para Batanero (2005), estas ideias relacionadas aos significados históricos da probabilidade possibilitam uma análise dos vários conceitos sobre a probabilidade, bem como, estas diferenças de significados refletem as distintas concepções que permeiam as resoluções de problemas do cotidiano e possibilitam uma melhor compreensão acerca dos distintos erros cometidos.

Os componentes ou elementos de significado considerados por Batanero (2005) possibilitam a análise de respostas a um processo matemático ou a uma tarefa de ensino e aprendizagem. Estes componentes são:

1. O campo de problemas emergentes do objeto: Objetos matemáticos surgiram para resolver problemas específicos, esta solução é específica num primeiro momento e depois generalizada aos demais problemas semelhantes. No entanto, a solução envolve um novo objeto matemático que inicialmente é usado implicitamente, mas posteriormente torna-se objeto de estudo em si

mesmo e mais tarde introduzido no ensino. Estes problemas são parte do significado do objeto, justificando-o e lhe dando sentido.

2. Elementos linguísticos: Para resolver os problemas precisamos de objetos ostensivos como símbolos, palavras ou gráficos para representar dados e soluções, bem como, das operações e dos conceitos utilizados. Todas estas expressões servem como sistemas de representação, isto é, para substituir e colocar no lugar do objeto a ser representado, como também, para indicar que a linguagem matemática cumpre um papel instrumental na atividade matemática. Atualmente, o número de recursos linguísticos associados ao campo da probabilidade é muito diversificado, incluindo os gráficos, as tabelas de valores das funções de densidade das diferentes distribuições de probabilidade, as expressões algébricas das distribuições ou transformadas, as simulações e os gráficos computacionais.

3. Procedimentos e algoritmos: Os primeiros problemas, uma vez resolvidos, dão origem aos métodos específicos para resolução de problemas dentro de um determinado campo e logo se tornam objetos de ensino. Deste modo, os primeiros procedimentos no campo da probabilidade se reduzem ao cálculo combinatório ou à enumeração dos casos favoráveis e possíveis para determinar seu número e calcular a probabilidade através de um quociente. Paulatinamente, novos procedimentos têm surgido, como por exemplo, a coleta de dados estatísticos e a estimação das probabilidades a partir da frequência relativa, a utilização de funções como modelos de distribuições de probabilidade e sua operação por meio de análises matemáticas, a simulação mediante tabelas de números aleatórios e os programas estatísticos que oportunizam uma variedade de cálculos probabilísticos e simulações sem que o usuário conheça os cálculos subjacentes.

4. As definições e propriedades dos objetos e suas relações com outros objetos matemáticos[13]: A atividade matemática demanda diferentes conceitos previamente conhecidos, cujas propriedades são usadas para resolver

[13] De acordo o marco teórico defendido por Godino (2002), as definições de um conceito e suas propriedades são consideradas elementos com significado diferentes.

problemas. Além das diferentes definições atribuídas para a probabilidade (detalhadas anteriormente) desde seu reconhecimento como objeto matemático pela comunidade científica em 1700, concomitantemente, iniciaram-se as publicações de tratados analisando as propriedades da probabilidade: o fato de que é sempre positiva, as regras de adição e produtos, os teoremas da probabilidade total e de Bayes, como também, as suas relações os conceitos de esperança, de distribuição ou de convergência.

5. Os argumentos e demonstrações destas propriedades: Todas as ações e objetos que fazem parte da atividade matemática estão interligados através dos argumentos e dos raciocínios necessários para justificar a validade da solução de um problema ou de uma propriedade e comunicá-la aos outros. Embora o tipo de demonstração característico da Matemática seja o dedutivo formal, podemos encontrar também vários tipos de justificativas.

De acordo com Batanero (2005), esta enumeração dos elementos de significado sugere a natureza complexa dos conceitos matemáticos que podem ser ensinados nas escolas, incluindo a probabilidade. Contudo, há de se considerar também que um mesmo objeto matemático pode ser ensinado em vários níveis de complexidade.

Outra distinção considerada por Batanero (2005) diz respeito às diferenças existentes entre os significados institucional e pessoal de um mesmo objeto matemático que, de acordo com Godino e Batanero (1994), trata-se da diferença entre os sistemas e práticas institucionais associadas ao campo de problemas (escola) e o sistema de práticas pessoais de um indivíduo (aluno), ambos relacionados ao objeto matemático que emerge num dado momento. Por esses motivos, os pontos de vista cultural, sociais e pessoal para a construção progressiva de objetos (conceitos, proposições, teorias) precisam ser levados em consideração nas atividades matemáticas.

Associando os significados históricos com os elementos de significado da probabilidade, Batanero (2005) construiu um modelo teórico por meio do qual evidenciam-se as diferenças existentes nas definições da probabilidade e em cada

um dos elementos de significância, representadas no Quadro 5:

Quadro 5: Elementos que caracterizam os diferentes significados da probabilidade

Significados da Probabilidade	Campos de problemas	Procedimentos e Algoritmos	Elementos linguísticos	Definições e propriedades	Alguns conceitos relacionados
Intuitivo	• Sorteios • Adivinhações	• Manipulação de geradores de acaso: dados, cartas etc.	• Linguagem natural	• Opinião imprevisível e em crenças	• Sorte • Destino
Clássico	• Cálculo de esperança ou riscos em jogos de azar	• Combinatória • Proporções • Análise *a priori* da estrutura do experimento	• Triângulo aritmético • Listagem de eventos • Fórmulas combinatórias	• Quociente de casos favoráveis e possíveis • Equiprobabilida-de de eventos simples	• Esperança • Equitabilidade • Independência
Frequencial	• Estimação de parâmetros em populações	• Registro de dados estatísticos *a posteriori* • Ajuste de curvas matemáticas • Análises matemáticas • Simulações	• Tabelas e gráficos estatísticos • Curvas de densidade matemáticas • Tabela de números aleatórios • Tabelas de distribuições	• Limite das frequências relativas • Caráter objetivo baseado na evidência empírica	• Frequência relativa • Universo • Variável aleatória • Distribuição de probabilidade
Subjetivo	• Melhora do conhecimento sobre eventos incertos, incluindo não repetitivos	• Teorema de Bayes • Atribuição subjetiva de probabilidades	• Expressões da probabilidade condicional	• Caráter subjetivo • Verificação com a experiência	• Probabilidade condicional • Distribuições *a priori* e *a posteriori*
Axiomático	• Quantificar a incerteza de resultados em experimentos aleatórios abstratos	• Teoria dos Conjuntos • Álgebra dos Conjuntos • Teoria da Medida	• Símbolos dos conjuntos	• Função mensurável	• Espaço amostral • Espaço de probabilidade • Conjuntos de Borel

Fonte: Significados de la probabilidad en la educación secundaria (Batanero, 2005, p. 256)

Diante destes significados multifacetados da probabilidade, Batanero (2005) considera que o ensino probabilístico não pode ser limitado a estas diferentes perspectivas porque estão ligados dialeticamente. A probabilidade pode ser contemplada como razão de chances a favor e contra, como elementos de prova fornecidos pelos dados, como o grau de crença pessoal e como um modelo

matemático que ajuda a compreender a realidade. Embora as possibilidades advindas com os recursos computacionais, sobretudo, mediante a utilização de simuladores e experimentos, favoreçam a resolução de paradoxos em problemas probabilísticos, essa abordagem experimental não é suficiente para o ensino, pois dependem das hipóteses estabelecidas de antemão e do modelo teórico implantado no computador. Uma verdadeira compreensão probabilística só pode ser alcançada mediante estudos baseados na probabilidade formal, contudo, estes estudos devem ocorrer gradualmente e apoiados nas experiências estocásticas dos estudantes.

Também encontramos algumas concepções interessantes no artigo intitulado “Algumas ideias fundamentais da probabilidade” (tradução nossa) de Borovcnik (2008), por meio do qual o autor coloca em discussão três interessantes aspectos da probabilidade: o pensar probabilisticamente; a ponderação das provas; e o paradoxo da estabilização e variação das frequências relativas. De acordo com o autor, estes aspectos influenciam a capacidade individual, o modo de percepção das situações e o tratamento matemático padrão comumente empregado às situações.

Borovcnik (2008) considera que embora a forma de pensar probabilisticamente possa ser definida matematicamente como sendo a utilização adequada dos modelos probabilísticos, todavia, os indivíduos são confrontados com o contexto das situações a serem modeladas, porém, estas situações possuem ingredientes que podem direcionar as soluções por caminhos completamente diferentes dos modelos matemáticos convencionais. Desta forma, o pensar probabilisticamente pode ser didaticamente caracterizado pelos seguintes contextos: i) as qualificações dos elementos em probabilidade são indiretas, afinal, pode-se ganhar um determinado jogo mesmo com uma estratégia errada; ii) a percepção causal pode desviar a interferência; iii) os critérios em situações probabilísticas podem ser completamente não probabilísticos e carregados emocionalmente.

Diante destas colocações, Borovcnik (2008) defende que há uma necessidade urgente do desenvolvimento de estratégias de ensino que tornem mais plausível o fato de que as probabilidades condicionais não possuam relações com o tempo e as causas, ascendendo assim, a um conceito mais amplo para integrar qualquer tipo de informações para o julgamento da probabilidade.

Segundo Borovcnik (2008), ao aceitarmos o fato de que as probabilidades podem ajudar a modelar uma situação, então, torna-se necessário estimar as probabilidades de vários resultados, ocasionando assim, a ocorrência de um conflito entre as perspectivas individuais e gerais durante a ponderação das provas. Isto ocorre porque é muito mais fácil valer-se da perspectiva probabilística de um foco geral do que do ponto de vista individual.

Borovcnik (2008) exemplifica melhor estas ideias utilizando-se de um contexto sobre a tomada de decisão envolvendo a contratação ou não de uma apólice de seguro veicular com cobertura total. O objetivo deste exemplo é desenvolver um cenário ilustrando as questões do problema ao invés de um modelo rápido de decisão, dessa forma, somente podem ser modelados dois casos, um para "acidentes" e outro para "perda total", para tanto, foram considerados os valores de 1000 Euros para contratação da apólice e prêmio de 20 mil Euros para perda total, conforme demonstrado no Quadro 6:

Quadro 6: Exemplo para tomada de decisão na contratação de seguro veicular

Decisão / Potencial futuro	A_1= Contratar o seguro	A_2= Não contratar o seguro
T_1= Nenhum acidente	€ 1.000,00	€ 0,00
T_2= Perda total	€ 1.000,00	€ 20.000,00

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Borovcnik (2006, p. 485)

Observando os dados do quadro, Borovcnik (2006) afirma que, no caso de não haver qualquer acidente, pode-se dizer facilmente que a melhor alternativa de decisão seria optar por não contratar o seguro (A_2), enquanto que para se minimizar o custo máximo, a melhor opção seria optar pela contratação do seguro (A_1). Ambas as opções demonstram um comportamento para se evitar riscos. Contudo, ao se introduzir a probabilidade para a tomada de decisão, abre-se margem para comportamentos inovadores quanto aos potenciais futuros de T_1 e T_2, por exemplo, considerando o peso relativo de 39:1 (correspondente a uma probabilidade de 1/40 para perda total), o custo de A_1 (contratação do seguro) continuaria sendo de € 1.000,00, mas o custo de A_2 (não contratação do seguro) seria reduzido para € 500,00, portanto, nesse caso a melhor opção seria não contratar o seguro.

Dessa forma, fica claro que a real decisão incide-se sobre a possibilidade de haver acidentes, pois a diferenciação dos pesos ocasionam diferentes tomadas de decisões. Neste caso, a decisão passa a ser transparente: considerando a chance de um possível acidente em 1 para 39, então, A_2 seria a melhor opção. Todavia, é mais aconselhável encontrar o ponto de equilíbrio do que se dar ao trabalho de fixar valores para as chances, ou seja, encontrar os pesos relativos para os quais a decisão A_1 passa para A_2, que, no caso, seria de 1 para 19. Sendo assim, observa-se que a decisão consiste em avaliar se a chance é maior ou menor do que o ponto de equilíbrio, dispensando assim, a necessidade de se pesar as chances.

Quanto ao paradoxo da estabilização e variação, Borovcnik (2008) argumenta que ele desfoca o julgamento racional das informações contidas em frequências relativas passadas, ou seja, as informações perduram e acarretam implicações na maneira de se compreender essas frequências.

Para que possamos compreender adequadamente a ideia do paradoxo da estabilização e variação das frequências, recorremos novamente aos exemplos fornecidos pelo autor salientado dois aspectos relacionados a essa ideia:

i. A análise da progressão das frequências relativas de um evento fornece a impressão de estabilização após certo tempo, especialmente, quando esta análise é acompanhada por uma representação gráfica. Porém, esta precisão verificada vale somente para a continuação da série, uma vez que passa a ser completamente diferente a partir de uma nova série. Como exemplo, Borovcnik (2008) cita que as frequências relativas sugerem uma variação de 0,5 ponto percentual após 600 ensaios realizados. Mas, uma nova experiência mostra o mesmo recurso em um nível diferente, neste caso, a variação é de aproximadamente $\pm$ 4% em relação ao primeiro experimento, tal como demonstra a Figura 1.

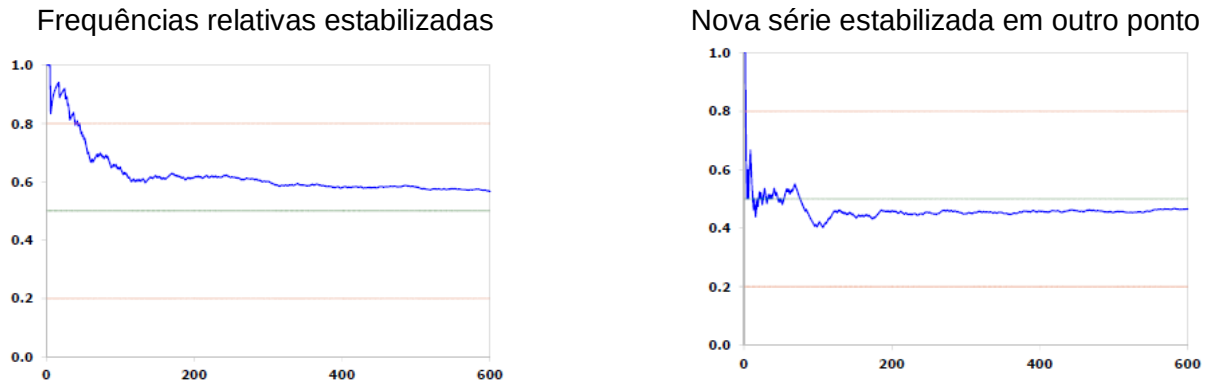


Figura 1: Cada uma das séries de experiências mostra um efeito de estabilização para as frequências relativas, entretanto, o nível é diferente para cada uma das séries (Fonte: Borovcnik, 2008, p. 4)

ii. Ainda, de acordo com Borovcnik (2008), enquanto as frequências relativas cumulativas se estabilizam, independente do nível já atingido, os próximos 5 estudos mostram sua plena variação. No entanto, tomando-se os próximos 20 ensaios, nota-se o estreitamento da banda de variação (cerca da metade do tamanho). Geralmente a banda estreita-se a uma taxa de $1/\sqrt{n}$ de comprimento em n séries, tal como demonstrado na Figura 2.

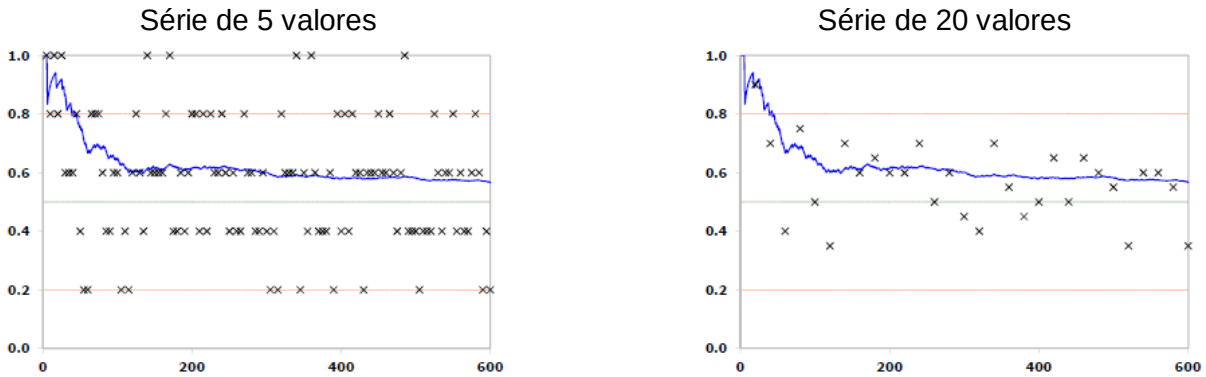


Figura 2. Apesar do efeito estabilizador, a série única dos próximos 5 valores continua variando "regularmente", a variação diminui nos próximos 20 valores . (Fonte: Borovcnik, 2008, p. 4)

Borovcnik (2008) afirma que esta abordagem respalda-se nas ideias de Freudenthal (1972), fornecendo uma melhor visão sobre a lei dos grandes números, pois, ao invés de fiscalizar ou mesmo demonstrar a convergência das frequências relativas a um limite obscuro, a taxa de variação da previsão das frequências relativas diminui na medida em que aumenta a dimensão das amostras.

Além das abordagens relativas aos três aspectos probabilísticos até então

descritas, Borovcnik (2008) levanta alguns pontos instigantes que aguçam nosso conhecimento e a nossa reflexão, como, nas seguintes afirmações:

> a) Aleatoriedade não existe. É apenas uma forma de pensar sobre o mundo. Temos fortes inter-relações com outros tipos de pensamento, o que pode nos levar em direções diferentes daquelas pré-projetadas pela teoria da probabilidade; b) Somente em raros casos os resultados da manipulação de dados falam por si e permitem uma mensagem clara sem referir-se a probabilidade; c) A peculiaridade do pensamento probabilístico em contraste com a lógica causal ou sobre o pensamento místico é importante para a reflexão; d) Esclarecer a abundância intuitiva do pensamento pessoal sobre a probabilidade pode ajudar a obter intuições estáveis sobre a probabilidade e seu potencial; e) Esclarecer as dependências mútuas entre a probabilidade frequentista, Bayesiana, concepções matemáticas e pensamento intuitivo tornam o conceito flexível e robusto; f) Noções básicas de valor esperado, risco ou variabilidade dependem de consistentes concepções da probabilidade; g) A emergência histórica dos conceitos probabilísticos foi incorporada em jogos de azar, ainda assim, eles fornecem uma fonte de referência para a compreensão e os modelos das situações reais; h) A restrita noção primitiva da probabilidade como frequência negligencia, no longo prazo, outra fonte de informação qualitativa para pesar as evidências que, em muitos casos, são valiosas; i) Qualquer método estatístico inferencial é misturado com probabilidades condicionais e causam ruídos na compreensão dos mesmos. (BOROVCNIK, 2008. p. 5, tradução nossa)

Por meio destas ideias, Borovcnik (2008) conclui que a utilização da probabilidade é muito mais frequente no sentido de cenários do que como um modelo para descrever partes relevantes da realidade, por esse motivo, a estrutura objetivista utilizada para o ensino ocasiona sérios problemas para a compreensão, tornando evidente a necessidade de um conceito de referência muito mais amplo do que o fornecido pela abordagem frequentista. Para tanto, as ideias subjetivistas devem ser incluídas no ensino, sobretudo, com base numa abordagem matemática probabilística que leve em conta o nível de crença pessoal.

Corroborando com as ideias de Gal acerca da necessidade de que os adultos desenvolvam a capacidade de interpretar e avaliar criticamente as informações estatísticas em vários contextos e saber expressar esta compreensão em situações

que exijam tomadas de decisões, Watson (2003) utiliza o modelo de análise de Rasch (1960) para definir os seis níveis de letramento estatístico que oferecem contribuições no sentido de melhorar o desempenho dos alunos e aumentar o envolvimento deles com os contextos, como também, facilitar o desenvolvimento das habilidades matemáticas e, ainda, valorizar a variação e apreciação das terminologias associadas aos conceitos estatísticos. Os componentes do modelo de letramento estatístico apontados por Watson (2003) são:

- Compreensão idiossincrática[14] (Nível 1): Neste nível os estudantes estão longe de fazer algo que possa satisfazer um estatístico. Geralmente, a apreciação do contexto é inexistente, idiossincrática ou baseada na experiência pessoal, principalmente, em relação à amostragem, ao acaso e a inferência. A tarefa de avaliar informações baseia-se em crenças pessoais. Os resultados das chances são suscetíveis de serem sugeridas com base em cores ou números favoritos. Há pouca ou nenhuma evidência de envolvimento em muitas tarefas relacionadas a gráficos ou a médias. As definições dos termos são apresentadas como meras apreciações tautológicas (vícios de linguagem), os alunos conseguem ler algumas células de tabelas, realizar contagens na forma de um para um e realizar adições simples com dois dígitos. O engajamento significativo é limitado a contextos muito simples e com demandas específicas.

- Compreensão informal (Nível 2): Embora o envolvimento com as tarefas neste nível ainda seja passível de ser coloquial e os alunos mostrarem-se distraídos por características irrelevantes ao contexto estudado, há momentos em que eles demonstram apreciação individual por alguns conceitos e acabam se concentrando em uma única característica, tais como "amostra", "média" ou "normal". No entanto, em resposta às tarefas que requerem inferências, os alunos tendem a se concentrar em contar histórias de experiências pessoais ou em características inadequadas de uma imagem gráfica, como no padrão ao invés da frequência. No caso das previsões de chance a justificativa normalmente baseia-se em "tudo pode acontecer" e a variação de ensaios

[14] Em psicologia, idiossincrasia é o conjunto de elementos cuja combinação dá o temperamento e o caráter individual. É a particularidade psíquica de um indivíduo.

repetidos é considerado como improvável de ser voluntário. Quando os alunos são solicitados explicitamente sobre chances, surpreendente, muitos fornecem um resultado apropriado. As habilidades matemáticas são limitadas a tabelas, gráficos, cálculos envolvendo adição ou subtração, ou seja, a valorização do contexto é muito limitada.

- Compreensão inconsistente (Nível 3): As respostas dos alunos são mais propensas ao contexto, contudo, são suscetíveis de serem seletivas dependendo do formato em que as tarefas são demonstradas. Normalmente, os alunos lançam mão de mais de um recurso para chegar a uma resposta, porém, as ideias estatísticas são mais expressas qualitativa do que quantitativamente. Em alguns contextos, os alunos são capazes de compreender o propósito da amostragem, entretanto, não são capazes de detectar seu viés com os métodos de amostragem. Em outros contextos, os alunos mostram-se capazes de escolher o melhor gráfico, mas não conseguem fornecer justificativas razoáveis para a escolha. Quando as respostas das perguntas são de múltipla escolha, os alunos conseguem identificar chances percentuais e os valores das médias. Os sucessos qualitativos em contextos envolvendo chance são identificados como "mais" em relação a uma maior probabilidade, assim como, também são usados os termos "maior" ou "menor" chance nas interpretações de mudanças relativas em relação à conjunção de dois eventos.

- Compreensão consistente – não crítica – (Nível 4): Os alunos apresentam uma consolidação para a apreciação de vários contextos sem a habilidade para questionar afirmações de natureza suspeita. Portanto, eles são mais bem sucedidos em tarefas que não necessitam encontrar erros no raciocínio. Múltiplos recursos podem ser mostrados ao se ensinar as definições dos conceitos, por exemplo, descrever uma amostra como sendo "uma pequena parte de algo maior," a média em termos do algoritmo significativo ou na forma descritiva, variação como "a mudança do tempo variando durante o período de alguns dias”. Os alunos compreendem a sugestão de métodos representativos como "eu escolheria 10 de cada série" ao invés de métodos aleatórios. As habilidades gráficas melhoraram tecnicamente e os alunos

conseguem identificar faixas e valores mais altos, apresentam sucesso parcial na tentativa de desenhar uma associação de duas variáveis. Com base no raciocínio sobre a escala utilizada, os alunos conseguem escolher adequadamente entre dois gráficos de pontos empilhados. Também interpretam com sucesso as proposições condicionais das probabilidades de manchetes de jornais. Na interpretação de uma imagem gráfica, os alunos conseguem fazer inferências baseadas na frequência, porém, não conseguem incluir um elemento de incerteza.

- Compreensão crítica (Nível 5): Os alunos se envolvem com análises críticas em contextos familiares e não familiares que não exijam um sofisticado raciocínio matemático. Conseguem utilizar terminologias apropriadas e dar definições integradas, como, por exemplo, de "amostra" e de "variação". Em métodos de seleção de amostras, os alunos conseguem utilizar os métodos aleatórios e representativos ou, ainda, dois métodos aleatórios diferentes, bem como, identificar a polarização em métodos sugeridos. Os alunos aceitam a representação gráfica para associação de duas variáveis e são capazes de identificar o erro em um gráfico que representa 128%. Em relação à variação, os alunos conseguem utilizar voluntariamente palavras como "acerca de" ao fazer previsões, notar mudanças ao longo do tempo ou mencionar explicitamente a variação ao analisar características incomuns de um gráfico de barras.

- Compreensão matematicamente crítica (Nível 6): Os alunos são capazes de exibir habilidades de questionamento crítico em todos os contextos, empregam o raciocínio proporcional e a compreensão de eventos independentes ao calcular probabilidades. Percebem a importância de incluir o aspecto da incerteza ao fazer tarefas sobre inferências. Os alunos reconhecem um problema sem a necessidade de dicas e mencionam de forma específica os termos "amostra" ou "população" em artigos. Conseguem identificar a presença de um *outlier* num conjunto pequeno de dados e eliminá-lo do cálculo da média. Os alunos conseguem perceber relações de causa-efeito e a presença de variáveis escondidas em informações disponibilizadas em mídias. Também são capazes de interpretar possíveis

deturpações em gráficos de barras.

Por meio das concepções referentes aos componentes do modelo de letramento estatístico identificados por Watson (2003), evidencia-se que, nos níveis 1 e 2, os alunos possuem dificuldades para interpretar contextos estatísticos simples. Nos níveis 3 e 4, os estudantes conseguem lidar com tarefas que exigem compreensões de conceitos em diversas configurações, porém, ainda sem raciocínio crítico para aventar questionamentos. Já nos níveis 5 e 6, os alunos conseguem apreciar as sutilezas dos contextos e demonstram certa propensão para inquirir a maioria dos questionamentos que lhes são feitos sem a justificativa estatística adequada. Portanto, observa-se a importância da influência do contexto para a compreensão dos alunos acerca dos conceitos estatísticos e, por conseguinte, dos conceitos probabilísticos.

Outra importante colaboração teórica para o letramento probabilístico advém dos estudos realizados por Ireland e Watson (2009), por meio dos quais as autoras mapearam a construção das conexões entre os aspectos teóricos e experimentais da probabilidade. Para tanto, analisaram as compreensões de alunos sobre probabilidade mediante interações resultantes entre a utilização de materiais manipuláveis, o *software* de simulação *TinkerPlots* e a lei dos grandes números.

A Figura 3 representa esquematicamente a estrutura conceitual dos aspectos concretos e abstratos da probabilidade proposta por Ireland e Watson (2009):

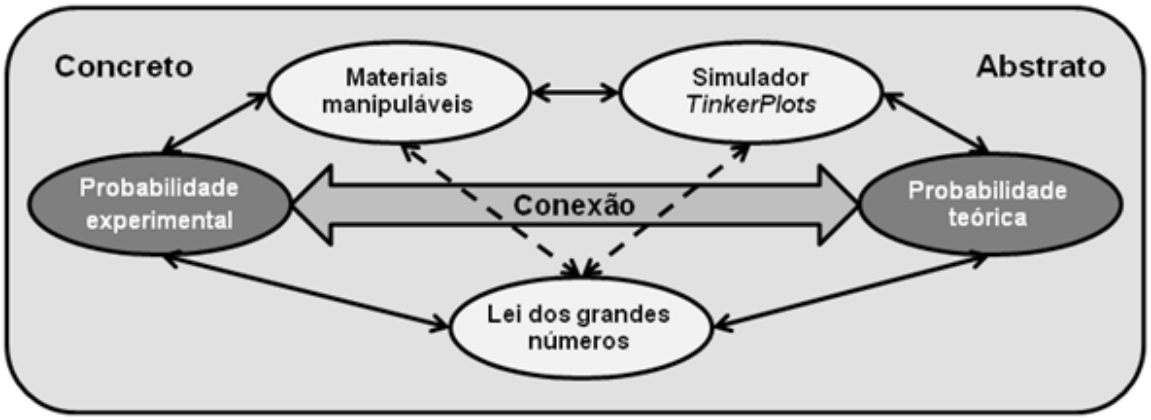


Figura 3. Estrutura conceitual do concreto ao abstrato. (Fonte: elaborado pelo autor com base em Ireland e Watson , 2009, p. 233)

A pesquisa de Ireland e Watson (2009) foi desenvolvida com alunos dos 5º e 6º anos da educação básica australiana, portanto, com idades entre 10 e 12 anos. A escolha dos sujeitos de pesquisa teve por base a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget e Inhelder (1951). O processo de validação da estrutura conceitual foi baseado no mapeamento das respostas dados pelos alunos em relação aos cinco elementos descritos na Figura 3, para tanto, as autoras valeram-se de quatro categorias da taxonomia SOLO de Biggs e Collis (1982, 1991), a saber: Uni-estrutural (U), Multi-estrutural (M), Relacional (R) e Pré-estrutural (P).

Os resultados encontrados por Ireland e Watson (2009) indicam que um terço dos estudantes tinha boa base para cálculos de probabilidades e algumas intuições sobre a variação envolvida em um ambiente experimental. Durante as aulas práticas em sala de aula, observou-se que alguns alunos tinham dificuldade em usar casas decimais para os centésimos e milésimos e realizar conversões entre frações e decimais. No entanto, as apreciações dos esboços realizados pelos alunos nas folhas de registros indicaram que 70% do nivelamento dos resultados experimentais ocorreram na medida em que os tamanhos das amostras aumentavam.

As discussões advindas das análises realizadas por Ireland e Watson (2009), proporcionaram as seguintes elucidações envolvendo o mapeamento das conexões entre os aspectos teóricos e experimentais da probabilidade:

- Todos os estudantes entrevistados foram capazes de articular, em algum momento durante a investigação, um nível básico de compreensão da relação entre a probabilidade teórica e a experimental, inclusive, foram capazes de associar os resultados experimentais com a probabilidade teórica adequada no simulador. Também demonstraram compreensão sobre a lei dos grandes números, raciocínio proporcional, conceitos teóricos subjacentes de justiça e sobre resultados igualmente prováveis.

- O uso de amostras maiores em um ambiente de simulação mostrou-se favorável para a realização de inferências adequadas sobre a equidade e o reconhecimento de proporções em algumas combinações binomiais.

- Os alunos vivenciaram alguns conflitos para diferenciar padrões e variações em amostras de tamanhos diferentes, evidenciando que uma rede vinculada de conceitos envolvendo o raciocínio proporcional, a compreensão das implicações dos conceitos teóricos subjacentes de justiça e os resultados igualmente prováveis constituem-se na chave para o desenvolvimento da compreensão dos alunos sobre a conexão entre os resultados da probabilidade experimental e da teórica.

- Para alguns dos alunos entrevistados, a falta de compreensão sobre as implicações do conceito teórico subjacente de justiça constitui-se numa barreira para conectar a probabilidade teórica aos resultados experimentais.

- Ficou evidente que é imperativo expor os alunos a contextos mais amplos do mundo real que incorporem amostras maiores na consideração e discussões da aleatoriedade e da equidade.

- Os alunos, quando envolvidos com ensaios simulados, demonstram confiança nas representações visuais para determinar justiça. No continuum do concreto ao abstrato, a confiança nos gráficos a partir de simulações torna-se um elo para a compreensão dos conceitos mais abstratos.

- O uso de um simulador de probabilidade pode tornar a Lei dos Grandes Números mais facilmente acessível, uma vez que possui um contador para registrar grandes amostras, como também, fornecer um elo significativo com os materiais concretos manipuláveis. Os alunos foram capazes de seguir a geração de resultados em relação aos resultados experimentais tangíveis correspondentes, que por sua vez, forneceu assistência para o desenvolvimento da conexão global entre a probabilidade experimental e a teórica.

Nota-se que os resultados dos trabalhos de pesquisa desenvolvidos por Watson (2003) e Ireland e Watson (2009) oferecem contribuições para uma melhor compreensão acerca de como o processo de ensino da probabilidade precisa ser desenvolvido para favorecer a construção do conhecimento aos alunos.

Outras ideias interessantes são propostas por Gal (2012), por meio das quais o autor defende a necessidade de se abordar a alfabetização em probabilidade como uma submeta separada da Estatística e da Educação Matemática, principalmente, diferenciando a alfabetização probabilística dos tradicionais objetivos até então focados nas atuais prescrições curriculares. Para tanto, Gal (2012) considera a necessidade de se distinguir entre uma visão interna e uma visão externa das metas educacionais.

De acordo com Gal (2012), na visão interna das metas educacionais, os educadores matemáticos e estatísticos dão como certo que o principal objetivo do ensino da probabilidade reside em fazer com que os alunos aprendam a estrutura e o conteúdo disciplinar, para que então, sejam capazes de compreender e aplicar os conhecimentos adquiridos em conceitos abstratos, provas, fórmulas e objetos visuais, como se fossem métodos e ferramentas lógicas inerentes ao seu domínio, ou seja, trata-se de uma visão que resume, de maneira informal, que os alunos sejam capazes de pensar como se fossem matemáticos ou estatísticos.

Gal (2012) também considera que a visão interna encontra-se evidenciada em muitos currículos matemáticos, nos quais a probabilidade é vista como um assunto estritamente quantitativo, permeado por um conjunto de regras internas e com uma terminologia especializada. Nesse sentido, o objetivo educacional esmera-se para que aos alunos desenvolvam a capacidade de realizar vários cálculos, combinando elementos e noções da probabilidade clássica e frequentista, com base em regras e metodologias claramente especificadas.

Já em relação à visão externa das metas educacionais, Gal (2012) considera que, em um nível mais amplo, esta visão caracteriza-se pela necessidade de assegurar que as escolas permitam que todos os alunos desenvolvam as habilidades e competências[15] requeridas para a vida adulta no século XXI. Esta perspectiva externa é desafiadora para os educadores matemáticos e estatísticos, pois não basta ensinar apenas os conteúdos importantes da Matemática e tampouco

[15] Gal considera o termo “competência” tal como definido no projeto DeSeCo da OCDE: "o interesse, atitude e capacidade dos indivíduos para acessar, gerenciar, integrar e avaliar informações, construir novos conhecimentos, e se comunicar com outros, a fim de funcionar de forma eficaz na era da informação" (RYCHEN & SALGANIC, 2003, p. 8).

seus alunos devem ser preparados para fazer o que os matemáticos ou estatísticos fazem, mas sim, ensinar de maneira muito mais ampla e diferente, levando em consideração se os resultados do seu trabalho são suficientes e sincronizados com a natureza das tarefas que os adultos enfrentam nas economias e nas sociedades modernas ricas em informação.

Partindo das ideias sobre as visões interna e externa, Gal (2012) considera que ao se combinar estas ideias com as competências e os resultados escolares, emerge a necessidade de posicionar o letramento probabilístico acima e além dos objetivos da visão interna, valorizando assim, o ensino da probabilidade. O autor define o letramento probabilístico como sendo:

> A habilidade de acessar, utilizar, interpretar e comunicar informações e ideias relacionadas com a probabilidade, a fim de engajar e gerenciar, de forma eficaz, as demandas dos papéis e tarefas que envolvem as incertezas e os riscos do mundo real. (GAL, 2012, p. 4, tradução nossa)

Gal (2012) justifica sua definição para o letramento probabilístico com base em dois importantes aspectos. O primeiro aspecto considera que a construção do letramento probabilístico deve ser vista como um componente de duas construções mais amplas, a literacia estatística[16] e a numeracia[17] adulta, permitindo assim, interpretar a primeira parte da sua definição sobre o letramento probabilístico: “a habilidade de acessar, utilizar, interpretar e comunicar”. Partindo das ideias do primeiro, o segundo aspecto consiste em ver o letramento probabilístico como uma ampla competência que exige dois blocos de construção: os elementos do conhecimento cognitivo e os elementos de disposição (vide Tabela 1). Para o autor, a segunda parte da sua definição sobre o letramento probabilístico é o núcleo que vai além dos pontos de vista internos do padrão de ensino da probabilidade e refere-se ao papel da probabilidade na vida adulta, justificando assim, a segunda parte da sua definição: “a habilidade de engajar e gerenciar, de forma eficaz, as demandas

[16] De acordo com Gal (2002), a literacia estatística consiste na habilidade que um indivíduo precisa possuir para interpretar, analisar criticamente e comunicar as informações estatísticas.

[17] Segundo Gal (2000), a numeracia pode ser entendida como um agregado de habilidades, conhecimentos, crenças, disposições, hábitos mentais, capacidades comunicativas e habilidades de resolução de problemas, que os indivíduos precisam para se engajarem de maneira autônoma e administrarem efetivamente as situações de numeracia envolvendo números, informações quantitativas ou quantificáveis e informações visuais ou textuais baseadas em ideias matemáticas ou que possuam elementos matemáticos intrínsecos.

dos papéis e tarefas que envolvem as incertezas e os riscos do mundo real" (GAL, 2012).

