



**UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

ALBANO DIAS PEREIRA FILHO

**FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO PARA UMA
AULA INVESTIGATIVA SOBRE PROBABILIDADE**

SÃO PAULO

2018

ALBANO DIAS PEREIRA FILHO

**FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO PARA UMA
AULA INVESTIGATIVA SOBRE PROBABILIDADE**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo, para o Exame de defesa como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática, sob a orientação da **Professora Dra. Nielce Meneguelo Lobo da Costa**.

SÃO PAULO

2018

Ficha Catalográfica elaborada por:

Bibliotecária Roselaine R. de Bastos Novato CRB/8 9676

P491f	Pereira Filho, Albano Dias
Formação continuada de professores do ensino médio para uma aula investigativa sobre probabilidade. / Albano Dias Pereira Filho. – São Paulo, 2018.	
228 f: il.; 30 cm	
Tese (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós-graduação - Universidade Anhanguera de São Paulo, 2018.	
Orientadora: Profa. Dra. Nielce Meneguelo Lobo da Costa	
1. Ensino de probabilidade. 2. Aulas investigativas. 3. Formação de professores. I. Título. II. Universidade Anhanguera de São Paulo.	
CDD 372.7	

FOLHA DE APROVAÇÃO

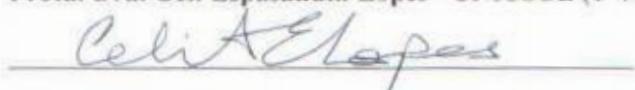
PEREIRA FILHO, A. **FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO PARA UMA AULA INVESTIGATIVA SOBRE PROBABILIDADE 234 f.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo, 2018.

BANCA EXAMINADORA

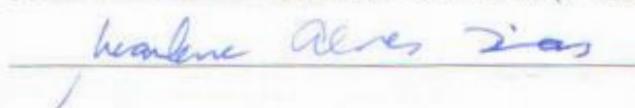
Profa. Dra. Nielce Meneguelo Lobo da Costa (Presidente)



Profa. Dra. Celi Espasandin Lopes - UNICSUL (1º Membro Titular Externo)



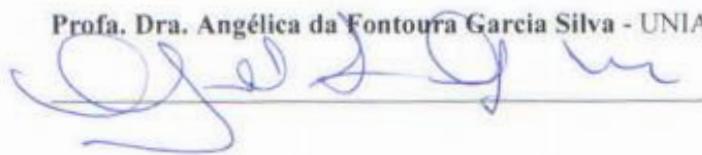
Profa. Dra. Marlene Alves Dias - UNIAN-SP (2º Membro Titular Interno)



Prof. Dr. Sonner Arfux de Figueiredo - UEMS (3º Membro Titular Externo)



Profa. Dra. Angélica da Fontoura Garcia Silva - UNIAN-SP (4º Membro Titular Interno)



AGRADECIMENTOS

A Deus, todo o agradecimento por me sustentar, iluminar e proteger. Meu especial agradecimento e carinho à professora Dra. Tânia M. M. Campos, por ter oportunizado nossa parceria. Ao professor Dr. Ruy Pietropaolo, por ter cuidado dos doutorandos de Tocantins. À professora Dra. Nielce Meneguelo Lobo da Costa, que sempre com paciência e persistência dosando o rigor e a amizade, a razão e o coração, me aceitou com todas as minhas limitações, mostrando enorme competência e segurança, sendo em todos os momentos fonte de conhecimento, estímulo, incentivo e aprendizado, numa orientação tranquila, compartilhada e perfeita para a conclusão deste trabalho.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins (IFTO), na pessoa do Magnífico Reitor, professor Francisco Nairton do Nascimento, pelo apoio por meio do Programa Institucional de Bolsas de Pós-Graduação para servidores do IFTO. Este incentivo financeiro permitiu o desenvolvimento deste servidor, no sentido de melhorias no desempenho das minhas funções.

Aos docentes do Programa de Pós-Graduação - Doutorado em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo, pelas aulas, conversas e contribuições para as reflexões sobre minha formação e pesquisas.

Aos colegas, professores e alunos que participaram do Grupo de Pesquisa cujos encontros contribuíram com discussões, experiências, pesquisas e produções, as quais foram essenciais para o desenvolvimento desta pesquisa.

À minha esposa Cynthia, companheira inseparável, paciente, atenta às minhas menores necessidades, sempre diligente para que eu tivesse a serenidade necessária para minhas leituras e reflexões. Obrigada pelos muitos momentos solitários em frente à TV, pelos cafezinhos na hora certa, por entender quando eu precisava de silêncio e por me ouvir quando eu precisava conversar. Seu incentivo a cada pequena conquista e descoberta trouxe força, alegria, amor e ternura para meus dias, permitindo a conclusão deste trabalho.

O caminho foi longo, muitas pessoas estiveram comigo em minha vida, me ajudaram, apoiaram, outras infelizmente partiram e deixaram um grande vazio. Sei que esqueci de várias pessoas, mas a todos que passaram pela minha vida e que comigo viveram os altos e baixos do caminho percorrido até esta conquista, pela

força, apoio e alegria compartilhada, os quais de alguma forma contribuíram para a construção de quem sou hoje, o meu muito obrigada.

A todos, o meu carinhoso agradecimento. Que Deus abençoe suas vidas.

RESUMO

O presente estudo teve como objetivo identificar e analisar as contribuições de um curso de formação continuada voltado para o ensino da Probabilidade por meio de aulas investigativas, para a ampliação do conhecimento profissional docente de professores do Ensino Médio. Esta investigação se propôs a responder o seguinte questionamento: “Que contribuições podem trazer, para o conhecimento profissional docente, a participação de professores em uma formação continuada sobre o ensino de Probabilidade baseado em aulas investigativas?” A pesquisa foi desenvolvida no âmbito de um projeto de pesquisa do Programa Observatório da Educação da CAPES /Inep, intitulado “Educação Continuada do Professor de Matemática do Ensino Médio: Núcleo de Investigações sobre a Reconstrução da Prática Pedagógica”, aqui referenciado como Projeto “OBEDUC Práticas”. A metodologia da investigação foi qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1996), do tipo Design-Based Research na concepção de Brown (1992) e Collins (1992) e foi dividida em três fases: uma de pesquisa documental, uma de planejamento e uma de pesquisa de campo, a qual foi desenvolvida em um curso de formação continuada com 12 participantes. Como instrumentos de coleta de dados, foram utilizados: o diário de campo do pesquisador, gravações em áudio e vídeo dos encontros e ainda questionários aplicados aos professores participantes da formação continuada. A análise foi interpretativa e adotou as orientações de Powell, Francisco e Maher (2004) quanto aos vídeos, realizados a partir das produções dos professores participantes no curso de formação continuada. Tal formação teve uma dinâmica de encontros presenciais preparados com ênfase na ampliação dos conhecimentos profissionais dos participantes na concepção de Shulman (1986), Ponte (2003) e de Ball et al(2008), em particular sobre o tema probabilidade. A revisão de literatura nos auxiliou no design do processo formativo, bem como nos fundamentou para a análise dos dados coletados na pesquisa. A formação possibilitou a discussão de formas distintas de abordagem da Probabilidade em sala de aula e nela buscamos romper com o pensamento determinístico e linear. O curso auxiliou a ampliação do conhecimento do conteúdo específico de probabilidade, particularmente a conceituação de probabilidade condicional a experimentos frequentistas, a probabilidade geométrica e o teorema de Bayes, bem como a articulação da probabilidade com outros conteúdos. A conclusão foi de que o processo formativo impactou os professores participantes em relação a conhecer e a adotar a abordagem investigativa. Foi constatada ainda a ampliação do conhecimento especializado de probabilidade, do conhecimento pedagógico geral e do conhecimento instrucional.

Palavras-chaves: Ensino de Probabilidade; Aulas Investigativas; Conhecimento; Formação de Professores.

ABSTRACT

The aim of this study was to identify and analyze the contributions of a continuing training course focused on the teaching of Probability through investigative lessons to increase professional knowledge of high school teachers. This research has been conducted to answer the following question: "What contributions to professional knowledge may, the participation of teachers in a continuing training course on the teaching of Probability, based to Investigative lessons, bring to?" The research was developed within a research project of the Programa Observatório da CAPES/INEP, entitled "Educação Continuada do Professor de Matemática do Ensino Médio: Núcleo de Investigações sobre a Reconstrução da Prática Pedagógica" which is referenced herein as "OBEDUC Práticas" project. The research methodology used was the qualitative used by Bogdan and Biklen (1996), the type of Design-Based Research by Brown (1992) and Collins (1992) and it was divided into three phases: documental research, research planning, and field research, which was developed in a continuing training course with 12 participants. The data collection instruments used were the following: the researcher's field diary, recordings in audio, video of the meetings and questionnaires applied to teachers, participants in the course. The analysis has been conducted under Powell, Francisco, and Maher (2004)'s guidelines regarding the videos made during the participants' productions in the course. The training course carried through by dynamic face-to-face encounters prepared with an emphasis on broadening the professional knowledge of the participants, over the conception of Shulman (1986), Ponte (2003) and Ball et al (2008), in particular on the topic, probability. The literature review helped us in the design of the formative process, as well as on the analysis of the data collected. The training course made it possible to discuss different ways to approach Probability, in classrooms. In it, we sought to break with the deterministic and linear thought. The course helped increase knowledge on specific contents about Probability, more particularly, the conceptualization of conditional Probability to frequentist experiments as the geometric probability and Bayes' theorem. Also, on the articulation of Probability to other contents. It concluded that the formative process affected the participant teachers in relation to knowing and adopting the investigative approach. It noted an expansion of their specialized knowledge on Probability, on general pedagogical and on instructional knowledge.

Keywords: The Teaching Of Probability; Investigative Lessons; Knowledge; Teacher Training.

RESUMEN

El presente estudio tiene como objetivo analizar las contribuciones de un curso de formación continuada dirigido a la enseñanza de Probabilidad por medio de clases investigativas, buscando la ampliación del conocimiento profesional docente de maestros de la Enseñanza Media. Esta investigación se propuso responder al siguiente cuestionamiento: "¿Qué contribuciones pueden traer, para el conocimiento profesional docente, la participación de maestros en una formación continuada sobre la enseñanza de Probabilidad basado en clases investigativas?" La investigación fue desarrollada en el ámbito del proyecto de investigación Programa Observatorio de la Educación CAPES/INEP, intitulado "Educación Seguida del Maestro de Matemáticas de la Enseñanza Média: Núcleo de investigaciones sobre la reconstrucción de la Práctica Pedagógica" propuesto por la UNIBAN/CAPES, aquí referenciado como proyecto "OBEDUC Practicas". La metodología adoptada en este estudio fue la investigación documental, de abordaje cualitativo, propuesto por Bogdan y Biklen (1996), y la investigación de campo del tipo Design-Based Research en la concepción de Brown y Collins (1992) caracterizado por Cobb, P .; Confrey, J .; Disensión, A .; Lehrer, R.e Schauble, L. (2003) y Mckenney y Reeves (2012). Cómo instrumentos de recolección de datos fueron utilizados: el diario de campo, grabación en audio y vídeo y cuestionarios de evaluación / investigación aplicados a los profesores que participaron en la formación continuada. La metodología de análisis de vídeo adoptada siguió las orientaciones obtenidas en Powell, Francisco y Maher (2004). Los análisis se realizaron a partir de las producciones de los maestros participantes en el curso de formación continuada que tuvo una dinámica de trabajo mediante encuentros presenciales preparados siempre con énfasis en la ampliación de los conocimientos de los participantes para mejorar su práctica pedagógica sobre probabilidad. La revisión de literatura nos ayudó a dar el tratamiento correcto en el desarrollo del proceso formativo para los maestros participantes, así como fundamentar el análisis de los datos recolectados en la investigación. Durante el curso de formación continuada percibimos algunos incómodoss en la práctica docente de algunos participantes por consecuencias de su propia licenciatura, que no proporcionó subsidios suficientes para el conocimiento del contenido curricular. La formación posibilitó la discusión de formas distintas de abordaje de la Probabilidad en el aula en el cual buscamos romper con el pensamiento determinista y lineal. El curso permitió la ampliación del conocimiento del contenido específico de probabilidad abarcando desde la concepción de probabilidad condicional a experimentos frecuentes, de probabilidad geométrica y el teorema de Bayes, así como articulación y relación de la probabilidad con otros contenidos. Se percibió también que el curso de formación impactó en la postura de los profesores participantes en relación a conocer y adoptar el enfoque investigativo, y ampliación del conocimiento específico de probabilidad, del conocimiento pedagógico general y del conocimiento instruccional.

Palabras claves: Enseñanza de Probabilidad; Clases de Investigación; Conocimiento; Formación de Maestros.

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Pesquisas encontradas por região brasileira.....	25
Figura 2 - Concepções, abordagens, significados e conceitos	64
Figura 3 - Síntese do conhecimento profissional	84
Figura 4 - Síntese do conhecimento profissional	104
Figura 5 - Roleta de disco e bola de gude	111
Figura 6 - Roletas utilizadas nas atividades investigativas	112
Figura 7 - Construção da roleta com toca disco	114
Figura 8 - Cédula fictícia para atividade investigativa	115
Figura 9 - Soma da primeira rodada do jogo	116
Figura 10 - Roleta 3D	117
Figura 11 - Envelopes com questões e organização do espaço	119
Figura 12 - Professores participantes e tempo de atuação docente	127
Figura 13 - Resposta sobre o que os levaram a serem professores.....	127
Figura 14 - Protocolos de respostas da questão 11	129
Figura 15 - Protocolo de respostas da questão 1	131
Figura 16 - Protocolo de respostas da questão 2	133
Figura 17 - Protocolo de respostas da questão 3	135
Figura 18 - Protocolo de respostas da questão 4	137
Figura 19 - Protocolo de respostas da questão 5	138
Figura 20 - Protocolo de respostas da questão 6	139
Figura 21 - Protocolo de respostas da questão 7	141
Figura 22 - Protocolo de respostas da questão 8	142
Figura 23 - Representação da Probabilidade Geométrica	149
Figura 24 - Adaptação do toca discos para atividade com discos.....	162
Figura 25 - Roleta de 8 cores	163
Figura 26 - Roleta elaborada pelo grupo para questão 3.....	163
Figura 27 - Roleta proposta inicialmente para a questão 3.....	164
Figura 28 - Resultados possíveis para a soma das faces de dois dados.....	166
Figura 29 - Cédulas fictícias	167
Figura 30 - Questão sobre probabilidade-Box Plot	175

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1 - Instituições por divisão regional.....	24
Quadro 2 - Primeiro Design do Curso de Formação.....	55
Quadro 3 - Probabilidade no Ensino Médio segundo o BNCC – 2 ^a versão.....	77
Quadro 4 - Exemplos de exercício, problema e tarefa de Investigação	83
Quadro 5 - Conhecimentos necessários para o ensino	102
Quadro 6 - Síntese dos encontros do curso de formação continuada	108
Quadro 7 - Perfil dos Participantes da Pesquisa	123
Quadro 8 - Distribuição de acertos e erros do Questionário 2	130
Quadro 9 - Eventos críticos da formação	145

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	13
CAPÍTULO I.....	15
1 ORIGEM DA PESQUISA	15
1.1 TRAJETÓRIA PROFISSIONAL E MOTIVAÇÕES DO ESTUDO	15
1.2 OBJETIVO E PROBLEMA DA PESQUISA	18
1.3 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA	18
1.4 JUSTIFICATIVA DA PESQUISA	19
1.4.1 Revisão de Literatura.....	22
1.4.1.1 Pesquisa envolvendo formação continuada e ensino de Probabilidade	25
1.4.1.2 Pesquisas envolvendo formação docente e aulas investigativas.....	31
1.4.1.3 Pesquisas envolvendo formação de professores e conhecimento profissional...	40
1.5 METODOLOGIA DA PESQUISA	50
1.5.1 Procedimentos metodológicos	53
1.5.2 Percurso para análise dos dados	58
CAPÍTULO II.....	61
2 PROBABILIDADE E SEU ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA	61
2.1 ENSINO DE PROBABILIDADE	61
2.1.1 Indicações Curriculares para o Estudo de Probabilidade.....	69
2.2 ENSINO E APRENDIZAGEM POR MEIO DE AULAS INVESTIGATIVAS	79
CAPÍTULO III.....	88
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	88
3.1 FORMAÇÃO CONTINUADA DO PROFESSOR.....	88
3.2 CONHECIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE	96
3.2.1 Teoria da Base de Conhecimentos	97
3.2.2 Uma Teoria sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino.....	99
3.2.3 Conhecimento profissional docente na perspectiva de Ponte	103
CAPÍTULO IV	108
4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS	108
4.1 DESCRIÇÃO DO PROCESSO FORMATIVO	108
4.2 ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS.....	123
4.3 EVENTOS CRÍTICOS DA FORMAÇÃO CONTINUADA	144
4.3.1 Primeiro Evento Crítico - Conhecimentos iniciais e expectativas	145

4.3.2 Segundo Evento Crítico da Formação- Construindo conhecimentos sobre tarefas e aulas investigativas com probabilidade geométrica.....	153
4.3.3 Terceiro Evento Crítico da Formação- Probabilidade e Tecnologia.....	165
4.3.4 Quarto evento crítico - Resolução de problemas	171
4.3.5 Quinto evento crítico - Sistematização de conhecimentos.....	174
CAPÍTULO V	179
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	179
REFERÊNCIAS	188
ANEXOS.....	199
APÊNDICES	208

APRESENTAÇÃO

Esta pesquisa sobre formação continuada de professores para uma aula investigativa no ensino de Probabilidades está inserida na linha de pesquisa “Formação de Professores que Ensinam Matemática” do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo.

O objetivo geral da pesquisa foi analisar as contribuições de um curso de formação continuada voltado para o ensino da Probabilidade por meio de aulas investigativas, para a ampliação do conhecimento profissional docente de professores do Ensino Médio. A partir do objetivo geral, estabelecemos como objetivos específicos:

- I) Analisar as contribuições do curso de formação continuada quanto à ampliação do conhecimento específico, curricular e pedagógico dos professores participantes;
- II) Analisar as contribuições do curso de formação continuada quanto à ampliação do conhecimento especializado do conteúdo, do conhecimento horizontal do conteúdo e do conhecimento do conteúdo e ensino;
- III) Analisar as contribuições do curso de formação continuada para subsidiar o professor na abordagem investigativa para ensino da Probabilidade.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), um ambiente investigativo deve ser criado em sala de aula oportunizando o envolver-se com a Matemática de forma ativa, proporcionando a formulação de problemas, como uma forma de solução de problemas que dê origem (às) a diversas conjecturas, de forma que essas possam ser testadas e /ou não aprovadas.

Desta forma, acreditamos que proporcionar um curso de formação continuada para o ensino de Probabilidade por meio de aulas investigativas, que leve os professores participantes (á) construção de situações de aprendizagem, pode promover o desenvolvimento de conhecimentos, desde que a socialização das informações, das experiências, bem como preparação e a avaliação de atividades propostas sejam baseadas em incentivo, colaboração e no compartilhamento de ideias.

A investigação de abordagem qualitativa do tipo *Design-Based Research*, foi dividida em três fases: uma de pesquisa documental, uma de planejamento e a pesquisa de campo. A pesquisa de campo foi desenvolvida em uma formação

continuada sobre Probabilidade no Ensino Médio por meio de aulas investigativas. Como instrumentos de coleta de dados, foram utilizados: diário de campo do pesquisador, gravação em áudio e vídeo dos encontros do processo formativo (além de) e, ainda, questionários aplicados aos professores participantes da formação continuada.

O texto foi dividido em cinco capítulos; sendo que o Capítulo I. apresenta o tema da pesquisa, a motivação do estudo, o problema e os objetivos da investigação. Aborda também a formação continuada e discorre sobre a metodologia da pesquisa. O “Capítulo II” aborda a Probabilidade na Educação Básica e o, ensino e a aprendizagem por meio de aulas investigativas. O Capítulo III apresenta a fundamentação teórica na qual no qual se destaca os estudos sobre o conhecimento profissional docente de Shulman (1987), sobre o conhecimento profissional necessário para o ensino de Ball, Thames e Phelps (2008) e sobre as conceituações de conhecimento profissional docente de Ponte (2003). O Capítulo IV apresenta a descrição e a análise dos resultados no qual são identificados e analisados eventos críticos ocorridos durante a formação continuada. O Capítulo V traz as considerações finais da pesquisa e nele também são apresentadas as indicações para investigações posteriores.

CAPÍTULO I

1 ORIGEM DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos a trajetória profissional e as motivações para a realização do estudo; bem como os objetivos e o problema da pesquisa, a delimitação, a justificativa para sua realização, a revisão de literatura e também os procedimentos metodológicos e o percurso para análise dos dados.

1.1 TRAJETÓRIA PROFISSIONAL E MOTIVAÇÕES DO ESTUDO

Uma proposta de pesquisa nasce essencialmente da necessidade espontânea do sujeito pesquisador de buscar em sua vida pessoal e profissional, indagações que o motivem a se alicerçar em respostas científicas que impliquem em soluções coletivas (específicas e gerais), tanto para a comunidade científica como para a sociedade.

O projeto de pesquisa, bem como a pesquisa em si, devem ter relevância teórica – metodológica teórico-metodológicas, tanto para o pesquisador quanto para a comunidade científica: para que, respaldado pelos pares, seja possível buscar elementos empíricos a serem discutidos à luz das teorias satisfazendo, assim, aos anseios e questões da pesquisa.

Atuo como docente na área de Matemática na Educação Básica há 15 anos e no Ensino Superior há 12 anos, vivenciando os desafios impostos pelo ensino desta disciplina. Dessa vivência, vem a compreensão de que na graduação, o futuro professor recebe uma bagagem teórica de conteúdo muito superior à bagagem prática, já a formação continuada muitas vezes se resume a frequentar cursos que buscam atender às carências do professor e alcançar resultados predeterminados e, contudo, nem sempre subsidiam adequadamente a construção de conhecimentos pedagógicos para a prática docente.

O distanciamento entre a teoria (academia) e a prática (escola) pode ser ponto de partida para a fragmentação e compartmentalização das propostas pedagógicas desenvolvidas, pois estas ocorrem, na maioria das vezes, descontextualizadas da realidade do futuro professor e do professor em exercício, desconsiderando suas opiniões, experiências e necessidades.

Licenciado em Matemática pelo Centro Universitário Luterano de Palmas-CEULP ULBRA TO desde 2004, conclui a especialização *Lato Sensu* em Educação Matemática pela Universidade Federal do Tocantins em 2006 e em Avaliação Escolar em Matemática pela Fundação Cesgranrio em 2009. Em 2012 conclui o mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Luterana do Brasil de Canoas-RS, analisando e categorizando os erros mais frequentes dos alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no Curso de Engenharia Civil. Embora o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática tenha sido realizado com estudantes, a conclusão da pesquisa nos forneceu muitas informações que poderiam ser aplicadas na formação continuada de professores.

A partir da vivência no mestrado e dos resultados da pesquisa nele empreendida, assim como da reflexão sobre o trabalho desenvolvido anteriormente na Diretoria de Ensino de Porto Nacional - TO, onde atuei como “formador” nos Cursos de Formação de Professores, percebi que minhas ações enquanto formador não estavam de acordo o que se pede nos cursos de formação continuada. Dessa forma, entendi que deveria continuar meus estudos, buscando fazer um doutorado em Ensino de Ciências e Matemática ou em Educação Matemática, de modo que pudesse me valer desse conjunto de experiências e então desenvolver uma pesquisa com professores de Matemática em contexto de formação continuada nas redes públicas (municipais e/ou estaduais) da regional de Porto Nacional - TO.

O Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* - Doutorado em Educação Matemática, da Universidade Anhanguera de São Paulo - veio ao encontro de meus anseios e proposta de pesquisa por debruçar-se sobre temáticas da Educação Matemática, entre elas a das práticas docentes, aliando teoria e prática no desenvolvimento de suas pesquisas e propiciando a construção de um conhecimento contextualizado e de valor social.

A pesquisa desenvolvida que origina esta tese se coloca na perspectiva de favorecer uma melhor compreensão sobre os conhecimentos para a docência, buscando identificá-las no fazer profissional de professores. As atividades desenvolvidas referem-se ao ensino de Probabilidade, tópico de Matemática que consta da programação da 2a série do Ensino Médio da Educação Básica.

A opção por Probabilidade se deve ao fato de que atuei por três anos como assessor de currículo de Matemática na Diretoria Regional de Ensino - DRE de Porto Nacional - TO. Como assessor de currículo, entre as atribuições estava a

seleção e preparo de professores para ministrar aulas em cursos de formação continuada para docentes, particularmente abordando conteúdos matemáticos específicos para professores da rede estadual e municipal de ensino. Dentre os tópicos que eram solicitados para as discussões nos cursos, destacava-se a Probabilidade. Neste período, percebi um desconforto por parte dos professores das escolas públicas ao lecionarem esse tema. Tal desconforto era gerado tanto pela falta de conhecimentos específicos do conteúdo quanto de conhecimentos pedagógicos referentes às estratégias de ensino.

Observei que as indagações e críticas dos professores envolvidos apontavam para a própria licenciatura, pelo fato de que esta não fornecera subsídios suficientes nem para o domínio do próprio conteúdo e, consequentemente, para o ensino desse conteúdo.

Na minha trajetória profissional, sempre estiveram presentes inquietações em relação à preparação do profissional da Educação, seja como professor, seja como formador de professores. Na tentativa de encontrar respostas às minhas indagações, surgiu (retire o veio) veio a motivação para esta essa pesquisa, desenvolvida em um curso de formação continuada para professores de Matemática abordando o ensino de Probabilidades.

Ressalto que a Probabilidade se constitui em uma ferramenta para diversas áreas do conhecimento científico, graças ao seu vasto campo de aplicações e às diversas implicações em Matemática. Além disso, permite a elaboração de situações-problema que podem ser discutidas por meio da construção de conjecturas e discussão de ideias, promovendo o desenvolvimento da capacidade de argumentação em diferentes níveis de ensino.

Por outro lado, percebe-se, pela experiência como professor - no contato com os colegas e na formação continuada – certo consenso sobre as dificuldades para ensinar Probabilidade e sobre o uso exclusivo de manipulação de fórmulas ou resoluções padronizadas. Essa metodologia de ensino que pode causar dificuldades na construção dos conceitos probabilísticos pelos estudantes.

Desta forma, a ideia foi desenvolver uma pesquisa que contribua para a formação dos professores, que possibilite discutir potencialidades sobre o ensino da Probabilidade na Educação Básica, por meio de um curso formativo sobre o ensino de Probabilidade na sala de aula. Nesse processo formativo, a intenção foi levar os professores a refletirem sobre a prática e analisarem estratégias de ensino.

1.2 OBJETIVO E PROBLEMA DA PESQUISA

Esta investigação se propôs a responder o seguinte questionamento:

Que contribuições podem trazer para o conhecimento profissional docente, a participação de professores em uma formação continuada sobre o ensino de Probabilidade baseado em aulas investigativas?

Diante desse questionamento, o objetivo geral da pesquisa foi:

Identificar e analisar as contribuições de um curso de formação continuada voltado para o ensino da Probabilidade por meio de aulas investigativas, para a ampliação do conhecimento profissional de professores do Ensino Médio.

Dividimos esse objetivo geral em três objetivos específicos, de modo a identificar e analisar as contribuições do curso de formação continuada – voltado para o ensino de Probabilidade – para propiciar construção/reconstrução de conhecimento profissional dos professores participantes; por meio da:

- Ampliação do conhecimento específico, curricular e pedagógico;
- Ampliação do conhecimento especializado do conteúdo, do conhecimento horizontal do conteúdo e do conhecimento do conteúdo e ensino;
- Fornecimento de subsídios na abordagem investigativa¹.

Sendo assim, para a realização da pesquisa, propusemos e desenvolvemos uma formação continuada referente ao ensino de Probabilidade na 2^a série do Ensino Médio da Educação Básica, adotando a investigação Matemática na sala de aula.

1.3 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA

Esta pesquisa integra um projeto de formação e pesquisa do Programa Observatório da Educação da CAPES /Inep², intitulado “Educação Continuada do

¹ Os (retire os tais) tipos de conhecimento profissional docente estão discutidos no Capítulo III.

² O Programa Observatório da Educação (OBEDUC) do Ministério da Educação do Brasil/ MEC, resultado da parceria entre a Capes, o INEP e a SECADI, foi instituído pelo Decreto Presidencial nº 5.803, de 08 de junho de 2006, com o objetivo de fomentar estudos e pesquisas em educação, que utilizem a infraestrutura disponível das Instituições de Educação Superior – IES e as bases de dados existentes no INEP. O programa visa, principalmente, proporcionar a articulação entre pós-graduação, licenciaturas e escolas de educação básica e estimular a produção acadêmica e a formação de recursos pós-graduados, em nível de mestrado e doutorado.

Professor de Matemática do Ensino Médio: Núcleo de Investigações sobre a Reconstrução da Prática Pedagógica”, proposto pela Universidade Bandeirante de São Paulo³ (aprovado sob número 19366/2012), aqui referenciado como Projeto “OBEDUC Práticas”. Seu objetivo é desenvolver e analisar o processo de construção de um Núcleo de Estudos sobre Formação e Práticas do Professor de Matemática, com vistas à reconstrução da prática pedagógica no Núcleo. Para promover a reconstrução prática, se discutem inovações curriculares no ensino de temas estruturantes da Matemática nas formações continuadas. Para empreender essas formações estabelecemos parceria com quatro Diretorias de Ensino da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo: a DE Norte 2, DE Guarulhos Norte, DE Guarulhos Sul, DE Adamantina e uma Diretoria Regional de Ensino da Secretaria de Educação do Estado de Tocantins, DRE de Porto Nacional. No Projeto “OBEDUC Práticas” são objetivos específicos de pesquisa: 1) Identificar características das ações formativas desenvolvidas com os professores de Matemática, cujo pressuposto é a articulação entre a teoria, a prática docente e a pesquisa – que favorecem a reflexão sobre a prática pedagógica. 2) Investigar meios para aprofundar a compreensão de conceitos relativos aos temas estruturantes da Matemática, desenvolvidos no Ensino Médio e, como consequência, desenvolver métodos de ensino e sequências didáticas para esses tópicos, incluindo o uso de recursos das tecnologias digitais. 3) Analisar as estratégias pedagógicas dos professores participantes ao atuarem no Ensino Médio desenvolvendo em sala de aula, os conteúdos abordados no Projeto.

A presente pesquisa se insere no Projeto “OBEDUC Práticas”, ao constituir uma sede do Núcleo de Estudos sobre Formação e Práticas do Professor de Matemática em Porto Nacional - TO, e nele promover e investigar uma formação continuada com foco no ensino de Probabilidade por meio de aulas investigativas. Esta pesquisa contribuiu, no tocante a esse tema, ao fornecer resultados para auxiliar a atingir os três dos objetivos específicos desse Projeto maior.

1.4 JUSTIFICATIVA DA PESQUISA

A sociedade moderna solicita cada vez mais, que os indivíduos desenvolvam conceitos matemáticos e que tenham fluência em matemática de modo a

³ O nome da Universidade foi alterado para Universidade Anhanguera de São Paulo pela Portaria nº 600, de 14 de novembro de 2013.

compreender a realidade. Isso pode ser constatado nos meios de comunicação, nos processos seletivos, comerciais, econômicos e científicos, os quais apresentam muitas das informações em linguagem matemática (numérica e gráfica) de modo que é preciso analisar, julgar e, enfim, pensar matematicamente (procurando regularidades, estabelecendo relações e raciocinando sobre dados e situações-problema) para atender aos processos, para se comunicar com o intuito de agir criticamente. Retire este final e agir criticamente.

A partir das demandas sociais, é necessário preparar os alunos na Educação Básica para analisar matematicamente a realidade. Entre os conhecimentos, que auxiliam os estudantes na compreensão de situações reais, estão os de aleatoriedade e Probabilidade. Entretanto, o ensino e a aprendizagem desses temas têm sido um desafio para os professores e alunos do Ensino Médio, visto que, normalmente até esse momento os estudantes lidaram na escola com uma matemática mais relacionada às situações determinísticas, não tendo contato com a incerteza. Isso significa dizer que os alunos se envolvem prioritariamente com tarefas que exigem aplicação de fórmulas, realização de cálculos e estabelecimento da resposta correta, assumindo um ponto de vista dualista em relação à Matemática, na qual (retire o em que) as coisas estão certas ou erradas.

Por outro lado, embora as orientações curriculares brasileiras⁴ indiquem a abordagem de fenômenos aleatórios no Ensino Fundamental, usualmente é no Ensino Médio que os alunos têm discussões mais sistematizadas que envolvam aleatoriedade e incerteza. Entre outros motivos, isso pode ocorrer devido ao próprio professor se sentir inseguro para ensinar esses conteúdos e, assim sendo, não os prioriza.

Sabemos que na formação inicial dos docentes é fundamental o contato com estes conteúdos. Contudo, (retire o mas), não é suficiente para formar plenamente o professor, especialmente se almejarmos que tanto a realidade social, o ensino, a instituição educacional, quanto as finalidades do sistema educacional evoluam e que os professores construam alternativas de inovação e de mudanças para as políticas e as práticas pedagógicas com respaldo nas necessidades reais e diárias da profissão; o que evidencia a importância da formação continuada ao longo de toda a carreira docente.

⁴ As orientações curriculares brasileiras serão discutidas no Capítulo 2.

A partir dessa problemática, surgiu a motivação para empreender uma formação continuada para professores do Ensino Médio sobre o ensino de Probabilidade. De tal modo que a participação no curso pudesse levar o professor participante a adquirir informações e a construir conhecimentos que os ajudassem a enfrentar na sala de aula as adversidades do dia a dia.

Considerando-se o ponto de vista do professor e do aluno, quanto às abordagens do conteúdo de Matemática, o processo formativo envolveu a criação e desenvolvimento de situações de aprendizagem inovadoras para a sala de aula, a posterior discussão coletiva sobre o valor potencial de cada atividade, quais os conceitos probabilísticos envolvidos e o nível de escolaridade adequado. Assim retire o sendo, os professores participantes poderiam adquirir experiência na preparação e na avaliação de tarefas matemáticas e nas tomadas de decisões. Além disso, possibilitar a discussão dos dilemas e dificuldades que os professores poderão enfrentar ao conduzir estes tipos de atividades. Uma das finalidades da formação foi contribuir para que suas atividades fossem reconhecidas como favorecedoras na construção dos significados matemáticos e com isso, (pudesse) ser inclusas nas práticas docentes.

Desta forma, entendemos que se justifica buscar uma proposta de ensino baseada na valorização do raciocínio lógico do aluno, no incentivo à investigação e na socialização de ideias por meio de atividades durante as aulas, organizadas tanto para desenvolvimento individual quanto em grupos, com a intenção de contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem de Probabilidade por meio de investigações matemáticas na sala de aula.

No curso de formação continuada, discutimos propostas de aulas investigativas, acreditando que elas possam contribuir para um ambiente de aprendizagem privilegiado para que todos os alunos sejam estimulados a expor suas ideias, apresentar sugestões, argumentar, questionar e refletir, em uma atmosfera na qual eles se tornem agentes ativos, corresponsáveis pela própria aprendizagem.

Acreditamos que desenvolver investigações matemáticas na sala de aula pode criar esse espaço de reflexão. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), estudos em Educação têm mostrado que este tipo de trabalho constitui uma poderosa ferramenta que auxilia a construção do conhecimento do aluno.

Em relação à Probabilidade, enquanto uma teoria, está inserida nos documentos curriculares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino

Médio - PCNEM (BRASIL, 2000) Ensino Médio com o propósito de desenvolver habilidades dos alunos que serão úteis como indivíduos pertencentes à sociedade atual. No cotidiano, a Probabilidade é utilizada em avaliações de riscos, no comércio, no mercado de matérias-primas, pois cada vez mais, os gestores aplicam métodos de Probabilidade na regulação ambiental (análise de caminho) e estão frequentemente medindo o bem-estar por meio de métodos aleatórios e escolhendo projetos com os quais se comprometem baseados no seu efeito provável na população como um todo, estatisticamente.

O cálculo das Probabilidades não é considerado um tema fácil para muitos alunos e professores. Dessa forma, acreditamos que ao discutir os conceitos probabilísticos em um ambiente de formação continuada há uma maior possibilidade de construir conhecimentos por meio da interação e dos momentos de reflexões, auxiliando a ampliação do conhecimento profissional dos docentes envolvidos na formação.

Na próxima seção, apresentamos pesquisas correlatas que tiverem como tema a Formação Continuada, o Ensino de Probabilidade, a Formação de Professores com abordagem de aulas investigativas para o ensino, a Formação e o Conhecimento Profissional Docente.

1.4.1 Revisão de Literatura

Esta pesquisa se propõe a identificar e analisar as contribuições de um curso de formação continuada - voltado para o ensino da Probabilidade por meio de aulas investigativas para a ampliação do conhecimento profissional de professores do Ensino Médio.

Para nos certificarmos da relevância e originalidade desta pesquisa, empreendemos uma revisão da literatura com base nos preceitos indicados por Kitchenham (2004). O autor indica que uma revisão deve procurar avaliar e interpretar dados de pesquisas relevantes para uma questão de pesquisa específica, ou seja, é uma forma de identificação, avaliação e interpretação de estudos pertinentes sobre uma determinada questão de pesquisa.

Para Rother (2007), a revisão de literatura se propõe a responder questionamentos específicos e, para tanto, explicita os métodos para a identificação,

seleção e avaliação crítica das pesquisas e também para a coleta e análise dos dados das investigações inclusas na referida revisão.

Assim sendo, esta revisão tem como objetivos: identificar pesquisas que abordem a formação docente com foco no ensino de Probabilidade, a formação de professores com abordagem de aulas investigativas para o ensino, formação e conhecimento profissional, isto é, a intenção foi encontrar pesquisas sobre a formação de professores, sobre conhecimento profissional e sobre ensino investigativo de Probabilidades.

Nesta revisão, utilizamos as seguintes estratégias: escolha dos portais onde seriam realizadas as buscas; definição das palavras-chave que seriam utilizadas e a determinação dos critérios de seleção das publicações que determinariam a inclusão ou a exclusão. Além disso, inserimos as palavras-chave no site de busca Google Acadêmico; bem como, disso, pesquisamos artigos em periódicos científicos, de modo a mapear os resultados já publicados sobre a temática desta investigação. Devemos ressaltar que os critérios de exclusão dos trabalhos encontrados foram os seguintes: serem da área de Estatística, das Ciências Biológicas, da Química, da Física ou pesquisas que não tivessem relação com o problema desta investigação.

Desta forma, no banco de dados da Capes inserimos no campo de busca a frase: “Formação continuada de professores de Matemática”, filtramos o tipo: Mestrado e Doutorados, entre os anos de 2012 a 2015. Nesse refinamento da busca, encontramos 24083 publicações.

Refizemos a busca adotando o mesmo critério anterior, de palavras-chave, porém, com “Educação Matemática” e encontramos 29922 publicações. Refinamos a busca filtramos: Programas de Mestrado e Doutorado com as palavras-chave “Educação Matemática” e encontramos 1410 publicações.

Apresentamos por região as instituições que apresentaram pesquisas relacionadas com as palavras chaves Educação Matemática, Formação de professores, Formação continuada de professores de Matemática. As pesquisas foram desenvolvidas em 31 Universidades, sendo: 1 da região Norte, 4 do Nordeste, 2 do Centro-Oeste, 13 do Sudeste, 11 Universidades da região Sul citadas no Quadro 1, a seguir.

Quadro 1 - Instituições por divisão regional

REGIÃO	INSTITUIÇÃO
NORTE	UFPA
NORDESTE	UEBH, UFRN, UFAL, UFPE
CENTRO-OESTE	UFMS, UFG
SUDESTE	UFMG, PUC-SP, PUC-MG, UFU, UFRJ, UFOP, UFABC, UNESP, USP, UNIBAN, UFJF, UNICAMP, UCSP
SUL	UFRS, ULBRA, PUC-RS, UFPR, UFSC, UFSM, UEL, UFPEL, UNIFRA, UNICSUL, UFSCAR

Fonte: Elaboração própria.

Com um número muito alto de pesquisas relacionadas às palavras-chaves escolhidas, observamos no refinamento que estavam sempre relacionadas com os Programas de Pós-Graduações de Educação, Educação Matemática e de Ensino de Ciências e Matemática. Assim, focamos nas instituições que os ofereciam, bem como anais e revistas das áreas de Ensino, Educação, Educação Matemática e Ensino de Ciências e Matemática.

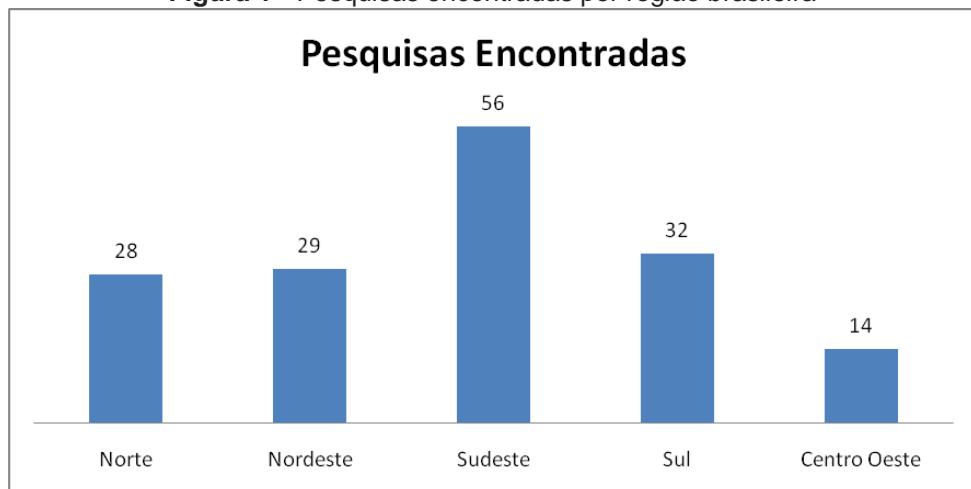
Desta forma, buscamos em artigos em revista com repercussões no âmbito regional, nacional e até mesmo, internacional, anais e Programas de Pós Graduação no Brasil, com as palavras-chaves Formação e Ensino de Probabilidade, Formação e Aulas Investigativas, Formação e Conhecimentos Profissionais Docentes, como palavra-chave ou no título. Encontramos 165 no total, destas 159 eram publicações Nacionais e as outras seis foram encontradas na Universidade de Granada e Universidade de Lisboa.

Buscamos no repositório da Universidade de Lisboa e no da Universidade de Granada, pesquisas envolvendo aulas investigativas em Matemática, e também sobre Probabilidade e encontramos 17 publicações de teses de doutorado. Mas nenhuma com o título Probabilidade e aulas investigativas.

Após consultarmos as referências, percebemos que não haviam pesquisas envolvendo Probabilidade, aulas investigativas e formação de professores de Matemática em uma única pesquisa. Encontramos em Vieira (2013) em sua pesquisa intitulada “Uma análise sobre os rumos de pesquisas brasileiras envolvendo investigações matemáticas em sala de aula”, o autor traz as pesquisas

envolvendo aulas investigativas e nenhuma está relacionada com o tema probabilidade. Sendo assim, continuamos a revisão com o seguinte procedimento: separamos 165 referências encontradas em três grupos: *Pesquisa envolvendo formação continuada e ensino de Probabilidade*, *Pesquisas envolvendo formação docente e aulas investigativas* e *Pesquisas envolvendo formação docente e conhecimento profissional*. As 149 pesquisas Nacionais apresentamos separadas por região Brasileira.

Figura 1 - Pesquisas encontradas por região brasileira



Fonte: Elaboração própria.

Ressaltamos que, das 165 pesquisas, selecionamos 28 que apresentavam em sua estrutura conceitos e experiências investigativas no ensino de Probabilidade para análise e os dividimos em *Pesquisa envolvendo Formação Continuada e Ensino de Probabilidade*, *Pesquisas envolvendo Formação Docente e Aulas Investigativas* e *Pesquisas envolvendo Formação Docente e Conhecimento Profissional*, as quais apresentamos em seguida.

1.4.1.1 *Pesquisa envolvendo formação continuada e ensino de Probabilidade*

Junqueira (2014) com propósito de compreender as concepções dos educadores a respeito da Probabilidade, usou um processo formativo baseado no *design experiment*, que é uma metodologia de pesquisa que coloca em destaque o uso e estudo detalhado de intervenções com objetivos pedagógicos em cenários reais, favorecendo o reconhecimento da complexidade do ensino na sala de aula,

reduzindo a distância entre a investigação e a prática. Como resultado a pesquisa apontou a existência de concepções imprecisas, dúvidas, incompreensões e equívocos dos professores, principalmente sobre Probabilidade condicional, eventos independentes e mutuamente excludentes, o que ressaltou a necessidade de formação continuada. A pesquisa de Junqueira tem relação com esta investigação, pois ambas ocorrerem em processos formativos para professores da Educação Básica com foco no ensino de Probabilidade. Entretanto a pesquisa focou concepções dos professores diferentemente desta, cujo foco está no ensino por investigação. O estudo histórico sobre o desenvolvimento da Probabilidade, assim como as atividades de Junqueira, especialmente sobre Probabilidade Geométrica, forneceram subsídios para a criação das atividades utilizadas no processo formativo empreendido por nós.

Lopes (2003), em uma pesquisa de caráter colaborativo, buscou discutir o conhecimento profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil. Adotando uma perspectiva teórica do professor reflexivo na visão freireana, investigou as contribuições que o estudo, a vivência e a reflexão sobre conceitos de Estatística e Probabilidade podem trazer para o desenvolvimento profissional e a prática pedagógica de um grupo de professoras da Educação Infantil de uma escola da rede particular de Campinas. Sendo assim, a autora realizou uma intervenção planejada que se constituiu em produção colaborativa, a qual possibilitou a ampliação do conhecimento profissional das educadoras referente à Matemática e a Estatística, do currículo e dos processos de ensino e de aprendizagem. A coleta de dados foi produzida ao longo de três anos letivos, por meio de questionários, entrevistas, relatórios e notas da investigadora, bem como resultados de reflexões coletivas de textos, discussões em aulas filmadas e análises de atividades elaboradas e aplicadas pelas professoras. Para tanto, foram feitos estudos de caso das professoras e das coordenadoras participantes do grupo, buscando identificar aspectos significativos de seus conhecimentos matemáticos, estatísticos, didáticos e seus processos de desenvolvimento profissional, em um ambiente de trabalho colaborativo. O conhecimento curricular apareceu associado às concepções das professoras sobre o significado que a Estatística e a Probabilidade pode ter no desenvolvimento infantil. Destacou no grupo colaborativo que os participantes demonstraram clareza dos objetivos curriculares da Educação Infantil.

A pesquisa de Lopes mostrou que o desenvolvimento profissional ampliou-se por meio da produção conjunta dos conhecimentos conceituais didáticos da Matemática e da Estatística. A autora defende que um processo de formação deve valorizar os educadores, provocando uma reflexão sistemática sobre as questões em curso, habilitando-os a serem pesquisadores de suas próprias práticas e que lhes dê condições para investirem na produção coletiva do conhecimento. Destacamos que a pesquisa de Lopes apresenta afinidade com esta investigação por ambas ocorrerem com grupos de professores, referente ao ensino de Probabilidade. A autora trabalhou em um grupo colaborativo voltado para Educação Infantil e esta pesquisa se desenvolveu em um processo formativo para professores voltado para o Ensino Médio. O estudo de Lopes forneceu subsídios referentes à construção do primeiro Design do curso de formação referente aos encontros e às atividades do grupo.

Giusti (2012) investigou as ações e contribuições que a formação continuada pode oferecer para a prática pedagógica de 18 professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre os conteúdos de Tratamento da Informação por meio do Programa Pró-Letramento em Matemática. Para tanto, fez uso da metodologia qualitativa, tendo o estudo de caso como abordagem. A coleta de dados se deu por meio de análises de questionários, entrevistas, gravações em áudio e documentos referentes aos trabalhos realizados pelos alunos e professores em sala de aula, analisando os conhecimentos e produções realizadas no conteúdo de Tratamento da Informação. Com relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo a autora cita Shulman (1986), como referência e sobre a formação continuada, traz as ideias de Nóvoa (1992 apud Giusti, 2012). Com relação à formação continuada de professores e o bloco de conteúdos de Matemática Tratamento da Informação, a autora toma como base os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). As categorias evidenciaram que situações práticas que investigavam conhecimentos didáticos e pedagógicos dos professores sobre o conteúdo de Tratamento da Informação foram “incertas e precárias” e que a formação continuada possibilitou aos professores atitudes mais seguras, bem como uma (re) construção e ressignificação das práticas pedagógicas sobre o conteúdo de Tratamento da Informação. Entre as questões evidenciadas no processo de formação, a autora apontou que houve indícios de que o conhecimento profissional dos professores resultaram da integração entre teoria e prática, ou seja, o conhecimento dos professores serviu como ponto de partida para

reflexões das práticas pedagógicas e que o desenvolvimento profissional e a mudança da prática dependeu, em última instância, da pessoa do professor e do seu desenvolvimento intencional.

A pesquisa de Giusti (2012) se assemelha com esta pesquisa, em função de ambas terem pesquisado sobre formação de professores, procurando levar os professores a se sentirem protagonistas de novas formas de ensinar, atualizando seus conhecimentos didáticos e pedagógicos, por meio de novas metodologias, propiciando aprendizagens e oportunidade de renovação de práticas pedagógicas.

Coutinho (1994), em sua pesquisa, buscou utilizar a visão frequentista como um agente facilitador dos conceitos básicos de Probabilidade, partindo das noções de experimentos aleatórios, espaço amostral, frequência de um evento simples e a busca de um modelo matemático que melhor pudesse expressar a realidade. O objetivo da autora foi estudar as concepções espontâneas dos alunos por meio de análises de sequências experimentais, para a introdução do acaso e de Probabilidades. Para tanto, a autora observou a estabilização da frequência relativa de eventos após um grande número de repetições da experiência aleatória. Destacamos que para a realização da pesquisa, a autora buscou colocar os alunos em situações onde por meio de experimentação, pudessem modelar a realidade e descrever a experiência aleatória e seu espaço amostral, observando a estabilização da frequência relativa da experiência repetida um grande número de vezes.

A autora pondera que a escolha pela Probabilidade frequentista foi no sentido de estender as noções de Probabilidade às situações não somente de casos igualmente prováveis, mas modelizar as situações complexas, como as questões de confiabilidade. Ou seja, apresenta o enfoque freqüencista da Probabilidade como estratégia de ensino, visto que grande parte dos estudantes já analisou, por meio da intuição em seu dia a dia, a frequência de um determinado evento para a tomada de decisões, buscando assim, levar a reflexão sobre o ensino e as condições de aprendizagens em contextos que alunos estão inseridos.

Coutinho (2004) chama a atenção ao enfoque que usualmente se dá à introdução ao conceito de Probabilidade, quase sempre atrelado ao método clássico de Probabilidade em detrimento do enfoque frequentista/experimental. Uma vez que, no viés clássico, o conceito de Probabilidade fica quase exclusivamente restrito à ideia da razão entre o número de casos possíveis e favoráveis. Com relação às concepções que dificultaram a aprendizagem desejada, a autora destaca que a

crença da equiprobabilidade devido à ausência de informações sobre o evento a ser observado e a crença de que a Probabilidade de um evento pode ser influenciada por informações obtidas pelo observador.

A pesquisa de Coutinho (2014) contribuiu para o primeiro Design do curso de formação continuada, quanto às referências sobre a Probabilidade frequentista. Os resultados dessa pesquisa foram considerados na escolha de abordagem de alguns dos conceitos de Probabilidade a serem discutidos na formação continuada.

Lemos (2011) investigou quais as compreensões e o desenvolvimento pedagógico e didático dos conhecimentos, concepções de conteúdos podem ser identificadas em professores que atuam do 1º ao 5º ano no Ensino Fundamental, sobre medidas de tendência central, a partir da investigação de seu desenvolvimento profissional em uma turma de formação continuada. Para tanto, a autora estruturou a pesquisa em dois momentos teóricos, nos quais analisou as revisões bibliográficas que auxiliassem os estudos sobre as medidas de tendência central, no sentido de identificar as dificuldades enfrentadas pelos alunos e professores, além de analisar o desenvolvimento dos professores no tocante aos conhecimentos e as concepções. Os pressupostos teóricos da formação continuada se basearam nas ideias de Imbernon (2006, apud Lemos, 2011) e Növoa (1995 apud Lemos, 2011), quanto aos conhecimentos necessários para a docência, o apoio veio das ideias de Shulman (1986) e Ponte (2003). O processo metodológico da pesquisa foi estruturado considerando cinco etapas, sendo elas; cinco encontros de uma sequência de ensino de Estatística, elaboração de uma tarefa, análise da tarefa elaborada, aplicação da tarefa em sala de aula e a realização do processo de análise e discussão da aplicação da tarefa em sala de aula, no qual se avaliou todo o processo de intervenção vivenciado. Os participantes da pesquisa foram seis professoras que lecionavam do 1º ao 5º ano no Ensino Fundamental na cidade de São Paulo, no período de desenvolvimento do projeto. Os resultados mostraram que as dificuldades iniciais identificadas nos protocolos construídos com diálogos e produções das professoras na compreensão dos conceitos de média, moda, mediana e de suas propriedades, foram sendo superadas ao longo do processo formativo. A análise da elaboração da tarefa mostrou que as professoras tiveram muitas dificuldades em articular os conteúdos de medidas de tendências centrais, uma vez que não identificaram as propriedades e o tipo de variável envolvida, percebeu-se também a falta de domínio e conhecimento do conteúdo.

A autora destacou que a aplicação da tarefa em sala de aula configurou-se como um momento positivo, haja vista que as professoras puderam observar não apenas o bom desempenho dos alunos, mas também sua própria prática frente ao conteúdo de Estatística. Segundo Lemos (2011), as professoras conseguiram ampliar seu desenvolvimento profissional não apenas em relação aos conteúdos de medidas de tendência central, mas também com relação às suas crenças, concepções, atitudes, conhecimento didático do conteúdo, além de proporcionar um ambiente, no qual os professores pudessem assumir suas dificuldades e assim valorizarem a importância de um processo contínuo de formação.

A pesquisa de Lemos tem relação com esta investigação por ambas ocorrerem em processos formativos para professores da Educação Básica, considerando Ponte, Imbernón e Shulman como referências para a construção do referencial teórico. Entretanto, a pesquisa de Lemos focou no desenvolvimento profissional e nos conhecimentos referentes às medidas de tendência central. O estudo de Lemos nos auxiliou no tocante a elaboração das etapas do curso de formação continuada.

Rezende (2013) realizou um estudo com um grupo de professores de Matemática da educação Básica em Minas Gerais, utilizando de duas dimensões, uma educativa e a outra de pesquisa. Enquanto pesquisa, ela buscou analisar o processo de mobilização de saberes relacionados à Probabilidade do grupo com relação educativa, por meio de um processo de formação continuada, seu propósito principal foi contribuir para o desenvolvimento profissional e, mais especificamente, para o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos professores de Matemática. Para tanto, ela se fundamentou na literatura acerca do desenvolvimento do pensamento probabilístico (BATANERO, 1995; LOPES, 1998 AZCÁRATE, 1996 apud Rezende, 2013) e no desenvolvimento profissional (FERREIRA, 2000 e LOPES, 1998 apud Rezende, 2013). O grupo se reuniu ao longo de oito meses realizando catorze encontros de duas horas e meia de duração cada. Os dados foram coletados por meio da gravação em áudio dos encontros, do diário de campo da pesquisadora e dos cadernos de campo das professoras participantes, além de fotos e registros produzidos pelas participantes do grupo ao longo dos encontros. A análise evidenciou uma intensa mobilização de saberes relacionados à Probabilidade, por parte das participantes.

A pesquisa de Rezende (2013) foi, assim como esta, em um processo formativo sobre Probabilidades; entretanto se difere da nossa, pois ela buscou analisar o processo de mobilização de saberes e nós buscamos identificar e analisar as contribuições de um curso de formação continuada voltado para o ensino da Probabilidade por meio de aulas investigativas, para a ampliação do conhecimento profissional docente.

Monteiro (2013) destacou mobilização relacionada à análise de erros dos alunos ao estudarem o tema. A autora afirmou que a participação dos professores no grupo de estudos proporcionou aos participantes a oportunidade de rever suas práticas, aprender mais sobre Probabilidade e seu ensino em um ambiente que privilegiou o respeito mútuo, a aprendizagem coletiva e a troca de experiências.

Monteiro (2013) realizou um amplo estudo relacionado aos documentos que norteiam o ensino de Probabilidade e destacou que, tanto a literatura quanto os documentos oficiais atuais, recomendam que os conceitos de Probabilidade sejam trabalhados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. A pesquisa de Monteiro (2013) apontou que os professores indicaram despreparado para realização dessas tarefas.

A pesquisa de Monteiro (2013) apresentou reflexões sobre os temas ensino de Probabilidade, pensamento probabilístico e concepções de Probabilidade e materiais referentes a eles que serviram de subsídios na criação das atividades para a formação.

Apresentaremos a seguir as pesquisas envolvendo formação docente e as aulas investigativas.

1.4.1.2 Pesquisas envolvendo formação docente e aulas investigativas

No tema de pesquisas envolvendo a formação e aulas investigativas, Muraca (2011) analisou uma experiência formativa que privilegiou uma abordagem exploratório-investigativa, particularmente quanto às reflexões feitas por professores relativas a conceitos geométricos e ao ensino de geometria na Educação Básica. O autor buscou construir uma experiência formativa baseada em atividades exploratório-investigativas, desenvolver essa experiência com um grupo de professores e analisar as problematizações, discussões e reflexões coletivas ao longo do processo e/ou as (re)conceituações ocorridas. A fundamentação teórica da

pesquisa foi construída a partir dos conceitos de reflexão de Schön (1983), do conhecimento profissional de Shulman (1986), das vertentes do conhecimento didático de Ponte e Oliveira (2006) e da articulação entre teoria e prática de Tardif (2011). Além das considerações sobre grupos, o autor abordou também o trabalho colaborativo envolvendo docentes. A coleta de dados foi feita por observação direta, gravação dos encontros e registros produzidos pelos sujeitos. Utilizou-se a análise interpretativa por triangulação de dados.

Muraca (2011) destacou que os resultados obtidos indicaram que a experiência formativa privilegiando uma abordagem exploratório-investigativa levou a problematizações relacionadas aos conteúdos de Geometria de Posição que possibilitaram reconceituações, especificamente quanto aos conceitos de retas paralelas, retas reversas, posições de reta e plano, figuras espaciais, tais como o conceito de quadrilátero. O autor ainda afirmou que a problematização do ensino possibilitou ao grupo a reflexão sobre o uso de tecnologia, particularmente softwares de Geometria dinâmica, no sentido de (re) pensar metodologias ou estratégias para a prática pedagógica.

A pesquisa de Muraca (2011), embora tenha abordado Geometria e não Probabilidade, se assemelhou a esta no tocante aos referenciais teóricos e ao processo formativo, desenvolvendo um contexto investigativo seguindo as referenciais de Shulman (1986) a respeito do conhecimento profissional do professor e de Ponte e Oliveira (2002) sobre as vertentes do conhecimento do professor.

Destacamos que as análises dos instrumentos de coleta de dados de Muraca (2011) auxiliaram sendo uma fonte inspiradora para a construção de um referencial metodológico para a coleta dos dados de campo desta pesquisa.

Carneiro (2013) analisou como um grupo de professores planeja e desenvolve práticas investigativas para serem trabalhadas nas aulas de Matemática, utilizando como recurso um software de Geometria Dinâmica. A autora investigou o papel das atividades desenvolvidas pelos docentes durante o processo de ensino e aprendizagem. Os professores eram da rede pública de ensino de sete municípios no interior do Estado da Bahia que participaram de um curso de formação cuja proposta era a elaboração de estratégias pedagógicas para o ensino de Matemática. A questão norteadora foi: “Quais contribuições uma proposta de ensino investigativo, auxiliada pelo ambiente informatizado, pode oferecer para a compreensão dos conteúdos nas aulas de Matemática?”. Para alcançar os objetivos do estudo, a

autora buscou aportes teóricos sobre ensino investigativo em Ponte, Brocado e Oliveira (2009), para a formação de professores em Fiorentini e Lorenzato (2006) e para a reflexão sobre a Informática e educação matemática buscou fundamentar-se em Borba (2007). A autora optou pela análise qualitativa das práticas investigativas desenvolvidas no ambiente informatizado e a pesquisa se desenvolveu baseada no recorte do material produzido pelos docentes, sendo que os dados da investigação foram coletados por meio de observação em campo, questionários e gravações de áudio. A pesquisadora apontou que as atividades lhe proporcionaram entender como a prática investigativa, associada a uma ferramenta tecnológica, contribuíram para um aprendizado, proporcionando um ensino com maior interação e exploração dos conteúdos. Destacou ainda que todo o trabalho desenvolvido com os professores ajudou a perceber que a investigação no ensino de Matemática pode ser uma grande aliada dos processos de ensino e de aprendizagem, já que o artefato tecnológico auxilia a visualização e a exploração, viabilizando aos professores envolvidos na formação testarem suas conjecturas e realizarem descobertas.

Na pesquisa, Carneiro (2013) analisou as atividades investigativas com o uso do software livre *Geogebra* e suas contribuições de uma proposta para o ensino de matemática. Buscamos elaborar atividades investigativas durante o curso de formação, utilizando a planilha eletrônica Excel e o software Calc. Outra semelhança entre as pesquisas foram os dados serem coletados por meio de observação em campo, questionários e gravações de áudio.

Silva e Paulo (2011), fundamentados em Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), apresentam um relato da experiência vivida no curso de formação de professores de Matemática. Os autores procuraram ressaltar a importância da Investigação na aula de Matemática, levando em consideração uma tarefa realizada com os alunos da Licenciatura em Matemática na disciplina de Prática de Ensino. Eles buscaram analisar e descrever as percepções de uma dupla de alunos do último ano da licenciatura em Matemática ao esboçarem um gráfico de uma função, recorrendo o conhecimento adquirido em seu curso de formação e como esta atividade poderia ser discutida com uma turma de Ensino Médio. Os autores refletiram sobre o modo como alguns momentos do trabalho com aulas investigativas podem ser percebidos pelos professores e o que percepção revela. Eles destacaram que na formação ao fazer-lhes pensar sobre como ensinar tal tarefa, levou-os a refletir sobre a prática docente e as alternativas, inclusive de linguagem, para justificar os passos dados.

Silva e Paulo (2011) afirmaram ainda que, nas descrições, os licenciados revelaram sua atenção no modo como eles pretendem trabalhar o conteúdo matemático com os alunos do Ensino Médio, discutiram as possibilidades, mostrando compreensão da tarefa investigativa, entendendo-a como um processo que favorece ao aluno a construção do conhecimento de uma forma não sistemática, tornando-o livre. Em adição, refletiram sobre recursos tecnológicos, softwares e calculadoras, como outros modos de ver ou de conjecturar. Isso nos revelou que houve uma preocupação para com os alunos do Ensino Médio pudessem realizar uma investigação matemática, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006).

A pesquisa de Silva e Paulo (2011) discutiu as atividades investigativas no ensino de funções já na formação inicial dos licenciados em Matemática. O paralelo entre este estudo e o que realizamos foi que em ambos foram utilizadas atividades investigativas. Entretanto, buscamos discutir e analisar as contribuições para o conhecimento profissional docente pela participação, em um curso de formação continuada voltada para estudos sobre ensino de Probabilidade.

Pinheiro (2008) propôs apresentar uma sequência didática para contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem da Trigonometria no Ensino Médio por meio de atividades de caráter investigativo. Como resultado, apontou que a construção de conceitos por parte dos estudantes permitiu compreender e ampliação da trigonometria e desenvolvimento cognitivo dos alunos. Ela enfatizou que os professores necessitam repensar as práticas de ensino saindo da postura de representante do saber para assumir a postura de professor mediador e incentivador da aprendizagem.

Correia (2004), em sua tese de doutorado apresentado na Universidade de Lisboa na Faculdade de Ciências, discutiu o desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo do ensino básico nas dimensões reflexão, práticas e conhecimento didático, colaboração e autonomia, no contexto de um projeto de investigação colaborativa que toma como ponto de partida as práticas comunicativas. Para tanto, o autor organizou o enquadramento teórico em quatro áreas fundamentais: conhecimento e reflexão, autonomia e colaboração, desenvolvimento profissional e formação, e comunicação matemática. O autor considerou a ideia do desenvolvimento profissional de professores como um processo de natureza dinâmica, ao longo da vida, em que intervém uma multiplicidade de elementos. Além disso, avaliou a investigação dos professores

sobre as suas práticas, em contextos colaborativos, como uma forte possibilidade deles se desenvolverem profissionalmente. A metodologia foi qualitativa de cunho interpretativo, apoiada em estudos de caso. Ao longo de quase dois anos, os três professores do estudo participaram de um projeto colaborativo, refletindo e investigando as suas práticas comunicativas de Matemática nas aulas do 1.º ciclo. De forma a compreender o seu desenvolvimento profissional neste contexto, recolheram-se dados por meio da observação de aulas e sessões do projeto, entrevistas individuais aos professores, diários, notas de campo e documentos escritos. A análise de dados acompanhou a recolha, permitindo durante o decorrer do projeto a identificação de tensões, problemas e questões que se mostraram fundamentais ao progresso do estudo. Os resultados evidenciaram que os professores, no contexto do projeto de investigação de natureza colaborativa, desenvolveram-se profissionalmente numa variedade de dimensões. O autor afirma que o desenvolvimento assentou em três dimensões fundamentais: práticas comunicativas, conhecimento didático e reflexão. O progresso nestas três dimensões ocorreu de forma dinâmica e interativa, tendo impacto favorável no desenvolvimento das suas capacidades de colaboração e autonomia. Este processo foi significativamente diferente do que poderia ter sido alcançado em ambientes formativos mais estruturados ou por meio da simples reflexão sobre a sua prática.

Correia (2004) destacou que os participantes desenvolveram de forma integrada o conhecimento didático da Matemática e as suas práticas comunicativas. Sendo que na evolução do conhecimento didático dos professores do 1.º ciclo, dois domínios assumiram particular importância: o conhecimento da Matemática e o conhecimento dos processos de aprendizagem. Neste, em particular, a comunicação matemática. O conhecimento da Matemática funcionou, em alguns casos, como elemento limitador e, em outros, como elemento possibilitador do desenvolvimento profissional dos professores. O conhecimento da Matemática surgiu como condição necessária, mas não suficiente para o desenvolvimento do conhecimento didático dos professores do 1.º ciclo, ganhando com a articulação com os outros domínios, como os processos de aprendizagem, o currículo e a instrução. O autor afirmou que no decurso do projeto, as práticas comunicativas dos professores evoluíram de forma significativa, passando estes a pautá-las, primordialmente, por padrões de interação baseados na discussão, associados à comunicação reflexiva a partir da resolução de tarefas de natureza problemática. Além disso, Correia (2004) afirmou

que ao longo do projeto, os professores desenvolveram a sua capacidade de reflexão, evoluindo para formas mais exigentes e sistemáticas, como a pesquisa e a investigação da sua prática, a partir dos problemas por eles identificados. Ele destacou que a realização de investigação por professores é facilitada pelo contexto colaborativo e, sobretudo, se estes a integrarem de forma orgânica na sua prática profissional, permitindo a compreensão e a resolução dos problemas profissionais. O pesquisador afirmou que a colaboração e a autonomia dos professores evoluíram de modo inter-relacionado, não se registrando conflito ou antagonismo entre ambas. Estas duas capacidades profissionais relacionam-se de forma dialética entre si e com o conhecimento didático, as práticas e a reflexão, promovendo um desenvolvimento integrado dos professores.

Figueiredo (2000) introduziu o conceito de Probabilidade condicional em cursos de Estatística na universidade, para licenciandos em Matemática e alunos da Ciência da Computação. Para tanto, elaborou, aplicou e analisou os resultados de uma sequência de ensino considerando os princípios de uma engenharia didática. A referida sequência foi composta de quatro atividades baseadas nas situações didáticas de Carmen Batanero (1999, apud Figueiredo, 2000), com o intuito de provocar reflexão dos alunos sobre tópicos de Probabilidade condicional, teorema total e de Bayes.

Para discutir os conceitos de Probabilidade, a autora buscou respaldo nos diferentes tipos de registros de representação: linguagem natural, simbólica, diagrama de árvore e tabela de contingência, tomando como base a teoria de registro de representação de Raymond Duval (1999, apud Figueiredo, 2000). A autora constatou que a maioria dos alunos diante de questões que envolvem a Probabilidade condicional, não apresentaram dificuldades em interpretar a intersecção dos eventos e também diferenciavam $P\left(\frac{A}{B}\right)$ de $P\left(\frac{B}{A}\right)$ desde que estes se apresentassem em linguagem natural. No entanto, quando as questões se apresentavam na linguagem simbólica, muitos alunos mostraram dificuldades em resolvê-las. A autora concluiu pelos resultados da pesquisa que a sequência didática auxiliou os alunos a minimizar as dificuldades apontadas. Constatou também que a maioria dos alunos confundiu a notação $P(A/B)$ com $P(B/A)$, bem como a notação $P(A \cap B)$ com $P(A/B)$. Outra dificuldade revelada na pesquisa refere-se à Probabilidade apresentada como registro de porcentagem no qual o aluno tem mais facilidade do

que no registro de fração, embora operassem melhor em fração do que em porcentagem.

Embora Figueiredo (2000) tenha trabalhado com a Teoria dos registros de representação semiótica, fundamentou sua pesquisa na obra “Azar e Probabilidade” de Batanero, Godino e Canizares (1997, apud Figueiredo 2000), sobre a Probabilidade e Estatística. Destacamos que esses autores, refletem sobre a importância da Probabilidade, uma vez que esta proporciona a compreensão dos modelos estatísticos e informações indispensáveis nos campos científico, profissional e social.

A pesquisa de Figueiredo (2000) feita em um curso de formação, discutiu o caráter imprevisível do azar, Probabilidade de sucessos simples, Probabilidade geocêntrica, Probabilidade condicional, combinatória e Teorema de Bayes. Em nossa pesquisa, buscamos refletir sobre aleatoriedade, eventos equiprováveis, Probabilidade condicional, combinatória, Probabilidade frequentista e também o Teorema de Bayes e resolver problemas de Probabilidades por meio de diagrama de árvore e tabela de contingência, mas com a abordagem investigativa.

Bertine (2009) optou por utilizar tarefas investigativas em sua pesquisa por entender que elas permitem superar o ensino de matemática baseado apenas na reprodução de procedimentos, ainda esclarece que a investigação proporciona uma mudança e dinâmica na sala de aula envolvendo os estudantes de maneira ativa em sua aprendizagem incentivando a criatividade e reflexão. O objetivo da autora foi identificar os pontos negativos e positivos de se trabalhar com aulas investigativas e como as ações dos professores influenciam no ensino e na aprendizagem da matemática e ainda as mudanças que ocorrem nas práticas pedagógicas com o uso de tarefas investigativas dentro da sala de aulas. Bertine (2009) concluiu que existem potencialidades e limitações no uso de tarefas investigativas, as potencialidades indicadas por ela são: autonomia na busca de resultados, interação e argumentação com os demais alunos em sala de aula, descoberta de várias resoluções para o mesmo problema, habilidade de registro de ideias por parte do estudante. As limitações da atividade investigativa foram: dificuldade inicial para romper a barreira tradicional de ensino, interação imediata de alunos com dificuldade de interação ou timidez com os demais alunos da sala de aula, tempo de resolução das atividades-que em alguns momentos foram além do previsto-falta de hábito na resolução coletiva de problemas matemáticos.

Ferreira (2012), ao investigar o ensino e aprendizagem de alunos do 7º do Ensino Fundamental, se propôs a identificar os aspectos constitutivos da produção de significados matemáticos nas aulas investigativas e ainda avaliar a adequação didática no uso de metodologias e atividades investigativas. Como resultados, Ferreira identificou a necessidade dos professores de questionar e problematizar as ideias dos discentes para que os mesmos pudessem superar as dificuldades e progredissem nas investigações, ainda apontou que atividades investigativas estão condicionadas à afetividade com o tema da aula, motivação, material utilizado na investigação, forma de interação entre professor e alunos e tarefa proposta.

Ribeiro (2012) concluiu quanto à utilização de atividade investigativa que é necessário criar um ambiente de aprendizagem que envolva a investigação, atraindo a atenção do aluno para a abordagem de resolução de problemas que vai além da simples memorização e reprodução de conteúdo, mas que possibilita ao aluno construir uma visão diferente da realidade a partir da compreensão dos conceitos estudados. Essa conclusão foi possível por meio da elaboração de uma sequência didática aplicada aos alunos do Ensino Médio, em que um ensino contextualizado e aliado com a realidade possibilitasse a melhoria no ensino da Matemática. A sequência proposta por Ribeiro (2012) se iniciou na Compreensão do problema proposto, depois no estabelecimento de um plano de relação entre o conteúdo exposto em sala e problema proposto; seguido da execução do plano, que envolve a resolução do problema. Por último, o examine a solução obtida e se há possibilidade de resolução por outro método, e se é possível utilizar o método e o resultado em um problema posterior.

Com o objetivo de verificar quais as contribuições que a metodologia investigativa pode proporcionar aos alunos do Ensino Médio no ensino de trigonometria, Corradi (2013) utilizou atividades investigativas no ensino de funções trigonométricas. A autora destacou que atividades de cunho investigativo são promissoras para melhorar a compreensão matemática dos estudantes frente aos questionamentos. Além disso, a pesquisadora concluiu que metodologias investigativas contribuem para o desenvolvimento de uma boa relação entre alunos e a Matemática e ainda promove ações pelas quais se podem perceber como o conhecimento e métodos são desenvolvidos.

Vieira (2013), em sua tese, apontou que o uso das tecnologias digitais na atualidade pode desenvolver aprendizagem da geometria no Ensino Fundamental.

Na pesquisa a autora concluiu que ferramentas tecnológicas contribuem no desenvolvimento investigativo dos alunos em conteúdos matemáticos. Essa conclusão surgiu após analisar um grupo de educadores que utilizavam tecnologias digitais na sala de aula no ensino da geometria. Vieira (2013) concluiu que o uso de tecnologias beneficiou não apenas alunos, mas também os educadores, visto que possibilitou a construção e reconstrução de conhecimentos, reflexão sobre as práticas educacionais proporcionando a construção de aulas com abordagem investigativa.

Lima (2013) defendeu em sua pesquisa que aulas investigativas podem renovar o ensino da Matemática, pois propiciam ao aluno ser instigado a pesquisar, questionar e desenvolver o raciocínio matemático e, ainda, despertar um olhar diferenciado sobre a matemática demonstrando que a disciplina não é apenas feita de teorias e fórmulas decorativas. Lima (2013) constatou isso após propor aos alunos de três turmas do terceiro ano do Ensino Médio “Jogo dos Discos”, nos quais os alunos eram desafiados a resolver o problema em grupos com ajuda mínima do professor, usando como principal ferramenta a investigação e a experimentação.

Neves (2015) propôs a identificação e análise de fatores que podem desencadear e limitar a prática reflexiva de um professor de matemática que se propõe utilizar tecnologias em sua prática pedagógica. Diante disso, constatou que os processos de formação tanto inicial quanto continuada requerem uma nova maneira de promover a “capacitação” dos profissionais da educação, utilizando-se de ferramentas da sociedade atual que aproximem a escola da sociedade e ainda impulsionar o ensino exploratório investigativo de maneira que os alunos sejam atraídos para o ensino. Alerta, contudo, que para que isso ocorra ainda é preciso uma preparação cuidadosa e articulada das propostas de ensino para que as ferramentas de ensino sejam utilizadas com finalidades de promover o ensino e a aprendizagem de maneira mais significativa.

Trindade (2008) esclarece que o uso da abordagem investigativa pode melhorar os processos de ensino e de aprendizagem por permitir o desenvolvimento do pensamento matemático. Aponta ainda a necessidade do direcionamento do professor para que a investigação não se torne uma atividade qualquer, mas que contribua de maneira significativa para a construção de hipóteses e conhecimentos sobre o que o professor propõe. Em sua pesquisa a autora objetivou compreender e explicar as investigações matemáticas e atividades investigativas, apontar as

diferenças que existem entre elas e a diferença de ambas do conceito de resolução de problemas proposto no ensino da Matemática na Educação Básica.

As pesquisas acima citadas têm relação com esta investigação por ocorrerem em processos formativos para professores da Educação Básica, ou apresentarem foco no ensino por investigação ou no desenvolvimento profissional de professores. Os estudos se apresentam com a intenção de analisar o desenvolvimento profissional docente ou a ampliação do domínio dos conhecimentos conceituais didáticos da Matemática de modo avaliar suas próprias práticas, ou no sentido de valorizar os educadores em cursos de formação provocando uma reflexão sistemática sobre as questões em curso, se apresentaram também estudos sobre a produção conjunta de uma sequência didática de modo a contribuir para impulsionar os processos de ensino e de aprendizagem e avaliar a potencialidade de uma aula ou tarefa investigativa.

1.4.1.3 Pesquisas envolvendo formação de professores e conhecimento profissional

Quanto às pesquisas envolvendo formação de professores e conhecimento profissional, Rodrigues (2011), em sua tese, objetivou indicar conhecimentos necessários para compor o ensino de Probabilidade na formação continuada em matemática para professores que são pedagogos. Para tanto, a autora construiu um quadro de referências com base em literatura sobre a teoria das Probabilidades como componente curricular e em literatura que aborda a questão da formação matemática inicial de professores polivalentes. A autora discutiu em sua revisão de literatura estudos relativos a noções de Probabilidade, os quais têm sido propostos desde os anos iniciais de escolarização em vários países e que essa proposição segue uma tendência internacional no âmbito da educação matemática e é justificada pela demanda social. No sentido de contribuir para uma base de conhecimentos acerca do que deve ser considerado em relação à Probabilidade na formação matemática inicial de professores polivalentes, Rodrigues (2011) analisou estudos que tratam da teoria das Probabilidades como componente curricular e que abordassem a questão da formação matemática inicial de professores polivalentes. Uma vez que a autora afirma que o Curso de Pedagogia, tem sido apontado como uma formação “fraca”, que não prepara adequadamente o futuro professor para o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização e que não tem levado em

consideração as proposições e reformas curriculares para o ensino de Matemática que ocorreram nos últimos anos. Segundo a autora, o exame da literatura apontou a existência de diferentes interpretações do conceito de Probabilidade na ciência matemática e que estas estão presentes também na Matemática escolar, tais como: a interpretação clássica, a frequentista, a subjetiva e a axiomática. Rodrigues (2011) ressaltou que as interpretações de Probabilidade precisam ser conhecidas e compreendidas pelos professores polivalentes e que precisam ser abordadas na formação inicial desses professores como um dos conhecimentos necessários a eles para que lidem com a Probabilidade de forma mais ampliada. A pesquisadora destacou também que a melhor forma de os professores que atuarão na escolarização nos anos iniciais de abordagem para o ensino não é por meio de fórmulas, mas por meio de investigação.

Rodrigues (2011) aponta que a literatura consultada acerca da teoria das Probabilidades como componente curricular forneceu um cenário que possibilita indicar conhecimentos necessários a compor uma proposta para o ensino de Probabilidade na formação matemática inicial do professor polivalente para que ele venha a ensinar esse conteúdo nos anos iniciais de escolarização, qual seja: o conhecimento de justificativas para a inclusão desse conteúdo nas propostas para o ensino de Matemática desde os anos iniciais; o conhecimento de objetivos que se pretende alcançar com estudos relativos à Probabilidade nessa etapa de escolaridade; o conhecimento da interpretação clássica, da frequentista e da subjetiva de Probabilidade; o conhecimento das ferramentas matemáticas que são usadas na interpretação clássica e na frequentista de Probabilidade. Com relação à formação matemática inicial de professores polivalentes, a autora apontou que, o exame das literaturas indica que a formação matemática desses professores é problemática e que várias variáveis precisam ser consideradas pelos formadores e instituições formadoras. Além de questões referentes a materiais didáticos, incluídos os livros e textos para formação matemática de futuros professores, ficou evidenciada como um dos problemas que precisa ser considerado e enfrentado pelos formadores e instituições formadoras, uma vez que existem poucos materiais didáticos voltados para essa formação e os que têm sido propostos em ementas e programas de disciplinas de matemática são mais voltados a pesquisadores da educação matemática e precisam ser adaptados para alunos de Pedagogia.

Rodrigues (2011) considerou, com relação aos conhecimentos que devem ser de domínio do professor, as categorias estabelecidas por Shulman (1986) : conhecimento do conteúdo específico, do pedagógico e do curricular e, no que se refere à formação de professores reflexivos em um ambiente de estudo de inovações curriculares, foram utilizadas as ideias defendidas por Zeichner (1993 apud Rodrigues, 2011).

Curi (2004) por meio de uma pesquisa com professores polivalentes, fundamentou sua pesquisa em Shulman (1986) sobre a especificidade própria de cada área de conhecimento, que justificasse o estudo do conhecimento do professor, tendo em vista a disciplina que ele ensina e em Gómes-Cacón (2002, apud Curi, 2004) no que se refere às investigações sobre a influência de crenças e atitudes provenientes da formação escolar nos conhecimentos profissionais do professor. Utilizou pesquisa bibliográfica, documental e, na pesquisa de campo, entrevistas semiestruturadas, análise de memórias e de portfólio elaborados pelas alunas-professoras. Trouxe reflexões sobre o paradigma perdido de Shulman (1986) e forneceu subsídios para que a construção de projetos curriculares de formação de professores polivalente fosse contemplada de forma articulada, bem como o conhecimento matemático para ensiná-lo. O objetivo da pesquisa foi investigar conhecimentos para ensinar Matemática, discutindo sobre os que devem ser constituídos por professores de atuação polivalente, bem como as crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos. A autora buscou contribuições para cursos de formação inicial e continuada desses professores e a ampliação das investigações dessa formação, no âmbito da pesquisa em educação matemática. Analisou os cursos de formação de professores polivalentes no Brasil ao longo de sua história, no que se refere á preparação para ensinar Matemática e de que modo as propostas mais recentes desses cursos e como estão sendo contemplados os conhecimentos dos conteúdos dessa disciplina, bem como, os seus conhecimentos didáticos. A partir da análise do curso de formação de doze professores polivalentes e de uma pesquisa de campo, os participantes do curso, identificaram-se impactos da formação, na análise das crenças e atitudes relativas à matemática e seu ensino.

Embora Curi tenha estudado a formação de professores polivalentes, suas discussões sobre o conhecimento do professor e as reflexões sobre os conhecimentos matemáticos na concepção de Shulman, nos subsidiaram quanto à definição da fundamentação teórica desta pesquisa.

Poloni (2010) investigou em um projeto de formação continuada de professores do Ensino Fundamental I, a reconstrução de conceitos geométricos sobre o tema Figuras Planas, utilizando recursos tecnológicos, mais precisamente o software Cabri-Géomètre e as reflexões provenientes dessa reconstrução sobre a prática das professoras participantes. Para tanto, utilizou a fundamentação teórica a partir dos conceitos de reflexão de Schön (1995, apud Poloni, 2010), do conhecimento profissional de Shulman, das vertentes do conhecimento didático de Ponte e Oliveira (2002) e da articulação entre teoria e prática de Tardif (2010 apud Poloni, 2002). A autora destaca que os professores que atuam nesse segmento de ensino, para cuidar da educação de seus alunos, precisam ter conhecimento dos aspectos físicos, cognitivos, emocionais e afetivos dessas crianças, por entender que seja essencial que o professor esteja atento as diversas dimensões que essas crianças estão inseridas, bem como no seu aspecto físico, cognitivo-linguístico, emocional, social e afetivo. A pesquisadora destaca ainda que esses professores atuam num período característico da vida das crianças, sendo importante que tenham ciência do compromisso que assumem com seus alunos e do momento sócio-histórico da realidade complexa, contraditória, além das constantes mudanças em que estão sujeitos. Contudo, devemos observar que somente a formação inicial desses professores não é suficiente para observarem sua própria prática pedagógica como objeto de reflexão, sendo necessário também, a participação em cursos de formação continuada.

Poloni (2010) baseou-se na pesquisa de caráter qualitativo, com a metodologia de *Design-Based Research*. A coleta de dados foi feita por observação direta, gravação dos encontros semanais e das sessões com os alunos, aplicação de questionários e entrevistas semiestruturadas, além disso, materiais e registros produzidos pelos sujeitos foram recolhidos. Utilizou-se a análise interpretativa por triangulação de dados e os resultados obtidos indicaram que os fatores do processo formativo que mais favorecem a reconstrução de conceitos geométricos relacionam-se ao desenho da formação; aos sujeitos de pesquisa; ao conteúdo matemático; ao formador; à interação formador/professor e ao contexto de atuação dos sujeitos. Os resultados indicaram que a formação continuada sobre o tema figuras planas, subsidiada pelo uso de Geometria Dinâmica possibilitou a construção de alguns conceitos geométricos e especialmente a compreensão das figuras a partir de suas propriedades. A pesquisa apontou que os estudos teóricos feitos pelos participantes

e a articulação com a prática docente foram fundamentais para discussões que desencadearam reflexões a respeito das práticas, revelando assim, que esse tipo de formação continuada pode ser uma alternativa para contemplar necessidades dos professores dos anos iniciais para o ensino de figuras planas.

Ressaltamos que a pesquisa de Poloni (2010) foi relevante para a elaboração do percurso metodológico desta pesquisa, bem como para a construção do referencial metodológico, uma vez que também adotamos a metodologia de *Design-Based Research* e quanto aos aspectos teóricos nesta pesquisa os fundamentos referentes ao conhecimento profissional docente foram construídos a partir dos estudos de Shulman, da mesma forma que na pesquisa de Poloni (2010).

Serrazina (2014), em uma pesquisa realizada pela Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, discute o conhecimento matemático para ensinar, questão do conhecimento matemático para ensinar interligado com os outros conhecimentos (didático, curricular, dos recursos, dos alunos e do contexto). Em particular, aborda a formação continuada de professores do ensino elementar e, em especial, o papel da planificação da atividade letiva e da reflexão sobre as práticas no desenvolvimento do conhecimento profissional do professor. A autora começou por discutir o que se espera do docente como professor de Matemática, ilustrando com exemplos concretos e procurando evidenciar que não basta ao professor saber a Matemática que ensina, mas tem também é preciso saber como a ensinar e como avaliar as aprendizagens que daí se resultam. A autora refletiu também sobre o papel da planificação da atividade letiva e da reflexão sobre a prática para o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor. Relativamente à planificação foi discutido o constructo da trajetória de aprendizagem e seus componentes, em especial as sequências de ensino e o papel do professor no seu desenvolvimento. Serrazina (2014) afirmou que a planificação realizada previamente é fundamental para o desenvolvimento do conhecimento profissional do professor. A pesquisadora apresentou a experiência de um caso, o da professora Maria, uma professora com uma larga experiência, formada do Programa de Formação Contínua em Matemática, analisando, a partir do seu portfólio escrito, a planificação e correspondente reflexão sobre duas aulas em um 2.º ano de escolaridade. Serrazina (2014) destacou que, para o professor desempenhar os papéis explicitados, antes é necessário que a sua formação seja pensada tendo em conta que interessa o que se ensina, mas também o como se ensina, ou dito de

outro modo, na formação de professores é importante o que estão a aprender, mas também como o estão a aprender. A autora ainda afirma que, os professores têm, eles próprios, de viver experiências matemáticas ricas, do tipo das que se espera que proporcionem aos seus alunos e que para eles constituam um desafio intelectual. Assim, a formação deve envolver um processo de reflexão questionando as crenças e concepções dos professores envolvidos, de modo a aprofundar o seu conhecimento matemático, didático e curricular. A autora concluiu afirmado que os professores dos primeiros anos precisam ter uma compreensão profunda da Matemática que ensinam que não se limite a um conhecimento tácito do tipo “saber fazer”, mas que se traduza num conhecimento explícito, ou seja, o professor precisa de oportunidades para construir situações de aprendizagem, experimentá-las com os seus alunos na sala de aula e refletir sobre essas experiências.

Enfatizamos que a pesquisa de Serrazina (2014) discutiu formação dos professores de matemática que lecionarão no ensino Fundamental I e seus conhecimentos matemáticos para ensinar, desenvolvimento de uma sequência de ensino, conjunto de aspectos que se espera que o professor que ensina Matemática tenha em conta, além de exemplos e contraexemplos, para o professor refletir. Esses fatores da pesquisa de Serrazina se assemelham com a pesquisa desenvolvida por nós, uma vez que no curso de formação elaboramos e desenvolvemos atividades investigativas de Probabilidades, refletimos sobre conhecimentos profissionais.

Pietropaolo, Silva e Campos (2015), em pesquisa sobre conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental, apresentam um estudo de natureza qualitativa, desenvolvido no âmbito do programa Observatório da Educação em um curso de formação continuada envolvendo 23 professores de Matemática da rede pública de São Paulo, cuja finalidade foi investigar os conhecimentos necessários ao professor para ensinar Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental. Os autores dividiram a pesquisa em duas etapas. A primeira, (troque), denominada Diagnóstico, foi constituída pela aplicação de questionários e entrevistas, cujo objetivo foi identificar os conhecimentos dos professores sobre Probabilidade e suas concepções a respeito de seu ensino. A segunda fase (troque), nomeada pelos autores “Formação” foi realizada segundo princípios da metodologia *Design Experiments* de Cobb *et al.* (2003) e partiu do pressuposto que a aplicação de uma

sequência de atividades, explorando inicialmente de forma consistente a noção de aleatoriedade, seguida pela noção de espaço amostral e, depois, pela quantificação de Probabilidades, poderia favorecer a ampliação e/ou reconstrução do conhecimento dos professores para ensinar noções referentes a esse tema. Para análises das duas fases do estudo – Diagnóstico e Formação - optaram pelos estudos de Ball, Thames e Phelps (2008) para a análise das respostas dos professores aos questionários, além de categorias de Conhecimento do Conteúdo Especializado e do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino. Consideraram também a noção de imagem conceitual, definida por Tall e Vinner (1981). A imagem conceitual é a estrutura cognitiva que se desenvolve na mente de uma pessoa, mediante experiências ricas e estudos sobre determinado conceito matemático. Para o primeiro *Design* da formação baseou-se fundamentalmente na sequência de atividades para aprendizagem de noções concernentes à Probabilidade do Ensino Fundamental.

Pietropaolo, Silva e Campos (2015) destacam como resultados do processo formativo, as atividades e discussões desenvolvidas, percebendo ao mesmo tempo, em comentários formulados por alguns professores, certa descrença quanto à possibilidade de incluir uma proposta de trabalho que tenha em vista o desenvolvimento da Probabilidade em suas aulas. Entretanto, perceberam que alguns se mostraram mais propositivos em relação ao tema e o desenvolveram em suas aulas. Os autores destacam ainda que as discussões no interior de cada grupo e em conjunto foram substanciais para o avanço dos Conhecimentos e da imagem conceitual dos docentes em relação à Probabilidade e seu ensino. Ampliaram, sobretudo, sua base de conhecimentos para o ensino, segundo os domínios estabelecidos por Ball *et al.* (2008). Com relação ao curso de formação, os autores afirmaram que o caminho proposto para ampliar a base de conhecimentos do professor para ensinar Probabilidade, foi incentivar uma reflexão não apenas individual, mas cada professor considerando seus conhecimentos e sua própria prática. Para tanto, buscaram refletir por meio de questionamentos que permitissem considerar possíveis encaminhamentos para ajudar seus alunos a construir noções relativas à Probabilidade. Os autores perceberam que, mesmo tendo ampliado a base de conhecimentos para o ensino após curso de formação, quanto à viabilidade de aplicação em aula de tópicos discutidos no processo formativo, se mostraram desocupados mediante à incerteza de colocar em práticas outras inovações

propostas no currículo. Além de certa tensão, por considerarem Probabilidade como algo menor, diante da tarefa que têm em ensinar Álgebra e Geometria.

Azevedo (2012) buscou analisar os processos formativos de constituição e manutenção de um grupo, evidenciar o percurso de aprendizagens desencadeadas, identificar a produção, o reconhecimento e a ressignificação dos conhecimentos matemáticos e metodológicos que se revelaram nas narrativas orais e escritas. Para alcançar seu objetivo, a autora investigou quais são os conhecimentos matemáticos e metodológicos produzidos, reconhecidos e ressignificados por professoras da Educação Infantil, quando se reúnem em um grupo de estudos sobre a Educação Matemática na infância e quais são os indícios de desenvolvimento profissional manifestadas pelas participantes do grupo em processo de formação continuada.

Azevedo (2012) realizou uma pesquisa de cunho qualitativo, por meio da análise de conteúdo, acompanhou o processo de constituição e a manutenção de um grupo no qual se reuniram e conviveram – em momentos e em espaços de tempo nem sempre coincidentes –, durante cinco semestres, 39 professoras da Educação Infantil da rede municipal de São Carlos/SP. Os materiais empíricos foram construídos a partir de narrativas reflexivas (orais e escritas) produzidas pelas professoras, diário reflexivo da formadora pesquisadora e questionários respondidos pelas professoras. A autora identificou a partir dos dados aspectos relacionados as concepções de Educação Infantil e Educação Matemática das professoras do grupo, abordagens metodológicas redimensionadas pelas professoras no processo de formação no grupo, conhecimentos matemáticos possíveis de trabalhar a partir dos jogos, histórias infantis e situações problemas, aspectos da aprendizagem colaborativa que ocorreu no grupo e o blog do grupo como um meio de socialização do conhecimento produzido. A autora destacou que ajuda mútua entre as envolvidas e a relação de confiança estabelecida no grupo não foi suficiente para que ocorressem mais espontaneamente a negociação de significados e a troca de ideias matemáticas.

Ferreira (2014) para identificar elementos constituintes do conhecimento matemático específico do professor, no que se refere particularmente ao trabalho com a álgebra na Educação Básica, utilizou a base teórica de Shulman (1986, 1987) e de Ball *et al.* (2008). No texto, a pesquisadora discutiu sobre os conhecimentos pedagógicos e conhecimentos disciplinares que constituiria uma forma específica de o professor conhecer sua disciplina. Para alcançar os objetivos de pesquisa, a

autora observou as aulas de dois professores de uma escola pública da rede federal de ensino em Belo Horizonte, durante um semestre, período em que a Álgebra foi o principal assunto abordado. A partir da observação das aulas, procurou identificar elementos de saber, específicos do professor de Matemática, que foram efetivamente mobilizados ou que seriam potencialmente mobilizáveis à prática concreta de sala de aula de Álgebra. Ferreira (2014) constatou que diversas questões relevantes apontadas em pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Álgebra se fizeram notar durante o processo de observação e coleta de dados, tendo ficado claras a necessidade e a conveniência de analisá-las do ponto de vista do conhecimento matemático específico do professor. A autora destacou que duas questões se sobressaíram, adquirindo posição de destaque em sua análise: a utilização da argumentação e da demonstração para justificar a extensão de resultados obtidos nos processos de generalização na Álgebra e a dualidade processo-objeto presente na construção de noções abstratas, em particular, daquelas associadas às expressões algébricas. A pesquisadora atentou que o estudo realizado identificou saberes fundamentais que compõem o conhecimento matemático específico do professor da Educação Básica e que não são mencionados nas recomendações para a formação de professores de Matemática no Brasil.

A pesquisa de Ferreira (2014) discutiu o conhecimento matemático específico para o ensino e a formação de professores, o que tem similaridade com esta pesquisa, embora a autora tenha refletido sobre a álgebra e nós sobre o ensino de Probabilidade. As discussões de Ferreira sobre de conhecimento do conteúdo e dos estudantes na concepção de Ball *et al.* (2008), conhecimento pedagógico do conteúdo, proposto por Shulman (1986) e a proposta de Cury (2004) sobre uma conceituação para conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros que envolveria conhecer o conteúdo no qual o erro foi cometido, as razões pelas quais tais conteúdos geram erros, as formas de trabalhar com os erros para confrontar as concepções errôneas dos alunos e as estratégias de ensino que podem auxiliar os alunos a superar as dificuldades de aprendizagem, nos auxiliaram a compreender melhor a teoria sobre conhecimentos necessários para o ensino.

Rangel (2015) buscou estabelecer relações em um estudo colaborador, sobre a Matemática elementar e saber pedagógico de conteúdo. A pesquisa teve como foco o desenvolvimento profissional do professor de Matemática, sob as premissas

de que o conhecimento de Matemática de um professor tem sua especificidade e de que essa especificidade tem implicações diretas para a formação e para a prática do professor. O estudo se desenvolveu em uma perspectiva natural ao relacionar o conhecimento pedagógico de conteúdo proposto por Shulman (1986, 1987) e a ideia de Matemática elementar, no sentido de Klein (2010, apud Rangel, 2015), visando contribuir para a reflexão acerca da formação do professor de Matemática do ensino básico e do desenvolvimento do conhecimento de Matemática necessário para o ensino.

O autor destacou que algumas afirmações de Klein sobre o conhecimento do professor. Na concepção de Klein (2010, apud Rangel, 2015), o docente deve ter muito mais conhecimento do que os que expõe aos seus alunos, sobre o conhecimento de conteúdo necessário para o ensino da escola básica. O autor indica que o professor não deve somente ter conhecimento sobre os conceitos e as teorias que ensina, mas também saber relacionar e articular diferentes conceitos e teorias e compreender a natureza científica e a evolução histórica desses conceitos. Se os futuros professores não forem suficientemente orientados, se não estiverem bem informados acerca dos elementos intuitivos da Matemática bem como das relações vitais entre áreas próximas e se, acima de tudo, não conhecerem o desenvolvimento histórico dos conceitos e teorias matemáticas, seus passos serão inseguros.

Uma vez feita a análise de pesquisas envolvendo: formação continuada de professores e o ensino de Probabilidade, formação docente e aulas investigativas e formação de professores e conhecimento profissional, entendemos que revisão de literatura subsidiou as escolhas para o curso de formação continuada; além disso, referendou os estudos sobre conhecimento profissional, formação continuada, ensino de Probabilidade e aulas investigativas, bem como sobre a postura do pesquisador frente ao papel de formador no curso de formação continuada a ser conduzido.

Encerrando esta revisão da literatura cumpre salientar que constatamos a inexistência de pesquisas relativas à formação continuada de professores com foco em ensino investigativo de Probabilidades no Ensino Médio, o que em nosso entender, por si só, já justificaria o empreendimento desta pesquisa.

1.5 METODOLOGIA DA PESQUISA

A investigação foi qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1996), particularmente do tipo *Design-Based Research* na concepção de Brown (1992) e Collins (1992) caracterizado por Cobb, P.; Confrey,J.; Disessa, A.; Lehrer,R. e Schauble, L. (2003) e por Mckenney e Reeves (2012).

Bogdan e Biklen (1996) argumentam que a abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do objeto de estudo.

A expressão investigação qualitativa é um termo genérico que agrupa diversas estratégias de pesquisa, as quais partilham determinadas características, tais como, se preocuparem mais com o processo do que com o resultado. Os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente às pessoas, locais e conversas (BOGDAN; BIKLEN, 1996).

Os autores indicam cinco características que auxiliam a identificar uma pesquisa qualitativa: (1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente na recolha desses mesmos dados; (2) os dados que o investigador recolhe são essencialmente de caráter descritivo; (3) os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados ou produtos; (4) a análise dos dados é feita de forma indutiva; (5) o significado é de suma importância na abordagem qualitativa. (BOGDAN; BIKLEN, 1996).

A presente pesquisa contempla essas cinco características apontadas pelos autores, pois a fonte dos dados foi direta, com a coleta feita no local em que o fenômeno ocorreu e desta maneira o pesquisador pode avaliar o fato, para analisá-lo posteriormente. Os dados foram transcritos durante a análise, de forma descritiva, como sugere a segunda característica. A terceira característica está bem evidenciada no objetivo geral da investigação, uma vez que analisar as contribuições de um curso de formação continuada voltado para o ensino da Probabilidade por meio de aulas investigativas, indicou o interesse do pesquisador no processo e não somente nos resultados. A quarta característica igualmente está presente, pois delimitamos os objetivos específicos após recolha dos dados. A quinta característica está relacionada ao registro rigoroso dos fatos observados, como o contato com os

sujeitos de pesquisa durante e após a investigação continuam de forma efetiva, concluímos então que a quinta característica está contemplada.

O termo *Design-Based Research* foi introduzido pelos pesquisadores Ann Brown e Alan Collins para se referirem a um método de pesquisa em Educação “que se predispõe a resolver problemas complexos em contextos reais, em colaboração com os participantes e realizar investigação rigorosa e reflexiva para testar e aperfeiçoar ambientes de aprendizagem inovadores”. (BROWN; COLLINS 1992).

O *Design-Based Research* é uma metodologia de pesquisa que apresenta características que permitem ao pesquisador tecer reestruturações das experimentações durante todo o processo. Desta forma, entende-se que os experimentos são desenhados de modo a se adequarem ao grupo pesquisado, o que atendeu ao interesse desta pesquisa.

Cobb *et al* (2003), apresentam cinco características do *Design-Based Research* (DBR)

- Desenvolve teorias sobre o processo de aprendizagem e materiais que são utilizados para dar suporte a teoria que é avaliada à medida (em que apresentam melhorias na prática);
- Busca contribuir com novas possibilidades nas práticas educacionais, ou seja, tem natureza intervencionista;
- Inclui revisão contínua do *design* de pesquisa, é flexível e, por isso, contempla ciclos ou momentos de *redesign*;
- Modifica os papéis de pesquisador, professores e alunos os quais deixam de desempenhar papéis fixos no processo;
- Relaciona as teorias de um domínio específico com as atividades, ou seja, é pragmático.

A partir dos estudos de Cobb *et al* (2003) os pesquisadores Mckenney e Reeves (2012) detalharam a DBR em cinco características: Teoricamente orientada, Intervencionista, Colaborativa, Fundamentalmente responsiva e Iterativa.

A DBR é teoricamente orientada, pois é a base teórica que fundamenta a construção do design educacional proposto na investigação, desde o ponto de partida até a chegada, permitindo uma reestruturação a partir dos resultados. Ela é intervencionista, pois busca por meio de fundamentos teóricos intervir na prática

pedagógica, auxiliando na produção de materiais didáticos como suportes para melhorar as práticas pedagógicas, nas atitudes docente, nas políticas educacionais, bem como na relação da escola com a sociedade. Outra característica é ser colaborativa, uma vez que se conduz em colaboração e busca apresentar solução concreta para problemas de todos os envolvidos: investigador, comunidade e pessoas relacionadas à situação. Além de fundamentalmente responsiva: (troque) : o produto final é lapidado pela sabedoria dos participantes, conhecimentos teóricos e práticos, ajustes de intervenções, ou seja, o diálogo entre teoria, prática e interações. Finalmente, é iterativa, voltada para a construção de soluções práticas, sendo que cada desenvolvimento é o resultado de uma etapa, isto é, o início do próximo momento de aperfeiçoamento de estudo, análise, projeção, aplicação, resultados e melhorias, identificando como um caráter mais formativo.

Percebemos que essas características citadas por Mckenney e Reeves (2012), são muito próximas do que é descrito por Cobb et al (2003), contudo, apresenta mais detalhamento. Sendo assim, sumarizando, enfatizamos que a DBR é uma metodologia dinâmica, interativa, auto regulável, onde os ciclos permitem adaptações durante todo o processo, pois cada *feedback* produz efeitos que direcionam as próximas intervenções.

Entendemos que nesse aspecto, o *Design-Based Research* é a metodologia ideal para esta pesquisa, uma vez que ela é voltada à compreensão do pensamento matemático dos sujeitos e nas transformações que podem ocorrer durante o processo de formação.

No *Design-Based Research*, os registros não necessitam ser feitos de uma única forma, ao contrário, podem ser registros escritos, gravados, fotografados e filmados. Haja vista que, os registros de cada momento de ensino são utilizados para a elaboração dos próximos, além de serem utilizados na análise dos momentos de ensino já vivenciados. Realizando-se essa análise, é possível fazer um *redesign* dos próximos momentos de ensino.

Poloni (2010) afirma que, o *Design - Based Research* utiliza-se de resultados de ações anteriores para preparar o *redesign* que se deseja fazer, entretanto é no momento em que, de fato, ocorre a investigação que se verifica se esta última funciona naquele contexto. A vantagem dessa metodologia é que a cada fase do design tem-se a possibilidade de se fazer análises, reflexões e modificações para as próximas fases.

Segundo Messick (1992), a metodologia do *Design-Based Research*, por considerar o papel do contexto social, oferece vários benefícios tais como: os resultados da pesquisa têm maior potencial para influenciar a prática educativa; os produtos são tangíveis e os programas de pesquisa podem ser adotados em outros lugares, além do fato de que os resultados que emergem do *Design-Based Research* fornecem evidências de validade.

Para alcançarmos os objetivos da pesquisa, a investigação foi realizada em três etapas: uma de análise documental incluindo a revisão de literatura, uma de planejamento da pesquisa de campo e do primeiro design da formação continuada e, uma terceira e última fase, de desenvolvimento da formação e coleta de dados em campo. Desse modo, procuramos identificar e analisar as contribuições do curso de formação continuada – sobre ensino de Probabilidade por meio de aulas investigativas – para impulsionar a ampliação do conhecimento profissional docente dos professores participantes.

1.5.1 Procedimentos metodológicos

Na primeira etapa da pesquisa, a documental, foram analisados documentos curriculares nacionais como os PCN, PCNEM, PCN+, Orientações Curriculares Nacionais-OCM, Base Nacional Comum Curricular BNCC – versão 2, Currículo do Ensino Médio do Estado do Tocantins e também o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), relativo ao ano de 2013. Isso para conhecer as normatizações relativas ao currículo e o tratamento indicado para o ensino de Probabilidade. A partir da análise dos documentos se constituiu o capítulo 2.

Os resultados obtidos nessas análises nos subsidiaram para o primeiro *design* da formação continuada fornecendo elementos, tanto sobre o ensino de Probabilidade na Educação Básica e, em particular, no Estado de Tocantins, quanto às necessidades do processo formativo envolvido na pesquisa.

A segunda etapa foi relativa à composição do primeiro *design* do curso de formação continuada e da pesquisa em campo, envolvendo seu planejamento e a constituição dos instrumentos de coleta. Esta fase incluiu o estabelecimento dos cronogramas dos encontros, a melhor forma para desenvolvimento do curso, autorização para filmagens e demais gravações, além da escolha do nome a ser atribuído ao curso, definido como: Formação Continuada de Professores do Ensino Médio Para Aulas Investigativas no Ensino de Probabilidade.

Nesta etapa, recebemos a autorização da Diretoria Regional de Ensino de Porto Nacional – DRE, para a realização da pesquisa junto aos professores da rede estadual e, na DRE, ficou acordado a flexibilização dos horários dos professores participantes, para a participação no curso sobre o ensino de Probabilidade. Além disso, nos foi disponibilizado o contato dos professores da rede estadual para divulgação do curso e convite à participação. Para atender a maioria dos professores interessados, ficou estabelecido o desenvolvimento do curso às quintas-feiras no período da tarde, durante seis meses, com início em outubro de 2015 e término em março de 2016, totalizando 60h distribuídas em encontros presenciais e estudos a distância. Ficou estabelecido que o processo formativo ocorreria semanalmente nas dependências do Núcleo de Estudos Sobre Formação e Práticas do Professor de Matemática situado no Instituto Federal do Tocantins IFTO - campus Porto Nacional.

O planejamento do Curso envolveu o levantamento das necessidades de estrutura física e administrativa para os encontros, o preparo das atividades, a escolha dos materiais a serem utilizados, tais como artigos, recursos digitais (vídeos e softwares), material concreto e também, o estabelecimento de diretrizes para a condução e desenvolvimento dos encontros.

Planejamos para o primeiro encontro levantar o perfil e as expectativas dos professores participantes com relação ao curso. Além disso, elaboramos o questionário 1 (Apêndice B), para identificar conhecimentos do grupo sobre Probabilidade. Planejamos também apresentar textos sobre o tema do ensino por meio da pesquisa e da investigação em sala de aula. Na sequência discutimos o que é uma aula investigativa considerada como um tipo de metodologia para o ensino. Selecionamos atividades de cunho investigativo para discussão no curso, de modo que estas pudesse ser adaptadas pelos professores participantes para suas aulas.

No Quadro 2, apresentamos o Primeiro *Design* do Curso, resultado dessa etapa de planejamento.

Quadro 2 - Primeiro Design do Curso de Formação

Etapas de Formação	Primeiro Design do curso de formação
Etapa Inicial Duração: Três encontros	Apresentação do projeto Exposição sobre aulas investigativas Aplicação do questionário 1 Reflexão sobre as respostas do questionário 1 Aplicação e discussão do questionário 2 Levantamento dos tópicos de Probabilidade para discussão Estudo de diversas definições de Probabilidades
Segunda Etapa Duração: Oito encontros	Resolução de problemas de Probabilidades sem uso de fórmulas Atividade investigativa utilizando análise de erros de alunos em Probabilidade Probabilidade Geométrica e Clássica Elaboração de uma atividade investigativa envolvendo uma roleta Probabilidade Clássica e Frequencista ⁵ , Eventos Independentes Elaboração de uma atividade investigativa envolvendo jogo de dois dados e jogo de três dados Probabilidade Condicional, Teorema Bayes e Probabilidade Total Elaboração conjunta de uma atividade investigativa sobre o problema de Monty Hall
Etapa Final Duração: Quatro encontros	Probabilidade e Análise Combinatória. Elaboração conjunta no curso de uma atividade investigativa envolvendo jogo da loteria Elaboração conjunta de uma atividade investigativa para aplicação em sala de aula de modo a auxiliar a construção do conceito de Probabilidade frequentista. Elaboração conjunta de uma atividade investigativa envolvendo Probabilidade em um contexto da Biologia (genética)

Fonte: Elaboração própria.

Além do planejamento, esta etapa 2 da pesquisa incluiu a definição dos instrumentos de coleta de dados. Considerando a fundamentação metodológica da

⁵ Vale notar que os termos Probabilidade frequentista e Probabilidade frequencista são ambas utilizadas e têm o mesmo significado, embora apresentem diferenças na grafia.

presente pesquisa definimos várias formas para a coleta, tais como: questionários, diário de campo do pesquisador, recolha dos materiais produzidos pelos professores, gravações em áudio e vídeo dos encontros da formação.

Vale destacar que os registros dos encontros em áudio e vídeo integram e auxiliam a recordação do pesquisador quanto às anotações referentes à observação feita no campo da pesquisa. Powell, Francisco e Maher (2004) destacam que a gravação em áudio e vídeo é muito importante para visualizar as expressões dos sujeitos durante as atividades do processo de formação, principalmente nos trabalhos em que o pesquisador assume um duplo papel: o de professor e o de pesquisador que foi o caso da presente pesquisa.

Powell, Francisco e Maher (2004) afirmam ainda que a gravação em vídeo como instrumento de pesquisa, embora requeira uma análise especial e refinada, que exige um tratamento mais demorado, tem sido considerada uma ferramenta importante para a Educação Matemática, pois permite capturar e registrar cada momento da coleta de dados. Além disso, permite revê-los ilimitadas vezes, nos reportando ao campo, sem necessidade presencial real dos sujeitos no contexto da coleta. Sendo assim, o procedimento, favorece a refinação pontual de modo flexível e de acordo com o interesse do pesquisador.

Considerando o aporte teórico da pesquisa, o primeiro instrumento de coleta de dados em campo se constitui em um questionário apresentado na íntegra no Apêndice B. Esse instrumento teve como objetivo nos informar sobre as expectativas e ideias dos professores participantes acerca de noções referentes ao ensino de Probabilidade para nos auxiliar a compor as atividades para o curso, além de levantar o perfil dos professores participantes. Foram pesquisados no questionário: gênero, idade, formação acadêmica, experiência em magistério, interesse pela profissão, desempenho da aprendizagem em Probabilidade, série em que ministram aulas e experiência no uso de material concreto para ensinar, tempo de conclusão do Ensino Médio, motivo da escolha do curso. Por meio deste inventário, foi possível compor o perfil dos professores investigados.