Tabela 1: Blocos de construção dos elementos do conhecimento cognitivo e dos elementos de disposição

Elementos do conhecimento cognitivo
1. Grandes ideias: Variação, aleatoriedade, independência, previsão/incerteza. A familiaridade com esses tópicos possibilita aos alunos um entendimento da representação, interpretação e implicações de afirmações probabilísticas.
2. Descobrir probabilidades: Maneiras de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos (incluindo a clássica, frequentista, métodos subjetivos e processos híbridos combinando todos eles e/ou utilizar outras fontes complexas).
3. Linguagem: Os termos e métodos utilizados para comunicar sobre a oportunidade e a capacidade de compreender as formas heterogêneas por meio das quais a probabilidade é mundialmente comunicada.
4. Contexto: Compreender o papel e as implicações das questões e mensagens probabilísticas em vários contextos e também no discurso pessoal e público.
5. Questões críticas: Questões para refletir sobre quando se lida com probabilidades, tais como a fonte da estimativa, a credibilidade da fonte, a clareza do significado da mensagem, como razoáveis as estimativas são feitas à luz do próprio conhecimento do mundo e da estatística e probabilidade etc.
Elementos de disposição
1. Postura crítica: Processo desenvolvido pelo leitor durante a interpretação de dados estatísticos, mobilizando e balanceando diversos elementos e conhecimentos.
2. Crenças e atitudes: Afetam a maneira de como os alunos valem-se da Estatística dentro e fora da sala de aula. As crenças e atitudes também exercem influências sobre os processos de ensino e de aprendizagem; comportamento dos estudantes fora da sala de aula; e na decisão dos alunos escolherem ou não estudar Estatística.
3. Sentimentos pessoais sobre a incerteza e o risco: As pessoas reagem de formas diferentes quando confrontadas com a necessidade de estimar a probabilidades de certos eventos ou lidar com situações de risco. Em essência, emoções como a aversão ao risco ou o sucesso antecipado afetam as decisões das pessoas em lidar com fenômenos fortuitos em situação social, política e financeira.

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos conceitos de Gal (2004, 2009 e 2012).

Considerando a definição do letramento probabilístico e conhecendo os blocos de construção dos elementos do conhecimento cognitivo e dos elementos de disposição, Gal (2012) defende que o ensino da probabilidade deve aumentar as chances dos indivíduos poderem se envolver autonomamente em tarefas reais e nas

situações matemáticas ou estatísticas. Para tanto, os conteúdos escolares não devem ser limitados aos exemplos tradicionais que envolvem jogos de azar ou baseados em problemas artificiais, mas sim, precisam refletir situações do cotidiano envolvendo a probabilidade, a incerteza e o risco. Além disso, necessita-se que haja mais espaço para discussões sobre os aspectos subjetivos da probabilidade que fazem parte do mundo real e que, portanto, são muito diferentes das típicas situações propostas nas aulas de Matemática. Como também, há uma necessidade de se abordar as disposições e os sentimentos pessoais dos alunos sobre a chance, a incerteza e o risco.

Seguindo a mesma linha de raciocínio sobre a importância do letramento probabilístico, até então discutida neste capítulo, Nunes e Bryant (2011) e Bryant, Nunes, Evans, Gottardis e Terlektsi (2013), compreender a associação entre duas variáveis, demanda, no mínimo, que os alunos entendam os conceitos de aleatoriedade, espaço amostral e quantificação de probabilidades. Nesse sentido, os autores defendem que o raciocínio correlacional precisa ser desenvolvido no decorrer da aprendizagem probabilística escolar, uma vez que a compreensão da aleatoriedade e do espaço amostral capacita os alunos quanto ao reconhecimento dos casos que devem ser apoiados e os que contradizem a ideia de uma associação entre duas variáveis, enquanto que, por sua vez, a compreensão da quantificação de probabilidades possibilita que os alunos determinem a existência de uma relação mútua entre os dois eventos.

Para Bryant, Nunes, Evans, Gottardis e Terlektsi (2013), embora muitos eventos cotidianos sejam bem compreendidos e totalmente previsíveis, em contrapartida, também existem muitos eventos que não são tão previsíveis ou certos e que, portanto, podem acontecer de forma aleatória. Contudo, mesmo que alguns tipos de evento não sejam determinados, ainda podemos raciocinar logicamente sobre elas, possibilitando trabalhar fora da probabilidade de resultados particulares, e, assim, compreender os riscos e os possíveis benefícios de agir de uma forma e não de outra. Para os autores, esta é uma razão pela qual a compreensão da probabilidade é considerada um aspecto muito importante da educação para a cidadania e para a ciência.

Bryant et al (2013) consideram também que apesar da aleatoriedade e da probabilidade terem importância central na vida das pessoas, muitas vezes elas possuem dificuldades em pensar sobre a probabilidade de forma racional e na quantificação da probabilidade, inclusive, acreditam que pensar logicamente seja incompatível com aleatoriedade. Foi justamente por conta desta dificuldade geral apresentada pelas pessoas em relação ao raciocínio probabilístico que uma equipe de pesquisadores da Universidade de Oxford encontrou motivação para desenvolver um programa de ensino destinado a promover a compreensão dos alunos sobre probabilidade na escola primária considerando o nível de desenvolvimento cognitivo destes alunos, tal como definido por Piaget e Inhelder (1951).

Analisando as concepções abordadas neste tópico, observamos que algumas delas mostram-se recorrentes, evidenciando sua importância para o letramento probabilístico pela ótica de diferentes autores. Por exemplo, os autores Heitele (1975) e Bryant, Nunes, Evans, Gottardis e Terlektsi (2013) defendem a importância de se considerar os diferentes níveis cognitivos dos alunos ao se abordar os conceitos probabilísticos; para Garfield e Ahlgrem (1988), Batanero (2005), Borovcnik (2008) e Gal (2012), o ensino da probabilidade precisa ser baseado em situações reais do cotidiano; Garfield e Ahlgrem (1988) e Ireland e Watson (2009) consideram importante valer-se de atividades e simulações para discorrer sobre os temas probabilísticos; Garfield e Ahlgrem (1988), Batanero (2005), Borovcnik (2008) e Gal (2012) apontam a necessidade de se encontrar soluções para reduzir os equívocos dos alunos em relação ao raciocínio estatístico e probabilístico.

3.3 A relevância da formação docente para o ensino de probabilidade

Batanero (2009) descreve um panorama da atual situação na formação dos professores em relação à estatística e probabilidade. Neste contexto, a autora considera que as mudanças no ensino de probabilidade nas escolas dependem da forma como os professores podem ser convencidos acerca da utilidade dos seus conceitos para os alunos, como também, faz-se necessária uma melhor preparação dos professores, pois muitos dos atuais programas de formação ainda não preparam adequadamente os professores para a tarefa de ensinar estatística e probabilidade.

Ainda, segundo Batanero (2009), mesmo que muitos professores secundários possuam especialização em Matemática, normalmente durante a formação aprendem apenas estatísticas teóricas, são poucos os que recebem formação específica em estatística aplicada. Além disso, esses professores também precisam de algum treinamento pedagógico relacionado à educação estatística. A situação torna-se ainda mais desafiadora para os professores primários, pois poucos tiveram uma formação adequada em estatística teórica ou aplicada.

Batanero (2009) cita que as pesquisas em educação estatística desenvolvidas por Cañizares, Ortiz, Batanero e Serrano (2002) e Cardeñoso, Azcárate e Serrado (2005) mostram que os livros e os documentos curriculares preparados para os professores não oferecem apoio didático suficiente, sobretudo, por apresentarem uma visão muito estreita da estatística, com aplicações restritas aos jogos de azar e, ainda, possuírem definições incorretas ou incompletas dos conceitos estatísticos.

Outra colocação interessante de Batanero (2009) diz respeito à interação entre estatística e probabilidade, pois no currículo de muitos países, ambas encontram-se ligadas dentro da teoria e prática da Matemática escolar. Contudo, cumpre ressaltar que esta observação da autora não ocorre na educação brasileira. Ainda, segundo Batanero, não é fácil ensinar probabilidade, afinal, seu adequado ensinamento não se resume apenas na apresentação de diferentes modelos probabilísticos e suas respectivas aplicações, mas demanda uma abordagem mais profunda em questões mais amplas, tais como: a interpretação do seu significado; e o entendimento das razões pelos quais um determinado modelo é adequado para o desenvolvimento de intuições corretas e a compreensão de ideias controversas, como a aleatoriedade ou a causalidade.

Quanto à formação de professores para o ensino de probabilidade, Batanero (2009) defende que as concepções e crenças estatísticas dos professores constituem-se no fator chave para uma mudança no ensino da Matemática. De acordo com a autora, enquanto na Matemática tradicional os tópicos são ensinados de maneira linear mediante conceitos hierárquicos e cumulativos, o conhecimento estocástico é mais complexo e sistêmico, uma vez que os problemas estocásticos possuem mais atividades interpretativas, como também, até mesmo os conceitos

mais elementares possuem inter-relações com o contexto aos quais se aplicam.

Batanero (2009) também destaca que os professores possuem teorias subjetivas em relação aos conteúdos e objetivos instrucionais, por esse motivo, os conteúdos matemáticos curriculares podem diferir consideravelmente dos objetivos ou crenças dos professores. Além disso, certos conhecimentos (incluindo a compreensão de como os alunos aprendem conceitos específicos) são difíceis de serem obtidos pelos professores durante a formação inicial, por conta disto, estes conhecimentos serão adquiridos no decorrer do contínuo desenvolvimento profissional e após alguma experiência em sala de aula. No entanto, quando os professores lançam-se ao ensino de probabilidade e estatística, restam-lhes poucas oportunidades para seu desenvolvimento profissional.

No tocante aos conhecimentos probabilísticos dos professores, Batanero (2009) considera que eles são importantes para as decisões de instrução dos professores no ensino de probabilidade, contudo, tal fato suscita certa preocupação por conta das evidências de que normalmente os professores possuem fraco entendimento de probabilidade, principalmente, em relação de três equívocos probabilísticos: representatividade, equiprobabilidade e aproximação de resultados.

Com base nos resultados de algumas investigações, Batanero (2009) relata a preocupação dos pesquisadores quanto à falta de conhecimento adequado por parte dos professores acerca da importância das seguintes ideias probabilísticas: variação; distribuição; e realização de experiências ou simulações.

Em relação ao conhecimento profissional dos professores, Batanero (2009) defende que os professores tendem a adaptar os métodos de resoluções de problemas e os padrões de raciocínios utilizados em Matemática a uma visão estocástica para o ensino de estatística e probabilidade. Da mesma forma, um amplo conhecimento estatístico, mesmo quando essencial, não é suficiente para que os professores sejam capazes de ensinar probabilidade. Tal como argumentado por Ponte (2008), há de se dar melhor atenção ao fato de como os professores aprendem e como se valem deste conhecimento em sua prática profissional. Para tanto, os professores precisam ser encarados como profissionais, nesse sentido,

todos os elementos da prática docente (preparação de aulas, tarefas e materiais necessários, observância e reflexão sobre o que se ensina) configuram-se no ponto central do processo de formação de professores.

O artigo de Batanero (2009) também apresenta um importante resumo sobre algumas pesquisas que abordam a temática do conhecimento profissional docente, nesse sentido, destacam-se os seguintes trabalhos:

- Aichele e Coxford (1994) descrevem os seguintes aspectos do “saber profissional”: i) reflexão epistemológica sobre o significado dos conceitos a serem ensinados; ii) experiência para adaptar o conhecimento aos diferentes níveis de ensino e compreensão dos alunos; iii) capacidade crítica para avaliar livros e documentos curriculares; iv) capacidade de prever as dificuldades de aprendizagem dos alunos, os erros, obstáculos e estratégias para resolução de problemas; v) capacidade de desenvolver e analisar testes e instrumentos de avaliação e interpretar as respostas fornecidas pelos alunos; vi) experiência com bons exemplos de situações de ensino, ferramentas e materiais didáticos.
- Batanero (2009) enfatiza que a alfabetização probabilística requer uma capacidade de analisar criticamente e razão sobre os fenômenos aleatórios do mundo real, portanto, torna-se necessário saber se os professores são ou não capazes de: a) reconhecer quais conceitos podem ser abordados mediante uma tarefa ou recurso específico; b) implementar uma aprendizagem eficaz na sala de aula.
- Godino, Batanero, Roa e Wilhelmi (2008) propuseram um modelo com os seguintes componentes: i) epistemologia; ii) recursos instrucionais; iii) conhecimento afetivo dos alunos; iv) capacidade para implementar um discurso e uma comunicação adequada em sala de aula; v) capacidade para adaptar-se ao currículo escolar global; vi) fatores sociais.
- Makar (2008) sugere algumas atividades que podem contribuir para a formação dos professores em probabilidade, propondo um modelo de aprendizagem em quatro ciclos: i) orientação; ii) exploração; iii) consolidação; iv) autorização.

Por meio das colocações de Batanero (2009), observa-se que os professores

de Matemática precisam de apoio e formação adequada para ensinar probabilidade e, assim, promover uma aprendizagem satisfatória aos seus alunos.

3.4 O conceito de chance e sua utilização na comparação de riscos

Brant (2004) considera que os valores de chances são uma simples conversão da probabilidade de um para um. Assim, para um evento com um dado valor de probabilidade, *p*, as chances correspondentes resultam num valor numérico dado por:

$$\textit{Chance (evento)} = \frac{p}{1-p}$$

Para exemplificar, Brant (2004) lança mão do seguinte exemplo: ao se apostar na ocorrência de um cavalo "*A*" ganhar uma corrida e esse evento possui uma probabilidade conhecida, $pA =$ probabilidade do cavalo "*A*" vencer, então, apostando-se um dólar nesse cavalo, deve-se ter um retorno justo para igualar as chances. Dessa forma, considerando que o cavalo "*A*" possui 50% de chance de ganhar $(pA = 0{,}5)$, logo, a *chance de {A}* $= \frac{0{,}5}{1-0{,}5} = 1$, ou seja, o retorno equitativo para uma aposta de um dólar é de um dólar. No entanto, se o cavalo possuir 25% de chance de ganhar $(pA = 0{,}25)$, a *chance de {A}* $= \frac{0{,}25}{1-0{,}25} = \frac{1}{3}$, ou seja, caso o cavalo vença a corrida, o retorno equitativo será de três dólares para cada dólar apostado.

Ainda, segundo Brant (2004), se os valores de chances são apresentados com uma probabilidade, eles podem ser convertidos em probabilidades, de acordo com a seguinte fórmula: $p = \frac{chance}{1+chance}$. Dessa forma, sabendo que as chances de um evento seja de 1 em 10, ou seja, 0,10, a probabilidade do evento será de $p = \frac{0{,}1}{1+0{,}1} = \frac{0{,}1}{1{,}1} \approx 0{,}091$. Observa-se com esse exemplo que a probabilidade de 0,091 é próxima da chance de 0,1. Esse exemplo possibilita-nos considerar que quando as chances possuem valor pequeno, as probabilidades apresentam uma aproximação razoável e vice-versa.

Outro conceito abordado por Brant (2004) refere-se à razão de chance (*odds ratio*). Para esse autor, a razão de chances é considerada como uma medida comparativa entre duas chances relativas de eventos diferentes. Ou seja, para duas probabilidades, $p_A = Pr\,\{ocorrer\ o\ evento\ "A"\}$ e $p_B = Pr\,\{ocorrer\ o\ evento\ "B"\}$ as chances de ocorrência correspondentes de *"A"* em relação a *"B" são:*

$$\textit{Razão de chances \{A versus B\}} = \frac{chance\ \{A\}}{chance\ \{B\}} = \frac{p_A/(1-p_A)}{p_B/(1-p_B)}$$

Em Estatística, emprega-se também a razão de chances como medida comparativa de duas probabilidades p_A e p_B utilizadas como uma alternativa para a diferença de risco e o risco relativo. Considerando que estes últimos são definidos por:

$$\textit{Diferença de risco} = p_A - p_b$$

$$\textit{Risco relativo} = \frac{p_A}{p_B}$$

Matematicamente, os cálculos da razão de chances, da diferença de risco e do risco relativo podem ser explicitados por meio do seguinte exemplo: Supondo a realização de um estudo comparativo entre duas novas vacinas "Alfa" e "Beta" para investigar a relação de p_A e p_B, na qual as possíveis probabilidades advêm de cada vacina ser eficaz ou ineficaz quando ministradas aos pacientes. Assim, a tabulação padrão dos dados resultantes dos eventos e as respectivas frequências observadas resultam na seguinte tabela de dupla entrada:

Tabela 2. Exemplo de comparação de risco por meio da razão de chance

Tipo de Vacina	Probabilidade de resultado		Total
	Eficaz	Ineficaz	
Alfa	w	x	w + x
Beta	y	z	y + z
Total	w + y	x + z	n

De acordo com os dados da tabela 2, observa-se que a vacina "Alfa" relacionada com a vacina "Beta" propicia as seguintes comparações:

$$\textit{Razão de chance} = \frac{w \cdot z}{x \cdot y}$$

$$\textit{Diferença de risco} = \frac{w}{w+x} - \frac{y}{y+z}$$

$$\textit{Risco relativo} = \frac{w/(w+x)}{y/(y+z)}$$

Observando as três comparações, Brant (2004) considera que, num sentido matemático, a razão de chances mostra-se como a medida comparativa mais natural, pois algebricamente é mais simples (e esteticamente agradável). Como também, quando ambas as probabilidades em comparação são pequenas, a razão de chances aproxima-se do risco relativo.

3.5 A utilização das frequências naturais para comparação do risco

Além das possibilidades de cálculos para comparação de risco apresentadas no tópico anterior, julgamos importante trazer para nossa discussão as ideias de Gigerenzer (2002) a respeito do risco. Para esse autor, a maioria das pessoas demonstra ser incapaz de raciocinar sobre incertezas e riscos. Partindo dessa premissa, o autor classifica essa limitação de "*statistical innumeracy*" (inumeracia estatística) e descreve três formas distintas de inumeracia: desconhecimento do risco (*ignorance of risk*); falha na comunicação do risco (*miscommunication of risk*); e pensamento nebuloso sobre o risco (*clouded thinking*).

O desconhecimento do risco caracteriza-se quando uma pessoa não sabe, nem mesmo aproximadamente, qual é a relevância pessoal ou profissional de um grande risco. As falhas na comunicação do risco evidenciam-se quando uma pessoa conhece os riscos, mas não sabe como comunicá-los de forma eficaz. Já o pensamento nebuloso sobre o risco ocorre quando uma pessoa conhece os riscos, mas realiza inferências incorretas em relação aos fatos estatísticos relevantes.

Para Gigerenzer (2002), as falhas na comunicação do risco são muitas vezes

a regra e não a exceção. O autor considera que as probabilidades de eventos únicos, os riscos relativos e as probabilidades condicionais são os meios padronizados para comunicação de informações, por esse motivo, configuram-se como os três principais tipos de riscos envolvidos nas falhas de comunicação.

Gigerenzer (2002) julga que as probabilidades de eventos únicos podem causar falhas de comunicação porque as pessoas tendem a considerar diferentes classes de referências em relação a uma determinada informação, principalmente, nas afirmações mais banais, como por exemplo, nas informações sobre as previsões do tempo. O autor elucida essa questão da seguinte maneira: com base na previsão de que "há 30% de chance de chover amanhã", algumas pessoas pensam que poderá chover 30% do tempo, outras que poderá chover em 30% da localidade indicada pela previsão, e outras, ainda, que poderá chover 30% durante todo o dia. Embora a informação da terceira opção seja correta, cerca de dois terços das pessoas interpretarão a informação incorretamente.

Quanto aos riscos relativos, o autor considera que, por se tratarem de números maiores quando comparados com os riscos absolutos, os resultados apresentados desta forma também parecem maiores do que os mesmos resultados apresentados em termos de riscos absolutos. Por esse motivo, o risco relativo é comumente utilizado para descrever informações sobre os benefícios clínicos nas áreas da medicina e da saúde pública.

Em relação às informações descritas na forma de probabilidades condicionais, Gigerenzer (2002) qualifica que muitas vezes essas informações são mal interpretadas e que, inclusive, até os profissionais altamente qualificados encontram dificuldades ao fazer inferências baseadas em probabilidades. Para defender seu ponto de vista, o autor cita o seguinte exemplo: diante da declaração “se uma mulher está com câncer de mama, a probabilidade do seu teste de mamografia ser positivo é de 90%", muitas vezes é confundida com a afirmação "se um teste de mamografia for positivo, a probabilidade de a mulher estar com câncer de mama é de 90%".

O autor também considera a representação criativa como parte indispensável

na solução de problemas e na utilização de diferentes formatos para representar as informações probabilísticas, dessa forma, pode ser extremamente útil mudar as representações dos riscos e das probabilidades por frequências naturais.

Com base nessas ideias, Gigerenzer (2002) aponta que a representação é parte inerente do raciocínio e, por isso, acaba resguardando a mente dos processos multiplicativos necessários para se lidar com probabilidades. Como também, defende que as frequências naturais não dependem tanto das análises computacionais e assemelham-se mais aos modos pelos quais experimentamos as informações numéricas no cotidiano.

Outra perspectiva interessante proposta por Gigerenzer e Hoffrage (1995), baseia-se na argumentação de que a mente humana parece estar mais sintonizada para fazer inferências com base em frequências naturais ao invés de com probabilidades e porcentagens. Os autores justificam que, durante sua existência histórica, os seres humanos sempre realizaram inferências a partir das informações codificadas sequencialmente com base em experiências diretas, sendo assim, as frequências naturais podem ser vistas como o resultado final desse processo evolutivo. Em contrapartida, a probabilidade matemática só surgiu em meados do século XVII, ou seja, as probabilidades e as porcentagens são muito mais recentes na história da humanidade. Por esse motivo, assume-se que as mentes evoluíram para lidar com as frequências naturais ao invés das probabilidades.

De acordo Gigerenzer (2011), as frequências naturais podem ser entendidas como uma alternativa representativa para facilitar a compreensão de informações expressas em probabilidades condicionais. Para expressar as frequências naturais, toma-se um número representativo suficientemente grande (como 100 ou 1000, dependendo a prevalência) e quebra-se este número em valores mais baixos.

Por meio da Figura 4, Gigerenzer (2011) demonstra as diferenças existentes quando as mesmas informações são representadas na forma de probabilidades condicionais e na forma de frequências naturais. Para tanto, o autor baseia-se na frequência comum de dois eventos, sendo um a quantidade de mulheres com câncer e, o outro, os resultados positivos em testes de mamografia:

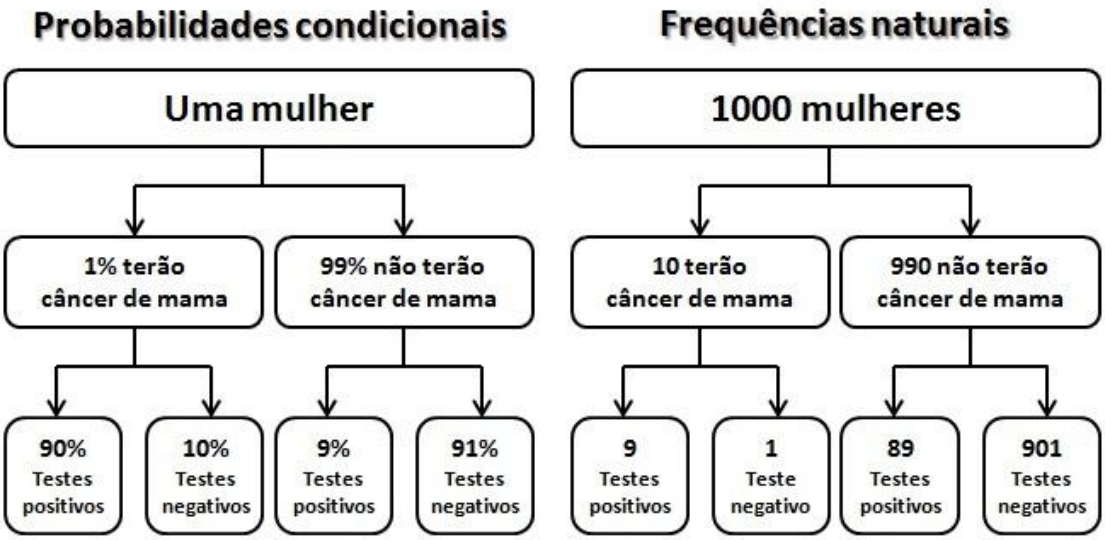


Figura 4: Representação de probabilidades condicionais e frequências naturais

De acordo com os dados da Figura 4, Gigerenzer (2011) diferencia os raciocínios necessários para a compreensão das informações e posteriores inferências sobre as probabilidades:

- Raciocínio pelo cálculo das probabilidades condicionais: Probabilidade de câncer de mama sabendo que o resultado foi positivo no teste de mamografia $= \frac{0{,}01\ x\ 0{,}9}{0{,}01\ x\ 0{,}9 + 0{,}99\ x\ 0{,}09}$.

- Raciocínio pelo cálculo das frequências naturais: Probabilidade de câncer de mama sabendo que o resultado é positivo no teste de mamografia $= \frac{9}{9 + 89}$.

Dessa forma, segundo Gigerenzer (2011), o cálculo por meio das probabilidades condicionais dificulta a inferência sobre a predição do teste da mamografia ser positivo, ao passo que, o cálculo por meio das frequências naturais, facilita a inferência. Para o autor, isso se deve ao fato de que a representação simplifica o cálculo, mesmo que ambas as fórmulas sejam versões da regra bayesiana, bem como, o fornecimento de uma representação útil configura-se como uma habilidade fundamental na arte da comunicação de risco.

Com base em suas ideias, Gigerenzer (2002) defende uma campanha

educacional que envolva todos os níveis de ensino, os profissionais e os cidadãos comuns para que aprendam a lidar adequadamente com o risco, principalmente, para que entendam, expliquem e informem suas escolhas envolvendo riscos e incertezas.

Diante das explanações concernentes ao conceito de risco apresentadas, cumpre ressaltar que, embora o risco possa ser calculado para fins de comparações probabilísticas, esse tipo de abordagem não faz parte do programa de ensino sobre probabilidade e risco que investigamos, pois, no referido programa de ensino, Nunes e Bryant (2011) e Bryant e Nunes (2012) baseiam-se nas ideias defendidas por Gigerenzer (2002, 2011) e Gigerenzer e Hoffrage (1995), sobretudo, quanto ao conceito de frequências naturais para representar dados probabilísticos. Cabe ressaltar que, para efeito do presente estudo, consideramos a abordagem sobre risco de forma ainda mais simples, ou seja, partindo do conhecimento das informações acerca das probabilidades de ocorrência de dois eventos quaisquer, numa determinada situação problematizada em que haja necessidade de se fazer uma escolha, espera-se que os alunos possam fazer correlações adequadas entre essas probabilidades e, assim, optar pelo evento que apresentar menor risco.

CAPÍTULO 4

A PROBABILIDADE E O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO PELA ÓTICA DE ALGUMAS PESQUISAS

No presente capítulo, apresentamos uma análise sucinta das pesquisas que julgamos pertinentes ao nosso trabalho e que, por esse motivo, possibilitaram a ampliação da nossa visão em relação à aprendizagem e ao ensino dos conceitos probabilísticos.

No programa de ensino em estudo, a aprendizagem probabilística dos alunos é mobilizada por meio das demandas cognitivas referentes à aleatoriedade, ao espaço amostral, ao cálculo de probabilidades e à compreensão do risco. Sendo assim, dentre as várias leituras realizadas, optamos pelas pesquisas que apresentam similaridades com essas demandas cognitivas, bem como, de certa forma, complementam o estudo que ora desenvolvemos. Justificamos nossa opção em virtude da intencionalidade de realizar a revisão de literatura e, simultaneamente, analisar os aspectos convergentes e ou divergentes entre o nosso estudo e algumas pesquisas correlatas.

4.1 Investigações acerca da aprendizagem dos alunos por meio de atividades didáticas envolvendo probabilidade

Neste tópico expomos os procedimentos e os resultados oriundos de algumas pesquisas acadêmicas, por meio das quais, os pesquisadores valeram-se da utilização de atividades didáticas sobre probabilidade para identificar suas contribuições no processo de aprendizagem dos alunos no Ensino Fundamental.

A pesquisa de mestrado “Avaliação de um programa de ensino para a aprendizagem de probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental” de Tonouti (2013), também investigou as contribuições do programa de ensino sobre probabilidade e risco desenvolvido pela Universidade de Oxford para a

aprendizagem de alunos do Ensino Fundamental. A pesquisa realizada por Tonouti (2013) deu-se com alunos do quarto ano do Ensino Fundamental, ou seja, alunos dos anos iniciais da Educação Básica, e concentrou-se nos conceitos de aleatoriedade, eventos previsíveis e imprevisíveis, equiprobabilidade, espaço amostral, quantificação de probabilidade e correlação.

A metodologia utilizada por Tonouti (2013) consistiu numa replicação do modelo utilizado no projeto de Oxford, ou seja, os 72 alunos investigados foram divididos em três grupos: um grupo “controle” composto por 34 alunos que responderam somente aos quatro testes propostos e participaram das entrevistas; um grupo de “resolução de problemas” com 18 alunos que participaram das intervenções envolvendo questões pertinentes à relações, quantidades e relações inversas; e um grupo de “aleatoriedade” com 20 alunos que participaram das intervenções de probabilidade, por meio das quais, foram abordados especificamente os tópicos relacionados à aleatoriedade (eventos previsíveis e imprevisíveis), equiprobabilidade, construção do espaço amostral, cálculos de chance e de probabilidade de ocorrência de um evento, redução do espaço amostral e correlação entre duas variáveis. Independentemente do grupo ao qual pertenciam, todos os alunos participaram do pré e pós-testes. A pesquisadora analisou apenas os resultados dos pré e pós-testes do grupo “aleatoriedade” em comparação com os resultados do grupo “controle”.

As atividades realizadas com o grupo “aleatoriedade” se deram mediante três tipos intervenções: a primeira intervenção foi sobre aleatoriedade e abordou os conceitos de eventos previsíveis e imprevisíveis, sequências aleatórias ou padrão, equiprobabilidade, eventos possíveis, impossíveis e improváveis; a segunda intervenção sobre espaço amostral contemplou os conceitos de espaço amostral, árvore de possibilidades, agregação e comparação entre razões; e a terceira intervenção sobre quantificação da probabilidade e correlação destinou-se aos conceitos de relação, chance, probabilidade, redução do espaço amostral, razão proporção e correlação. Nas intervenções realizadas como os alunos, foram utilizados jogos com materiais manipuláveis e realização de entrevistas sobre as temáticas abordadas.

Dentre as considerações tecidas por Tonouti (2013) sobre os resultados de sua pesquisa, destacam-se as seguintes conclusões: a) observou-se que após a primeira intervenção alguns dos alunos passaram a utilizar os termos probabilísticos ensinados; b) as entrevistas apontaram que os alunos possuíam noções sobre as formas justas pelas quais alguns jogos podiam ser iniciados, contudo, ainda não possuíam experiência suficiente para tecer justificativas sobre suas escolhas; c) a segunda intervenção propiciou aos alunos uma melhor compreensão sobre a necessidade da utilização de técnicas eficazes, como, por exemplo, a árvore de possibilidades para evitar repetição ou falta de combinações; d) os resultados das atividades da segunda intervenção envolvendo a agregação e subtração entre dois dados evidenciou que os alunos tiveram dificuldades para identificar os resultados mais prováveis de cada situação, sugerindo a necessidade de mais atividades envolvendo resultados entre dois eventos independentes; e) identificou-se, nas questões envolvendo a construção do espaço amostral, um menor índice de acertos quanto maior o número de combinações possíveis, sugerindo que os alunos possuem dificuldades na criação de estratégias para localizar todas as combinações sem repetição; f) os alunos apresentaram baixo rendimento em relação aos conceitos de proporção e correlação, por outro lado, o desempenho dos alunos foi satisfatório em relação aos conceitos de redução de espaço amostral e probabilidade.

Em sua conclusão, Tonouti (2013) considera que o programa de ensino sobre probabilidade e risco auxiliou os alunos do 4º ano do Ensino Fundamental que participaram do grupo “aleatoriedade” entenderem os conceitos abordados nas intervenções realizadas.

Como pode ser observado, embora a investigação de Tonouti (2013) também seja pautada no programa de ensino sobre probabilidade e risco da Universidade de Oxford, evidenciam-se algumas diferenças em relação ao nosso estudo, sobretudo, quanto aos sujeitos de pesquisa e às análises dos dados da pesquisa. Nesse sentido, cabe relembrar que nossos sujeitos de pesquisa são alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e também os professores que ministraram as intervenções de probabilidade e risco. Em nossas análises, realizamos comparações entre os resultados dos pré e pós-teste dos três grupos de alunos: grupo de probabilidade e

risco, grupo de resolução de problemas e grupo de controle desassistido, como também, entrevistamos os professores para identificar as contribuições do programa de ensino para sua prática letiva.

Yağci (2010) investigou o efeito da utilização de modelos concretos no ensino da probabilidade com 12 alunos da oitava série do Ensino Fundamental de uma escola particular da Anatólia Central, Turquia. As intervenções com os alunos foram realizadas pelo professor de Matemática da escola. Como instrumentos de coletas de dados, a autora valeu-se de questionário de pré-teste para identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre probabilidade, de questionário de pós-teste para verificar o desempenho dos alunos após o processo de intervenção, como também, realizou entrevistas para identificar a visão dos alunos a respeito do ensino da probabilidade com modelos concretos. Os dados foram analisados qualitativa e quantitativamente.

Yağci (2010) aponta que os seguintes resultados do seu estudo: i) observou-se a ocorrência de mudanças positivas e estatisticamente significativas na comparação das notas médias do pré e pós-teste, caracterizando que a intervenção com modelos concretos favoreceu de alguma maneira a aprendizagem dos alunos; ii) apesar do interesse e empenho na realização das atividades propostas, as atitudes pessoais dos alunos não ocasionaram variação estatisticamente significativa em relação à probabilidade no decorrer dos três períodos do estudo (antes, durante e após a intervenção; iii) os resultados da entrevista demonstram que a maioria dos alunos apresentaram opiniões positivas a respeito dos efeitos da intervenção com modelos concretos em seus processos cognitivos quanto à resolução de problemas, à compreensão, à aprendizagem e para lembrar o assunto estudado. Entretanto, a autora considera que seu estudo possui algumas limitações, sobretudo, quanto ao fraco desempenho em comparação com estudos anteriores, à falta de um grupo controle e em relação aos instrumentos de coletas de dados utilizados (pré e pós-teste).

Na pesquisa “Experimentos probabilísticos: noções de probabilidade no Ensino Fundamental II”, Biajot (2013) relata os resultados oriundos de uma investigação didático-pedagógica na qual foram realizados alguns experimentos com

a utilização de moedas e dados com a finalidade de promover a aprendizagem dos alunos em relação aos conceitos iniciais de probabilidade, principalmente, sobre experimento aleatório e determinístico, espaço amostral e evento. Em sua investigação, o autor valeu-se da metodologia da Engenharia Didática concebida por Artigue e seus sujeitos de pesquisa foram 94 alunos (organizados em 47 duplas) de quatro turmas do 8º ano do Ensino Fundamental de uma unidade escolar do interior paulista.

O pesquisador elaborou quatro atividades didáticas para serem desenvolvidas com os alunos no decorrer de cinco aulas de Matemática. A primeira atividade objetivou discussões sobre sorte, aleatoriedade e noções de probabilidade. Na segunda atividade, foram propostos dois jogos, um com moedas e outro com dados. A terceira atividade objetivou a formalização dos conceitos de experimento aleatório, espaço amostral, eventos e introduziu o conceito de probabilidade. Na quarta atividade, foram propostos dois jogos com dados.

Os registros realizados pelos alunos e as discussões surgidas no decorrer do desenvolvimento das atividades permitiram ao pesquisador concluir que as atividades didáticas promoveram a participação ativa dos alunos, possibilitaram que os alunos reconhecessem as situações de incerteza e utilizassem termos e expressões próprias da probabilidade para justificar suas respostas e oportunizou que os alunos percebessem a relação existente entre a análise e a estimação das probabilidades. Portanto, de modo geral, evidenciou-se que a utilização da sequência didática favoreceu a aprendizagem das noções básicas de probabilidade.

Cabe pontuar que, nas atividades com jogos propostas por Biajot (2013), os alunos preencheram tabelas e posteriormente analisaram as probabilidades. Nesse sentido, Bryant e Nunes (2012) consideram que o uso e as análises de tabelas possibilitam avaliar se há correlação entre variáveis. Portanto, consideramos que os aspectos didáticos propostos Biajot (2013) mostram-se alinhados com parte da proposta do programa de ensino sobre probabilidade que ora investigamos.

Outro trabalho de pesquisa em que nos pautamos é de autoria de Abe (2011) e intitula-se “O ensino de probabilidades por meio das visões Clássica e

Frequentista”. O principal objetivo da pesquisadora consistiu em investigar e analisar as dificuldades dos alunos no estudo de probabilidade, bem como, estudar os conhecimentos na resolução de problemas probabilísticos específicos frente às abordagens das visões clássica e frequentista de probabilidades.

A autora utilizou alguns preceitos da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau como referencial teórico e para elaborar a sequência didática trabalhada com seis alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, por meio da qual, buscou-se proporcionar aos alunos participantes a vivência das dialéticas adidáticas de ação, formulação e validação, de forma que pudessem aprender probabilidade mediante as abordagens clássica e frequentista. A metodologia de pesquisa adota foi baseada nas concepções da Engenharia Didática de Artigue, a partir da qual, deu-se a elaboração, organização e realização da sequência didática.

A elaboração da sequência didática com os conceitos probabilísticos proposta por Abe (2011) consistiu em seis sessões. A primeira sessão foi destinada aos conceitos de experimentos aleatórios e experimentos determinísticos; na segunda sessão, foram abordados os conceitos de espaço amostral, evento elementar e impossível; a terceira sessão foi dedicada a explorar conceitos relacionados ao espaço amostral equiprovável e não-equiprovável; na quarta sessão, foram explanados os conceitos da visão clássica da probabilidade; a quinta sessão explorou os conceitos referentes à visão frequentista da probabilidade; e na sexta e última sessão, realizou-se a articulação da probabilidade clássica com a frequentista. Em alguns dos experimentos da sequência didática, utilizou-se um simulador de roleta, com o qual, segundo a pesquisadora, foi possível simular a realização de grandes quantidades de experimentos, possibilitando, assim, observar a estabilização da frequência relativa.

Com base na realização dos experimentos aleatórios em conjunto com o recurso do simulador da roleta, Abe (2011) concluiu que houve o favorecimento da aquisição e compreensão do cálculo de probabilidades pelos alunos, tanto por meio da visão clássica, como da visão frequentista, assim como, a articulação entre ambas.

Observamos que as atividades didáticas propostas por Abe (2011) apresentam alguns pontos semelhantes com as atividades contidas no programa de ensino sobre probabilidade e risco que investigamos, principalmente, por abordar os conceitos de aleatoriedade e espaço amostral.

Em sua pesquisa “Uma introdução ao pensamento combinatório no 9º ano do ensino fundamental”, Alves (2010) investigou as estratégias de ensino e de aprendizagem que podem viabilizar a introdução dos conceitos básicos de análise combinatória no Ensino Fundamental. O estudo foi desenvolvido com uma turma do 9º ano de uma unidade de ensino particular. O pesquisador elaborou e implementou um módulo de ensino – na forma de situações problema e utilizando os diferentes registros de representação – explorando os seguintes conceitos básicos de probabilidade: princípio multiplicativo, ideias sobre permutação simples, arranjo simples e combinação simples.

A metodologia qualitativa utilizada no desenvolvimento da pesquisa foi baseada na Engenharia Didática proposta por Artigue, bem como, o autor pautou-se nos estudos teóricos sobre a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval para fundamentar e elaborar o módulo de ensino sobre o desenvolvimento do pensamento combinatório.

O módulo de ensino foi composto por quatro sequências de atividades planejadas para serem desenvolvidas com os alunos durante dez aulas. Após a realização das atividades, foram utilizadas duas aulas para aplicação de uma prova para se verificar a aprendizagem dos alunos, e uma aula, para aplicação de um questionário.

Os conteúdos abordados no módulo de ensino foram os seguintes: a primeira sequência apresentou a introdução do princípio multiplicativo e a exploração de diferentes representações para o cálculo de possibilidades; a segunda sequência explorou alguns exercícios para se trabalhar a diferença entre arranjo e combinação na análise combinatória; a terceira sequência introduziu a probabilidade por meio da resolução de exercícios; e a quarta sequência sistematizou os conceitos estudados nas sequências anteriores.

Segundo o autor, os resultados da pesquisa permitiram evidenciar que o trabalho com os diferentes registros de representação proporcionou maior facilidade aos alunos quanto aos cálculos das possibilidades, como também, minimizou a dificuldade de diferenciação dos cálculos necessários em situações distintas, como por exemplo, o arranjo e combinação. Dessa forma, Alves considera que os resultados de sua pesquisa sinalizaram que o módulo de ensino elaborado e desenvolvido com os alunos viabiliza o desenvolvimento dos conceitos básicos de análise combinatória, como, também, serviu para estimular a participação e envolvimento dos alunos tornando-os participantes no processo de construção do seu conhecimento matemático no Ensino Fundamental.

Consideramos que os resultados das pesquisas apresentadas neste tópico demonstram que o desenvolvimento de atividades específicas para o ensino da probabilidade constitui-se num importante instrumento didático aos professores no sentido de propiciar a aprendizagem dos alunos do Ensino Fundamental.

4.2 Os conhecimentos que precisam ser mobilizados pelos professores para o ensino da probabilidade

Descrevemos neste tópico os procedimentos e os resultados de algumas pesquisas que abordam os conhecimentos necessários para que os professores possam ensinar adequadamente os conteúdos relacionados com a probabilidade.

A pesquisa de autoria de Santana (2011), intitulada “O acaso, o provável, o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do Ensino Fundamental” chamou-nos a atenção pelo fato de seu estudo ter por objetivo identificar as concepções dos professores sobre o ensino de probabilidade. Dentro dessa perspectiva, Vergnaud caracterizou-se como um dos principais aportes teóricos da pesquisa, principalmente, por conta da Teoria dos Campos Conceituais, com base na qual a pesquisadora buscou compreender como ocorre a construção de um conceito, possibilitando assim, observar que, durante a abordagem de conteúdos relacionados com a Probabilidade, há muitos outros conteúdos

envolvidos como, por exemplo, os conceitos de fração, razão, porcentagem, chance, acaso, entre outros.

Os sujeitos de pesquisa foram oito professores que possuíam vínculos com escolas públicas da Região Metropolitana de Recife, sendo quatro professores (com Licenciatura em Pedagogia) que lecionam nos anos iniciais do Ensino Fundamental e por quatro professores (com Licenciatura Matemática) que lecionam nos anos finais do Ensino Fundamental.

Com vistas a investigar o conhecimento desses professores sobre probabilidade, Santana (2011) optou por realizar uma pesquisa de natureza qualitativa. Para tanto, utilizou a entrevista semiestruturada como instrumento para a coleta de dados, durante a qual os docentes analisaram algumas situações didáticas envolvendo o ensino da probabilidade.

A pesquisadora utilizou nove situações didáticas extraídas de livros didáticos. A situação 1 abordou a não existência da ação do acaso; as situações 2, 4 e 5 exploraram a percepção da noção de chance, contudo, a situação 4 possibilitou ampliar a discussão para o que seja mais ou menos provável e a resolução da situação 5 exigiu um pouco mais de conhecimento sobre o assunto; a situação 3 envolveu fenômenos relacionados ao acaso; a situação 6 associou as noções de probabilidade e de acaso; a situação 7 explorou a percepção sobre possibilidades e espaço amostral; a situação 8 objetivou a identificação da noção de probabilidade expressa em razão e porcentagem; e a situação 9 destinou-se à verificação dos eventos mais prováveis e a noção de probabilidade expressa em porcentagem mediante a comparação de probabilidades.

No processo de análise dos dados, Santana (2011) sintetizou os conceitos matemáticos que os professores investigados associaram para cada uma das situações didáticas. Em seguida, realizou análises comparativas entre as situações propostas e, finalizando, inquiriu os professores para que expressassem suas opiniões acerca do porque a probabilidade deve ou não ser trabalhada no Ensino Fundamental. Dessa forma, a pesquisadora obteve informações referentes às concepções dos professores e relacionou-as com suas formações iniciais.

Mediante os resultados da pesquisa, Santana (2011) evidenciou que os conceitos sobre probabilidade são muito pouco explorados durante a prática letiva dos professores investigados, suscitando a hipótese de que a formação inicial por eles realizada não ofereceu elementos formativos suficientes quanto aos saberes e práticas necessários para abordar adequadamente os conteúdos de probabilidade com seus alunos. Inclusive, verificou-se também que os professores possuem dificuldades para compreender o conceito de probabilidade, tanto que algumas nomenclaturas importantes para a formalização do conceito de probabilidade, tais como, fenômeno aleatório, espaço amostral, acaso e evento, sequer foram mencionadas por eles durante o decurso da entrevista semiestruturada.

Ao observarmos os resultados oriundos da pesquisa de Santana (2011), principalmente quanto ao fato dos professores não compreenderem adequadamente os conceitos de probabilidade, explorarem muito pouco esses conceitos em suas aulas e que, provavelmente, isso ocorra por conta de deficiências em sua formação inicial, consideramos que o programa de ensino sobre probabilidade e risco que ora investigamos pode oferecer subsídios didáticos e pedagógicos sobre o conceito de probabilidade que podem preencher as eventuais lacunas originadas durante a formação inicial dos professores.

Ao que tange as possíveis deficiências na formação inicial dos professores polivalentes (pedagogos que lecionam para os anos iniciais do Ensino Fundamental) a respeito de conteúdos sobre probabilidade, tal como ressaltado por Santana (2011), consideramos que a tese de Rodrigues (2011), intitulada “A probabilidade como componente curricular na formação Matemática inicial de professores polivalentes”, apresenta um interessante ensaio teórico que, se colocado em prática, pode oferecer contribuições para essa problemática.

Por meio desse estudo, a pesquisadora realizou levantamentos bibliográficos e documentais objetivando indicar quais são os conhecimentos necessários para compor uma proposta didática voltada ao ensino de noções de probabilidade em cursos de Pedagogia.

Ao abordar a problemática da formação Matemática inicial de professores

polivalentes, a autora considera que, além dos conhecimentos matemáticos específicos, a formação inicial deve abordar também as justificativas e os objetivos dos conhecimentos matemáticos propostos para o ensino, as variáveis presentes nos processos de ensino e de aprendizagem, e as perspectivas e procedimentos didáticos para ensinar Matemática.

Com base em estudos que abordam a questão da teoria das probabilidades como componente curricular e em estudos que tratam sobre a questão da formação Matemática inicial de professores polivalentes, Rodrigues (2011) apresenta uma proposta para o ensino de noções de probabilidades direcionado aos cursos de Pedagogia. Para tanto, propõe um quadro teórico, no qual os conhecimentos de e sobre probabilidade deveriam ser pautados nos seguintes aspectos: a) fundamentos sociológicos e filosóficos; b) cultura Matemática escolar; c) processo de ensino e aprendizagem; d) didática da Matemática.

A pesquisadora considera como aspecto dos fundamentos sociológicos e filosóficos o conhecimento a respeito das relações existentes entre a escola e a sociedade contemporânea. Esse conhecimento possibilita compreender quais são os conteúdos sobre probabilidade que precisam ser ensinados na escola e que se relacionam com a demanda da vida cotidiana, por isso, devem ser integrados ao conhecimento matemático específico que faz parte da cultura Matemática.

O aspecto da Cultura Matemática Escolar pode ser definido como o conjunto de conhecimentos básicos necessários para que o professor polivalente possa ensinar os conteúdos de probabilidade. Sendo assim, Rodrigues (2011) ressalva que há de se levar em conta que os conhecimentos necessários aos professores polivalentes devem ser relativizados quando comparados aos conhecimentos que se espera dos professores especialistas. A pesquisadora destaca que os professores polivalentes precisam saber que as ferramentas matemáticas devem ser usadas para se compreender as finalidades das regras, fórmulas e definições do modelo clássico e do modelo frequentista, pois ambos os modelos mobilizam os conceitos de razão, proporção, frequência, intervalo, classe e a ideia de limite entendida como aproximação.

Quanto aos aspectos dos processos de ensino e de aprendizagem, a autora salienta que, no atual modelo explicativo da psicologia educacional, os processos de ensino e de aprendizagem se dão tanto em termos das variáveis intrapessoais (alunos), como das variáveis situacionais (contexto), assim, parte-se do pressuposto de que o professor somente ensinará bem (considerando que o aluno compreenda efetivamente o conteúdo) se ele próprio compreender o conteúdo que está sendo ensinado. A partir desse ponto de vista, Rodrigues pondera favoravelmente em favor de que, na formação matemática inicial dos professores polivalentes, o ensino das noções de probabilidade seja baseado em estudos que levem em conta o processo psicológico do aprender.

Em relação ao aspecto da didática da Matemática, a pesquisadora destaca que os procedimentos didáticos de resolução de problemas, utilização de jogos e modelagem matemática estão interligados, bem como, são fundamentais para uma proposta de ensino que abarque as noções de probabilidade na formação inicial dos professores polivalentes.

Vale ressaltar que, embora o estudo de Rodrigues (2011) tenha focado a formação inicial dos professores polivalentes, acreditamos que os aspectos identificados por ela também poderiam fazer parte da grade curricular das licenciaturas em Matemática, pois outros estudos apontam que os professores especialistas (licenciado em Matemática que leciona para os anos finais do Ensino Fundamental e Médio) também apresentam dificuldades quanto aos conceitos relacionados à probabilidade.

Corroborando com as inquietações apontadas por Santana (2011) quanto às possíveis deficiências na formação inicial dos professores especialistas, tomamos como exemplo o trabalho de pesquisa “Planejamento e aplicação de uma sequência didática para o ensino de probabilidade no âmbito do PIBID” de Amâncio (2012). Em seu estudo, a autora elaborou uma sequência didática propondo algumas situações visando o favorecimento da construção dos conceitos probabilísticos, em nível introdutório, de modo a evitarem-se os equívocos conceituais sobre probabilidade descritos na literatura.

A metodologia utilizada pela pesquisadora aportou-se nas concepções de Artigue sobre a Engenharia Didática e seu estudo percorreu duas vertentes, a primeira é resultante da análise de uma sequência didática idealizada para ser trabalhada com alunos do Ensino Médio, cuja proposta baseia-se na introdução dos conceitos probabilísticos identificados num estudo teórico. Essa primeira vertente serviu como pano de fundo para a segunda que, com base nas concepções de Shulman sobre conhecimento de conteúdo, conhecimento pedagógico de conteúdo e conhecimento curricular, buscou identificar os conhecimentos adquiridos ou explorados pelos alunos de licenciatura em Matemática ao aplicarem uma sequência didática proposta no âmbito do PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência). A pesquisadora também analisou os conteúdos probabilísticos contidos no livro didático adotado pela escola e comparou-os com os conteúdos da sequência didática. Seus sujeitos de pesquisa foram quatro alunos de licenciatura em Matemática da UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro), sendo dois estudantes do segundo semestre e dois do último semestre.

A análise dos dados deu-se por meio de análise qualitativa, cujo processo de coleta ocorreu mediante duas etapas de entrevistas. A entrevista inicial serviu para identificar o perfil e as concepções dos licenciandos sobre probabilidade e suas atividades em relação ao PIBID, objetivando, assim, descobrir o quanto essas concepções influenciam na formação profissional desses futuros professores de Matemática. Com a entrevista final, a pesquisadora objetivou analisar quais foram os conhecimentos adquiridos pelos licenciandos ao aplicarem a sequência didática e o quanto esses conhecimentos influenciam no perfil profissional dos entrevistados.

A sequência didática proposta para o ensino da introdução ao conteúdo de probabilidade foi planejada para seis aulas de intervenções com alunos do segundo ano do Ensino Médio no contraturno das aulas regulares, a saber: na primeira aula foram abordados os conteúdos de ideia do aleatório e acaso, experimento aleatório e determinístico, espaço amostral e evento; a segunda aula contemplou conteúdos sobre tipos de eventos, revisão das operações entre os eventos (união, intersecção e complementar), espaço amostral equiprovável e não equiprovável, as probabilidades frequentista e clássica; a terceira aula explorou os conteúdos relacionados à base axiomática da probabilidade, consequências e exercícios para

fixação dos conceitos de probabilidade; na quarta aula foram estudados os conteúdos sobre probabilidade condicional; a quinta aula enfatizou os conteúdos sobre eventos independentes e dependentes; e na atividade foi realizado um teste abordando todos os conceitos vistos nas aulas anteriores.

Amâncio (2012) concluiu seu estudo considerando que os conhecimentos proporcionados aos alunos com a sequência didática de probabilidade foram significativos, principalmente, porque, ao comparar a abordagem dos conceitos da sequência didática aos conceitos presentes no livro didático adotado pela escola, evidenciou-se que os alunos tiveram uma compreensão mais ampla sobre a probabilidade. Notou-se também que as atividades propostas motivaram os alunos, fazendo com que participassem ativamente das aulas.

A comparação entre os conteúdos do livro didático com os da sequência didática evidenciou que há necessidade de se fazer adequações em diversos conceitos presentes no livro didático a fim de corrigir algumas concepções errôneas sobre probabilidade, o que reforça a necessidade do professor conhecer os diversos significados da probabilidade, para que assim, possa identificar os equívocos contidos no livro para não comprometer a aprendizagem dos alunos.

Quanto ao conhecimento relacionado ao conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular no âmbito do PIBID, o pesquisador afirmou ter fortes evidências de que os licenciandos se apropriaram desses conhecimentos.

De modo geral, observamos que as pesquisas apresentadas demonstram a existência de muitas inquietações relacionadas aos conhecimentos necessários para que os professores possam ensinar adequadamente os conceitos envolvidos com a temática da probabilidade, validando assim, nossa intencionalidade de pesquisa quanto a identificar as percepções dos professores em relação às intervenções didáticas e os testes realizados com seus alunos com base num programa de ensino destinado ao ensino e à aprendizagem de probabilidade.

Consideramos também que as pesquisas apresentadas reforçam nossa crença sobre a importância e a efetividade das atividades didáticas contidas no

programa de ensino sobre probabilidade e risco para a prática letiva dos professores e para a aprendizagem dos alunos do Ensino Fundamental.

CAPÍTULO 5

MÉTODO E PROCEDIMENTOS METOLOGÓGICOS

Neste capítulo discorrermos sobre nossos objetivos, as características dos sujeitos de pesquisa, os procedimentos metodológicos adotados em nosso estudo e uma síntese sobre a análise dos dados da pesquisa.

5.1 Objetivo geral

Por meio do presente projeto de pesquisa objetivamos analisar, identificar e compreender as possíveis contribuições de um programa de ensino sobre probabilidade e risco para a aprendizagem significativa dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, como também, para a prática letiva dos professores de Matemática que participaram da nossa pesquisa.

5.2 Objetivos específicos

Por conta das possíveis contribuições didáticas que podem ter sido assimiladas pelos professores de Matemática que participaram de um curso de formação continuada oferecido pelo projeto “Investigações sobre o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos concernentes à probabilidade e estatística” do OBEDUC-UNIAN, bem como, pelas possíveis habilidades que podem ter sido desenvolvidas pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental que participaram das intervenções propostas pelo programa de ensino sobre probabilidade e risco, temos por meta, os seguintes objetivos específicos:

- Identificar as principais contribuições do programa de ensino que favoreceram uma melhor compreensão aos professores participantes da pesquisa acerca das ideias relacionadas à aleatoriedade, ao espaço amostral, à comparação de probabilidade e à compreensão do risco;

- Identificar as principais contribuições didáticas proporcionadas pelo programa de ensino sobre probabilidade e risco para a prática letiva dos professores;

- Identificar possíveis melhorias que podem ser implementadas em futuros cursos de formação continuada oferecidos pelo OBEDUC-UNIAN, cujos assuntos abordados associem-se à temática da presente pesquisa;

- Identificar as estratégias adotadas pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental nas atividades de pré e pós-testes propostas neste estudo;

- Comparar e analisar o desempenho do grupo de alunos que participaram da intervenção didática sobre probabilidade e risco em relação aos alunos do grupo de controle desassistido e do grupo de resolução de problemas;

- Identificar as principais contribuições do programa de ensino sobre probabilidade e risco para a compreensão dos alunos acerca das ideias de aleatoriedade, espaço amostral, comparação de probabilidade e compreensão do risco.

5.3 Caracterização dos sujeitos de pesquisa

A presente investigação contou com a participação de 319 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 5 professores de Matemática da rede estadual de ensino paulista. A Tabela 3 apresenta a distribuição dos alunos de acordo com o gênero:

Tabela 3. Distribuição dos alunos por gênero

Gênero	Frequência	Percentual	Porcentagem válida	Porcentagem acumulada
Masculino	160	50,2	50,2	50,2
Feminino	159	49,8	49,8	100,0
Total	319	100,0	100,0	

Observa-se que, quanto ao gênero, os estudantes participantes da pesquisa caracterizam-se por 160 alunos (50,2%) e 159 alunas (49,8%). Esta mesma proporção de alunos e alunas ocorreu de forma espontânea, uma vez que essa não era uma intencionalidade prevista para a nossa pesquisa.

Os alunos e os professores são oriundos de 5 unidades escolares distintas, conforme demonstrado na Tabela 4:

Tabela 4. Distribuição dos alunos por unidade escolar

Unidade Escolar	Frequência	Percentual	Porcentagem válida	Porcentagem acumulada
Alfa	71	22,3	22,3	22,3
Beta	65	20,4	20,4	42,6
Delta	44	13,8	13,8	56,4
Épsilon	86	27,0	27,0	83,4
Gama	53	16,6	16,6	100,0
Total	319	100,0	100,0	

De acordo com os dados da tabela, constata-se que dos 319 alunos participantes da pesquisa, 71 alunos são da Unidade Escolar Alfa (22,3%), 65 alunos são da Unidade Escolar Beta (20,4%), 44 alunos são da Unidade Escolar Delta (13,8%), 86 alunos são da Unidade Escolar Épsilon (27%) e 53 alunos são da Unidade Escolar Gama (16,6%). A diferença observada na quantidade de alunos por Unidade Escolar deve-se à variação do número de alunos efetivamente matriculados nas turmas dos 9º anos do Ensino Fundamental de cada Unidade Escolar.

Cumpre destacar também que cada um dos cinco professores participantes da pesquisa pertence, respectivamente, a uma das unidades escolares descritas na tabela acima.

O professor da unidade escolar Alfa é mestre em Educação Matemática, tem 52 anos de idade, possui 30 anos de magistério e 15 anos de experiência lecionando para o 9º ano do Ensino Fundamental.

O professor da escola Beta é licenciado em Matemática, Psicopedagogo e mestrando em Educação Matemática, sua idade é de 35 anos, possui 11 anos de magistério e o mesmo período de tempo lecionando para o 9º ano do Ensino Fundamental.

A professora da unidade escolar Gama é licenciada em Matemática, tem 57 anos de idade, tempo de magistério de 24 anos e leciona há 12 anos para o 9º ano do Ensino Fundamental.

O professor da escola Delta é licenciado em Matemática e Pedagogo, 40 anos de idade, seu tempo de magistério é de 24 anos e leciona há 15 anos para o 9º ano do Ensino Fundamental.

O professor da unidade escolar Épsilon é licenciado em Matemática, sua idade é de 29 anos, possui 6 anos de experiência de magistério, dos quais, 3 anos lecionando para o 9º ano do Ensino Fundamental.

5.4 Estratégias adotadas para realização da pesquisa

Tomando por base os resultados positivos de algumas pesquisas que fizeram uso combinado de intervenção e de dados longitudinais[18] para explorar as ligações entre os diferentes aspectos da alfabetização, os autores Nunes e Bryant (2009 e 2011) consideram que estudos relacionados à probabilidade precisam desse tipo de pesquisa, pois podem fornecer informações importantes sobre as possíveis conexões causais, como, por exemplo, o conhecimento dos alunos sobre a natureza e a importância do espaço amostral e sua capacidade de comparar as probabilidades de um determinado evento em dois espaços amostrais diferentes. Por esses motivos, quanto às produções realizadas pelos alunos, optamos pelo uso combinado de intervenção e dados longitudinais.

[18] De acordo com Cabral e Gonçalves (2011), os dados longitudinais originam-se sempre que, em um ou mais grupos em estudo, observações repetidas da variável resposta são obtidas ao longo do tempo para cada indivíduo, por esse motivo, este tipo de investigação é denominado como estudos longitudinais.

Inicialmente, realizamos três reuniões com os professores que participaram do curso formação oferecido pelo OBEDUC –UNIAN, por meio das quais traçamos as ações necessárias para que eles realizassem duas intervenções didáticas com seus respectivos alunos, sendo uma com atividades de probabilidade e risco e a outra com atividades envolvendo resolução de problemas.

Decidimos conjuntamente com os professores que todas as ações inerentes ao projeto de pesquisa seriam realizadas com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Escolhemos o 9º ano de escolarização porque todos os professores lecionavam para estas turmas de alunos. Além disso, também consideramos importante o fato de que os alunos do 9º ano representam o fechamento de ciclo do Ensino Fundamental e, por esse motivo, possuem alguns conhecimentos prévios acerca do letramento probabilístico, uma vez que, a partir do 6º ano do Ensino Fundamental, alguns conteúdos de probabilidade e estatística são previstos no currículo de Matemática da rede estadual paulista de ensino.

Determinamos também que cada professor, em sua unidade escolar de atuação, trabalharia com três turmas de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, denominando-as aleatoriamente como turmas: “A”, “B” e “C”. A partir de então, estabelecemos os seguintes procedimentos para cada professor: i) as três turmas realizariam um pré-teste antes das atividades de intervenção; ii) somente a turma “A” seria contemplada com a intervenção sobre probabilidade e risco; iii) somente a turma “B” seria contemplada com a intervenção sobre resolução de problemas; iv) a turma “C” não passaria por qualquer tipo de intervenção, constituindo-se assim, num grupo de controle desassistido; v) as três turmas realizariam um pós-teste após o período das intervenções.

Justificamos nossas opções pelas turmas de intervenção de probabilidade e risco, as turmas de intervenção de resolução de problemas e as turmas de controle desassistido, de modo que nossa pesquisa mantivesse-se alinhada com a pesquisa da Universidade de Oxford, uma vez que a equipe inglesa de pesquisadores adotou esta mesma abordagem no desenvolvimento de seus trabalhos.

Paralelamente ao delineamento das ações práticas desenvolvidas com os

alunos, elaboramos planos de aulas para oito atividades sobre probabilidade e risco e para cinco atividades envolvendo resolução de problemas, como também, os questionários de pré e pós-teste a serem respondidos pelos alunos.

Os planos de aula foram concebidos com a finalidade de orientar os trabalhos do professor em sala de aula, contendo em seu bojo as seguintes descrições: identificação da atividade proposta; objetivos pedagógicos; materiais necessários; tempo previsto; e procedimentos para realização das atividades. Respectivamente a cada plano de aula, foram elaboradas folhas de respostas para os alunos registrarem os procedimentos resolutivos utilizados no decorrer das intervenções.

Também foram desenvolvidos alguns kits com os materiais necessários para a realização das atividades práticas com os alunos. Os materiais foram entregues aos professores acondicionados numa “sacolinha” de tecido personalizada que, além de servir como embalagem, também foi utilizada para realização dos sorteios aleatórios prescritos nas atividades didáticas.

Para diagnosticarmos os conhecimentos prévios dos alunos, denominamos o questionário de pré-teste como “Atividade Diagnóstica sobre Probabilidade e Risco” e para averiguar as possíveis contribuições das intervenções didáticas para com a aprendizagem dos alunos, denominamos o questionário de pós-teste como “Atividade para Verificação da Aprendizagem sobre Probabilidade e Risco”.

A análise dos dados provenientes das produções dos alunos (questionários do pré e pós-teste) deu-se por meio de abordagem de natureza quantitativa, para a qual utilizamos como suporte o software estatístico SPSS, como também, valemo-nos da abordagem qualitativa para complementar nossas análises.

Esquematicamente, a metodologia adotada para o desenvolvimento da nossa pesquisa pode ser representada de acordo com a Figura 5.

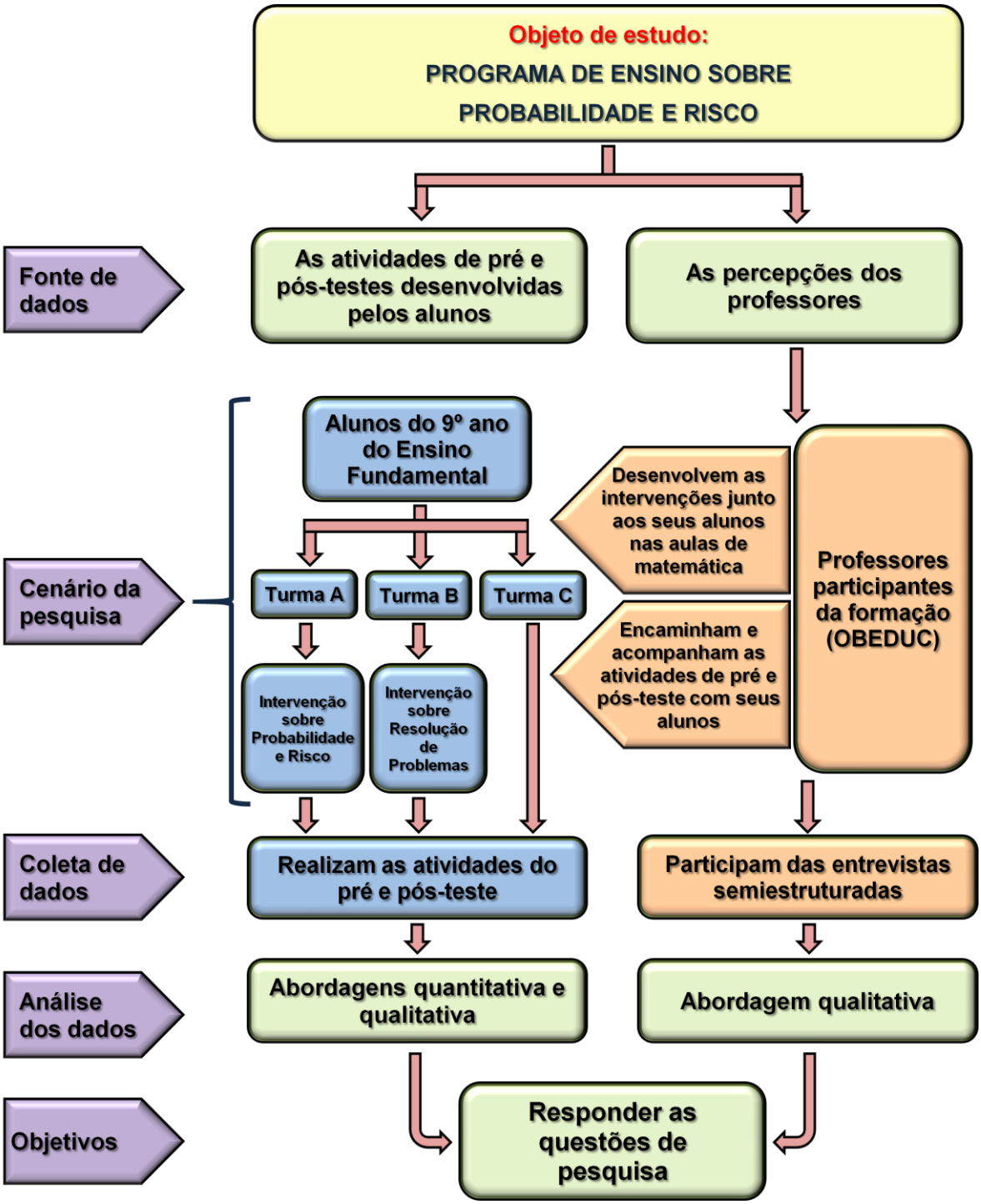


Figura 5: Esquema da pesquisa

5.5 A sequência didática da intervenção sobre probabilidade e risco

Neste tópico, descrevemos as oito atividades contidas nos planos de aulas com os quais os professores desenvolveram os trabalhos de intervenção

pedagógica com seus respectivos alunos do grupo de probabilidade e risco. Todas as atividades foram adaptadas do *Teacher Handbook* intitulado "*Teaching primary school children about probability*" desenvolvido por Bryant, Nunes, Evans, Gottardis e Terlektsi (2013).

As quatro primeiras atividades abordam alguns conceitos sobre aleatoriedade, a quinta atividade destina-se ao desenvolvimento do conceito de espaço amostral e as três últimas atividades são direcionadas à quantificação de probabilidades, conforme pode ser observado no Quadro 7:

Atividades	Conceitos abordados	Título das atividades
1	Aleatoriedade	Computer Game
2		Impossíveis contra Improváveis
3		Jogo das Bolinhas
4		Jogo com Dados (soma de dois dados)
5	Espaço amostral	Saco de Doces
6	Quantificação de probabilidades	Fábrica de Bolos
7		Biscoitos do Ben
8		Show de Dança

Quadro 7: Resumo dos conceitos e atividades desenvolvidas nas intervenções pedagógicas (Fonte: Elaborado pelo autor).

Para viabilizar a realização das atividades propostas junto aos alunos, desenvolvemos e disponibilizamos aos professores um kit com os materiais necessários (Figura 6).

Figura 6: Kit com os materiais para realização da intervenção de Probabilidade e Risco

Os materiais que compõem o kit para a intervenção de probabilidade e risco são os seguintes:

1. “Sacolinha” de tecido para realização dos sorteios;
2. Fichas nomeadas para realização da atividade 8;
3. Contas coloridas utilizadas como marcadores nas atividades 3, 5 e 6;
4. Dados de seis faces numeradas para a atividade 4.

5.5.1 Atividade 1: Computer Game (Sequências aleatórias e padrões)

Esta atividade, prevista para uma aula, consiste na realização de dois jogos realizados em computador simulando uma máquina de caça-niqueis (Figuras 7 e 8), cujo objetivo é identificar padrões previsíveis e aleatórios. Com estas experiências, os estudantes são levados a pensar sobre sequências de eventos (neste caso, sequências de respostas corretas) para descobrir a existência ou não de um padrão de regularidade para as sequências apresentadas. Quando os estudantes identificam um padrão, em seguida, verificam se este padrão se aplica ou não para a sequência, assim como, podem questionar a existência de um padrão.

No inicio da atividade, os professores projetam os jogos para toda a classe e dão um exemplo para que os alunos compreendam a dinâmica do jogo. Cada aluno realiza um jogo diferente, para que dessa forma, não haja influências nas respostas.

Jogo 1: O objetivo do jogo é encontrar um padrão de regularidade na sequência fornecida pelo computador que, neste caso, trata-se da ordem alfabética das letras iniciais das figuras cujos nomes estão no idioma inglês. Dessa forma, os alunos são levados a pensar se os eventos são ou não previsíveis.

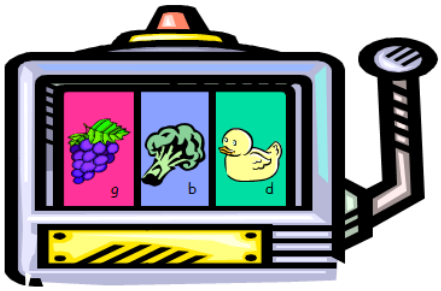


Figura 7: Jogo 1 – Exemplo da máquina caça-níqueis com sequências alfabéticas

No caso do exemplo da Figura 7, a resposta correta é a sequência “b, d, g” (crescente). No caso de erro por parte dos alunos, as respostas corretas aparecem na tela do computador, desta forma, eles podem comparar a resposta dada com a resposta correta, possibilitando assim, verificar se há um padrão emergente e identificar que a solução adequada consiste em ordenar alfabeticamente as letras iniciais dos nomes das figuras.

O jogo também permite a variação da ordenação das letras alfabeticamente na forma decrescente, assim, outra resposta possível seria a sequência “g, d, b”.

Jogo 2: O objetivo do jogo é tentar encontrar a sequência correta utilizando os números fornecidos pelo computador.

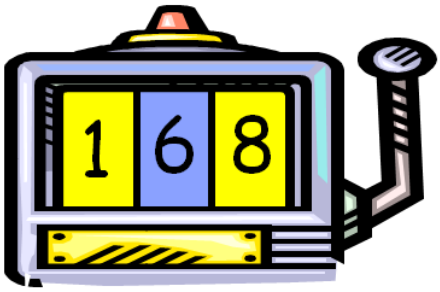


Figura 8: Jogo 2 – Exemplo da máquina caça-níqueis com sequências numéricas

No exemplo da Figura 8, a resposta correta é a sequência “1, 8 e 6”, porém, apenas o professor conhece-a de antemão. Todavia, os alunos não sabem que se trata de eventos imprevisíveis, por esse motivo, inicialmente tentam encontrar algum padrão de regularidade para as respostas corretas, sem saber que não há um padrão definido. As respostas corretas aparecem na tela do computador.

Nos jogos 1 e 2, os alunos registram suas previsões para 20 sequências na folha de respostas (Apêndice A).

Posteriormente, como objetivo de discussão dos resultados, os alunos comparam seus registros e decidem quais sequências possuem um padrão e que, portanto, são previsíveis (jogo 1), como também, sobre quais são as sequências que não possuem um padrão definido e que, portanto, são aleatórias (jogo 2).

5.5.2 Atividade 2: Impossíveis contra Improváveis

O objetivo desta atividade, prevista para uma aula, consiste em explorar a diferença entre eventos impossíveis e improváveis. Para tanto, os alunos precisam discriminar quais são os eventos impossíveis e improváveis contidos numa lista com 36 frases dispostas em pares (Apêndice B), como também, justificar seu raciocínio.

1. Fazer um guarda-chuva de vidro. ☐ Impossível ☐ Improvável
2. Fazer um guarda-chuva de ar. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

3. Um adulto crescer e voltar a ser criança. ☐ Impossível ☐ Improvável
4. O cabelo crescer até chegar aos pés. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

5. Contar os pelos do rabo do cachorro. ☐ Impossível ☐ Improvável
6. Contar estrelas numa noite nublada. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

7. Capturar uma sombra. ☐ Impossível ☐ Improvável
8. Capturar uma mosca com palitinhos. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

Figura 9: Exemplo da folha de respostas da atividade Impossíveis contra Improváveis

Para realização desta atividade, inicialmente os alunos são organizados em duplas. Eles devem assinalar se cada evento da lista é impossível ou improvável e, posteriormente, a discussão é aberta para toda sala com a finalidade de socializar as razões das escolhas realizadas.

De acordo com Bryant, Nunes, Evans, Gottardis e Terlektsi (2013), a importância de se focar a diferença entre eventos impossíveis e improváveis reside

no fato de que até mesmo os adultos tendem a tratar eventos improváveis como impossíveis, por esse motivo, cometem alguns erros no cotidiano que poderiam ser evitados caso considerassem algo como improvável, porém, possível.