O segundo instrumento de coleta de dados foi o Questionário 2 (Apêndice C), elaborado com base nos assuntos abordados no ensino de Probabilidade no segmento do Ensino Médio. A partir desses dados, entendemos ser possível obter informações sobre conhecimentos desses professores sobre Probabilidade.

No que se refere ao instrumento diário de campo, destacamos que quando é o próprio pesquisador que o produz, ele poderá durante o encontro ou imediatamente após, fazer rápidos registros que julgar interessantes para análise – registros que podem ser chamados de ‘notas de campo. Para Cochran-Smith e Lytle (1999) sejam os diários produzidos, seja o relato oral da experiência vivenciada, é fundamental que ocorra uma discussão e reflexão, uma vez que elas proporcionam as críticas, as sugestões dos colegas, auxiliando na produção de conhecimento.

Ainda de acordo com Cochran-Smith e Lytle (1999), as narrativas docentes têm se revelado mais promissoras no campo da formação, principalmente quando sua produção é compartilhada. No movimento dialógico entre teoria e prática, o professor busca validar os saberes produzidos em sala de aula. Esse movimento dialógico possibilita a circulação de significações do que seja ensinar e aprender Matemática; do modo de organizar uma sala de aula que possibilite aprendizagens discentes e docentes, de administrar e gestar o currículo, enfim, de como enfrentar a complexidade de uma sala de aula.

Nesta pesquisa, os excertos recolhidos e o depoimento final nos forneceram indícios das alterações de sentidos atribuídos e de construção do conhecimento ao longo do curso. Os professores participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido concordando, de forma voluntária, com a participação na pesquisa, assinaram ainda autorizando o uso de imagem e receberam uma via do Termo. Com relação à avaliação pelo Comitê de Ética e Pesquisa (CEP), seguimos todos os passos exigidos, obtendo parecer favorável sobre número 1.187.350/ de 10/08/2015 do CEP da Universidade Anhanguera de São Paulo.

Os pressupostos teóricos e os resultados da revisão de literatura nos subsidiaram para um enfoque – na formação continuada – que privilegiasse identificar características pedagógicas da *práxis* dos professores participantes, especificamente quanto ao ensino de Probabilidade, selecionamos metodologias alternativas para abordar os conceitos de Probabilidade, passando pela visão clássica, geométrica, frequencista, subjetiva e axiomática. Na formação, foram discutidas tarefas de ensino utilizando experimentos diversos como jogos, tecnologias da informação e comunicação, além de material concreto.

Vale ressaltar que a cada encontro realizado, a partir do *feedback* obtido, fazíamos o *redesign* do processo formativo, de modo a adequar o próximo encontro às necessidades do grupo. Assim sendo, os ciclos de *redesign* ocorreram a cada encontro com os professores participantes do curso.

Na próxima seção, discutimos os procedimentos para análise dos dados.

1.5.2 Percurso para análise dos dados

No percurso da análise dos dados obtidos por meio das gravações em vídeo, a sistemática utilizada foi metodologia de análise de vídeos proposta por Powell, Francisco e Maher (2004). Nele, são propostas sete fases para empreender a análise. São elas: 1) Observar atentamente os dados do vídeo; 2) Descrever os dados do vídeo; 3) Identificar eventos críticos; 4) Transcrever; 5) Codificar; 6) Construir o enredo; 7) Compor narrativa. Os autores destacam que essas fases não são desarticuladas umas das outras

Powell, Francisco e Maher (2004) destacam ainda que um evento é chamado crítico quando demonstra uma significativa ou contrastante mudança em relação a uma compreensão prévia, um salto conceitual em relação a uma concepção anterior. Ou seja, são quaisquer ocorrências significativas e relevantes para a pesquisa e devem ser identificados e selecionados pelo pesquisador. Quanto às fases, elas não são tão deslocadas umas das outras, diz-se, é difícil encontrar uma separação clara entre elas, de modo que os autores acreditam que algumas delas funcionem muito bem juntas.

Procuramos identificar indícios de que o conhecimento profissional tenha se ampliado, isso feito a partir da análise conjunta dos dados, principalmente das filmagens das aulas, notas de aulas e de campo, bem como dos textos produzidos pelos professores participantes.

Em relação ao conhecimento do professor quanto ao conteúdo matemático, aos alunos e a si mesmo enquanto profissional, foram realizadas inferências a partir da coleta dos dados, verificando a existência (ou não) de indícios de mudança no discurso, no comportamento no curso e na prática pedagógica de cada professor em relação a seus conhecimentos profissionais e competências.

É preciso ressaltar que se procura retratar o processo vivido pelos participantes do curso de formação, e o estabelecimento de um espaço de confiança, responsabilidade e construção de conhecimento e como foi a influência sobre cada participante.

Destacamos que, para os autores, eventos críticos não são apenas identificados nas gravações de vídeos. Os pesquisadores podem encontrar eventos

críticos fora dos vídeos, em materiais como as anotações dos estudantes ou nas proposições escritas em um diário de campo.

A seguir, explicitaremos cada fase do processo de análise de vídeos proposta por Powell, Francisco e Maher (2004), as quais seguimos nesta pesquisa,

Fase 1- Assistir aos vídeos: Assistimos aos vídeos inúmeras vezes sem a preocupação de registrar os acontecimentos ou relatar fatos. O propósito foi de se acostumar com as filmagens e entender o que se passava nos vídeos, porém de maneira cuidadosa e objetiva, buscando ter em mente os objetivos da pesquisa e observar se já apresentavam alguns resultados.

Fase 2- Selecionar os eventos críticos: Dedicamos em assistir aos vídeos novamente, tomando cuidado em apenas descrever e não interpretar as ações corporais,. Desta forma, preocupamos em selecionar momentos do curso de formação continuada que fossem significativos para a pesquisa. Nesta fase, buscamos elaborar termos sínteses que nos auxiliassem com relação aos eventos críticos selecionados.

Fase 3- Descrever os eventos críticos: Nesta fase, após os eventos críticos selecionados na fase anterior, buscamos a partir dos objetivos da pesquisa, identificar momentos significativos para a pesquisa. Sendo assim, assistimos aos vídeos novamente e posteriormente fizemos a descrição dos eventos por nos considerados críticos.

Os eventos críticos descritos foram selecionados no curso de formação continuada, se deram a partir de observações que nos revelassem mudanças dos professores participantes com relação aos conhecimentos em relação à probabilidade e sua forma de abordagem.

Fase 4- Transcrever os eventos críticos: Nesta fase, assistimos aos vídeos dos eventos críticos descritos na fase anterior novamente e registramos em forma de texto as falas dos participantes.

Fase 5- Codificar: Powell *et al* (2004) afirma que na fase de codificação é a parte responsável na análise que auxilia na identificação de temas e interpretação dos dados da pesquisa. O pesquisador se volta par os conteúdos dos eventos críticos e assim cria os códigos e as subcategorias.

Fase 6- Construir o enredo: Powell *et al* (2004) afirmam que esta é a fase particular para que os códigos identificados e a interpretação dos eventos críticos são analisados e construído seu enredo.

Fase 7- Narrativa: Para Powell *et al* (2004) esta é a fase que os pesquisadores interpretam os dados, exploram uma interpretação particular do todo usando uma parte dos dados como evidência, produzindo desta forma uma narrativa escrita. Nesta pesquisa, seguimos as orientações de Powell *et al* (2004) para análise dos dados Apresentado o tema da pesquisa, a motivação para o estudo, o problema e os objetivos da investigação, bem como a formação continuada e a metodologia adotada na pesquisa. Passamos à discussão, no próximo capítulo, sobre o ensino de Probabilidade na Educação Básica, as Indicações Curriculares para o Estudo de Probabilidade e, também, sobre o ensino e a aprendizagem por meio de aulas investigativas.

CAPÍTULO II

2 PROBABILIDADE E SEU ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo, apresentamos as indicações para o ensino de Probabilidade a partir das orientações curriculares brasileiras. Na sequência, apresentamos a natureza do ensino de Probabilidade e suas finalidades, os significados de Probabilidade, indicações da literatura sobre dificuldades para ensinar Probabilidade e orientações para os professores de modo a auxiliarem os alunos a superarem as dificuldades em aprender Probabilidade.

2.1 ENSINO DE PROBABILIDADE

O ensino de Probabilidade tem recebido cada vez mais ênfase nas propostas curriculares. Para Azcárate (1996), isso é consequência das especificidades da nossa sociedade, caracterizada como um ambiente sujeito a elevados níveis de dúvida e que envolve tomada de decisão em muitas situações afetadas pela incerteza.

Em relação ao ensino de Probabilidade, os PCN (Brasil, 1997, 1998) sugerem que logo nas séries iniciais sejam desenvolvidas atividades relacionadas a assuntos do cotidiano dos alunos, sempre partindo de situações-problema em que eles possam desenvolver estudos investigativos, proporcionando-lhes a oportunidade de elaborar suas próprias hipóteses, estabelecer relações, observar e fazer previsões e desenvolver noções de Probabilidade.

Sobre a natureza da Probabilidade e as finalidades de seu ensino na educação obrigatória, Batanero (2005) destaca que a Probabilidade é parte da Matemática que é base para outras disciplinas, sendo então essencial para preparar os estudantes. A autora acredita que o ensino de Probabilidade na Educação Básica é muito importante, visto que o acaso e os fenômenos aleatórios estão presentes em nossas vidas. Ela destaca ainda a importância em desenvolver o raciocínio probabilístico dos alunos, necessário para enfrentar o acaso na vida cotidiana e melhorar suas intuições.

Batanero (2005) afirma que os alunos devem construir seus conhecimentos mediante um processo gradual, a partir de seus erros e esforços. Se o professor de

Matemática, que deve ensinar Probabilidade aos alunos, não for consciente dessa problemática, dificilmente poderá compreender algumas dificuldades desses estudantes.

O ensino de Probabilidade deve privilegiar a compreensão dos conceitos, como enfatiza Coutinho (1994), sem preocupações com formalismos e fórmulas no Ensino Fundamental. A autora salienta ainda, a necessidade de redimensionar o tratamento de certos conceitos probabilísticos na escola básica, especificamente, nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Para tanto, a autora recomenda como ponto de partida para o ensino do cálculo de Probabilidade a proposição de enfocar tarefas que possibilitem a ideia de acaso, as noções de experiência aleatória, de espaço amostral e de frequência de um evento simples.

Coutinho (1994) chama a atenção ao enfoque que se dá à introdução ao conceito de Probabilidade, quase sempre atrelado ao método clássico de cálculo de Probabilidade em detrimento do enfoque frequentista/experimental. Para a autora o estudo da Probabilidade não deve se dar apenas nas situações de equiprobabilidade. A autora acredita que no viés clássico, o conceito de Probabilidade fica quase exclusivamente restrito à ideia da razão entre o número de casos possíveis e favoráveis. O enfoque freqüencista da Probabilidade, como estratégia de ensino, deve ser mais discutido, visto que grande parte dos estudantes já analisou, por meio da intuição em seu dia a dia, a frequência de um determinado evento para a tomada de decisões.

Percebemos a preocupação tanto de Coutinho (1994) quanto de Batanero (2005) no tocante ao ensino de Probabilidade desde o Ensino Fundamental. O ensino de Probabilidade para Batanero (2005) deve ser pautado nas percepções do enfrentamento do acaso na vida cotidiana do aluno, no intuito de levá-lo a melhorar suas intuições. Já Coutinho (1994) destaca que o ensino de Probabilidade deve estar presente desde Ensino Fundamental sem o uso excessivo de fórmulas e também voltado para uma visão frequentista.

Garfield e Ahlgren (1988) afirmam que em qualquer nível de ensino, os estudantes parecem ter dificuldades em desenvolver a intuição correta sobre ideias probabilísticas. Muitos alunos têm dificuldades em compreender os conceitos probabilísticos e estatísticos no nível do ensino pré-universitário, ou seja, o Ensino Médio no Brasil. Os autores ainda destacam que as dificuldades estão na construção de conceitos relacionados aos números racionais e ao raciocínio

proporcional, os quais são necessários para o cálculo, a comunicação e a interpretação de Probabilidade, conflitos com as experiências diárias dos estudantes e com a forma de verem o mundo e, por último, desenvolvimento nos estudantes de aversão pela Probabilidade, por terem sido expostos a um ensino altamente abstrato e formal.

Garfield e Ahlgren (1988) sintetizaram recomendações sobre o que os professores devem fazer para que seus alunos possam superar as dificuldades ao aprender Probabilidade. Para os autores, os docentes devem iniciar os temas por meio de atividades e simulações e não por abstrações; devem procurar incentivar os estudantes a perceberem a Matemática como algo útil à realidade e não apenas um amontoado de símbolos, regras e convenções; usar ilustrações visuais e enfatizar métodos de exploração de dados; utilizar estratégias para ampliar o conhecimento sobre números racionais antes de abordar o raciocínio proporcional; reconhecer e confrontar erros comuns no pensamento probabilístico dos estudantes; criar situações conectadas à visão de mundo dos alunos e que requerem o raciocínio probabilístico.

Concluímos que, tanto Garfield e Ahlgren (1988) quanto Coutinho (1994) apontaram que a compreensão dos princípios probabilísticos é importante, já que as primeiras noções sobre o assunto, caso sejam apresentadas de forma indevida, podem levar ao erro. Sendo assim, é importante focar não apenas o trabalho pedagógico com Probabilidade, mas o desenvolvimento do pensamento probabilístico nos estudantes, desde os anos iniciais, proporcionando-lhes assim, um instrumento que oriente a sua ação diante da incerteza. Devemos refletir sobre o que ele é e como abordá-lo de modo a proporcionar o desenvolvimento do pensamento probabilístico, respeitando os conhecimentos que estes alunos possuem.

O desenvolvimento das noções de Probabilidade, das ideias de acaso, azar e de aleatoriedade é fundamental para que o indivíduo possa realizar uma leitura crítica das ações sociais que o cercam, bem como efetuar tomadas de decisões baseadas em uma visão da realidade formada de maneira autônoma, após analisar o que é possível, impossível e o que é provável.

Desta forma, entendemos de acordo com as orientações curriculares e com os autores acima referenciados, que o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos alunos deva iniciar-se na Educação Infantil, etapa na qual o aluno

encontra-se em profundo reconhecimento do meio onde vive no auge de sua curiosidade e num contínuo processo de formação de sua identidade. É o período no qual a criança passa a reconhecer o meio onde se encontra as relações sociais e com a natureza. Isso é relevante para o desenvolvimento do pensamento probabilístico na adolescência, pois pesquisas, tais como a de Santos (2010), têm apontado que a ampliação do raciocínio probabilístico dos adolescentes depende, e muito, das ações didáticas realizadas com eles, justamente por que pouca ou nenhuma experiência probabilística é vivenciada ou observada anteriormente o que como, consequência, requer intervenção intensa do professor.

Para auxiliar os estudos de sobre Probabilidade, no tocante a suas concepções, abordagens, significados ou conceitos, utilizamos os autores, conforme ilustrado abaixo:

Figura 2 - Concepções, abordagens, significados e conceitos

Azcárate(1996)	Gonçalves (2004)	Batanero (2005)	Cirino(2007)
Concepções acerca de Probabilidade	Abordagens acerca da Probabilidade	Significados de Probabilidade	Conceitos de Probabilidade
■ Não Probabilística da Realidade	■ Clássica ou laplaciana	■ Clássico	■ Clássico
■ Probabilística Intuitiva	■ Frequentista	■ Intuitivo	■ Frequentista ou empírico
■ Probabilística Emergente	■ Subjetivista	■ Subjetivo	■ Subjetivo
■ Probabilística Normativa	■ Formal ou Axiomática ■ Geométrico	■ Formal	■ Formal ou axiomático
		■ Frequencista	

Fonte: Elaboração própria

Azcárate (1996) apresenta as seguintes concepções: Não Probabilística da Realidade, Probabilística Intuitiva, Probabilística Emergente e Probabilística Normativa; Gonçalves (2004) apresenta em seu estudo as seguintes abordagens de Probabilidade: Clássica ou laplaciana, Frequentista, Subjetivista, Geométrica e a Formal ou Axiomática; Batanero (2005) apresenta cinco significados de Probabilidade, que são: intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e significado formal e defende que o ensino da Probabilidade deve perpassar os vários significados para auxiliar a construção do conceito pelos estudantes, uma vez que vislumbrar todos eles pode contribuir para a aprendizagem de Probabilidade. Cirino (2007) apresenta

os conceitos de probabilidade agrupados em quatro tipos: conceito clássico, frequentista ou empírico, subjetivista e o axiomático ou formal.

Assim, entendemos que devem ser discutidas, nos processos formativos, maneiras de abordagem desses significados em sala de aula.

As diferentes abordagens probabilísticas apresentam caráter multifacetado e podem induzir a diferentes perspectivas. Sendo assim, Batanero (2005) considera de suma importância estudos sobre suas barreiras, bem como avanços que possam contribuir para formação do conceito e consequentemente, do conhecimento probabilístico. Para tanto, a autora sistematiza cinco significados da probabilidade, que são: intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e axiomático.

O significado **clássico** de Probabilidade trabalha esse conceito a partir da regra de Laplace. Dado um espaço amostral finito e equiprovável (quando os eventos elementares possuem a mesma Probabilidade), e sendo $N(A)$ o número de elementos de um evento A e $N(S)$ o número de elementos do espaço amostral, definimos a Probabilidade, no significado clássico, pela seguinte expressão:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$$

O significado **frequencista** deu suporte ao enfoque experimental. Neste enfoque, se define a Probabilidade de um evento A a partir da frequência absoluta que corresponde à quantidade de vezes que esse evento aconteceu em uma grande quantidade de realizações desse experimento nas mesmas condições.

Se realizarmos um determinado experimento N vezes, sendo $N(A)$ a frequência absoluta que corresponde ao evento e tivermos uma frequência estabilizada desses resultados, então a Probabilidade do evento é um valor aproximado da expressão:

$$P(A) \cong \frac{N(A)}{N(S)}$$

Se fizermos o número N de realizações do experimento tender ao infinito, então a Probabilidade é desse evento é dada por:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(A)}{N}$$

Podemos destacar algumas dificuldades ao se trabalhar a Probabilidade no significado frequentista, seja pelo fato de que não sabermos exatamente o número

de vezes que um experimento deve ser repetido para que a frequência esteja estabilizada, seja por não se conseguir realizar um experimento um grande número de vezes nas mesmas condições.

Significado **subjetivo**. De acordo com este, a Probabilidade é um grau de crença pessoal e pode ser atualizada por meio do teorema de Bayes quando novas informações são obtidas. Godino *et al* (1987) sugerem que é possível introduzir o significado subjetivo da Probabilidade desde a escola primária, de uma maneira intuitiva: a abordagem envolve a atribuição de Probabilidades qualitativas aos eventos ou a localização desses eventos em uma escala de Probabilidade e, posteriormente, a revisão dessas Probabilidades após novas experiências ou por meio do uso de Probabilidades condicionais. O grau de confiança depende do conhecimento que o indivíduo tem a sua disposição, portanto, pode variar de uma pessoa para outra.

Significado **intuitivo** da Probabilidade é o que se ampara em opiniões e crenças com uso de linguagem natural que podem se relacionar com concepções que traduzem destino ou sorte. Este, aparece tanto em crianças quanto em pessoas que não estudaram Probabilidade, mas usam frases e expressões coloquiais para quantificar as crenças; porém, utilizando parâmetros particulares.

Significado **formal ou axiomático** conhecido também como **objetivo** ou **normativo** baseia-se na teoria de conjuntos, Álgebra de conjuntos e Símbolos relacionados à Teoria dos conjuntos. Este enfoque busca quantificar a incerteza de resultados em experimentos aleatórios abstratos, ou seja, surgiu para suprir as restrições da concepção clássica, uma vez que esta impõe que os sucessos sejam equiprováveis e que correspondam a um espaço amostral finito. Este conceito permite calcular com precisão a Probabilidade de determinados eventos a partir de leis matemáticas, podendo ser usado em situações nas quais eventos não sejam equiprováveis ou finitos.

A pesquisadora, sobre ensino de Probabilidade, Cirino (2007), chamou a atenção para a tradição dualista da noção de probabilidade: como grau de crença e como cálculo de frequências, que ainda é bastante comum. A autora apresenta em sua pesquisa quatro conceitos (o que outros autores têm denominado significados) de Probabilidade: 1) clássico ou laplaciano, 2) frequentista ou empírico, 3) subjetivista, 4) axiomático ou formal, os quais devem ser discutidos com os alunos. A autora considera o conceito **clássico e laplaciano** pela razão entre números de

casos favoráveis em relação ao total de casos possíveis, desde que esteja explícito que todos os resultados sejam igualmente prováveis de ocorrer. Nesta definição de probabilidade, assume-se implicitamente a equiprobabilidade, ou seja, todos os acontecimentos elementares do espaço amostral e constitui uma abordagem, uma vez que se calculam probabilidades antes da realização de qualquer experiência física.

O conceito **frequentista ou empírico** é a probabilidade de um acontecimento emerge do processo de experimentação, o valor da probabilidade é dado pela frequência relativa de sucessos obtidos na realização de um experimento. Realiza-se o mesmo experimento várias vezes e anotam-se as ocasiões em que o mesmo ocorre, depois a razão entre o número de vezes e o número total de repetições (razão frequência ou frequência relativa). Assemelha-se à tendência de um limite, quando n tende ao infinito. Nesta concepção, as probabilidades são baseadas em resultados de experiências realizadas, o que é denominado Probabilidade *a posteriori*, uma vez que a probabilidade de um evento é estimada depois de os experimentos terem sido realizados.

Conceito **subjetivo**: as probabilidades expressam grau de crença ou percepção pessoal. O indivíduo utiliza suas experiências e seu conhecimento sobre o assunto para expressar a probabilidade de um sucesso, o que possibilita diferentes medidas de probabilidade para um mesmo caso. Segundo o autor, as probabilidades são avaliações pessoais de situações aleatórias, inerentes à mente do indivíduo, ou seja, a probabilidade passa de uma avaliação externa ao aluno para uma avaliação centrada no aluno.

O conceito **formal ou axiomática**, segundo Cirino (2007), se originou nos trabalhos de Kolmogorov e surgiu como oposição à concepção clássica. Está apoiada na teoria dos conjuntos, e associa a uma situação aleatória de um espaço amostral a um subconjunto desse espaço formado pelos sucessos de ocorrência do evento. Dessa forma, a probabilidade é definida pela razão entre números de A em relação ao espaço amostral E compreendida entre 0 e 1; a probabilidade do evento certo é igual a 1, e de um sucesso impossível é igual a 0.

O pesquisador Gonçalves (2004) apresenta cinco abordagens de probabilidade (no caso, em vez de significado ou conceito utiliza o termo abordagem), que são: a Clássica ou Laplaciana, a Frequentista, a Subjetivista, a Geométrica e a Formal ou Axiomática. A abordagem Clássica ou Laplaciana

apresentada pelo autor é a mesma anteriormente descrita nas definições de significados de Batanero (2005) e de conceitos de Cirino (2007). A abordagem frequentista tem a mesma definição apresentada em Cirino (2007) como frequentista ou empírico e em Batanero (2005) como frequencista. A abordagem Subjetivista tem a mesma definição em Cirino (2007), já em Azcárate (1996) se apresenta como não probabilístico da realidade e em Batanero (2005) como definição intuitiva. A abordagem Formal ou Axiomática se apresenta em Cirino (2007) e Batanero (2005) com a mesma nomenclatura e em Azcárate (1996) como Probabilidade Normativa. A abordagem geométrica de probabilidade apresentada por Gonçalves (2004) não foi destacada ou definida por qualquer dos estudiosos citados anteriormente. O autor destaca que a razão entre as medidas de dimensões, (comprimento, área e volume) de uma região qualquer num espaço contínuo de uma experiência aleatória selecionada e as dimensões de uma região nela inclusa, se trata da concepção geométrica de Probabilidades, isto é, a razão entre o número de eventos favoráveis e número de eventos, que é a mesma definição clássica apresentada por Batanero (2005) e Cirino (2007).

Podemos observar que a abordagem intuitiva, expressa os argumentos empíricos, ou seja, estão mais ligados à frequência, enquanto a indutiva, relaciona-se com a Probabilidade subjetiva. Por outro lado, o significado matemático-axiomático é mais de natureza estrutural, respondendo a um problema de organização e estruturação dos significados parciais restantes de Probabilidade. Fernandes (1999) destaca que, clássica e frequentista - são propriedades do mundo real, enquanto na percepção subjetivista as Probabilidades são avaliações pessoais de situações aleatórias, inerentes à mente do indivíduo. Desse modo, a Probabilidade passa de uma avaliação externa ao sujeito para uma avaliação centrada no sujeito. Ao ensinar Probabilidade, os diferentes significados devem gradualmente ser incluídos, a partir das ideias intuitivas de alunos sobre azar e Probabilidade, isto porque a compreensão é um processo contínuo e crescente pelo qual os alunos podem construir os conceitos por meio dos significados de Probabilidade.

A partir dos documentos estudados percebemos que o ensino da Probabilidade considerando os diversos significados, (ou diversos conceitos ou diferentes abordagens como denominam os autores também considerando

diferentes representações e contextos podem contribuir para auxiliar a aprendizagem de Probabilidade nos diferentes níveis de escolaridade.

2.1.1 Indicações Curriculares para o Estudo de Probabilidade

Em meados de 1980, o estudo da Probabilidade e da Estatística foram inseridos como conteúdos na Educação Básica brasileira por se entender que os conceitos a elas associadas eram essenciais a todos os indivíduos para que pudessem construir conhecimentos de modo a melhor compreender, interpretar e atuar na sociedade. Essa tendência do final dos anos 80 se consolidou também nos Estados Unidos da América quando houve um movimento crescente para a introdução do ensino de Probabilidade e Estatística no currículo da Educação Básica (*Secondary and Elementary School*), uma vez que estes conhecimentos foram considerados necessários para que os alunos pudessem se desenvolver matematicamente (GARFIELD; AHLGREN, 1988).

Ressaltamos que o Ministério da Educação do Brasil, até o momento desta pesquisa, não definira um currículo nacional obrigatório em todo o país, mas emitiram documentos curriculares normatizando cada segmento da Educação Nacional. Com relação à Educação Básica, os documentos vigentes são: Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – PCN, 1997, 1^a a 4^a série, volume 3; Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – PCN, 1998, 5^a a 8^a série; Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática – PCNEM, 2000; PCN+ Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática, 2002; Orientações Curriculares para o Ensino Médio; volume 2, Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias – OCEM 2006.

Vale destacar que, além desses documentos orientadores nacionais, estava sendo preparada, à época da pesquisa, uma base nacional curricular comum – BNCC, com a 2^a versão já publicada. Esse documento estabelece conteúdos mínimos que devem ser ensinados em todo território nacional na Educação Básica.

Os documentos norteadores da educação no Brasil apresentam a Probabilidade inserida na área de Matemática. As noções de Probabilidade são apresentadas aos alunos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, o que corresponde ao segmento de ensino do 1º ao 5º ano, alunos na faixa etária dos 6

aos 10 e integram o bloco tratamento da Informação nos PCN (BRASIL, 1997; BRASIL, 1998) – o qual é composto, além delas por noções de Análise Combinatória e de Estatística.

Nos países da Europa, na América do Norte e na Austrália, o ensino de Probabilidade e da Estatística é parte dos estudos de Estocástica⁶. Sendo que sua apresentação, ainda no Ensino Fundamental como proposta curricular, deve-se às preocupações com demandas sociais, ou seja, a finalidade em destaque é o uso na vida social (LOPES, 1998).

Devemos ressaltar que, seja no Brasil ou nos outros países que foram investigados por nós, seja no bloco Tratamento da Informação ou em estocástica¹, o esperado é que esses estudos possam levar os alunos a compreenderem a realidade na qual estão inseridos, interpretando-a com auxílio da abordagem matemática que lhes permita ler, construir gráficos, tabelas e demais formas de comunicação, entendendo as informações ali contidas. Assim, os estudantes podem desenvolver conhecimentos para lidar com a quantificação de possibilidades para tomada de decisão e conhecer noções de Probabilidade para lidar com situações do cotidiano, como: risco, questões ambientais, questões econômicas, saúde e outras que envolvam o acaso e a incerteza.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) orientam que estudos relativos às noções de Probabilidade façam parte das propostas curriculares desde os anos iniciais de escolarização, como um dos meios de a escola propiciar condições para que os alunos desenvolvam conhecimentos para lidar matematicamente com situações de acaso e incerteza que se fazem presentes em nosso cotidiano. De acordo com o documento, devido à grande parte dos acontecimentos do cotidiano serem de natureza aleatória e possíveis de identificarem prováveis resultados, utilizando noções de acaso e incerteza, então estes devem ser ensinados na escola. Para tanto, é recomendado que sejam apresentadas situações de ensino nas quais o aluno realize experimentos e observe eventos em espaços equiprováveis. Contudo, por se tratar de um conteúdo matemático relativamente novo nas propostas curriculares para o ensino de Matemática, particularmente nos anos iniciais é preciso que os professores que

⁶ O termo “Estocástica” é utilizado para indicar estudos normalmente divididos em estatística descritiva, teoria das Probabilidades e estatística inferencial, desenvolvidos na sua completude no Ensino Superior.

atuam nesse nível de escolaridade compreendam a necessidade de sua inclusão, assim como os objetivos do ensino de Probabilidade e Estatística neste segmento.

Lopes (2008) enfatiza que as propostas curriculares de Matemática dedicam atenção especial ao tema, especialmente porque o conhecimento de Probabilidade é necessário no dia a dia das pessoas, auxiliando a tomada de decisões. A autora chama a atenção para os cursos de formação inicial quanto à preparação dos professores que lidarão com o ensino desse conteúdo matemático nesse nível de escolarização nos anos iniciais. A autora entende que todos os objetivos que se esperam alcançar com o ensino de Probabilidade devem ser assumidos também pelos professores que irão ensiná-los. Na sequência da escolaridade, ou seja, no atual Ensino Fundamental – Anos Finais correspondentes ao segmento de ensino do 6º ano ao 9º ano, englobando alunos na faixa etária dos 11 aos 14 anos, foram publicados os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN (BRASIL, 1998) os quais propõem o ensino da Probabilidade priorizando o trabalho com as ideias intuitivas de Probabilidades a fim de que o aluno comprehenda que diversos fenômenos da natureza e do cotidiano não são determinísticos, sendo muitos deles possíveis de serem modelados, atribuindo Probabilidades aos possíveis resultados, permitindo a tomada de decisões em condições de incerteza. Sugerem ainda que se trabalhe com as possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las, representá-las, explorar a ideia de Probabilidade identificando os tipos de eventos, construindo o espaço amostral, contando os casos possíveis; atribuindo Probabilidades aos eventos, utilizando o princípio multiplicativo e frequência relativa; bem como elaborar experimentos e simulações para estimar Probabilidades e verificar Probabilidades previstas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) orientam que as noções de Estatística, Probabilidade e de combinatória sejam evidenciadas nos primeiros anos de escolaridade, sem o desenvolvimento de um ensino baseado na definição de termos ou de fórmulas resolutivas. Com relação à Probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno relate os acontecimentos do cotidiano e sua natureza, e possa identificar prováveis resultados desses acontecimentos e também perceber de maneira intuitiva as noções de acaso e incerteza. As noções de Probabilidade devem se desenvolver de forma subjetiva e serem trabalhadas com os alunos nesta referida fase, utilizando, por exemplo, construções de tabelas e gráficos que evidenciem o comportamento do tempo durante um período (dias

ensolarados, chuvosos, nublados) e o acompanhamento das previsões do tempo pelos meios de comunicação. Bem como utilizar observações de frequências de ocorrências de um determinado acontecimento e do seu número razoável de experiências, podendo assim desenvolver algumas noções de chance e Probabilidade.

Cumpre salientar que, da mesma forma como se orienta o ensino de Probabilidade no segmento do Ensino Fundamental - Anos Iniciais, para os Anos Finais (correspondente à época ao período da 5^a à 8^a série), os PCN (BRASIL, 1998), indicam que este ensino deve ter a finalidade de levar o aluno a compreender que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar e prever possíveis resultados. As ideias de espaços equiprováveis, noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realize experimentos e observe eventos.

Nesse segmento de ensino deve haver aprofundamento no estudo de Probabilidade e Estatística, uma vez que no Ensino Fundamental - Anos Iniciais são indicados aos alunos a resolução de problemas de contagem com quantidades e com agrupamentos menores, ou seja, trabalham com moedas, dados ou baralhos. Já no Ensino Fundamental - Anos Finais a indicação é que, se aborde o princípio multiplicativo – no caso da contagem – ou simulações, se utilizem situações com mais agrupamentos, como por exemplo, o espaço amostral do lançamento de um dado e uma moeda. Também nessa faixa etária devem ser utilizados procedimentos, tais como, a construção de diagrama de árvores, tabelas etc. sem o uso de fórmulas, na tentativa de levar os alunos calcularem Probabilidade de sucesso de um evento por meio de uma razão. Os PCN (BRASIL, 1998) indicam ainda a exploração de situações de ensino usando materiais manipulativos os quais permitam explorar situações equiprováveis tais como, materiais homogêneos que têm simetria (dados, moedas), como também os que não possuem essa simetria⁷, bem como, recomendam o uso de tabela de dupla entrada ou de diagrama de árvore para registro de possibilidades e posterior cálculo de Probabilidades.

Concluindo, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, as noções de Probabilidade, segundo os PCN (BRASIL, 1998) devem continuar a ser exploradas

⁷ Termo utilizado no documento

de maneira informal, por meio de investigações que levem os alunos a fazerem previsões a respeito do sucesso de um evento, sempre buscando prepará-los para o uso da Probabilidade e da Estatística na vida prática.

Em relação ao Ensino Médio, nos PCNEM (BRASIL, 2000), a Matemática está na área intitulada “Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias” e nesse documento estão explicitadas as habilidades básicas e as competências específicas que se espera sejam desenvolvidas pelos alunos nas áreas de Biologia, Física, Química e Matemática Esse período da Educação Básica tem o objetivo de levar o aluno a desenvolver conhecimentos práticos e contextualizados que permitam tecer soluções para as necessidades da sociedade contemporânea. As competências e habilidades a serem desenvolvidas nesse segmento de ensino foram definidas a partir dos objetivos formativos como sendo: Representação e comunicação; Investigação e compreensão; Contextualização sócio cultural.

O estudo da Probabilidade se propõe a atingir o objetivo formativo: “Investigação e compreensão” da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Então, visa desenvolver a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, de forma a identificar regularidades, apresentar interpretações e prever soluções, “compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de Probabilidades” (BRASIL, 2000, p.12). Observamos que os PCNEM indicam uma abordagem investigativa, promovendo a pesquisa e a solução de questionamentos que envolvem ambientes naturais e tecnológicos do educando. Além disso, indicam que seu estudo esteja ligado tanto ao desenvolvimento de conhecimentos em Matemática quanto em Biologia.

A abordagem de ensino para desenvolver conhecimentos matemáticos deve levar o aluno a entender as relações matemáticas como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias, modelando e interpretando a realidade; “assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a Estatística e Probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos” (BRASIL, 2000, p. 40). Nesse sentido, a Probabilidade é classificada como uma subárea da Matemática, e sua aplicação vai além dessa área, pois ela desenvolve habilidades e competências utilizáveis nas demais áreas do conhecimento. A Probabilidade se

conecta “às habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, de realizar inferências e predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de Probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas” (BRASIL, 2000, p.44).

Quanto aos conhecimentos de Biologia, a indicação é que no ensino de Probabilidade se utilize aplicações na área de ciências biológicas, uma vez que “são necessárias noções de Probabilidade, análise combinatória e bioquímica para dar significado às leis de hereditariedade, o que demanda o estabelecimento de relações de conceitos aprendidos em outras disciplinas” (BRASIL, 2000, p.19). Neste contexto, a Probabilidade é ensinada em conjunto com as ciências biológicas, não apenas no contexto da Matemática.

Essa orientação é benéfica aos processos de ensino e de aprendizagem, uma vez que, o ensino interdisciplinar pode contribuir para uma melhor compreensão da aplicação da Probabilidade em diversos contextos. Tal ensino auxilia na construção de conceitos e compreensão de fatos que não devem ser discutidos de forma isolada uns dos outros, ou seja, auxilia na compreensão de fatos e fenômenos nos quais é necessária a combinação dos conhecimentos de diferentes disciplinas. Contudo, existem algumas dificuldades para a implementação dessa proposta, como:

- Formação inicial dos professores com pouca informação relativa à interdisciplinaridade como metodologia;
- A interdisciplinar exige tempo, planejamento e comprometimento de todos os envolvidos. Porém, devemos destacar que situações de ensino mergulhadas em falta de recursos humanos e financeiro, contribuem para a não realização de atividades interdisciplinares;
- Sistema de ensino baseado em matriz curricular estabelecido por um conjunto de disciplinas tratadas separadamente, isoladas e demarcadas com tempos definidos;
- Carga horária das disciplinas diferentes, números de alunos por turmas e por professor, quantidade de diários, todos estes são fatores que dificultam o trabalho interdisciplinar.

Uma reformulação nas estruturas de ensino pode contribuir no sentido de provocar mudanças efetivas, possíveis de conceber o ensino com uma visão de interação entre as diferentes áreas do conhecimento, promovendo sempre a construção de conhecimentos. Dando uma maior oportunidade de participação aos alunos em todo contexto, ficando a cargo do professor a função de mediar e orientar todos os processos de ensino e de aprendizagem, em um ambiente onde todos os envolvidos são igualmente importantes. Destacamos ainda que para que tudo isso ocorra é preciso que os professores reconheçam as novas metodologias, como oportunidades para uma sistematização de aprendizado significativo para seus alunos.

Para discutir a probabilidade em sala de aula, os PCNEM sugerem o uso de técnicas de raciocínio probabilístico aplicável tanto nas Ciências da Natureza quanto nas Ciências Humanas. Desse modo, procura-se propiciar ao aluno o desenvolvimento de competências e habilidades para utilizar esse tipo de raciocínio nas demandas do cotidiano (BRASIL, 2000).

Cumpre destacar que todas as indicações dos PCNEM quanto ao ensino de Probabilidade foram consideradas ao propormos a formação continuada empreendida nesta pesquisa.

Após a publicação dos PCNEM, o Ministério da Educação lançou, em 2002, o documento PCN+ Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática, de modo a melhor subsidiar os professores e educadores brasileiros.

Os PCN+ (BRASIL, 2002) orientam que o ensino da Probabilidade priorize a análise, argumentação e desenvolvimento no aluno da posição crítica em relação aos temas de ciências e tecnologias; reconhecimento, utilização, interpretação e proposição de modelos para situação – problema, fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos. Buscam a inserção dos conteúdos escolares nas situações problemas dentro e fora do espaço escolar do aluno. O documento recomenda que a Probabilidade seja ensinada em sala de aula com a finalidade de desenvolver as seguintes competências:

- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científicos tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da Probabilidade como meio de prever resultados;

- Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolva o pensamento probabilístico;
- Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de Estatísticas e Probabilidades (BRASIL, 2002, p. 125).

A próxima publicação de documentos curriculares nacionais veio em 2006, com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM, que apresentam os conteúdos básicos de Matemática organizados em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e Probabilidade. Tal documento orienta que se deve buscar constantemente a articulação entre esses blocos de conteúdos, bem como, a retomada e aprofundamento de assuntos já estudados no Ensino Fundamental, entendendo que seja este o momento de consolidar certos conceitos e ideias, uma vez que estes dependem de explicações cuja compreensão exige uma maior maturidade do aluno. Outra sugestão é quanto à forma de trabalhar os conteúdos, orientando que sempre que possível, se evite “as exigências de memorização, as apresentações de “regras” desprovidas de explicações, resolução de exercícios repetitivos de “fixação” ou a aplicação direta de fórmulas”. (BRASIL, 2006, p. 70).

Os conteúdos do bloco “Análise de dados e Probabilidade” são recomendados para todos os níveis da Educação Básica, em especial para o Ensino Médio. Novamente o documento enfatiza as justificativas quanto à importância de ensinar Probabilidade na escola, especialmente pelo fato de as ideias de incerteza e de Probabilidade estarem associadas aos chamados fenômenos aleatórios, presentes de forma essencial nos mundos natural e social. Os estudos nesse bloco buscam ampliar e formalizar conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico, proporcionando assim aos alunos uma visão apropriada sobre os modelos probabilísticos no mundo de hoje. Ainda no bloco de “Análise de dados e Probabilidade”, o documento ressalta a importância da combinatória no ensino de Probabilidade, entendendo que os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance⁸ de

⁸ Chance: é a razão entre o número de possibilidades da ocorrência de um evento e o número de possibilidades de não ocorrência do evento.

cada uma delas, para auxiliá-los no cálculo das Probabilidades. Ressaltando que a análise combinatória não se restringe a função de auxiliar, mas apresenta uma relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias.

No curso de formação continuada, proposto demos ênfase ao tópico de análise combinatória integrada ao de Probabilidade.

Ao ensinar Probabilidade, as OCEM (2006) ressaltam que os professores enfatizem palavras relacionadas à chance, incerteza e à própria Probabilidade, uma vez que estas aparecem em nossa vida diariamente nos meios de comunicação. Chama a atenção para a compreensão de que a Probabilidade é uma medida de incerteza, que representa uma estimativa, uma simulação baseada em possibilidades e que nem sempre nossa intuição é correta; podem nos levar a conclusão equivocada no que se refere à ocorrência de um evento, a partir do cálculo da Probabilidade e da chance.

Quanto à abordagem, do ensino de Probabilidade as OCEM (2006) destacam o ensino de planilhas eletrônicas, de modo a oportunizar ao aluno a exploração dos conceitos de aleatoriedade, frequência relativa em grande número de repetições.

Embora o Brasil, em termos de orientações para a organização curricular, já tivesse os PCN e os PCN+, no ano de 2015 surgiu uma proposta de unificar a forma de ensino no Brasil por meio de uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – prevista na Constituição brasileira –, que tem o objetivo de indicar o currículo comum para todas as escolas no país. A BNCC estabelece quanto à Probabilidade, que esta seja ministrada de forma dividida entre as três séries do Ensino Médio a fim de atender os seguintes objetivos:

Quadro 3 - Probabilidade no Ensino Médio segundo o BNCC – 2^a versão

Série	Conteúdo
1^a	Descrever o espaço amostral de experimentos aleatórios, com e sem reposição, usando diagramas de árvores para contagem de possibilidades e o princípio multiplicativo para determinar a Probabilidade de eventos.;
2^a	Determinar a Probabilidade da união de dois eventos, utilizando representações diversas; Descrever o espaço amostral de experimentos aleatórios sucessivos,

	com e sem reposição.;
3ª	Analizar os métodos de amostragem em relatórios de pesquisa divulgados pela mídia e as afirmativas feitas para toda a população baseadas em uma amostra.;

Fonte: Adaptado de Brasil (2015) BNCC – 2ª versão

Observamos que na proposta da BNCC – 2ª versão o ensino de Probabilidade está pautado em descrever o espaço amostral de experimentos aleatórios, com e sem reposição, usando diagramas de árvore, tabelas e esquemas para contagem de possibilidades. Orienta ainda que, as situações precisam se basear em temas significativos para os estudantes, podendo também envolver temas que estejam sendo abordados em outras disciplinas. Entendemos também que trabalhar probabilidades utilizando árvore, tabelas ou representações de conjuntos, podem enriquecer as soluções dos problemas propostos de probabilidade. No curso de formação continuada, demos bastante ênfase nesses tipos de representações, uma vez que entendemos que como sendo uma boa estratégia didática.

A probabilidade é essencial a compreensão de fenômenos aleatórios, precisando assim ser bem estudada na Educação Básica. Temos percebido que as escolhas de determinados temas e a estratégia escolhida para seu ensino, recebem influência direta das competências e habilidades de cada docente, ou seja, o professor organiza como será todo o processo pedagógico em função de suas preferências e domínio de conteúdo.

Os documentos acima mencionados são de abrangência nacional, entretanto, respeitando o neles prescrito, cada Estado da União pode editar o seu próprio currículo. Assim, por exemplo, o Estado de Tocantins tem o próprio Currículo Oficial do Estado.

No Estado do Tocantins existe uma Proposta Curricular para o Ensino Médio (TOCANTINS, 2007). Nela está indicada a construção de um currículo nas escolas que seja orientado ao desenvolvimento de competências para o mercado de trabalho, preparação para inserção no Ensino Superior e também para vida. O documento recomenda que o conteúdo seja organizado no Eixo de “Tratamento de Informação”, na segunda série do Ensino Médio. As temáticas sendo abordadas na seguinte sequência: Propriedade da Probabilidade; Reunião e intersecção de eventos; Probabilidade condicional; União de dois eventos; Eventos independentes;

Gráficos e tabelas. Com relação às habilidades a serem desenvolvidas, espera-se que os alunos possam: Conceituar experimentos aleatórios, espaço amostral e evento; compreender que a Probabilidade é uma medida de incerteza, analisar o comportamento de variável expressa em gráficos ou tabelas, como recurso para a construção de argumentos consistentes; identificar e resolver problemas que envolvam arranjos, permutações e combinações; reconhecer e aplicar o princípio multiplicativo em situações problemas.

Finalizando o estudo das indicações curriculares, vale ressaltar que a teoria de Probabilidade assumiu lugar de destaque nas propostas curriculares para o ensino de Matemática na Educação Básica no Brasil e em muitos outros países, tais como os Estados Unidos, Espanha e Portugal. Podemos afirmar que esta tendência se deve principalmente às mudanças sociais ocorridas nas últimas décadas, as quais influenciaram os objetivos quanto ao que se pretende alcançar com o ensino de Matemática nesse segmento do ensino e que são justificados pela demanda social.

2.2 ENSINO E APRENDIZAGEM POR MEIO DE AULAS INVESTIGATIVAS

O ensino por investigação tem se apresentado como uma proposta atual de abordagem de conteúdos, principalmente em disciplinas que envolvem cálculos. Contudo, a abordagem investigativa na educação brasileira já era proposta desde a década de 90 por diversos pesquisadores, como Ernest (1998), o qual aponta a investigação como metodologia para resolução de problemas; Borin (2004) e Fiorentini e Lorenzato (2006) que abordam a investigação em Educação Matemática desde a teoria até as metodologias; Lopes e Rezende (2010); Ribeiro (2012); Lima (2013) propõem a abordagem investigativa para ensinar Probabilidade no nível escolar do Ensino Médio.

O ensino por investigação como metodologia, não é algo que começou agora, ele teve sua origem em meados do século XX, iniciado por John Dewey nos Estados Unidos. O autor apontou que era necessário às escolas acompanharem as mudanças ocorridas no contexto da época integrando métodos científicos à Educação, possibilitando aos estudantes realizarem experiências práticas.

Para Dewey (1979), era fundamental uma escola na qual o aluno estivesse ativo e aprendesse a partir do fazer, ou seja, das experiências vivenciadas e da

descoberta. Entretanto, o autor enfatizava a importância do que designava por “qualidade” da experiência, uma vez que nem toda experiência tem valor educativo.

“As experiências podem ser tão desconexas e desligadas umas das outras que, embora agradáveis e mesmo excitantes em si mesmas, não se articulam cumulativamente” (p.14).

Assim, o ensino investigativo levando em consideração as experiências dos alunos, tem suas particularidades, sendo necessário um bom planejamento de toda a atividade.

As ideias de Dewey (1979) só foram difundidas e incorporadas na Educação na metade do século XX quando o educador Joseph Schwab propôs que a ciência deveria refletir conceito e prática, e que os alunos deveriam entender que a investigação era uma atividade dinâmica e contínua e não uma atividade científica investigativa individual. Para auxiliar a aprendizagem, o autor preconizava ser importante que o professor propusesse problemas com base em investigações fazendo o uso de experiências para conduzir as aulas. Isso deveria ser uma fase a cumprir antes de introduzir a teoria, conceitos e princípios das ciências (SÁ, 2009).

De acordo com Rodrigues e Borges (2008), a reforma ocorrida na educação norte-americana iniciada nos anos 50 e concluída nos anos 70, admitiu que o ensino baseado na investigação fosse capaz de mostrar a relação entre conteúdos e métodos de forma rigorosa, da mesma maneira que o ensino tradicional.

No Brasil, segundo Rodrigues e Borges (2008), as concepções de aulas utilizando tarefas investigativas começaram a surgir nas décadas de 50 e 60, época essa em que prevalecia o modelo de ensino por sequências fixas de procedimentos que se iniciavam na identificação de problemas, passavam para elaboração de hipóteses e verificação experimental e, por fim, conclusão das hipóteses. Entretanto, na época, as ideias investigativas propostas eram tidas como neutras, ou seja, não envolviam valores científicos e, assim sendo, distorciam o caráter da investigação científica.

De acordo com Viera (2012), somente no fim da década de 80 e início da década de 90 do século passado, a proposta de tarefas investigativas para os alunos foi retomada no Brasil, criando expectativas quanto à promoção de um ensino científico e dinâmico.

O interesse em adotar as investigações como recurso metodológico recebeu um tratamento diferenciado pelos professores portugueses Oliveira, Segurado e Ponte (1998). Esses autores referem-se às investigações como oportunidades de conceder ao aluno estar no centro do processo de aprendizagem, realizando atividades matemáticas intencionais.

O ensino investigativo possibilita a construção de conceitos e conhecimentos permitindo ao educando intuir presumir, experimentar, provar, avaliar e apresentar os resultados encontrados. A ação de investigar significa compreender e procurar soluções para os problemas propostos e assim buscar relações, procurando sempre justificá-las. O uso da metodologia da aula investigativa no ensino pode gerar um desequilíbrio cognitivo que é necessário para instigar o raciocínio do aluno. Esse desequilíbrio ocorre quando o aluno é retirado da passividade das aulas clássicas e passa a fazer parte da ação sobre o meio, sobre os objetos, sobre as ideias com os colegas e ainda a realização de experimentações, além de, observações, testes, pesquisas, criação e solução de problemas (BONA e SOUZA, 2015).

O desenvolvimento de aulas investigativas é também proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio – PCNEM (Brasil, 2002) que indicam a utilização dessa abordagem no ensino das Ciências da Natureza e de Matemática e Suas Tecnologias. O documento indica ao professor que proponha situações em que os estudantes possam observar e construir eventos possíveis por meio de experimentação concreta por meio de coleta e organização e análise de dados (LOPES, 2008).

Após observar que há uma tendência em propor novas metodologias de ensino, em particular, indica-se as aulas investigativas como uma dessas possíveis metodologias, nos parece interessante ressaltar a importância e as vantagens dessas aulas investigativas, como indicam Ponte (2003) e de Lamonato e Passos (2011).

Ponte (2003) propõe o uso de metodologias investigativas na sala de aula e discute como a investigação pode contribuir para aprendizagem dos alunos. Além disso, aponta as competências necessárias aos professores para promover a investigação na sala de aula. Aborda também o que ainda precisa melhorar para que essa prática se torne integrada a gestão escolar e que a investigação deve ser contínua e não momentânea. A investigação não pode ocorrer apenas em uma aula e na aula seguinte voltar à metodologia de aula com repetições de fórmulas e tradicionalismo.

A abordagem investigativa relaciona-se muito bem com o ensino de Matemática, de acordo com Lamonato e Passos (2011), uma vez que a investigação possibilita ao aluno pensar a partir de uma dinâmica que prevê observações, descobertas, erros, acertos e tomada de decisões. O ensino dinâmico pode alcançar um bom número de alunos em sala de aula, pois nesse contexto possibilita inclusive aos alunos mais tímidos, se envolverem na construção do conhecimento.

Além disso, aulas investigativas tendem a quebrar ideias desfavoráveis à Matemática, que a classificam como uma disciplina difícil, de certeza, não dinâmica; tais ideias desencadeiam crenças incorretas nos estudantes. Ainda de acordo com Lamonato e Passos (2011), a mudança de abordagem de tradicionalista para investigativa possibilita transformar o ensino e a aprendizagem de cálculos, tirando da memorização das fórmulas e passando para a pesquisa, hipóteses, aplicação e solução.

Ponte (2003) considera que investigar é procurar conhecer o que não se sabe, no seu sentido mais amplo, por meio de questionamento acerca do que é proposto. O autor afirma que apresentar os conteúdos, exemplificar e exercitar não exige dos estudantes uma capacidade de questionar os motivos pelos quais tal propriedade ou definição é mais utilizada ou ainda por que são essas as propriedades que utilizaremos e não outras.

Com o propósito de esclarecer os diferentes tipos de tarefas, Ponte (2003) destaca três tipos: exercícios, problema e tarefa de investigação. De acordo com o autor, **problema** é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita resolução imediata, enquanto que um **exercício** é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido por ele. Evidentemente que podem ser propostos exercícios mais difíceis, os quais requerem a aplicação engenhosa de vários métodos e também existem problemas mais simples que exigem pouca análise e para esses as estratégias de resolução são mais imediatas. Para o autor, a **tarefa de investigação** é aquela em que se espera dos alunos, uma maneira mais ou menos consistente, que eles encontrem alguma regularidade nos dados numéricos, ou seja, que utilizem os vários processos que caracterizam a atividade investigativa em Matemática.

Para ilustrar essa diferenciação, descrevemos no Quadro 4 situações que exemplificam a diferença de exercício, problema e tarefa de investigação segundo Ponte (2003).

Quadro 4 - Exemplos de exercício, problema e tarefa de Investigação

Exercício	Problema	Tarefa de investigação
Simplifique 	Qual o menor número inteiro que, dividido por 5, 6 e 7 dá sempre resto 3?	Escreva a tabuada dos 9 desde 1 até 10 e observe os algarismos das colunas e veja se há alguma regularidade.

Fonte: Adaptado de Ponte (2003)

Podemos observar as diferenças entre exercício, problema e tarefa de investigação pela análise da tabela. Enquanto o exercício apresenta apenas um comando para o aluno responder junto à expressão para treinar certo algoritmo, o problema se mostra mais elaborado, com uma situação para ser resolvida, na qual o aluno não conhece *a priori* as estratégias que levam à solução. Já a tarefa de investigação, como se pode observar no exemplo acima, traz comandos seguidos de situações a serem investigadas pelo aluno. Neste caso, no exemplo, os alunos podem escolher caminhos de pesquisa que não estariam previstos pelo professor.

Ponte (2003) apresenta os tipos de tarefas e as classifica quanto ao grau de dificuldade em fáceis ou difíceis e o grau de estrutura da proposta que está sendo apresentada em abertas ou fechadas, que variam de acordo com a capacidade e atitude dos alunos e do professor.

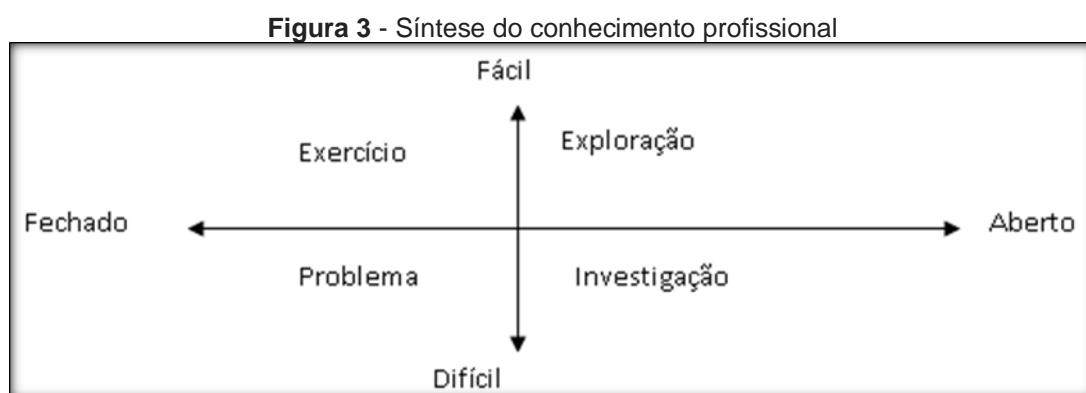
Quanto à diferença entre ser fácil ou difícil, o autor a relaciona ao grau de conhecimento que o aluno tem sobre o tema. Se ele já se já possuir ferramentas matemáticas para resolvê-lo, será considerada uma tarefa fácil; caso contrário,, se o aluno não conhecer ou não dominar o tema proposto, mesmo que em parte, será uma tarefa difícil.