5.5.3 Atividade 3: Jogo das Bolinhas

O objetivo desta atividade, com duração prevista para uma aula, consiste em fazer com que os alunos tenham a oportunidade de desenvolver o raciocínio sobre os eventos que são mais prováveis ou menos prováveis de acontecer. Para tanto, os alunos devem perceber que:

i) É possível fazer algumas previsões globais embora não se possa dizer o que vai acontecer para cada evento;
ii) Que quando os eventos são aleatórios, não significa necessariamente que todos os resultados sejam igualmente prováveis, assim como, alguns resultados podem ser mais prováveis do que outros;
iii) Concluir que é possível pensar logicamente sobre eventos aleatórios.

Os materiais necessários para o desenvolvimento desta atividade consistem em uma sacolinha com bolinhas de duas cores diferentes (Figura 6) e folha para anotações das previsões (Apêndice C).

A atividade desenvolve-se por meio de três jogos, nos dois primeiros jogos os sorteios são realizados sem reposição das bolinhas e o terceiro jogo se dá com reposição das bolinhas.

Antes de cada jogo, o professor anuncia aos alunos a quantidade de bolinhas de cada cor que há na sacolinha. Ao iniciar o jogo, os alunos realizam a previsão sobre qual será a cor da próxima bolinha sorteada. Ao retirar cada bolinha da sacolinha, o professor mostra-a aos alunos para que vejam sua cor.

Para o jogo 1 (sem reposição), são utilizadas 10 bolinhas, sendo 6 bolinhas verdes e 4 bolinhas amarelas, porém, como a sacolinha possui uma divisão oculta,

as bolinhas ficam separadas por cor. O professor então comanda o jogo solicitando que os alunos escrevam na folha de anotações quais são suas previsões sobre qual será a cor da bolinha sorteada.

No momento do primeiro sorteio, intencionalmente e sem que os alunos percebam, o professor deve retirar uma bolinha verde da sacolinha.

Na sequência dos próximos sorteios, o professor sempre pergunta aos alunos se querem manter ou não a previsão sobre a cor da bolinha para o próximo sorteio, como também, solicita para justificarem sua escolha em manter ou não a previsão.

Nos seis sorteios seguintes, intencionalmente e sem que os alunos percebam, o professor deve sempre retirar uma bolinha verde da sacolinha. Este procedimento no primeiro jogo tem por objetivo fazer com que os alunos questionem a possibilidade de, a cada novo sorteio, sempre sair uma bolinha de cor verde.

Ao final do sorteio consecutivo das 6 bolinhas verdes, o professor deve mostrar aos alunos a divisão oculta da sacolinha e explicar que as bolinhas nunca estiveram misturadas, por isso, intencionalmente sempre realizava a extração de uma bolinha de cor verde da sacolinha.

O professor deve aproveitar a ocasião para expor aos alunos que o procedimento de forçar intencionalmente o resultado causa interferência sobre a aleatoriedade dos sorteios e, por esse motivo, tal procedimento não se repetiria nos próximos dois jogos.

No jogo 2 (sem reposição), são utilizadas 8 bolinhas, sendo 4 bolinhas verdes e 4 bolinhas amarelas.

Assim como no primeiro jogo, antes de cada sorteio, o professor sempre pergunta aos alunos se querem manter ou não a previsão sobre a cor da bolinha para o próximo sorteio e, em seguida, solicita para que os alunos justifiquem a escolha de manter ou não a previsão.

Ao retirar cada bolinha da sacolinha, o professor deve mostrá-la aos alunos para que comprovem a sua cor.

O jogo deve prosseguir até restar apenas uma bolinha para ser sorteada. Nesse momento, os alunos conseguem evidenciar que o resultado pode ser determinado, por esse motivo, eles são indagados a explicar sobre a mudança da incerteza para a certeza sobre o resultado do sorteio.

Para o jogo 3 (com reposição), são utilizadas 11 bolinhas, sendo 6 verdes e 5 amarelas.

Tal como nos dois jogos anteriores, antes de cada sorteio, o professor sempre pergunta aos alunos se querem manter ou não a previsão sobre a cor da bolinha para o próximo sorteio e, em seguida, solicita para que justifiquem sua escolha sobre manter ou não a previsão.

O terceiro jogo diferencia-se dos anteriores porque agora a bolinha sorteada é devolvida na sacolinha (com reposição). Por esse motivo, para que os alunos percebam que o processo de reposição ocasiona diferença nos resultados dos sorteios, o professor precisa esclarecer que pode haver resultados que se repetem.

Ao final do terceiro jogo, o professor precisa perguntar aos alunos sobre os motivos que fizeram com que mudassem suas previsões nos dois primeiros jogos e por quais motivos estas decisões foram diferentes no terceiro jogo.

O intuito destes jogos é possibilitar que os alunos pensem sobre a mudança de probabilidades para cada cor de bolinha nos dois primeiros jogos, enquanto que no terceiro jogo, as probabilidades eram sempre as mesmas por conta da reposição da bolinha.

5.5.4 Atividade 4: Jogo com Dados (soma de dois dados)

Por meio desta atividade, com duração prevista para uma aula, o objetivo é desenvolver o raciocínio dos alunos sobre os eventos que são mais ou menos prováveis de acontecer. Nesse sentido, espera-se que os alunos percebam que:

i) É possível fazer algumas previsões globais embora não se possa dizer o que vai acontecer para cada evento;
ii) Quando os eventos são aleatórios, não significa necessariamente que todos os resultados são igualmente prováveis, assim como, que alguns podem ser mais prováveis do que outros;
iii) Perceber que é possível pensar logicamente sobre eventos aleatórios.

Os materiais necessários para o desenvolvimento da atividade são dois dados de seis faces para cada dupla de alunos (Figura 6) e folha para anotações das previsões e resultados (Apêndice D).

Com os alunos organizados em duplas, o professor explica que, com este jogo, eles devem prever algumas somas de resultados após o lançamento consecutivo de dois dados. Em seguida, o professor solicita aos alunos para que anotem na folha de respostas as suas 30 previsões para as somas que resultarão após o lançamento dos dois dados.

Após as anotações das previsões, o professor distribuiu dois dados para cada dupla de alunos e deve orientá-los para realizar 30 lançamentos e anotar as somas ao lado de cada previsão que fizeram anteriormente, assim como, para que destaquem as previsões que acertaram. Complementando a tarefa, o professor solicita o preenchimento da tabela de frequências para os números obtidos durante os lançamentos.

Ao final do jogo, o professor discute com os alunos os motivos pelos quais existem algumas somas que são mais prováveis de acontecer do que outras. Será que os alunos conseguem observar isto? Para tanto, eles devem perceber que, para um único dado os dígitos são igualmente prováveis, mas para a soma dos resultados

de dois dados, as probabilidades são diferentes.

5.5.5 Atividade 5: Saco de Doces

Esta atividade sobre espaço amostral, com duração prevista de uma aula, serve para direcionar os alunos para a quantificação das probabilidades, para tanto, possui por objetivo possibilitar que os alunos sejam capazes de trabalhar com casos agregados no espaço amostral e analisá-los para comparar probabilidades, sobretudo, no sentido de que os alunos possam se conscientizar de que se os espaços amostrais são diferentes, talvez seja necessário reorganizar a distribuição para uma comparação adequada, assim como, verificar como os índices podem ser utilizados no arranjo do espaço amostral.

Os materiais necessários para o desenvolvimento da atividade são folhas para anotações das respostas e representação do diagrama de árvore (Apêndice E) e, caso necessário, sacolinha para realização do sorteio e quatro contas, sendo cada par de contas de cores diferentes (Figura 6).

A atividade inicia-se com o professor propondo o seguinte problema aos alunos:

> “Samanta pode pegar dois doces de um saco sem olhar e há três doces no saco. Dois doces são sabor morango e um doce é sabor baunilha. O doce favorito de Samanta é sabor morango. Isso significa que ela pode pegar dois doces de morango ou pode pegar sabores misturados (um de morango e um de baunilha).”

Após a leitura do problema, o professor deve fazer os seguintes questionamentos aos alunos (caso os alunos apresentem dúvidas em relação ao problema proposto, o professor pode fazer uma simulação utilizando a sacolinha e as contas coloridas):

> “Você acha que ela tem maior chance de conseguir dois doces de morango ou de conseguir sabores misturados? Ou você acha que a chance de conseguir dois doces de morango ou sabores misturados é a mesma?”

O professor então solicita que os alunos registrem as suas suposições e, em seguida, pede para que desenhem um diagrama de árvore e confrontem seu resultado com as respostas dadas.

Nesta atividade, o diagrama de árvore auxiliará os alunos na tarefa de constatar as chances de se pegar os dois doces de sabor morango ou sabores misturados. Por esse motivo, o professor pode ajudá-los a iniciar o trabalho, solicitando, por exemplo, que comecem pela representação da primeira escolha de Samanta. Dessa forma, após terem indicado que Samanta pegou um doce de sabor morango ou um de baunilha, os alunos devem continuar a construção do diagrama de árvore para descobrir o espaço amostral que representa a possibilidade da segunda escolha.

Ao final da construção dos diagramas de árvore, os alunos podem analisá-los e verificar que há 2 possibilidades de sair morango/morango e que há 4 possibilidades de que os sabores sejam misturados (morango/baunilha).

Assim, os alunos também podem calcular o número de combinações possíveis (tamanho do espaço amostral = 6) e relacionar o tamanho do espaço amostral para os casos: 2/6 de chances de morango/morango e 4/6 de chances de morango/baunilha. O professor deve solicitar aos alunos para confrontarem o resultado do diagrama de árvore com o palpite que tinham inicialmente e, assim, verificar se o palpite estava certo ou errado.

Ao final da atividade, o professor deve conduzir algumas discussões com a classe por meio das seguintes questões: Qual seria a diferença se Samanta pudesse escolher apenas um doce? Quantas possibilidades estariam no espaço amostral se Samanta puder pegar apenas um doce?

Como conclusão, o professor precisa elucidar aos alunos sobre a importância do tamanho do espaço amostral, pois não é possível comparar diretamente duas possibilidades caso o tamanho do espaço amostral seja diferente.

5.5.6 Atividade 6: Fábrica de Bolos

O objetivo da atividade 6, com duração prevista para uma aula, consiste que os alunos sejam capazes de elaborar composição do espaço amostral mediante utilização de diagramas de árvore, agregar e eliminar casos e, assim, reforçar a compreensão sobre a conexão entre espaço amostral e quantificação das probabilidades.

Os materiais necessários para o desenvolvimento da atividade são folhas para anotações das respostas e representação do diagrama de árvore (Apêndice F).

A atividade inicia-se com o professor realizando a leitura do seguinte problema para a classe:

> “Considere que você trabalha numa fábrica de bolos e precisa fazer bolos para festas que as escolas estão organizando. A fábrica faz três sabores diferentes de bolos: laranja, maracujá e nozes. Os bolos podem ter três recheios diferentes: baunilha, creme e damasco. Os bolos podem ter três coberturas diferentes: amêndoas, framboesa e gotas de chocolate. Você precisa fazer caixas para cada combinação diferente de bolo, sendo um bolo em cada caixa.”

Na sequência, o professor faz as seguintes perguntas aos alunos :

1) Quantas caixas diferentes você precisa fazer? (Resposta correta para essa questão: 27 para cada escola)

2) Como você pode ter certeza de que não haverá uma combinação repetida ou que faltará alguma combinação?

Ao término da solução do problema, o professor abre a discussão para que as respostas dos alunos sejam socializadas com toda a classe.

Em seguida, o professor prossegue com a atividade realizando a leitura do seguinte problema:

> "Aconteceu um imprevisto. Você já carregou o carro da empresa para fazer as entregas e separou as caixas para as diferentes escolas. Porém, as diretoras das escolas ligaram avisando que não gostam de algumas combinações:"
>
> - A escola "*A*'' não quer cobertura de amêndoas no bolo de maracujá;
> - A escola "*B*'' não quer recheio de damasco com cobertura de gotas de chocolate;
> - A escola "*C*'' não quer recheio de creme de manteiga com cobertura de framboesa.

Após a leitura do problema, o professor informa aos alunos que precisam utilizar o diagrama de árvore que fizeram para responder a seguinte pergunta:

1) Quantas caixas terão que ser retiradas do carro para que não sejam enviadas as combinações de sabores que as escolas não querem?

(Resposta correta para esta questão: 9 caixas para cada escola)

Assim que os alunos responderem a questão, o professor revela outro problema aos alunos:

> "Há outro imprevisto! Você não identificou as combinações de bolos nas caixas e também não possui tempo para abrir todas as caixas para verificar o tipo de bolo que cada uma contém. Sendo assim, você tem que escolher apenas algumas caixas e retirá-las do carro. Então, responda:"

1) Você considera mais provável que seja retirada do carro uma caixa certa (combinação de sabores que as escolas não querem) ou é mais provável

que seja retirada uma caixa errada (combinação de sabores que as escolas querem)? Explique sua resposta.

2) Qual é a probabilidade, por escola, de se tirar do carro uma caixa certa (combinação de sabores que as escolas não querem)?

(Resposta correta para esta questão: 3 em 27 ou, simplificando, 1 em 9)

3) Considerando todas as escolas, qual é a probabilidade de se tirar do carro uma caixa certa (combinação de sabores que as escolas não querem)?

(Resposta correta para esta questão: 9 de 27 ou, simplificando, 1 em 3)

4) Qual é a probabilidade de se tirar do carro uma caixa errada (combinação de sabores que as escolas querem)?

(Resposta correta para esta questão: 18 de 27 ou, simplificando, 2 em 3)

Ao final da atividade, o professor deve conduzir algumas discussões com as classe por meio das seguintes questões :

- Como vocês trabalharam para chegar ao número total de caixas e como eliminaram do diagrama as caixas com as combinações indesejadas pelas escolas?
- Como vocês elaboraram as proporções de caixas com combinações indesejadas, que precisavam ser retiradas do carro, em comparação com as caixas que seriam mantidas no carro?
- Por que a probabilidade de se tirar do carro uma caixa com combinação indesejada é a mesma para cada escola?
- Como vocês trabalham a probabilidade 9/27 (ou 1/3) de tirar do carro uma caixa certa (bolo indesejado pelas escolas)?
- Como vocês trabalharam a probabilidade 18/27 (ou 2/3) de tirar do carro uma caixa errada (bolo desejado pelas escolas)?

Durante os questionamentos, o professor precisa encorajar os alunos para que se baseiem nos diagramas realizados e comparem cada caso com o total do espaço amostral.

5.5.7 Atividade 7: Biscoitos do Ben

A sétima atividade, com duração prevista para uma aula, possui o objetivo de fazer com que os alunos sejam capazes de trabalhar a composição do espaço amostral, agregar e eliminar os casos em situações de resolução de problemas, como também, quantificar probabilidades de eventos. Nesta atividade, os alunos utilizam cálculos proporcionais para começar a tomar decisões sobre correlações.

Os materiais necessários para o desenvolvimento da atividade são folhas para anotações das respostas e representação do diagrama de árvore (Apêndice G).

O professor inicia a atividade com a leitura do seguinte problema aos alunos:

> "Ben tem uma lata de biscoitos e pode pegar dois biscoitos, sendo uma escolha por vez e sem olhar. Dentro da lata há 3 biscoitos, sendo 1 de chocolate (C) e 2 de amendoim (A). Sua escolha preferida seria obter 2 biscoitos de amendoim".

Na sequência, o professor dirige a seguinte pergunta para a classe:

1) Em sua opinião, qual é a probabilidade de Ben obter 2 biscoitos de amendoim? (Resposta correta para essa questão: 1/3)

Após os alunos responderem a pergunta solicitada, o professor deve solicitar que eles façam uma primeira estimativa para a probabilidade do evento em questão, como também, para que expressem o que pensam a respeito deste fato. Em seguida, solicitar para que eles desenhem um diagrama para verificar quais são as chances de ocorrência dos eventos.

Por fim, o professor precisa perguntar aos alunos se estavam certos em relação às respostas dadas na primeira questão da atividade. Como também, discutir e saber por que as estimativas iniciais e os resultados dos diagramas dos alunos foram os mesmos ou diferentes.

5.5.8 Atividade 8: Show de Dança

A oitava atividade da sequência didática de probabilidade e risco possui duração prevista para uma aula, seu objetivo é possibilitar que os alunos sejam capazes de trabalhar a composição do espaço amostral, agregar e eliminar os casos em situações de resolução de problemas e quantificar probabilidades de eventos, como também, utilizar cálculos proporcionais para começar a tomar decisões sobre correlações.

Os materiais necessários para o desenvolvimento da atividade são uma sacolinha para sorteio dos pares e fichas com nome dos dançarinos (Figura 6), além disso, folhas para anotações das respostas e representação do diagrama de árvore (Apêndice H).

O professor inicia a atividade mediante leitura do seguinte problema para a classe de alunos:

> "Existem 10 pessoas no show de dança, 5 homens e 5 mulheres (Figura 10). Eles devem formar pares mistos para a dança, por esse motivo (apenas neste problema) os homens não podem dançar com outros homens, ou mulheres com mulheres, como também, cada novo casal formado é obrigado a fazer uma dança."

Figura 10: Ilustrações utilizadas na atividade Show de Dança

Após ler o problema, o professor deve lançar as seguintes indagações aos alunos:

1) Qual é o total de pares diferentes que podem ser formados para dançar? (Resposta: 25 pares diferentes)

2) De acordo com o resultado da questão 1, qual é a quantidade de vezes que cada pessoa dançará? (Resposta: cada pessoa dançará 5 vezes).

3) Qual é a probabilidade de danças cujos nomes dos casais de dançarinos começam com a mesma letra? (Resposta: 4/25)

4) Qual é a probabilidade de danças nas quais ambos os dançarinos estejam segurando um objeto na mão? (Resposta: 3/25)

Na sequência da atividade, o professor deve realizar o sorteio dos pares de danças, para tanto, as fichas com os nomes dos dançarinos são colocadas na sacolinha, para tanto, utiliza-se a divisão interna da sacolinha colocando os nomes dos cinco dançarinos de um lado e das cinco dançarinas do outro, dessa forma, garante-se o sorteio de um casal por vez. Porém, antes do primeiro sorteio, o professor deve fazer a seguinte pergunta aos alunos:

5) Qual é a probabilidade de que o dançarino Beto faça parte do primeiro par sorteado? (Resposta: 1/5)

O professor deve solicitar aos alunos que expliquem como podem usar seus diagramas para trabalhar o número total de combinações, em seguida, identificar a quantidade de combinações das quais o dançarino Beto pode fazer parte.

O professor, então, realiza o sorteio do primeiro par de dançarinos e solicita aos alunos que anotem o resultado. Para que os alunos percebam a mudança de probabilidade, o professor deve realizar mais alguns sorteios (desconsiderando o par já sorteado) e solicitar aos alunos para identificarem a probabilidade de que outro dançarino ou outra dançarina faça parte do próximo par a dançar.

5.6 A sequência didática da intervenção sobre resolução de problemas

Neste tópico, descrevemos as cinco situações de aprendizagens contidas nos planos de aulas destinados aos professores para a realização da intervenção pedagógica sobre resolução de problemas com seus alunos.

As três primeiras atividades abordam a utilização de diagramas de barras para resolução de problemas envolvendo o raciocínio aditivo, já as duas últimas atividades valem-se da utilização de diagramas de relações para resolução de problemas envolvendo o raciocínio multiplicativo.

O tempo previsto para a realização de cada atividade é de duas aulas, bem como, os recursos necessários para o desenvolvimento de cada atividade consistem de um computador pessoal, um projetor de imagens (*Data Show*) e slides com os problemas propostos (desenvolvidos em *PowerPoint*).

5.6.1 Problema 1: Troca de Figurinhas

A primeira atividade, com os alunos organizados em duplas, é apresentada como exemplo pelo professor, dessa forma, o enunciado do problema é projetado e lido para a classe:

> “Thiago e Daniel estão trocando figurinhas. Eles possuem a mesma quantidade de figurinhas para trocar. Thiago dá cinco figurinhas para Daniel. Será que agora Thiago tem mais ou menos figurinhas que antes? Quantas figurinhas Daniel têm a mais que Thiago?”

Depois que os alunos tenham respondido às perguntas, o professor apresenta o passo a passo da resolução com uso dos diagramas:

I. Os alunos são convidados a pensar nos personagens do problema e em quantas figurinhas eles possuem desde o início. Duas barras de mesma altura são desenhadas, uma para cada um dos personagens,

representando o número de figurinhas que possuem no início. O professor precisa salientar que as barras são da mesma altura, pois Thiago e Daniel possuem a mesma quantidade de figurinhas (Figura 11).

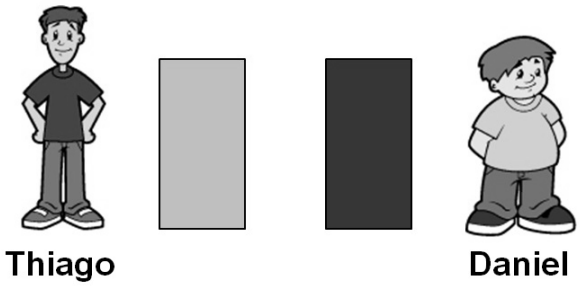


Figura 11: Primeira imagem do Problema 1: Troca de Figurinhas

II. O professor pergunta aos alunos qual é a próxima informação dada no problema (Thiago deu 5 figurinhas para Daniel). Um pedaço da barra representando a quantidade de 5 figurinhas é cortada da barra de Thiago (Figura 12).

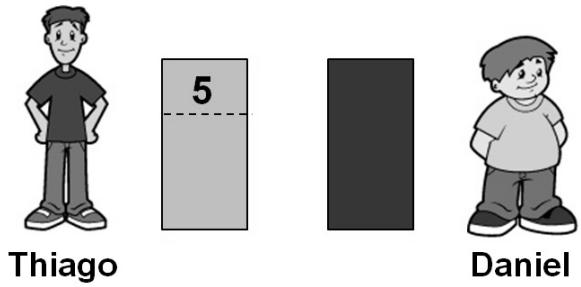


Figura 12: Segunda imagem do Problema 1: Troca de Figurinhas

III. O professor pergunta novamente aos alunos: “Quantas figurinhas Daniel tem a mais que Thiago?". Em seguida, projeta-se a terceira imagem mostrando o que aconteceu (Figura 13).

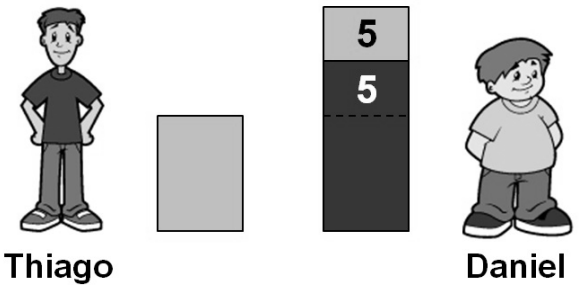


Figura 13: Terceira imagem do Problema 1: Troca de Figurinhas

Para os próximos dois problemas, os alunos devem desenhar as barras para representar as quantidades e mostrar como resolveram os problemas.

Os alunos deverão resolver cada problema individualmente, depois, confrontar sua resposta com a do parceiro de trabalho. Em seguida, cada dupla deve chegar a um acordo sobre qual será o diagrama e a resposta que apresentarão para a classe.

5.6.2 Problema 2: Troca de Livros

A atividade com o segundo problema inicia-se com o professor realizando a leitura do problema para a classe:

> "Clara e Jorge têm a mesma quantidade de livros em suas bibliotecas e agora vão trocar livros. Jorge deu 10 livros para Clara. Será que Jorge tem mais ou menos livros do que antes? Quantos livros a Clara tem a mais que Jorge?"

Depois que os alunos resolverem o segundo problema, o professor apresenta as imagens com a resolução:

I. Ilustração da situação inicial do problema (Figura 14):

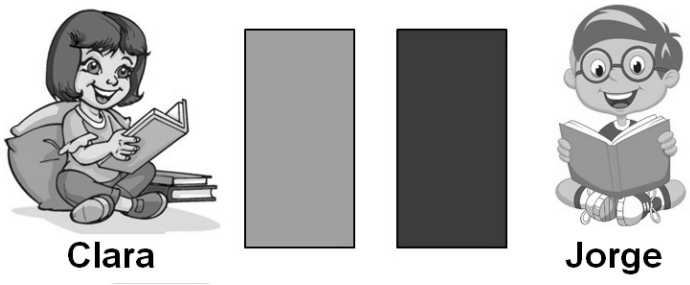


Figura 14: Primeira imagem do Problema 2: Troca de Livros

II. Jorge deu 10 livros para Clara. Será que ele tem mais ou menos livros que antes? (Figura 15).

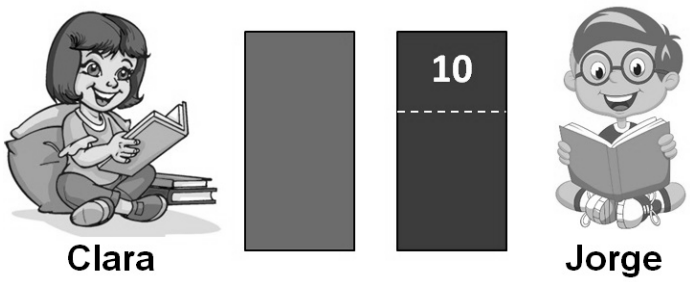


Figura 15: Segunda imagem do Problema 2: Troca de Livros

III. Quantos livros a Clara tem a mais que Jorge? (Figura 16).

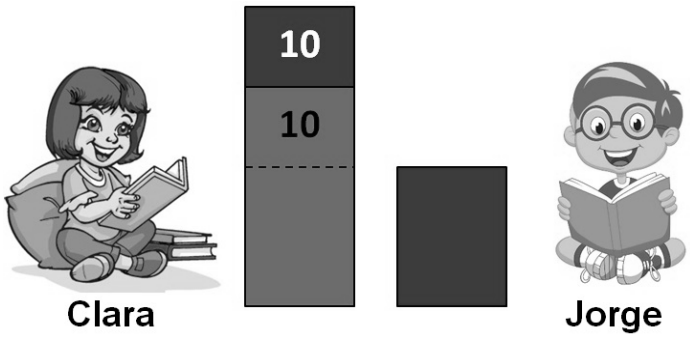


Figura 16: Terceira imagem do Problema 2: Troca de Livros

5.6.3 Problema 3: Troca de CDs

O professor inicia a atividade lendo o terceiro problema para a classe:

> “Eric, Diogo e Sara estão trocando CDs de suas coleções. Todos chegaram para fazer as trocas com a mesma quantidade de CDs. Sara pegou 10 CDs de Diogo e Eric pegou seis CDs de Sara. Qual é a situação agora? O que mais você pode dizer?”

Assim que os alunos concluam a resolução do terceiro problema, o professor apresenta as imagens com a resolução:

I. Ilustração da situação inicial do problema (Figura 17):

Figura 17: Primeira imagem do Problema 3: Troca de CDs

II. Sara pegou 10 CDs de Diogo e Eric pegou seis CDs de Sara (Figura 18):

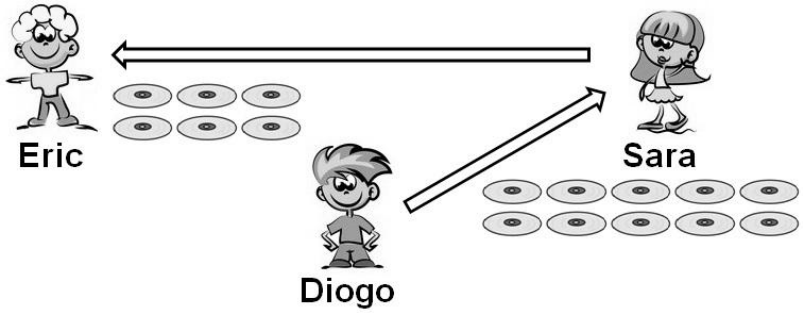


Figura 18: Segunda imagem do Problema 3: Troca de CDs

III. Qual é a situação agora? O que mais você pode dizer? (Figura 19).

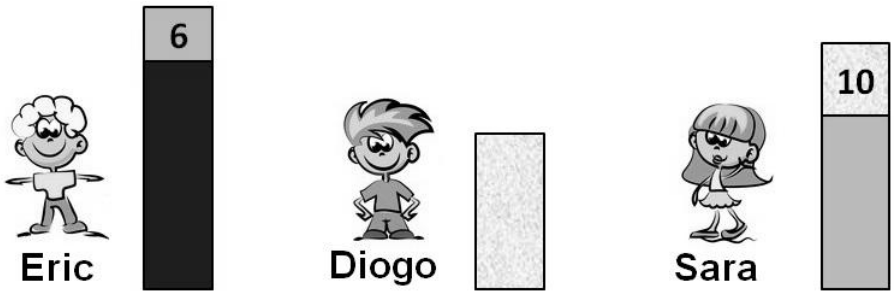


Figura 19: Terceira imagem do Problema 3: Troca de CDs

Cumpre salientar que, nos três problemas apresentados, solicita-se aos alunos para que operem sobre as relações entre quantidades, sem que eles saibam quais são as quantidades. Por esse motivo, inicialmente alguns reagem dizendo que não sabem quantos itens cada um dos personagens possui, fazendo com atribuam um valor numérico para expressar a quantidade de objetos possuídos pelos personagens. Neste caso, as respostas só serão corretas se atribuírem a mesma quantidade para os personagens.

Percebe-se também que os alunos evitam operar sobre as relações sem saber as quantidades, e, por conseguinte, sobre o objetivo do problema. Caso os alunos atribuam um valor numérico para resolver o problema, o professor deve perguntar se a resposta seria a mesma se o problema fosse iniciado a partir de uma quantidade diferente (por exemplo, se a quantidade inicial atribuída foi de 10 objetos, deve-se perguntar se o número seria o mesmo se iniciasse com 15 objetos).

Normalmente, pelo menos um aluno vai dizer que não é necessário atribuir um número arbitrário de itens para os personagens. Neste caso, é importante reforçar esta abordagem.

5.6.4 Problema 4: A Caminhada de Diana e Elaine

O quarto problema é apresentado aos alunos com professor fazendo a leitura do seguinte enunciado:

> “Diana e Elaine estão fazendo uma caminhada. Enquanto Diana dá 10 passos para percorrer certa distância, Elaine precisa dar 6 passos para percorrer a mesma distância. Se Elaine der 12 passos, quantos passos Diana terá que dar para percorrer a mesma distância?”

Assim que os alunos tenham respondido a pergunta, o professor introduz o esquema com o passo a passo da resolução, contudo, salientando que os passos das personagens são de tamanhos diferentes, ou seja, Diana precisa dar 10 passos para cada 6 passos de Elaine, assim, pode-se apresentar uma linha para os passos de cada uma (Figura 20):

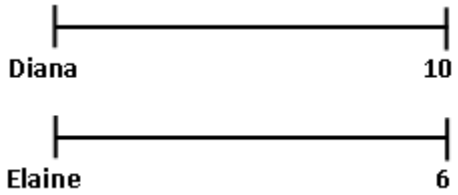


Figura 20: Primeira imagem do Problema 4: A Caminhada de Diana e Elaine

A partir desse momento, os alunos são estimulados a pensar: Quantos passos Diana terá que dar quando Elaine der 12 passos? Uma resposta que surge facilmente é que, se ela anda o dobro de passos, ele também deve ter o dobro de passos. O diagrama projetado para a classe ajuda a pensar sobre isso (Figura 21).

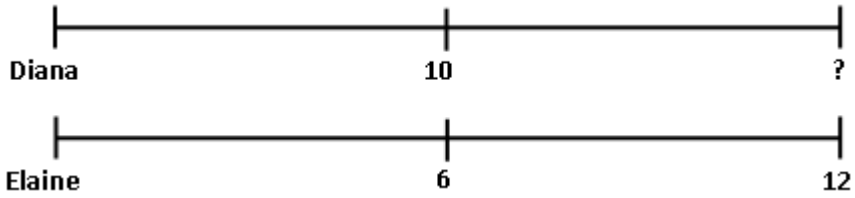


Figura 21: Segunda imagem do Problema 4: A Caminhada de Diana e Elaine

Na sequência da atividade, o professor solicita aos alunos para descobrir quantos passos Diana dará quando Elaine der 15 passos. Neste momento, os alunos são incentivados a pensar que para a Elaine ir dos 12 aos 15 passos, ela anda a metade dos 6 passos dados no início do problema, ou seja, 3 passos. Então Diana também deve andar a metade do número de passos (Figura 22).

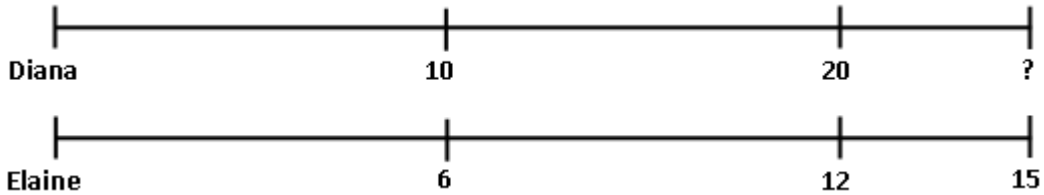


Figura 22: Terceira imagem do Problema 4: A Caminhada de Diana e Elaine

Nesta fase inicial na modelagem de problemas multiplicativos, enfatiza-se a ideia de correspondência e explora-se com os alunos uma abordagem de raciocínio escalar para a solução. Numa fase posterior, deve-se explorar o raciocínio funcional nas mesmas situações e usando o mesmo diagrama.

5.6.5 Problema 5: A Receita de Panquecas

A atividade inicia-se com o professor realizando a leitura do quinto problema para a classe:

> “Linda vai preparar panquecas para seus amigos. A receita diz que vai precisar usar 3 xícaras de farinha de trigo para 8 pessoas. Se ela tem que preparar panquecas para 4 pessoas, quanto de farinha ela usará? Se ela fizer panquecas para 12 pessoas, quanto de farinha ela terá que usar?”

Os números utilizados neste problema são mais difíceis do que os dos problemas anteriores, porém, para responder a primeira pergunta, a maioria dos alunos consegue concluir que uma xícara e meia corresponde a metade de 3 xícaras (Figura 23).

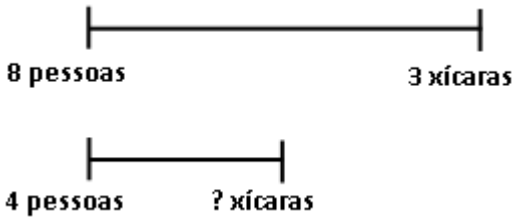


Figura 23: Primeira imagem do Problema 5: A Receita de Panquecas

Para responder a segunda questão do problema, os alunos também precisam ser capazes de descobrir que três xícaras mais uma xícara e meia resulta em quatro xícaras e meia (Figura 24).

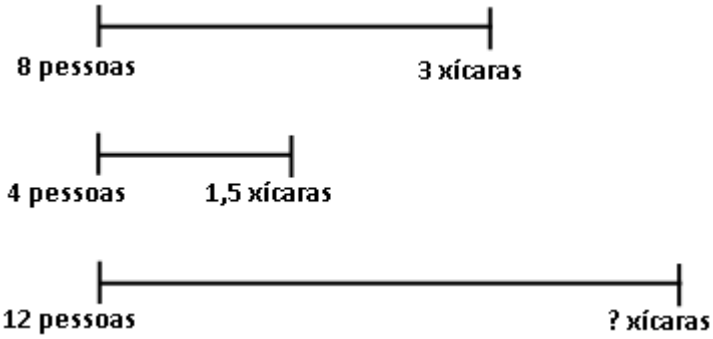


Figura 24: Segunda imagem do Problema 5: A Receita de Panquecas

Caso alguns alunos cheguem rapidamente na resposta correta, pode-se variar o problema perguntando-lhes o quanto de farinha precisaria para 2 pessoas. Caso tenham dificuldades na resolução para duas pessoas, pode-se perguntar também: "Qual é a metade de uma xícara?” “Qual é a metade de meia xícara?”.

5.7 A coleta de dados

Os instrumentos utilizados para a coleta de dados da presente pesquisa foram: questionários de pré-teste (Atividade diagnóstica sobre probabilidade e risco), questionário de pós-teste (Atividade para verificação da aprendizagem sobre probabilidade e risco) utilizados com os alunos e, com os professores, valemo-nos de entrevistas semiestruturadas.

5.7.1 Os questionários de pesquisa utilizados com os alunos

O questionário de pré-teste denominado como “atividade diagnóstica sobre probabilidade e risco” e o questionário de pós-teste denominado “atividade para verificação da aprendizagem sobre probabilidade e risco” foram concebidos com doze questões, sendo algumas fechadas e outras abertas, porém, algumas das questões fechadas também possuem cunho discursivo, uma vez que solicitam justificativas por parte dos alunos.

Estruturamos os questionários da seguinte forma para contemplar as demandas cognitivas integrantes do programa de probabilidade e risco: três questões sobre aleatoriedade, três questões sobre espaço amostral, três questões sobre cálculo e comparação de probabilidades, e três questões sobre compreensão do risco, conforme demonstra a Tabela 5:

Tabela 5: Estrutura dos questionários de pré e pós-teste

Demandas cognitivas	Questões
Aleatoriedade	1, 2 e 3
Espaço amostral	4, 5 e 6
Cálculo e comparação de probabilidade	7, 8 e 9
Compreensão do risco	10, 11 e 12

Todos os alunos realizaram o pré-teste (Atividade Diagnóstica) e o pós-teste (Atividade de Verificação), conforme demonstra a Tabela 6:

Tabela 6: Distribuição dos alunos por tipo de atividade desenvolvida

Tipo de atividade	Frequência	Percentual	Porcentagem válida	Porcentagem acumulada
Atividade Diagnóstica	319	50,0	50,0	50,0
Atividade de Verificação	319	50,0	50,0	100,0

Embora tenhamos optado por questionários diferentes para o pré e pós-teste, suas questões são similares tanto em termos de contextualização como em relação ao grau de dificuldade.

5.7.2 As entrevistas realizadas com os professores de Matemática

Como nosso propósito de estudo em relação aos professores de Matemática consiste em identificar as possíveis contribuições de um programa de ensino sobre letramento probabilístico para suas práticas letivas, optamos por obter os dados necessários mediante a utilização de entrevistas semiestruturadas, pois, conforme define Triviños (1995, p. 146), esse tipo de entrevista *"valoriza a presença do investigador, oferece todas as perspectivas possíveis para que o informante alcance a liberdade e a espontaneidade necessárias, enriquecendo a investigação".*

Uma vez definida a entrevista semiestruturada como procedimento adequado para a coleta de dados junto aos professores, elaboramos um roteiro baseado em três temas norteadores: i) Contribuições do programa de ensino sobre probabilidade para a aprendizagem dos alunos; ii) Possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento do programa de ensino sobre probabilidade; iii) Possíveis contribuições do programa de ensino para a prática letiva dos professores.

Dessa forma, nosso roteiro de entrevista apresenta a seguinte configuração:

Dados pessoais do docente (Idade; tempo de magistério; tempo de experiência lecionando com o 9º ano do Ensino Fundamental; formação acadêmica)

Questões introdutórias:

1) Qual é a importância do letramento probabilístico para a Matemática escolar?
2) Como você define o conceito de aleatoriedade?
3) Como você define o conceito de espaço amostral?
4) Como você define a ideia de comparação de probabilidade?
5) Como você define a ideia de compreensão do risco?

Tema 1: Contribuições do programa de ensino sobre probabilidade e risco para a aprendizagem dos alunos:

1) Quais foram as principais contribuições do programa de ensino para que os alunos compreendessem o conceito de aleatoriedade?
2) Quais foram as principais contribuições do programa de ensino para que os alunos compreendessem o conceito de espaço amostral?
3) Quais foram as principais contribuições do programa de ensino para que os alunos compreendessem o conceito de quantificação de probabilidade?
4) Comparando os conteúdos do programa de ensino com os conteúdos previstos no currículo escolar, quais são os aspectos positivos do programa de ensino que podem favorecer a aprendizagem dos alunos em probabilidade?
5) Cite alguns pontos fortes do programa de ensino para a aprendizagem dos conceitos de probabilidade.

Tema 2: Possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento do programa de ensino sobre probabilidade e risco:

1) Quais foram as principais dificuldades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento do programa de ensino quanto à compreensão dos conteúdos de aleatoriedade?
2) Quais foram as principais dificuldades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento do programa de ensino quanto à compreensão dos conteúdos de espaço amostral?
3) Quais foram as principais dificuldades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento do programa de ensino quanto à compreensão dos conteúdos de quantificação de probabilidade?

4) Comparando os conteúdos do programa de ensino com os conteúdos previstos no currículo escolar, quais são os aspectos negativos do programa de ensino que podem dificultar a aprendizagem dos alunos em probabilidade?
5) Cite alguns pontos fracos do programa de ensino para a aprendizagem dos conceitos de probabilidade.

Tema 3: Possíveis contribuições do programa de ensino para a prática letiva dos professores:

1) Quais foram as principais contribuições advindas do programa de ensino para sua prática letiva em relação aos conteúdos de probabilidade?
2) O programa de ensino em probabilidade propiciou mudanças na maneira de conduzir suas aulas? Quais?
3) Quais foram as principais contribuições da utilização de materiais concretos e jogos para o ensino de probabilidade?
4) Quais são os pontos fortes do programa de ensino para sua prática letiva?
5) Quais são os pontos que precisam ser melhorados no programa de ensino para favorecer adequadamente sua prática letiva e o ensino de probabilidade?

Todas as entrevistas foram presenciais e individuais, gravadas em áudio e vídeo, com a ciência expressa dos professores participantes e, posteriormente, devidamente transcritas. O tempo médio de cada entrevista foi de 45 minutos, por meio do qual, os participantes tiveram tempo adequado para expressar seus argumentos frente às questões do nosso roteiro.

Consideramos que os conteúdos das entrevistas geraram importantes informações para o propósito da nossa investigação, ou seja, no sentido de identificarmos as principais contribuições didáticas proporcionadas pelo programa de ensino sobre probabilidade e risco para a prática letiva dos professores.

Para a análise dos dados provenientes das entrevistas realizadas com os professores, utilizamos uma abordagem de natureza qualitativa.

CAPÍTULO 6

APRESENTAÇÃO E ANÁLISES DOS DADOS DA PESQUISA

Nesta sessão, apresentamos as análises e os resultados dos dados da presente pesquisa, cujo objetivo centrou-se em analisar e identificar quais as principais contribuições de um programa de ensino sobre probabilidade e risco para o aprendizado de alunos do 9º ano da educação básica e para a prática letiva de professores de Matemática.

Desta forma, quanto aos objetivos pertinentes aos alunos participantes da pesquisa, apresentamos os resultados oriundos dos dados dos pré e pós-testes realizados por eles, bem como, quanto aos objetivos concernentes aos professores, discorremos sobre as análises resultantes da entrevista semiestruturada realizada individualmente com cada um dos professores participantes do estudo.

6.1 Resultados oriundos do pré e pós-testes realizados pelos alunos

Apresentamos neste tópico, os resultados obtidos para cada uma das doze questões abordadas no pré-teste (Atividade Diagnóstica) e no pós-teste (Atividade de Verificação) realizado pelos 319 alunos participantes da pesquisa.

Cumpre lembrar que os questionários de pré e pós-teste foram estruturados da seguinte maneira: nas três primeiras questões são abordadas demandas cognitivas sobre aleatoriedade, da quarta à sexta questão são abordadas demandas cognitivas sobre espaço amostral, da sétima à nona questão são abordadas demandas cognitivas sobre cálculo e comparação de probabilidade, e as três últimas questões abordam demandas cognitivas sobre compreensão do risco.

Todas as questões foram analisadas quantitativamente com o auxílio do software estatístico SPSS. Para tanto, realizamos o cruzamento das informações dadas pelos alunos em cada uma das questões do pré e do pós-testes com seu

grupo de origem no estudo, ou seja, o grupo de Controle Desassistido (sem intervenção), o grupo que realizou as intervenções de Probabilidade e Risco e o grupo com o qual foram realizadas intervenções de Resolução de Problemas.

Cabe ressaltar que, apesar de termos utilizado o software SPSS, também valemo-nos da abordagem qualitativa para complementar nossas análises referentes a cada questão.

6.1.1. Resultados da 1ª questão (aleatoriedade)

A primeira questão abordou a demanda cognitiva sobre aleatoriedade envolvendo eventos simultâneos mediante as seguintes situações problemas:

Questão 1 (pré-teste): Carlos tem 10 moedas de 1 real. Ele jogou todas as moedas para o alto e deixou que caíssem no chão. Assinale a alternativa que você considera mais provável que aconteça:

a) □ Todas as moedas vão cair com o lado **"cara"** virado para cima.
b) □ Algumas moedas vão cair com o lado **"cara"** para cima e outras com o lado **"coroa"** para cima.
c) □ Todas as moedas vão cair com o lado **"coroa"** virado para cima.

Questão 1 (pós-teste): Ana possui 12 fichas parecidas com moedas. Todas as fichas são **brancas** de um lado e **pretas** do outro. Ela jogou todas as fichas para o alto e as deixou cair no chão. Assinale a alternativa que você considera mais provável que aconteça:

a) □ Todas as fichas vão cair com o lado **"branco"** virado para cima.
b) □ Algumas fichas vão cair com o lado **"branco"** para cima e outras com o lado **"preto"** para cima.
c) □ Todas as fichas vão cair com o lado **"preto"** virado para cima.

Observa-se que para a primeira questão, tanto no pré como no pós-teste, a resposta correta é a alternativa "b", sendo assim, para esta questão obtivemos os resultados apresentados na Tabela 7:

Tabela 7: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 1ª questão

Questão 1		Tipo de intervenção			Total
Alternativa	Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
a	Atividade Diagnóstica	2	1	1	4
	Atividade de Verificação	4	0	0	4
Total		6	1	1	8
b	Atividade Diagnóstica	106	102	100	308
	Atividade de Verificação	106	104	102	312
Total		212	206	202	620
c	Atividade Diagnóstica	3	2	2	7
	Atividade de Verificação	1	1	1	3
Total		4	3	3	10
Total	Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
	Atividade de Verificação	111	105	103	319
Total		222	210	206	638

Observando os dados da Tabela 7, consta-se que a grande maioria dos alunos, independente do grupo de estudo, não apresentou dificuldades para responder corretamente a primeira questão tanto na Atividade Diagnóstica como na Atividade de Verificação.

Verifica-se também que dos 111 alunos do grupo de controle desassistido, 106 alunos (95,5%) responderam corretamente a primeira questão tanto na Atividade Diagnóstica como na Atividade de Verificação. Quanto ao grupo de intervenção sobre probabilidade e risco, do total de 105 alunos, 102 alunos (97,1%) responderam corretamente a questão 1 na Atividade Diagnóstica e 104 alunos (99%) na Atividade de Verificação. No tocante aos 103 alunos do grupo de intervenção de resolução de problemas, 100 alunos (97,1%) responderam acertadamente a primeira questão na Atividade Diagnóstica e 102 alunos (99%) na Atividade de Verificação.

A grande ocorrência de acertos na primeira questão leva-nos a crer que, especificamente em casos similares aos abordados nesta questão, os alunos possuem boa intuição sobre a aleatoriedade envolvendo eventos simultâneos.

6.1.2. Resultados da 2ª questão (aleatoriedade)

A demanda cognitiva sobre aleatoriedade também foi abordada na segunda questão e envolveu sorteios aleatórios sem reposição, por meio dos quais, esperava-se que os alunos identificassem que as ocorrências de determinados eventos aleatórios são possíveis, porém, pouco prováveis na prática. Para tanto, propomos as seguintes situações problemas:

Questão 02 (pré-teste): Numa caixa há 20 bolinhas azuis e 20 bolinhas vermelhas, todas as bolinhas são do mesmo tamanho e estão misturadas. Selma tinha que tirar uma bola da caixa com os olhos fechados, depois, abrir os olhos e ver qual era a cor da bolinha retirada e, em seguida, colocar a bolinha outra vez na caixa. Ela fez isso 5 vezes seguidas. As cores das bolinhas retiradas por Selma foram as seguintes:

Quadro 8: Questão 2 da Atividade Diagnóstica

Retiradas	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Cor da bolinha	Azul	Azul	Azul	Azul	Azul

Esse resultado conseguido por Selma, ou seja, retirar 5 bolinhas azuis, é possível? Por quê?

Resposta: a) □ Sim b) □ Não c) □ Talvez

Porque,_____
_____

Questão 02 (pós-teste): Numa caixa há 25 cartões verdes e 25 cartões amarelos, todos os cartões são do mesmo tamanho e estão misturados. Lucas tirou um cartão da caixa com os olhos fechados, depois, olhou para ver qual era a cor do cartão retirado e, em seguida, colocou o cartão outra vez na caixa. Ele fez isso por 5 vezes seguidas. As cores dos cartões retirados por Lucas foram as seguintes:

Quadro 9: Questão 2 da Atividade de Verificação

Retiradas	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Cor do cartão	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde

Esse resultado conseguido por Lucas, ou seja, retirar 5 cartões verdes, é possível? Por quê?

Resposta: a) □ Sim b) □ Não c) □ Talvez

Porque,_____
_____

Como resposta para a questão 2, tanto no pré como no pós-teste, esperava-se que os alunos identificassem que os resultados obtidos no sorteio elucidado na situação problema, embora possíveis, na prática suas ocorrências são pouco prováveis. Assim, as respostas consideradas corretas para a questão são “sim” ou “talvez”, porém, ambas acompanhadas das devidas justificativas para corroborar os motivos pela opção da alternativa assinalada pelos alunos. Desta forma, os resultados obtidos para a segunda questão são apresentados na Tabela 8:

Tabela 8: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 2ª questão

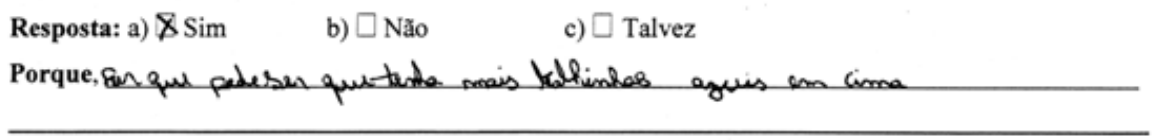
Questão 2		Tipo de intervenção			Total
Alternativa	Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
Sim	Atividade Diagnóstica	40	38	48	126
	Atividade de Verificação	50	43	33	126
Total		90	81	81	252
Não	Atividade Diagnóstica	14	11	11	36
	Atividade de Verificação	6	19	8	33
Total		20	30	19	69
Talvez	Atividade Diagnóstica	57	56	44	157
	Atividade de Verificação	55	43	62	160
Total		112	99	106	317
Total	Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
	Atividade de Verificação	111	105	103	319
Total		222	210	206	638

Consideramos que os dados da Tabela 8 não esclarecem se a intervenção de Probabilidade e Risco contribuiu efetivamente para que os alunos participantes compreendessem que as ocorrências dos eventos propostos nas atividades eram possíveis, contudo, pouco prováveis.

Justificamos nossa opinião pelo fato de que, comparativamente, houve uma pequena variação positiva referente aos índices dos alunos que responderam “sim” na Atividade Diagnóstica (46,9%) e apresentara a mesma resposta na Atividade de Verificação (53,1%), em contrapartida, também houve aumento nos índices dos alunos que responderam “não” na Atividade Diagnóstica (36,7%) e também na Atividade de Verificação (63,3%).

Por outro lado, as justificativas fornecidas por alguns alunos para a questão em estudo oferecem-nos indícios de que a intervenção de Probabilidade e Risco contribuiu para que os alunos compreendessem a diferença entre os eventos impossíveis e improváveis dos fenômenos aleatórios. Tais indícios podem ser constatados nos seguintes recortes extraídos das respostas dadas por alguns alunos nos questionários de pré e pós-teste apresentados nas Figuras 25 e 26:

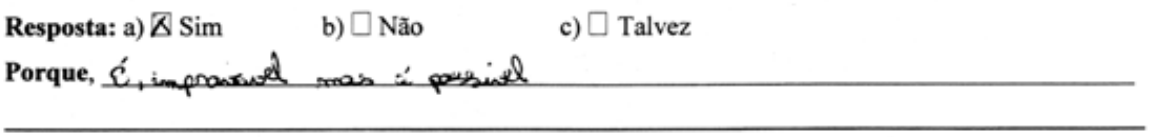
Justificativa apresentada pela aluna B. B. na Atividade Diagnóstica:


Resposta: a) ☒ Sim b) ☐ Não c) ☐ Talvez

Porque, Por que pelo ser que tenha mais bolinhas aqui em cima

Figura 25: Justificativa da aluna B. B. na questão 2 da Atividade Diagnóstica

Justificativa oferecida pela aluna B. B. na Atividade de Verificação:


Resposta: a) ☒ Sim b) ☐ Não c) ☐ Talvez

Porque, É improvável mas é possível

Figura 26: Justificativa da aluna B. B. na questão 2 da Atividade de Verificação

Consideramos interessante notar a evolução de raciocínio apresentada pela aluna B. B. da Atividade Diagnóstica para a Atividade de Verificação, na primeira atividade a aluna atribuiu a possibilidade do resultado ao posicionamento das bolinhas no interior da caixa, já na segunda atividade, a aluna considerou o resultado improvável, mas possível.

A Figura 27 mostra a justificativa do aluno J. C. M. na Atividade Diagnóstica:

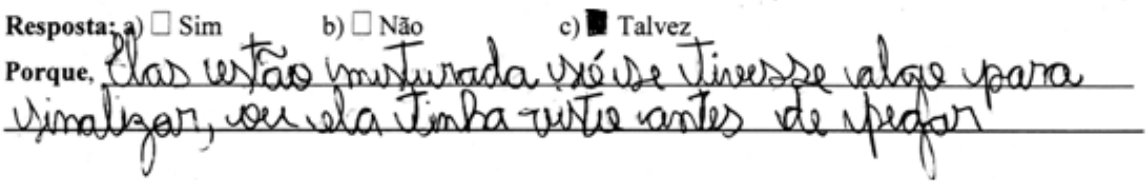

Resposta: a) ☐ Sim b) ☐ Não c) ■ Talvez
Porque, Elas estão misturada só se tivesse algo para visualizar, ou ela tinha sido antes de pegar

Figura 27: Justificativa do aluno J. C. M. na questão 2 da Atividade Diagnóstica

A Figura 28 apresenta a resposta do aluno J. C. M. na Atividade de Verificação:

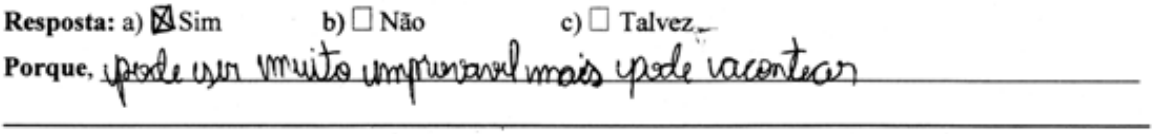

Resposta: a) ☒ Sim b) ☐ Não c) ☐ Talvez
Porque, pode ser muito improvavel mais pode acontecer

Figura 28: Justificativa do aluno J. C. M. na questão 2 da Atividade de Verificação

O aluno J. C. M. também apresentou uma evolução de raciocínio da Atividade Diagnóstica para a Atividade de Verificação, na primeira atividade ele atribuiu a possibilidade de ocorrência do resultado caso houvesse alguma forma de desonestidade. Já na segunda atividade, ele considerou a possibilidade de ocorrência do resultado, porém, considerou que o mesmo seria muito improvável.

Na Atividade Diagnóstica, o aluno A. S. N. apresentou a justificativa indicada na Figura 29:

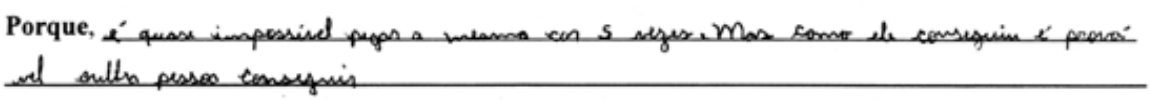

Porque, é quase impossível pegar a mesma cor 5 vezes. Mas como ele consegui é possível outra pessoa conseguir

Figura 29: Justificativa do aluno A. S. N. na questão 2 da Atividade Diagnóstica

Resposta do aluno A. S. N. na Atividade de Verificação descrita na Figura 30:

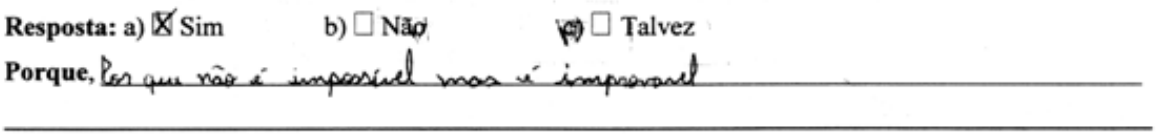

Resposta: a) ☒ Sim b) ☐ Não c) ☐ Talvez
Porque, Por que não é impossível mas é improvavel

Figura 30: Justificativa do aluno A. S. N. na questão 2 da Atividade de Verificação

Observa-se, mediante a resposta apresentada na Atividade Diagnóstica, que o aluno A. S. N. já possuía boa intuição acerca da ocorrência de eventos impossíveis e improváveis. Contudo, a resposta apresentada na Atividade de Verificação fornece-nos indícios de que a intervenção de Probabilidade e Risco contribuiu para que o aluno consolidasse estes conceitos.

Por meios das justificativas oferecidas pelos alunos pertencentes aos grupos de Controle Desassistido e de Resolução de Problemas, observamos não haver a compreensão de que a ocorrência de certos fenômenos aleatórios possa ser possível, porém, pouco provável na prática. Identificamos por meio das respostas de alguns alunos que eles consideraram a possibilidade de se retirar repetidas vezes uma bolinha da mesma cor em um sorteio aleatório com reposição, devido ao fato da bolinha voltar para o sorteio, por isso, a pessoa que está sorteando pode pegar novamente a mesma bolinha no sorteio seguinte. Tal constatação remete-nos aos equívocos cognitivos relacionados com a probabilidade identificados por Heitele (1975) e Garfield e Ahlgrem (1988).

6.1.3. Resultados da 3ª questão (aleatoriedade)

A terceira questão também abordou a demanda cognitiva sobre aleatoriedade. Para esta questão, esperávamos que os alunos identificassem que alguns resultados seriam impossíveis de serem obtidos ao se somar os resultados do lançamento de dois dados (Atividade Diagnóstica) ou no lançamento de três dados (Atividade de Verificação), para tanto, abordamos a temática proposta mediante as seguintes situações problemas:

Questão 03 (pré-teste): O professor de Matemática pediu aos seus alunos que fizessem um jogo utilizando dois dados de seis faces. Os alunos tinham que jogar os dois dados ao mesmo tempo e somar os números que ficassem virados para cima. Gabriel fez 10 jogadas e anotou os seguintes resultados de suas somas:

Quadro 10: Questão 3 da Atividade Diagnóstica

Resultado da soma de dois dados									
7	**12**	**8**	**13**	**6**	**9**	**1**	**10**	**5**	**4**

Todos os resultados conseguidos por Gabriel são possíveis? Por quê?

Resposta: a) □ Sim b) □ Não c) □ Talvez

Porque,_____

_____

Questão 03 (pós-teste): Pedro estava brincando de lançar, ao mesmo tempo, 3 dados de seis faces. Em cada jogada, ele fazia a soma dos números que ficavam virados para cima. Pedro jogou seus dados por 10 vezes e anotou os seguintes resultados de suas somas:

Quadro 11: Questão 3 da Atividade de Verificação

Resultado da soma de três dados									
4	**12**	**9**	**19**	**14**	**6**	**2**	**10**	**11**	**13**

Todos os resultados conseguidos por Pedro são possíveis? Por quê?

Resposta: a) □ Sim b) □ Não c) □ Talvez

Porque,_____

_____

Verifica-se que a resposta correta para a terceira questão configura-se na alternativa “não”, pois, na soma dos resultados do lançamento de dois dados (Atividade Diagnóstica) é impossível se obter totais nos valores 1 e 13, assim como, as possíveis somas de resultados no lançamento de três dados (Atividade de Verificação) jamais podem totalizar 2 e 19. Na sequência, apresentamos os resultados da Questão 3:

Tabela 9: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 3ª questão

Questão 3		Tipo de intervenção			Total
Alternativa	Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
Sim	Atividade Diagnóstica	42	29	26	97
	Atividade de Verificação	36	10	28	74
	Total	78	39	54	171
Não	Atividade Diagnóstica	60	63	70	193
	Atividade de Verificação	58	87	63	208
	Total	118	150	133	401
Talvez	Atividade Diagnóstica	9	13	7	29
	Atividade de Verificação	17	8	12	37
	Total	26	21	19	66
Total	Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
	Atividade de Verificação	111	105	103	319
	Total	222	210	206	638

De acordo com os dados da Tabela 9, observa-se que dos 105 alunos participantes da Intervenção de Probabilidade e Risco, 63 alunos (60%) responderam corretamente a questão na Atividade Diagnóstica, já na Atividade de Verificação, a resposta correta foi dada por 87 alunos (82,9%). Contrariamente, observa-se que nos grupos de Controle Desassistido e de Resolução de Problemas, houve diminuição nos índices de acerto do pré para o pós-teste.

Portanto, considerando os resultados referentes às situações propostas na terceira questão dos pré e pós-testes, deduzimos que a Intervenção de Probabilidade e Risco contribuiu para com a compreensão dos alunos acerca das possíveis possibilidades de ocorrência de eventos envolvendo o resultado da soma no lançamento de dois dados.

6.1.4. Resultados da 4ª questão (espaço amostral)

A quarta questão abordou a demanda cognitiva para compreensão do espaço amostral, por meio da qual desejava-se que os alunos fossem capazes de

reconhecer padrões de sequências em figuras e, em seguida, completar adequadamente os espaços vazios contido num quadro com as respectivas figuras faltantes. Sendo assim, foram propostas as seguintes situações problemas:

Questão 04 (pré-teste): Observe o quadro abaixo e, em seguida, desenhe as figuras que estão faltando.

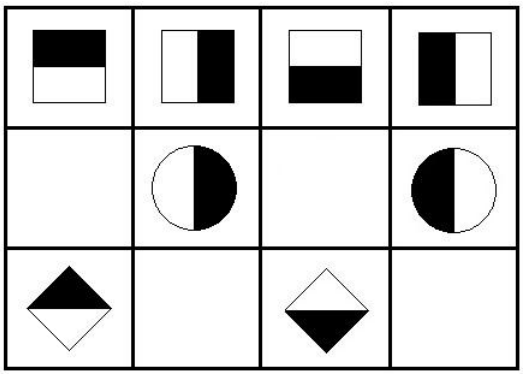


Figura 31: Imagem da questão 4 da Atividade Diagnóstica

Questão 04 (pós-teste): Observe o quadro abaixo e, em seguida, desenhe as figuras que estão faltando.

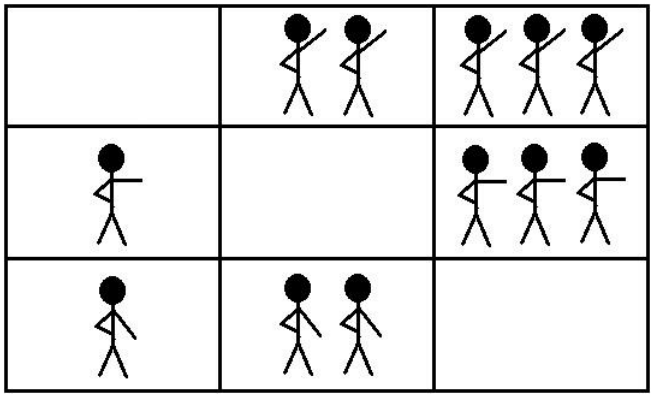


Figura 32: Imagem da questão 4 da Atividade de Verificação

Para a presente questão, as respostas consideradas corretas dar-se-iam com o preenchimento dos quadros com a sequência adequada das figuras, tal como demonstram as Figuras 33 e 34:

Atividade Diagnóstica

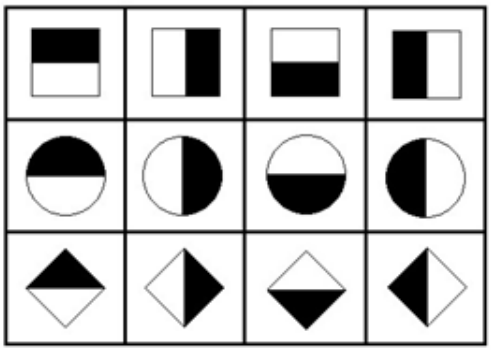


Figura 33: Preenchimento correto do quadro da questão 4 da Atividade Diagnóstica

Atividade de Verificação

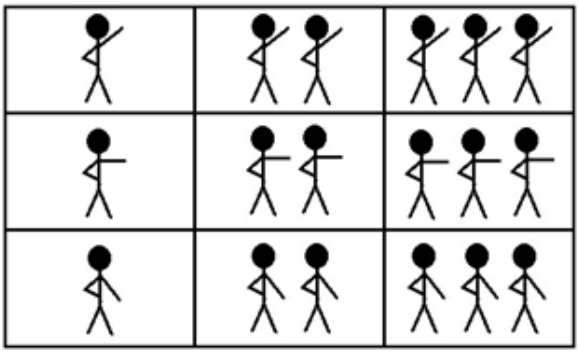


Figura 34: Preenchimento correto do quadro da questão 4 da Atividade de Verificação

Os dados oriundos da quarta questão encontram-se descritos na Tabela 10:

Tabela 10: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 4ª questão

Questão 4		Tipo de intervenção			Total
Sequência	Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
Correta	Atividade Diagnóstica	76	80	70	226
	Atividade de Verificação	64	80	59	203
Total		140	160	129	429
Incorreta	Atividade Diagnóstica	35	25	33	93
	Atividade de Verificação	47	25	44	116
Total		82	50	77	209
Total	Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
	Atividade de Verificação	111	105	103	319
Total		222	210	206	638

Os dados da Tabela 10 indicam que, na Atividade Diagnóstica e na Atividade de Verificação, mantiveram-se as respostas fornecidas pelos 105 alunos participantes da intervenção de Probabilidade e Risco, tanto de acertos (76,2%) como erros (23,8%). Sendo assim, inferimos que a intervenção de Probabilidade e Risco não proporcionou mudanças nas opiniões dos alunos, todavia, ao menos serviu para que não aumentasse a quantidade de respostas errôneas no pós-teste tal como aconteceu com os alunos dos grupos de Controle Desassistido e de Resolução de Problemas, cujos índices dos resultados errôneos aumentaram, respectivamente, de 42,7% para 57,3% e de 42,8% para 57,1%.

Outra análise interessante emerge do índice percentual de 14% referente aos alunos que erraram a quarta questão em ambas as atividades, pois, conforme observamos, todos estes alunos tiveram um baixo rendimento geral no pré e no pós-testes, sendo que, das 12 questões contidas em cada uma das atividades, em média, estes alunos acertaram apenas 4 questões, tal índice sugere uma possível dificuldade cognitiva dos alunos, principalmente, quanto a execução de atividades que exigem a observância de padrões específicos.

6.1.5. Resultados da 5ª questão (espaço amostral)

A quinta questão também abordou a demanda cognitiva sobre compreensão do espaço amostral objetivando que os alunos identificassem a quantidade de combinações possíveis de algumas figuras. Para tanto, contaram com o auxílio de uma tabela de dupla entrada, como demonstra as seguintes situações problemas:

Questão 05 (pré-teste): Numa escola têm três diferentes tipos de tecidos que os alunos podem usar para fazer bandeiras: branco, listrado ou quadriculado. O professor trouxe caixas com 4 figuras diferentes para as crianças colarem no centro das bandeiras. Foi solicitado que os alunos façam o máximo de bandeiras diferentes que conseguirem. Quantas bandeiras diferentes os alunos conseguem fazer? O quadro abaixo pode facilitar a solução, por isso, se quiser pode completá-lo desenhando as bandeiras possíveis.

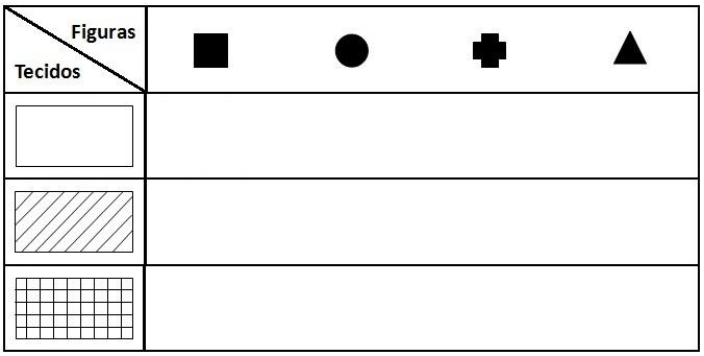


Figura 35: Imagem da questão 5 da Atividade Diagnóstica

Resposta: Os alunos conseguem fazer _____ bandeiras diferentes.

Questão 05 (pós-teste): Uma costureira possui 4 tipos diferentes de tecidos: listrado vertical, listrado diagonal, listrado horizontal e quadriculado. A costureira pretende fazer bandeiras cortando os tecidos em retângulos e colocando no centro um desses 3 diferentes tipos de figuras: losango, cruz e triângulo. Quantas bandeiras diferentes a costureira consegue fazer? O quadro abaixo pode facilitar a solução, por isso, se quiser pode completá-lo desenhando as bandeiras possíveis.

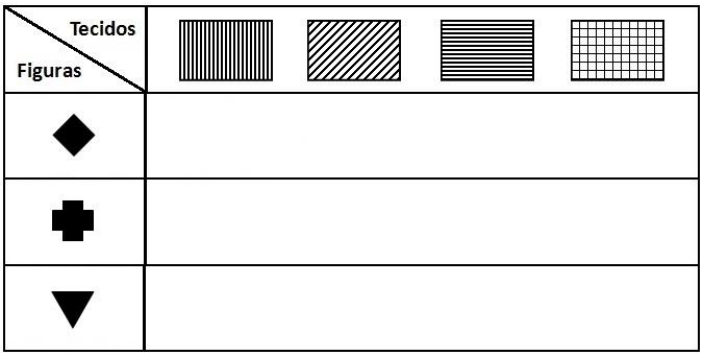


Figura 36: Imagem da questão 5 da Atividade de Verificação

Resposta: A costureira consegue fazer _____ bandeiras diferentes.

Nota-se que para a quinta questão, tanto na Atividade Diagnóstica, como na Atividade de Verificação, o resultado correto são 12 combinações diferentes.

Cumpre ressaltar que os alunos apresentaram uma grande diversidade de resultados para esta questão, sendo assim, simplificamos os dados em três categorias: respostas incorretas com valores menores que 12 bandeiras diferentes; respostas corretas (12 bandeiras diferentes); e respostas incorretas com valores maiores que 12 bandeiras diferentes.

Tabela 11: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 5ª questão

Questão 5			Tipo de intervenção			Total
Resposta		Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
Incorreta < 12		Atividade Diagnóstica	18	26	14	58
		Atividade de Verificação	16	3	7	26
	Total		34	29	21	84
Correta		Atividade Diagnóstica	85	71	77	233
		Atividade de Verificação	84	98	88	270
	Total		169	169	165	503
Incorreta > 12		Atividade Diagnóstica	6	8	12	26
		Atividade de Verificação	13	4	8	25
	Total		19	12	20	51
Total		Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
		Atividade de Verificação	111	105	103	319
	Total		222	210	206	638

Conforme pode ser observado mediante os dados da Tabela 11, nota-se que a intervenção de Probabilidade e Risco pode ter oferecido contribuições significativas para a aprendizagem dos alunos, uma vez que 71 alunos (67,6%) acertaram o resultado da quinta questão na Atividade Diagnóstica e, na Atividade de Verificação, a quantidade de acertos aumentou para 98 alunos (93,3%). Já em relação aos alunos do grupo de Resolução de Problemas, percebe-se um ligeiro aumento no índice de acertos da Atividade Diagnóstica para a Atividade de Verificação, na primeira, 77 alunos (74,7%) responderam a questão corretamente e, na segunda, 88 alunos (85,4%) acertaram a resposta da questão. Nota-se também, por meio dos dados referentes aos alunos pertencentes ao grupo de Controle Desassistido, que praticamente não houve alteração nos resultados, pois 85 alunos (76,6%) acertaram a questão no pré-teste e, no pós-teste, 84 alunos (75,7%) responderam a questão corretamente.

Torna-se importante salientar que, de modo geral, a maioria dos alunos apresentou bom desempenho de acertos na quinta questão. Acreditamos que esse resultado deve-se, principalmente, porque os alunos contaram com o auxílio da tabela de dupla entrada para a resolução dos problemas propostos.

6.1.6. Resultados da 6ª questão (espaço amostral)

A demanda cognitiva sobre espaço amostral também foi abordada na sexta questão, mediante a qual tanto na Atividade Diagnóstica como na Atividade de Verificação, esperava-se que os alunos reconhecessem a necessidade de se conhecer previamente o espaço amostral para a tomada de decisões, uma vez que, à primeira vista, a solução das situações problemas propostas aos alunos envolvem o raciocínio contra intuitivo, como pode ser observado na sequência:

Questão 06 (pré-teste): João possui três cartas desenhadas, sendo duas com rostos felizes e uma com rosto triste. Ele resolveu embaralhar as cartas e tirar duas por vez. O que você acha mais provável acontecer? Por quê?

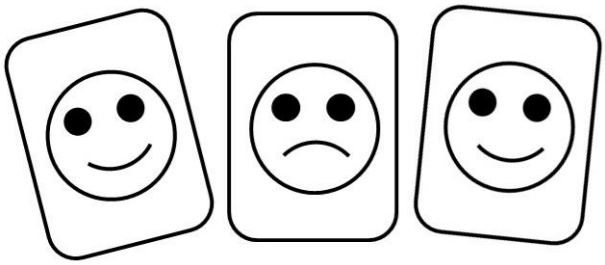


Figura 37: Imagem da Questão 6 da Atividade Diagnóstica

a) ☐ Sair duas cartas com rostos felizes.
b) ☐ Sair duas cartas com rostos misturados: uma com rosto feliz e a outra com rosto triste.

Porque,_____

_____

Questão 06 (pós-teste): Leila possui três cartas desenhadas, sendo duas com uma estrela e uma com um coração. Se ela embaralhar as cartas e tirar duas por vez, o que você acha mais provável que aconteça? Por quê?

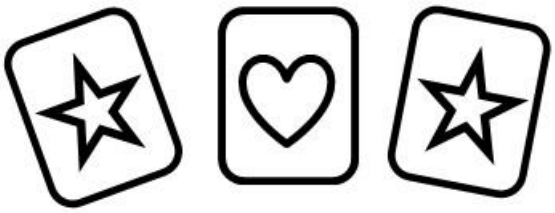


Figura 38: Imagem da Questão 6 da Atividade de Verificação

a) ☐ Sair duas cartas com desenho de estrela.
b) ☐ Sair duas cartas misturadas: uma com desenho de estrela e a outra com desenho de coração.

Porque,_____

_____

Mediante construção da árvore de possibilidades, os alunos devem concluir que a alternativa “b”, configura-se como sendo a resposta correta para a Atividade Diagnóstica e para a Atividade de Verificação.

A Tabela 12 demonstra os dados referentes à sexta questão.