Outro dimensionamento utilizado pelo autor, é o chamado de “grau de estrutura” que tipifica as tarefas em abertas e fechadas. Na tarefa fechada, considera-se nitidamente o que se é pedido, enquanto que na aberta há uma indeterminação, seja no que é pedido, seja nos dados apresentados. Uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido, uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas.

Para Ponte (2003), as tarefas são consideradas fechadas quando apresentam questões diretas, no que se refere aos dados apresentados e ao seu objetivo, tendo

o aluno uma resposta a encontrar. Ou seja, são consideradas abertas as tarefas que durante sua execução possam apresentar não apenas um único resultado como possíveis desdobramentos. Para resolvê-las, há a participação ativa dos alunos nos encaminhamentos na elaboração e execução das estratégias

Pautado nesses graus de dificuldade e de estruturação das tarefas, Ponte (2003) propõe o seguinte esquema:



Fonte: Ponte (2003, p.29).

Podemos perceber a existência de dois eixos que polarizam as classificações: em um deles, o eixo vertical, se a tarefa é fácil ou difícil e no outro o eixo horizontal, se a estrutura da tarefa está fechada ou aberta.

Para o autor, os exercícios são tarefas fáceis e fechadas, propostas aos alunos de forma que estes coloquem em prática conhecimentos já construídos, com a finalidade de consolidá-los. O autor analisa que, problemas são tarefas fechadas, as quais apresentam certo grau de dificuldade ao aluno. Entretanto, é importante observar a importância de o professor dosar o grau de dificuldade, pois se o problema for muito difícil, o aluno poderá desistir de resolvê-lo e se for muito fácil, o problema poderá deixar de ser desafiador e se aproximar de um exercício.

Segundo Ponte (2003), para a maioria dos alunos, fazer exercícios em série não é uma atividade muito interessante. O autor afirma ainda que reduzir o ensino da Matemática à resolução de exercícios, comporta grandes riscos de empobrecimento nos desafios propostos provocando desmotivação dos alunos. Considera que escolher o exercício a ser aplicado em uma turma, com o intuito de aferição de conhecimento do aluno, é algo maior do que simplesmente fazer um exercício, no sentido de treinamento.

Para Ponte (2003), a questão fundamental é saber se o aluno dispõe, ou não, de um processo imediato ou procedimento para resolver a tarefa. Caso conheça esse processo e seja capaz de usá-lo, a tarefa é um exercício. Caso contrário, podemos considerá-la um problema. Isto significa que se a tarefa for apresentada pela primeira vez a um grupo de alunos, que desconhece estratégicas para sua resolução, então a consideramos um “problema”. Se já for de conhecimento do aluno, será um “exercício”, independentemente da quantidade de cálculos e questionamentos propostos. Enfatizamos que, tanto os exercícios, quanto os problemas são caracterizados por serem tarefas fechadas.

Com relação aos exercícios e tarefas exploratórias, na concepção de Ponte (2003) elas se localizam no gráfico no semi plano “fácil” para o aluno e se diferenciam quanto ao grau de estruturação, os exercícios têm resolução direta, enquanto que nas tarefas exploratórias a resposta é obtida a partir de meios criados pelo próprio aluno.

Com relação às tarefas exploratórias, Ponte (2003) afirma que são aquelas nas quais os alunos não apresentam dificuldade em resolvê-las, pois possuem conhecimento sobre o assunto ali envolvido e assim são consideradas fáceis, havendo liberdade para criar estratégias e traçar objetivos. Assim, uma tarefa exploratória é considerada fácil, e aberta, pois o aluno já domina todo o conhecimento necessário para solucioná-la e é aberta porque envolve exploração e há a possibilidade de o aluno criar uma estratégia para resolver a questão.

Por outro lado, o autor afirma que a investigação tratada como tarefa matemática para levar o aluno a solucioná-la provoca a criação de estratégias e possíveis desdobramentos para chegar aos resultados desejados e é considerada atividade exploratória aberta. Quando a situação investigada é de tal forma que o aluno ainda não tem o domínio de todo o conhecimento necessário para resolver o que lhe foi proposto, esta é classificada como sendo uma tarefa difícil.

Ponte (2003) afirma que os alunos precisam de oportunidades de realizar tarefas matemáticas significativas que lhes permitam raciocinar matematicamente sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva dessas tarefas. Para o autor, isso exige do professor uma abordagem exploratória do ensino retire a vírgula, centrada no trabalho dos alunos quando se envolvem na exploração matemática de tarefas ricas e valiosas.

Para tanto, o autor considera que uma aula para ter um cunho exploratório e investigativo é geralmente estruturada em três ou quatro fases:

- Fase de “lançamento” da tarefa;
- Fase de “exploração” pelos alunos;.
- Fase de discussão e sintetização.

O autor também estabelece alguns critérios a serem observados pelo professor ao propor uma aula com investigação matemática:.

a) *Lançamento da tarefa*: pode ser realizada de forma oral e/ou escrita. A apresentação apenas por escrito aos alunos poderá acarretar uma maior assistência do professor aos grupos, no sentido de ajudá-los a entender o que se pretende. A apresentação oral tem o objetivo de clarificar a tarefa e explicitar o tipo de trabalho que se quer desenvolver com as investigações, criando um ambiente favorável ao desenvolvimento do trabalho dos alunos. Porém, se neste momento o professor fornece considerações em demasia, podem-se perder aspectos importantes da investigação. Por outro lado, se fizer poucas considerações, poderá estar criando obstáculos ao trabalho dos alunos.

b) *Fase de exploração*: nessa fase as interações entre professor-alunos e alunos-alunos assumem uma grande importância. O professor deverá evitar emitir opiniões muito concretas para que os alunos percebam o que se espera deles e adquiram uma visão diferente do papel do professor. A intervenção do professor será diversa em cada grupo, de acordo com as questões levantadas e com as dificuldades que apresentarem. A interação entre os alunos estimula-os a descobrir novas relações entre conceitos, proporcionando-lhes mais segurança nas suas ideias matemáticas, além de estimular o raciocínio, a criatividade e o poder de argumentação.

c) *Fase de discussão e sintetização*: Nessa fase, os alunos serão confrontados com hipóteses, estratégias e justificações diferentes daquelas que tinham pensado. Ao professor, cabe estimular a comunicação entre os alunos.

Devemos chamar a atenção para o papel do professor em uma aula investigativa. Nela, o professor deve proporcionar um ambiente para que seus alunos descubram algo sozinhos, procurando apoiá-los de modo que conduzam suas próprias atividades.

Ponte (2003) ainda destaca que a realização de uma Investigação Matemática envolve quatro momentos principais que podem surgir simultaneamente: Primeiro momento – “o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões”; Segundo momento – processo de formulação de conjecturas; Terceiro momento – realização de testes e refinamento das conjecturas; e Quarto momento – ocorre a argumentação, a demonstração e avaliação do trabalho realizado.

Para o autor, as atividades desenvolvidas durante os diversos momentos da Investigação Matemática estão ao alcance dos alunos na sala de aula. Essas atividades investigativas conduzem o aluno a sucessivos graus de generalização e de abstração que possibilitam a justificação das conjecturas elaboradas no trabalho investigativo. Devemos destacar que a justificação de conjecturas pode não ser simples, uma vez que um dos problemas que podem surgir no desenvolvimento das tarefas investigativas se referem a comunicação oral e escrita, pois os alunos não estão acostumados a escrever e formalizar conceitos matematicamente.

Em uma aula investigativa, cabe ao professor buscar o equilíbrio entre a autonomia necessária ao aluno para o desenvolvimento das atividades investigativas e intervenções que possibilitem sanar as dúvidas dos alunos e mantê-los estimulados a continuar investigando. Para tanto, o professor precisa desempenhar um bom gerenciamento da aula, de modo a desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, fazê-los raciocinar matematicamente, bem como apoiar o trabalho deles.

CAPÍTULO III

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Apresentamos nesse capítulo concepções sobre formação continuada e sobre processos formativos com foco no ensino de probabilidade, sobre conhecimento profissional docente, segundo Shulman e Ponte, sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino, segundo Ball e colaboradores.

3.1 FORMAÇÃO CONTINUADA DO PROFESSOR

A formação continuada é conceituada como um processo permanente de aperfeiçoamento necessário à atividade profissional. Ocorre após a formação inicial e tem o objetivo de complementar a formação docente. Nela, é fundamental criar um espaço de discussão e reflexão que leve em consideração as experiências diárias da prática docente que ocorrem dentro e fora do espaço escolar. (CHIMENTÃO, 2009).

A formação contínua do professor é um espaço propício para discussões sobre as práticas docentes, no qual (retire o onde) o educador deve ser pensador autônomo e prático reflexivo para que sejam comprometidos como a educação de alta qualidade a todos os estudantes (ZEICHNER, 1993).

O contexto histórico da formação continuada, de acordo com Andaló (1995), tem sua gênese em meados de 1960, quando o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais – INEP promoveu, junto ao Instituto de Educação do Rio de Janeiro, um estudo acerca da temática, na época chamado de aperfeiçoamento docente, questionando os professores acerca das suas motivações quanto aos cursos de aperfeiçoamento. Nesse período, verificou-se que os docentes os consideravam pouco satisfatórios, pois não atendiam as necessidades da escola.

A formação continuada foi fortemente impactada durante as décadas de 70 e 80, quando a abertura política e os movimentos em prol da educação, da pesquisa, do avanço científico e tecnológico se intensificaram, ainda nessa década, com a conquista dos direitos políticos, os professores tornaram-se mais participativos nas questões educacionais e os programas de formação continuada tornaram-se de suma importância para os profissionais que almejavam um aprendizado mais profundo e permanente (ALFERES e MAINARDES, 2011).

Na década de 90, os planejamentos de formação continuada passaram a ser voltados para o desenvolvimento tecnológico, globalização, cultura e economia. Ainda nesse período, as influências das associações acadêmicas e profissionais e dos professores das universidades brasileiras passaram a reivindicar que a formação inicial e continuada dos professores fosse realizada nas universidades (SILVA e FRADE, 1997).

No final da década de 90, a formação do professor em serviço foi enfatizada, e surgiu o argumento de que as formações continuadas ou “encontros” dos quais o professor participava não eram suficientes para melhorar a qualidade do ensino, sendo necessário que os professores participassem de forma ativa da construção do saber, ou seja, a formação continuada deveria ser realizada em seu local de trabalho por meio da reflexão diária acerca da sua prática (ALFERES e MAINARDES, 2011).

Nos anos seguintes, a formação de professores no Brasil seguiu o modelo de expansão do Ensino Superior da década de 90. Essa se caracterizou pela criação dos Institutos Superiores de Educação e pela diversificação e flexibilidade da oferta de cursos de formação docente.

Segundo Ponte (1995, 1998), a formação tanto pode favorecer o desenvolvimento profissional do professor quanto pode contribuir para reduzir sua criatividade, sua autoconfiança, sua autonomia e seu sentido de responsabilidade profissional. Para o autor, a noção de formação está associada à ideia de frequentar cursos, em um movimento de fora para dentro, no qual o professor detém o conhecimento e as informações que lhe são transmitidos.

Destacamos que o sentimento sobre formação continuada esteve associado à de frequentar cursos visando alcançar resultados previamente determinados por instâncias externas à escola. Mesmo na última década, persistiam iniciativas dessa natureza, nas quais, a partir de resultados e indicadores obtidos em avaliações em larga escala (nacionais ou regionais), se propunham ações de formação para os docentes visando prepará-los para que pudessem suprir deficiências curriculares apresentadas pelos alunos em tais exames. Tais ações apresentavam, na maioria das vezes, propostas desligadas da realidade vivida pelos professores e desconsideravam os seus saberes, experiências e necessidades.

A insatisfação apontada no início dos cursos de formação, segundo Imbernón (2009), ocorre porque os professores estavam interessados em programas formativos que sinalizassem algum tipo de benefício na sua atuação em sala de aula

o que não ocorria. Esses benefícios constituem de forma individual e coletiva, pois proporcionam melhorias tanto para os alunos quanto para o próprio professor.

Entendemos que a formação continuada tem o objetivo principal de complementar à formação inicial do professor, a formação continuada nasce da reflexão das práticas docentes nas quais o professor identifica suas dificuldades e procura uma solução eficiente que possa melhorar sua postura em sala de aula. Schön (2000) afirma que a prática docente na sala de aula é um dos aspectos das perspectivas formuladas na conceituação de experiência que incluem o conhecimento na prática, o autor aponta que o profissional em seu fazer cotidiano, tem um conhecimento que utiliza para solução de diferentes questões, é um conhecimento tácito, também chamado de conhecimento na prática, que se manifesta de forma espontânea no educador.

Segundo Ferreira (2003), a formação inicial e continuada dos professores que ensinam Matemática tem sido foco de inúmeras pesquisas, propostas, críticas e discussões. A autora enfatiza que as dificuldades inerentes à realização de cursos iniciais de Licenciatura em Matemática e Pedagogia, bem como, os obstáculos encontrados na continuidade dessa formação nos cursos, palestras e seminários voltados para o professor em exercício trazem consigo uma visão ainda dicotômica do processo de desenvolvimento profissional do professor que leciona Matemática. Pensa-se e planeja-se em termos de momentos isolados e predefinidos. Nesse contexto, existe um momento de formação inicial que praticamente não se comunica com o momento de formação continuada.

Acreditamos que o distanciamento entre a teoria (academia) e a prática (escola) pode ser o ponto de partida para a fragmentação e compartimentalização das propostas pedagógicas desenvolvidas, pois estas ocorrem, na grande maioria das vezes, descontextualizadas da realidade do futuro professor e do professor em exercício, desconsiderando suas opiniões, experiências e necessidades.

De acordo com Imbernón (2010) os cursos de formação continuada, principalmente aqueles que trazem propostas para a discussão sobre a existência da relação entre os conteúdos apreendidos na formação e sua eficácia nas aulas dos professores são muito importantes. O autor destaca que as propostas de formação continuada que não inovam, nem inspiram mudanças nos processos educativos, são formações inúteis no sentido de que não trazem mudanças.

Segundo Gatti (2003), os trabalhos sobre formação continuada, ou ligados ao desempenho de professores, têm recebido resistência às novas concepções e habilidades educacionais desses profissionais. Em geral, os mentores e implementadores de programas ou cursos de formação continuada que visam a transformação das percepções e práticas, imaginam que apenas o fornecimento de informações, disposição de conteúdos e o trabalho com a racionalidade dos profissionais de educação resultarão no domínio de novos conhecimentos e estes implicarão mudanças de postura e formas de agir.

Poloni (2010), corrobora com a mesma ideia, e destaca que, em função desses complexos processos cognitivos, sócios afetivos e culturais, tais conhecimentos adquirem sentido ou não, são aceitos ou não, incorporados ou não. Sendo então uma das razões pelas quais tantos programas que visam mudanças de postura docente mostram-se ineficazes.

Este aspecto também é comentado por Ferreira (2003) que propõe um olhar contrário ás visões parciais que privilegiam momentos vistos como isolados, propondo então uma prática que contemple o desenvolvimento dos aprendizes, sugerindo situações capazes de promover, por meio de colaboração entre professores, a desmistificação entre a prática profissional do professor e a investigação educacional, bem como a separação entre as escolas e as universidades e, em última análise, a teoria e da prática.

Segundo Fiorentini (2008), o saber não é isolado, ele é partilhado e transforma-se, modifica-se a partir da troca de experiência e da reflexão coletiva com outros. O autor destaca que além das parcerias, os momentos em grupo permitem a ressignificação de saberes e práticas. Nesse contexto, o grupo se torna importante como espaço de questionamentos, apresentação de dúvidas, debates, reflexões e busca ou tentativas de construção de respostas, gerando maior segurança ao professor no desenvolvimento de suas práticas em sala de aula.

Vale notar a contribuição de Martins (2005), que argumenta em favor da interação, defendendo que o homem se constitui enquanto tal no confronto com as diferenças, sendo um dos laboratórios privilegiados a escola, onde somos reunidos com diferentes realidades e, no conjunto de tantas vozes, completamos por acordar significados para determinadas coisas que na personalidade de cada um pode ter diversos sentidos.

Sendo assim, destacamos que, a formação continuada vem ao encontro da necessidade de desenvolvimento permanente, pois a sociedade está em constante transformação e exige profissionais capazes de lidar com demandas diversas.

O curso de formação continuada proposto nessa pesquisa teve como foco o trabalho com o conhecimento matemático, mais específico de Probabilidades, por meio de discussões coletivas, buscando trabalhar com aulas investigativas, com a consciência de que os professores precisam buscar informações em outros componentes do currículo e em medidas socioculturais no intuito de disseminar e desmistificar o estudo de Probabilidade, levando em consideração a subjetividade do aluno, respeitando-o e interagindo com as experiências que esse aluno traz da vida.

Não podemos negar que é comum tornar-se professor sem conhecer os desafios e a realidade da sala de aula. Assim sendo, sem qualquer experiência prática, muitas vezes o professor opta pela mera reprodução das práticas docentes que vivenciou ao longo dos anos enquanto alunos. Klein (2009) destaca que os estudantes universitários são confrontados com problemas que nada têm a ver com o que estudaram, assim, ao concluírem o curso superior se tornam professores, enfrentam a necessidade de ensinar a matemática elementar na forma adequada ao grau de ensino, primário ou secundário, a que se dedicam, e como não conseguem estabelecer praticamente nenhuma relação entre esta prática e a Matemática que aprenderam na universidade, facilmente aceitam o ensino tradicional, ficando os estudos universitários como uma memória mais ou menos agradável que não influencia sua forma de ensinar.

Para Zeichner (1993), os formadores de professores têm a obrigação de ajudar professores a interiorizarem durante a formação, a disposição e a capacidade de ensinar com o tempo, responsabilizando-os pelo seu desenvolvimento profissional. O autor ainda destaca que, não importa o que fazemos nos cursos de formação de professores, na melhor das hipóteses, podemos apenas preparar os professores para começar a ensinar.

Este aspecto também é comentado por Imbernón (2009), o autor busca propostas para melhorar os programas voltados à formação continuada de professores, sendo este o seu principal foco de suas pesquisas. O autor destaca que a construção de conhecimentos por parte do professor está muito ligada à prática profissional e condicionada pela organização da instituição educacional em que esta é exercida.

Nesse sentido, Schön (1983) propõe uma prática mais reflexiva, defendendo a necessidade da formação continuada como maneira de o profissional perceber as questões emergentes da prática, promover o debate sobre elas e contribuir para a ampliação da ciência. Ainda de acordo com o autor, a reflexão é o eixo norteador de todo o trabalho docente que perpassa pelos saberes escolares e faz fronteira com as habilidades técnicas e os conhecimentos científicos. Nesse sentido, ele propõe processos formativos que levem os professores a reflexão e que considerem que a formação atinja a totalidade dos sujeitos, de forma que nenhum conhecimento fique à margem.

Ball e Cohen (1996) afirmam que professores aprendem melhor por meio do estudo, fazendo e refletindo, colaborando com outros professores, olhando atentamente para os alunos e seu trabalho, e compartilhando o que eles veem.

Acreditamos que uma formação é bem-sucedida quando os docentes dão maior ênfase à reconstrução de conhecimentos para melhorar a sua prática. É o que Imbernón (2009) denomina de tradição na formação continuada, ou seja, consiste na atualização dos professores com vista à ação prática. Dessa forma, percebemos que é imprescindível analisar as contribuições no processo de formação continuada de professores, questionando as suas possíveis contribuições na formação de um profissional para que contribua efetivamente para o processo de construção de conhecimento de seus alunos.

Llinares (2013) nos alerta que as contínuas mudanças na forma e na estrutura da formação dos professores de matemática é reflexo da compreensão insuficiente que temos ainda sobre os conhecimentos necessários para se ensinar matemática e, também, sobre como esse conhecimento é gerado na mente do professor. Assim, inúmeras pesquisas na área da Educação Matemática têm sido desenvolvidas com foco em compreender os conhecimentos necessários ao professor, a prática de ensino e como se dá o processo de aprendizagem profissional. O levantamento das “tarefas profissionais” docentes, como diz o autor, tem sido feita a partir das investigações sobre cognições dos professores e podemos afirmar que é consenso entre os investigadores que os programas formativos devem considerar a integração de conhecimentos científicos e dos práticos.

Neste sentido, a formação docente deve se preocupar com o conhecimento prático do professor que é, como ensina Ponte (1995), o gerado na perspectiva da prática e é caracterizado como um conhecimento em ação, apoiado na experiência, na reflexão sobre a experiência e no conhecimento teórico.

A ideia de prática, na perspectiva sociocultural, enfatiza a relação entre os conhecimentos e as situações de uso dos mesmos e de sua construção. A gestão do processo de ensino se articula com as tarefas profissionais mediante o uso de alguns instrumentos. Em suma, a prática profissional do professor indica tudo o que o professor faz, as tarefas profissionais e os instrumentos que utiliza (LLINARES, 2002). São tarefas profissionais: desenhar situações de aprendizagem para os alunos, selecionar e modificar tarefas, atividades e problemas; organizar e sequenciar o conteúdo a ser apresentado, interagir com os alunos e gestar o conhecimento matemático durante as interações em aula; analisar e dotar de sentido as produções matemáticas dos alunos; diagnosticar e avaliar. Quanto aos instrumentos – considerados como qualquer meio, coisa ou pessoa de que alguém se serve para um fim – podemos considerar que o professor no desempenho das tarefas profissionais utiliza instrumentos técnicos e instrumentos conceituais. Os técnicos (ou físicos) são aqueles que, na prática, o professor lança mão para conseguir impulsionar a aprendizagem matemática dos alunos, são os materiais didáticos, os softwares, os recursos audiovisuais, entre outros. Os instrumentos conceituais são os problemas típicos, as diferentes estratégias para a resolução do problema, a modelagem em matemática e as construções que permitem compreender a realidade fazendo uso da Matemática (Llinares, 2002).

Duas ideias são fundamentais nessa perspectiva para a formação docente: que o conhecimento se mobiliza com o uso dos instrumentos (físicos e conceituais) e que a aprendizagem se constata pela transformação da pessoa mediante a participação docente em função da natureza das tarefas e das atividades que passam a resolver.

Vale destacar que as considerações de Llinares (2002) se referem à formação inicial de professores e à aprendizagem profissional; entretanto, entendemos que os processos citados são similares aos que ocorrem na formação continuada, especialmente se considerarmos a aprendizagem ao longo de toda a vida profissional do docente. Assim sendo, nos subsidiaram quanto à análise dos dados desta pesquisa.

Refletir na formação continuada sobre as concepções de probabilidade dos professores, bem como conhecer suas ideias em relação a elas, foi oportunizado na formação continuada, como momento que pudéssemos evoluir em relação as nossas aulas. Uma vez que na formação inicial, muitas vezes esses momentos não disponibilizados.

Quanto à formação continuada com enfoque no ensino de probabilidade, o suporte teórico veio das investigações nesta área, tais como as de Azcárate (1996), Lopes (2008) (Gonçalves (2004), Cirino (2007) e Batanero (2005) e Cazorla (2002), os quais apresentam resultados e indicações que discutimos a seguir.

Cazorla (2002) tem apontado sérios entraves na formação docente em relação ao ensino de Probabilidade. Para a autora, os conhecimentos dos professores sobre Probabilidadesão, por vezes, insuficientes para o exercício da docência, já que, além dos conhecimentos dos conteúdos probabilísticos, ela exige também conhecimentos didáticos específicos.

A pesquisadora espanhola Pilar Azcárate Goded (1996), em sua investigação com professores primários, buscou informações sobre concepções de probabilidade que pudessem auxiliar na preparação de cursos de formação docente. Para tanto, definiu quatro categorias de concepções probabilísticas que possibilitaram a elaboração de um modelo explicativo de hipóteses do conhecimento probabilístico dos sujeitos. A pesquisadora utilizou esse modelo como referência na organização, na interpretação de dados e na formulação de hipóteses de progressão em suas investigações. Em conclusão, identificou quatro categorias de concepções de Probabilidade, que são: Não Probabilística da Realidade, Probabilística Intuitiva, Probabilística Emergente e Probabilística Normativa.

A concepção Não Probabilística da Realidade refere-se à incompreensão sobre chance e aleatoriedade. As respostas são baseadas em crenças e critérios e / ou resultados imediatos. Já a concepção Probabilística Intuitiva remete a alguma compreensão sobre chance e sua relação com a aleatoriedade, com o raciocínio baseado no uso heurístico de juízo, com as respostas sendo baseadas em modelos não normativos, com valores diferentes, dependendo da experiência pessoal.

A concepção Probabilística Emergente refere-se à aceitação e compreensão das várias representações matemáticas de chance. Assim, inclui a compreensão de alguns modelos probabilísticos e capacidade de aplicações de alguns casos (problemas simples e familiares). O indivíduo diferencia as crenças intuitivas dos modelos matemáticos. Por fim, a concepção Probabilística Normativa espelha uma profunda compreensão dos modelos probabilísticos e sua aplicação em várias situações. Capacidade de comparar/confortar diferentes situações de aleatoriedade em diferentes modelos.

Os resultados deste estudo pioneiro apontaram a relevância em se discutir nos processos formativos as diversas concepções de Probabilidade.

Vale destacar que a partir dos estudos que empreendemos sobre significados de Probabilidade, adotamos no processo formativo aqui investigado as abordagens de professores na forma descrita na pesquisa de Gonçalves (2004), embora ele tenha usado o termo abordagem, optamos por utilizar definições. Uma vez que coincidiu com as definições de Probabilidade que os professores participantes optaram em estudar durante o curso de formação continuada. Sendo assim, pPreocupamo-nos em discutir aspectos relacionados à construção das noções de Probabilidade e sua importância. Buscamos também, ampliar os conhecimentos dos professores e as situações de uso de materiais e instrumentos de modo subsidiá-los nos processos de ensino e de aprendizagem, para discutir as abordagens metodológicas e maneiras de apresentação do ensino de Probabilidade.

3.2 CONHECIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE

O conhecimento profissional, segundo Ponte e Oliveira (2002), é o conhecimento relativo à prática letiva na sala de aula e a outros papéis profissionais, tais como a tutoria de alunos, a participação em atividades e projetos da escola, a interação com membros da comunidade e o trabalho em associações profissionais. Esse conhecimento inclui ainda, num outro plano, a visão do professor sobre o seu próprio desenvolvimento profissional.

Segundo Moreira (2004), além de ser estrategicamente importante no planejamento e execução do trabalho pedagógico, o conhecimento profissional potencializa positivamente a comunicação professor-aluno, aumentando as possibilidades de compreensão, por parte do professor, das dúvidas colocadas pelos alunos.

Para Schön (1983), é na ação e para a ação que se manifesta e evidencia o conhecimento profissional do professor, sendo o conhecimento na ação o modo característico do conhecimento prático. O autor afirma ainda, que é na ação que se reflete o ser professor, manifestando sua concepção de Educação, suas crenças frente ao conhecimento e sobre a maneira de construí-lo

Segundo Klein (2009), o conhecimento dos professores deve abranger muito maior do que aquele que deve ensinar a seus alunos. Sobre os conhecimentos

relativos aos conteúdos necessários para o ensino na escola básica, o autor considera que o professor não deve somente ter conhecimento específico sobre os conceitos e as teorias que ensina, mas também saber relacioná-los e articulá-los, compreender a sua natureza científica e sua evolução histórica, de forma a desenvolver uma visão ampla o suficiente para situá-los no panorama da Matemática como ciência.

Klein foi um matemático que teve uma grande contribuição para o ensino da Matemática, sua principal obra intitulada Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior [tradução portuguesa] originou-se de notas preparadas para um curso de formação de professores na Universidade de Göttingen, o livro foi publicado em 1908 e 1909. Klein tinha a intenção de chamar a atenção dos professores de Matemática para o valor do estudo acadêmico, principalmente na Matemática pura (RANGEL, 2015)

Optamos, dentre muitos marcos teóricos relativos ao conhecimento profissional dos professores, utilizar os desenvolvidos por Shulman, Ball e colaboradores e por Ponte. A opção se justifica pelo objetivo da pesquisa que corresponde a identificação do conhecimentos aos quais os professores recorrem para exercer a docência.

3.2.1 Teoria da Base de Conhecimentos

O referencial teórico de Shulman nos subsidia para refletir em processos de formação sobre o conhecimento base para o ensino, ou seja, o que é categoricamente necessário. O autor destaca que se deve dedicar às questões do conhecimento pedagógico, conhecimento dos alunos, bem como à integração curricular do conteúdo, todos, necessários a uma boa prática docente, ressaltando a necessidade de uma formação sólida do conteúdo específico.

Para caracterizar o conhecimento profissional para o ensino, Shulman (1986) considerou que cada área do conhecimento tem uma especificidade própria que justifica a necessidade de estudar o conhecimento do professor tendo em vista a disciplina que ele ensina. O autor identifica as categorias dessa base de conhecimento como sendo composta por:

- Conhecimento específico do conteúdo;
- Conhecimento pedagógico geral;

- Conhecimento do currículo;
- Conhecimento pedagógico do conteúdo;
- Conhecimento dos alunos e de suas características;,
- Conhecimentos dos contextos educacionais;
- Conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais.

Essas sete categorias foram agrupadas pelo autor em três eixos quando se refere ao conhecimento da disciplina para ensiná-la; **Conhecimento Específico do Conteúdo, Conhecimento Pedagógico Geral, Conhecimento do Currículo.**, Embora as fronteiras específicas e nomes das categorias variaram dentre publicações. Essas categorias objetivavam ressaltar a importância do papel do conhecimento do conteúdo e situar o conhecimento baseado em conteúdo no amplo horizonte do conhecimento profissional para o ensino.

A primeira categoria de Shulman destaca conhecimento específico do conteúdo. Nessa categoria, inclui o conhecimento do assunto e suas estruturas organizacionais. O autor destaca categoria categoria que saber um assunto para ensiná-lo requer mais do que saber os seus fatos e conceitos. Professores devem também entender os princípios organizadores e estruturas e as regras para estabelecer o que é autêntico fazer e dizer em uma área. O professor não deve apenas entender que alguma coisa é de tal modo, o professor deve entender mais profundamente porque uma coisa é de tal modo, em que bases a sua garantia pode ser afirmada e sob quais conjunturas a nossa confiança na sua justificativa pode ser enfraquecida ou negada.

A segunda categoria de Shulman é a do conhecimento pedagógico do conteúdo. O autor definiu esta categoria como sendo a que inclui o conhecimento das formas mais úteis de representação e de ideias, as mais fortes analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações - em uma palavra, a maneira mais útil de representar e formular o assunto que as torna compreensível aos alunos. Para o autor, o conhecimento pedagógico do conteúdo também inclui uma compreensão do que torna o aprendizado de um tópico específico fácil ou difícil, os conceitos e preconceitos mais frequentes que os estudantes de diferentes idades e experiências trazem consigo para o aprendizado daqueles tópicos e das atividades desenvolvidas.

A terceira categoria, conhecimento curricular, é representada por determinados assuntos e tópicos em níveis diferentes, a variedade de material didático disponível com relação àqueles programas, ao conjunto de características que servem como indicadores para o uso de um determinado material do programa, em determinadas circunstâncias. Shulman destaca que nessa categoria o que está sendo ensinado aos estudantes, ou seja, em outras classes, em outras disciplinas, bem como, questões que têm sido e serão ensinadas na mesma área ou disciplina durante anos ou séries anteriores e posteriores na escola, e os materiais que os compõem.

Dessa forma, devemos destacar que Shulman não procurou construir uma lista ou catálogo do que os professores precisam conhecer em qualquer matéria em particular. O seu estudo procurou prover uma orientação conceitual e um conjunto de distinções indutivas que focalizam a atenção da pesquisa e comunidades na natureza e tipos de conhecimento necessários para ensinar um assunto.

Depois de Shulman vários pesquisadores desenvolveram e desenvolvem pesquisas sobre o conhecimento profissional dos professores. Dentre eles, destacamos nesta pesquisa as ideias de Deborah Ball e de João Pedro da Ponte.

3.2.2 Uma Teoria sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino

A pesquisadora americana Deborah Ball e sua equipe têm estudado a natureza do conhecimento matemático necessário para ensinar desde 1999. Eles têm desenvolvido instrumentos de análise das relações entre o conhecimento matemático dos professores, qualidade do seu ensino e o desempenho dos alunos.

Ball, Thames e Phelps (2008) apontaram que os dois grandes domínios do conhecimento estabelecidos por Shulman (1986), – Conhecimento do Conteúdo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo – poderiam ser divididos em três subdomínios cada. O Conhecimento do Conteúdo (poderia ser subdividido em Conhecimento Comum do Conteúdo (do inglês *Common Content Knowledge*– CCK), Conhecimento Especializado do Conteúdo (do inglês *Specialized Content Knowledge*– SCK) e o Conhecimento Horizontal do Conteúdo (do inglês *Horizontal Content Knowledge*– HCK). Enquanto o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Shulman, 1986) poderia ser subdividido em Conhecimento do Conteúdo e os Estudantes (do inglês *Knowledge of Contentand Students*– KCS), Conhecimento do

Conteúdo e o Ensino (do inglês *Knowledge of ContentandTeaching* – KCT) e Conhecimento do Conteúdo e o Currículo (do inglês *Knowledge of Contentand Curriculum*– KCC).

Desta forma, esses autores apresentam os conhecimentos matemáticos que são exigidos para o trabalho docente em seis categorias:

A primeira categoria é o conhecimento comum do conteúdo (CCK), definido pela autora comoconhecimento matemático usados em situações outras que não as de ensino. Os autores ainda destacam que os professores precisam conhecer a matéria que ensinam, devem reconhecer quando seus alunos dão respostas erradas e também quando os livros dão uma definição imprecisa. Quando professores escrevem no quadro, eles precisam usar termos e notações corretamente. Em suma, eles devem ser capazes de fazer o trabalho que atribuem aos seus estudantes. Entretanto, isso requer conhecimentos e habilidades matemáticas que os outros também têm. assim sendo, isso não é especial ao trabalho de ensinar, em outras palavras, não é exclusivo ao ensino.

A segunda categoria, o conhecimento do conteúdo especializado (SCK), é o conhecimento de habilidades matemáticas exclusivas ao ensino. Os autores destacam que SCK é o conhecimento matemático que não é normalmente necessário para outros fins que não o ensino. São características do (SCK), por exemplo, a procura por padrões em erros dos estudantes, avaliar se uma abordagem funcionaria em geral,ou seja, os professores têm que fazer um tipo de trabalho matemático que os outros indivíduos realizam . As demandas matemáticas do ensino requerem conhecimento matemático não necessário em outros cenários.

A terceira categoria é a do conhecimento horizontal do conteúdo (HCK). Este conhecimento se apresenta quando o professor tem a consciência do inter-relacionamento entre os conteúdos matemáticos.

A quarta categoria conhecimento do conteúdo e estudantes (KCS). Este rconhecimento que combina o saber sobre estudantes e sobre a matemática. Os professores devem antecipar o que os alunos podem pensar e também o que eles vão considerar obscuro. Ball *et.all* (2008) destacam que, antes de propor uma atividade, os professores precisam se antecipar sobre o que os estudantes vão achar interessante e motivador. Os professores precisam prever o que os alunos fariam ao desenvolver as atividades propostas e se eles as consideram fáceis ou difíceis, devem ser capazes de ouvir e interpretar o pensamento emergente e

incompleto dos estudantes, bem como a forma pela qual os estudantes usam a linguagem. Todas as atividades exigem uma interação entre o entendimento matemático específico e a familiaridade com os estudantes e seu pensamento matemático.

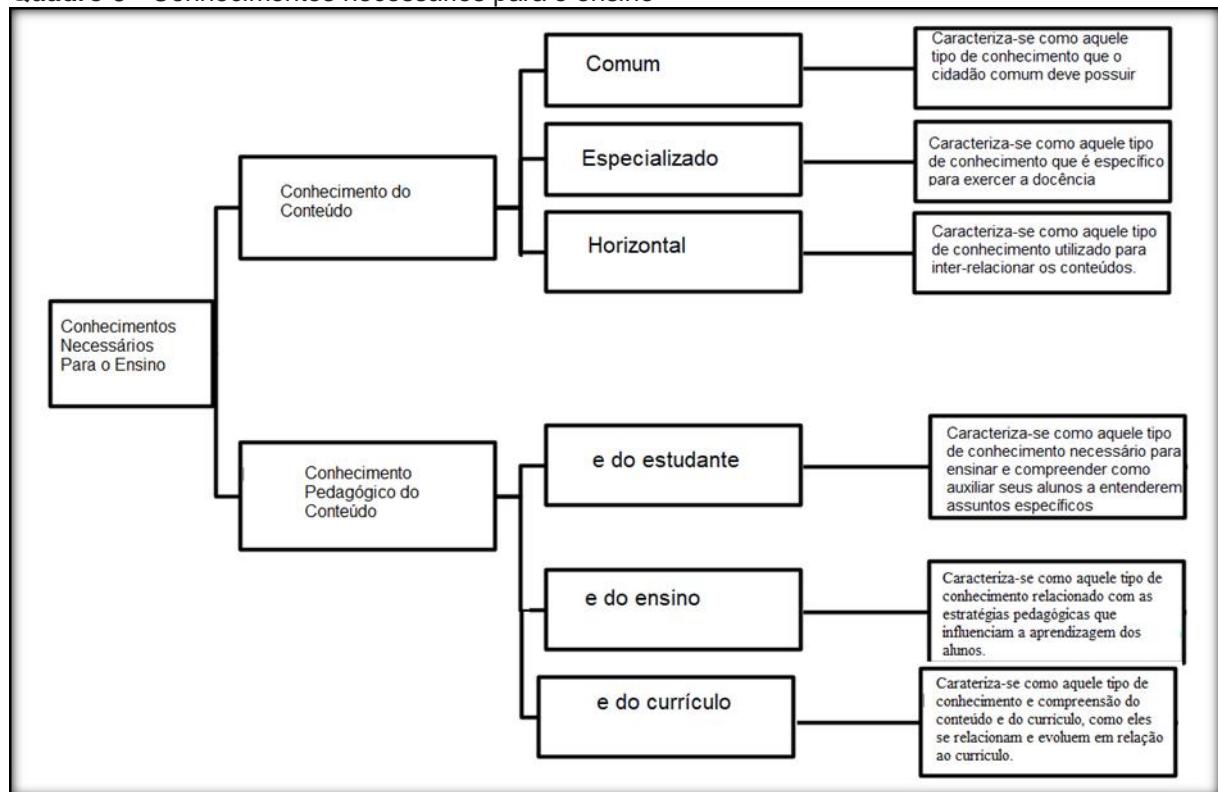
Desta forma, Ball *et.al/* (2008) destacam que, ao reconhecer uma resposta errada, o professor mobiliza o conhecimento do conteúdo comum (CCK), enquanto para avaliar a natureza de um erro, especialmente um erro desconhecido, normalmente é preciso agilidade no pensamento, atenção aos padrões e pensamento flexível sobre os significados. Nesse caso, está envolvido o conhecimento do conteúdo especializado (SCK). Em contraste, familiaridade com erros comuns e decidir quais dos vários erros dos estudantes são mais propensos a fazer são exemplos de conhecimento de conteúdo e estudantes (KCS).

A quinta categoria é o conhecimento do conteúdo e ensino (KCT), o qual combina o conhecimento sobre ensino e sobre Matemática. Os autores destacam que muitas das tarefas matemáticas de ensinar requerem um conhecimento matemático da elaboração da instrução. Os professores sequenciam conteúdo específico para lecionarem. Eles escolhem com quais exemplos começar e quais exemplos usar para levar os estudantes a se apropriarem de forma mais aprofundada do conteúdo. Professores avaliam as vantagens e desvantagens instrucionais de representações usadas para ensinar uma ideia específica e identificar quais métodos e procedimentos diferentes valem a pena. Cada uma dessas tarefas requer a interação entre conhecimento matemático específico e o entendimento de questões pedagógicas que afetam a aprendizagem do estudante.

A sexta categoria é o conhecimento do conteúdo e do currículo (KCC), o qual os autores consideram que é o conhecimento que combina as informações das finalidades, dos programas a um dado nível de ensino, isto é, que conteúdos devem aprender os alunos e quais as suas orientações na aprendizagem. Além disso, o professor deverá ser detentor do conhecimento sobre a variedade de materiais, as indicações e as contraindicações do uso de materiais particulares, em dadas situações. Ou seja, para os autores, o professor identificar e analisar pressupostos do currículo que desenvolverá. Conhecer como um determinado tema pode ser desenvolvido nas diferentes séries e graus de ensino, bem como sua relação com outros temas da Matemática e de outras disciplinas; conhecer as orientações, as recomendações, as estratégias para o ensino e como explorar diferentes materiais didáticos.

Os autores Ball,; ThamesPhelps (2008) agruparam as seis categorias de conhecimentos necessários para o ensino em duas: Conhecimento do Conteúdo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. Esses autores consideraram essas duas categorias representam o conhecimento necessário para ensinar e a compreensão do professor de como ajudar os alunos a entenderem determinados assuntos.

Quadro 5 - Conhecimentos necessários para o ensino



Fonte: Elaboração própria com base em Ball, Thames e Phelps (2008)

Ball e Bass (2003) enfatizam que a aprendizagem dos alunos se relaciona muito com a qualidade do conhecimento dos professores. Desta forma, os autores chamam a atenção para os professores de Matemática questionando, o que os professores de matemática precisam saber para ensinar de forma eficaz.

Desta forma, buscamos no curso de formação continuada sobre o ensino de Probabilidade por meio das aulas investigativas, oportuniza aos professores de Matemática, a possibilidade de sanar desconfortos gerados pela falta de conhecimentos específicos do conteúdo e a falta de conhecimentos pedagógicos sobre Probabilidade, bem como sobre como administrar tal conteúdo, no que tange às estratégias de ensino.

3.2.3 Conhecimento profissional docente na perspectiva de Ponte

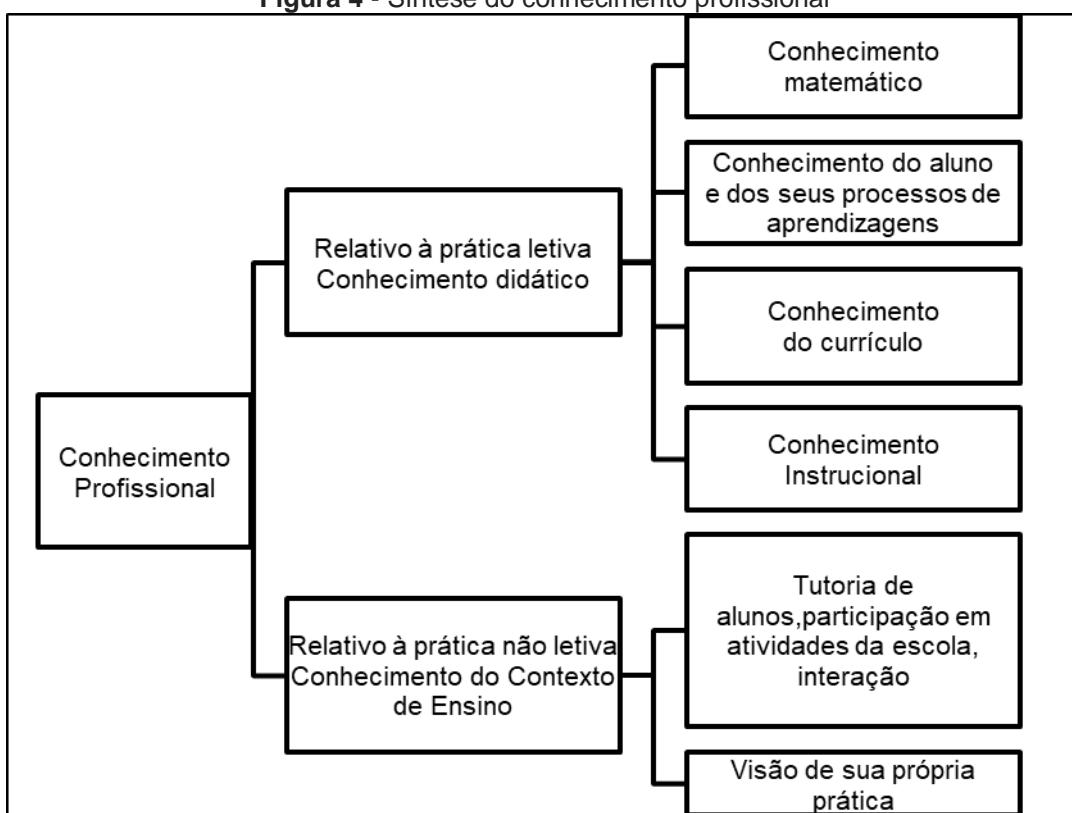
O pesquisador português João Pedro da Ponte tem, desde os anos 80, investigado a formação docente, especificamente a do professor de Matemática, seu conhecimento profissional e suas práticas pedagógicas.

Ponte (1995) afirma que o conhecimento profissional é o necessário a qualquer profissional para desempenhar sua atividade com sucesso. Considera que as atividades profissionais envolvem tanto os processos de rotina da docência quanto à resolução de problemas concretos do cotidiano, isto é, constitui o conhecimento profissional. Para o autor, o professor que ensina Matemática, em sua relação com seus alunos e com seus colegas, necessita perceber, intuitivamente, as problemáticas da sala de aula, articular positivamente seu pensamento para criar estratégias de ação, de improvisação e de respostas rápidas às situações novas de seu cotidiano.

Ponte (1995) estabelece para o conhecimento profissional dos professores dois domínios: o conhecimento relacionado à prática letiva, ou seja, o conhecimento didático, e o conhecimento sobre as ações relativas à prática não letiva, ou seja, conhecimento do contexto de ensino. O autor ressalta que nesse conhecimento relacionado ao contexto de ensino está a tutoria de alunos, a participação em atividades da escola, o conhecimento da comunidade na qual está inserido o sistema escolar, os valores e cultura da comunidade envolvente, e o conhecimento da visão de sua própria prática, ou seja, conhecimento de si mesmo, tudo que o professor sabe de si próprio, sua autoconfiança, seus recursos e suas capacidades.

A Figura 4 sintetiza os dois domínios.

Figura 4 - Síntese do conhecimento profissional



Fonte: Elaboração própria

Ponte (1995) enfatiza, ainda, que uma parte do conhecimento profissional do professor ocorre diretamente em sua prática letiva. Esta parte foi denominada conhecimento didático e desdobrada por ele em quatro vertentes: o conhecimento da Matemática, do currículo, dos processos de aprendizagem dos alunos sob sua responsabilidade - o que inclui o conhecimento do aluno - e o conhecimento do processo instrucional.

O conhecimento didático orienta o professor nas situações da prática escolar e está intimamente ligado à leitura que ele faz de si mesmo e do contexto social em que ele e seus alunos estão inseridos. Esse conhecimento é o responsável pelas intervenções do professor com seus alunos.

A primeira vertente do conhecimento didático refere-se ao conhecimento da Matemática que, para Ponte, diz respeito à disciplina a ensinar, na perspectiva do ensino. Ou seja, está ligada à interpretação e tradução que o professor faz dessa ciência como disciplina escolar. Para o autor, tal conhecimento vai além dos conceitos e procedimentos fundamentais da disciplina, engloba às formas de representação desses mesmos conceitos, bem como a perspectiva geral sobre a

Matemática, incluindo as conexões internas e externas à disciplina. Sendo considerada aqui, a visão que o professor tem da Matemática, como um todo integrado. Isto é, o conhecimento que o professor tem da Matemática é o seu traço mais distintivo relativamente ao conhecimento dos professores de outras disciplinas.

Para Lobo da Costa e Poloni (2012), é a partir do conhecimento da Matemática que o professor desenvolve as metodologias e formas que utiliza ao ensinar. Na Matemática, os conceitos podem ser apresentados por meio de várias representações, incluindo as gráficas, as simbólicas e as tecnológicas.

A segunda vertente do conhecimento didático é o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem. O autor destaca que conhecer os seus alunos como pessoas, os seus interesses, os seus gostos, a sua forma habitual de reagir, os seus valores, as suas referências culturais e o modo como aprendem são condições decisivas para o sucesso do trabalho do professor. O professor tem sempre as suas teorias sobre os alunos, nem sempre compatíveis com as teorias acadêmicas dominantes. No entanto, não é a correspondência do conhecimento do professor com o conhecimento acadêmico que está em causa, mas o fato do seu conhecimento sobre estas questões ser fundamental para o exercício do seu papel profissional.

A terceira vertente do conhecimento didático de Ponte diz respeito ao currículo e ao modo como o professor faz a gestão curricular. Isso inclui o conhecimento das grandes finalidades e objetivos do ensino da Matemática, bem como a organização dos conteúdos, o conhecimento dos materiais e das formas de avaliação a utilizar. Este conhecimento tem um papel fundamental na tomada de decisões sobre os assuntos a que deve dedicar mais tempo, as prioridades a considerar a cada momento, e a forma de orientar os processos de ensino e de aprendizagem.

A quarta vertente relativa à prática letiva é o conhecimento instrucional e constitui o núcleo fundamental do conhecimento didático. Trata do conhecimento docente posto em ação na instrução propriamente dita. Inclui organização a longo e médio prazo, bem como o plano de cada aula, a concepção das tarefas e tudo o que diz respeito à condução das aulas de Matemática. É este conhecimento que, em última análise, permite que o professor defina as principais metas a atingir, a criação de uma cultura de aprendizagem na sala de aula, decida sobre o ambiente de aprendizagem, selecione as melhores formas de representar os conteúdos, idealize

e concretize materiais e tarefas didáticas e seja capaz de avaliar o processo didático, em particular a aprendizagem dos alunos e do ensino do próprio professor.

Indo ao encontro das ideias de Ponte, entendemos que o processo de formação do professor deve ser, sobretudo, um processo de desenvolvimento profissional. Este processo envolve o progressivo desenvolvimento das suas potencialidades, a construção de novos saberes, sendo marcado pelas dinâmicas sociais e coletivas e depende de modo fundamental da forma como se articulam os interesses, necessidades e recursos do professor e do seu contexto profissional.

Sendo assim, a ideia de que o professor é o principal agente da sua formação não implica que os educadores matemáticos deixem de ter responsabilidades como formadores de professores, pelo contrário, cabe-lhes encontrar formas apropriadas para favorecer os processos naturais de desenvolvimento profissional do professor.

Para Ponte (1995), o conhecimento didático é o das representações matemáticas, não se pode distanciar do conhecimento do conteúdo, uma vez que se refere ao modo como a Matemática deve ser apresentada aos alunos na situação de aula. Para o autor, o professor que ensina Matemática, em sua relação com seus alunos e com seus colegas, necessita perceber, intuitivamente, as problemáticas da sala de aula, articular positivamente seu pensamento para criar estratégias de ação, de improvisação e de resposta rápida a situações novas de seu cotidiano e sua interpretação e tradução que faz dessa ciência como disciplina escolar.

Percebemos que o termo instrução que vem de Portugal, para nós brasileiros, tem o mesmo significado de instrutores. Se trata de ação de desempenhar o ato propriamente dito do ensino. Sendo assim, inclui aspectos mais elementares da pedagogia, como:: a organização e gestão da sala de aula, explicações claras e descrições de experiências anteriores, avaliação contínuo do trabalho, interação eficaz com os alunos, abertura para questionamentos, respostas, elogios e críticas. Ou seja, inclui gestão, explicação, discussão e todas as características efetivas dos processos de ensino e de aprendizagens.

Sendo assim, entendemos que a última vertente do conhecimento didático de Ponte está inserida em todas as categorias de Shulman e também de Ball e colaboradores. Uma vez que a preparação a longo e médio prazo, bem como o plano de cada aula, a concepção das tarefas e tudo o que diz respeita à condução das aulas, bem como as formas de organização do trabalho dos alunos, a criação de uma cultura de aprendizagem na sala de aula, o desenvolvimento e a regulação da

comunicação e a avaliação das aprendizagens dos alunos, ensino e do próprio professor.

Nesta pesquisa, o foco está no processo de formação continuada e na construção/reconstrução do conhecimento base para o ensino. Assim busca refletir acerca dos significados de probabilidades proposto por Gonçalves (2004), as categorias sobre conhecimento profissional para o ensino, segundo Shulman (1986), as seis categorias de Ball e colaboradores, sobre os conhecimentos matemáticos que são exigidos para o trabalho do professor de Matemática e as vertentes do conhecimento didático de Ponte relativo à prática letiva (Conhecimento Instrucional). Com essa base teórica, vista de forma integrada empreendemos as análises.

Após análise das referências, percebemos que o trabalho de Shulman (1986), foi uma inspiração para Ball e colaboradores (2008), que baseado em Shulman apresentam o que denominaram Conhecimento Matemático para o Ensino, enfatizando este conhecimento como algo que os diferenciam de outros profissionais. Esses autores chamam a atenção para a aprendizagem dos alunos, uma vez que esta prerrogativa está intimamente ligada a qualidade do conhecimento dos seus professores.

Enfatizamos que a pesquisa está voltada para aulas de probabilidade por meio de atividades investigativas. Assim sendo, na formação buscamos propiciar momentos de reflexão dos professores participantes, visando o aprofundamento de conceitos e significados de probabilidade. As atividades propostas visaram contribuir para o desenvolvimento de um conhecimento mais aprofundado do conteúdo de probabilidade, para aplicação nas salas de aula nos anos Ensino Médio, intencionamos impulsionar o conhecimento matemático que se fazia presente no tocante para o ensino de Probabilidade, bem como melhoria nos processos do ensino e da aprendizagem deste conteúdo em níveis de ensino subsequentes.

CAPÍTULO IV

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, são apresentadas a descrição do processo formativo e das atividades desenvolvidas nos encontros e, na sequência, a análise dos dados coletados na fase de campo da pesquisa, tais como questionários aplicados e a análise do processo formativo, por meio de eventos críticos identificados.

4.1 DESCRIÇÃO DO PROCESSO FORMATIVO

A formação continuada teve a participação de 12 professores. Ocorreu semanalmente e de início o grupo foi composto por 10 membros, o pesquisador (também formador) e 9 professores. Ao iniciar o curso, outras três professores se juntaram ao grupo, totalizando os 12 sujeitos. O pesquisador exerceu o papel de coordenador e formador da equipe ficando encarregado de assistir e filmar os encontros do curso e apresentar as filmagens durante os encontros de socialização.

Durante o processo formativo, foram realizadas atividades, como: leitura de textos relacionados a conteúdos de Probabilidade e também textos sobre aulas investigativas e exploratórias; elaboração de atividades investigativas para as aulas dos professores participantes; debate sobre a postura de cada um na aula investigativa.

Uma síntese dos encontros do curso está exposta no quadro a seguir:

Quadro 6 - Síntese dos encontros do curso de formação continuada

Encontro	Desenvolvimento
Primeiro	Apresentação do projeto; Apresentação em PPT – atividades investigativas; Discussão de texto sobre a definição de atividade investigativa; Aplicação do questionário 1.
Segundo	Reflexão sobre primeiro encontro; Discussão de texto sobre Atividades investigativas e suas Características; Discussão a postura do professor em aula investigativa;

	<p>Aplicação do questionário 2;</p> <p>Discussão de texto sobre definições de Probabilidade (clássica e geométrica) ;</p> <p>Proposta de conversão de um problema de Probabilidade geométrica em uma tarefa investigativa.</p>
Terceiro	<p>Reflexão sobre os raciocínios aplicados nas resoluções do questionário 2;</p> <p>Apresentação em PPT sobre definições de Probabilidades;</p> <p>Proposta e elaboração de uma Tarefa Investigativa sobre Probabilidade; Geométrica usando os CDs, bola de gude.</p>
Quarto	<p>Discussão de texto sobre as fases e processos para desenvolver uma aula investigativa.;</p> <p>Elaboração da Tarefa Investigativa sobre Probabilidade Geométrica usando os CDs, bola de gude para a construção da roleta.</p>
Quinto	<p>Discussão de texto sobre as fases e processos para desenvolver uma aula investigativa (continuação).;</p> <p>Conclusão da Atividade Investigativa sobre Probabilidade Geométrica usando os CDs, bola de gude.;</p> <p>Proposta de elaboração de uma atividade investigativa envolvendo dados e uma cédula fictícia.</p>
Sexto	Elaboração de Atividade Investigativa sobre Probabilidade usando os Dados e as Cédulas. (Continuação).
Sétimo	Elaboração da Atividade Investigativa sobre Probabilidade envolvendo dados, cédula fictícia e a planilha Excel. ;
Oitavo	<p>Dinâmica de grupo para Resolução de Problemas de Probabilidade sobre: Teorema de Bayes, Probabilidade Total e Probabilidade Frequentista.;</p> <p>Proposta de aplicação de uma atividade investigativa com os alunos dos professores participantes.</p>
Nono	<p>Resolução de Problemas de Probabilidade com manipulação de fórmulas</p> <p>Teorema de Bayes, Teorema Probabilidade Condicional, Teorema Probabilidade Total e Probabilidade Frequentista.;</p>

	Discussão da aplicação da atividade investigativa com os alunos.
Décimo	<u>Resolução de Problemas de Probabilidade que envolvem Genética.</u>
Décimo primeiro	Resolução de Problemas de Probabilidade: Chance de Ganhar na Loteria, gráfico BoxPlot, Problema de Monty Hall; Reflexões sobre o curso.

Fonte: Elaboração própria.

No primeiro encontro, entregamos pastas com cadernos, canetas, explicamos a proposta, apresentamos os objetivos da pesquisa, explanamos sobre o que entendemos por atividades investigativas, atividades exploratórias e investigativas, apresentamos algumas referências bibliográficas sobre o assunto, justificamos o porquê de termos escolhido Probabilidade, bem como os tópicos deste conteúdo que seriam possíveis de serem abordados durante o curso de formação continuada, a depender da manifestação dos professores participantes. Expusemos nossa visão sobre a importância de se formar grupos de estudos com professores e esclarecemos que a participação no grupo deveria ser espontânea, ou seja, o professor poderia se desvincular do curso a qualquer momento, caso julgasse conveniente. Finalizamos o encontro com a aplicação do questionário 1 (Apêndice B), que nos revelariam informações sobre as expectativas e o perfil dos participantes.

Nesse encontro, percebemos que os professores ficaram ansiosos para conhecerem e elaborarem uma atividade investigativa, bem como para estudarem o significado de Probabilidade Geométrica e o Teorema de Bayes.

No segundo encontro, retomamos, por meio de uma síntese, o ocorrido no primeiro encontro. Explicitamos as fases de uma aula investigativa e os processos para o desenvolvimento de uma atividade investigativa. Elucidamos que, em conjunto, iríamos construir atividades investigativas para que eles aplicassem em suas escolas. Discutimos as diferenças entre exercício, problema e tarefa de investigação, utilizando como referência as ideias de Ponte (1995). Apresentamos um artigo sobre análise combinatória por meio de atividades investigativas⁹.

⁹ Anexo: Investigações Matemáticas sobre análise combinatória por alunos do Ensino Médio do Instituto Federal do Tocantins de PEREIRA FILHO, A.D. LOBO DA COSTA, N.M. BEZERRA JUNIOR, E.V. CIAEM, 2015.

Disponível em: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/265/149

Discutimos respostas dadas pelos professores às perguntas do questionário 1 (Apêndice B), levantamos o que gostariam de estudar no curso de formação continuada referentes à Probabilidade. Logo em seguida, apresentamos o questionário 2 (Apêndice C), uma vez respondido, passamos a discutir os significados de Probabilidade Clássica e Geométrica. Neste último caso, a discussão foi feita a partir de um problema do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM que tratava de Probabilidade Geométrica. (Apêndice F)

Ao final do encontro, discutimos uma proposta de elaboração conjunta de uma atividade utilizando roletas, para subsidiar a elaboração de uma aula investigativa sobre Probabilidade Geométrica. Na oportunidade, um dos professores solicitou que fossemos à escola em que ele trabalhava para lançarmos o desafio de montar a roleta com seus alunos.

No terceiro encontro, discutimos os significados frequencista, subjetivo e axiomático de Probabilidade. Refletimos sobre as 8 questões de Probabilidade lançadas no questionário 2. Em seguida, retomamos a discussão sobre as fases de uma aula investigativa e sobre a possibilidade de elaboração de uma aula investigativa utilizando bola de gudes, discos (CD) e em toca discos antigos. Na ocasião, levamos uma roleta (**Figura 5**) no intuito de propiciar explorações e investigações com os professores participantes, de modo a auxiliá-los na elaboração de tarefas.

Figura 5 - Roleta de disco e bola de gude



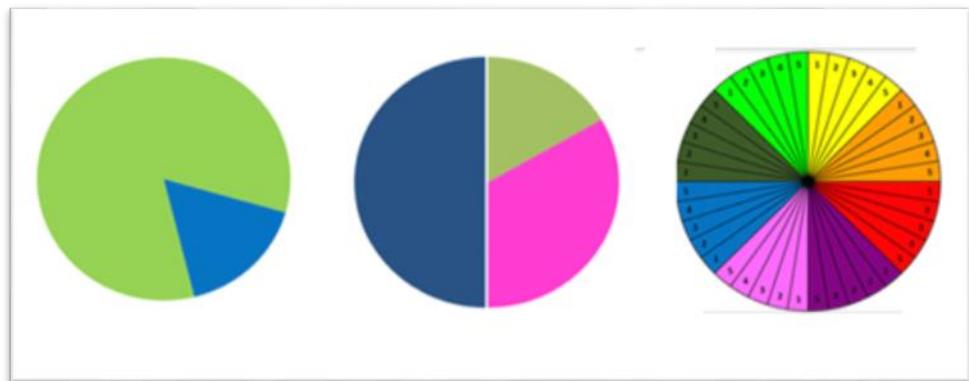
Fonte: Acervo da pesquisa.

No quarto encontro, demos sequência às explanações sobre as fases de uma aula investigativa e os processos envolvidos na realização da atividade, uma vez

que percebemos que ainda existiam dúvidas sobre as fases e os processos. Apresentamos algumas possibilidades para a elaboração de uma atividade investigativa por meio de roleta e incluímos roletas em um toca disco antigo. Os docentes (retire o eles) exploraram os tipos de roletas que poderiam ser montadas e, então, iniciamos em conjunto a elaboração das tarefas, discutindo em qual fase do desenvolvimento da atividade investigativa se encaixariam e, também, quantas aulas seriam necessárias para a realização dessa atividade (Anexo 1).

A figura abaixo apresenta algumas das opções de roletas. São roletas com duas cores e com três cores e três ângulos, além de uma com 45 números e 9 cores.

Figura 6 - Roletas utilizadas nas atividades investigativas



Fonte: Acervo da pesquisa.

Após a elaboração conjunta da atividade referente às roletas, discutimos possibilidades de questionamentos a serem feitos aos alunos.

Em síntese, os questionamentos elencados foram os seguintes:

Para as atividades propostas, vamos supor que estejam sentados numa mesa de roleta. Desta forma, investigue e discuta com seus colegas.

a) Se você precisar apostar onde a seta vai parar, qual seria sua ideia? Por quê? Rode a roleta e veja se sua conjectura se efetivou.

b) Qual a chance da seta parar na cor azul? Descrevam as ideias utilizadas pelo grupo.

c) Quantas cores diferentes existem nessa roleta?

d) Quantos números existem em cada cor?

e) Qual o total de números na roleta?

f) Qual a possibilidade de sair o número 1 em relação ao total de números existentes na roleta?

No quinto encontro, retornamos as discussões sobre as fases e os processos e continuamos com a elaboração da aula investigativa. Decidimos que para a realização das atividades, poderíamos separar os estudantes em grupos de 4 alunos e propor as atividades. Acertamos que durante a explicação da atividade, iríamos nos certificar que todos os estudantes entenderam a dinâmica, uma vez que não seria preciso jogar a roleta para responder, sendo assim, esperávamos que as respostas fossem por observação, interpretação da região angular ou cálculo de área da circunferência.

Combinamos que a confecção das roletas seria uma tentativa de incentivar e aguçar a curiosidade sobre a atividade com material concreto. A expectativa foi de realizarmos as atividades em oito aulas, divididas em quatro momentos de duas aulas cada. Sendo o penúltimo momento, reservado para discussão dos resultados, momento este em que os alunos relatariam aos colegas de classe o trabalho realizado. Com relação ao último momento, este seria reservado para o professor, sistematizar frente à turma o trabalho realizado, bem como, definir probabilidade por meio das atividades realizadas.

A questão 1 da atividade investigativa que estava sendo construída em conjunto, após ampla discussão – desde o quarto encontro – ficou com o seguinte enunciado:

Questão 1: Para as atividades propostas, vamos supor que estejam sentados numa mesa de roleta. Desta forma, investigue e discuta com seus colegas.

a) Se você precisar apostar onde a seta vai parar, qual seria sua ideia? Por quê? Rode a roleta e veja se sua conjectura se efetivou.

b) Qual a chance de a seta parar na cor azul? Descrevam as ideias utilizadas pelo grupo.

A figura abaixo mostra a construção de roleta com toca disco antigo, seus giros foram feitos através de adaptação com funcionamento a pilha.

Figura 7 - Construção da roleta com toca disco



Fonte: Acervo da pesquisa

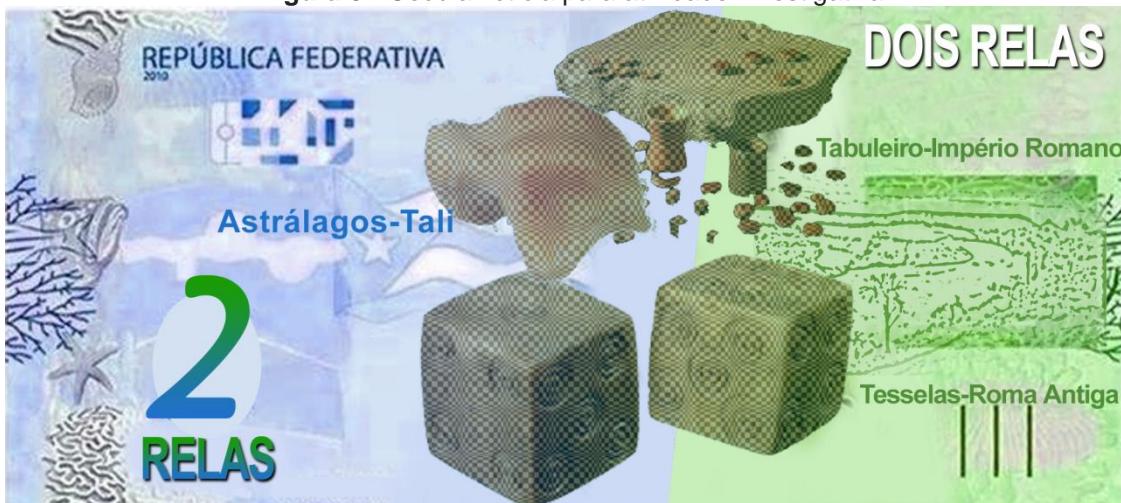
No final do encontro, refletimos sobre a metodologia de aulas investigativas e buscamos elaborar uma atividade que pudesse levar os alunos a tomar contato de forma investigativa com conceitos de espaço amostral, aleatoriedade, definição de probabilidade, distribuição de frequências e Lei dos Grandes Números, por meio de um jogo com dados e uma moeda fictícia.

Enfatizamos aos participantes que esta atividade permitiria levar os alunos a refletir sobre a parte histórica da Probabilidade por meio do jogo com dois dados. Reforçamos a importância da confecção da cédula fictícia como material didático para a atividade, com uma unidade estabelecida por nós: *o relas*.

Na oportunidade, apresentamos aos professores participantes as cédulas do que haviam sido criadas durante a semana e também explicamos o contexto histórico da Probabilidade; por isso as notas, traziam desde a nota de 2 Relas que traz a imagem do Astrálagos-Tall, seguida de Pacioli, Tartaglia, Cardano até a nota de 18 Relas que traz a imagem de Poisson. Discutimos as correspondências trocadas entre Pascal e Fermat, nas quais abordaram problemas de jogos de azar propostos, em 1653, por Chevalier de Méré, conhecido como filósofo do jogo que também se interessou pelo uso da Matemática para determinar as apostas nos jogos de azar. Explicamos foram elaboradas notas até 18 Relas para que pensássemos em estudar o jogo com três dados e, no caso, já teríamos material para a atividade.

A figura 8 apresenta uma nota confeccionada para a realização da atividade, as demais estão no Apêndice I.

Figura 8 - Cédula fictícia para atividade investigativa



Fonte: Acervo da pesquisa

Terminamos o encontro com o compromisso de pensar sobre a elaboração de uma atividade investigativa com o auxílio de tecnologias. Isso porque tínhamos no grupo um professor formado em Ciências da Computação que poderia auxiliar. Reforçamos que essa atividade poderia permitir observar as frequências das somas, abordar a definição de probabilidade freqüencista e estudar a Lei dos Grandes Números. Durante as discussões, acordamos que iríamos então pensar em uma atividade de Probabilidade que envolvesse tecnologias.

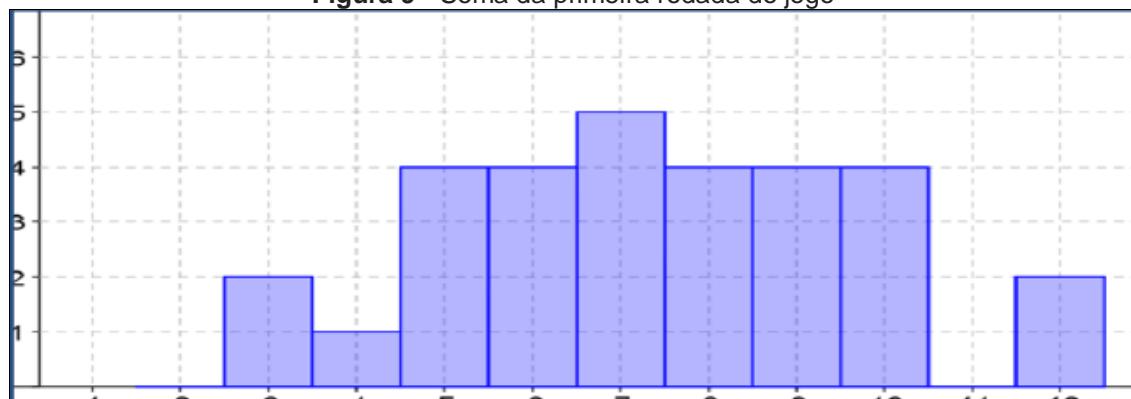
No sexto encontro, continuamos a elaboração de uma atividade envolvendo dois dados em uma moeda fictícia. Discutimos com os professores participantes a gestão da sala, inicialmente dividiríamos a turma em grupos de 2 alunos para cada equipe. Entregaríamos para cada equipe, dois dados enumerados de 1 á 6 e várias cédulas de uma moeda fictícia, com notas de 2 até 18. Cada equipe poderia escolher um dos conjuntos A ou B, formados pelos números | A= {2,4,5,8,10,11}, B={3,6,7,9,12}|. desta forma, em cada rodada do jogo, a equipe ganha se a soma dos dados for igual a algum dos números do seu respectivo conjunto. A equipe que ganha na rodada, caso após a soma das faces dos dados, seja a mesma de algum número de conjunto escolhido, explicamos que ao final da rodada, a equipe vencedora guarda em seu banco a cédula com o valor correspondente a soma.

Combinamos que seriam de 30 rodadas, e ao final, seria feita a contagem do dinheiro ganho. Após as 30 rodadas, solicitamos que as equipes trocassem de

conjuntos e realizarem mais 30 jogadas. Por exemplo: Caso eu opte pelo conjunto A e em determinada rodada, saia em um dado o número 3 e no outro o número 5, sua soma é 8, assim eu guardaria no banco uma cédula de 8 reais. Reforçamos que ao final das rodadas, iríamos consultar os alunos se aparentemente lhes parece que algum dos conjuntos está em vantagem.

Apresentamos na **Figura 9** os resultados das somas na primeira rodada do jogo, podemos destacar que a soma 7 obteve uma frequência de cinco, enquanto a soma 2 e onze não apareceu nenhuma vez.

Figura 9 - Soma da primeira rodada do jogo



Fonte: Acervo da pesquisa

Fizemos duas rodadas de trinta jogadas, sendo que cada equipe ficou uma rodada com cada conjunto. Ao final do encontro, cada conjunto sagrou-se vencedor uma vez. Propusemos então que fosse feita uma análise do ocorrido. Feita a análise, percebemos também que ao final das duas partidas, houve um empate entre as somas, 5,7 e 8. Não houve a supremacia da soma 7, como teoricamente se determina. Os professores participantes sugeriram que analisássemos as frequências de cada face dos dados separadamente. Desta forma, conferimos com um dos professores a contagem das frequências absolutas e relativas de cada face nas duas rodadas e depois das 60 jogadas os resultados foram estocados em uma planilha eletrônica no software Excel. O fato da soma 7 não ter obtido a maior frequência, foi uma boa oportunidade para discutirmos o conceito de aleatoriedade e também a lei dos grandes números.

Depois de experimentarem o jogo dos dois dados, os professores iniciaram o processo de criação de uma aula com teor investigativo para aplicar a seus alunos. Assim, combinamos adaptar o jogo para uma situação de investigação.

No sétimo encontro, retomamos a atividade intitulada jogo de dois dados, porém deixamos de considerar uma partida inteira composta por trinta rodadas e adotamos quarenta; além disso, um dos professores ficou com a planilha Excel aberta e lançando todas as jogadas e suas respectivas, o gráfico de frequência absoluta simples era alimentado rodada a rodada.

Dando continuidade ao encontro, apresentamos uma roleta 3D, questionamos ao grupo se era possível utilizar esta roleta para propormos uma atividade investigativa para nossos alunos. Sendo assim, explicamos ao grupo que bastava procurar no Google “roletas e cassinos” que se localizam várias opções de roletas e assim eles poderiam escolher qual roleta preferem utilizar e como pretendem utilizá-la para uma atividade com abordagem investigativa. Um momento em que os professores pesquisaram na internet roletas e socializaram com o grupo o que encontraram está explicitado na figura 10.

Figura 10 - Roleta 3D



Fonte: Acervo da pesquisa

Em seguida, discutimos a atividade disponibilizada no site http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/probabilidades/atividade1/mat5_ativ1.swf. Essa atividade traz a história das Probabilidades e enfoca aleatoriedade, abordagem frequentista e chance.

Jogamos duas partidas para que os professores pudessem entender como funcionava o jogo, bem como analisarmos as possibilidades de abordagem com os

alunos de probabilidade por meio de uma atividade investigativa com o uso dessa tecnologia. Observamos que os professores se mostraram motivados com a atividade.

As atividades propostas tanto no software do site RIVED MEC quanto das roletas 3D, foram novidades para os professores participantes; sendo assim, oportunizaram um momento de discussão e reflexão muito rico no curso de formação continuada especialmente, por ter oportunizado durante os jogos, ampla reflexão sobre a possibilidade da abordagem frequentista, lei dos grandes números e aleatoriedade.

Com relação aos links, explicamos que para a atividade investigativa envolvendo tecnologias, poderíamos adaptar o jogo que se encontra no site: rived.mec.gov.br/atividades/matemática/probabilidades/atividade1/mat5_ativ1swf Ou neste: rived.mec.gov.br/atividades/matemática/probabilidades/atividade1/atividade1.htm.

Discutimos que ambas trazem o contexto histórico de Probabilidade, e se mostram bem favoráveis para se trabalhar conceitos de aleatoriedade, frequência relativa e a própria definição de probabilidade. Destacamos que no primeiro link, o aluno apostaria em figuras planas e nas cores, podendo com o tempo perceber que se deve apostar nas cores com maior frequência, nas figuras com maiores frequências ou então apostarem nas figuras e também nas cores em uma mesma aposta. Possivelmente com o erro em algumas jogadas, os alunos poderão perceber porque estão perdendo e entender melhor o jogo e se apropriarem com mais facilidade da definição freqüencista de probabilidade. Com relação ao segundo link, além de trabalhar o conceito de probabilidade, simula a chance de ganhar na loteria.

No oitavo encontro, propusemos uma dinâmica de grupo com resolução de questões no quadro. As discussões oportunizaram refletir sobre possíveis erros de estudantes e como deveríamos nos posicionar diante deles. As resoluções das questões utilizando árvore de possibilidades e tabelas evidenciaram momentos de ampliação do conhecimento pedagógico e do conhecimento do conteúdo e do ensino por partes dos participantes, segundo as concepções de Ball et al (2008).

Para esse encontro, preparamos uma dinâmica de grupo. Selecioneamos dez questões (Apêndice L) de probabilidades e colocamos cada uma dentro de um envelope, conforme **Figura 11**. Colocamos as carteiras duas a duas em torno de

uma mesa e enumeramos as carteiras de 1 a 10, conforme pode ser visto na figura 11.

Figura 11 - Envelopes com questões e organização do espaço



Fonte: Acervo da pesquisa

Desta forma, cada professor ao chegar para o encontro, sentaria em uma das carteiras enumeradas, o mesmo número de sua carteira. Como os professores chegaram e não foram sentando nas carteiras enumeradas, utilizei uma roleta de bingo; sendo assim, o professor sentou na carteira de acordo a bolinha que ele pegou na roleta e em seguida ele buscou questão estava no envelope com sua numeração e discutiu a solução com seu colega de mesa. Mais tarde, todos foram ao quadro para resolver sua questão, momento em que foi possível uma reflexão como poderíamos resolver de uma forma mais clara para nossos alunos.

A socialização dos problemas propostos foi também um momento oportuno para avaliarmos as contribuições e a ampliação de conhecimento dos participantes no curso de formação.

No momento dedicado à resolução dos problemas propostos pelos professores participantes, todos se envolviam e colaboravam com as discussões durante a resolução de cada questão. Enquanto pesquisadores, não expusemos que se tratava do Teorema de Bayes, Frequentista, probabilidade condicional, todas as questões foram resolvidas por meio da abordagem clássica de Probabilidade com o auxílio de árvores de possibilidades ou de tabelas. As equações de probabilidade condicional, Teorema de Bayes ou qualquer outra, não foram exploradas, deixamos para discutir com o grupo no próximo encontro. Entendemos que as fórmulas

deveriam ser consequência do raciocínio desenvolvido frente à resolução dos problemas e deveriam ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados fosse muito grande.

Vale ressaltar que os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 1998) orientam que ensino deixe de se concentrar na simples memorização de fórmulas ou repetição automatizada de procedimentos, em situações artificiais ou extremamente abstratas, ganhando consciência de que é preciso lhe dar um significado, explicitando seu sentido no momento do aprendizado.

Percebemos na resolução da questão 1 (apêndice L), uma ampliação dos conhecimentos pedagógicos do professor ao expor como sua dupla resolveu a questão, utilizando a tabela e árvores de possibilidades. Durante o curso de formação, o referido professor demonstrou que estava buscando aplicar a abordagem investigativa em suas aulas de Probabilidade.

Durante o nono encontro, as questões do encontro anterior (Apêndice L) e mais seis questões (Apêndice M) sobre Probabilidade total, Teorema de Bayes, probabilidade condicional, questão de Probabilidade envolvendo análise combinatória, foram discutidas e resolvidas com o uso das equações. Primeiramente, as questões foram resolvidas utilizando a montagem do diagrama de árvores e as tabelas de contingência. Percebemos nas representações das resoluções dos problemas que é possível resolvermos questões que envolvem o Teorema de Bayes, sem precisar utilizar fórmulas. Posteriormente, os dados das árvores e tabelas foram utilizadas para as deduções das equações que poderiam ser utilizadas para as resoluções.

Durante as resoluções dos problemas, fomos retirando dados das resoluções e fomos apresentando a equação matemática que poderíamos utilizar para resolver todos os problemas daquela natureza. Explicamos que no encontro anterior, não tínhamos dado ênfase às fórmulas, para descartar um ensino de simples memorização de fórmulas ou repetição automatizada de procedimentos, em situações artificiais, abstratas. Enfatizamos que é preciso dar um significado à Probabilidade, explicitando seu sentido já nos primeiros contatos do aluno com o tema. Deixamos claro que as fórmulas equações matemáticas são importantes, desde que desenvolvidas como síntese dos conceitos e relações, sempre buscando dar sentido ao que estamos propondo ao aluno.

Observamos que esses professores não tinham o hábito de trabalhar o Teorema de Bayes em suas aulas, já haviam afirmado no segundo encontro, mas se mostraram motivados na resolução das atividades. Explicamos a importância do teorema, uma vez que pode auxiliar a resolver problemas, como no caso de diagnosticar uma doença sabendo o resultado de um exame e demais situações em medicina, informática, economia etc. Chamamos a atenção para aqueles eventos em que o cálculo da probabilidade está condicionado à ocorrência de um outro evento, ou seja, casos estes que lidamos com o que é denominado de probabilidade condicional, quer dizer, a Probabilidade de um determinado evento ocorrer, dado que outro evento associado a esse já ocorreu. Explicamos que o teorema associado à Probabilidade condicional é o Teorema de Bayes, que relaciona probabilidades condicionais com suas inversas.

Essas discussões foram no sentido de oportunizar aos professores participantes a ampliação do Conhecimento do Conteúdo. Destacamos que as reflexões oportunizadas são descritas por Ball, Thames e Phelps (2008) como aquelas relacionadas ao conhecimento indispensável ao professor e único de sua profissão, ou seja, o Conhecimento Especializado do professor para o ensino. Entendemos que a resolução dos problemas no processo formativo, contribuíram para melhoria da formação dos professores participantes. Essa afirmação está baseada nas situações que chamaram mais atenção e foram semelhantes a outras anteriormente propostas, envolvendo os mesmos participantes, os quais relataram que não tinham estudado Teorema de Bayes e nem Probabilidade Total, porém, afirmaram que é perfeitamente possível ser ensinado em escolas estaduais.

Este encontro foi importante para a pesquisa, pois percebemos como os professores saíram de uma zona de conforto e começaram a participar das resoluções, pois com as socializações dos encontros anteriores, se sentiam seguros em expor suas ideias de como determinadas questões poderiam ser resolvidas.

O décimoécimo encontro foi conduzido por um dos professores participantes pelo professor JÁ. Na oportunidade, ele discutiu a possibilidade de ensinarmos Probabilidade utilizando questões que envolvem a Genética. Foram socializadas pelo professor dez questões (Apêndice N) sobre Probabilidade aplicada à Genética.

A apresentação ocorreu de forma que poucos professores participaram, pois o assunto era novo para a maioria, no entanto percebemos que no assunto genética,

o professor que conduziu o encontro, tinha amplo domínio do conhecimento específico do conteúdo, do conhecimento pedagógico e do conhecimento do currículo. Ponte (1998) afirma que formação deve propiciar o desenvolvimento profissional, promovendo não somente teorias, mas também trocas de experiências e reflexões.

Percebemos, durante o encontro, que os professores se mostraram satisfeitos com o conhecimento construído durante a sistematização feita e consequentemente com a participação no curso de formação. Ao final do encontro, percebemos que os objetivos desse dia de formação, que eram discutir Probabilidade aplicada à Genética, bem como promover um espaço de trocas de experiências em que os professores participantes pudessem ampliar o conhecimento profissional foram atingidos.

No décimo primeiro encontro, discutimos chance de se ganhar na loteria, gráfico BoxPlot, estudo sobre problema de Monty Hall e encerramos com uma reflexão sobre o curso.

Nesse encontro, os professores registraram em um diário seus sentimentos com relação ao curso e depois foram convidados a irem para uma sala do lado, para que fosse gravado seu depoimento sobre o curso de formação continuada.

Durante a construção do primeiro Design da pesquisa, tínhamos a intenção de propor uma atividade investigativa com cartelas de loteria e outra com o problema de Monty Hall. Durante o curso, foi inviável elaborar uma atividade sobre a chance de ganhar na loteria. Desta forma, durante a semana que antecedia o último encontro, um professor participante ficou encarregado de mediar essa discussão com o grupo. Durante a explanação, o professor levou algumas cartelas e pediu para que os colegas do curso fizessem suas apostas, logo em seguida mostrou as chances que cada um tinha de ganhar na loteria. Foram discutidas também, questões sobre como se podem fazer várias jogadas na mesma cartela e como fica o preço.

Posteriormente à exposição do referido professor participante, explanamos sobre o problema de Monty Hall, um pouco da sua história e suas discussões até os dias de hoje. Expusemos também as portas de caixas que confeccionamos e como aplicamos a dinâmica do problema de Monty Hall em duas turmas do Instituto Federal do curso de Licenciatura em Computação e Tecnologia em Logística. As caixas foram enumeradas de 1 a 3, dentro delas havia a figura de um bode ou de um

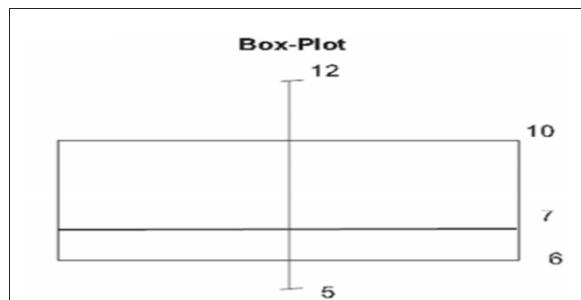
carro, seguindo o modelo de Monty Hall. Após as discussões sobre o problema de Monty Hall, outro professor **do grupo**, relatou a feira de ciência na escola em que leciona, apresentou roletas confeccionadas pelos alunos.

Em seguida, discutimos a questão abaixo que envolve o gráfico Box Plot.

Questão:

O gráfico a seguir é o BoxPlot da distribuição de renda, em mil reais, da população de um determinado município. Qual é a probabilidade de um habitante desse município ter renda superior a 6 mil reais?

- (A) 0,15 (B) 0,20 (C) 0,25 (D) 0,50 (E) 0,7



Após a resolução da questão, falamos um pouco sobre o gráfico e suas utilidades, principalmente o quanto é útil em trabalhos de pesquisas.

Feita a descrição dos encontros, passamos a analisar as informações relevantes para a pesquisa que selecionamos nos dados

Na próxima seção, passamos à análise dos dados colhidos em campo.

4.2 ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS

O primeiro questionário (vide Apêndice B) apresentou questões aos 12 participantes, a partir das quais foi possível compor o perfil do grupo investigado e também suas expectativas. Os resultados dessa análise estão a seguir.

Quadro 7 - Perfil dos Participantes da Pesquisa

Professor	Perfil
A	Licenciado em Matemática desde 2001 por uma instituição particular de São Paulo, Mestre em Ciências Ambientais pela Unitau, docente há 16 anos. Atua como professor de Matemática em instituições particulares

	no Ensino Médio e no Superior. Relatou que em sua vida acadêmica participou de poucas formações continuadas e que se sentiu motivado em fazer parte do curso de formação em busca de atualização profissional, aprimoramento de suas metodologias e também para ampliar os seus conhecimentos em Probabilidade.
CÁ	Licenciado em Matemática desde 2002, possui especialização Lato Sensu em avaliação escolar em Matemática, docente há 14 anos. Atua como professor de Matemática no ensino Fundamental e Médio da rede estadual de ensino. Relatou que participou de várias formações continuadas oferecidas pela Secretaria Estadual de Educação, se sentiu motivado em fazer parte do curso de formação em busca de algo que pudesse contribuir para sua carreira profissional e melhorar suas estratégias metodológicas.
CI	Licenciada em Química desde 2012 por uma instituição particular, possui especialização em Psicopedagogia no processo de ensino e aprendizagem. Docente há dez anos, leciona Matemática em uma escola de economia mista. Relatou que em sua vida acadêmica participou de poucas formações continuadas em busca de, expandir seus conhecimentos na área de Matemática, aprender com a troca de experiências.
E	Licenciado em Matemática desde 2000 pela Universidade Estadual de Pernambuco, possui especialização Lato Sensu em avaliação escolar em Matemática, docente há 23 anos. Atua como professor de Matemática no Ensino Médio da rede estadual de ensino. Relatou que participou de várias formações continuadas oferecidas pela Secretaria Estadual de Educação, se sentiu motivado em fazer parte do curso de formação, pois através da troca de experiência com os colegas do grupo, pudesse melhorar sua didática e consequentemente seus conhecimentos em Probabilidade.
G	Licenciado em Matemática desde 2001 pela Universidade Estadual do Piauí, possui especialização Lato Sensu em Matemática, docente 17 anos. Professor de Matemática no Ensino Médio da rede estadual de ensino como contrato. Relatou que participou de várias formações

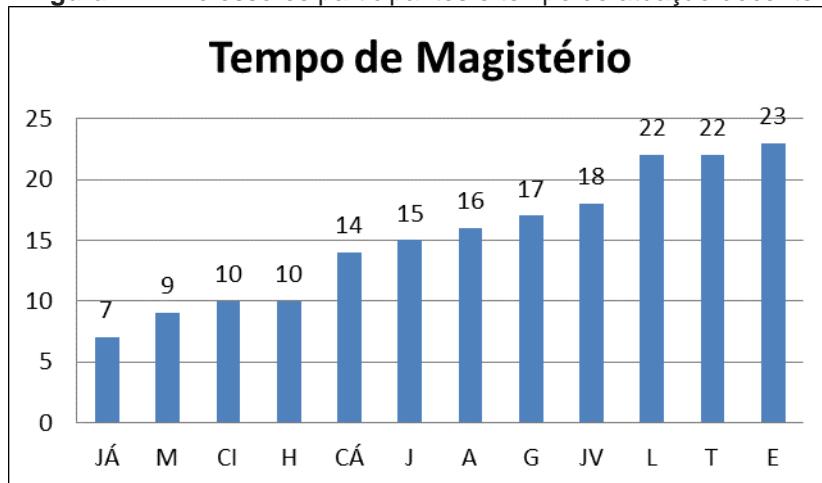
	continuadas oferecidas pela Secretaria Estadual de Educação, se sentiu motivado em fazer parte do curso de formação, em busca de troca de experiências e novas metodologias de ensino.
H	Graduado em Economia pela USP desde 2002, possui especialização Lato Sensu em Docência do Ensino Superior, docente há dez anos. Professor de Matemática em escolas particulares no Ensino Médio e cursinhos há 5 anos. Relatou que participou de poucas formações continuadas, sentiu-se motivado em fazer parte do curso de formação, em busca de troca de experiências, novas metodologias de ensino e aprimorar seus conhecimentos em Probabilidades.
JÁ	Bacharel em Ciências da Computação desde 2012 pela Universidade Federal de Tocantins. Professor de informática no Instituto Federal do Tocantins. Professor de matemática em escolas particulares e cursinhos preparatórios desde 2010. Relatou que participou de poucas formações continuadas, sentiu-se motivado em fazer parte do curso de formação, em busca de relatos de experiências, novos conhecimentos didáticos para o ensino de Probabilidade.
J	Licenciada em Matemática desde 2000, possui Especialização Lato Sensu em Metodologia do Ensino em Matemática, docente há 15 anos. Professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio da rede estadual de ensino. Relatou que participou de várias formações continuadas oferecidas pela Secretaria Estadual de Educação, se sentiu motivado em fazer parte do curso de formação, pela oportunidade de aprender com o grupo.
JV	Licenciado em Matemática desde 1999 pela Universidade Estadual do Tocantins. Possui Especialização Lato Sensu em Educação Matemática. Docente há 18 anos e atualmente é professor de matemática no Ensino Médio e Superior no Instituto Federal do Tocantins. Relatou que participou de vários cursos de formações continuadas enquanto professor da rede estadual de ensino, porém sentiu-se motivado em fazer parte do curso de formação, em busca aprimoramento de sua didática.
L	Licenciada em Ciências Biológicas desde 2000 e Licenciada em

	Matemática desde 2004, por uma instituição particular. Professora de Matemática da rede estadual de ensino há 22 anos. Relatou que participou de várias formações continuadas oferecidas pela Secretaria Estadual de Educação, se sentiu motivado em fazer parte do curso de formação, em busca novos conhecimentos através da troca de experiências com os colegas.
T	Licenciada em Agronomia desde 1997 e Licenciada em Matemática desde 2002, pela Universidade Estadual do Tocantins. Professor de Matemática do Ensino Médio, em escolas particulares e na rede estadual há 22 anos. Atualmente é professor de Matemática no Ensino Médio e Superior no Instituto Federal do Tocantins. Relatou que participou de várias formações continuadas oferecidas pela Secretaria Estadual de Educação, se sentiu motivado em fazer parte do curso de formação, em busca novas metodologias de ensino.
M	Licenciado em Matemática desde 2005 por uma instituição particular de São Paulo. Possui especialização Lato Sensu em Metodologia do Ensino em Matemática. Professor de Matemática no Ensino Fundamental e Médio em escolas pública e privadas há 9 anos. Atualmente leciona Matemática no Ensino Fundamental em instituição particular e Ensino Médio como contrato na rede estadual. Relatou que participou de várias formações continuadas oferecidas pela Secretaria Estadual de Educação, se sentiu motivado em fazer parte do curso de formação, em busca novas experiências.

Fonte: Elaboração própria

A análise dos dados, referente ao ano de conclusão do curso superior, revelou que dez professores concluíram a graduação entre os anos 2000 e 2005 e dois professores concluíram em 2012. Sendo assim o grupo foi constituído por professores com alguma experiência em sala de aula.

Os professores participantes apresentaram características singulares com relação ao tempo de magistério e a graduação, como pode ser observada na figura 8, temos, 25% o tempo de magistério está entre 7 e 10 anos, 50% entre 10 e 20 anos e 25% estão entre 20 e 23 anos. O Quadro 4, traz que no grupo de professores, não temos nenhum com 23 anos de graduação, ou seja, iniciaram a carreira docente antes da conclusão da graduação.

Figura 12 - Professores participantes e tempo de atuação docente

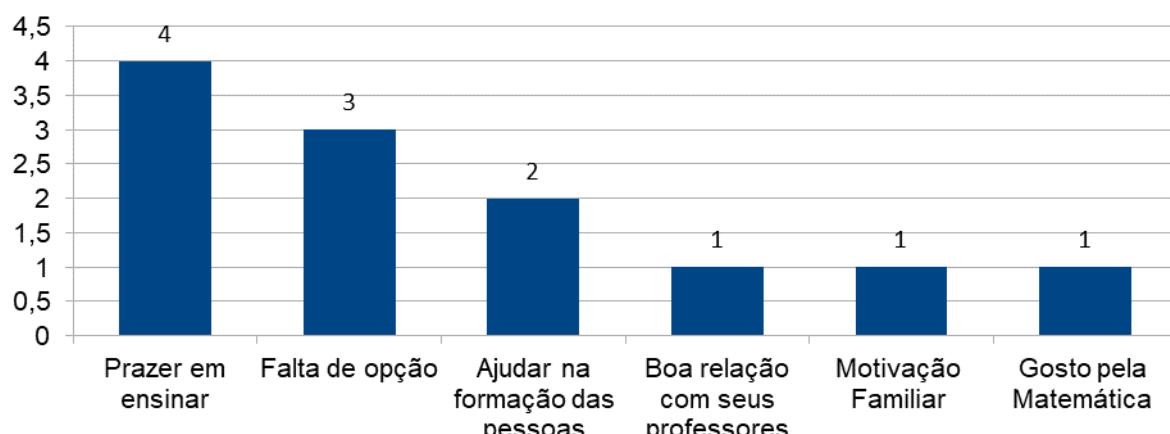
Fonte: Elaboração própria

Com relação à situação funcional, dos doze professores do curso nove eram concursados e três eram celetistas. Esses doze professores todos eram graduados. Sendo que três, não eram graduados em Matemática, sendo um em Química, um em Economia e um em Ciências da Computação. Com relação à Pós-graduação, dez tinham Lato Sensu e um Pós-Graduação *Stricto Sensu* em nível de mestrado.

Quando questionados sobre o que os levaram a serem professores, 1/3 dos docentes declararam que foi pelo prazer de ensinar e as demais respostas foram bastante variadas, sendo elas, falta de opção, admiração pelo professor de Matemática que teve na época de estudante e gosto pela profissão. A **Figura 13** descreve a frequência e os cinco tipos de respostas dadas pelos professores.

Figura 13 - Resposta sobre o que os levaram a serem professores

Por que ser Professor?



Fonte: Elaboração própria

Quando solicitados a indicar em qual série preferiam lecionar, entre os docentes, seis responderam que preferem ministrar aulas no EM para qualquer das séries, quatro preferem lecionar no ensino fundamental, os outros dois escolheram primeira série, segunda e terceira série do Ensino Médio. Os professores justificaram a preferência pelo Ensino Médio, em função dos alunos serem mais maduros. Com relação às estratégias de ensino utilizadas pelos seus professores, se seriam adequadas para os alunos de hoje, entre os professores, nove responderam que não, e três responderam que sim, coincidentemente são os mesmos que se formaram mais recentemente.

Em relação ao aprendizado em Probabilidade quando estudante, nove dos professores responderam que não aprenderam e três afirmaram que sim. Quando questionados sobre a utilização de material concreto nas aulas de Probabilidade quando eram estudantes, todos responderam que, nas aulas de Probabilidade, em nenhum momento foram utilizados materiais concretos ou qualquer outro recurso didático.

Quando questionados como os professores participantes procuram ensinar Probabilidade, responderam em sua maioria que suas aulas são expositivas dialogadas, com resolução de exercícios do livro, ou com situações do dia a dia. Quando utilizam material concreto, sempre são dados, baralhos ou moedas.

Com relação às dificuldades em ensinar Probabilidades, a interpretação do problema, foi citada unicamente. Os professores relataram que extrair do texto o espaço amostral e identificar os eventos pertinentes ao problema são as mais frequentes dificuldades. Revelaram que buscam sanar essas dificuldades de interpretação com resolução de exercícios, buscando ajudar os alunos na interpretação do problema e, também, resolvendo passo a passo.

Apresentamos a seguir os protocolos de respostas de três professores participantes, A, E e L respectivamente, que evidenciam a descrição da questão 11 do questionário 1, (Apêndice B).

Figura 14 - Protocolos de respostas da questão 11

11. Quais as principais dificuldades dos alunos no conteúdo de probabilidade e como você procura saná-las?

Os estudantes geralmente têm dificuldade com porcentagem, abstração de problema e interpretações de texto. Uma das soluções buscadas é insistir na resolução de exercícios.

11. Quais as principais dificuldades dos alunos no conteúdo de probabilidade e como você procura saná-las?

A interpretação da questão, levando o aluno ao questionamento, tentando checar a compreensão da questão.

11. Quais as principais dificuldades dos alunos no conteúdo de probabilidade e como você procura saná-las?

Dificuldade de interpretações de texto, tento sanar isso com resolução de exercícios em sala de aula.

Os professores revelaram que gostariam de participar do curso para construírem mais conhecimentos, poderem melhorar suas aulas, aprenderem novas metodologias de ensino, adquirirem novas experiências por meio do trabalho em grupo. Quando solicitados sobre quais tópicos de Probabilidade, gostariam que fossem discutidos, no curso foi, jogos, vídeos, dinâmicos e Probabilidade Geométrica seguido do estudo de Probabilidade por meio dos eventos equiprováveis e teorema de Bayes.

Esse primeiro questionário foi importante para o *redesign* do curso. Percebemos pelas respostas, quais seriam as atividades que deveríamos buscar

desenvolver junto ao grupo, quais conhecimentos matemáticos eles gostariam que estivessem na pauta de discussões no curso.

O segundo Questionário, conteve questões de Probabilidade, para nos revelar conhecimentos iniciais dos professores participantes, além de nos possibilitar confrontar com o que nos foi entregue no questionário 1.

O Quadro 8, feito com base na análise do questionário (Apêndice B), apresenta os resultados quantitativos encontrados. O objetivo foi, a partir da identificação de presença e frequência de certos erros, buscar alternativas para tratamento destes na formação.

Quadro 8 - Distribuição de acertos e erros do Questionário 2

Questão	Corretas		Parcialmente corretas		Erradas		Em branco	
Questão	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
1	1	12,5	3	37,5	3	37,5	1	12,5
2	2	25	0	0	2	25	4	50
3	4	50	0	0	4	50	0	0
4	4	50	0	0	4	50	0	0
5	5	62,5	2	25	1	12,5	0	0
6	4	50	4	50	0	0	0	0
7	1	12,5	4	50	0	0	3	37,5

Fonte: Elaboração própria

Optamos por apresentar os dados no quadro 8 utilizando frequências relativas, uma vez quem nem todos os professores participantes estavam sempre presentes em todos os instrumentos de avaliação.

Observamos pelos dados, que as questões 1 e 7 foram as que apresentaram somente uma solução correta. A questão 6 apresentou maior índice de acertos com 4 respostas corretas e 4 parcialmente corretas.

Os resultados apontaram que, mesmo sendo uma turma de professores com boa experiência, os quais cursaram a disciplina de Probabilidade e Estatística na graduação, eles apresentaram dificuldades em resolver determinadas questões, principalmente as que envolviam interpretação de textos, porcentagens, tabelas ou Probabilidade Condicional. Concluímos, após a avaliação do questionário 2, que era necessário discutir as diferentes concepções de Probabilidade no curso de formação continuada.

Com relação às dificuldades na formação inicial dos professores, referentes a como introduzir o conceito de Probabilidade Condicional nos cursos graduação de maneira a minimizar as dificuldades, Figueiredo (2000), buscou diagnosticar as dificuldades em Probabilidade Condicional, com intuito de tentar compreender porque aparecem tais dificuldades. Em suas conclusões, a autora apontou que as dificuldades eram devidas à confusão entre Probabilidade Condicional e Probabilidade Conjunta | $(P(A \cap B))$, ou seja, Probabilidade da intersecção de eventos. Além disso, constatou obstáculos dos alunos ao lidarem com Probabilidade Condicional quando se inverte o que é condicionante com o que é condicionado, ou seja, confusão entre a Probabilidade Condicional e a Probabilidade Conjunta.

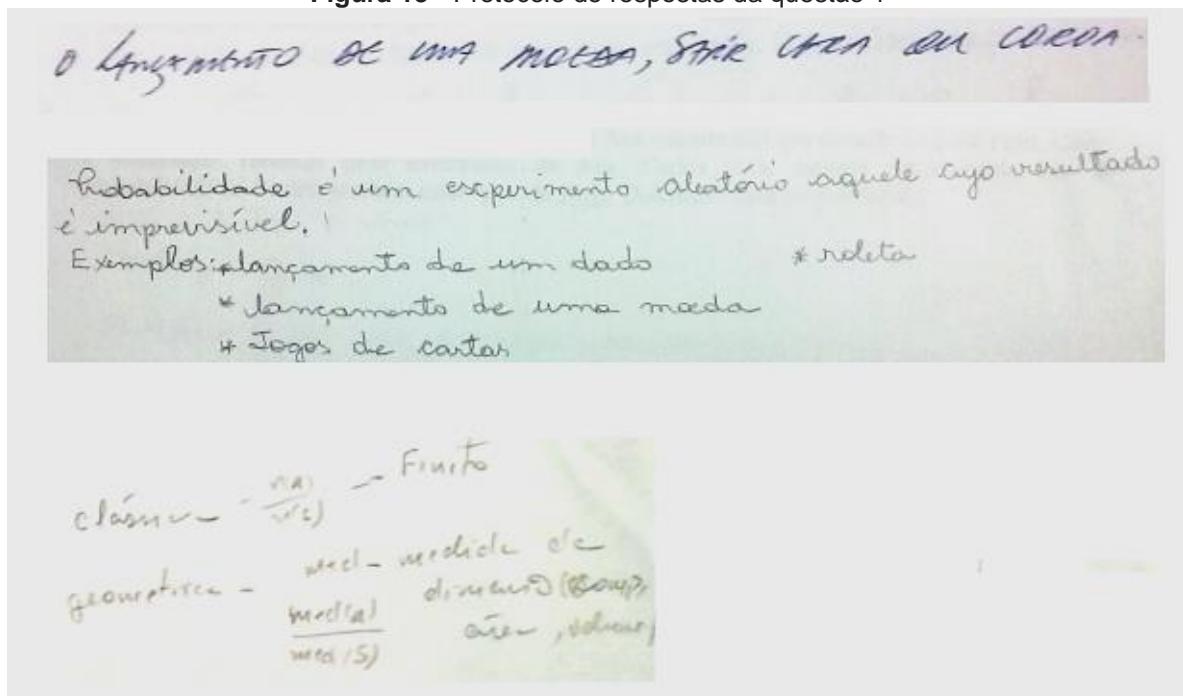
Analisamos a seguir a Questão 1 desse questionário 2:

Questão 1: Dê exemplos de definições de Probabilidade.

Essa questão foi elaborada para nos fornecer informações sobre os conhecimentos dos professores participantes em relação aos significados de Probabilidades. O objetivo da questão foi analisar qual ou quais significados de Probabilidades os professores participantes mencionavam e consequentemente conheciam os significados que atribuíam a Probabilidade.

A seguir alguns protocolos de respostas da questão 1:

Figura 15 - Protocolo de respostas da questão 1



Fonte: Acervo da pesquisa

Percebemos nas respostas retire a vírgula, que, na verdade, apresentaram exemplos e não definições. Os significados de Probabilidade, como, clássico, frequentista, axiomática e o geométrico, com exceção de um professor, não apareceu.

Vale ressaltar que a expectativa não era por definições formais de Probabilidades, de qualquer modo, algumas respostas nos revelaram dificuldades dos participantes ao definir Probabilidade. Essas dificuldades também foram destacadas nos estudos de Pietropaolo, Silva, Campos e Carvalho (2013) em pesquisa desenvolvida com professores de Matemática do Ensino Fundamental. Os pesquisadores também encontraram situações em que os professores se limitaram aos exemplos com dados, moedas e baralhos, evidenciando assim dificuldade em perceber a probabilidade em outros contextos. Além disso, os autores encontraram respostas ainda de uma forma mais generalista situando a probabilidade como parte da matemática ou como uma ciência. Destacaram na pesquisa que muitos professores do grupo pareciam não compreender que a Probabilidade de um evento é um número, mas sim, apenas como um código composto por dois algarismos: um que informa a quantidade de casos desejáveis e o outro a quantidade total de resultados possíveis.

Notamos que houve dificuldade quanto aos significados de Probabilidade, ou seja, a interpretação quanto a definir uma vez que os participantes apresentaram exemplos de Probabilidade e não a definição. Destacamos dentre as respostas que o professor participante T apresentou de forma sucinta o significado clássico e o geométrico de Probabilidade.

De acordo com Batanero (2005), diferentes significados têm sido associados ao termo Probabilidade ao longo de sua evolução histórica e eles ainda coexistem, talvez devido ao desenvolvimento deste campo ser recente em relação a outros ramos, como a Geometria ou a Álgebra.

Quanto aos conhecimentos necessários para a docência em Matemática, tomando como base os estudos de Ball, Phelps e Thames (2008), as respostas mostraram que os professores participantes apresentavam lacunas no Conhecimento Comum do Conteúdo, ou seja, no Conhecimento Comum de Probabilidade.

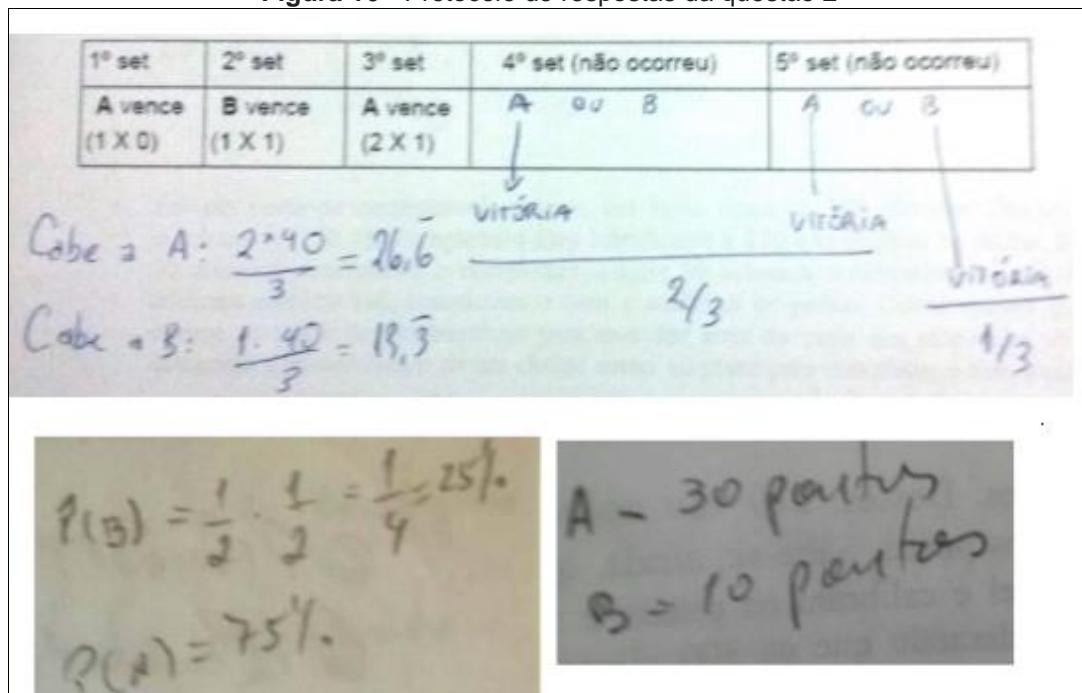
Apresentamos a seguir alguns protocolos da questão 2.

Questão 2: Em uma partida de tênis programada para 5 sets, o vencedor ganharia 40 pontos no ranking da confederação. Para isso, um dos jogadores precisaria vencer primeiro 3 sets e ganhar o jogo. Entretanto, a partida foi interrompida pela chuva no momento em que terminava o 4º set, com o placar apontando 2 sets para o jogador A e 1 set para o jogador B. Para piorar a situação, o tal jogo estava sendo disputado no último dia possível daquele ano, por volta de 30 de dezembro, não havendo mais possibilidade de continuá-lo em outro dia do ano. O que fazer se um ou outro jogador pudesse vir a se consagrar o número 1 do mundo dependendo do número de pontos que conseguisse naquele último jogo do ano? Os organizadores do torneio reuniram-se às pressas e decidiram que os 40 pontos seriam divididos entre os dois jogadores proporcionalmente à Probabilidade que cada um teria de sagrar-se vencedor, caso a partida chegasse ao final. Dos 40 pontos, quantos caberão ao jogador A e quantos caberão ao jogador B? Utilize a tabela seguinte para elaborar a solução

1º set	2º set	3º set	4º set (Não ocorreu)	5º set (não ocorreu)
A vence (1 x 0)	B vence (1 x 1)	A vence (2 x 1)		

Fonte: Caderno São Paulo (2008)

Figura 16 - Protocolo de respostas da questão 2



Fonte: Acervo da pesquisa

O objetivo de lançarmos essa questão foi analisar o que deveria ser discutido na formação, quanto à resolução de questões de Probabilidades, utilizando a construção de árvores, como também o uso de tabelas, além de oportunizar na formação o espaço de reflexão sobre eventos independentes e sobre aleatoriedade.

Durante a análise das respostas às questões dois, três e cinco, concluímos que na formação deveríamos enfatizar o uso do diagrama de árvore e também de tabelas como uma forma de representação e recurso para a resolução dos problemas de probabilidades, uma vez que entendemos que elas auxiliariam na interpretação das possibilidades, oportunizando, por meio dos desenhos e ilustrações, a visualização dos elementos envolvidos no problema. Isso foi ao encontro das ideias de Ferreira, Kataoka e Karrer (2013), as quais destacam que a utilização de árvore de possibilidades pode se constituir em um importante recurso pedagógico para os professores trabalharem conceitos probabilísticos na Educação Básica.

Figueiredo (2000) sugere que as Escolas de Ensino Fundamental e Médio sigam as propostas e sugestões dos PCN e das Propostas Curriculares, ensinando Probabilidades com o uso de árvore de Probabilidades e tabelas de dupla entrada no Ensino Fundamental. No caso da Probabilidade Condicional no Ensino Médio ensinar através das situações conjuntistas nos diagramas de árvore. A autora destaca que a utilização da árvore de possibilidades pode facilitar a compreensão de situações que envolvem eventos dependentes diferenciando-os dos independentes, tomando como base a interpretação do enunciado e a montagem da árvore de Probabilidades e da tabela de contingência.