Tabela 12: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 6ª questão

Questão 6		Tipo de intervenção			Total
Alternativa	Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
“a”	Atividade Diagnóstica	48	57	51	156
	Atividade de Verificação	65	52	59	176
Total		113	109	110	332
“b”	Atividade Diagnóstica	62	45	52	159
	Atividade de Verificação	44	51	41	136
Total		106	96	93	295
Ambas	Atividade Diagnóstica	1	3	0	4
	Atividade de Verificação	2	2	3	7
Total		3	5	3	11
Total	Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
	Atividade de Verificação	111	105	103	319
Total		222	210	206	638

Contata-se, mediante os dados da Tabela 12, que os alunos participantes da intervenção de Probabilidade e Risco apresentaram uma pequena melhora no desempenho, da Atividade Diagnóstica para a Atividade de Verificação, quanto ao número de acertos na sexta questão, sendo que, no pré-teste, 45 alunos (42,8%) responderam a questão corretamente, enquanto que, no pós-teste, a resposta correta foi indicada por 51 alunos (48,6%). Ao contrário, tanto os alunos do grupo de

Controle Desassistido, como os do grupo de Resolução de Problemas apresentaram diminuição de desempenho da Atividade Diagnóstica para a Atividade de Verificação.

Acreditamos que o índice de acerto em torno de 50% referente aos três grupos de alunos tanto na Atividade Diagnóstica, como na Atividade de Verificação, pode estar associado ao fato de que a sexta questão apresenta uma situação problema cuja solução demanda um raciocínio contra intuitivo de eventos simples, ou seja, tendo-se três cartas, das quais duas serão sorteadas aleatoriamente, sendo duas com o mesmo símbolo e apenas uma de símbolo diferente, levou-os a optar intuitivamente pela alternativa que apontava ser mais provável obter duas cartas com o mesmo símbolo, portanto, se os alunos não identificarem o espaço amostral, a princípio, a alternativa “a” da sexta questão parece ser a mais óbvia. Esta nossa hipótese pode ser verificada por meio dos seguintes exemplos apresentados nas justificativas fornecidas por alguns alunos:

A aluna B. B. registrou a seguinte justificativa na Atividade Diagnóstica:

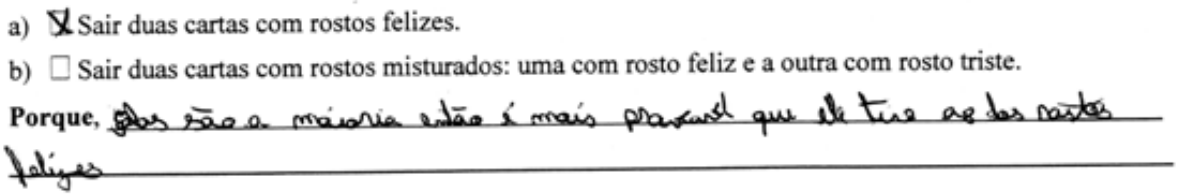

a) ☒ Sair duas cartas com rostos felizes.
b) ☐ Sair duas cartas com rostos misturados: uma com rosto feliz e a outra com rosto triste.
Porque, pois são a maioria então é mais provável que ele tire as dos rostos felizes

Figura 39: Justificativa da aluna B. B. na questão 6 da Atividade Diagnóstica

Nota-se que na Atividade Diagnóstica, ou seja, antes da intervenção de Probabilidade e Risco, o caráter contra intuitivo da situação problema contribuiu para que a aluna B. B. respondesse a questão erroneamente.

Já na Atividade de Verificação, a aluna B. B. forneceu a seguinte resposta:

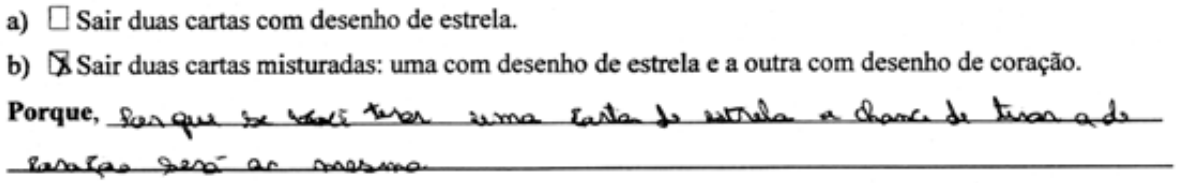

a) ☐ Sair duas cartas com desenho de estrela.
b) ☒ Sair duas cartas misturadas: uma com desenho de estrela e a outra com desenho de coração.
Porque, porque se você tirar uma carta de estrela a chance de tirar a de coração será a mesma.

Figura 40: Justificativa da aluna B. B. na questão 6 da Atividade de Verificação

Constata-se que a aluna analisou adequadamente a possibilidade de se obter duas cartas misturadas, ou seja, uma com o desenho da estrela e a outra com o desenho do coração.

A aluna T. S. G. apontou a seguinte justificativa na Atividade Diagnóstica:

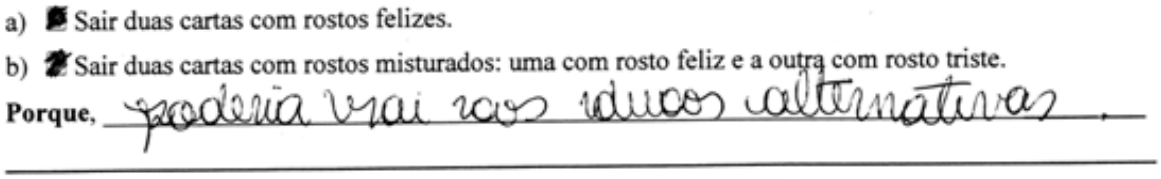

a) ■ Sair duas cartas com rostos felizes.
b) ■ Sair duas cartas com rostos misturados: uma com rosto feliz e a outra com rosto triste.
Porque, poderia vai nos duas alternativas.

Figura 41: Justificativa da aluna T. S. G. na questão 6 da Atividade Diagnóstica

Verifica-se que no pré-teste a aluna T. S. G. assinalou as duas alternativas da questão, provavelmente, demonstrando incerteza quanto à resposta correta.

No pós-teste, a aluna T. S. G. apresentou a seguinte justificativa:

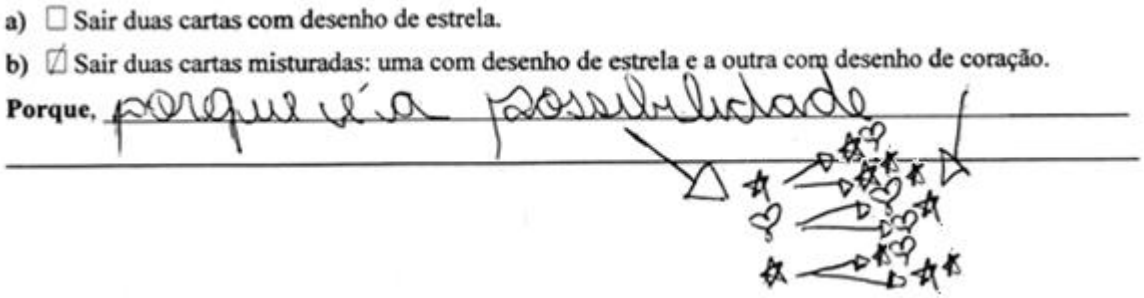

a) ☐ Sair duas cartas com desenho de estrela.
b) ☑ Sair duas cartas misturadas: uma com desenho de estrela e a outra com desenho de coração.
Porque, porque é a possibilidade

Figura 42: Justificativa da aluna T. S. G. na questão 6 da Atividade de Verificação

De acordo com sua resposta no pós-teste, a aluna T. S. G. demonstrou conhecimento para encontrar o espaço amostral e, assim, responder acertadamente a sexta questão.

A aluna A. N. S. registrou a seguinte justificativa na Avaliação Diagnóstica:

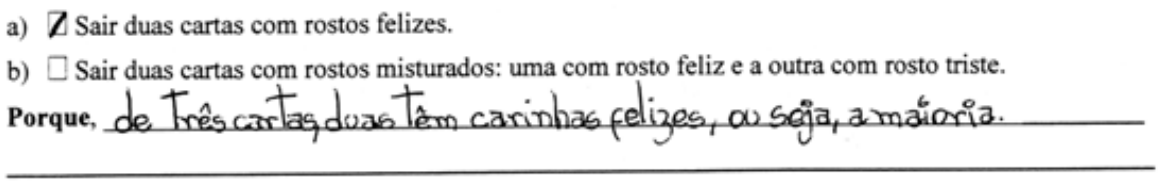

a) ☑ Sair duas cartas com rostos felizes.
b) ☐ Sair duas cartas com rostos misturados: uma com rosto feliz e a outra com rosto triste.
Porque, de três cartas, duas têm carinhas felizes, ou seja, a maioria.

Figura 43: Justificativa da aluna A. N. S. na questão 6 da Atividade Diagnóstica

Observa-se, mediante a resposta fornecida pela aluna A. N. S., que o caráter contra intuitivo presente na situação-problema pode ter influenciado sua tomada de decisão.

Para finalizar os exemplos, segue a resposta da aluna A. N. S. na sexta questão na Atividade de Verificação:

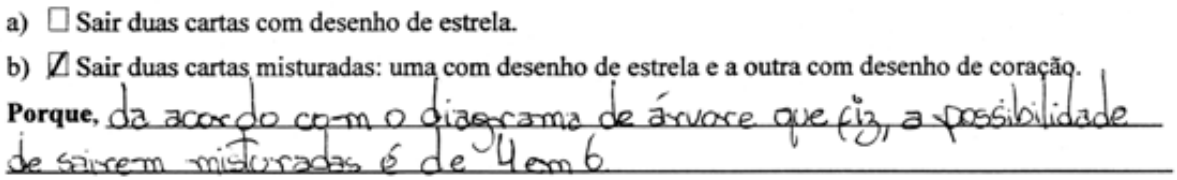

a) ☐ Sair duas cartas com desenho de estrela.
b) ☑ Sair duas cartas misturadas: uma com desenho de estrela e a outra com desenho de coração.
Porque, da acordo com o diagrama de árvore que fiz, a possibilidade de sairem misturadas é de 4 em 6.

Figura 44: Justificativa da aluna A. N. S. na questão 6 da Atividade de Verificação

Verifica-se que, no pós-teste, a aluna A. N. S. conseguiu definir o espaço amostral e assinalar convictamente a alternativa correta da sexta questão.

Nota-se que, as justificativas fornecidas por alguns dos alunos do grupo de intervenção de Probabilidade e Risco que responderam erroneamente a sexta questão na Atividade Diagnóstica, mas depois responderam acertadamente na Atividade de Verificação, corroboram para reforçar nossa suposição acerca do caráter contra intuitivo da situação-problema, bem como, demonstram que a intervenção de Probabilidade e Risco provavelmente ofereceu contribuições para a aprendizagem destes alunos, especificamente, quanto à compreensão da importância de se conhecer o espaço amostral para identificar a possibilidade de ocorrência de determinados eventos.

6.1.7. Resultados da 7ª questão (quantificação de probabilidade)

A sétima questão abordou a demanda cognitiva sobre quantificação de probabilidade.

Nesta questão, esperava-se que os alunos fossem capazes de realizar comparações quantitativas entre duas probabilidades conhecidas para decidir sobre

a maior chance de ocorrência entre dois eventos. Sendo assim, propomos aos alunos as seguintes situações problemas:

Questão 7 (pré-teste): A chance de uma pessoa ganhar no “cara e coroa” é de $\frac{1}{2}$ e a chance de sair um número escolhido no lançamento de um dado é de $\frac{1}{6}$. Sendo assim, qual das chances abaixo você considera mais provável? Por quê?

a) □ A chance de ganhar no “cara e coroa” é maior do que ganhar no lançamento do dado.
b) □ A chance de ganhar no “cara e coroa” é menor do que ganhar no lançamento do dado.
c) □ As chances de ganhar no “cara e coroa” ou no lançamento do dado são as mesmas.

Porque,_____
_____

Questão 7 (pós-teste): No lançamento de um dado, a probabilidade de sair um número ímpar é de $\frac{1}{2}$ e a chance de sair um número maior que 2 é de $\frac{2}{3}$. Sendo assim, qual das chances abaixo você considera mais provável? Por quê?

a) □ Há maior chance de sair um “número maior que 2” do que sair um “número ímpar”.
b) □ Há maior chance de sair um “número ímpar” do que sair um “número maior que 2”.
c) □ As chances de sair “número ímpar” ou “número maior que 2” são as mesmas.

Porque,_____
_____

Observando as situações proposta, verifica-se que tanto no pré-teste, como no pós-teste, a alternativa “a” configura-se como sendo a resposta correta da sétima questão.

Os dados obtidos para esta questão encontram-se na Tabela 13.

Tabela 13: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 7ª questão

Questão 7		Tipo de intervenção			Total
Alternativa	Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
"a"	Atividade Diagnóstica	52	51	58	161
	Atividade de Verificação	48	61	40	149
Total		100	112	98	310
"b"	Atividade Diagnóstica	37	23	31	91
	Atividade de Verificação	22	6	19	47
Total		59	29	50	138
"c"	Atividade Diagnóstica	22	31	14	67
	Atividade de Verificação	41	38	44	123
Total		63	69	58	190
Total	Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
	Atividade de Verificação	111	105	103	319
Total		222	210	206	638

Os dados da Tabela 13 demonstram que os alunos participantes da intervenção de Probabilidade e Risco obtiveram algum progresso na quantidade de respostas corretas para a sétima questão, pois, comparando a Atividade Diagnóstica com a Atividade de Verificação, constata-se que 51 alunos (48,6%) assinalaram a alternativa correta na primeira atividade e, na segunda atividade, 61 alunos (58,1%) responderam a questão acertadamente. Por outro lado, observa também que, nas turmas de Controle Desassistido e de Resolução de Problemas, os índices de acertos decaíram da Atividade Diagnóstica para a Atividade de Verificação, respectivamente, no primeiro caso de 52 acertos (46,8%) para 48 acertos (43,2%) e, no segundo caso, de 58 acertos (56,3%) para 40 acertos (38,8%).

Contudo, os índices de respostas errôneas da sétima questão também nos chamaram a atenção, sobretudo, quanto aos dados referentes à "alternativa c" da Atividade de Verificação, por meio dos quais constata-se que a referida alternativa foi assinalada por 41 alunos do grupo de Controle Desassistido (36,9%), 38 alunos do grupo de intervenção de Probabilidade e Risco (36,2%) e 44 alunos do grupo de Resolução de Problemas (42,7%).

Consideramos que estes índices demonstram que estes alunos possuem dificuldade para realizar comparações entre valores fracionários, uma vez que atribuíram a mesma chance de ocorrência para os valores das probabilidades $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

Nossa consideração respalda-se nas ideias de Garfield e Ahlgrem (1988) acerca dos motivos pelos quais os alunos apresentam dificuldades para desenvolver corretamente as ideias fundamentais da probabilidade, incluindo as interpretações e cálculos probabilísticos, sendo que, um destes motivos reside justamente no fato de que os alunos possuem dificuldades subjacentes aos conceitos de números racionais e raciocínio proporcional.

6.1.8. Resultados da 8ª questão (quantificação de probabilidade)

A oitava questão também abordou a demanda cognitiva sobre quantificação de probabilidades. Para tanto, formulamos três perguntas aos alunos, sendo duas sobre combinações e uma sobre probabilidade, mediante as seguintes situações problemas:

Questão 08 (pré-teste): Numa cozinha há duas cestas. Uma cesta com 5 tipos diferentes de frutos (abacaxi, banana, carambola, laranja e morango) e outra com 5 tipos diferentes de hortaliças (beterraba, cenoura, espinafre, hortelã e salsão). Misturando frutos com hortaliças podemos fazer sucos que são ricos em vitaminas e nutrientes. Considerando que se pode misturar apenas um tipo de fruto com um tipo de hortaliça para fazer um suco, responda as perguntas abaixo e demonstre como foram resolvidas:

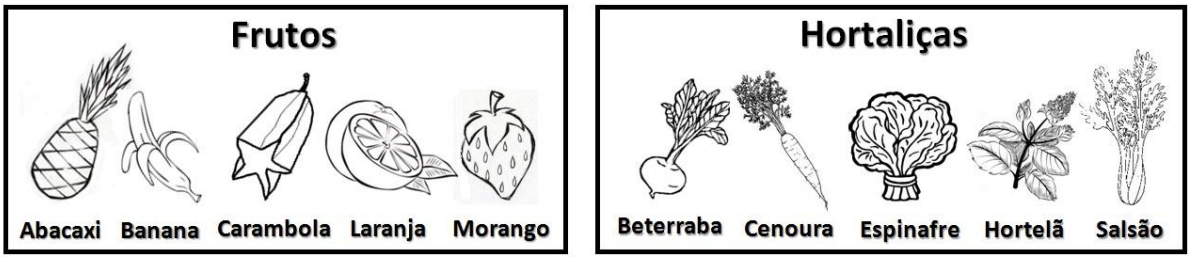


Figura 45: Imagem da questão 8 da Atividade Diagnóstica

a) Qual é o número de sucos diferentes que podem ser feitos?

b) Qual é o número de vezes que cada fruto será usado para se fazer um suco diferente?
c) Qual é a probabilidade de se fazer um suco com um fruto e uma hortaliça cujos nomes começam com a mesma letra?

Questão 08 (pós-teste): Na casa de Artur há 5 tipos diferentes de pães (forma, queijo, croissant, sovado e hambúrguer) e 5 tipos diferentes de recheios (cream cheese, geleia, salame, manteiga e patê). Misturando pães e recheios, ele pode fazer diferentes lanches. Considerando que Artur pode misturar apenas um tipo de pão com um tipo de recheio para fazer um lanche, responda as perguntas abaixo e demonstre como foram resolvidas:

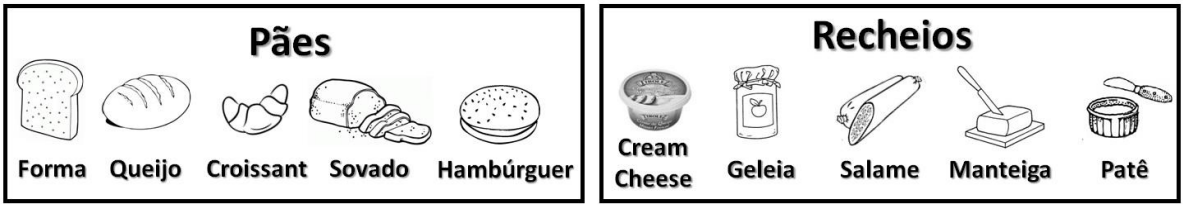


Figura 46: Imagem da questão 8 da Atividade de Verificação

a) Qual é a quantidade de lanches diferentes que Artur consegue fazer?
b) Qual é o número de vezes que cada pão será usado para se fazer um lanche diferente?
c) Qual é a probabilidade de se fazer um lanche com um pão e um recheio cujos nomes começam com a mesma letra?

Como resultados das perguntas propostas na Atividade Diagnóstica e na Atividade de Verificação, esperávamos que os alunos fossem capazes de chegar as seguintes conclusões:

i) Como resultado da primeira pergunta (8a), os personagens conseguem fazer 25 combinações diferentes;
ii) Para a segunda pergunta (8b), espera-se como resposta que os itens elencados na situação-problema são utilizados 5 vezes para se fazer as diferentes combinações;
iii) Na terceira pergunta (8c), a probabilidade de se fazer combinações com os itens cujos nomes começam com a mesma letra é de 2/25.

Ressalvamos que, por conta dos alunos terem apresentado uma grande diversidade de resultados para a primeira pergunta da oitava questão, optamos por simplificar os dados em três categorias: respostas incorretas com valores menores que 25 combinações; respostas corretas (25 combinações); e respostas incorretas com valores maiores que 25 combinações.

Os dados referentes à primeira pergunta (8a) da oitava questão encontram-se descritos na Tabela 14:

Tabela 14: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a primeira pergunta da 8ª questão

Questão 8a			Tipo de intervenção			Total
Resposta		Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
Incorreta < 25		Atividade Diagnóstica	54	63	54	171
		Atividade de Verificação	47	11	37	95
	Total		101	74	91	266
Correta		Atividade Diagnóstica	49	37	41	127
		Atividade de Verificação	64	92	64	220
	Total		113	129	105	347
Incorreta > 25		Atividade Diagnóstica	3	4	6	13
		Atividade de Verificação	5	3	4	12
	Total		8	7	10	25
Total		Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
		Atividade de Verificação	111	105	103	319
	Total		222	210	206	638

Os dados da Tabela 14 demonstram que houve aumento no índice de acertos da pergunta 8a, da Atividade Diagnóstica para a Atividade de Verificação e em relação aos três grupos de alunos. No grupo de Controle Desassistido, 49 alunos (44,1%) responderam corretamente a pergunta no pré-teste e, no pós-teste, a resposta foi assinalada corretamente por 64 alunos (57,6%). Quanto ao grupo de intervenção sobre Probabilidade e Risco, 37 alunos (35,2%) responderam a primeira pergunta acertadamente no pré-teste e, no pós-teste, 92 alunos (87,6%) apresentaram respostas corretas. No tocante ao grupo de Resolução de Problemas,

41 alunos (39,8%) forneceram a resposta correta para a primeira pergunta no pré-teste, já no pós-teste, a pergunta foi respondida corretamente por 64 alunos (62,1%).

Analisando os dados da Tabela 14 quanto ao aumento do índice de acertos da Atividade Diagnóstica para a Atividade de Verificação, evidencia-se que, provavelmente, a intervenção de Probabilidade e Risco ofereceu contribuições para que os alunos determinassem adequadamente a quantidade de combinações propostas na primeira pergunta da 8ª Questão, inclusive, fazendo uso dos conhecimentos adquiridos durante a intervenção, como pode ser observado pelos seguintes exemplos:

As alunas J. V. S. e T. R. F. L. apresentaram as seguintes resoluções para a primeira pergunta da Questão 8 na Atividade de Verificação:

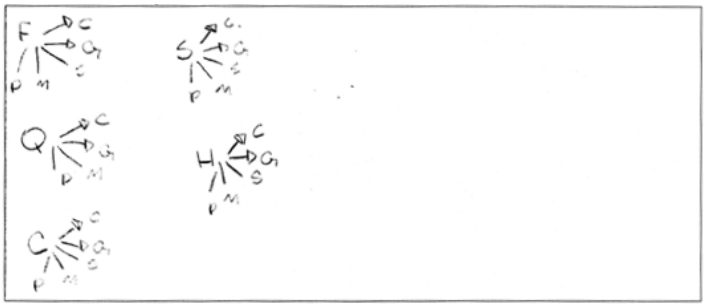


Figura 47: Resolução da aluna J. V. S. na questão 8 da Atividade de Verificação

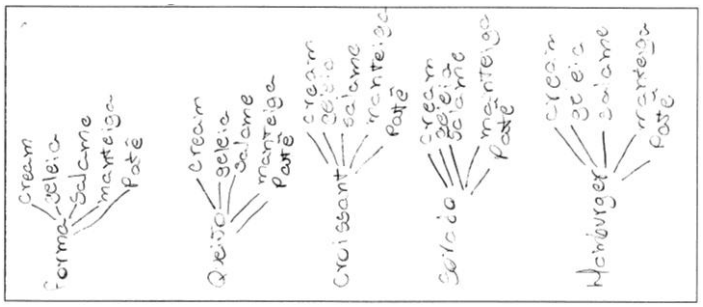


Figura 48: Resolução da aluna T. R. F. L. na questão 8 da Atividade de Verificação

Observando estes exemplos, constata-se que as alunas J. V. S. e T. R. F. L. valeram-se da utilização da árvore de possibilidades, para determinar a quantidade de combinações possíveis entre os tipos de pães e os recheios indicados na situação problema da oitava questão. Assim como elas, outros alunos do grupo de intervenção de Probabilidade e Risco adotaram o mesmo procedimento.

Todavia, constata-se que os índices referentes ao grupo de Controle Desassistido e ao grupo de Resolução de Problemas também apresentaram um aumento significativo. Porém, como os alunos destes dois grupos não participaram da intervenção de Probabilidade e Risco, identificamos que eles utilizaram diferentes recursos resolutivos para determinar corretamente a quantidade de combinações possíveis propostas na oitava questão, tal como demonstram os seguintes exemplos:

Resolução apresentada pela aluna A. C. E. S. na Atividade de Verificação para a primeira pergunta da Questão 8:

Figura 49: Resolução da aluna A. C. E. S. na Questão 8 da Atividade de Verificação

Analisando a estratégia resolutiva adotada pelo aluno A. C. E. S., percebemos indícios de que a aluna pode ter utilizado como base a tabela de dupla entrada da Questão 5 sugerida para a determinação de combinações possíveis. Averiguamos que outros alunos também utilizaram este recurso.

O aluno H. D. P. S. apresentou a seguinte resolução para a primeira pergunta da Questão 8 na Atividade de Verificação:

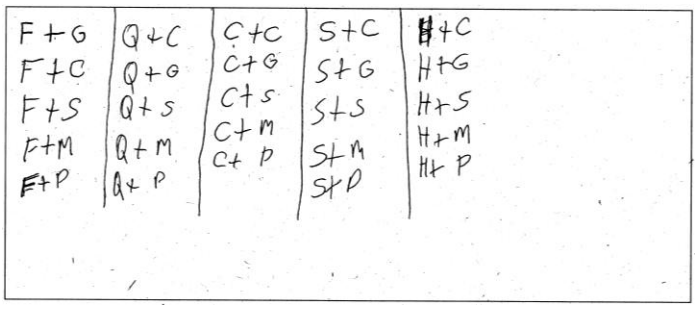


Figura 50: Resolução do aluno H. D. P. S. na Questão 8 da Atividade de Verificação

Nota-se que o aluno H. D. P. S. também conseguiu resolver a primeira pergunta da Questão 8 tabelando os dados com as possíveis combinações entre pães e recheios.

Na Atividade de Verificação, a aluna I. B. apresentou a seguinte resolução para a primeira pergunta da Questão 8:

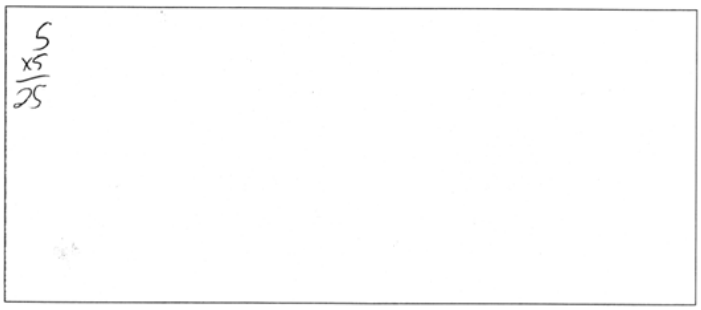


Figura 51: Resolução da aluna I. B. na Questão 8 da Atividade de Verificação

A solução adota pela aluna I. B. consistiu na utilização do princípio multiplicativo da contagem.

Embora este recurso resolutivo seja contemplado como conteúdo para o 6º ano do Ensino Fundamental no Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010), cumpre ressaltar, que as atividades propostas na intervenção de Probabilidade e Risco não contemplam esta abordagem resolutiva.

Dando prosseguimento em nossas análises, ressaltamos que para a segunda pergunta da oitava questão (8b), também optamos por simplificar os dados em três categorias: respostas incorretas com valores menores que 5 vezes; respostas corretas (5 vezes); e respostas incorretas com valores maiores que 5 vezes. Tal procedimento se justifica por conta da grande diversidade de respostas apresentadas pelos alunos para esta pergunta.

Os dados referentes à segunda pergunta (8b) da oitava questão encontram-se descritos na Tabela 15:

Tabela 15: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a segunda pergunta da 8ª questão

Questão 8b			Tipo de intervenção			Total
Resposta		Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
Incorreta < 5		Atividade Diagnóstica	55	52	44	151
		Atividade de Verificação	36	16	31	83
	Total		91	68	75	234
Correta		Atividade Diagnóstica	53	43	51	147
		Atividade de Verificação	67	86	68	221
	Total		120	129	119	368
Incorreta > 5		Atividade Diagnóstica	3	10	8	21
		Atividade de Verificação	8	3	4	15
	Total		11	13	12	36
Total		Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
		Atividade de Verificação	111	105	103	319
	Total		222	210	206	638

Os dados da Tabela 15 demonstram que os alunos pertencentes ao grupo de intervenção de Probabilidade e Risco apresentaram um aumento significativo quanto ao índice de acertos na segunda pergunta da Questão 8. Verifica-se que 43 alunos (40,9%) responderam a segunda pergunta acertadamente na Atividade Diagnóstica, enquanto que, na Atividade de Verificação, 86 alunos (81,9%) apontaram a resposta correta. Portanto, há indícios de que a intervenção de Probabilidade e Risco favoreceu a compreensão dos alunos para que identificassem que cada tipo de pão deve ser utilizado 5 vezes para que se possa fazer as 25 diferentes combinações de lanches.

Observa-se, ainda, que também ocorreu um ligeiro aumento nos índices de acertos referentes ao grupo de Controle Desassistido e ao grupo de Resolução de Problemas. No grupo de Controle Desassistido, 53 alunos (47,7%) responderam a segunda pergunta de forma correta na Atividade Diagnóstica e, na Atividade de Verificação, a resposta correta foi indicada por 67 alunos (60,4%). No grupo de Resolução de Problemas, 51 alunos (49,5%) informaram a resposta correta para a segunda pergunta, enquanto que 68 alunos (66%) acertaram a questão na Atividade de Verificação.

Consideramos que o aumento do índice de acertos relaciona-se com os diferentes recursos resolutivos utilizados pelos alunos na primeira pergunta (8a), favorecendo que pudessem identificar a quantidade de vezes que cada tipo de pão seria utilizado para se fazer as 25 diferentes combinações de lanche.

Finalizando nossas análises referentes aos resultados da oitava questão, apresentamos os dados da terceira pergunta (8c). Estes dados também foram simplificados em três categorias: respostas incorretas com probabilidades menores que 2/25; respostas corretas (probabilidade 2/25); e respostas incorretas com probabilidades maiores que 2/25.

Na Tabela 16 encontram-se os dados oriundos da terceira pergunta (8c) da oitava questão:

Tabela 16: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a terceira pergunta da 8ª questão

Questão 8c			Tipo de intervenção			Total
Resposta		Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
Incorreta < 2/5		Atividade Diagnóstica	62	54	51	167
		Atividade de Verificação	57	18	35	110
	Total		119	72	86	277
Correta		Atividade Diagnóstica	35	32	39	106
		Atividade de Verificação	41	77	55	173
	Total		76	109	94	279
Incorreta > 2/5		Atividade Diagnóstica	12	19	14	45
		Atividade de Verificação	13	10	14	37
	Total		25	29	28	82
Total		Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
		Atividade de Verificação	111	105	103	319
	Total		222	210	206	638

Observa-se por meio dos dados da Tabela 16, um aumento significativo quanto ao índice de acertos na terceira pergunta da Questão 8 proveniente dos alunos do grupo de intervenção de Probabilidade e Risco. Sendo que 32 alunos (30,5%) apontaram a resposta correta da terceira pergunta na Atividade Diagnóstica,

enquanto que, na Atividade de Verificação, a pergunta foi respondida corretamente por 77 alunos (73,3%). Estes índices nos permitem inferir que a intervenção de Probabilidade e Risco favoreceu a compreensão dos alunos no sentido de determinarem corretamente que a probabilidade de se fazer um lanche com um pão e um recheio cujos nomes começam como a mesma letra é de 2/25, ou seja, croissant com *cream cheese* e sovado com salame.

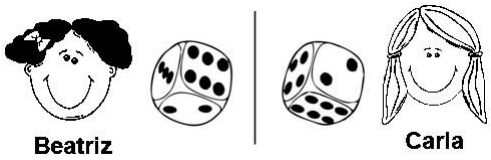
Todavia, observa-se que no grupo de Controle Desassistido e no grupo de Resolução de Problemas também houve um ligeiro aumento nos índices de acertos da terceira pergunta do pré para o pós-teste. Sendo assim, verifica-se que no grupo de Controle Desassistido, 35 alunos (31,5%) responderam a terceira pergunta corretamente na Atividade Diagnóstica e 41 alunos (36,9%) forneceram resposta corretas na Atividade de Verificação. Quanto ao grupo de Resolução de Problemas, 39 alunos (37,9%) responderam a terceira pergunta corretamente na Atividade Diagnóstica e 55 alunos (53,4%) acertaram a terceira pergunta na Atividade de Verificação.

Atribuímos o aumento do índice de acertos na terceira questão aos diferentes recursos resolutivos utilizados pelos alunos na primeira pergunta (8a), dessa forma, conseguiram identificar que o valor correto da probabilidade para fazer lanches com pães e recheios cujos nomes começam com a mesma letra era 2/25 (croissant com *cream cheese* e sovado com salame).

6.1.9. Resultados da 9ª questão (quantificação de probabilidade)

A demanda cognitiva sobre quantificação de probabilidades também foi abordada na nona questão, por meio da qual esperava-se que os alunos fossem capazes de reconhecer um padrão previsível entre as probabilidades conhecidas de dois eventos e identificar, pela frequência, qual deles apresenta resultados viciados. Para tanto, elaboramos as seguintes situações problemas.

Questão 9 (pré-teste): Beatriz e Carla jogaram dados. Qual das duas situações descritas abaixo demonstra, com mais certeza, que uma delas possui um dado que costuma dar o mesmo resultado? Por quê?



a) ☐ Beatriz jogou seu dado 6 vezes e saiu o mesmo número 3 vezes.

b) ☐ Carla jogou seu dado 60 vezes e saiu o mesmo número 30 vezes.

Porque,_____

_____

Questão 9 (pós-teste): Célia e Cristina estão brincando de "cara e coroa", cada uma tem sua própria moeda. Qual das duas situações descritas abaixo demonstra, com mais certeza, que uma delas possui uma moeda que costuma dar o mesmo resultado? Por quê?

a) ☐ Célia jogou sua moeda 12 vezes e saiu "cara" 8 vezes.

b) ☐ Cristina jogou sua moeda 48 vezes e saiu "cara" 32 vezes.

Porque,_____

_____

Nas situações proposta, verifica-se que a alternativa "b" é a resposta correta da nona questão no pré e pós-teste.

Os dados obtidos para Questão 9 encontram-se descritos na Tabela 17:

Tabela 17: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 9ª questão

Questão 9		Tipo de intervenção			Total
Alternativa	Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
“a”	Atividade Diagnóstica	65	57	47	169
	Atividade de Verificação	38	59	56	153
Total		103	116	103	322
“b”	Atividade Diagnóstica	45	32	52	129
	Atividade de Verificação	72	37	45	154
Total		117	69	97	283
“ambas”	Atividade Diagnóstica	1	16	4	21
	Atividade de Verificação	1	9	2	12
Total		2	25	6	33
Total	Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
	Atividade de Verificação	111	105	103	319
Total		222	210	206	638

De acordo com as informações da Tabela 17, observa-se que os alunos do grupo de intervenção de Probabilidade e Risco apresentaram rendimento inferior em comparação com o rendimento apresentado pelos alunos do grupo de Controle Neutro e do grupo de Resolução de Problemas. Por esse motivo, estes indícios demonstram que a intervenção de Probabilidade e Risco não ofereceu subsídios necessários para que os alunos deste grupo reconhecessem que as probabilidades 30/60 (pré-teste) e 32/48 (pós-teste), respectivamente comparadas com as probabilidades 3/6 (pré-teste) e 8/12 (pós-teste), ofereciam um padrão previsível mais evidente para a frequência repetitiva dos resultados apontados nas situações problema.

Ainda, quanto aos alunos do grupo de intervenção de Probabilidade e Risco, também chamou-nos a atenção o fato de 16 alunos (15,2%) na Atividade Diagnóstica e 9 alunos (8,6%) na Atividade de Verificação terem assinalado ambas as alternativas, como pode ser observado nos seguintes exemplos:

Justificativa apresentada pela aluna T. R. F. L. na nona questão da Atividade Diagnóstica:

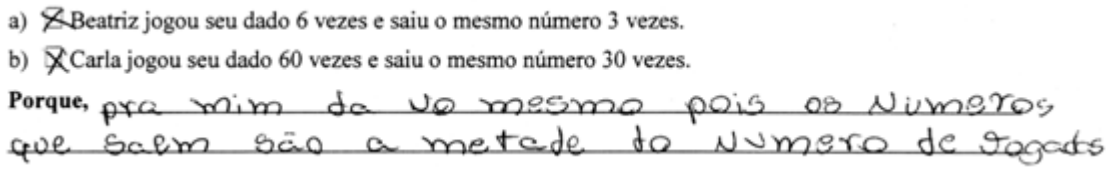

a) X Beatriz jogou seu dado 6 vezes e saiu o mesmo número 3 vezes.
b) X Carla jogou seu dado 60 vezes e saiu o mesmo número 30 vezes.
Porque, pra mim da na mesma pois os Numeros que saem são a metade do Numero de Jogados

Figura 52: Justificativa da aluna T. R. F. L. na questão 9 da Atividade Diagnóstica

A aluna T. S. G. apresentou a seguinte justificativa (Figura 53) na nona questão da Atividade Diagnóstica:

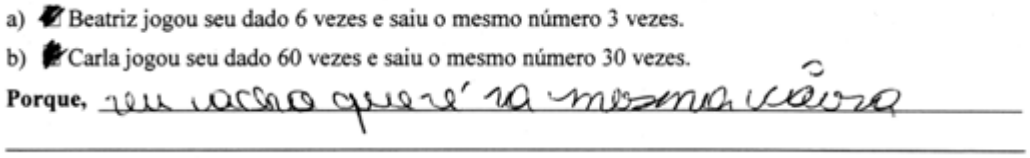

a) X Beatriz jogou seu dado 6 vezes e saiu o mesmo número 3 vezes.
b) X Carla jogou seu dado 60 vezes e saiu o mesmo número 30 vezes.
Porque, eu acho que é na mesma coisa

Figura 53: Justificativa da aluna T. S. G. na questão 9 da Atividade Diagnóstica

Na Figura 54 apresentamos a justificativa fornecida pelo aluno K. C. na nona questão da Atividade de Verificação:

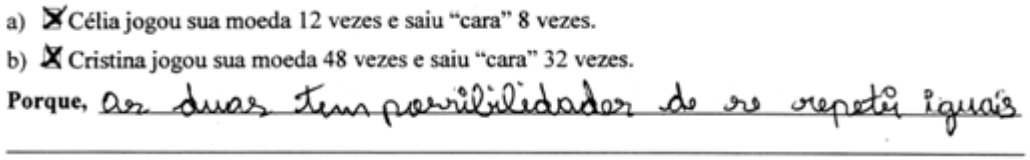

a) X Célia jogou sua moeda 12 vezes e saiu "cara" 8 vezes.
b) X Cristina jogou sua moeda 48 vezes e saiu "cara" 32 vezes.
Porque, as duas tem possibilidades de se repetir iguais

Figura 54: Justificativa do aluno K. C. na questão 9 da Atividade de Verificação

Analisando as justificativas oferecidas por estes alunos, observamos que concluíram que as probabilidades contidas nas situações problema são equivalentes, ou seja, na Atividade Diagnóstica a probabilidade 30/60 = 3/6, assim como, na Atividade de Verificação a probabilidade de 32/48 = 8/12, por esse motivo, não observaram que as probabilidades 30/60 e 32/48 representavam o padrão de previsibilidade para a frequência repetitiva dos resultados.