Destacamos também que a referida questão abriu espaço para discutirmos Probabilidade por meio de um contexto histórico, mais especificamente focando no relato da carta datada de 24 de agosto de 1654 enviada por Fermat a Pascal, na qual os dois trocam correspondências sobre o problema dos pontos: Dois jogadores A e B, aos quais faltam a e b pontos, respectivamente, decidem interromper o jogo. Como as apostas devem ser divididas?

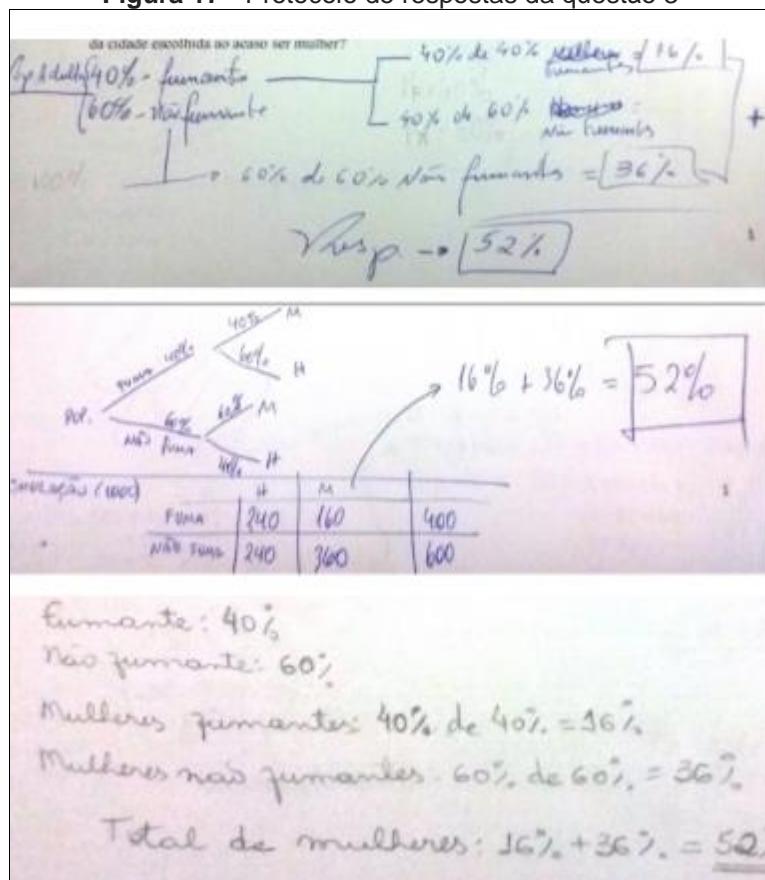
Essa questão apresentou duas respostas corretas e duas em branco, e as demais oito contiveram erros. Para a sua resolução é necessário que o professor possua conhecimentos sobre independência de dois ou mais eventos, teorema da multiplicação, teoremas de Probabilidades em espaço amostral finito, Probabilidade de um espaço amostral equiprovável. Desta forma, trazendo novamente à questão a

luz do referencial de Ball, Phelps e Thame (2008), a questão exige que o professor compreenda as estruturas matemáticas necessárias para o ensino de Probabilidades, ou seja, **Conhecimento do Conteúdo**.

Apresentamos alguns protocolos da Questão 3

Considere que numa cidade 40% da população adulta são fumantes, 40% dos adultos fumantes são mulheres e 60% dos adultos não fumantes são mulheres. Qual a Probabilidade de uma pessoa adulta da cidade escolhida ao acaso ser mulher? (SEFAZ-SP-2008)

Figura 17 - Protocolo de respostas da questão 3



Fonte: Acervo da pesquisa

Essa questão foi escolhida para o questionário 2, pois poderia nos trazer a percepção acerca dos conhecimentos do conteúdo dos professores participantes. Das quatro respostas corretas, duas apresentaram resoluções por meio de tabelas, sendo que um dos professores apresentou sua resposta também com a construção de uma árvore de possibilidade, as outras duas respostas corretas, foram resolvidas por meio do cálculo de porcentagem da porcentagem, mostrando que os dois professores conheciam procedimentos de resolução por árvore ou por tabelas.

Percebemos dificuldades na resolução de questões de Probabilidade que envolvem a porcentagem, muitas vezes por consequência de interpretação equivocada. Nos casos semelhantes ao da questão 3, durante o curso de formação, recomendamos aos professores que adotassem como estratégia, o estabelecimento de um valor fictício para o número total de elementos e assim calcular as porcentagens de cada caso, colocando esses resultados em uma tabela.

Entendemos que a referida questão exige **Conhecimento Comum do Conteúdo.**, Percebemos em duas de quatro respostas corretas, que os professores têm conhecimento do conteúdo específico. Entretanto, Shulman (1986), afirma que, embora o conhecimento comum do conteúdo específico seja necessário ao ensino, o domínio de tal conhecimento, por si só, não garante que o mesmo seja ensinado e aprendido com sucesso. É necessário, mas não suficiente. O conhecimento pedagógico é necessário na tomada de decisões pedagógicas, com o objetivo de contribuir na compreensão dos conteúdos para que facilite a compreensão de determinado assunto e avaliar as vantagens e desvantagens da utilização de determinadas representações na sua abordagem.

Desta forma, concordamos com Batanero e Díaz (2007), quando afirmam que as mudanças nos processos de ensino e de aprendizagem para o ensino de Probabilidade estão sobretudos relacionados com as abordagens e estratégias em sala de aula.

Apresentamos protocolos da Questão 4

Destacamos que a referida questão foi colocada no questionário com o objetivo de avaliar a resolução de questões envolvendo Probabilidade condicional e quais conhecimentos os participantes trariam para a formação acerca desse tipo de situação.

Carlos sabe que Ana e Beatriz estão viajando pela Europa. Com as informações que dispõe, ele estima corretamente que a Probabilidade de

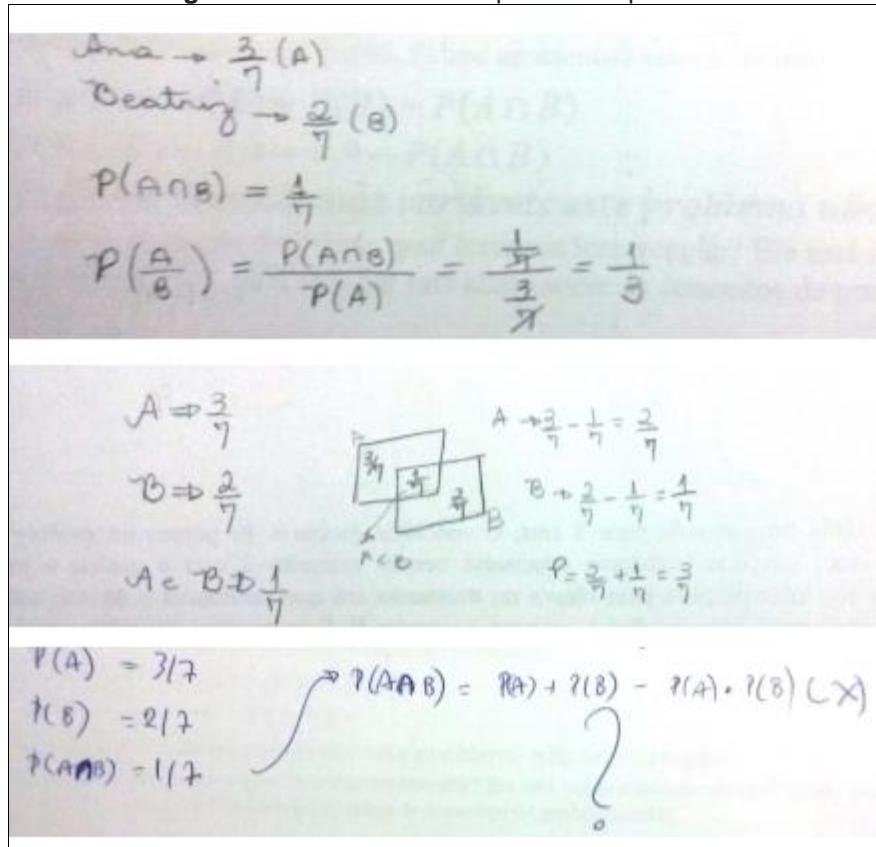
Ana estar hoje em Paris é , que a Probabilidade de Beatriz estar hoje em

Paris é , e que a Probabilidade de ambas, Ana e Beatriz, estarem hoje em

Paris é . Carlos, então, recebe um telefonema de Ana informando que ela está hoje em Paris. Com a informação recebida pelo telefonema de Ana, Carlos pode estimar corretamente qual a Probabilidade de Beatriz também estar hoje em Paris. (MPU-2008)

Nesta questão, os quatro professores que acertaram a resolução utilizaram a equação da Probabilidade condicional.

Figura 18 - Protocolo de respostas da questão 4



Fonte: Acervo da pesquisa

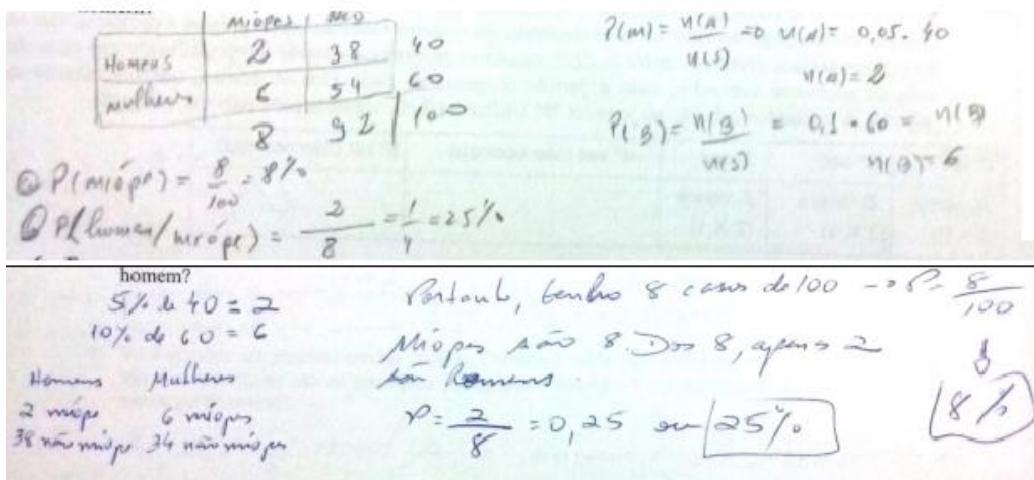
Vale considerar que a estratégia da restrição do espaço amostral não surgiu nas resoluções. Como são dados relacionados à semana, os professores não se atentaram para a simulação de três dias em que Ana estaria em Paris e os dois dias que Beatriz estaria na capital francesa, levando em consideração que um dia dentre os três de Ana e dois de Beatriz seria comum. Como a ligação, informa que Ana está em Paris, o espaço amostral deixa de ser setes dias da semana e passa a ser somente os três possíveis de Ana. O que leva à conclusão que a Probabilidade é $\frac{1}{3}$.

Ponte e Oliveira (2002) destacam que o professor ao ensinar, necessita perceber, intuitivamente, as problemáticas da sala de aula, articular positivamente seu pensamento para criar estratégias de ação e de improvisação às situações novas de seu cotidiano.

Apresentação de protocolos da Questão 5

Em um grupo de 40 homens e 60 mulheres, a Probabilidade de um homem ser míope é 0,05 e a Probabilidade de uma mulher ser míope é 0,1. Selecionando uma pessoa ao acaso, qual é a Probabilidade de ela ser míope? Selecionado um míope ao acaso qual é a Probabilidade de ele ser homem? (Petrobrás - CESGRANRIO/2005)

Figura 19 - Protocolo de respostas da questão 5



Fonte: Acervo da pesquisa

A questão pode ser resolvida usando a definição Laplaciana ou também Probabilidade condicional, sendo assim, foi escolhida com o objetivo de percebermos se os participantes detinham conhecimento comum do conteúdo de Probabilidade para a sua resolução. Dentre todas as questões do questionário, esta apresentou o maior número de acertos, de oito participantes, cinco responderam corretamente, dois acertaram a primeira pergunta da questão e não respondeu a segunda, de Probabilidade Condisional, e um participante não acertou qualquer das duas perguntas.

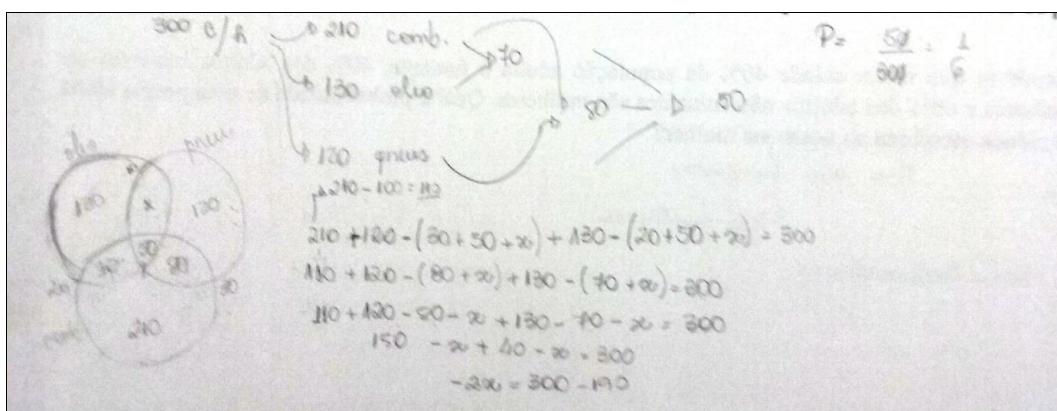
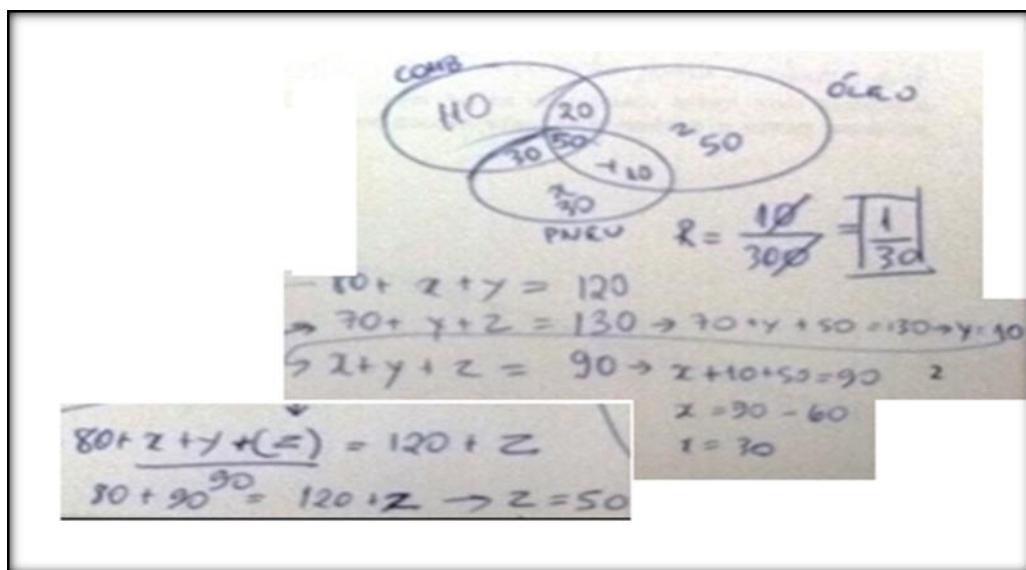
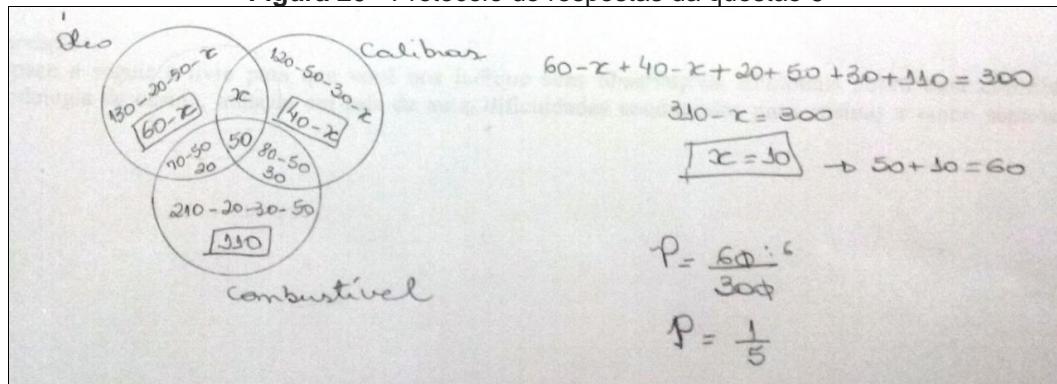
Vale ressaltar que esse professor respondeu utilizando uma tabela, representação que pode ser significante para a interpretação do aluno. Esse professor domina **Conhecimento Comum do Conteúdo**. Na figura abaixo apresentamos uma resolução sem uso de tabela para organizar os dados, mas com a estratégia de restrição do espaço amostral para a resolução.

Apresentação de protocolos da Questão 6

Em um posto de combustíveis entram, por hora, cerca de 300 clientes. Desses, 210 vão colocar combustível, 130 vão completar o óleo lubrificante e 120

vão calibrar os pneus. Sabe-se, ainda, que 70 colocam combustível e completam o óleo; 80 colocam combustível e calibraram os pneus e 50 colocam combustível, completam o óleo e calibraram os pneus. Considerando que os 300 clientes entram no posto de combustíveis para executar uma ou mais das atividades acima mencionadas, determine a Probabilidade de um cliente entrar no posto para completar o óleo e calibrar os pneus. (Petrobrás - CESGRANRIO/2010)

Figura 20 - Protocolo de respostas da questão 6



Fonte: Acervo da pesquisa

Essa questão foi escolhida para compor o questionário por nos oportunizar no curso de formação continuada, avaliar os conhecimentos matemáticos dos professores participantes e a relações entre os assuntos estudados nos diferentes anos, uma vez que a resolução **utilizando** o Diagrama de John Venn, normalmente é discutido ainda na primeira série e o tema Probabilidade na segunda série do Ensino Médio. Desta forma, a referida questão poderia nos permitir entrever o domínio do conteúdo.

Quatro professores resolveram acertadamente a questão. Para outros quatro consideramos a resolução como acerto parcial, uma vez que os professores encontraram o valor 50, mas não souberam interpretar corretamente o que foi solicitado na questão. Erros como estes, foram verificados no trabalho de Pereira Filho (2012) e foi classificada como **solução não verificada**, a principal característica dos erros nesta categoria é que cada passo na realização da atividade é correto; no entanto, o resultado final não é a solução do problema proposto.

Apresentação de protocolos da Questão 7

Um professor de Matemática, ao assumir uma classe da 2a série do Ensino Médio, fez um teste para diagnosticar as dificuldades de seus alunos em relação ao conteúdo de Probabilidade. Propôs a eles que resolvessem individualmente a questão.

Os eventos A e B são tais que $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,9$. Assinale a única alternativa que apresenta um possível valor para $P(A \cap B)$.

- a) 0,13 b) 0,22 c) 0,31 d) 0,49 e) 0,54.

No espaço destinado à resolução, Felipe apresentou seu raciocínio:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,9 - P(A \cap B)$$

"Professor! Tenho duas variáveis este problema não tem solução"

Mediante a resolução de Felipe, utilizando o seu conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento do conteúdo e de ensino, como faria sua intervenção? Ele está completamente errado? Como podemos aproveitar esse erro, para auxiliar este aluno sobre os conceitos de Probabilidade?

Essa questão foi colocada no sentido de posteriormente trazer uma reflexão para o curso de formação continuada sobre a importância do erro. Uma vez que entendemos que a análise de erros pode se constituir em importante instrumento para orientar o professor na sua ação pedagógica ao utilizá-los como possibilidade de reestruturação de ideias e construção de conhecimentos.

Figura 21 - Protocolo de respostas da questão 7

A intervenção não mostra para o aluno que: como existem apenas dois eventos, então $P(A \cup B) = 1 (100\%)$, logo teríamos apenas uma variável.

$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,9$$

$$1 = 0,4 + 0,9 - P(A \cap B)$$

$$1 = 1,3 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 1,3 - 1$$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0,3}$$

aproveitar esse erro, para auxiliar este aluno sobre os conceitos de probabilidade:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,9 \leq 1,3 - P(A \cap B) \leq 1$$

$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,9 - P(A \cap B) \Rightarrow -0,4 \leq -P(A \cap B) \leq -0,3$$

$$P(A \cup B) = 1,3 - P(A \cap B) \Rightarrow 0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$$

O menor valor ocorre quando $\boxed{A \subset B}$
O maior valor possível é 1

Então o valor tem que estar nesse intervalo

*Resposta:
Letra C*

Fonte: Acervo da pesquisa

Essa questão apresentou somente uma solução correta, percebemos dificuldades relacionadas dos professores participantes na resolução do problema, consequentemente para identificar o erro do aluno em questão.

Entendemos que para analisarmos o conhecimento do conteúdo e dos estudantes dos professores participantes, seria importante que eles reconhecessem as respostas errôneas dos alunos e terem habilidades suficientes para explicar os erros cometidos. Destacamos a importância de os professores conhecerem os conteúdos com os quais ensinarão, tanto no que concerne a conceitos quanto aos procedimentos metodológicos que utilizarão em sua prática docente.

Viali e Cury (2009) destacam que a probabilidade é um dos tópicos em que as concepções errôneas são bastante prováveis de surgir e, a menos que trabalhemos com essas concepções errôneas dos professores, não podemos esperar que eles saibam lidar com tópicos de probabilidade com seus alunos. As concepções errôneas são sistemáticas e podem coexistir com ideias corretas, na mente dos alunos e dos professores, a menos que elas sejam enfrentadas e remediatas.

Quando refletimos sobre as categorias de Ball, Phelps e Thamés (1996), que dedicaram atenção especificamente à forma pela qual os professores necessitam saber determinado conteúdo para ensiná-lo, bem como o que mais os professores necessitam saber sobre Matemática e como e onde poderiam os professores usar o conhecimento. Percebemos que para esta questão em particular teríamos intersecções entre as categorias. Uma vez que a resolução da questão (devolutiva para o aluno Felipe) de maneira satisfatória exige do professor, **Conhecimento Especializado do Conteúdo, Conhecimento Horizontal do Conteúdo, Conhecimento de Conteúdo e de Alunos e Conhecimento Comum do Conteúdo.**

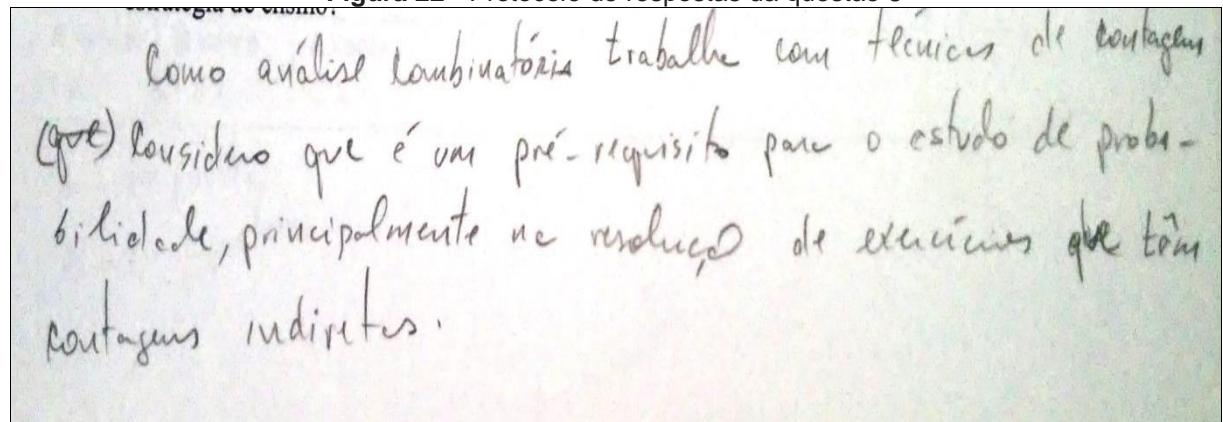
A dimensão exigida pela questão envolve discussões como:, reconhecer a resposta errada, dimensionar a natureza do erro, identificar causas do erro cometido por alunos ao resolverem a questão, perceber por que diversos alunos cometem esse erro, antever o que é possível fazer frente ao que os alunos pensam sobre o que está sendo ensinado e o que poderão identificar como obscuro.

Essa questão exige o trabalho com diagrama, relação entre conjuntos, tais como, se um conjunto está ou não contido em outro conjunto, condições de intersecção entre os conjuntos, propriedades de Probabilidades, resolução de uma equação do primeiro grau. Nessa questão, houve somente uma resposta totalmente correta.

Apresentação de protocolos da Questão 8

Você acredita ser possível ensinar Análise Combinatória e Probabilidade paralelamente? Justifique sua resposta. Quais são os princípios pedagógicos favoráveis ou desfavoráveis pertinentes a essa estratégia de ensino?

Figura 22 - Protocolo de respostas da questão 8



estratégia de ensino.

Ao meu ponto de vista é o menor de ambos for bem pequeno.

Acredito que é possível, mas não adequado...
Ao entender análise combinatória, o aluno torna-se capaz de determinar o (também) tamanho de uma amostra em problemas de (pouco) probabilidade e estatística. Sendo assim, Análise Combinatória é pré-requisito para probabilidade.

Observação

Fonte: Acervo da pesquisa

Essa questão foi colocada com o objetivo de avaliarmos como os participantes se sentiam acerca do ensino de Probabilidade e análise combinatória de forma não linear. Seis professores responderam que sim, acreditavam ser possível ensinar Análise Combinatória e Probabilidade paralelamente. Entretanto, as justificativas variam muito entre os professores, alguns afirmaram que para um conjunto pequeno é possível trabalhar paralelamente, ou acreditam que sim, mas não afirmam como isso é possível. Um professor deixou em branco e o outro acredita que são pré-requisitos um do outro e que não é possível ensinar Probabilidades antes de ter ensinado análise combinatória.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) destacam, dentre outras questões, a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio, bem como o cuidado que os professores devem ter ao procurar desenvolvê-lo. Afirma ainda que, as habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Sendo assim, técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas, mostrando assim, a importância de uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, Estatística e Probabilidades no Ensino Médio.

Almeida e Ferreira (2009) afirmam que a combinatória não é apenas uma técnica de cálculo de probabilidade, existe uma relação entre as duas, considerando o raciocínio combinatório como ponto importância na probabilidade. As autoras afirmam que é usual ensinar conteúdo combinatório dentro da Probabilidade, por exemplo, quando se descreve o espaço amostral de um experimento é utilizado raciocínio combinatório e se o aluno não tem uma boa capacidade para lidar com esta última, terá dificuldade em compreender a Probabilidade. Destacam ainda que a consequência disto, muitos erros de Probabilidade podem ter relação com a falta de raciocínio combinatório.

De fato, quando o professor responde que para um conjunto menor de valores é mais simples o trabalho ser realizado paralelamente, isso exige o Conhecimento Especializado do Conteúdo, o Conhecimento Horizontal do Conteúdo, o Conhecimento de Conteúdo e de Alunos, o Conhecimento Comum do Conteúdo e Conhecimento de Conteúdo e de Ensino, bem como um tempo de dedicação na preparação da sequência didática, análise dos possíveis erros e estratégias pedagógicas que influenciam a aprendizagem dos seus alunos.

4.3 EVENTOS CRÍTICOS DA FORMAÇÃO CONTINUADA

Nos encontros da formação continuada, selecionarmos eventos que consideramos críticos para identificar momentos significativos relacionados aos objetivos e a questão de pesquisa. Seguimos as orientações do modelo de análise de Powell *et al* (2004) e identificamos momentos em que a participação na formação continuada impulsionou os professores participantes a refletirem sobre sua prática, evidenciou melhorias na criatividade e autoconfiança, promoveram impactos na sala de aula, no tocante a reflexão sobre os momentos de planejamento de aula, da aula propriamente dirá e do acompanhamento pós-aula, ou seja, reflexões sobre didática.

Os eventos críticos foram selecionados de modo a evidenciar e fornecer elementos para melhor compreensão da situação investigada. Em função da questão de pesquisa foram separados para análise os eventos críticos observados e subsidiados pela teoria, em cinco, são os apresentados no quadro abaixo.

Quadro 9 - Eventos críticos da formação

Primeiro evento crítico	Conhecimentos iniciais e expectativas	Primeiro encontro Segundo encontro Terceiro encontro
Segundo evento crítico	Construção de conhecimentos sobre tarefas e aulas investigativas com probabilidade geométrica	Quarto encontro Quinto encontro
Terceiro evento crítico	Ligaçāo entre Probabilidade e tecnologia	Sexto encontro Sétimo encontro
Quarto evento crítico	Resolução de problemas	Oitavo encontro Nono encontro Décimo encontro
Quinto evento crítico	Sistematização dos conceitos estudados e reflexão sobre a formação continuada	Décimo primeiro encontro

Fonte: Elaboração própria

Na próxima seção passamos a analisar tais eventos críticos da formação.

4.3.1 Primeiro Evento Crítico - Conhecimentos iniciais e expectativas

O primeiro evento crítico está ligado aos conhecimentos iniciais dos participantes e suas expectativas relativas à formação continuada e consideramos que ele englobou os três primeiros encontros. Nós o consideramos como evento crítico por ter sido um momento de conscientização dos participantes sobre os próprios conhecimentos específicos em Probabilidade, assim como, vinculação e motivação para a participação no curso

A análise desses encontros, do questionário de entrada e do segundo questionário, que versava sobre Probabilidade, identificou na postura dos professores participantes motivações em relação a:

- Conhecer e a adotar a abordagem investigativa;
- Conhecer os significados geométrico, axiomático, subjetivo e freqüencista de Probabilidade;

- Ampliar o conhecimento específico sobre Probabilidade;
- Ampliar o conhecimento pedagógico geral;
- Ampliar o conhecimento instrucional.

Desta forma, consideramos como evidências situações em que percebemos que foram oportunizados momentos de reflexões e modificação nos conceitos dos professores participantes em relação a uma concepção anterior.

A primeira evidência está no relato do professor C. Percebemos que a metodologia de aulas investigativas para abordagem de conceitos, ainda não fazia parte de sua prática pedagógica.

Acabei de explicar função, usando como exemplo o vendedor de pastéis que ficava em frente à escola. Esta experiência poderia se concretizar em uma atividade investigativa caso melhor elaborada? Pergunto por que, nesse dia a aula terminou e nem perceberam que não havia outras turmas mais na escola, pois estavam todos envolvidos na atividade.

Percebemos que o professor, embora ainda não soubesse trabalhar com aulas investigativas, gostaria de contextualizar a situação no intuito de manter seus alunos interessados em suas aulas e se possível transformar a questão em uma atividade investigativa, com o propósito principal de levar seus alunos a participarem das aulas.

Libâneo (2004) afirma que todo estudo é sempre precedido do trabalho do professor, o incentivo para o estudo, a explicação da matéria, a orientação sobre procedimentos para resolver tarefas e problemas, as exigências quanto à precisão e profundidade do estudo, etc. Destaca ainda ser necessário que o professor esteja atento para que o estudo seja fonte de autossatisfação para o aluno de modo que ele sinta que está progredindo, animando-se para novas aprendizagens. Nessa mesma direção, aponta Souza (2007), que em sua pesquisa constatou que muitos alunos (até os mais dispersos) se sentem mais à vontade para participar da aula quando ocorrem de forma prática e investigativa. O autor destacou ainda que os alunos fizeram observações e análises, destacando que, com esse tipo de metodologia, poderiam errar, pois o momento se tratava de um momento rico e de debate papo e não simplesmente uma aula tradicional.

As ideias desses autores corroboram com a preocupação do professor **C** em relação a aproximar suas aulas com a realidade dos alunos, buscando trazê-los mais efetivamente para as atividades de sala de aula.

Quanto aos significados de Probabilidades que poderiam ser abordados no curso, alguns professores alegaram que não conheciam todos os apresentados.

Como disse a professora J:

Podemos estudar tópicos de Probabilidades que alguns colegas não dominam?

Esses dizeres indicaram que alguns tópicos de Probabilidade não estão bem claros para a participante ou para outros membros do grupo. Ou seja, oportunizou analisarmos as contribuições da participação na formação quanto à ampliação do conhecimento específico.

Esclarecemos que usaríamos o espaço do curso também para esse fim, pois somente com o domínio do conteúdo, isto é, com o conhecimento matemático necessário, podemos nos processos de ensino e de aprendizagem. Explicamos que o conhecimento didático e do conteúdo, nos auxiliaria, descobrir, práticas de sala de aula que correspondessem às necessidades dos alunos, bem como fazer adaptações e também avaliar essas práticas e nós mesmo enquanto professores. Entendemos que o curso seria o momento oportuno para refletirmos sobre o ensino de Probabilidade.

Após a reflexão, a professora afirmou:

Quero estudar todos os tópicos de Probabilidade apresentados.

Percebemos nos dois relatos da professora, sua expectativa com relação ao curso de formação continuada de melhorar seu conhecimento específico do conteúdo de Probabilidade.

Apresentarmos os significados de Probabilidade abordados no primeiro evento crítico da formação continuada conforme descrições abaixo:

Clássica:

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos do evento A}}{\text{Número de elementos do espaço amostra}}$$

As propriedades:

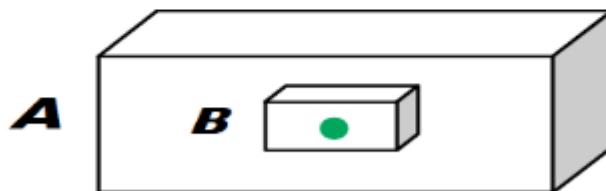
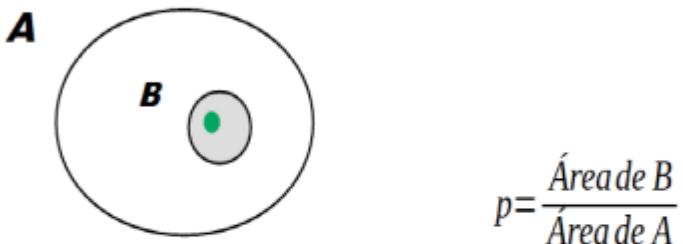
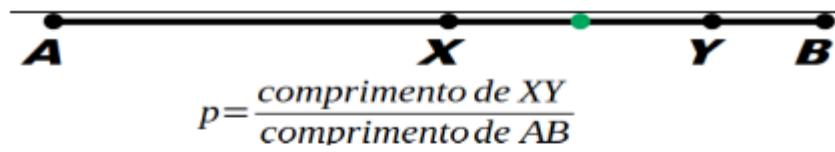
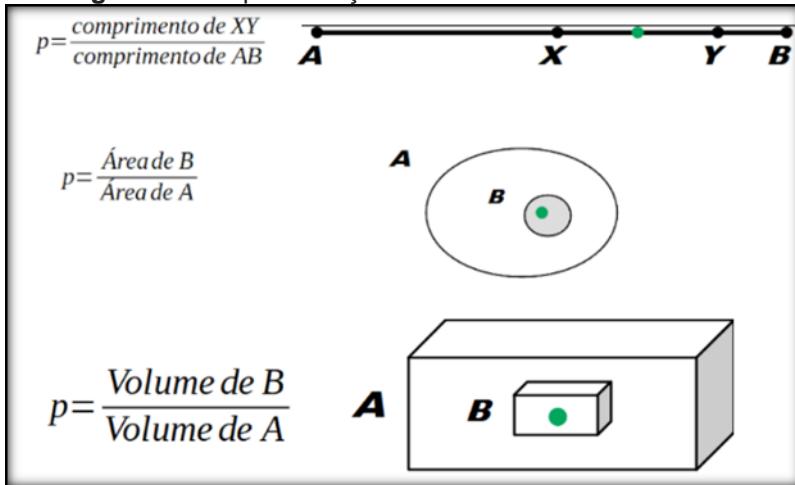
1. $| 0 \leq P(A) \leq 1;$
2. Se dois acontecimentos A e B forem mutuamente exclusivos
 $| P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. Discutimos ainda que eventos certos têm:
 $| P=1$ e para eventos impossíveis tem $P=0$

Destacamos o fato da definição clássica de Probabilidade ter uma limitação que deriva do pressuposto de que o número de resultados possíveis associados a cada experiência aleatória é finito. Não é possível, por exemplo, calcular a Probabilidade de que um ponto selecionado ao acaso a partir de uma região se localize numa determinada sub-região incluída.

Expusemos o significado Geométrico de Probabilidade. Seja *med* uma medida da dimensão (comprimento, área, volume) de uma região qualquer incluída em um espaço amostral contínuo S de uma experiência aleatória. De acordo com a definição geométrica, a Probabilidade de que um ponto selecionado ao acaso a partir de S se localiza na região A é dada pela razão:

$$| P(A) = \frac{\text{med } A}{\text{med } S}$$

Enfatizamos que as definições clássicas e geométricas não podem ser utilizadas no cálculo de Probabilidade de eventos associados à realização da maioria das experiências com interesse prático, às quais a equiprobabilidade dos resultados não se aplica. Por exemplo: um supermercado recebe em média 20 clientes por hora. Qual é a Probabilidade de receber 8 clientes em uma dada hora selecionada aleatoriamente? Outro ponto que destacamos foi que, tal Probabilidade lida com espaços amostrais descritos por figuras geométricas. São dados da Geometria, como comprimento, área ou volume. Esses espaços são enumeráveis, podendo ser finitos.

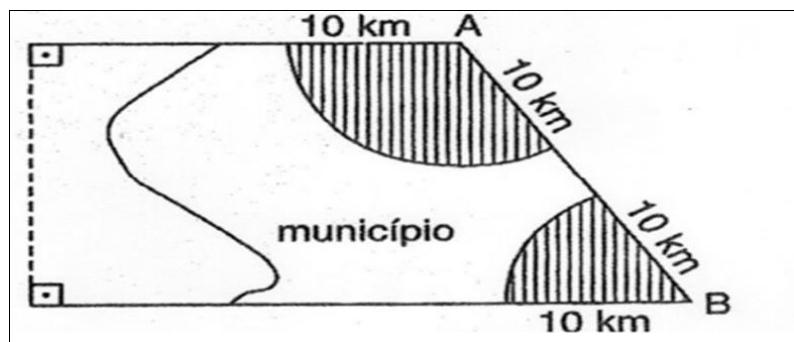
Figura 23 - Representação da Probabilidade Geométrica

$$p = \frac{\text{Volume de } B}{\text{Volume de } A}$$

Fonte: Adaptado de Kataoka, Rodrigues e Oliveira (2007, p. 5.)

Expusemos o seguinte problema de Probabilidade geométrica, buscando um melhor entendimento dos professores participantes.

Um município de 628 km² e atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura abaixo. Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar Probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de, pelo menos, uma das emissoras. Essa Probabilidade é de, aproximadamente:



Fonte: ENEM (Brasil, 2011, questão 14, prova amarela.)

Após a apresentação e discussão da questão, por meio do relato da professora J, pudemos identificar que, sua participação na formação, já ampliava seus conhecimentos referentes às definições de Probabilidades. Além disso, percebemos que o termo Probabilidade normal, citado pelo professor C, se tratava de Probabilidade clássica.

Já tinha visto esta questão antes, mas não sabia que se tratava de Probabilidade geométrica, tentei fazer como uma Probabilidade normal.

Ao afirmar que já havia resolvido a mesma questão utilizando a definição clássica de probabilidade, mas não se dava conta que se tratava de Probabilidade geométrica, percebemos que a professora não conhecia tal significado de Probabilidade. Sendo assim, a formação continuada lhe proporcionara uma ampliação de conhecimentos do conteúdo.

Com relação aos conteúdos e suas abordagens metodológicas Shulman (1986) afirma que devem ser desenvolvidas sobre determinado assunto uma série de conhecimentos e habilidades necessárias para que ocorra o desenvolvimento da prática profissional de um professor, particularmente frente a um determinado conteúdo. Essa postura frente ao conteúdo de forma didática é o que o autor denomina de conhecimento pedagógico do conteúdo.

Expusemos o significado **frequencista**, apresentado assim: Considere-se que, no decurso de **N** realizações de uma experiência, um acontecimento **A** ocorre

NA vezes ($0 \leq NA \leq N$). A Probabilidade do acontecimento define-se como o limite, quando **N** tende ao infinito, da frequência relativa de ocorrência do acontecimento **A**:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{número de ocorrências de } A \text{ em } n \text{ repetições independentes}}{\text{número } n \text{ de repetições do experimento}} \right)$$

Com relação ao significado **subjetivo de Probabilidade**, reforçamos que se trata de uma atribuição de Probabilidades baseadas em experiências passadas, opiniões, enfim, no poder de análise pessoal de uma situação específica. Para ilustrar citamos os seguintes exemplos.

Suponhamos que um químico manipule um novo perfume para mulheres e atribua uma Probabilidade de aceitação deste perfume junto às mulheres bastante diferente daquela atribuída pelo dono do estabelecimento.

Qual a Probabilidade de você fechar sua nota na próxima avaliação presencial?

Qual a Probabilidade de chover no final de semana?

Após a explanação, percebemos que os professores participantes entenderam o significado subjetivo de Probabilidade.

Batanero (2005) afirma que ao utilizar as noções ligadas a jogos de aposta, a esperança e a ambição, se começa a apontar a necessidade da atribuição de um número a essas ocorrências e com isso, essas teorias foram, ao longo do tempo, recebendo várias interpretações sobre a natureza objetiva ou subjetiva da probabilidade. Isso significa dizer que essas opiniões começaram a ser quantificadas, transformando assim essa análise subjetiva em um contínuo quantificado de graus de certeza, desde a incredulidade total a uma certeza absoluta.

Por fim, apresentamos o significado **axiomático**, por meio das propriedades definidas pelo matemático russo Kolmogorov, como indicamos a seguir:

Uma medida de Probabilidade é uma função de conjunto, isto é, definida em chama Probabilidade de A e se representa por P (A), satisfazendo as seguintes condições ou axiomas:

1. Axioma - A Probabilidade de qualquer acontecimento é maior ou igual a zero
 $P(A) \geq 0$.
2. Axioma - A Probabilidade do acontecimento certo S, é 1: $P(S) = 1$.

3. Axioma - Dados dois acontecimentos disjuntos, a Probabilidade da sua união é igual à soma das Probabilidades de cada um. Se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Com relação ao terceiro axioma, foi discutido que ele pode envolver mais de dois conjuntos.

A discussão sobre os significados de Probabilidade foi profícua na formação continuada, uma vez que os professores relataram que, no ensino, o que utilizavam era tão somente o significado clássico.

Uma das evidências da ampliação do conhecimento pedagógico geral e de ampliação do conhecimento instrucional, foi durante discussão da resolução da questão 3 do questionário 2 (ver abaixo).

Considere que numa cidade 40% da população adulta são fumantes, 40% dos adultos fumantes são mulheres e 60% dos adultos não fumantes são mulheres. Qual a Probabilidade de uma pessoa adulta da cidade escolhida ao acaso ser mulher? (SEFAZ-SP-2008)

	Mulher	Homem	Total
Não Fumante (600)	360	240	600
Fumante (400)	160	240	400
Total	520	480	100

Fonte: Acervo da pesquisa

Discutimos que, para determinar a Probabilidade, poderíamos fazer por suposição, ou seja, partindo da hipótese que havia um total de mil pessoas. Na oportunidade, informamos que tal suposição não influenciava o resultado. A professora J se posicionou acerca da atividade acima dizendo:

Apresentamos o relato da professora J acerca da atividade acima:

Nunca tinha resolvidos exercícios assim, fazer a suposição é melhor para o aluno, ele terá menos cálculos para fazer e não usa tantas letras, pois os alunos têm mais dificuldades nesses casos.

Ao analisarmos os dizeres da professora J, percebemos que a reflexão sobre a resolução da atividade, contribuiu para ampliar o conhecimento pedagógico do conteúdo quanto ao ensino de Probabilidades.

Bryant e Nunes (2012) destacam que interpretar as informações apresentadas, por meio de tabelas, ajuda as pessoas a compreenderem melhor, uma vez que as relações observadas ajudam na interpretação. Os autores enfatizam que problemas apresentados sob a forma de relação muitas vezes são mais fáceis que os mesmos problemas apresentados como proporções, porcentagens, afirmam ainda que, ensinar usando a linguagem da relação parece ter mais sucesso do que ensinar usando a linguagem das frações.

Essa possibilidade de adaptar situações que favorecessem a compreensão dos alunos é destacada por Shulman (1986), o autor afirma que a capacidade de modificação do conteúdo que distingue um professor de um especialista. Ou seja, a sua habilidade em transformar o conhecimento do conteúdo que possui em ferramentas pedagogicamente poderosas e adaptadas, levando em consideração as experiências e bagagens que os alunos possuem.

4.3.2 Segundo Evento Crítico da Formação- Construindo conhecimentos sobre tarefas e aulas investigativas com probabilidade geométrica.

O segundo evento crítico está ligado à construção de conhecimentos dos participantes sobre tarefas e aulas investigativas por meio da elaboração de atividades de probabilidade geométrica, desenvolvidas ao longo do quarto e quinto encontros.

A análise desses encontros, nos quais discutimos e refletimos em conjunto sobre elaboração de atividades investigativas por meio de materiais concretos, tais como, CDs, bola de gude, roletas e toca discos antigos, identificamos impacto na postura dos professores participantes em relação a:

- Conhecer e a adotar a abordagem investigativa,;
- Ampliar o conhecimento específico de Probabilidade,;
- Ampliar conhecimento pedagógico geral,;
- Ampliar o conhecimento instrucional.
- Para a elaboração da atividade, retornamos as reflexões sobre as fases de uma aula investigativa, reforçamos ao grupo que devemos seguir essas três fases:
- Introdução da tarefa, professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito;

- Realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com a turma;
- Discussão dos resultados em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

Expusemos também que além das fases de uma aula investigativa, paralelamente a elas, deveríamos seguir os quatro processos de uma atividade (tarefa) investigativa:

- Exploração e Formulação de Questões;
- Formulação de Conjecturas;
- Teste e a Reformulação de Conjecturas;.
- Justificação e Avaliação de conjecturas

Durante as discussões e as reflexões, percebemos motivação dos professores participantes em relação a aplicação de atividades investigativas com os alunos.

O professor **E** relatou ao grupo que haveria uma feira de ciências da escola em que leciona e ele orientaria alunos da turma de terceira série do Ensino Médio sobre a construção de roletas e consequentemente a atividade de Probabilidade Geométrica. O referido professor **E** relatou suas pretensões para aplicação da metodologia da aula investigativa da seguinte forma:

A turma que irei trabalhar serão quatro fases, pois a última fase será a apresentação de todas as turmas na feira ciência.

Apresentamos o relato do professor **E**:

A turma que irei trabalhar serão quatro fases, pois a última fase será a apresentação de todas as turmas na feira ciência.

Ao analisarmos o relato do professor **E**, avaliamos que, embora tenha dito no primeiro encontro que ainda não tinha ensinando Matemática por meio de atividades investigativas, neste momento do curso, demonstrou interesse e apropriação das fases de uma aula investigativa, evidenciando que curso de formação continuada está auxiliando-o a inserir essa abordagem em sua prática docente.

Cumpre relatar que as fases referidas pelo professor retire a foram acompanhadas por nós, fomos na escola que ele trabalha e auxiliamos na **introdução da atividade**; nesse momento, junto ao professor, buscamos a melhor forma de apresenta-la. Participamos do **desenvolvimento da atividade**, foram momentos ricos de interações entre nós e os estudantes, nosso papel foi de estimular o confronto de opiniões, incentivar as reflexões, argumentações, sempre nos preocupando em fornecer as informações pertinentes, de modo a oportuniza-los a se questionarem, desenvolverem atitudes de observação e de lideranças. A terceira fase, foi um momento de **discussão da atividade**, foi oportunizado aos estudantes, analisar suas próprias ideias e também sistematizarem suas conclusões. Esse espaço foi somente entre os alunos e seus colegas de sala.

A última fase foi um momento de **apresentação da atividade** para todas as turmas da escola, exposição em uma feira de ciência.

Destacamos que não acompanhamos todas as aulas do professor durante toda atividade investigativa, fomos para introdução da atividade nas turmas que ele trabalhou, posteriormente fomos para duas aulas do desenvolvimento, duas aulas de discussão e participamos da feira de ciência. Qualquer dúvida fora destes momentos, o professor nos procurou para que pudéssemos orientá-lo. O que vimos, foram momentos ricos, muitas trocas de ideias e argumentações sobre o que cada grupo estava pensando, oportunizando um espaço rico aos estudantes, uma vez que grupo teve contato com as estratégias e pensamentos diferentes dos demais. As intervenções do professor em cada grupo e nas discussões, sempre no sentido de incentivar e auxiliá-lo com relação as dúvidas que iriam surgindo.

O relato do professor apresentou aspectos relacionados ao desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo, na concepção de Shulman (1987). O autor destaca que a base de conhecimento para o ensino não tem caráter fixo e definitivo e que quanto mais aprendemos sobre o ensino, mais reconhecemos as novas categorias de desempenho e entendimento que caracterizam o bom professor e permitem reconsiderar e redefinir outras áreas.

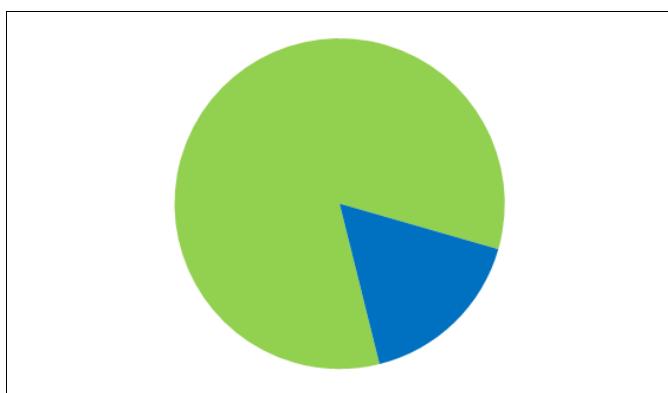
Dando continuidade ao encontro, apresentamos para o grupo a possibilidade da construção de uma atividade investigativa para o ensino de Probabilidade Geométrica. Sendo assim, falamos do primeiro processo, de **Exploração e Formulação de Questões**.

Em seguida, iniciamos elaboração de uma atividade composta por várias questões a serem propostas aos alunos.

A questão 1 teve como proposta inicial o seguinte enunciado:

Questão 1: Vamos supor que estejam sentados numa mesa de roleta. Desta forma, discuta com seus colegas.

Qual Probabilidade de a seta parar na cor azul? Escrevam o raciocínio utilizado



Durante a reflexão quanto ao enunciado da questão, percebemos grande preocupação dos professores quanto as dificuldades que os alunos poderiam ter com relação à interpretação do texto.

Apresentamos evidências de dois professores relacionados à preocupação com a didática e com os estudantes.

Relato do professor H:

Devemos nos preocupar com o nível de conhecimento dos alunos envolvidos, os questionamentos devem ser mais bem elaborados com o conhecimento de matemática que a turma já trouxer.

Essa preocupação do professor H é apresentada por Ponte e Oliveira (2002) uma vez que os autores apontam que conhecimento do aluno como pessoa e dos seus processos de aprendizagem, bem como os seus interesses, os seus gostos, a sua forma habitual de reagir, os seus valores, as suas referências culturais e o modo como aprendem são condições decisivas para o sucesso do trabalho do professor.

Considerando ainda a postura do aluno diante das questões apresentadas, vejamos a fala do professor E:

Não acredito que os alunos irão tentar pelo cálculo de área, mas penso que independentemente do raio, os alunos iriam tentar medir quantas vezes a parte azul cabe dentro de toda a circunferência, pois assim ele poderá saber quanto essa parte é do todo.

O relato do professor **E** mostra que mesmo sem calcular a área, os alunos poderiam verificar a proporção da cor favorável em função de toda a circunferência. Esse raciocínio é apresentado na pesquisa de Santos (2008), uma vez que o autor afirma que, definição geométrica de Probabilidade é unicamente utilizamos o quociente das medidas das regiões favorável e possível, ao lançarmos pontos a sorte, diretamente numa região, pois neste caso existe equipossibilidade e, consequentemente a probabilidade numa região seja proporcional a sua medida.

As evidências desses professores e suas preocupações com a didática e com os estudantes, vão de encontro às ideias de Shulmam (1987), uma vez que para o autor, o conhecimento pedagógico do conteúdo é de especial interesse aos docentes, pois ele representa a integração do conteúdo e da pedagogia em uma compreensão de como assuntos específicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados aos diversos interesses e habilidades dos alunos, e apresentado para o ensino.

Vale a pena ressaltar que a preocupação com os estudantes também é incluída na categoria Conhecimento do conteúdo e dos estudantes de Ball e colaboradores (1986). Para esses autores, o professor necessita ser capaz de antecipar erros dos alunos e as más concepções mais frequentes, antecipar suas produções assim como aquilo que eles consideram difícil ou interessante.

Percebemos durante as discussões de elaboração da questão, uma interação do grupo e também preocupação dos professores com os alunos para que a questão pudesse ser explorada de forma eficiente, levando assim os alunos a refletir sobre espaço amostral e sobre os conceitos de Probabilidade.

Os professores participantes julgaram que seria melhor evitarmos o termo Probabilidade ainda, precisávamos que os alunos raciocinassem livremente ao tentar responder a questão. Independentemente de estarem corretos, seria de suma importância que conseguíssemos analisar o que pensaram ao tentar responder, sendo assim após as modificações no enunciado, julgamos que o melhor texto para a questão seria:

Questão 1 – Revisada

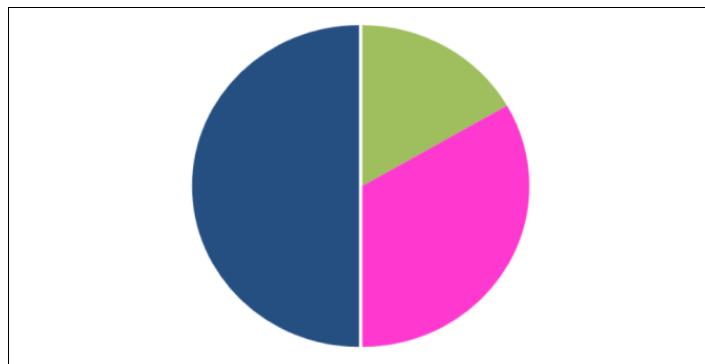
Para as atividades propostas, vamos supor que estejam sentados numa mesa de roleta. Desta forma, investigue e discuta com seus colegas.

- Se você precisar apostar onde a seta vai parar, qual seria sua ideia? Por quê? Rode a roleta e veja se sua conjectura se efetivou.
- Qual a chance da seta parar na cor azul? Descrevam as ideias utilizadas pelo grupo.

Concluímos pela irrelevância de informarmos sobre a medida do ângulo, pois a ideia era que o raciocínio fosse válido para qualquer ângulo. Como iríamos elaborar um conjunto de atividades, apresentamos a segunda questão da atividade proposta.

Questão 2:

Se na cor verde, temos uma abertura de 60° . Qual a probabilidade da seta parar na cor rosa? Supondo que se trata de uma circunferência de raio 1, escreva o raciocínio utilizado.



Com relação essa questão o grupo decidiu ainda não utilizar o termo probabilidade e que o texto seria esse mesmo.

Discutimos sobre a possibilidade dos alunos construírem uma roleta com três cores, de modo que a chance da seta parar em qualquer uma região angular fosse a mesma ou então oferecermos uma roleta com três cores prontas.

Professor T, afirma que seria melhor então trabalhar com oito cores e não três. A sugestão do professor T é considerada uma evidencia do domínio especializado do conteúdo segundo Ball, Thames e Phelps (2008).

Relato do Professor T:

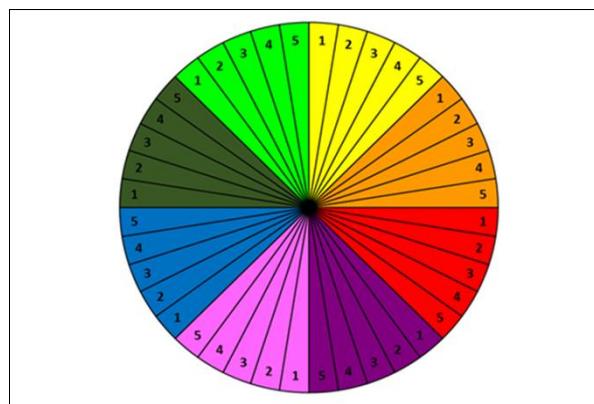
Poderíamos construir uma roleta com vários números de 1 a 5 em cores diferentes, pois assim poderíamos pedir a probabilidade da seta parar na cor verde e no número 4 por exemplo.

A postura do professor T frente à elaboração da questão nos mostrou que o curso de formação continuada estava contribuindo para a ampliação do conhecimento pedagógico, bem como levando o referido professor a entender a importância da abordagem investigativa no subsídio dos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos de Probabilidade. Uma vez que, até então, o referido professores e mostrava mais confortável quando o ensino era mediado por meios de resolução de exercícios propostos. Notamos também na sugestão do professor que ele tem conhecimento específico do conteúdo de Probabilidade.

Apresentamos a questão 3, com o seu primeiro enunciado para discussão e adaptações em grupo.

Questão 3:

Qual a probabilidade de a seta parar no número 1?



Relato do professor H:

Acredito que devemos elaborar uma questão que trouxesse o termo chance, depois possibilidade e por último, probabilidade, assim talvez facilitasse o entendimento do aluno, no que se refere ao cálculo de probabilidades.

Relato do professor E

Qual a possibilidade de a seta parar no número 1? Se temos oito números 1 de um total de quarenta números, talvez estariámos introduzindo a ideia de espaço amostral e eventos.

Relato do professor A:

Acredito que devemos solicitar aos alunos informações sobre quantas cores tem? Quantos números têm? Quantos números 1 tem? Assim o aluno poderá ir construindo o espaço amostral primeiro e depois poderá de acordo com a pergunta fazer uma relação da parte com o todo.

Professor H

Podemos colocar no enunciado da questão um texto falando o que significa espaço amostral e depois pedir aos alunos que respondam qual o espaço amostral das cores por exemplo. Também podemos pedir que respondam quantas cores existem na questão, posterior a isso, deixar uma observação informando que a resposta do aluno significa o espaço amostral das cores.

Os relatos dos professores e as discussões do grupo nos evidenciam que a formação oportunizou o desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo, segundo as categorias de Shulman (1986) e, particularmente, o conhecimento do conteúdo e de ensino, segundo Ball et.al (2008).

Após as discussões em grupo, apresentamos a questão modificada para nova avaliação, com o seguinte enunciado.

Questão 3 - Revisada

Quantas cores diferentes existem nessa roleta? Quantos números existem em cada cor? Qual o total de números na roleta? Qual a possibilidade de sair o número 1 em relação ao total de números existentes na roleta?

Discutirmos sobre as fases da atividade investigativa. Enfatizando que a ideia seria levar o aluno a construir a definição de probabilidade, por meio das atividades investigativas elaboradas por nós foi sempre o ponto alto das discussões do grupo no primeiro momento do encontro.

Decidimos em grupo que, iríamos levar roletas, confeccionada com CDS, toca disco antigo, fitas métricas e compasso, caso algum grupo solicitasse o material.

Novamente os professores se mostram preocupados nos passos que os alunos podem escolher para a resolução da questão e também na interpretação do texto, ou seja, precisaríamos deixar o texto o mais claro possível. Vejamos alguns relatos dos professores:

Relato do professor H.

Esta questão oportuniza o aluno pensar na ideia de eventos, espaço amostral, pois são várias cores e vários números. Vejam que a questão propicia o debate sobre a ideia de relação e razão, pois a relacionar total de números existentes na roleta. Podemos elaborar uma atividade que já induza o aluno a pensar em colocar um número sobre o outro, já construindo a ideia de probabilidade pensando em uma fração.

Relato do professor JÁ

O termo possibilidade está substituindo probabilidade, pois se a questão traz o questionamento somente qual a possibilidade de sair o número 1, seria oito a resposta, mas como pede em relação ao total de números existentes na roleta, isso já é 8 de um total de 40. Se perguntarmos qual a possibilidade de sair um rei em baralho? A resposta é 4, pois são 4 possibilidades

O professor JÁ sugere as seguintes perguntas para a questão.

Qual a probabilidade de a seta parar no número 1 ou na cor vermelha? Qual a probabilidade de a seta parar na cor azul ou em um par? Qual a probabilidade de parar na cor Pink, sabendo que o número é primo?

A questão 1 voltou para a discussão e, após nova revisão, ficou com o seguinte enunciado.

Questão 1:

Para as atividades propostas, vamos supor que estejam sentados numa mesa de roleta. Desta forma, investigue e discuta com seus colegas.

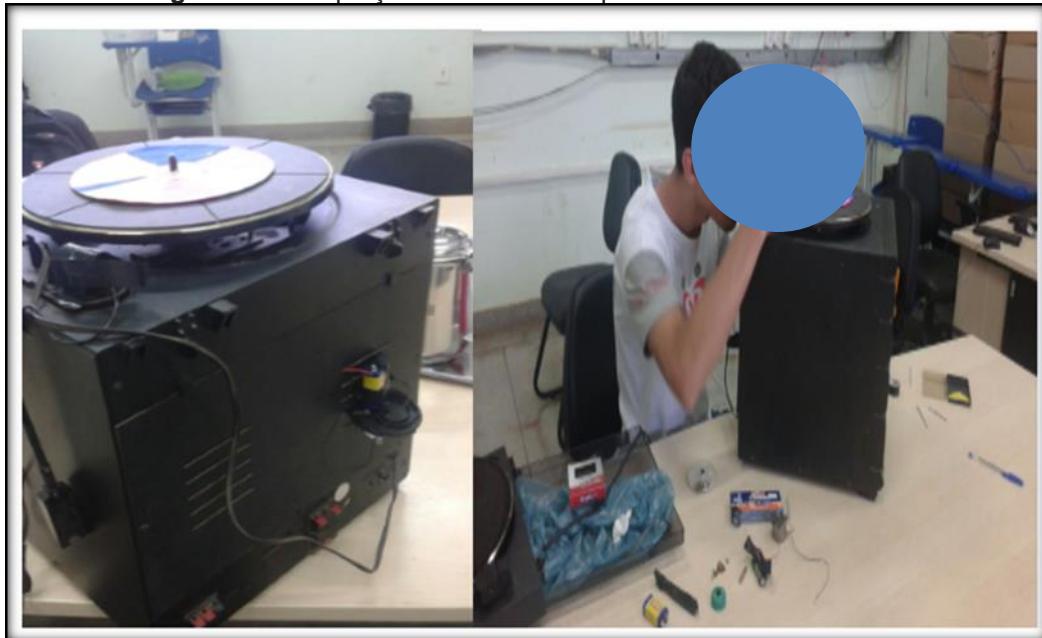
- Se você precisar apostar onde a seta vai parar, qual seria sua ideia? Por quê? Rode a roleta e veja se sua conjectura se efetivou.
- Qual a chance de a seta parar na cor azul? Descrevam as ideias utilizadas pelo grupo.

A ideia da questão foi levar o aluno a perceber que, os eventos sendo aleatórios, a chance de a roleta parar na região de maior ângulo e área é maior. Discutimos no grupo a possibilidade de os alunos poderem tentar mensurar esse valor medindo o comprimento dos arcos associarem a chance ao setor circular.

Professor H afirma que precisamos levar os alunos a escreverem passo a passo suas ideias para que possamos então avaliar o que ele pensou ao tentar resolver a questão.

Apresentamos aos colegas as roletas construídas durante a semana com toca disco antigo, que já não funcionavam mais, foram adaptados e rodavam por conta de uma pilha embutida. Os toca discos foram recolhidos em eletrônicas que os emprestaram para a pesquisa. Encontramos alguns em pleno funcionamento.

Figura 24 - Adaptação do toca discs para atividade com discos



Fonte: Acervo da pesquisa

Após apresentarmos as roletas de discos抗igos, trouxemos a questão 2 da atividade investigativa que ficou com o seguinte enunciado.

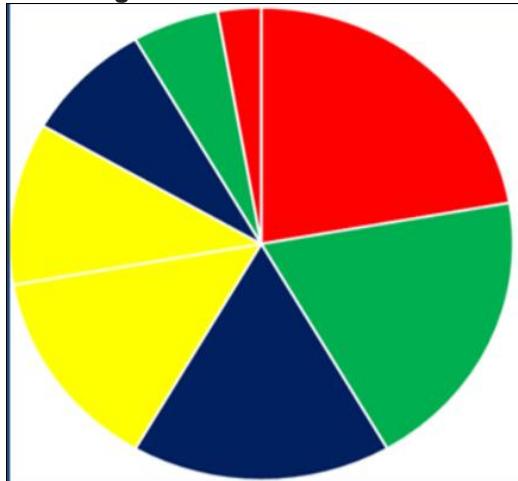
Questão 2:

Considerando a roleta uma circunferência de diâmetro AB 20 cm. Se na cor verde, temos uma abertura de 600. Qual a chance de a seta parar na cor rosa? Escrevam o raciocínio utilizado. Professor J acredita que o aluno que não tem noção de probabilidade, poderá julgar que a chance é de 2 por uma, julgamentos dessa natureza. Professor H, então, afirma que o raciocínio deixado por este aluno é o queremos.

Terminado essa discussão, fomos para a elaboração de outra questão: há possibilidade de construir uma roleta de 8 partes com cores diferentes, de tal forma que a seta possua a mesma chance de parar em qualquer uma das partes? Justifique sua resposta.

A ideia de utilizar roletas e toca disco mexeu com o grupo e possibilidades de elaborarmos outras questões foram surgindo. Com a roleta da figura abaixo, elaboramos a questão com os seguintes enunciados.

Figura 25 - Roleta de 8 cores



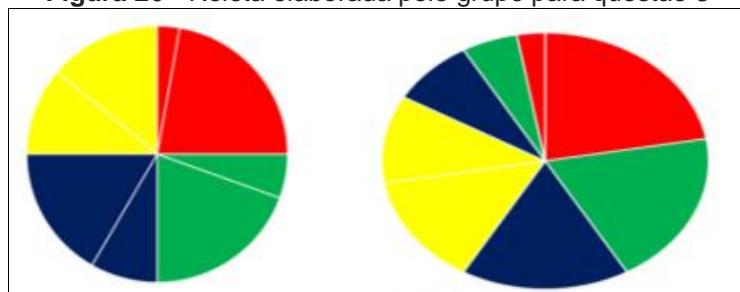
Fonte: Acervo da pesquisa

- Qual a probabilidade de a seta parar na cor azul?
- Sabendo que cada cor corresponde a 900. Qual a probabilidade da seta não parar na cor azul?

A questão 3 foi elaborada pelo grupo buscando refletir sobre a relação dos 900 da cor azul com os 3600 que é o total ou usando evento complementar.

Buscamos elaborar uma questão semelhante, tentando levar os alunos a perceberem que as cores não seriam adjacentes, porém se tratava de ângulos complementares, ou seja, a fato de não estarem ao lado não muda a chance de ocorrência.

Figura 26 - Roleta elaborada pelo grupo para questão 3



Fonte: Acervo da pesquisa

Qual a probabilidade de a seta não parar na cor verde em cada roleta?
Compare os resultados.

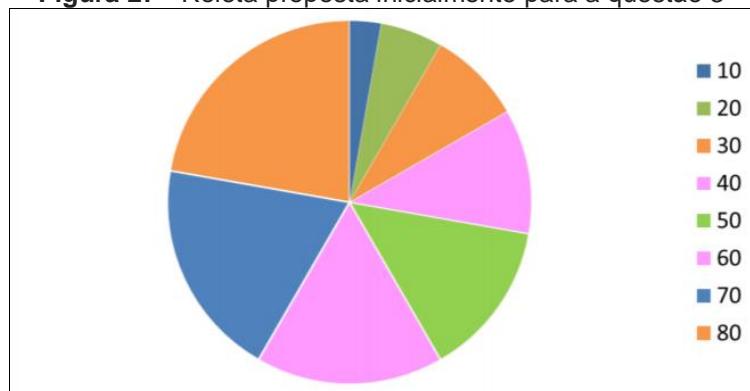
Relato do professor JÁ,

Na da loteria, a chance de sair números de 1 a 6 é a mesma de saírem espalhados.

Na expectativa de que os alunos formulassem suas próprias questões, pensamos em construir a roleta e propor como atividade para os alunos, construírem as perguntas. Ou seja, forneceríamos uma roleta com o formato da figura 32 e os alunos elaborariam a atividade. Entretanto, o grupo de professores entendeu ser melhor não oferecermos a roleta para o aluno criar a atividade. O aluno deveria criar sua roleta e paralelamente elaborar as questões de sua atividade de acordo com a roleta criada por ele. O grupo avaliou que assim seria mais produtivo, uma vez que cada aluno precisaria pensar nas perguntas e nas repostas, o que, por si só, já demandaria um estudo sobre o assunto.

A figura 27 com os ângulos e cores representa a ideia inicial.

Figura 27 - Roleta proposta inicialmente para a questão 3



Fonte: Acervo da pesquisa

Questão. De acordo com o trabalho realizado em nossas ultimas aulas, elabore atividades considerando a roleta abaixo

Sendo assim, concordamos que eles elaborariam a atividade, discutir com o grupo e depois expor para a classe, pois assim as dúvidas ou interpretações incorretas teriam a oportunidade de serem corrigidas pelo professor.

No período de elaboração das atividades, o grupo entendia que cada passo dado poderia influenciar de forma positiva ou negativa no momento de aplicação das atividades em sala com os alunos. Junqueira (2014) afirma em sua pesquisa que a apresentação de um conteúdo, que parte de experiências vivenciadas e de

conhecimentos prévios e dá seguimento, passo a passo, numa ordenação bem elaborada, leva o aluno à construção do conceito pretendido.

Sendo assim, nossa expectativa foi de realizarmos as atividades em oito aulas, divididas em quatro momentos de duas aulas cada. Sendo o penúltimo momento, reservado para discussão dos resultados, momento este, que os alunos relatam aos colegas de classe o trabalho realizado. Com relação ao último momento, este seria reservado para o professor, avaliar frente à turma o trabalho realizado, bem como, definir Probabilidade por meio das atividades realizadas.

4.3.3 Terceiro Evento Crítico da Formação- Probabilidade e Tecnologia.

O terceiro evento crítico está ligado construção de conhecimentos dos participantes sobre Probabilidade e tecnologia e ocorreu ao longo dos sexto e sétimo encontros.

Na análise desses encontros, buscamos discutir e refletir sobre elaboração de atividades investigativas por meio de materiais concretos, como, CDs, bola de gude, roletas e toca discos antigos, identificamos impacto na postura dos professores participantes em relação a:

- Conhecer e a adotar a abordagem investigativa;
- Ampliação do conhecimento específico de Probabilidade;
- Ampliação do conhecimento pedagógico geral;
- Ampliação do conhecimento instrucional.

Buscando apresentar o conteúdo de probabilidade com uma abordagem investigativa, nos preocupamos também que fosse de maneira prazerosa. Desta forma, buscamos elaborar uma atividade que envolvesse dados, moeda fictícia, planilha Excel, e/ou roleta 3D, bem como outras disponíveis no site do MEC.

O objetivo dessas atividades foi levar os alunos a uma melhor compreensão de aleatoriedade, espaço amostra, definição de Probabilidade clássica, Probabilidade frequencista com as tabelas de frequência e estudar a Lei dos Grandes Números, bem como trabalhar o contexto histórico com as cédulas fictícias.

Inicialmente expomos em dois conjuntos, conforme **Figura 28**, (A e B) o quadro de possibilidades dos resultados possíveis para a soma das faces no lançamento de dois dados.

Figura 28 - Resultados possíveis para a soma das faces de dois dados

A	B					
(1,1)	(1,3)	(1,4)	(1,2)	(1,5)	(1,6)	
(2,2)	(2,3)	(2,6)	(2,1)	(2,4)	(2,5)	
(3,1)	(3,2)	(3,5)	(3,3)	(3,4)	(3,6)	
(4,1)	(4,4)	(4,6)	(4,2)	(4,3)	(4,5)	
(5,3)	(5,5)	(5,6)	(5,1)	(5,2)	(5,4)	
(6,2)	(6,4)	(6,5)	(6,1)	(6,3)		

Fonte: Acervo da pesquisa

Explicamos que o conjunto B possuía apenas 5 possibilidades de somas, pois o 7 que é o elemento que teoricamente tem maior chance de soma, consta no conjunto B. Porém, mesmo com um elemento a menos o conjunto B possui as mesmas 18 possibilidades do conjunto A.

Realizamos a atividade dividindo os professores participantes em dois grupos, cada equipe ficou com um conjunto de possibilidades e titulamos como o “jogo de dois dados”. Cada rodada o grupo recolhia a cédula fictícia conforme um dos modelos de cédulas exposto na **Figura 29**, caso o resultado da soma das faces dos dados pertencesse ao seu conjunto (**Figura 28**). O professor E ficou responsável para lançar os resultados das frequências de cada soma em planilha eletrônica do Excel, os professores participantes observavam o resultado das somas e a construção paralela do gráfico de frequência absoluta simples.

Na primeira rodada de trinta lançamentos, não tivemos soma dois e nem onze. Despertando nos professores que ficou com o conjunto A que não seria uma boa escolher esses dois números para seus conjuntos.

Figura 29 - Cédulas fictícias



Fonte: Acervo da pesquisa

Nas discussões sobre aplicarmos o jogo com nossos alunos, os professores participantes destacaram que os alunos poderiam inicialmente se interessar pelos números 11 e 12, pois uma única vez que saísse soma 12, seria melhor que duas somas 4 por exemplo, pois no momento da contagem ao final do jogo seria mais vantajoso.

Ressaltamos que a ideia foi levar os alunos a perceberem o espaço amostral de cada conjunto e por meio da atividade visualizasse a aleatoriedade das somas e consequentemente a probabilidade de cada uma delas, reforçamos que deveríamos construir o caminho para que os alunos pudessem chegar a essas conclusões.

Em relação à preocupação com a definição de Probabilidade, os PCN consideram que as atividades de natureza aleatória permitindo a identificação de resultados possíveis desses acontecimentos, bem como o acaso e a incerteza que se manifestam intuitivamente, devem ser exploradas de modo a propor situações em que os estudantes possam realizar experimentos e fazer observações dos eventos.

A preocupação com a construção e mecanismos para que pudéssemos levar nossos alunos à construção desses conceitos é discutido por Batanero, Godino e Roa (2005), os autores afirmam que componentes como o acaso, a aleatoriedade relacionada com a Probabilidade, tem características próprias e requerem um conhecimento didático específico para sua abordagem em sala de aula. Destacam ainda que os conhecimentos sobre Probabilidade podem, por vezes, ser insuficientes para o exercício da docência, já que, além dos conhecimentos dos conteúdos, esses exigem também conhecimentos didáticos específicos.

O relato do professor **JÁ** chama atenção para refletirmos sobre as ideias dos jogos como possibilidade de auxiliar na construção dos conceitos.

Ao usarmos jogos como ferramenta didática, as ideias devem ficar bastantes claras, pois muitos professores dão aulas de probabilidade usando os conjuntos às definições e depois pedem questões que se referem a baralhos e dominós, porém muitos alunos não conhecem os termos utilizados em jogo de dominó e nem de baralho.

Essa preocupação do professor é destacada no PCN (2000), pois o parâmetro curricular defende que as atividades sejam baseadas nas experiências dos alunos e que tudo que for colocado para o aluno sem uma ligação com sua experiência pode ser tornar inútil.

Após a fala do professor **JÁ**, o professor **H** trouxe a seguinte observação:

A ideia é fazer o processo inverso, não passar primeiros as definições depois o conteúdo.

Com relação à preocupação do professor **H**, Ponte (2003) defende que ao propormos atividades investigativas, devemos convidar os alunos a formular questões, criar conjecturas, realizar provas e refutações e permitir ao aluno o desenvolvimento de capacidades de investigar padrões e fazer generalizações, de modo a produzir significados a estes alunos.

Trazemos aqui o relato do professor **JÁ**, após a fala do professor **H**.

Caso os alunos não consigam chegar ao conceito após a atividade, como seria a dinâmica do professor?

As preocupações dos professores evidenciam suas angustias no tocante ao trabalho com atividades investigativas. Percebemos que querem elaborar as

atividades centradas nos alunos e entendendo que os jogos podem constituir uma forma interessante de propor problemas, desde que estes, caso sejam apresentados de modo atrativo, podem favorecer a criatividade na elaboração de estratégias de suas resoluções e conceituação dos conteúdos.

Lopes (2008) defende que o ensino e a aprendizagem de Probabilidade devem ser baseados em investigações e em resolução de problemas. A autora chama a atenção para que os conhecimentos de Probabilidade possibilitem aos estudantes adquirir habilidades para compreender e lidar adequadamente com sua realidade.

Após as duas rodas de jogo, o professor T fez duas observações bastante pertinentes.

Relatos do Professor T:

Devemos apresentar um conjunto com 12 possibilidades de somas no lançamento de dois dados, ou seja, de 1 ao 12, separamos a sala em dois grupos, um dos grupos inicia a escolha dos seis números que irá compor seu conjunto, assim os alunos irão perceber que não adianta escolher o número 1, pois não tem como sair 1 nas possibilidades de soma.

Esses conjuntos que foram escolhidos têm 18 possibilidades de soma em cada conjunto, mas se cada soma sair uma única vez, o grupo que escolheu o conjunto A terá soma de 40 relas e o conjunto B terá soma 37, não descartar que cada soma saía somente uma vez.

Esse relato do professor T chamou a atenção dos participantes, oportunizando uma boa reflexão sobre aleatoriedade e probabilidade frequencista. A observação dada foi reconhecida e acatada pelo grupo.

A cada participação e contribuição do professor T nas elaborações das atividades propostas, foram evidenciando seu interesse pelas atividades de cunho investigativo, permitiram ao grupo refletir e ampliar seus conhecimentos específico em relação à Probabilidade, bem como o conhecimento pedagógico específico para o ensino de Probabilidade.

Ao finalizarmos o jogo de dois dados, apresentamos uma roleta dessas de cassino baixada no celular, para que analisássemos como poderíamos trabalhar Probabilidade com a roleta.

Professor JÁ pondera sobre a possibilidade de usarmos uma roleta:

Na disciplina de Computação Gráfica, talvez seja possível desenvolvermos com algum aluno uma roleta ou algum material que nos ajude com as aulas

de probabilidade através de aulas investigativas. Pois no computador o evento terá mais características aleatórias, pois as outras roletas, a força impressa pelo jogador poderá influenciar no resultado. A única coisa é que se a pessoa entende de algoritmo, irá perceber que o computador não é capaz de construir um evento 100% aleatório, mas as pessoas de fora acreditam que sim.

Identificamos no relato do professor JÁ, conhecimento como tema apresentando, como poderia ser desenvolvido nas diferentes séries e graus de ensino, bem como sua relação com outros temas da Matemática e de outras disciplinas e as estratégias para o ensino e como explorar diferentes materiais didáticos, ou seja, dentro da tipologia de Ball e colaboradores (2008), mostrou ter o conhecimento do conteúdo e do currículo.

Além de roleta, discutimos sobre o trabalho com atividades investigativas, fazendo adaptações com o jogo que se encontra no site: rived.mec.gov.br/atividades/matemática/probabilidades/atividade1/mat5_ativ1swf. ou neste: rived.mec.gov.br/atividades/matemática/probabilidades/atividade1/atividade1.htm.

Ambos trazem o contexto histórico de probabilidadee se mostram bem favoráveis para se trabalhar conceitos de aleatoriedade, frequência relativa e a própria definição de probabilidade. Destacamos que, no primeiro link, o aluno apostar em figuras planas e nas cores, podendo ele com o tempo perceber que se deve apostar nas cores com maior frequência ou figuras e também nas cores em uma mesma aposta. Possivelmente com o erro em algumas jogadas, ele poderá perceber porque está perdendo e entender melhor o jogo e se apropriar com facilidade da definição frequencista de Probabilidade. Com relação ao segundo link, além de trabalhar o conceito de probabilidade, ainda simula chances de ganhar na loteria.

Temos o relato do professor J:

Não sabia que existiam tantas opções para ensinar Probabilidades, sempre pensei em trabalhar com moedas, baralhos ou dominó, nada mais que isso. Gostaria de olhar mais um pouco esse último, porque acredito que posso levar meus alunos para o laboratório e deixar os alunos buscarem a melhor escolha das peças, porque assim eles vão poder perceber que a Probabilidade de ganhar é maior se ele escolher as peças ou as cores que tem mais chances de sair.

Esse relato deixa claro que o curso de formação estava ampliando os conhecimentos específico e pedagógico na concepção de Shulman (1986). Percebemos também que o professor se preocupou em levar sua aula para o laboratório de informática, além de estar buscando a melhor forma de abordagem do

conteúdo. Shulman (1986) destaca que esse tipo de conhecimento incorpora a visão da disciplina como conhecimento a ser ensinado, incluindo os modos de apresentá-lo e de abordá-lo, de forma que sejam compreensíveis para os alunos e ainda as concepções, crenças e conhecimentos dos estudantes sobre a disciplina.

Consideramos que a atividade proporcionou a produção de significados sobre atividades investigativas, bem com uma reflexão sobre aspectos inerentes ao trabalho em equipe, importância de uma formação continuada, e o ensino de probabilidade voltado para a participação dos alunos como agentes ativos na construção dos conceitos e definições. Percebemos pela participação do grupo e nas reflexões que suas práticas em classe seriam transformadas, uma vez que a formação oportunizou a inserção de as aulas investigativas para abordar os conceitos de probabilidade de forma lúdica.

4.3.4 Quarto evento crítico - Resolução de problemas

O quarto evento crítico está ligado construção de conhecimentos dos participantes sobre Resolução de problemas de Probabilidade e ocorreu ao longo do oitavo, nono e décimo encontros.

Nesses encontros, ocorreu a dinâmica de grupo por meio de resolução de questões de Probabilidade e de aplicações de Probabilidade aplicada na Genética e também questões que envolvessem:

- Uso de Fórmula do Teorema de Bayes;
- Uso de Fórmula do Teorema Probabilidade Condisional;
- Uso de Fórmula do Teorema Probabilidade Total.

Foi possível constatar que as discussões oportunizaram refletir sobre possíveis erros de estudantes e como deveríamos nos posicionar diante deles, a resolução de questões utilizando árvore de possibilidades e tabelas. Essas discussões evidenciaram momentos de ampliação do conhecimento pedagógico e do conhecimento do conteúdo e do estudante por partes dos participantes. A socialização das questões oportunizou avaliarmos o crescimento dos participantes no curso de formação bem como as contribuições desses professores no curso de formação.

Aproveitamos a oportunidade para discutir o erro como possibilidade de construção de conhecimentos e também de olharmos para o erro com a visão de alunos. Para Ball, Thames e Phelps (2008), antecipar um erro é o conhecimento assim construído e faz parte do que denominam conhecimento do conteúdo e dos alunos.

Separamos dez questões de Probabilidade que inicialmente foram discutidas em duplas e posteriormente resolvidas no quadro pela dupla.

Nas discussões da resolução da questão 1, percebemos uma ampliação dos conhecimentos pedagógicos dos professores, uma vez que resolveram a questão utilizando a tabela e árvores de possibilidades.

Uma empresa fabrica motores a jato em duas fábricas A e B. Um motor é escolhido ao acaso de um lote de produção. Nota-se que o motor apresenta defeitos. De observações anteriores, a empresa sabe que 2% e 3% são as taxas de motores fabricados com algum defeito em A e B, respectivamente. Sabendo-se que a fábrica A é responsável por 40% da produção assinala a opção que dá a probabilidade de que o motor escolhido tenha sido fabricado em A.

Bacen/Aneel (2013).

Com relação à segunda questão exposta no encontro, o professor H tentou resolver utilizando árvore de possibilidades, porém não interpretou a questão de forma correta, logo socializamos e resolvemos junto a questão. Ramos (2014) em sua pesquisa de doutorado sobre dificuldades e erros de alunos da educação profissional, classifica essa situação em estratégia inadequada para resolução da questão. Esse erro se enquadra nas duas categorias de erros dos autores Movshavitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Linguagem mal interpretada e Erro técnico, uma vez que o professor interpretou os dados incorretamente e também cometeu erro na extração de dados.

O São Paulo futebol Clube ganha com a probabilidade 0,7 se chove e com 0,8 se não chove. Em setembro a probabilidade de chuva é de 0,3. O São Paulo ganhou uma partida em setembro, qual a probabilidade de ter chovido nesse dia?

Trazemos aqui o relato do professor H:

Minha dificuldade foi na interpretação do problema, nesse momento eu represento o aluno. Mas construindo a tabela com suposições ficou mais fácil para mim e daqui para frente irei resolver assim.

Percebemos na fala do professor H o quanto estava sendo importante o curso de formação. Estávamos diante de um momento de constatação do desenvolvimento do conhecimento profissional do docente. Para Ball e colaboradores (2008), reconhecimento do erro frente à questão é uma ampliação do conhecimento comum do conteúdo. O conhecimento comum do conteúdo inclui também o conhecimento do conteúdo disciplinar, o saber aplicado à resolução de atividades e problemas, conhecimento para utilizar notações e termos corretamente, e identificar definições bem como respostas incorretas dos exercícios.

Com relação à possibilidade de ensino da Probabilidade por meio de questões envolvendo Genética, o professor JÁ socializou com a turma dez questões que abordavam a Probabilidade aplicada à Genética (Apêndice N). Na exposição sobre o conteúdo, percebemos que o referido professor tinha o conhecimento sobre currículo (SHULMAN, 1987) e conhecimento do conteúdo e de currículo (BALL, THAMES, PHELPS, 2008), que é considerada a vertente que combina o conhecimento das finalidades e dos conteúdos ao nível de ensino, desse modo, são os conteúdos que os alunos devem aprender e quais suas orientações na aprendizagem.

O assunto Probabilidade aplicado à Genética era novo para a maioria dos professores, no entanto, percebemos que quando o assunto era a Genética, o professor que conduziu o encontro tinha amplo domínio do assunto, bem como o conhecimento específico do conteúdo, o conhecimento pedagógico e o conhecimento do currículo. Notamos durante as discussões da resolução das questões que os professores ficaram bastante satisfeitos com o conhecimento adquirido durante a socialização do professor JÁ e consequentemente com a participação no curso de formação.

A partir da condução do encontro, percebemos na exposição dos conceitos de Probabilidade aplicados à Genética que o professor JÁ conhecia o currículo, como indica Shulman (1987) e tinha conhecimento do conteúdo e de currículo, conforme classificação de Ball, Thame e Phelps (2008).

Percebemos que nesse momento estava ocorrendo um momento de troca de experiências no qual os professores podiam ampliar o seu conhecimento profissional. Essa ampliação do conhecimento vai de encontro com apresentado por Ponte (1998), o qual afirma que a formação deve propiciar o desenvolvimento profissional, promovendo não somente teorias, mas também trocas de experiências e reflexões.

4.3.5 Quinto evento crítico - Sistematização de conhecimentos

O quinto e último evento crítico está ligado à sistematização de conhecimentos e avaliação do curso de formação continuada pelos participantes.

A análise desse encontro, no qual discutimos e refletimos sobre: a probabilidade de uma pessoa ganhar na loteria, o Gráfico *Box Plot* e suas aplicações e o Problema de Monty Hall e, finalizando, refletimos sobre os encontros e o curso de formação continuada e o avaliamos. Os professores registraram em um diário seus sentimentos com relação ao curso e também gravaram seu depoimento sobre o curso de formação continuada, identificamos impacto na postura dos professores participantes em relação a:

- Conhecer e a adotar a abordagem investigativa;
- Ampliar o conhecimento específico de Probabilidade;
- Ampliar o conhecimento pedagógico geral;
- Ampliar o conhecimento instrucional.

Quando elaboramos o primeiro Design, tínhamos a intenção de discutir uma atividade investigativa com cartelas de loteria e outra com o problema de Monty Hall. Durante o curso não houve tempo de elaborar em conjunto uma atividade sobre a chance de ganharmos na loteria. Desta forma, durante a semana que antecedia o último encontro, um professor ficou encarregado de levar essa discussão para o grupo.

Sendo assim, no último encontro o professor T, levou algumas cartelas e pediu para que os colegas do curso fizessem suas apostas, logo em seguida mostrou as chances que cada um tinha de ganhar na lotérica. Foram discutidas também, questões sobre como se podem fazer várias jogadas na mesma cartela e como ficaria o preço.

Posteriormente a exposição do professor, falamos sobre o problema de Monty Hall, um pouco da sua história e suas discussões até os dias de hoje. Falamos também das portas de caixas que confeccionamos e aplicamos a dinâmica do problema de Monty Hall em duas turmas do Instituto Federal. As caixas foram enumeradas de 1 a 3, dentro das caixas tinham a figura de um bode ou de um carro, seguindo o modelo de Monty Hall.

Após as discussões sobre o problema de Monty Hall, o professor E falou sobre a feira de ciência na escola em que trabalha, apresentou a roletas que confeccionada pelos alunos, bem como à campeã na feira.

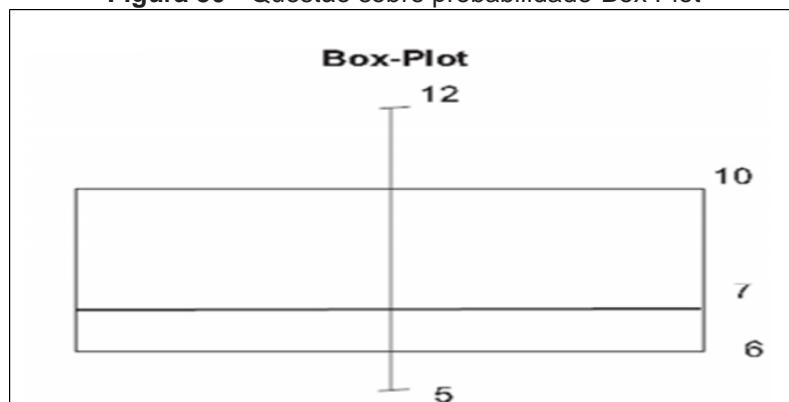
Na sequência discutimos a questão da figura 71 que aborda o gráfico Box Plot.

Questão:

O gráfico a seguir é o Box Plot da distribuição de renda, em mil reais, da população de um determinado município. Qual é a probabilidade de um habitante desse município ter renda superior a 6 mil reais?

- (A) 0,15 (B) 0,20 (C) 0,25 (D) 0,50 (E) 0,75

Figura 30 - Questão sobre probabilidade-Box Plot



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste último momento da formação, recolhemos por escrito ou digital os relatos dos professores e um registro em vídeo dos professores sobre a formação desenvolvida com eles. Pudemos perceber que os professores validaram positivamente o curso de formação, elencando principalmente a oportunidade das trocas de experiências.

"A abordagem do tema gera grande expectativa de qualquer participante pois são temas pouco explicados e de pouco domínio em sala de aula. Com o curso todos 'venham' crescendo e adquirindo trocas de informações para que possam semear diante de suas aulas ao longo do seu trabalho. Pouco do que frequentei do curso posso destacar os pontos pertinentes e positivos, vendo que é necessário sempre estarmos atualizando, mesmo que por pouco tempo não foi possível saborear toda a essência que o curso propôs."

"Essa formação vem em um momento muito importante, pois foi quando retornei ministrar aulas no Ensino Médio. A minha dificuldade no tema foi somente com o ensino de maneira que não seja a tradicional, onde somente estava explicando tradicionalmente, ou seja, criatividade. Nessa formação, devido ministrar aulas somente no Ensino Superior, vem somente a retomar a crescer minha didática, portanto para mim foi apenas aspectos positivos, nada de negativo."

"Posso considerar que tive um forte crescimento dentro do curso; ora, Probabilidade não era um dos temas mais forte de minha formação e o curso ajudou bastante nos conhecimentos que eu havia explorado anteriormente.

Posso dizer que tive dificuldades em relação à Probabilidade frequentista e em alguns teoremas como o de Bayes.

Aspectos negativos: Desprendimento das notações em prol do didatismo.

"Ao participar do curso de formação continuada sobre Probabilidade percebemos a importância que o curso trouxe para todos os participantes, primeiramente foi a troca de experiências através das discussões e abordagens dos tópicos, o relacionamento entre os participantes também foi muito relevante, as dificuldades encontradas foram sanadas através das discussões e apresentações com resoluções de questões, a sugestão quais temas deveriam ser trabalhados no curso também foi muito importante e também como apresentações de metodologias diferenciadas para a resolução das questões apresentadas, em relação ao ponto negativo não tenho de que reclamar, o local do encontro também foi bastante proveitoso, apropriado, e além do mais a atenção dada aos participantes foi bem relevante. Agradeço ao professor Albano pelo convite de poder participar deste curso de aperfeiçoamento e a troca de experiência com os demais colegas."

"Sou professor de Matemática há mais de vinte anos. depois de formado, ainda não tinha participado de um grupo de estudos. Nossas formações continuadas da rede estadual, vem sempre prontas, não nos expressamos como gostaríamos. No curso, fui participante ativo, dei minha opinião, ouvi os colegas, nessa troca, aprendemos bastante.

Confesso que nunca tinha ouvido falar em atividades investigativas e sempre fui meio fechado para trabalhar com material concreto. Mas durante o curso, percebi que podemos realizar aulas práticas em Matemática, aulas divertidas e ao mesmo tempo, fazer com que o aluno aprenda brincando.

Saio do curso levando bons ensinamentos, não irei trabalhar somente com pincel, quadro branco, livro ou apostila, quero usar material concreto, alguns que confeccionamos durante o curso. A ideia de atividade investigativa exploratória é muito boa, quero ler ainda mais sobre o assunto, sei realizar as atividades que discutimos no curso, mas quero aprofundar um pouco no assunto. Sempre usei muita fórmula de Probabilidade e no curso vi que não é tão preciso assim, as tabelas apresentadas pelo Albano, facilitam bastante a interpretação do aluno."

"Crescimento:

Foram muitos, desde definições novas de Probabilidade, como Probabilidade geométrica subjetiva, axiomática, além do estudo de teorema de Bayes e probabilidade total. Aprendi bastante a interpretar melhor problemas de probabilidade, assim ficou mais fácil verificar o espaço amostral. Posso afirmar também que o trabalho com material concreto, jogos, me deixou bastante fascinada. A ideia de atividade investigativa é muito boa, mesmo sendo nova para mim, não tive resistência e percebi que seria uma boa oportunidade de inovar minhas aulas. Posso afirmar com toda certeza que o crescimento foi enorme.

Dificuldades:

No início tive dificuldades, pense que não poderia acompanhar a turma, mas os colegas foram bastante cavalheiros e me senti à vontade. Muitos momentos de dificuldades com relação ao conteúdo, tive auxílio do professor Albano em momentos de atendimento individual consegui superar. Tópicos de Probabilidade Condicional sempre foram meu medo, mas no curso ficou bastante fácil pela abordagem utilizada pelos colegas.

Aspectos negativos:

O mais negativo foi porque eu faltéi em alguns encontros, mas com relação ao curso foi muito bom. Montamos atividades investigativas, jogos e resolvemos muitos exercícios. Não é uma crítica, mas talvez pudéssemos ter resolvido, mais exercícios ainda.

"Logo que fui convidado aceitei direto, sabia que seria uma boa oportunidade de estudar Probabilidade, consultei quem eram os participantes e vi era tudo gente boa. Crescer durante o curso foi inevitável, conhecemos uma nova probabilidade, saímos dos exercícios dos livros, discutimos e montamos nossas atividades. Em nossas atividades, os alunos irão discutir em grupos e depois poderão chegar ao conceito e definição de Probabilidade. Não chegaremos com a formula pronta, serão dinâmicas para construir o conceito. Como o professor Albano explicou no grupo, eles irão investigar primeiramente, irão errar possivelmente e aos poucos irão construindo a definição sobre nossa orientação.

Agora com relação as dificuldades, elas poderiam surgir a qualquer momento, como as vezes aconteceu comigo, mas me senti bastante à vontade no grupo para corrigi-las. Trabalhar sem o uso das formulas foi um dos pontos mais relevantes para mim, construir Bayes, as roletas, os toca discos, a roleta com imã. O jogo de dados, usando a planilha Excel para construir os gráficos, tudo foi muito bom. Levo desse curso um grande aprendizado para minha vida profissional, porque aprendi novas didáticas para ensinar probabilidade, as tabelas, as suposições usando uma frequência alta de eventos, tudo foi algo novo que a partir de agora irei utilizar em minhas aulas. A parte de Genética foi muito boa, porque posso preparar minhas aulas em sintonia com outra disciplina, inclusive vou estudar um pouco mais essa parte, por que ainda não fiquei bom nos Aa, mas vou estudar.

Interpretar os problemas de probabilidade é uma dificuldade minhas, acredito que de muitos licenciados nesse Brasil. Mas de negativo não vi nada no curso. Já me inscrevo para participar do próximo, sei que semana que vem já tem encontro para estudar para o PROFMAT, quero participar também."

"Participar do grupo de estudos foi muito válido, a troca de experiências, os temas abordados foram muito interessantes, inclusive alguns temas não tive a oportunidade de trabalhar em sala de aula, por exemplo o Teorema de Bayes. Geralmente nós professores limitamos a trabalhar apenas os temas básicos da probabilidade até porque os livros adotados trazem os temas básicos. De modo geral foi muito proveitoso, pois troca de experiência foi a grande chave para o desenvolvimento dos estudos".

"Ao participar do curso de formação continuada sobre probabilidade percebemos a importância que o curso trouxe para todos os participantes, primeiramente foi a troca de experiências através das discussões e abordagem dos tópicos, o relacionamento entre os participantes também foi relevante, as dificuldades encontradas foram sanadas através das discussões e apresentações com resoluções das questões apresentadas, as sugestões apresentada pelo professor Albano, sobre quais temas poderiam ser abordados no início do curso foi muito positiva, pois os participantes escolheram quais temas gostariam que fosse abordados no curso, as metodologias diferenciadas trabalhadas foi muito importante para o aproveitamento do curso, com relação a pontos negativos não tenho de que reclamar."

Os professores participantes expuseram seus julgamentos sobre a ampliação de seus conhecimentos referentes à probabilidade e ao ensino da Probabilidade após a participação no curso de formação continuada. Sendo assim, interpretamos que consideraram positivo o curso. Com base na análise dessas reflexões dos professores, percebemos que consideraram o processo formativo válido, especialmente pelas possibilidades de práticas docentes discutidas no curso, no caso as aulas e as atividades investigativas. Eles julgaram essas práticas como possíveis de serem implementadas na Educação Básica e destacaram como relevantes o estudo específico e do conteúdo de Probabilidade (particularmente diferentes significados de Probabilidade), a construção de atividades de Probabilidade com materiais concretos que não fossem baralhos e dados.

CAPÍTULO V

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, apresentamos os resultados, resgatamos os objetivos da pesquisa e apresentamos considerações finais.

Retomando, o objetivo desta investigação foi identificar e analisar as contribuições de um curso de formação continuada voltado para o ensino da Probabilidade por meio de aulas investigativas para a ampliação do conhecimento profissional de professores do Ensino Médio.

Este estudo integra um projeto maior de formação e pesquisa do Programa Observatório da Educação, intitulado “Educação Continuada do Professor de Matemática do Ensino Médio: Núcleo de Investigações sobre a Reconstrução da Prática Pedagógica”, proposto pela Universidade Bandeirante de São Paulo, que tem por objetivo desenvolver e analisar o processo de construção de um Núcleo de Estudos sobre Formação e Práticas do Professor de Matemática, com vistas à reconstrução da prática pedagógica no Núcleo.

Para atender o objetivo dividimos a pesquisa em três fases:

1. Pesquisa e análise dos documentos curriculares nacionais para identificar as normas curriculares e abordagem da probabilidade na educação básica. A revisão de literatura auxiliou a dar o tratamento correto no desenvolvimento do processo formativo para os professores participantes, bem como também para fundamentar a análise dos dados coletados na pesquisa.
2. Composição do primeiro *Design* do curso de formação continuada e da pesquisa de campo e elaboração dos instrumentos de coleta de dados.
3. Desenvolvimento da formação continuada e *redesign* do curso a cada encontro com os professores participantes da formação. Nesta fase, foram identificados: ampliação do Conhecimento do Conteúdo, na concepção de Ball *et.al* (2008), ampliação do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, na concepção de Shulman (1986) e ampliação do Conhecimento Instrucional na concepção de Ponte e Oliveira (2002).

O curso, intitulado “Formação Continuada de Professores do Ensino Médio para Aulas Investigativas no Ensino de Probabilidades”, teve a duração de seis meses, sendo que os encontros foram presenciais com reuniões semanais

realizadas nas dependências do Núcleo de Estudos Sobre Formação e Práticas do Professor de Matemática que está situado na Instituto Federal do Tocantins, *campus Porto Nacional*, e os estudos realizados a distância, totalizando 60h. Participaram da formação continuada doze professores atuantes nas instituições de ensino público do Tocantins.

Para a coleta de dados, foram utilizados como instrumentos: dois questionários, o diário de campo do pesquisador, gravações em áudio e vídeo e ainda os materiais produzidos pelos professores durante a formação continuada.

A pesquisa foi norteada pelo seguinte questionamento: Que contribuições podem trazer, para o conhecimento profissional docente, a participação de professores em uma formação continuada sobre o ensino de Probabilidade baseado em aulas investigativas?

Os aspectos mais relevantes da formação continuada e suas contribuições serão apresentadas por meio de quatro tópicos: 1 - Desing e Redesing da Formação; 2 - Ampliação do Conhecimento do Conteúdo, na concepção de Ball *et.al* (2008) ; 3 - Ampliação do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, na concepção de Shulman (1986) ; e 4 - Ampliação do Conhecimento Instrucional na concepção de Ponte e Oliveira (2002).

1 Design e Redesing da Formação

Considera-se que o uso da metodologia *Desing Based Research* teve importância fundamental para a realização da formação continuada por permitir o redesing diante dos relatos e sugestões dos professores para que pudesse oportunizar a ampliação do conhecimento profissional dos educadores.

Buscamos em nosso primeiro desenho da formação, esclarecer que o curso seria um espaço de reflexão, auxiliando na produção de materiais didáticos como suporte para melhorar as práticas pedagógicas e nossas atitudes como docentes, sempre visando contribuir com novas possibilidades de se ensinar Probabilidade.

O primeiro desenho da formação continuada, planejamos inicialmente levantar o perfil e as expectativas dos professores participantes com relação ao curso, buscamos identificar conhecimentos do grupo sobre Probabilidade, apresentar a aula investigativa, como uma metodologia de ensino e selecionarmos atividades de cunho investigativo para discussão no curso que pudessem ser adaptadas pelos professores participantes em suas aulas. O design inicial, não se

manteve, uma vez que a cada encontro realizado, a partir das discussões em grupo, serviram para o repensarmos nas mudanças sugeridas pelos professores em relação ao andamento do curso. Ou seja, a partir desse *feedback* fazíamos o *redesign* de modo a adequar o próximo encontro às necessidades do grupo.

O primeiro redesign surgiu por meio dos tópicos sugeridos pelos professores que manifestaram o desejo de dominar o uso de jogos e vídeos junto aos conteúdos de Probabilidade a fim de promover um dinamismo na sala de aula. Além disso, escolheram a Probabilidade Geométrica e o Teorema de Bayes para serem discutidos durante a formação. Mesmo sendo conteúdos trabalhados na graduação, percebeu-se que os professores apresentavam dificuldades em lecioná-los de forma fácil e comprehensível aos alunos. Esse fato pode fortalecer a necessidade que os educadores tinham da ampliação dos conhecimentos do Conteúdo, Pedagógico do Conteúdo e Instrucional.

Percebemos a cada encontro que as necessidades de mudanças no design inicial eram consequência das reflexões em grupo por meio das exposições das opiniões a respeito de suas aplicabilidades em sala de aula, bem como possíveis dificuldades por parte do professor e também do aluno. Assim, fomos observando ampliação do conhecimento profissional docente dos professores participantes no curso de formação continuada.

2 Ampliação do Conhecimentos do Conteúdo

Esse conhecimento foi dividido em três subdomínios do “Conhecimento para o Ensino” por Ball *et.al* (2008), que são eles: *Conhecimento Comum do Conteúdo*, *Conhecimento Especializado do Conteúdo* e *Conhecimento Horizontal do Conteúdo*. No entanto, em nossas análises, não temos evidências da ampliação do conhecimento Horizontal do conteúdo durante o curso de formação continuada. Sendo assim, ao nos referirmos em nossas análises o termo “ampliação do conhecimento do conteúdo” estaremos nos referindo ao conteúdo específico de Probabilidade por meio de aulas investigativas e o conhecimento matemáticos exclusivos do professor para levar adiante o trabalho de ensinar.

O conhecimento comum do conteúdo na concepção de Ball *et.al* (2008) está relacionado a noção do conteúdo ensinado pelos professores e que é de conhecimento de outros profissionais também, em situações que não somente a de ensinar, ou seja, resolução de problemas, definições e conceitos, independente da

atuação ou não na sala de aula. Entretanto, destacamos que, buscamos durante o curso de formação continuada, ampliar o conhecimento do conteúdo comum de Probabilidade por meio de aulas investigativas, sempre no sentido que este conhecimento seria importante para o trabalho de ensinar, ou seja, conhecimento próprio para o ensino. Buscamos no curso de formação continuada com professores de Matemática, refletir sobre as concepções, raciocínio matemáticos únicos, exclusivo do professor. Estábamos diante de uma oportunidade que nos permitia, buscar a ampliação dos conhecimentos e competências necessárias unicamente para o professor na condução do seu trabalho.

Destacamos que a ampliação do conhecimento do conteúdo pode ser constatada durante toda a formação e até mesmo antes da formação, isso é notável quando os educadores manifestaram o desejo de ver durante o desenvolvimento da formação continuada a explanação de conteúdos nos quais tinham dificuldade, como o Teorema de Bayes e a Probabilidade Geométrica e seu relacionamento e articulação dentro da sala de aula.

A abordagem da história e dos significado da Probabilidade, este último sendo desconhecido por quase todos os educadores, contribuiu para aprofundar o conhecimento do assunto e sua estrutura organizacional, esse fato nos remete ao que Shulman propõe para a ampliação do conhecimento do conteúdo de que o educador precisa entender os princípios organizadores, as estruturas e as regras afim de estabelecer sua aplicação quando necessário.

A solicitação de realização de atividades de Probabilidade por parte dos educadores é também um momento de ocorrência do ampliação do conhecimento do conteúdo específico, pois propuseram uma ruptura de suas dificuldades em prol de aprender de forma investigativa à solucionar questões de Probabilidade.

Outro momento que evidencia a ampliação do conhecimento do conteúdo, consta na resolução dos problemas propostos onde os professores descobriam novas formas de solucionar as questões conforme o conteúdo era apresentado, como por exemplo o uso de árvore de possibilidades e tabelas, isso se confirma no relato do educador que não via a probabilidade com ponto forte de sua graduação, mas que durante a formação conseguiu perceber a ampliação do próprio conhecimento.

Devemos destacar que as reflexões e discussões durante o curso de formação continuada, seja no estudo dos significados de Probabilidade, no uso do

computador e de softwares em contextos educacionais, na elaboração das atividades com material concreto, seja na resolução de problemas de Probabilidade. Evidenciamos a ampliação de preocupação dos professores participantes referentes a processos que os tornem a probabilidade melhor ensinável e mais compreensível aos alunos. Ou seja, ampliação do conteúdo específico de Probabilidade.

3 Ampliação do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Embora Shulman (1986) reconheça a existência de várias outras categorias, o autor destaca que o professor deve ter domínio do conteúdo específico em três níveis: conhecimento do conteúdo em si, conhecimento curricular do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo. A ampliação do conhecimento pedagógico do conteúdo a que nos referimos é na concepção de Shulman (1986). Destacamos que após análises das evidências da formação continuada empreendida por nós, ao citarmos Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, estaremos nos referindo aos Conhecimentos Específicos do Conteúdo, Conhecimento Pedagógico Geral e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, ou seja, conhecimentos que estejam ligados ao conteúdo, estudantes, e ao ensino, uma vez que não percebemos evidências de ampliação do conhecimento curricular do conteúdo.

Buscando contribuir na ampliação do conhecimento profissional docente dos professores, no tocante ao ensino de Probabilidade baseado em aulas investigativas, durante a formação produzimos materiais didáticos que pudessem auxiliar o ensino e a aprendizagem de forma dinâmica dentro da sala de aula. Buscamos por meio desses materiais, discutir conceitos de aleatoriedade e Probabilidade usando a roleta confeccionada com discos e capa, cola quente bola de gude, roleta improvisada com toca discos antigos, (rodavam por conta de adaptações com pilhas), além do uso da planilha eletrônica no software Excel, roleta 3D (cassinos), software do site RIVED MEC, chance de ganhar na loteria. Buscamos explorar a parte histórica da Probabilidade por meio do jogo com dois dados, cédula fictícia como material didático para a atividade, foram aproveitadas caixa de sapatos para discutirmos Probabilidade por meio do problema de Monty Hall.

As atividades foram elaboradas em discussão com os professores durante o curso de formação continuada com o pensamento de estimular os professores ao improviso, julgamento e despertar suas intuições. Uma vez que era necessário durante a elaboração dessas atividades, se pensar no conteúdo estudado e suas formas de abordagem, a fim de torná-lo compreensível para os estudantes.

Entendemos que as discussões levaram ampliação do conhecimento pedagógico dos professores participantes do curso de formação continuada. Ao assistirmos os vídeos gravados durante os encontros do curso, podemos perceber que as atividades elaboradas apresentavam a intuição e a percepção dos professores que determinada representação do conteúdo poderia ser mais eficiente ou menos eficiente para os estudantes, pensando sempre em formas mais apropriadas de representações do conteúdo para cada aluno ou grupo de em cada contexto.

Percebemos que as atividades acompanhadas de material concreto produzidos durante o curso, despertou o interesse dos professores em levarem esse conhecimento didático para suas aulas e também para a escola onde trabalhavam sempre pensando em utilizar esse material como orientação a sua prática em sala de aula, de forma contextualizada, buscando estruturar e representar melhor o conteúdo de Probabilidade, mostrando melhor com as estratégias de ensino específicas, uma vez que elas poderiam ser usadas para atender às necessidades de aprendizagem dos alunos em diferentes circunstâncias da aula.

O espaço de reflexão oportunizado na formação continuada apresentaram evidências quanto as preocupações dos professores com a didática e com os estudantes. As ideias anteriores ao curso sobre a abordagem do conteúdo de Probabilidade, após as discussões do grupo e exposições dos colegas, logo eram moldadas, lapidadas e percebíamos as reflexões sobre as práticas de cada um sobre os momentos de pré, durante e pós-aulas, ou seja, em sua própria didática.

Destacamos que as preocupações com relação a didática norteavam as discussões, com relação a postura profissional frente o Ensino de Probabilidade por meio de aulas investigativas. As atividades práticas do curso de formação continuada, levaram os professores a refletirem em suas situações de prática escolar, contexto social em que ele e seus alunos estavam inseridos e quais as intervenções que poderiam fazer com seus alunos.

A formação permitiu aos professores refletirem e discutirem sobre os significados de probabilidade, sobre as conexões da Probabilidade com outras disciplinas, o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem, a organização dos conteúdos, o conhecimento dos materiais e das formas de avaliação a utilizar, bem como nas finalidades e objetivos do ensino de Probabilidade por meio de aulas investigativas retratando a ampliação do conhecimento pedagógico do conteúdo de Probabilidade.

4 Ampliação do conhecimento instrucional

O curso de formação continuada proporcionou um novo olhar diante dos processos de ensino e de aprendizagem de Probabilidade, no tocante a preparação de uma ou mais aulas, e também de uma sequência de atividades a longo prazo.