6.1.10. Resultados da 10ª questão (compreensão do risco)

A décima questão abordou a demanda cognitiva sobre a compreensão do risco, por meio da qual esperava-se que os alunos fossem capazes de utilizar o

raciocínio correlacional para a tomada de decisões envolvendo relações entre probabilidades. Para tanto, foram desenvolvidas as seguintes situações-problema:

Questão 10 (pré-teste): Uma reportagem de televisão mostrou que alguns aparelhos celulares das marcas **"A"** e **"B"** possuem defeitos. Foram testados **100** aparelhos de cada tipo. De acordo com os testes, **13** aparelhos do tipo **"A"** apresentaram defeitos, enquanto **11** aparelhos do tipo **"B"** apresentaram defeitos. Conhecendo essas informações, se seus pais quisessem te dar de presente um desses dois tipos de aparelhos celulares, qual você escolheria? Por quê?

Resposta: Escolheria o aparelho: ☐ da marca "A" ☐ da marca "B"

Porque,_____

_____

Questão 10 (pós-teste): Considere que você vai fazer uma festa e quer enfeitar o salão com balões coloridos. Num determinado mercado há duas diferentes marcas de balões, cujas embalagens de ambas contêm **100 balões**. A marca **"Baloar"** costuma ter **6** balões furados por pacote e a marca **"Bigbalão"** costuma ter **8** balões furados por pacote. Conhecendo essas informações, qual marca você compraria? Por quê?

Resposta: Eu compraria os balões da marca : ☐ Bigbalão ☐ Baloar

Porque,_____

_____

Observa-se, nas situações propostas, que a segunda alternativa configura-se como sendo a resposta correta na Atividade Diagnóstica e na Atividade de Verificação.

Os dados oriundos da décima questão encontram-se descritos na Tabela 18:

Tabela 18: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 10ª questão

Questão 10			Tipo de intervenção			Total
Alternativa		Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
Primeira (a)		Atividade Diagnóstica	24	10	13	47
		Atividade de Verificação	14	24	20	58
	Total		38	34	33	105
Segunda (b)		Atividade Diagnóstica	87	95	90	272
		Atividade de Verificação	97	81	83	261
	Total		184	176	173	533
Total		Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
		Atividade de Verificação	111	105	103	319
	Total		222	210	206	638

Os dados da Tabela 18 indicam que tanto na Atividade Diagnóstica como na Atividade de Verificação, a maioria dos alunos, independente do grupo ao qual pertenciam, não apresentou dificuldades na resolução da situação proposta na Questão 10. Tal situação nos leva intuir que a intervenção de Probabilidade e Risco não causou impacto nos resultados, sobretudo, porque os alunos do grupo de Controle Neutro e do grupo de Resolução de Problemas também apresentaram um bom desempenho na situação-problema da décima questão.

Ainda, quanto ao grupo de intervenção de Probabilidade e Risco, observa-se também que houve uma pequena diminuição nos índices de acertos do pré para o pós-teste, pois, na Atividade Diagnóstica, a questão foi respondida acertadamente por 95 alunos (90,5%) e na Atividade de Verificação, 81 alunos (77,1%) assinalaram a resposta correta para a décima questão. Sendo assim, consideramos que estes índices corroboram com o fato de que a intervenção de Probabilidade e Risco não ofereceu contribuições para os resultados oriundos da décima questão.

6.1.11. Resultados da 11ª questão (compreensão do risco)

A décima primeira questão também abordou a demanda cognitiva sobre a compreensão do risco, por meio da qual, tal como na questão 10, esperava-se que

os alunos fossem capazes de utilizar o raciocínio correlacional para a tomada de decisões envolvendo relações entre probabilidades. Para tanto, foram desenvolvidas as seguintes situações problema:

Questão 11 (pré-teste): Um determinado jogo possui perguntas **fáceis** e perguntas **difíceis** de serem respondidas. Marcos está segurando **2** cartas de perguntas difíceis e **1** carta de pergunta fácil. Ana está segurando **2** cartas de perguntas difíceis e **2** cartas de perguntas fáceis. Você tem que escolher um deles e retirar uma carta para responder a pergunta que está nela. Quem você escolheria para retirar uma carta? Por quê?

Resposta: Retiraria uma carta que está com: ☐ Marcos ☐ Ana

Porque,_____

_____

Questão 11 (pós-teste): O tio de Carlos resolveu fazer uma brincadeira para dar uma moeda de R$ 1,00 para ele comprar balas. Seu tio usou dois saquinhos de pano para colocar moedas. No **primeiro** saquinho ele colocou **2** moedas **falsas** e **1** moeda **verdadeira**. No **segundo** saquinho ele colocou **2** moedas **falsas** e **2** moedas verdadeiras. Carlos tem que escolher um dos saquinhos e retirar uma moeda que será sua. Qual saquinho você indicaria para que Carlos tenha maior chance de tirar uma moeda verdadeira? Por quê?

Resposta: Carlos deve escolher o: ☐ Primeiro saquinho ☐ Segundo saquinho

Porque,_____

_____

Para as situações propostas na décima primeira questão, a segunda alternativa é a resposta correta para a Atividade Diagnóstica e para a Atividade de Verificação.

Os dados provenientes da décima primeira questão encontram-se descritos na Tabela 19:

Tabela 19: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 11ª questão

Questão 11			Tipo de intervenção			Total
Alternativa		Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
Primeira (a)		Atividade Diagnóstica	39	28	21	88
		Atividade de Verificação	23	10	4	37
	Total		62	38	25	125
Segunda (b)		Atividade Diagnóstica	72	77	82	231
		Atividade de Verificação	88	95	99	282
	Total		160	172	181	513
Total		Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
		Atividade de Verificação	111	105	103	319
	Total		222	210	206	638

De acordo com os dados da Tabela 19, observa-se que a maioria dos alunos não apresentou dificuldades para responder acertadamente a décima primeira questão, pois, verifica-se que houve aumento nos índices de acerto da Atividade Diagnóstica para a Atividade de Verificação. Neste sentido, 72 alunos (64,9%) do grupo de Controle Neutro responderam a questão acertadamente na Atividade Diagnóstica e 88 alunos (79,3%) na Atividade de Verificação. No grupo de Probabilidade e Risco, 77 alunos (73,3%) acertaram a questão na Atividade Diagnóstica e 95 alunos (90,5%) acertaram-na na Atividade de Verificação. Quanto ao grupo de Resolução de Problemas, foram 82 alunos (79,6%) que responderam a questão de maneira certa na Atividade Diagnóstica e 99 alunos (96,1%) na Atividade de Verificação.

Mediante os dados explicitados, não encontramos evidências de que a intervenção de Probabilidade e Risco tenha oferecido contribuições para os resultados relacionados aos alunos participantes deste grupo.

6.1.12. Resultados da 12ª questão (compreensão do risco)

A demanda cognitiva sobre a compreensão do risco também foi abordada na décima segunda questão. Portanto, assim como nas duas questões anteriores,

esperava-se que os alunos fossem capazes de utilizar o raciocínio correlacional para a tomada de decisões envolvendo relações entre probabilidades.

Para a décima segunda questão elaboramos as seguintes situações problema:

Questão 12 (pré-teste): Num mercado há dois tipos diferentes de caixas com morangos. A caixa **maior** tem 100 morangos, dos quais, 75 morangos estão bons e 25 morangos estão estragados. A caixa **menor** tem 50 morangos, dos quais, 40 morangos estão bons e 10 morangos estão estragados.
Qual dessas caixas você compraria? Por quê?
Resposta: Compraria a caixa: ☐ Maior ☐ Menor
Porque,_____
_____

Questão 12 (pós-teste): Fátima tem uma lanchonete e usa laranjas para fazer seus sucos. Ela foi ao mercado e encontrou dois tipos de pacotes diferentes com laranjas. O pacote **grande** possui **100 laranjas**, das quais, **15** laranjas costumam estar estragadas. O pacote **pequeno** possui **50 laranjas**, das quais, **10** costumam estar estragadas. Qual pacote é mais vantajoso em termos de aproveitamento de laranjas boas? Por quê?
Resposta: O pacote mais vantajoso é o: ☐ Pequeno ☐ Grande
Porque,_____
_____

A Para as situações propostas na décima segunda questão, a segunda alternativa configura-se como a resposta correta na Atividade Diagnóstica e na Atividade de Verificação.

Na Tabela 20 encontram-se os dados referentes à décima segunda questão:

Tabela 20: Distribuição dos resultados do pré e pós-teste para a 12ª questão

Questão 12			Tipo de intervenção			Total
Alternativa		Tipo de Atividade	Grupo Controle Desassistido	Intervenção Probabilidade e Risco	Intervenção Resolução Problemas	
Primeira (a)		Atividade Diagnóstica	57	45	55	157
		Atividade de Verificação	26	17	19	62
	Total		83	62	74	219
Segunda (b)		Atividade Diagnóstica	54	60	48	162
		Atividade de Verificação	85	88	84	257
	Total		139	148	132	419
Total		Atividade Diagnóstica	111	105	103	319
		Atividade de Verificação	111	105	103	319
	Total		222	210	206	638

Os dados da Tabela 20 apresentam resultados semelhantes aos das duas questões anteriores que também envolviam a demanda sobre compreensão do risco, ou seja, nota-se que a maioria dos alunos apresentou bom desempenho na décima segunda questão, uma vez que se verifica a ocorrência de aumento nos índices de acertos da Atividade Diagnóstica para a Atividade de Verificação em relação aos alunos dos três grupos em estudo.

Portanto, quanto aos alunos do grupo de Probabilidade e Risco, consideramos que a intervenção não ofereceu contribuições significativas para os resultados apresentados na décima segunda questão.

6.1.13. Resultados referentes ao total de acertos no pré-teste e no pós-teste

Neste tópico, apresentamos os dados referentes ao desempenho geral dos alunos mediante a comparação dos resultados dos três grupos em estudo na Atividade Diagnóstica e na Atividade de Verificação.

Na Tabela 21, encontram-se as médias referentes ao desempenho geral dos alunos de acordo com o tipo de intervenção:

Tabela 21: Média dos resultados gerais referente ao tipo de intervenção

Tipo de intervenção	Média	N	Desvio Padrão
Grupo Controle Desassistido	7,59	222	1,761
Intervenção de Probabilidade e Risco	8,20	210	1,820
Intervenção de Resolução de Problemas	8,04	206	1,736
Total	7,94	638	1,789

A Tabela 21 demonstra a média geral dos acertos por grupo de alunos referente às doze questões contidas na Atividade Diagnóstica e na Atividade de Verificação. Sendo assim, observa-se que a média de acertos do grupo de Controle Desassistido foi de 7,59 com desvio padrão de 1,761, a média de acertos dos alunos do Grupo de Probabilidade e Risco foi de 8,2 com desvio padrão de 1,82, por fim, a média de acertos dos alunos do grupo de Resolução de Problemas foi de 8,04 com desvio padrão de 1,736. Sendo assim, comparando a média de acertos dos três grupos em estudo, constata-se que os alunos participantes da intervenção de Probabilidade e Risco apresentaram melhor rendimento quanto ao número de acertos relacionados com as questões propostas no pré e no pós-testes.

A Tabela 22 demonstra as médias referentes ao desempenho geral dos alunos na Atividade Diagnóstica e na Atividade de Verificação:

Tabela 22: Média dos resultados gerais no pré e no pós-testes

Tipo de atividade	Média	N	Desvio Padrão
Atividade Diagnóstica	7,54	319	1,773
Atividade de Verificação	8,33	319	1,720
Total	7,94	638	1,789

Nota-se, mediante os dados da Tabela 22, que a média geral de acertos na Atividade Diagnóstica foi de 7,54 com desvio padrão de 1,773 e, na Atividade de Verificação, a média geral de acertos foi de 8,33 com desvio padrão de 1,72. Estes dados demonstram que, independente do grupo ao qual pertenciam, os alunos participantes da pesquisa apresentaram melhor rendimento na Atividade de

Verificação do que na Atividade Diagnóstica.

Ainda, comparando o rendimento por grupo de alunos no pré e no pós-testes, o Boxplot da Figura 55 apresenta os seguintes resultados quanto ao total de acertos:

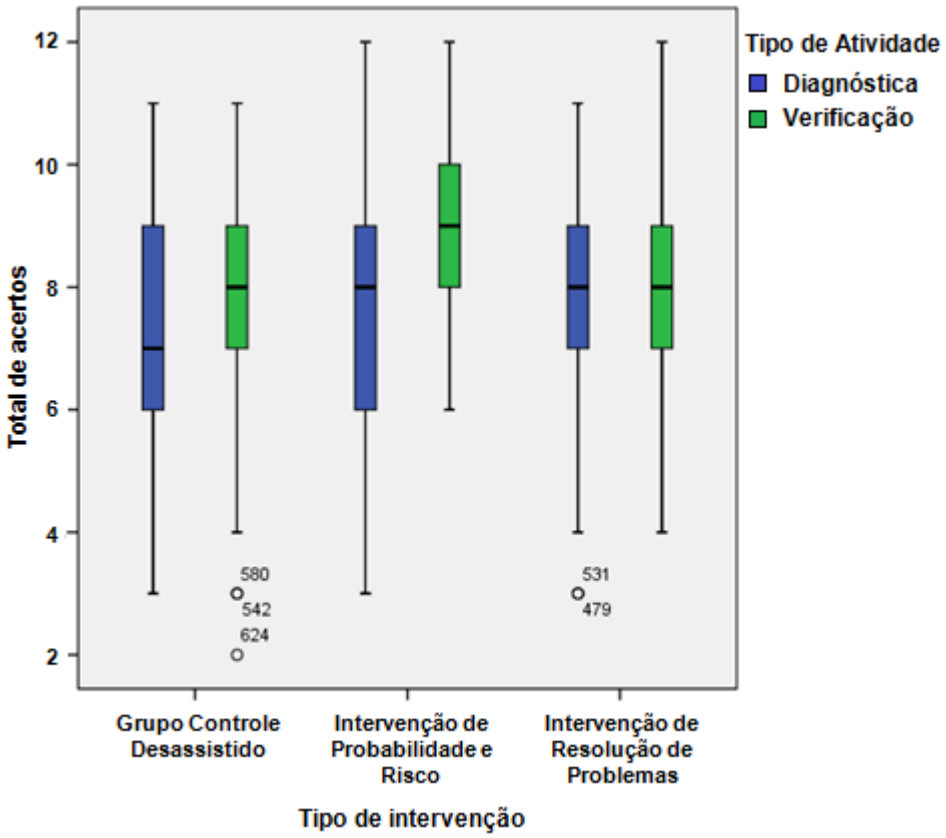


Figura 55: Boxplot dos resultados referentes ao total de acertos no pré e pós-testes

O Boxplot da Figura 55 mostra que 50% dos alunos do grupo de Controle Desassistido acertaram de 6 a 9 questões no pré-teste, cuja amplitude total de acertos foi de 8 questões (mínimo de 3 e máximo de 11 questões certas) e 50% acertaram de 7 a 9 questões no pós-teste, cuja amplitude total de acertos foi de 7 questões (minimo de 4 e máxino de 11 questões certas). No grupo de Probabilidade e Risco, 50% dos alunos responderam acertadamente de 6 a 9 questões no pré-teste, cuja amplitude total de acertos foi de 9 questões (mínimo de 3 e máximo de 12 questões certas) e, no pós-teste, 50% dos alunos responderam acertadamente de 8 a 10 questões, cuja amplitude total foi de 6 questões (mínimo de 6 e máxino de 12 questões certas). Já no grupo de Resolução de Problemas, 50% dos alunos acertaram de 7 a 9 questões no pré-teste, cuja amplitude total de acertos foi de 7

questões (mínimo de 4 máximo de 11 questões certas), enquanto que, no pós-teste, 50% dos alunos também acertaram de 7 a 9 questões, cuja amplitude total de acertos foi de 8 questões (mínimo de 4 e máximo de 12 questões certas).

Estes dados demonstram que os alunos pertencentes ao grupo de Probabilidade e risco, comparados com o grupo de Controle Desassistido e o grupo de Resolução de Problemas, apresentaram rendimento maior quanto ao número de acertos para as questões propostas na Atividade de Verificação.

Outra análise de comparação realizada refere-se ao teste da média de acertos apresentada pelos alunos dos três grupos em estudo na Atividade Diagnóstica e na Atividade de Verificação, cujos dados encontram-se demonstrados no diagrama de caixa da Figura 56:

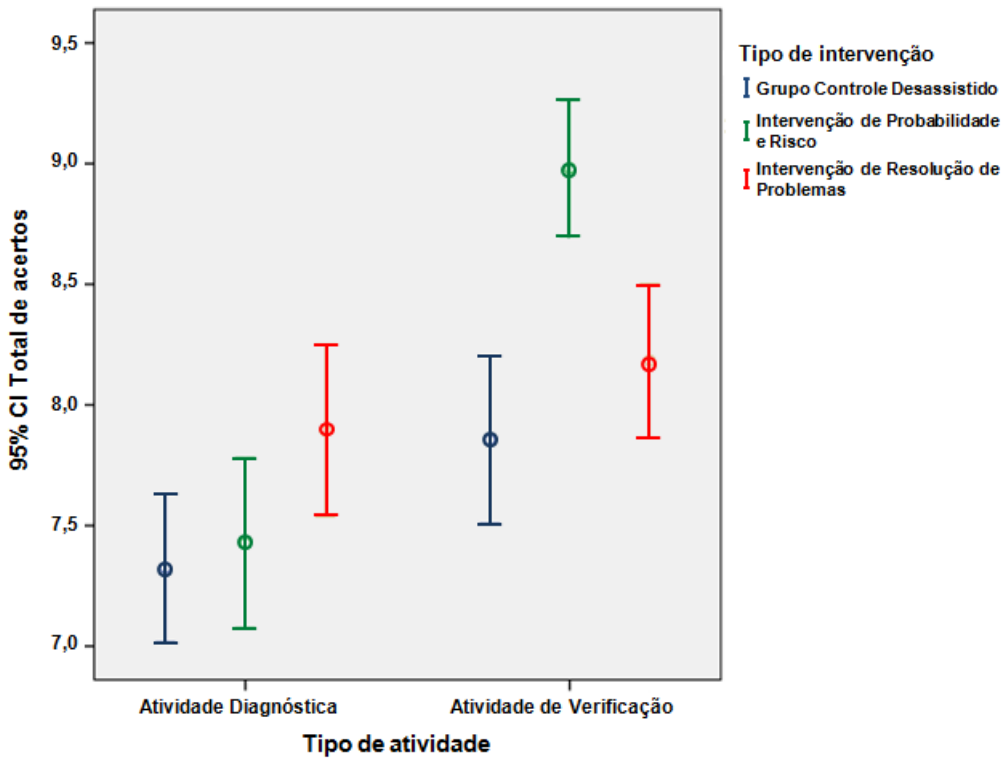


Figura 56: Diagrama de caixa com teste da média no pré e pós-testes

O diagrama demonstra que a média de acertos dos alunos do grupo de Controle Desassistido foi de 7,3 na Atividade Diagnóstica e de 7,85 na Atividade de Verificação, enquanto os alunos do grupo de Probabilidade e Risco apresentaram média de acerto de 7,45 na Atividade Diagnóstica e 9,0 na Atividade de Verificação,

assim como, os alunos do grupo de Resolução de Problemas apresentaram média de acerto de 7,9 na Atividade Diagnóstica e 8,15 na Atividade de Verificação.

Constata-se, de acordo com as informações das Tabelas 21 e 22 e dos gráficos das Figuras 55 e 56, que o desempenho dos alunos pertencentes ao grupo de Probabilidade e Risco foi superior ao desempenho apresentado pelos alunos do grupo de Controle Desassistido e do grupo de Resolução de Problemas na Atividade de Verificação, denotando que a intervenção de Probabilidade e Risco pode ter oferecido contribuições significativas para o desempenho apresentado pelos alunos deste grupo.

6.2. Resultados das entrevistas realizadas com os professores

Neste tópico abordamos os resultados de nossas análises extraídas dos argumentos apresentados pelos professores investigados durante a entrevista semiestruturada. Cumpre lembrar que a entrevista semiestruturada pautou-se em quatro tópicos: i) Questões introdutórias; ii) Contribuições do programa de ensino para a aprendizagem dos alunos; iii) Possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento do programa de ensino; iv) Possíveis contribuições do programa de ensino para a prática letiva dos professores.

6.2.1. Resultados oriundos das questões introdutórias

Quanto à importância do letramento probabilístico para a Matemática escolar, identificamos que os professores consideram-no importante por ser uma das áreas da Matemática que mais se aproxima da realidade e do cotidiano dos alunos, sobretudo, no sentido de fornecer subsídios para a compreensão de dados e posteriores tomadas de decisões com base na probabilidade, evitando-se assim, que estas decisões sejam tomadas de forma subjetiva ou baseadas no determinismo. Desta forma, consideramos que as definições oferecidas pelos professores investigados aproximam-se das ideias defendidas por Batanero (2009),

ou seja, que a alfabetização probabilística requer uma capacidade de analisar criticamente a razão sobre os fenômenos aleatórios do mundo real.

Concernente ao conhecimento dos professores quanto à definição de aleatoriedade, constatamos que a ideia do acaso e da imprevisibilidade para dados com resultados conhecidos mostrou-se arraigada nas falas de todos os professores. Tal fato apresenta concordância com as proposições de Bryant e Nunes (2012), para os quais, o ensino da aleatoriedade deve propiciar aos alunos a compreensão da sua natureza, suas consequências e sua utilização na vida cotidiana, possibilitando assim, a confrontação da ilusão cognitiva de que existe um padrão em tudo quando se compara os eventos aleatórios com os eventos previsíveis.

Com relação à definição de espaço amostral, observamos que as falas dos professores investigados convergiram em considerá-lo como sendo todas as possibilidades de combinações entre os dados de um determinado experimento probabilístico. Desta forma, constata-se que as definições oferecidas pelos professores mostram-se alinhadas com a sugerida por Gondim (2013), ou seja, que o espaço amostral pode ser definido como o conjunto que contém todos os possíveis resultados de um experimento.

No tocante à definição da ideia de comparação de probabilidades, observamos que os professores apresentaram dificuldades para elaborar uma definição aproximada da defendida por Nunes, Bryant, Evans e Barros (2012), ou seja, de que a quantificação de probabilidades possibilita que o raciocínio proporcional seja utilizado quando as frequências simples não podem ser utilizadas para uma determinada comparação. Neste sentido, percebemos que os argumentos apresentados pelos professores mostraram-se distantes da definição desejada para a comparação de probabilidades, como por exemplo, o professor Delta considerou-a como sendo “as situações que não se pode prever, mas que é uma relação que pode vir a acontecer”. O professor Alfa afirmou que realmente não havia se apropriado adequadamente deste conceito, por este motivo absteve-se em propor uma definição. Para o professor Beta, trata-se de “entender como determinado evento acontece dentro de uma população com base numa amostragem e, assim, compreender quais fenômenos acontecem com a população em geral”. A professora

Gama considerou que se trata da “quantificação das possibilidades de alguma coisa acontecer ao acaso”.

A respeito da definição sobre a ideia de compreensão do risco, verificamos que as argumentações dos professores direcionaram-se para a necessidade de se analisar determinadas situações, fazer as melhores escolhas e tomar as decisões adequadas. Neste sentido, as ideias dos professores encontram-se alinhadas com a proposta do programa de ensino sobre probabilidade e risco, ou seja, que os alunos, diante da necessidade de realizar uma escolha entre as probabilidades conhecidas de dois eventos quaisquer, possam fazer as correlações adequadas e optar pelo evento que apresenta menor risco.

De acordo com as análises apresentadas, observa-se haver indícios de que a formação continuada sobre probabilidade e risco oferecida pelo OBEDUC-UNIAN, favoreceu a compreensão dos professores acerca da importância do letramento probabilístico e dos conceitos que envolvem as demandas cognitivas de aleatoriedade, espaço amostral e compreensão do risco, todavia, nota-se também que os professores ainda não se apropriaram adequadamente do conceito sobre a comparação de probabilidades.

6.2.2. Resultados acerca das contribuições do programa de ensino sobre probabilidade e risco para a aprendizagem dos alunos

Ao que se refere às principais contribuições do programa de ensino para que os alunos compreendessem o conceito de aleatoriedade, os professores foram unânimes em considerar que a sequência e a organização das situações de aprendizagem propostas para a intervenção de probabilidade e risco contribuíram para que os alunos compreendessem o conceito de aleatoriedade, principalmente, por conta da utilização de jogos e dos materiais concretos. De acordo com os professores, as aulas tornaram-se interessantes e os alunos mostraram-se receptivos, por esse motivo, passaram a enxergar a Matemática de um modo diferente e até mesmo divertido e prazeroso. Tal fato alinha-se com as perspectivas de Ireland e Watson (2009) sobre algumas conexões existentes entre os aspectos

teóricos e experimentais da probabilidade, especificamente, quanto ao elo existente entre o uso de simuladores e de materiais concretos manipuláveis para o favorecimento da aprendizagem probabilística.

Quanto as principais contribuições do programa de ensino para que os alunos compreendessem o conceito de espaço amostral, os professores também identificaram que a realização de jogos, a utilização de materiais concretos e a construção da árvore de possibilidades constituíram-se num fator chave para a aprendizagem dos alunos.

Ao que tange as principais contribuições do programa de ensino para que os alunos compreendessem o conceito de quantificação de probabilidade, os professores demonstraram opiniões diferenciadas. Para o professor Alfa, inicialmente, os alunos tiveram dificuldade para entender a ideia do que é probabilidade, contudo, a compreensão melhorou com o decorrer das atividades propostas. O professor Beta considerou que as atividades propostas favoreceram a aprendizagem porque não são utilizadas fórmulas prontas, fazendo com que os alunos pensassem diferentemente e utilizassem outros recursos para identificar probabilidades, como por exemplo, mediante a análise dos resultados da árvore de possibilidades, contribuindo para que os alunos enxergassem a Matemática como uma ciência na qual também se usa o raciocínio lógico. Para a professora Gama, a compreensão dos alunos deu-se por meio das aulas práticas proporcionadas pelas atividades de intervenção. O professor Delta considerou que a utilização de razões com valores pequenos facilitou a experimentação e a compreensão dos alunos. De acordo com o professor Épsilon, seus alunos apresentavam dificuldades em compreender valores fracionários, por esse motivo, houve a necessidade de realizar uma revisão sobre frações e sua significação para a probabilidade.

Comparando os conteúdos do programa de ensino com os conteúdos previstos no currículo escolar, os professores entrevistados identificaram os seguintes aspectos positivos do programa de ensino que podem favorecer a aprendizagem dos alunos em probabilidade: i) os conteúdos do programa de ensino não são segmentados como os conteúdos propostos no Currículo de Matemática do Estado de São Paulo. Assim como, as experiências com as atividades fazem com

que os alunos saiam da rotina tradicional, motivando a aprendizagem dos alunos; ii) embora tenhamos trabalhado com o 9º ano do Ensino Fundamental, os conteúdos do programa de ensino podem ser desenvolvidos com alunos de qualquer ano escolar, o que não acontece com o currículo, uma vez que os conteúdos são diferenciados para cada ano escolar; iii) a principal diferença entre o programa de ensino e o currículo caracteriza-se pela maneira como os conteúdos são abordados, pois as atividades do programa de ensino são sequenciais e possibilitam que os alunos tenham autonomia para resolver as situações propostas, enquanto que de acordo com o currículo, as habilidades são desenvolvidas com base nos algoritmos dos cálculos; iv) no currículo, o desenvolvimento dos conceitos relacionados à probabilidade não são tangíveis para os alunos, por outro lado, no programa de ensino, os jogos propostos e o uso de materiais concretos motivam os alunos e tornam a aprendizagem tangível.

No tocante aos pontos fortes do programa de ensino para a aprendizagem dos conceitos relacionados à probabilidade, os professores elencaram os seguintes pontos: i) os conteúdos do programa de ensino seguem uma sequência lógica e possibilitam que os conceitos sejam abordados do início ao fim sem que os alunos tenham que esperar a continuidade do assunto nos anos seguintes, além disso, percebe-se que a elaboração das atividades levou em consideração a maneira de como os alunos pensam, o que facilitou a interatividade deles com as tarefas propostas; ii) a forma oral utilizada para introduzir as situações de aprendizagem fazem com que os alunos sintam-se convidados a participarem das atividades; iii) os materiais concretos e manipuláveis são fundamentais para o ensino da probabilidade, pois incentivam a participação dos alunos nas atividades, inclusive daqueles que são indisciplinados ou possuam dificuldades com a Matemática.

6.2.3. Resultados referentes às possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento do programa de ensino

De acordo com os professores investigados, as principais dificuldades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento do programa de ensino quanto à compreensão dos conteúdos relacionados à demanda cognitiva de

aleatoriedade foram: i) num primeiro momento, alguns poucos alunos mostraram-se desinteressados pelas atividades, por isso, houve a necessidade de enfatizar alguns conceitos e recorrer a outros exemplos, contudo, com o passar do tempo, esses alunos mudaram de atitude e passaram a se interessar pelas atividades; ii) no início da intervenção, alguns alunos apresentaram dificuldades para realizar as primeiras atividades e para assinalar a resposta correta, porém, com o desenvolvimento da intervenção as dificuldades foram sanadas; iii) de maneira geral, os alunos apresentaram dificuldades de leitura, compreensão e interpretação dos enunciados das atividades, bem como, na escrita das justificativas.

Quanto as principais dificuldades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento do programa de ensino na compreensão dos conteúdos reacionados à demanda cognitiva do espaço amostral, os professores investigados levantaram as seguintes observações: i) os alunos apresentaram dificuldade para entender a definição do que é o espaço amostral, por esse motivo, houve a necessidade de oferecer-lhes alguns esclarecimentos que não constavam no programa de ensino; ii) alguns alunos apresentaram dificuldade para organizar as informações quando faziam as ramificações, principalmente, quando tentavam aproveitar as ramificações que já possuíam para fazer as próximas ramificações.

Com relação às principais dificuldades apresentadas pelos alunos durante o desenvolvimento do programa de ensino para a compreensão dos conteúdos envolvendo a demanda cognitiva de quantificação de probabilidade, os professores identificaram que a principal dificuldade apresentada pelos alunos foi em associar a probabilidade a valores na forma de fração. De acordo com as colocações dos professores, observa-se que algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos relacionam-se à falta de conhecimentos prévios oriundos da má formação educacional, como por exemplo, as dificuldades identificadas por Garfield e Ahlgrem (1988) relacionadas aos conceitos de números racionais e raciocínio proporcional que interferem na compreensão dos alunos sobre as ideias fundamentais da probabilidade.

Ao que tange a comparação dos conteúdos do programa de ensino com os conteúdos previstos no currículo escolar, os professores não identificaram aspectos

negativos do programa de ensino que dificultem a aprendizagem dos alunos em probabilidade, sobretudo, porque no currículo os conteúdos são trabalhados de forma espiralada, sendo assim, algumas habilidades perpassam por alguns anos educacionais e são desenvolvidas com mais ou menos aprofundamento e, inclusive, às vezes podem nem ser contemplados em determinado ano, com isso, criam-se lacunas em relação aos conteúdos de probabilidade, como também, faz com que alguns conteúdos tenham que ser retomados para que se possa dar prosseguimento ao aprendizado. Já em relação ao programa de ensino, percebe-se que isso não acontece, pois há o estabelecimento de uma linearidade de trabalho com uma sequência didática, então, ao poucos, vai se desenvolvendo o conhecimento probabilístico.

Também, cabe destacar que os conteúdos previstos no currículo paulista focam apenas as aprendizagens relacionadas com a construção da árvore de possibilidades, problemas de contagem mediante o princípio multiplicativo da contagem, problemas envolvendo probabilidade e suas representações percentuais e fracionais. Ou seja, apesar do currículo paulista ser relativamente recente, as prescrições contidas neste documento não abordam a aprendizagens relacionadas com a aleatoriedade, o espaço amostral e a compreensão do risco.

No tocante aos possíveis pontos fracos do programa de ensino para a aprendizagem dos conceitos de probabilidade, os professores afirmaram de forma unânime que não observaram a existência de pontos fracos no programa de ensino, principalmente, porque indubitavelmente os alunos mostraram interesse em participar e desenvolver as atividades propostas. Apenas o docente Delta salientou que os professores não estão familiarizados com este tipo de trabalho, por esse motivo, sentiu um pouco de insegurança quanto à certeza de estar ou não executando seu trabalho adequadamente.

6.2.4. Resultados relativos às possíveis contribuições do programa de ensino sobre probabilidade e risco para a prática letiva dos professores

Quanto as principais contribuições advindas do programa de ensino para a prática letiva dos professores em relação aos conteúdos de probabilidade, os professores enfatizaram a importância da formação continuada realizada por meio do OBEDUC-UNIAN, pois ela facilitou o desenvolvimento das atividades e a utilização dos materiais concretos propostos durante o processo de intervenção. Os professores Beta e Épsilon consideraram ainda que as situações de aprendizagem propostas no programa de ensino servirão como modelo para o futuro planejamento de suas aulas envolvendo conteúdos probabilísticos, principalmente, a utilização de diagramas de árvore e de tabelas de dupla entrada para construção do espaço amostral e os jogos com bolinhas e dados para abordar a aleatoriedade.

No sentido do programa de ensino em probabilidade ter propiciado mudanças na condução das aulas dos professores investigados, obtivemos as seguintes colocações: O professor Alfa considerou que o programa de ensino auxiliou-o no sentido de melhor organizar e planejar suas aulas. Para o professor Beta, a principal contribuição refere-se ao trabalhar um determinado conteúdo com maior naturalidade sem a necessidade do rigor matemático, contudo, as situações de aprendizagem fazem com que o professor saia da zona de conforto, pois os alunos são levados a refletir e o professor precisa estar preparado para conduzir essas reflexões. De acordo com a professora Gama, o programa de ensino mostrou-lhe a possibilidade de conduzir suas aulas por meio de atividades práticas, por esse motivo, está adaptando a metodologia das intervenções para abordar outros conteúdos matemáticos. Os professores Delta e Épsilon afirmaram que o programa de ensino mudou o foco de suas aulas para uma perspectiva mais abrangente, como por exemplo, valer-se de situações concretas ao invés de apenas pedir para que os alunos resolvam exercícios matemáticos, ou seja, valorizar mais a prática do que o cálculo pelo cálculo.

Acerca do nosso questionamento sobre as principais contribuições da utilização de materiais concretos e jogos para o ensino de probabilidade, os professores apresentaram as seguintes opiniões: i) desperta a motivação dos alunos; ii) oferece aos alunos a possibilidade de uma aula diferente, divertida e interessante; iii) apesar de ser desafiador para o professor, o uso de materiais concretos complementa o objetivo matemático de ensinar; iv) favorecem a

aprendizagem probabilística porque os jogos ficam marcados na memória dos alunos e eles não esquecem o que foi ensinado.

Quanto aos pontos fortes do programa de ensino para possíveis mudanças na sua prática letiva, os professores levantaram as seguintes observações: Para o professor Alfa, o programa de ensino possibilitou que os alunos parassem para pensar e refletir sobre as atividades propostas, por esse motivo, a preparação e organização das aulas foi fundamental para o desenvolvimento da intervenção didática. O professor Beta salientou que o programa de ensino faz com que o professor reflita sobre a própria prática, principalmente, no estabelecimento da relação entre a utilização dos materiais concretos e jogos com os conteúdos e as habilidades que precisam ser desenvolvidas com os alunos, uma vez que esse material pode ajudar o professor a entender melhor a forma como os alunos pensam antes de entrar diretamente em um conteúdo matemático. De acordo com a professora Gama, a prática em sala de aula por meio do programa de ensino leva a refletir sobre quais outros conteúdos matemáticos podem ser abordados da mesma forma. O professor Delta considerou que as atividades do programa de ensino são mais tangíveis e propiciam a participação dos alunos no processo de aprendizagem. Para o professor Épsilon, o principal ponto forte do programa consiste em apresentar uma maneira dinâmica de ensinar e aprender envolvendo o professor e seus alunos.

De acordo com os professores investigados, os pontos que precisam ser melhorados no programa de ensino para favorecer adequadamente sua prática letiva e o ensino de probabilidade são os seguintes: O professor Alfa esclareceu que não identificou pontos que precisam ser melhorados no programa de ensino, uma vez que a maior dificuldade residiu na falta de conhecimentos prévios dos alunos sobre os conteúdos abordados, principalmente, quanto aos conteúdos de espaço amostral e de probabilidade, inclusive, nesse sentido, o programa de ensino propiciou que essa dificuldade fosse sanada. Para o professor Beta, o processo de intervenção do programa de ensino poderia ser mais extenso, dessa forma, sentir-se-ia mais a vontade para desenvolver e vivenciar as atividades. A professora Gama também não identificou pontos que precisem ser melhorados no programa de ensino, inclusive, salientou que foi a melhor maneira de ensinar que já experimentou para ensinar probabilidade. O professor Delta identificou que poderia ser

desenvolvido materiais manipuláveis para a atividade 6 “Fábrica de Bolos”, para que, assim, os alunos pudessem montar as combinações e identificar o espaço amostral. O professor Épsilon sugeriu que o processo de intervenção fosse registrado em vídeo, principalmente, para posterior análise das reações dos alunos durante a realização das atividades.

6.3. Discussões sobre as análises dos resultados da pesquisa

De acordo com as análises realizadas por meio das atividades desenvolvidas com os alunos e mediante as percepções colhidas junto aos professores investigados, identificamos indícios de que o programa de ensino sobre probabilidade e risco cumpre alguns dos seguintes papéis em relação ao letramento estatístico:

- Busca atender aos diferentes níveis cognitivos dos alunos ao abordar os conceitos probabilísticos, assim como defendem Heitele (1975) e Bryant et al. (2013);
- As situações de aprendizagem são baseadas em situações reais do cotidiano do aluno, tal como preconizam Garfield e Ahlgrem (1988), Batanero (2005), Borovcnik (2008) e Gal (2012);
- Utiliza atividades e simulações para tratar os temas probabilísticos, cuja importância é considerada por Garfield e Ahlgrem (1988) e Ireland e Watson (2009);
- Apresenta-se como possível solução para a redução dos equívocos dos alunos em relação ao raciocínio probabilístico, sendo que tal necessidade é considerada essencial por Garfield e Ahlgrem (1988), Batanero (2005), Borovcnik (2008) e Gal (2012);
- Oferece subsídios e apoio didático aos professores, inclusive, servindo como interessante contraponto para as lacunas deixadas pelos livros e documentos curriculares identificadas nas pesquisas de Batanero (2009), Cañizares et al. (2002) e Cardeñoso et al. (2005);
- Possibilita mudanças ao conhecimento profissional dos professores para que o ensino da probabilidade baseie-se em padrões estocásticos, tal como defendido por Batanero (2009), como também, oferece importantes

elementos para a prática docente (preparação de aulas, tarefas e materiais necessários, observância e reflexão sobre o que se ensina), tal como considerado por Ponte (2008).

CONCLUSÕES

Valemo-nos das conclusões para expormos nossos pontos de vista e sintetizar nossas reflexões acerca das respostas que julgamos atenderem nossas questões de pesquisa com base nas análises apresentadas e discutidas no capítulo anterior e, ainda, finalizamos nossas argumentações apontando algumas sugestões para futuras pesquisas cujas proposições também versem sobre o letramento probabilístico na educação básica.

Temos ciência de que nossas considerações finais não podem ser consideradas sentenças definitivas, imutáveis ou impassíveis de contestações, mas, refletem apenas os resultados de nossa pesquisa sob a luz das análises que julgamos adequadas para o contexto estudado. Neste sentido, desenvolvemos nosso trabalho de forma que possa ser replicado e comparado com pesquisas similares.

Ainda, cumpre lembrar que, por meio do presente projeto de pesquisa, objetivamos analisar, identificar e compreender as possíveis contribuições de um programa de ensino sobre probabilidade e risco para a aprendizagem significativa dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, bem como, para a prática letiva dos professores de Matemática, especificamente, quanto às demandas cognitivas relacionadas aos conceitos de aleatoriedade, espaço amostral, quantificação de probabilidades e compreensão do risco. Sendo assim, a partir de nossas observações referentes aos alunos e aos professores investigados neste estudo, apresentamos as seguintes conclusões:

1. As respostas que atendem nossas questões de pesquisa

Quanto à demanda cognitiva envolvendo o conceito de aleatoriedade, identificamos que o programa de ensino sobre probabilidade e risco ofereceu contribuições para que alguns alunos compreendessem a diferença entre eventos impossíveis e improváveis, como também, para que a maioria dos alunos

compreendessem as possibilidades de ocorrência de eventos envolvendo o resultado da soma no lançamento de dados honestos. Além disso, observamos que os alunos possuíam conhecimentos prévios ou boas intuições sobre a aleatoriedade envolvendo eventos simultâneos.

Ao que tange a demanda cognitiva sobre espaço amostral, nossas observações apontaram que, por meio do programa de ensino sobre probabilidade e risco, os alunos investigados foram capazes de identificar o espaço amostral mediante a utilização de tabelas de dupla entrada, como também, o ensino da construção da árvore de possibilidades contribuiu para que os alunos conseguissem identificar o espaço amostral em situações problematizadas envolvendo raciocínio contra intuitivo. Por outro lado, constatamos que alguns alunos (14%) possuem dificuldades ou demonstram falta de atenção aos detalhes na realização de atividades envolvendo padrões de figuras.

A respeito da demanda cognitiva envolvendo a quantificação de probabilidades, evidenciamos que o programa de ensino sobre probabilidade e risco ofereceu contribuições para que os alunos determinassem adequadamente quantidades de combinações e quantificassem probabilidades por meio da observância do espaço amostral. Todavia, nossas análises também apontaram que parte dos alunos investigados (aproximadamente 38%) apresentaram dificuldades para comparar probabilidades expressas em valores fracionários, por esse motivo, observamos que o programa de ensino sobre probabilidade e risco não ofereceu contribuições para que os alunos conseguissem reconhecer um padrão previsível entre as probabilidades conhecidas de dois eventos e identificar a ocorrência de maior frequência.

No tocante à demanda cognitiva envolvendo o conceito de compreensão do risco, nossas análises revelaram não haver evidências de que a intervenção de Probabilidade e Risco tenha oferecido contribuições significativas para a aprendizagem dos alunos, uma vez que, devido ao conhecimento prévio ou por facilidade de dedução, os alunos demonstraram possuir habilidades de valer-se do raciocínio correlacional autonomamente para a tomada de decisões envolvendo relações entre probabilidades.

Nota-se que as reflexões descritas acima oferecem respostas satisfatórias para nossa primeira questão de pesquisa. Sendo assim, consideramos que nosso estudo possibilitou-nos identificar e compreender as principais contribuições do programa de ensino sobre probabilidade e risco para a aprendizagem dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental acerca dos conceitos de aleatoriedade, espaço amostral, quantificação de probabilidades e compreensão do risco.

Referente à nossa segunda questão de pesquisa, ou seja, identificar e compreender as perceptíveis habilidades desenvolvidas pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental após participarem de um programa de ensino sobre letramento probabilístico em comparação aos alunos que não participaram do referido programa, inferimos que nosso trabalho de pesquisa ofereceu subsídios suficientes para responder as proposições de nossas indagações e tecermos as seguintes conclusões:

Identificamos que os alunos participantes do grupo de intervenção sobre Probabilidade e Risco, em comparação com os alunos dos grupos que não participaram desta intervenção (grupo Controle Desassistido e grupo de Resolução de Problemas), apresentaram melhor desempenho quanto ao total de acertos nas questões propostas na Atividade de Verificação (pós-teste). Por este motivo, consideramos que o programa de ensino sobre probabilidade e risco ofereceu contribuições significativas para o letramento probabilístico dos alunos deste grupo.

Nossas análises permitem-nos salientar também que as principais habilidades desenvolvidas pelos alunos participantes da intervenção de Probabilidade e Risco consistiram em: compreender a diferença entre eventos impossíveis e improváveis; compreender as possibilidades de ocorrência de eventos envolvendo o resultado da soma no lançamento de dados honestos; identificar o espaço amostral mediante a utilização de tabelas de dupla entrada; construir árvore de possibilidades para identificação do espaço amostral; determinar adequadamente a quantidade de combinações possíveis de um determinado evento probabilístico; e quantificar probabilidades por meio da observância do espaço amostral.

Acerca da nossa terceira questão de pesquisa, que consistiu em identificar e

compreender as possíveis contribuições proporcionadas pelo programa de ensino sobre probabilidade e risco para a prática letiva dos professores de Matemática, as análises de nossos estudos possibilita-nos conceber de maneira plausível os seguintes argumentos:

O programa de ensino sobre probabilidade e risco auxiliou os professores investigados no planejamento de suas aulas ao abordarem conteúdos probabilísticos, sobretudo, quanto à construção de diagramas de árvore e de tabelas de dupla entrada para identificação do espaço amostral e utilização de jogos para abordar conteúdos de aleatoriedade.

Observamos também que o programa de ensino sobre probabilidade e risco propiciou mudanças na condução das aulas de alguns professores investigados, principalmente, porque as situações de aprendizagem propostas para a intervenção com os alunos do grupo de Probabilidade e Risco fizeram com que saíssem de sua zona de conforto, uma vez que estas atividades acabaram fazendo com que os alunos refletissem sobre as possíveis soluções e, por esse motivo, o professor precisa estar preparado para mediar adequadamente tais reflexões. Além disso, o programa de ensino também incentivou e mostrou a importância das atividades práticas para o ensino probabilístico, sobretudo, quanto à utilização de jogos e materiais concretos.

Diante das argumentações expostas, consideramos que os objetivos aos quais nos propomos foram completamente atingidos, ou seja, conseguimos analisar, identificar e compreender as possíveis contribuições do programa de ensino sobre probabilidade e risco para a aprendizagem significativa dos alunos da educação básica e para a prática letiva dos professores de Matemática que participaram do presente estudo.

2. Perspectivas futuras

Concernente a possíveis sugestões para futuras pesquisas acerca do letramento probabilístico na educação básica, acreditamos que, a partir dos

resultados advindos do nosso estudo, futuros trabalhos poderiam buscar maiores aprofundamentos para algumas questões que emergiram de nossas análises, porém, para as quais, por conta do foco ou limitação de tempo, a presente tese não deu conta de encontrar as devidas respostas, especificamente, sobre dois temas:

i. Compreender os equívocos cognitivos relacionados à probabilidade apresentados pelos alunos, tal como defendido por Heitele (1975) e Garfield e Ahlgrem (1988). Nesse sentido, reportamo-nos aos casos nos quais identificamos que os alunos direcionaram suas reflexões para contextos ou ideias que extrapolam as proposições das situações de aprendizagem, como, por exemplo, ao considerarem que seja possível retirar repetidas vezes uma bolinha da mesma cor em um sorteio aleatório com reposição, por conta de esta bolinha voltar para a posição em que estava inicialmente e, por esse motivo, o sorteador retira-a novamente no próximo sorteio;

ii. Identificar os motivos pelos quais os alunos apresentam dificuldades subjacentes aos conceitos de números racionais e raciocínio proporcional, uma vez que, segundo Garfield e Ahlgrem (1988), ambos são necessários para as interpretações e cálculos probabilísticos.

Outra sugestão que consideramos importante refere-se ao curso de formação continuada desenvolvido no âmbito do projeto de pesquisa “Investigações sobre o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos concernentes à probabilidade e estatística” pelo OBEDUC – UNIAN, pois, identificamos que os professores investigados apresentaram dificuldades para definir adequadamente o conceito de quantificação de probabilidade, denotando a necessidade de alterações ou um aprofundamento enfatizando este conceito nos futuros cursos de formação.

Acreditamos que, por meio das informações contidas no bojo da presente tese, bem como, mediante nossas exposições nestas considerações finais, conseguimos expor e justificar a relevância do nosso trabalho de pesquisa para a comunidade científica em Educação Matemática, principalmente, quanto às principais contribuições de um programa de ensino desenvolvido especificamente para o letramento probabilístico.

REFERÊNCIAS

ABE, T. S. **O ensino de probabilidades por meio das visões Clássica e Frequentista.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Orientadora: Prof.ª Dr.ª Marilena Bittar. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2011.

ACARA. **Currículo Australiano de Matemática**, 2013. Disponível em <http://porvir.org/wpcontent/uploads/2014/09/CurriculoAustraliano_Matematica.pdf.> Acesso em 18 de jul. 2016.

ADI, H.; KARPLUS, R.; LAWSON, A.; PULOS, S. Intellectual development beyond elementary school UI: Correlational reasoning. **School Science and Mathematics**, 675–683, 1978.

AICHELE, D. B.; COXFORD, A. F. **Professional development for teachers of mathematics**, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1994.

ALVES, A. C. **Uma introdução ao pensamento combinatório no 9º ano do Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Clara Rezende Frota. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2010.

AMÂNCIO, J. R. **Planejamento e aplicação de uma sequência didática para o ensino de probabilidade no âmbito do PIBID.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Orientadora: Prof.ª Claudia Coelho de Segadas Vianna, coorientador: Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.

ARA, A. B. **O ensino de estatística e a busca do equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade.** Tese de doutorado em Educação. Orientador: Prof. Dr. Nilson José Machado. Universidade de São Paulo, 2006.

AICHELE, D. B.; COXFORD, A. F. **Professional development for teachers of mathematics**, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1994.

BATANERO, C. Training school teachers to teach probability: Reflections and challenges. Trabalho apresentado no XIX SIEM. In **Actas do XIX EIEM.** Vila Real, 2009.

_____. Significados de la probabilidad en La educación secundarial. Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: um reporte iberoamercano. **RELINE**, v. 8, n. 3, p. 247-263, 2005.

BATANERO, C.; GODINO, J. D. **Estocástica y su didáctica para maestros.** Granada (Espanha): Universidad de Granada (Proyecto Edumat-Maestros), 2002.

BELLHOUSE, D. R. De Vetula: a medieval manuscript containing probability calculations. **International Statistical Review 68** (2), 123-136, 2000.

BIAJOTI, E. D. **Experimentos Probabilísticos: Noções de Probabilidade no Ensino Fundamental II.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências Exatas. Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini. Universidade Federal de São Carlos, 2013.

BIGGS, J. B.; COLLIS, K. F. **Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy** *(structure of the observed learning outcome).* New York: Academic Press, 1982

_____. Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour. In H. A. H. Rowe (Ed.), **Intelligence: Reconceptualisation and measurement** (pp. 57–76). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1991.

BORBA, R. E. S. R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática** (X ENEM). Salvador, BA, 2010.

BOROVCNIK, M. Some fundamental ideas in probability. In: Atas do **ICME 11**. Topic Study Group 13: Research and development in the teaching and learning of probability – Panel discussion "Fundamental Ideas in Probability Teaching at School Level", Monterrey, 2008.

_____. Probabilistic and statistical thinking. In Atas do **CERNE 4**. M. Bosch (Ed.), Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 484–506). Barcelona, 2006.

BRANT, R. Professor do Department of Statistics & Child and Family Research Institute. University of British Columbia. **Homepage do autor**, 2004. Disponível em <http://www.stat.ubc.ca/~rollin/teach/643w04/lec/node50.html>. Acesso em 16 out. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar, segunda versão revista. Brasília, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf>. Acesso em 15 de jul. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 1998.

BRUNER, J. **The Process of Education**. Cambridge. Harvard University Press, 1960.

BRYANT, P.; NUNES, T.; EVANS, D.; GOTTARDIS, L.; TERLEKTSI, M. **Teaching primary school children about probability.** Teacher Handbook. A project supported by the Nuffield Foundation, 2013.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's understanding of probability:** A literature review (full report). Nuffield Foundation. Londres, 2012.

BRYANT, P; NUNES, T. **Children's understanding of probability and certainty: an intervention study.** A project supported by the Nuffield Foundation, 2012.

BYRNE, R. M. J.; QUELHAS, A. C. Raciocínio contrafactual e modelos mentais. **Análise Psicológica**, 4 (XVII), 713-721, 1999.

CAÑIZARES, M. J., BATANERO, C. Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparacion de probabilidades. **Uno: Revista de didáctica de las matematicas**, 14, 99-114, 1997.

CAÑIZARES, M. J.; ORTIZ, J. J.; BATANERO, C.; SERRANO, L. Probabilistic language in Spanish textbooks. In B. Phillips (Ed.), **ICOTS-6 papers for school teachers** (pp. 207-211). Cape Town: International Association for Statistical Education, 2002.

CARDEÑOSO, J. M.; AZCÁRATE, P.; SERRADÓ, A. Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto (Obstacles in the learning of probabilistic knowledge: Influence from the textbooks). **Statistics Education Research Journal** 4(2), 59-81, 2005.

CHIESI, F; PRIMI, C. Recency effects in primary-age children and college students. **International Electronic Journal of Mathematics Education,** V.4, n.3, p. 259-274, 2009.

CHIESI, F.; PRIMI, C; GRONCHI, G. Age trends in misconceptions related to representativeness heuristic. Presented at the **Society for Research in Child Development**, Biennial Meeting, Boston, 2007.

COUTINHO, C. Q. S.; NOVAES, D. V. **Estatística para Educação Profissional**. São Paulo:Editora Atlas S. A., 2009.

ESPANHA. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD). **Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria**. BOE, 52, 01 de marzo de 2014. Madri, 2014.

FINETTI, B. La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives. **Annales de l'Institute Henri Poincaré 7**, 1-68, 1937.

FISCHBEIN, E.; SCHNARCH, D. The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. **Journal for Research in Mathematics Education**, 28, 96–105, 1997.

FREUDENTHAL, H. The empirical law of large numbers or The stability of frequencies. **Educational Studies in Mathematics**, 1972.

GAL, I. Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. In: Atas do **12th International Congress on Mathematical Education**, COEX, Seoul, Korea, 2012.

_____. South Africa's Mathematical Literacy and Mathematics curricula: Is probability literacy given a fair chance? **African Journal of Research in Mathematics,Science, and Technology Education, 13**(1), 50–61, 2009.

_____. Towards “probability literacy” for all citizens: Building Blocks and Instructional Dilemmas. In Jones, G. A. (Ed), **Exploring probability in school:** Challenges for teaching and learning, 2004.

GARFIELD, J.; AHLGREN, A. Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implication for research. **Journal for Research in Mathematics Education, 19**(1), 44-63, 1988.

GIGERENZER, G. What are natural frequencies? Doctors need to find better ways to communicate risk to patients. **BMJ Publishing Group** Ltd, 2011.

_____. **Calculated Risks:** How to Know When Numbers Deceive You. New York: Simon & Schuster, 2002.

GIGERENZER, G.; HOFFRAGE, U. How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. **Psychological Review**, 102, 684-704, 1995.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; ROA, R.; WILHELMI, M. R. Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), **Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference***.* Monterrey: ICMI and IASE, 2008.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 14 (3), 325-355, 1994.

GONDIM, H. F. **Probabilidade e probabilidade geométrica:** conceitos e exemplos aplicáveis no ensino básico. Dissertação de Mestrado em Matemática. Orientador: Prof. Dr. Jair da Silva. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2013.

HEITELE, D. An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. **Educational Studies in Mathematics***,* Vol. 6, No. 2, pp. 187-205, 1975

IRELAND, S.; WATSON, J. Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, 4(3), 339– 370, 2009.

LAMIZET, B. Sémiotique de la Lecture. Tradução de Susana Arroyo-Furphy. **Razón y Palabra**, n. 38, 2004.

LAPLACE, P. S. **Ensayo filosófico sobre las probabilidades**. Madrid, España: Alianza Editorial, 1985. (Trabalho originalmente publicado em 1814).

MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. São Paulo, Papirus, 2008.

MAKAR, K. A model of learning to teach statistical inquiry. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), **Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in**

School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey: ICMI and IASE, 2008.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2002. Disponível em: <http://www.nctm.org/ Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Data-Analysis-and-Probability/>. Acesso em 18 ago. 2015.

NUNES, T.; BRYANT, P.; EVANS, D.; BARROS, R. **Children's understanding of probability and risk**. Department of Education, University of Oxford, 2012.

NUNES, T.; BRYANT, P. Understanding risk and uncertainty: the importance of correlations. **Em Teia** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – vol. 2 - número 2, 2011.

_____. **Children's Reading and Spelling:** Beyond the First Steps. Chichester, UK: Wiley-Blackwell, 2009.

OECD. **PISA 2009 Assessment Framework:** Key competencies in reading, mathematics and science. Paris: OECD, 2009.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A origem do acaso na criança.** Tradução de Ana Maria Coelho. Rio de Janeiro: Record Cultural, 1951.

PONTE, J. P. Preparing teachers to meet the challenges of statistics education. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), **Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.** Monterrey: ICMI and IASE, 2008.

RAMSEY, F. P. Truth and probability. In: Ramsey, **The foundations of mathematics and other logical essays,** Cap. VII, pp.156-198. New York, USA: Harcourt, Brace and Company, 1926.

RASCH, G. **Probablistic Models for Some Intelligence and Attainment Test.** Copenhague, Dinamarca: Denmark's Paedagogiske Institut, 1960.

RODRIGUES, J. M. S. **A probabilidade como componente curricular na formação matemática inicial de professores polivalentes.** Tese de Doutorado em Educação. Orientadora: Prof.ª Dra. Maria Tereza C. Soares. Universidade Federal do Paraná, 2011.

RYCHEN, D. S.; SALGANIC, L. H. **Key competencies for a successful life and a well-functioning society**. Gottingen, Germany: Hogrefe & Huber, 2003.

SANTANA, M. R. M. **O acaso, o provável, o determinístico:** concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. Orientadora: Prof.ª Dr.ª Rute Elizabete de Souza Rosa Borba. Universidade Federal de Pernambuco, 2011.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias. Coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. São Paulo: SEE, 2010.

TONOUTI, R. R. **Avaliação de um programa de ensino para a aprendizagem de probabilidade nos anos iniciais do Ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Orientação: Prof.ª Dr.ª Verônica Yumi Kataoka. Coorientação: Prof.ª Dr.ª Tânia Maria Mendonça Campo. Universidade Bandeirante de São Paulo, 2013.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1995.

WATSON, J. Statistical literacy at the school level: What should students know and do? **Bulletin of the International Statistical Institute Proceedings of the 54th Session** (V. 2(49), pp. 68-79) Berlin: International Statistical Institute, 2003.

YAĞCI, F. **The effect of instruction with concrete models on eighth grade students' probability achievement and attitudes toward probability.** A thesis submitted to Graduate School of Social Sciences. Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Safure Bulut. Middle East Technical University, Ankara - Turkey, 2010.

ANEXO A - Parecer consubstanciado do CEP

UNIVERSIDADE
BANDEIRANTE ANHANGUERA-

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Contribuições de um Programa de Ensino para o Letramento Probabilístico na Educação Básica
Pesquisador: Wanderlei Aparecida Grenchi
Área Temática:
Versão: 1
CAAE: 38415314.1.0000.5493
Instituição Proponente: UNIBAN - UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SAO PAULO
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 893.661
Data da Relatoria: 16/11/2014

Apresentação do Projeto:
O projeto pretende entrevistar 6 professores da rede estadual de São Paulo a fim de compreender quais são as contribuições oferecidas pelo desenvolvimento de um programa de ensino baseado em conteúdos de probabilidade para a prática letiva dos professores de matemática. Serão realizadas entrevistas com recursos de áudio e vídoe gravações. Os dados serão analisados com metodologia qualitativa.

Objetivo da Pesquisa:
O projeto tem como objetivo principal compreender quais são as contribuições oferecidas pelo desenvolvimento de um programa de ensino baseado em conteúdos de probabilidade para a prática letiva dos professores de matemática.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:
O projeto e o TCLE apresentam os riscos e benefícios da pesquisa, de acordo com os Critérios da Ética em Pesquisa com Seres Humanos conforme Resolução nº. 466/2012 do Conselho Nacional de Saúde. Os riscos são mínimos e se referem ao possível constrangimento ao responder às entrevistas.

Endereço: Rua Maria Cândida, 1813, 6o andar.
Bairro: Vila Guilherme **CEP:** 02.071-013
UF: SP **Município:** SAO PAULO
Telefone: (11)2967-9015 **Fax:** (11)2967-9083 **E-mail:** comissao.cep@ig.com.br

UNIVERSIDADE
BANDEIRANTE ANHANGUERA-

Continuação do Parecer: 893.661

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

O projeto é de interesse da comunidade científica. Os objetivos e justificativas são pertinentes, apresentados com linguagem clara e objetiva. A metodologia e a forma de análise dos dados estão adequadamente apresentados.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Os termos de apresentação obrigatória estão adequadamente apresentados. A folha de rosto foi adequadamente preenchida e devidamente assinada. O TCLE foi bem redigido, contendo as informações necessárias aos sujeitos da pesquisa.

Recomendações:

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

O projeto de pesquisa encontra-se de acordo com a Resolução 466/12, não havendo impedimentos éticos para sua aprovação.

Assim, de acordo com o compromisso assumido pelo pesquisador no ato de submissão do projeto, fica estabelecido que o relatório final deverá ser entregue, via Plataforma Brasil, em 06/12/2015.

Lembrando que é responsabilidade do pesquisador acompanhar todos os trâmites de seu projeto na Plataforma Brasil, independente de qualquer mensagem enviada pelo sistema.

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

Considerações Finais a critério do CEP:

SAO PAULO, 01 de Dezembro de 2014

Assinado por:
Roberta Caroline Bruschi Alonso
(Coordenador)

Endereço: Rua Maria Cândida, 1813, 6o andar.
Bairro: Vila Guilherme **CEP:** 02.071-013
UF: SP **Município:** SAO PAULO
Telefone: (11)2967-9015 **Fax:** (11)2967-9083 **E-mail:** comissao.cep@ig.com.br

APÊNDICE A – Folha de resposta para o Computer Game

Atividade 1: Computer Game

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Anote nas tabelas abaixo suas previsões para cada jogo:

Jogo 1	Jogo 2
01. _____	01. _____
02. _____	02. _____
03. _____	03. _____
04. _____	04. _____
05. _____	05. _____
06. _____	06. _____
07. _____	07. _____
08. _____	08. _____
09. _____	09. _____
10. _____	10. _____
11. _____	11. _____
12. _____	12. _____
13. _____	13. _____
14. _____	14. _____
15. _____	15. _____
16. _____	16. _____
17. _____	17. _____
18. _____	18. _____
19. _____	19. _____
20. _____	20. _____

APÊNDICE B – Folha de resposta para o jogo: Impossíveis contra Improváveis

Atividade 2: Impossíveis contra Improváveis

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Ler as frases abaixo, indicar se são impossíveis ou improváveis e justificar suas escolhas:

Folha 1

1. Fazer um guarda-chuva de vidro. ☐ Impossível ☐ Improvável
2. Fazer um guarda-chuva de ar. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

3. Um adulto crescer e voltar a ser criança. ☐ Impossível ☐ Improvável
4. O cabelo crescer até chegar aos pés. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

5. Contar os pelos do rabo do cachorro. ☐ Impossível ☐ Improvável
6. Contar estrelas numa noite nublada. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

7. Capturar uma sombra. ☐ Impossível ☐ Improvável
8. Capturar uma mosca com palitinhos. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

9. Não comer por 10 dias. ☐ Impossível ☐ Improvável
10. Não comer por 10 meses. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

11. Ler os pensamentos de alguém. ☐ Impossível ☐ Improvável
12. Ler os lábios de alguém. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

Atividade 2: Impossíveis contra Improváveis

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Ler as frases abaixo, indicar se são impossíveis ou improváveis e justificar suas escolhas:

Folha 2

13. Andar em um fio de telefone. ☐ Impossível ☐ Improvável
14. Andar sobre a água. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

15. Viver sem coração. ☐ Impossível ☐ Improvável
16. Viver sem nariz. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

17. Nunca esquecer o nome de ninguém. ☐ Impossível ☐ Improvável
18. Saber o nome de todos os brasileiros. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

19. Abrir uma porta com o pensamento. ☐ Impossível ☐ Improvável
20. Abrir uma porta com um clipe de papel. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

21. Viver por 120 anos. ☐ Impossível ☐ Improvável
22. Viver por mil anos. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

23. Ouvir um som antes de ser produzido. ☐ Impossível ☐ Improvável
24. Identificar a raça de um cão pelo latido. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

Atividade 2: Impossíveis contra Improváveis

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Ler as frases abaixo, indicar se são impossíveis ou improváveis e justificar suas escolhas:

Folha 3

25.Colar a casca quebrada de volta no ovo. ☐ Impossível ☐ Improvável
26."Desembaralhar" um ovo mexido. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

27.Uma mulher dar a luz a um canguru. ☐ Impossível ☐ Improvável
28.Uma mulher dar a luz a 20 crianças. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

29.Falar sem mover os lábios. ☐ Impossível ☐ Improvável
30.Falar duas línguas ao mesmo tempo. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

31. Atravessar uma parede. ☐ Impossível ☐ Improvável
32.Atravessar o fogo. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

33.Permanecer acordado durante 5 dias. ☐ Impossível ☐ Improvável
34.Permanecer acordado por 5 meses. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

35.Ler um livro sem abrir a capa. ☐ Impossível ☐ Improvável
36.Ler um livro de cabeça para baixo. ☐ Impossível ☐ Improvável

Por quê? Resposta: _____

APÊNDICE C – Folha de resposta para o Jogo das Bolinhas

Atividade 3: Jogo das Bolinhas

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Anote nas tabelas abaixo suas previsões e, depois, o sorteio real de cada jogo:

Jogo 1

Previsões: _____, _____, _____, _____, _____

Sorteios: _____, _____, _____, _____, _____

Jogo 2

Previsões: _____, _____, _____, _____, _____

Sorteios: _____, _____, _____, _____, _____

Jogo 3

Previsões: _____, _____, _____, _____, _____

Sorteios: _____, _____, _____, _____, _____

O que fez você manter suas previsões?

Resposta: _____

_____

_____

_____.

O que fez você mudar suas previsões?

Resposta: _____

_____

_____

_____ .

APÊNDICE D – Folha de resposta para o Jogo com Dados

Atividade 4: Jogo com dados (soma de 2 dados)

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Nas tabelas do lado esquerdo: **Anotem suas previsões e, depois, os resultados de cada jogada:**
Na tabela do lado direito: **Anotem a quantidade de vezes que cada número saiu (frequência):**

Somas	Previsões	Resultados
1ª Soma		
2ª Soma		
3ª Soma		
4ª Soma		
5ª Soma		
6ª Soma		
7ª Soma		
8ª Soma		
9ª Soma		
10ª Soma		
10ª Soma		
12ª Soma		
13ª Soma		
14ª Soma		
15ª Soma		
16ª Soma		
17ª Soma		
18ª Soma		
19ª Soma		
20ª Soma		
21ª Soma		
22ª Soma		
23ª Soma		
24ª Soma		
25ª Soma		
26ª Soma		
27ª Soma		
28ª Soma		
29ª Soma		
30ª Soma		

Soma	Frequência
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Agora, respondam as questões:

1) Todos os números aparecem na mesma quantidade de vezes (frequência)?

Resposta:

_____

_____

_____

_____

2) Vocês fizeram boas previsões? Por quê?

Resposta:

_____

_____

_____

_____

APÊNDICE E – Folha de resposta para o jogo Saco de Doces

Atividade 5: Saco de doces

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Responda as questões solicitadas e desenhe seu diagrama de árvore no quadro abaixo:

1) **Dê seu palpite: Samanta possui maior chance de conseguir dois doces de morango ou de conseguir sabores misturados? Ou você acha que a chance de conseguir dois doces de morango ou sabores misturados é a mesma?**

Resposta : _____

_____.

2) **Com base em suas respostas anteriores, escreva suas suposições: O que te leva a pensar que Samanta tem uma maior chance de escolher dois doces de morango? O que te leva a pensar que ela tem uma maior chance de escolher sabores misturados? O que te leva a pensar que a possibilidade de escolher dois de morango ou sabores misturados é a mesma?**

Resposta : _____

_____

_____.

3) **Desenhe no quadro abaixo o seu diagrama de árvore :**

Observe seu diagrama e responda:

4) **Há quantos casos morango/morango? Resposta: _____.**

5) **Há quantos casos de sabores misturados (morango e baunilha)? Resposta: _____.**

6) **Qual é o número de combinações possíveis? Resposta: _____.**

7) **Relacione o tamanho do espaço amostral para os casos: $\frac{2}{6}$ de chances de morango/morango e $\frac{4}{6}$ de chances de morango e baunilha.**

8) **O seu palpite no início foi correto? Resposta: _____.**

APÊNDICE F – Folha de resposta para o jogo Fábrica de Bolos

Atividade 6: Fábrica de Bolos

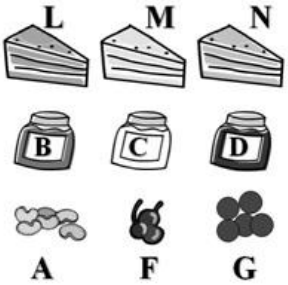
Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Preste atenção ao problema lido. Desenhe o diagrama de árvore e responda as questões:

Três sabores de bolo: laranja, maracujá e nozes.

Três recheios: baunilha, creme e damasco.

Três coberturas: amêndoa, framboesa e gotas de chocolate.



Você precisa fazer caixas para cada combinação de diferentes de bolos e descobrir todas as combinações possíveis para se certificar de que não repetiu nenhuma combinação ou deixou alguma de fora. Desenhe, no quadro abaixo, um diagrama de árvore para encontrar as combinações possíveis:

1) Quantas caixas diferentes você precisa fazer? Resposta: _____ caixas.

2) Como você pode ter certeza que não irá repetir uma combinação ou deixar alguma de fora?

Resposta:_____

_____

_____.

Atividade 6: Fábrica de Bolos

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Preste atenção ao problema lido. Desenhe o diagrama de árvore e responda as questões:

Lembre-se:

- **A escola "A" não quer cobertura de amêndoas no bolo de maracujá;**
- **A escola "B" não quer recheio de damasco com cobertura de gotas de chocolate;**
- **A escola "C" não quer recheio de creme com cobertura de framboesa.**

Portanto, você deve tirar do carro as caixas com as combinações que as escolas não querem.

1) **Você considera mais provável que seja retirada do carro uma caixa certa (combinação de sabores que as escolas não querem) ou é mais provável que seja retirada uma caixa errada (combinação de sabores que as escolas querem)? Explique sua resposta.**

Resposta:

_____

_____

_____

_____.

2) **Qual é a probabilidade, por escola, de se tirar do carro uma caixa certa (combinação de sabores que as escolas não querem)?**

Resposta: _____.

3) **Considerando todas as escolas, qual é a probabilidade de se tirar do carro uma caixa certa (combinação de sabores que as escolas não querem)?**

Resposta: _____.

4) **Qual é a probabilidade de se tirar do carro uma caixa errada (combinação de sabores que as escolas querem)?**

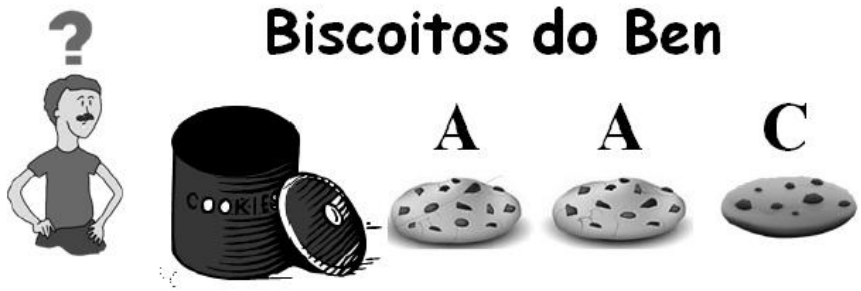
Resposta: _____.

APÊNDICE G – Folha de resposta para o jogo Biscoito do Ben

Atividade 7: Biscoitos do Ben

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Preste atenção ao problema e responda as questões:



"Ben tem uma lata de biscoitos e pode pegar dois biscoitos, sendo uma escolha por vez e sem olhar. Dentro da lata há 3 biscoitos, sendo 1 de chocolate (C) e 2 de amendoim (A). Sua escolha preferida seria obter 2 biscoitos de amendoim."

1) Em sua opinião, qual é a probabilidade de Ben obter 2 biscoitos de amendoim?

Resposta: _____.

No espaço abaixo, desenhe um diagrama e responda as questões para verificar se a sua opinião está correta:

1ª escolha	2ª escolha	Qual é a probabilidade de Ben escolher:	
		Amendoim e amendoim	☐
		Amendoim e chocolate ou Chocolate e amendoim	☐

2) Você estava certo?

Resposta: _____.

APÊNDICE H – Folha de resposta para o Show de Danças

Atividade 8: Show de Danças

Nome: _____ nº: ____ Série: _____

Preste atenção nas orientações sobre as danças e responda as questões:

Use esse quadro para fazer um diagrama que auxilie na resolução das questões:

1) Qual é o total de pares diferentes que podem ser formados para dançar?

Resposta: _____.

2) De acordo com o resultado da questão 1, qual é a quantidade de vezes que cada pessoa dançará?

Resposta: _____.

3) Qual é a probabilidade de danças cujos nomes dos casais de dançarinos começam com a mesma letra?

Resposta: _____.

4) Qual é a probabilidade de danças nas quais ambos os dançarinos estejam segurando um objeto na mão?

Resposta: _____.

Agora será realizado um sorteio com todos os possíveis casais de dança.

5) Qual é a probabilidade de que o dançarino Beto faça parte do primeiro par sorteado?

Resposta: _____.