Durante o processo de elaboração de atividades com uso de roletas, dados, planilha eletrônica Excel e site do River Mec, por meio da parte histórica da Probabilidade, chance de ganhar na loteria ou na resolução de problemas, pudemos evidenciar as discussões sobre à condução das aulas de Probabilidade, preocupação com a organização e comunicação dos estudantes, processo de avaliação das aprendizagens dos seus alunos, uma vez que a maioria das atividades elaboradas tinham em seu desenvolvimento o trabalho em dupla ou mais estudantes por equipe, bem como possibilidades de entraves durante este processo e então, como deveriam se comportar diante das situações adversas e ainda análise dos processos de ensino e aprendizagem do próprio professor.

Essas atividades e reflexões por parte dos professores referente ao trabalho em grupo nos permitiu perceber que os professores desenvolveram conhecimentos a respeito do processo instrucional na concepção de Ponte e Oliveira (2002), uma vez que os autores afirmam que as formas de organização do trabalho dos alunos e a concepção que têm das tarefas são elementos caracterizadores dessa vertente do conhecimento.

O curso de formação continuada, permitiu aos professores elaborarem atividades que pudessem levar os alunos a tomar contato de forma investigativa com conceitos de espaço amostral, aleatoriedade, definição de Probabilidade, distribuição de frequências e Lei dos Grandes Números, proporcionando condições de elaborarem sequências didáticas nessa perspectiva. Desse modo, essas oportunidades mostraram que o curso de formação continuada, auxiliou os professores planejarem suas aulas nessa expectativa, de desenvolver e ampliar seus conhecimentos a respeito do processo instrucional.

Sistematização e Reflexão sobre a formação continuada

Observamos durante o curso de formação continuada que os desconfortos acerca da Probabilidade eram consequências de sua própria licenciatura, pelo fato de não fornecer subsídios suficientes para o conhecimento do conteúdo. Algumas abordagens do conteúdo de Probabilidade, de forma linear, ou sempre com dados e

baralhos, comum em outros cursos de formação ou em alguns livros didáticos, foram discutidos, confirmados em relatos dos professores, sendo assim buscamos romper com esse pensamento determinístico e linear. Destacamos nos relatos dos professores participantes o fato de ministrarem Probabilidade sempre após o conteúdo de análise combinatória tendo dificuldade em pensar outras formas de trabalhar diferentes.

Pela experiência como professor do Ensino Médio desde 2002, percebemos que o ensino Probabilidade não explorava os diversos significados, bem como a Probabilidade experimental, como recomendam as orientações curriculares e a literatura atual. O que percebíamos na maioria das escolas era a abordagem do Significado Clássico. Essa suposição se comprovou na formação, uma vez que percebemos sobre os significados de probabilidade, somente a clássica era a usual, sendo para alguns a única conhecida, pois as concepções frequentista, axiomática, subjetiva e geométrica, se tornou evidente nos dados que boa parte dos cursistas não tinha conhecimento.

Entendemos assim que, ao longo da formação, as discussões contribuíram significativamente para a criação de um espaço de reflexão e planejamento das técnicas educacionais que podem levar a melhor qualidade da Educação tanto para professores quanto para alunos. Uma vez que esta investigação se desenvolveu no âmbito de um processo de educação continuada que adotou a ideia de compartilhamento de experiências docentes, visando ampliar o conhecimento profissional, buscando desenvolver interesses e potencializar as possibilidades dos professores participantes. Acreditamos ainda que faltam espaços para os professores trabalharem em conjunto, de forma cooperativa, rompendo a prática do isolamento docente na escola.

Na formação continuada empreendida neste trabalho, buscamos, por meio das atividades de investigações matemáticas na sala de aula, identificar os problemas e as dificuldades dos professores em suas práticas e, também, discutir os processos e as estratégias de ensino, de modo que essa formação pudesse favorecer-lhos a se desenvolver profissionalmente, tanto do ponto de vista individual quanto coletivo. Desta forma, foram compartilhadas durante os encontros do curso as experiências vividas em sala de aula. Planejamos aulas investigativas com o objetivo de auxiliar os professores a compreenderem melhor os conceitos relativos à Probabilidade, além de desenvolver atitudes de liderança e competência para gerenciamento de trabalho em grupos.

Além do apontado acima, por meio desta pesquisa, acreditamos que desenvolvemos uma melhor compreensão sobre as habilidades e conhecimentos relativos ao ensino e a aprendizagem de Probabilidade. Finalizando, entendemos que do ponto de vista pessoal, esta pesquisa trouxe amadurecimento tanto como pesquisador quanto como educador matemático.

A investigação matemática e sua aplicação no ensino de Probabilidade, abre espaço para pesquisas futuras como preparação de uma sequência didática, no qual o formador possa acompanhar os professores do curso aplicando as teorias da formação continuada em sala de aula. A outra seria um curso de formação continuada sobre Probabilidade por meio de Aulas Investigativas com educadores do Ensino Fundamental com ênfase na Educação Infantil.

REFERÊNCIAS

ALFERES, M. A. e MAINARDES, J. **Formação continuada de professores no Brasil.** Seminário de Pesquisa (PPF).2011.

ALMEIDA: A. L. de; FERREIRA, A. C. **Aprendendo análise combinatória através da resolução de problemas** : um estudo com classes de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio. In: IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, 4., 2009, Ouro Preto. Anais.., Ouro Preto: UFOP, 2009.

ANDALÓ, C. S. de A. **Fala, professora:** Repensando o aperfeiçoamento docente: Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.

AZCARÁTE, P. G. **Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria em torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad.** Granada: Editorial Comares, 1996.

AZEVEDO, P. D. **O conhecimento matemático na Educação Infantil:** o movimento de um grupo de professoras em processo de formação continuada. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

BALL, D. L., & BASS, H. (2003). **Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching.** In B. Davis & E. Simmt (Eds.), Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GDEDM.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, New York, v. 59, n. 5, p. 389 - 407, nov./dez. 2008.

BALL, D. L; COHEN, D. K. Reform by the book: What is--or might be--the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? **Educational Researcher**, v. 25, n. 9,1996.

BALL, LUBIENSKI, MEWBORN. **Research on Teaching Mathematics:** The Unsolved Problem of Teachers' Mathematical knowledge. In: Handbook of Research on Teaching. New York: Virginia Richardson, 2001.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 1979.

BATANERO, C. **Significados de la probabilidad en la educación secundaria.** Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa. Vol. 8. N°3. México. pp.247-263. 2005.

BATANERO, C.; Díaz, C. (2007). **Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje.** XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Granada. Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas.

BERTINE, L.F. **Compartilhando conhecimentos no ensino de matemática nas séries iniciais:** uma professora no contexto de tarefas investigativas. Dissertação, Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2009.

BOGDAN, R; BILKLEN, S: **Investigação qualitativa em educação:** Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Ed Porto Editora, 1994.

BONA, A.S.; SOUZA, M.T.C.C. **Aulas investigativas e a construção de conceitos de matemática:** um estudo a partir da Teoria de Piaget. Disponível em <<http://www.revistas.usp.br/psicousp/article/view/102400/100723>> Acesso em 02 de Maio de 2016.

BORBA, M. C. **Informática e educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas:** uma estratégia para as aulas de matemática. 5^a. ed. São Paulo,2004.

BRASIL, Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. INEP. Disponível em <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/05_AMARELO_GAB.pdf>. Acesso em 10 de Abril de 2016.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacional.** Brasília, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília: SEB/MEC, 2006.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular Proposta Preliminar.** Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2016. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf>>. Acesso em: 20 maio 2016.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Portal Nacional do Livro Didático.** Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld>>. Acesso em 20 de maio de 2016.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial curricular nacional para a educação infantil /** Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. — Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. **PCN Parâmetros Curriculares Nacionais**. Volume 3: Matemática, Ministério da Educação e do Desporto, Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília, 2002.

BROWN, A. L. **Design experiments**: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of The Learning Sciences*, 2 (2), 141–178, 1992.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's Understanding of Probability**: a literature review. 2012.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's Understanding of Probability**: a literature review. 2012.

CARNEIRO, G. S. **Atividades investigativas com o Geogebra: contribuições de uma proposta para o ensino de matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Formação de Professores) Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Jequié, 2013.

CAVALARI, M. F., MARTINS, C. R. P. **Uma introdução para o estudo histórico da Geometria Analítica Plana**. Coleção História da Matemática para professores. Sociedade Brasileira de História da Matemática. Natal: 2011.

CAZORLA, I. M. (2002). **A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos**. Tese de doutorado. Campinas: UNICAMP.

CHIMENTÃO, L. K., **O significado da formação continuada docente**. 4º Congresso Paranaense de Educação Física Escolar. Universidade estadual de Londrina, 7 a 10 de Julho de 2009.

CIRINO, M. M. **A intermediação da noção de probabilidade na construção de conceitos relacionados à cinética química no ensino médio**. 2007, 201 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) — Faculdade de Ciências de Bauru, Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP, 2007.

COBB, P.; CONFREY,J.; DISESSA, A.; LEHRER,R.; SCHAUBLE, L. **Design experiments in education research**. *Educational Researcher*, v.32, n.1, p. 9-13, 2003.

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. L. Relationships of Knowledge and Practice: teacher learning in communities. In: **Review of Research in Education**. USA, 24, 1999, p. 249-305.

COLLINS, A. **Towards a design science of education.** In E. Scanlon & T. O'Shea (Eds.), New directions in educational technology (pp. 15-22), 1992. Berlin: Springer.

CORRADI, D.K.S. **Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno:** uma experiência com alunos do 2º do Ensino Médio. Dissertação, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2013.

CORREIA, J. L. M.. **Investigar para ensinar matemática:** Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores. Tese (Doutor em Educação, especialidade de Didática da Matemática), Universidade de Lisboa, Lisboa, 2004.

COSTA, N.M. & Polini, M. (2011).**Design based research:** uma metodologia para pesquisa em formação de professores que ensinam matemática. XIII conferência interamericana de educação matemática. Recife, Brasil.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao conceito de Probabilidade por uma visão frequentista.** 1994. Dissertação (Mestrado em Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

CURY, E. **Formação de Professores polivalentes: uma análise de conhecimentos para ensinar matemática e crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos.** 2004.197 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) -Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

DORIGON, T. C.; ROMANOWSKI, J. P. **A reflexão em Dewey e Schön.** In: Revista Intersaber. Curitiba: ano 3, n. 5, 2008 (pp. 8-22).

ERNEST, P. **Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia.** In *Investigar para Aprender Matemática*, 2.ed. Lisboa, 1998.

FERREIRA, A. C. (2003). **Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de Matemática:** Uma experiência de trabalho colaborativo (Tese Doutorado em Educação: Educação Matemática, FE/Unicamp, Campinas, SP).

FERREIRA, A.A. **A produção de significados matemáticos em um contexto de aulas exploratórias – investigativas.** Tese, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2012.

FERREIRA, M. C. C., **Conhecimento Matemático Específico Para O Ensino Na Educação Básica:** A Álgebra na Escola e Na Formação do Professor. Tese, (Doutor em Educação), Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2014.

FIGUEIREDO, A. C. **Probabilidade condicional:** Um enfoque de seu ensino aprendizagem. São Paulo, 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

FIORENTINI, D. LORENZATO, S. A. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI. **A Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil.** In: Bolema. Rio Claro: UNESP, 2008.

GADELHA, A., **Uma pequena história da Probabilidade. Notas de aula. Teoria da Probabilidade I.** Curso de Pós- Graduação em Estatística.

GARFIELD, J.; AHLGREN, A. **Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics:** Implications for research. Journal for Research in Mathematics Education, v.19, p. 44- 63, 1988.

GATTI, B. **Formação continuada de professores: a questão psicossocial.** Cadernos de Pesquisa, nº. 119. São Paulo, 2003.

GIUSTI, N.M.R. **Formação Continuada de Professores dos Anos Iniciais:** uma experiência sobre o conteúdo de tratamento da informação. Dissertação de Mestrado. Canoas, ULBRA, 2012.

GODINO, J.D.; BATANERO, C.; CAÑIZARES, M.J. **Azar y probabilidad.** Madrid: Sínteses, 1987.

GONÇALVES, M.C. **Concepções de Professores e o Ensino de Probabilidades na escola Básica.** São Paulo, 2004. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

HARGREAVES, A. **Os professores em tempo de mudança:** O trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna. Lisboa: Mc Graw-Hill, 1998.

IMBERNÓN, F. **Formação continuada de professores.** Porto Alegre: Artmed, 2010.

IMBERNÓN, F. **Formação permanente do professorado – novas tendências.** São Paulo, Ed Cortez 2009.

JUNQUEIRA, A.L.N. **Probabilidade na Educação Básica:** um estudo sobre concepções de professores de matemática. Tese, Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, 2014.

KATAOKA, V. Y., RODRIGUES, A., OLIVEIRA, M.S. Utilização do Conceito de Probabilidade Geométrica como Recurso Didático no Ensino de Estatística. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007. Belo Horizonte. Anais eletrônicos IX ENEM. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/micursos.html>. Acesso em: 02 julho. 2015.

KITCHENHAM, B. (2004). **Procedures for performing systematic reviews.** Technical Report TR/SE-0401, Keele University and NICTA. KOEHLER, M. J.

KLEIN, FELIX. (2009). **Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior.** Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

KLEIN, FELIX. (2010). **Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint:** Aritmetics, Algebra, Analysis. USA: Breinigsville.

LAMONATO, M. PASSOS, C.L.B. **Discutindo resolução de problemas e exploração – investigação matemática:** reflexões para o ensino de matemática. *Revista Zetetiké*. V. 19, n. 36. Campinas, 2011.

LAMPERT, M. (2004). **Response to teaching practice/Teacher learning practice group.** In J. Spillane, P. Cobb, & A. Sfard (Org.), *Investigating the practice of school improvement: Theory, methodology and relevance*. Bellagio, Italy.

LEITE, J.C. RODRIGUES, M.A. **Ensino por investigação na visão de professores de ciências em um contexto de formação continuada.** *IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciências e Tecnologia*. Paraná, 2014.

LEMOS, M. P. F. **O desenvolvimento profissional de professores do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental em um processo de Formação para o ensino e aprendizagem das Medidas de Tendência Central.** Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2011.

LIBÂNEO, J.C. **Organização e Gestão da Escola:** Teoria e Prática, 5. ed. Goiânia, Alternativa, 2004.

LIMA, F.M.B. **O ensino de Probabilidade com o uso do problema do Jogo dos Discos.** Dissertação, Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2013.

LLINARES, S. (2002). **Participation and reification in learning to teach:** the role of knowledge and beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Orgs.), *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?* (pp. 195-209). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

LLINARES, S. (2013). **El desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.** *Educar em Revista* (50), p. 117-133.

LOPES, C. A. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil.** 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

LOPES, C.A.E. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental:** uma análise curricular. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

LOPES, C.E. **O ensino da Estatística e da Probabilidade na educação básica e a formação de professores.** Disponível em <<http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v28n74/v28n74a05.pdf>>. Acesso em 02 de Maio de 2016.

LOPES, J. M. REZENDE, J. C. **Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade.** Revista BOLEMA, v. 23, no 36, 2010, p.657-682.

MARTINS, J.C. **Vygotsky e a Educação.** Ed. Autêntica. Belo Horizonte, 2005.

MATTA, A. E. R.; SILVA, F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. **Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento:** metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. Revista da FAEEBA: Educação e Contemporaneidade, Salvador, v. 23, n. 42, p. 23-36, jul/dez. 2014.

MCKENNEY, S. REEVES, T.C. **Conducting educational design research.** Londres, 2012.

MESSICK, S. Validity. In R.L. (Ed.), **Educational Measurement** (35 ed.) New York: American Council on Education. 1992.

MISHRA, P. Teachers learning technology by design. **JournalofComputing in TeacherEducation**, 21 (3), 94–102. 2005.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. **Technological Pedagogical Content Knowledge:** A framework for teacher knowledge. TeachersCollege Record, 108 (6), 2006. 1017-1054.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. **TechnologicalPedagogicalContentKnowledge:** A framework for teacherknowledge. Teachers College Record, 108 (6), 2006. 1017-1054.

MOREIRA, P. C. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica.** 2004. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

MURACA, F. S. **Educação Continuada do Professor de matemática: um contexto de problematização desenvolvido por meio de atividades exploratório–investigativas envolvendo geometria espacial de posição.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN, São Paulo, 2011.

NEVES, T.G. **Possibilidades e Limites de uma prática reflexiva para a integração da tecnologia no ensino da matemática.** Dissertação, Universidade Federal do Grosso do Sul. Campo Grande, 2015.

NOVOA, A. **Formação de professores e profissão docente.** In: NOVOA, A. (coord.). Os professores e a sua formação. Lisboa: Dom Quixote, 1992, p. 13-33.

ORFÃO, R.B: **Professores de Matemática em um grupo de estudos:** uma investigação sobre o uso de tecnologia no ensino de funções trigonométricas. 2012, 169p. Dissertação de Mestrado, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

PEREIRA FILHO, Albano Dias. **Análise de erros produzidos por estudantes em um curso de Engenharia Civil na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.** 118 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2012.

PIETROPAOLO, R. C.; CAMPOS, T. M. M.; TEIXEIRA, P. SILVA, A. F. G. **Conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental.** Anais do XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

PINHEIRO, E. **O ensino de trigonometria na educação básica a partir da visualização e interpretação geométrica do ciclo trigonométrico.** Dissertação, Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2008.

POLONI, M.Y. Formação do professor do ensino fundamental – Ciclo I: **uma investigação com o uso de geometria dinâmica para a (re) construção de conceitos geométricos,** 2010, 242p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo- UNIBAN, São Paulo, 2010.

POLONI, M. Y.; LOBO DA COSTA, N. M., **Formação continuada do professor nos anos iniciais: revisitando figuras planas com o software de geometria dinâmica.** Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, no. 1, p.223-242, mai. 2012. Disponível em: <<http://www.reveduc.ufscar.br>>.

PONTE, J. P. (1995). **Novas tecnologias na aula de Matemática.** Educação e Matemática, 34, 2-7.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., CUNHA, H., SEGURADO, I. **Histórias de investigações matemáticas.** Lisboa: IIE, 1998.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J.P. & OLIVEIRA, H. **Remar contra a maré:** A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista da Educação*, 11 (2), 145-163, 2002.

PONTE, J.P. **Investigações matemáticas em Portugal.** Investigar em educação, 2, 93-169, 2003.

PONTE, J. P; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 1^a edição; Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. **Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento de Ideias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes.** Tradução: JUNIOR, A. O. In: **BOLEMA.** Rio Claro, SP: UNESP, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Ano 17 nº 21, p. 81-140, 2004.

RAMOS, M. L. P. D. **Dificuldades e erros de alunos do 1º ano da educação profissional tecnológica de nível médio em matemática:** reflexões e desafios. Revista Produção Discente Educação Matemática, São Paulo, v.3, n.1, p.67-81, 2014.

RANGEL, L. G. **Teoria de Sistemas – Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações em Um Estudo Colaborativo.** Tese (Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

REZENDE, F. M. C. **Desenvolvimento Profissional e Pensamento Probabilístico:** estudo do processo vivido por um grupo de professores de Matemática de Conselheiro Lafaiete (MG), Minas Gerais, 2013.

RIBEIRO, R.E.S. **Uma proposta de ensino de Probabilidade no ensino médio.** Dissertação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2012.

RODRIGUES, A.B. BORGES, A.T. **O ensino de ciências por investigação:** reconstrução histórica. XI Encontro de Pesquisa em Ensino de Física, Curitiba, 2008.

RODRIGUES. J.M.S. **A Probabilidade como componente curricular na formação matemática inicial de professores polivalentes.** Tese, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2011.

ROTHER, E. T. **Revisão Sistemática x Revisão Narrativa.** Revista Acta. São Paulo, 2007.

SANTOS, J. A. F. L., **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental.** Dissertação, Universidade de São Francisco. São Paulo, 2010.

SÁ, E.F. **Discursos de professores sobre ensino de ciências por investigação.** Tese, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2009.

SÃO PAULO, (Estado) Secretaria da Educação. Caderno do Professor: Matemática. Ensino Médio – Vol 1, 2, 3 e 4. Séries 1ª, 2ª, 3ª. São Paulo: SEE, 2008.

SCHÖN, D. A. **Formar professores como profissionais reflexivos.** In: NÓVOA A. (Ed.). Os professores e a sua formação (pp.77 a 91). Lisboa: D. Quixote, 1992.

SCHÖN, D. **Educando o Profissional reflexivo:** um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SCHÖN, D. A. (1983). **The reflective practitioner: how professionals think in action.** New York.

SEE/SP. Secretaria de Estado da Educação de São Paulo. Edição Especial da Proposta Curricular. **Revista do Professor.** São Paulo: IMESP. 2008.

SEFAZ. Escola de administração fazendária. Disponível em: <www.esaf.gov.br>. - 2008.

SERRAZINA, M. de L., Vale, I., Fonseca, H.& Pimentel, T. (2002). **O papel das investigações matemáticas e profissionais na formação inicial de professores.** SPCE (Org.).*Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.* (pp. 41-58). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

SERRAZINA. M.L. **O professor que ensina matemática e a sua formação:** uma experiência em Portugal. *Educação e Realizade.* V. 39, n. 4, p. 1051 – 1069. Porto Alegre, 2014.

SHULMAN, L. **Those Who Understand:** Knowledge Growth in Teaching, Educational Researcher, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, C. S. R. da; FRADE, I. C. A. da. **Formação de professores em serviço.** Presença Pedagógica, Belo Horizonte, v. 3, n. 13, 1997.

SILVA, R.H.G. PAULO, R.M. **Aulas Investigativas e a formação do professor de Matemática (CO).** XIII Conferência Inter Americana Educação Matemática. Recife, 2011.

SOUSA, O. **Investigações Estatísticas no 6º ano.** In GTI (Org), Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp. 75-97). Lisboa: APM.

TARDIF, M. **O trabalho docente:** elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2011.

TEIXEIRA, P. J. M. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de problemas de contagem no Ensino Fundamental.** 2012. 424 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UNIBAN - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

TOCANTINS, Secretaria da Educação e Cultura. **Proposta Curricular Ensino Médio.** Palmas, 2007.

TRINDADE, A.F.P. **Investigações matemáticas e resoluções de problemas – que fronteiras?** Dissertação, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2008.

VIALI, L. **Algumas considerações sobre a origem da Teoria das Probabilidades.** Revista Brasileira de História da Matemática. n. 16, v. 8, p. 143-153.

VIALI, L. **O ensino de Probabilidade com recurso da planilha.** In: V CIBEM (Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática), 2005, Porto. ACTAS, 2005.

VIALI, L.; CURY, H. N. Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 11, n. 2, p. 373-391, maio/ago. 2009.

VIEIRA, E.R. **Grupo de estudos de professores e a apropriação de tecnologia digital no ensino de geometria:** caminhos para o conhecimento profissional. Tese, Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, 2013.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

WOOLDRIDGE, J. M. **Introdução à Econometria – Uma Abordagem Moderna.** 4. ed. São Paulo: Cengage, 2011.

ZEICHNER, K. **A formação reflexiva de professores: idéias e práticas.** Lisboa: Educação, 1993.

ANEXOS

ANEXO 1 - CONSIDERAÇÃO DOS PROFESSORES SOBRE O CURSO

OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO
 Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
 Universidade Anhanguera de São Paulo

Grupo de Estudos sobre Probabilidade

Caro Professor

Os questionamentos abaixo têm o objetivo de nos informar sobre suas expectativas e impressões relacionadas ao curso. Para nos auxiliar a compor os instrumentos e atividades para este trabalho. Contamos com a sua colaboração, sendo o mais detalhado possível nas suas respostas, referentes aos seguintes tópicos:

Crescimento vindo no curso; Dificuldades nos temas abordados e os Aspectos negativos do curso e (ou) tema trabalhado.

A Aprendizagem do tema Géra Grande expectativa de Outros participante pois são temas poucos explorados e de pouco domínio em sala de aula.

Com o Custo todos vêm crescendo e adquirindo teoria de informações para que possam servir direto a sua profissão ou função no seu trabalho.

Focus do que frequentemente o curso pode destacar como temas os pontos pertinentes e positivos visto que é necessário sempre estarmos atualizados, mesmo que por motivos externos não fomos possivel sasquear toda a ~~essência~~ essência que o curso propõe.

OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Universidade Anhanguera de São Paulo

Grupo de Estudos sobre Probabilidade

Caro Professor

Os questionamentos abaixo têm o objetivo de nos informar sobre suas expectativas e impressões relacionadas ao curso. Para nos auxiliar a compor os instrumentos e atividades para este trabalho. Contamos com a sua colaboração, sendo o mais detalhado possível nas suas respostas, referentes aos seguintes tópicos:

Crescimento vindo no curso; Dificuldades nos temas abordados e os Aspectos negativos do curso ou tema trabalhado.

Esse fornecimento veio em um momento muito importante, pois foi quando eu retornei a ministrar aulas no ensino médio. As minhas dificuldades nos temas foi somente como ensinar de maneira que não seja a tradicional, onde somente estaria aplicando teoricamente, ou seja, criatividade. Neste fornecimento, devido ministrar aulas somente no ensino superior, veio somente a retomar, a crescer minha didática, portanto que vim foi apenas aspectos positivos, nada de negativo.

OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Universidade Anhanguera de São Paulo

Grupo de Estudos sobre Probabilidade

Caro Professor

Os questionamentos abaixo têm o objetivo de nos informar sobre suas expectativas e impressões relacionadas ao curso. Para nos auxiliar a compor os instrumentos e atividades para este trabalho. Contamos com a sua colaboração, sendo o mais detalhado possível nas suas respostas, referentes aos seguintes tópicos:

Crescimento vêm tendo no curso; Dificuldades nos temas abordados e os Aspectos negativos do curso do curso e (ou) tema trabalhado.

Possso considerar que tive um forte crescimento dentro do curso; ora, probabilidade não era um dos temas mais fortes de minha formação e o curso ajudou bastante nos conhecimentos que eu pouco havia explorado anteriormente.

Possso dizer que tive dificuldade em relação à probabilidade frequentista e em alguns teoremas como o de Bayes.

Aspectos negativos: Despre¹ndimento das notações em prol do didatismo.

OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Universidade Anhanguera de São Paulo

Grupo de Estudos sobre Probabilidade

Caro Professor

Os questionamentos abaixo têm o objetivo de nos informar sobre suas expectativas e impressões relacionadas ao curso. Para nos auxiliar a compor os instrumentos e atividades para este trabalho. Contamos com a sua colaboração, sendo o mais detalhado possível nas suas respostas, referentes aos seguintes tópicos:

Crescimento vindo no curso; Dificuldades nos temas abordados e os Aspectos negativos do curso ou tema trabalhado.

Ao participar do curso de formação continuação sobre probabilidade percebemos a importância que o curso trouxe para todos os participantes, primeiramente foi a troca de experiência através dos discursões e abordagem dos tópicos, o relacionamento entre os participantes também foi muito relevante, as dificuldades encontradas foram sanadas através das discursões e apresentações com resoluções de questões, a sugestão quais temas deveriam ser trabalhados no curso também foi muito importante e também como apresentações de metodologias diferenciadas para a resolução das questões apresentadas, em relação ao ponto negativo não tenho de quer reclamar, o local do encontro também foi bastante proveitoso, apropriado, e além do mais a atenção dados aos participante foi bem relevante. Agradeço ao professor Albano pelo convite de poder participar desde curso de aperfeiçoamento e a troca de experiências com os demais colegas.



Observatório da Educação Anhanguera

OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Universidade Anhanguera de São Paulo
Grupo de Estudos sobre Probabilidade

Professor Colaborador(a):

Considerando os apscetos relacionados à seguir relate sobre suas impressões sobre o curso: Crescimento que teve durante o curso, dificuldades e facilidades nos temas abordados, aspectos positivos e negativos do curso e (ou) tema trabalhado.

Sou professor de Matemática a mais de vinte anos, depois de formado, ainda não tinha participado de um grupo de estudos. Nossas formações continuadas da rede estadual, vem sempre prontas, não nos expressamos como gostaríamos. No curso, fui participante ativo, dei minha opinião, ouvi os colegas, nessa troca, aprendemos bastante.

Confesso que nunca tinha ouvido falar em atividades investigativas e sempre fui meio fechado para trabalhar com material concreto. Mas durante o curso, percebi que podemos realizar aulas praticas em matemática, aulas divertidas e ao mesmo tempo, fazer com que o aluno aprenda brincando.

Saio do curso levando bons ensinamentos, não irei trabalhar somente com pincel, quadro branco, livro ou apostila, quero usar material concreto, alguns que confeccionamos durante o curso. A ideia de atividade investigativa é muito boa, quero lê ainda mais sobre o assunto, sei realizar as atividades que discutimos no curso, mas quero aprofundar um pouco no assunto. Sempre usei muito fórmula de probabilidade e no curso vi que não é tão preciso assim, as tabelas apresentadas pelo Albano, facilitam bastante a interpretação do aluno.



OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Universidade Anhanguera de São Paulo

Grupo de Estudos sobre Probabilidade

Professor Colaborador(a):

Considerando os aspectos relacionados à seguir relate sobre suas impressões sobre o curso: Crescimento que teve durante o curso, dificuldades e facilidades nos temas abordados, aspectos positivos e negativos do curso e (ou) tema trabalhado.

Crescimento:

Foram muitos, desde definições novas de probabilidades, como probabilidade geométrica, subjetiva, axiomática, além do estudo de teorema de Bayes e probabilidade total. Aprendi bastante a interpretar melhor problemas de probabilidade condicional e também resolver exercícios utilizando tabelas e árvores de possibilidades, assim ficou mais fácil verificar o espaço amostral. Posso afirmar também que o trabalho com material concreto, jogos, me deixou bastante facilitada. A ideia de atividade investigativa é muito boa, mesmo sendo nova para mim, não tive resistência e percebi que seria uma boa oportunidade de inovar minhas aulas. Posso afirmar com toda certeza que o crescimento foi enorme.

Dificuldades:

No início tive dificuldades, pensei que poderia não acompanhar a turma, mas os colegas forma bastante cavalheiros e me senti à vontade. Muitos momentos de dificuldades com relação ao conteúdo, tive auxílio do professor Albano em momentos de atendimento individual e consegui superar. Tópicos de probabilidade condicional sempre foram meu medo, mas no curso ficou bastante fácil pela abordagem utilizada pelos colegas.

Aspectos Negativos:

O mais negativo, foi porque eu faltou alguns encontros, mas com relação ao curso foi muito bom. Montamos atividades investigativas, jogos e resolvemos muitos exercícios. Não é uma crítica, mas talvez pudesse ter resolvido, mais exercícios ainda.

OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Universidade Anhanguera de São Paulo
Grupo de Estudos sobre Probabilidade

Professor Colaborador(a):

Considerando os apontamentos relacionados à seguir relate sobre suas impressões sobre o curso: Crescimento que teve durante o curso, dificuldades e facilidades nos temas abordados, aspectos positivos e negativos do curso e (ou) tema trabalhado.

Logo que fui convidado aceitei direto, sabia que seria uma boa oportunidade de estudar probabilidade, consultei quem eram os participantes e vi era tudo gente boa. Crescer durante o curso foi inevitável, conhecemos uma nova probabilidade, salmos dos exercícios dos livros, discutimos e montamos nossas atividades. Em nossas atividades, os alunos irão discutir em grupos e depois poderão chegar ao conceito e definição de probabilidade, não chegaremos com a fórmula pronta, serão dinâmicas para construir o conceito. Como o professor Albano explicou no grupo, eles irão investigar primeiramente, irão errar possivelmente e aos poucos irão construindo a definição sobre nossa orientação.

Agora com relação as dificuldades, elas poderiam surgir a qualquer momento, como as vezes aconteceu comigo, mas me senti bastante a vontade no grupo para corrigi-las. Trabalhar sem o uso das fórmulas foi um dos pontos mais relevantes para mim, construir as atividades de investigação também. Estudar probabilidade frequentista, teorema de Bayes, as roletas, os toca discos, a roleta com imã, o jogo de dados, usando a planilha Excel para construir os gráficos, tudo foi muito bom. Levo desse curso um grande aprendizado para minha vida profissional, porque aprendi novas didáticas para ensinar probabilidade, as tabelas, as suposições usando uma frequência alta de eventos, tudo foi algo novo que a partir de agora irei utilizar em minhas aulas. A parte de Genética foi muito boa, porque posso preparar minhas aulas em sintonia com outra disciplina, inclusive vou estudar um pouco mais essa parte, por que ainda não fiquei bom nos Aa, mas vou estudar.

Interpretar os problemas de probabilidade é uma dificuldade minha, acredito que de muitos licenciados nesse Brasil. Mas de negativo não vi nada no curso.

Já me inscrevo para participar do próximo, sei que semana que vem já tem encontro para estudar para o PROFMAT, quero participar também.

PROJETO

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO
PARA UMA AULA INVESTIGATIVA NO ENSINO DE PROBABILIDADES

DOUTORANDO: PROF. ME. ALBANO DIAS PEREIRA FILHO
E-mail: albano.filho@iftto.edu.br

Professor colaborador :

Considerando os aspectos relacionados à seguir relate sobre suas impressões sobre o curso: Crescimento que teve durante o curso, dificuldades e facilidades nos temas abordados, aspectos positivos e negativos do curso e ou tema trabalhado.

Participar do grupo de estudos foi muito válido, a troca de experiências, os temas abordados foram muito interessante, inclusive alguns temas nós tivemos a oportunidade de trabalhar em sala de aula, por exemplo o Teorema de Bayes. Geralmente nós preferímos limitarmos a trabalhar apenas os temas básicos da probabilidade só porque os livros adotados trazem apenas os temas básicos.

De modo geral foi muito proveitoso, pois a troca de experiências foi a grande chave para o desenvolvimento dos estudos.

PROJETO
FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO
PARA UMA AULA INVESTIGATIVA NO ENSINO DE PROBABILIDADES

DOUTORANDO: PROF. ME. ALBANO DIAS PEREIRA FILHO
 E-mail: albano.filho@ifta.edu.br

Professor colaborador :

Considerando os aspectos relacionados à seguir relate sobre suas impressões sobre o curso: Crescimento que teve durante o curso, dificuldades e facilidades nos temas abordados, aspectos positivos e negativos do curso e ou tema trabalhado.

AO PARTICIPAR DO CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA SOBRE PROBABILIDADES PODEMOS CONSIDERAR QUE O CURSO FOI MUITO BOM PARA TODOS OS PARTICIPANTES, PRIMEIRAMENTE POR A MOCHE DE EXPERIÊNCIA ATRAVÉS DAS DISCUSSÕES E ABORDAGEM DOS TÓPICOS. O REINFORCAMENTO ENTRE OS PARTICIPANTES TAMBÉM FOI MUITO RELEVANTE, AS DIFICULDADES ENCONTRADAS FORAM SOLVIDAS ATRAVÉS DAS DISCUSSÕES E APRESENTAÇÕES COM RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES APRESENTADAS, AS SUGESTÕES APRESENTADAS PELO PROFESSOR ALBANA, SOBRE MAIS OS TEMAS PODERIAM SER AGRADECIDAS NO INÍCIO DO CURSO FOI MUITO POSITIVA, POIS OS PARTICIPANTES ESCOLHERAM DIFERENTES TÓPICOS PARA TRABALHAR. Foi muito importante para o APROVEITAMENTO DO CURSO, COM RELACIONAR A MATERIA NEGATIVA NA PESQUISA DE QUER RECLAMAR, UM OUTRO FATOR IMPORTANTE

APÊNDICES

APÊNDICE A



UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO PROGRAMA DE PÓS- GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Entendo que fui convidado (a) a participar como voluntário (a) dessa pesquisa e acredito ter sido suficientemente informado (a) segundo o que li e o que me foi explicado a respeito da mesma. Ficaram claros para mim quais os propósitos do estudo, as garantias de confidencialidade, o uso de imagens e de comunicações orais e escritas feitas por mim, exclusivamente para as pesquisas vinculadas a Projeto 19366 do Programa Observatório da Educação da UNIBAN. Entendo que minha participação é isenta de despesas ou reembolsos Eu, _____, concordo voluntariamente em participar deste estudo e poderei retirar o consentimento a qualquer momento, antes ou durante o mesmo, sem penalidades ou perda de qualquer benefício que eu possa ter adquirido com a minha participação nele.

Assinatura do participante: _____

RG: _____

Declaro que obtive de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido deste colaborador para a participação neste estudo.

Assinatura do pesquisador responsável pelo estudo.

São Paulo, ____/____/_____.

APÊNDICE B



UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO PROGRAMA DE PÓS- GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Caro Professor

Os questionamentos abaixo têm o objetivo de nos informar sobre suas expectativas e ideias acerca de noções referentes ao ensino de Probabilidade. Para nos auxiliar a compor os instrumentos e atividades para esta pesquisa, contamos com a sua colaboração sendo o mais detalhado possível nas suas respostas.

QUESTIONÁRIO 1

1. Dados Pessoais:

Nome: _____ Idade: _____
 Telefone: _____ E-mail: _____

2. Situação Funcional

Concursado () Contratado ()

Colégio que leciona: _____

3. Formação Acadêmica

Magistério Sim () Não () Ano de Conclusão: _____

Graduação Sim () Não () Ano de Conclusão: _____

Curso: _____ Instituição: _____

Pós- Graduação Sim () Não () Ano de Conclusão:

Curso: _____ Instituição: _____

4. O que o levou a ser professor?

5. Há quanto tempo você leciona? _____

6. Em qual serie você prefere lecionar? _____ Por quê?

7. Você acredita que as estratégias de ensino utilizadas por seus professores seriam adequadas para os alunos de hoje? Por quê?

8. Quando estudante você aprendeu Probabilidade?

9. Quando você era aluno, durante as de Probabilidade, eram utilizados materiais concretos? Ou qualquer outro recurso didático?

10. Descreva sucintamente, como você desenvolve no Ensino Médio os conteúdos de Probabilidade (quais suas estratégias de ensino).

11. Quais as principais dificuldades dos alunos no conteúdo de Probabilidade e como você procura saná-las?

12. Quais suas expectativas em relação esse curso?

Quais os tópicos de Probabilidade, você gostaria que fosse mais discutido?

- Eventos equiprováveis ()
- Abordagem frequentista ()
- Probabilidade Condicional ()
- Probabilidade da união da união de eventos ()
- Probabilidade da Intersecção ()
- Probabilidade do evento complementar ()
- Teorema da Probabilidade total ()
- Probabilidade Geométrica ()
- Teorema de Bayes ()
- Estudo de Probabilidade combinatória ()
- Distribuição Binomial ()
- Ensino de Probabilidade através de aspectos históricos ()
- Outros (jogos, vídeos, dinâmicas, etc.,... ()

APÊNDICE C



UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO 2

- 1.** Dê exemplos de definições de Probabilidade.

- 2.** Em uma partida de tênis programada para 5 sets, o vencedor ganharia 40 pontos no *ranking* da confederação. Para isso, um dos jogadores precisaria vencer primeiro 3 sets e ganhar o jogo. Entretanto, a partida foi interrompida pela chuva no momento em que terminava o 4º set, com o placar apontando 2 sets para o jogador **A** e 1 set para o jogador **B**. Para piorar a situação, o tal jogo estava sendo disputado no último dia possível daquele ano, por volta de 30 de dezembro, não havendo mais possibilidade de continuá-lo em outro dia do ano. O que fazer se um ou outro jogador pudesse vir a se consagrar o número 1 do mundo dependendo do número de pontos que conseguisse naquele último jogo do ano? Os organizadores do torneio reuniram-se às pressas e decidiram que os 40 pontos seriam divididos entre os dois jogadores proporcionalmente à Probabilidade que cada um teria de sagrarse vencedor, caso a partida chegasse ao final. Dos 40 pontos, quantos caberão ao jogador **A** e quantos caberão ao jogador **B**? Utilize a tabela seguinte para elaborar a solução

1º set	2º set	3º set	4º set (não ocorreu)	5º set (não ocorreu)
A vence (1 X 0)	B vence (1 X 1)	A vence (2 X 1)		

- 3.** Considere que numa cidade 40% da população adulta são fumantes, 40% dos adultos fumantes são mulheres e 60% dos adultos não fumantes são mulheres. Qual a Probabilidade de uma pessoa adulta da cidade escolhida ao acaso ser mulher?

- 4.** Carlos sabe que Ana e Beatriz estão viajando pela Europa. Com as informações que dispõe, ele estima corretamente que a Probabilidade de Ana estar hoje em Paris é $\frac{3}{7}$, que a Probabilidade de Beatriz estar hoje em Paris é $\frac{2}{7}$, e que a Probabilidade de ambas, Ana e Beatriz, estarem hoje em Paris é $\frac{1}{7}$. Carlos, então, recebe um telefonema de Ana informando que ela está hoje em Paris. Com a informação recebida pelo telefonema de Ana, Carlos pode estimar corretamente que a Probabilidade de Beatriz também estar hoje em Paris. Determine essa Probabilidade.
- 5.** Em um grupo de 40 homens e 60 mulheres, a Probabilidade de um homem ser míope é 0,05 e a Probabilidade de uma mulher ser míope é 0,1. Selecionando uma pessoa ao acaso, qual é a Probabilidade de ela ser míope? Selecionado um míope ao acaso qual é a Probabilidade de ele ser homem?
- 6.** Em um posto de combustíveis entram, por hora, cerca de 300 clientes. Desses, 210 vão colocar combustível, 130 vão completar o óleo lubrificante e 120 vão calibrar os pneus. Sabe-se, ainda, que 70 colocam combustível e completam o óleo; 80 colocam combustível e calibram os pneus e 50 colocam combustível, completam o óleo e calibram os pneus. Considerando que os 300 clientes entram no posto de combustíveis para executar uma ou mais das atividades acima mencionadas, determine a Probabilidade de um cliente entrar no posto para completar o óleo e calibrar os pneus.
- 7.** Um professor de Matemática, ao assumir uma classe da 2a série do Ensino Médio, fez um teste para diagnosticar as dificuldades de seus alunos em relação ao conteúdo de Probabilidade. Propôs a eles que resolvessem individualmente a questão.

Os eventos A e B são tais que $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,9$.

Assinale a única alternativa que apresenta um possível valor para $P(A \cap B)$.

- a) 0,13 b) 0,22 c) 0,31 d) 0,49 e) 0,54.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,9 - P(A \cap B)$$

"Professor! Tenho duas variáveis este problema não tem solução"

Mediante a resolução de Felipe, utilizando o seu conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento do conteúdo e de ensino, como faria sua intervenção? Ele está completamente errado? Como podemos aproveitar esse erro, para auxiliar este aluno sobre os conceitos de Probabilidade?

- 8.** Você acredita ser possível ensinar Análise Combinatória e Probabilidade paralelamente? Justifique sua resposta. Quais são os princípios pedagógicos favoráveis ou desfavoráveis pertinentes a essa estratégia de ensino?

Observação

O espaço a seguir é livre para que você nos indique suas observações adicionais sobre esse conteúdo (metodologia de ensino, atuação em sala de aula, dificuldades encontradas para ensinar e como saná-las, etc.).

APÊNDICE D



UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO PROGRAMA DE PÓS- GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

OPÇÃO POR HORÁRIO

CURSO: FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO PARA UMA AULA INVESTIGATIVA NO ENSINO DE PROBABILIDADES

Caro professor

Gostaríamos de convidá-lo a participar deste curso de formação continuada. O curso é voltado para o ensino de Probabilidade por meio de aulas investigativas. Serão abordados conceitos de Probabilidade e suas estratégias de ensino. O curso de formação continuada será desenvolvido com professores da rede pública estadual e federal. Terá início em agosto e finalizará em novembro do corrente ano, ao final do curso, todos os participantes receberão um certificado de 60h emitido pelo Instituto Federal do Tocantins-IFTO.

Dessa forma, caso

	Segunda Feira	Terça Feira	Quarta Feira	Quinta Feira	Sexta Feira	Sábado
Manha						
Tarde						
Noite						

APÊNDICE E

PRIMEIRO ENCONTRO

PROJETO

**FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DO
ENSINO MÉDIO PARA UMA AULA INVESTIGATIVA NO
ENSINO DE PROBABILIDADES**

DOUTORANDO: PROF.ME. ALBANO DIAS PEREIRA FILHO



E-mail: albano.filho@iftto.edu.br

APRESENTAÇÃO

Esta pesquisa está inserida no projeto maior, intitulado “Educação Continuada do Professor de Matemática do Ensino Médio: Núcleo de Investigações sobre a Reconstrução da Prática Pedagógica”, nº.19366/2012, do Programa Observatório da Educação da CAPES e tem como objetivo geral analisar as contribuições, para o desenvolvimento profissional docente, da participação de professores da Educação Básica em um curso de formação continuada voltado ao ensino de probabilidade por meio de aulas investigativas.



PROBLEMA DA PESQUISA

Que contribuições, para o desenvolvimento profissional docente, a participação de professores em uma formação continuada sobre o ensino de probabilidade no Ensino Médio baseado em aulas investigativas pode trazer?

OBJETIVO GERAL

Analizar as contribuições, para o desenvolvimento profissional docente, da participação de professores do Ensino Médio em um curso de formação continuada voltado para o ensino de probabilidade por meio de aulas investigativas.

REFERENCIAL TEÓRICO

Shulman (1986)

Ponte & Oliveira (2002)

Deborah Ball (1986)

METODOLOGIA

Perspectiva qualitativa Bogdan e Biklen (1996)

A pesquisa qualitativa caracteriza-se como sendo, do tipo *Design-Based Research* como proposta por COBB et al (2003).

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Pesquisa Documental

Pesquisa de Campo

- Planejamento
- Desenvolvimento do processo formativo

Análise dos Dados

ATIVIDADES INVESTIGATIVAS

Segundo Ponte et al. (2005), investigar é procurar conhecer o que não se sabe, mas para procurar, no seu sentido mais amplo, é necessário o questionamento acerca do que se é proposto.

Ao propor uma tarefa de investigação espera-se que os alunos possam de uma maneira mais ou menos consistente utilizar os vários processos que caracterizam a atividade investigativa em Matemática (...) Alguns desses processos são: a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho. (PONTE ET AL., 2005, p. 29).

Em uma exploração-investigação matemática na Escola Básica, não se busca que os alunos obtenham a resposta certa, antecipadamente esperada pelo professor, mas que eles explorem possibilidades, postulem conjecturas e se convençam a si próprios e aos outros das suas descobertas

ATIVIDADES EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS

Atividades que colocam o aprendiz em ação lidando com situações abertas nas quais ele deve procurar os próprios caminhos e estratégias para a execução.



Os diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura (Ponte, 2003)

TRABALHADOS REALIZADOS E CONCLUÍDOS

XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA-CIAEM

Investigaciones Matemáticas Acerca Combinatoria para estudiantes del Instituto Federal de Tocantins Escuela Secundaria

REVISTA INTEGRALIZAÇÃO UNIVERSITÁRIA – RIU

INVESTIGAÇÕES ESTATÍSTICAS EM UMA COLÔNIA DE PESCADORES

TÓPICOS POSSÍVEIS DE SEREM ABORDADOS

- Eventos equiprováveis
- Abordagem frequentista
- Probabilidade Condicional
- Probabilidade da união da união de eventos
- Probabilidade da Intersecção
- Probabilidade do evento complementar
- Teorema da probabilidade total
- Probabilidade Geométrica
- Probabilidade Aplicada a Genética
- Teorema de Bayes
- Estudo de probabilidade combinatória
- Distribuição Binomial ()
- Ensino de probabilidade através de aspectos históricos
- Outros (jogos, videos, dinâmicas, etc.,...)

APÊNDICE F

SEGUNDO ENCONTRO

PROJETO

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO PARA UMA AULA INVESTIGATIVA NO ENSINO DE PROBABILIDADES

DOUTORANDO: PROF. ME. ALBANO DIAS PEREIRA FILHO



E-mail: albano.filho@ifta.edu.br

PRIMEIRO ENCONTRO

Durante o curso serão discutidos textos sobre investigação em sala de aula, discutiremos a aula investigativa como um tipo de metodologia para o ensino. No curso serão discutidas atividades investigativas e também criadas e adaptadas algumas atividades para serem ministradas pelos professores participantes em suas aulas. Haverá preparação conjunta de um plano de trabalho docente, com posterior implementação e discussão dos resultados no grupo.

PRIMEIRO ENCONTRO

Tarefas Investigativas

Ao propor uma tarefa de investigação espera-se que os alunos possam de uma maneira mais ou menos consistente utilizar os vários processos que caracterizam a atividade investigativa em Matemática. (...) Alguns desses processos são: a **exploração** e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a **justificação de conjecturas** e avaliação do trabalho. (PONTE ET AL., 2005, p. 29),

PRIMEIRO ENCONTRO

Exercício	Problema	Tarefa de investigação
Simplifica:		
a) $\frac{6}{12} =$	Qual o mais pequeno número inteiro que, dividido por 5, 6 e 7 dá sempre resto 3?	1. Escreve a tabuada dos 9, desde 1 até 12. Observa os algarismos das diversas colunas. Encontras alguma regularidade.
b) $\frac{3 \times (10 - 7)}{17 - 2} =$		2. Vê se encontras regularidades nas tabuadas de outros números.
c) $\frac{\frac{20}{18 - 9}}{(15 - 10) \times 2} =$		

PRIMEIRO ENCONTRO

Uma aula exploratória típica é geralmente estruturada em três ou quatro fases:

- a fase de “lançamento” da tarefa
- a fase de “exploração” pelos alunos
- e a fase de “discussão e sintetização”

O professor deve cuidar de:

- promover a aprendizagem e gerir a turma
- não reduzir o nível de desafio cognitivo da tarefa
- desenvolver cultura de discussão matemática

(Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008; Stein & Smith, 1998; Anghileri, 2006; Yackel & Cobb, 1996)

FASE DE INTRODUÇÃO (LANÇAMENTO) DA TAREFA

Promoção da aprendizagem matemática	Gestão da aula
<p>Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Familiarizar com o contexto da tarefa (material cubos e autocolantes para apresentação) - Esclarecer a interpretação da tarefa (como?) - Estabelecer objetivos (o que se quer saber?) <p>Promover a adesão dos alunos à tarefa:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Estabelecer conexões com experiência anterior - Desafiar para o trabalho 	<p>Organizar o trabalho dos alunos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Definir formas de organização do trabalho (grupos de dois alunos para o trabalho autónomo e turma toda para a discussão coletiva)

FASE DE REALIZAÇÃO (EXPLORAÇÃO) DA TAREFA	
Promoção da aprendizagem matemática	Gestão da aula
<p>Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Colocar questões e dar pistas - Sugerir representações - Focar ideias produtivas - Pedir clarificações e justificações <p>Mantar o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Cuidar de promover o raciocínio dos alunos - Cuidar de não validar a correção matemática das respostas dos alunos (nem respostas, nem expressões faciais) 	<p>Promover o trabalho de pares/grupos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Regular as interações entre alunos - Providenciar materiais para o grupo <p>Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Pedir registos escritos - Fornecer materiais a usar (acetatos e canetas) <p>Organizar a discussão a fazer:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Identificar e selecionar resoluções variadas (clarificadoras, com erro a explorar, e com representações relevantes)
<p>Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Colocar questões e dar pistas - Sugerir representações - Focar ideias produtivas - Pedir clarificações e justificações <p>Mantar o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Cuidar de promover o raciocínio dos alunos - Cuidar de não validar a correção matemática das respostas dos alunos (nem respostas, nem expressões faciais) 	<p>Promover o trabalho de pares/grupos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Regular as interações entre alunos - Providenciar materiais para o grupo <p>Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Pedir registos escritos - Fornecer materiais a usar (acetatos e canetas) <p>Organizar a discussão a fazer:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Identificar e selecionar resoluções variadas (clarificadoras, com erro a explorar, e com representações relevantes)

FASE DE DISCUSSÃO DA TAREFA	
Promoção da aprendizagem matemática	Gestão da aula
<p>Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Pedir explicações claras das resoluções (Porquê?) - Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas - Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas (tabelas e regras escritas como expressões com letras) <p>Regular as interações entre os alunos na discussão:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas 	<p>Criar ambiente propício à apresentação e discussão:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos alunos - Providenciar a reorganização dos lugares/espaco para a discussão - Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados <p>Gerir relações entre os alunos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Definir a ordem das apresentações
<p>Institutionalizar ideias ou procedimentos relativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico suscitado pela exploração da tarefa:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Identificar representações produtivas para obter generalizações (tabela) - Reconhecer o valor de uma regra com letras <p>Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Evidenciar ligações com conceitos matemáticos e procedimentos anteriormente trabalhados (ideia de regra com letras; ideia de operação inversa). 	<p>Criar ambiente adequado à sistematização:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Focar os alunos no momento de sistematização coletiva - Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa realizada <p>Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Registo pelo professor em caso de acerto que previamente estruturou

SEGUNDO ENCONTRO	
<p>Questionário 1</p> <p>Levantamento, do perfil dos professores e de suas expectativas com relação ao curso.</p>	<p>Eventos equiprováveis (<input checked="" type="checkbox"/>)</p> <p>Abordagem frequencista (<input type="checkbox"/>)</p> <p>Probabilidade Condicional (<input type="checkbox"/>)</p> <p>Probabilidade da união da união de eventos (<input type="checkbox"/>)</p> <p>Probabilidade da Intersecção (<input type="checkbox"/>)</p> <p>Probabilidade do evento complementar (<input type="checkbox"/>)</p> <p>Teorema da probabilidade total (<input type="checkbox"/>)</p> <p>Probabilidade Geométrica (<input checked="" type="checkbox"/>)</p> <p>Teorema de Bayes (<input type="checkbox"/>)</p> <p>Estudo de probabilidade combinatória (<input type="checkbox"/>)</p> <p>Distribuição Binomial (<input type="checkbox"/>)</p> <p>Ensino de probabilidade através de aspectos históricos (<input type="checkbox"/>)</p> <p>Outros (jogos, vídeos, dinâmicas, etc.,...)(<input type="checkbox"/>)</p>
<p>Aplicação do Questionário 2.</p> <p>Conhecimentos matemáticos do grupo com relação aos conteúdos de probabilidade.</p> 	

DEFINIÇÕES

Definição Clássica

Definição Geométrica



DEFINIÇÃO CLÁSSICA

A probabilidade de um evento A é a razão entre o número de resultados (ou casos) favoráveis (à ocorrência de A) e o número de resultados possíveis.

(contagens - grandezas discretas)

$$P(A) = \frac{P_A}{N}$$

DEFINIÇÃO CLÁSSICA

Como resultado da definição acima apresentada, as probabilidades satisfazem algumas propriedades:

- (i) $0 \leq P(A) \leq 1$
- (ii) $P(S) = 1$
- (iii) Se dois acontecimentos **A** e **B** forem mutuamente exclusivos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Definição Clássica de Probabilidade

A definição clássica de probabilidade tem uma limitação que deriva do pressuposto de que o número de resultados possíveis associados a cada experiência aleatória é finito. Não é possível, por exemplo, calcular a probabilidade de que um ponto selecionado ao acaso a partir de uma região se localize numa determinada sub região incluída.

Definição Geométrica de Probabilidade

Seja **med** uma medida da dimensão (comprimento, área, volume) de uma região qualquer incluída em um espaço amostral contínuo **S** de uma experiência aleatória. De acordo com a definição geométrica, a probabilidade de que um ponto selecionado ao acaso a partir de **S** se localiza na região **A** é dada pela razão:

$$P(A) = \frac{\text{med } A}{\text{med } S}$$

Definição Geométrica de Probabilidade

As definições clássicas e geométricas não podem ser utilizadas no cálculo de probabilidade de eventos associados à realização da maioria das experiências com interesse prático, às quais a equiprobabilidade dos resultados não se aplica.

Exemplos:

- No lançamento de uma moeda que está deformada, qual é a probabilidade de sair Cara?
- Qual é a probabilidade de um brasileiro viver pelo menos até aos 70 anos?
- Um supermercado recebe em média 20 clientes por hora. Qual é a probabilidade de receber 8 clientes em uma dada hora, selecionada aleatoriamente?

Definição Geométrica de Probabilidade

Tal probabilidade lida com espaços amostrais descritos por figuras geométricas. Esses espaços são-enumeráveis, podendo ser finitos.

Representação da probabilidade geométrica

$$P = \frac{\text{comprimento de } XY}{\text{comprimento de } AB}$$

$$P = \frac{\text{Área de } B}{\text{Área de } A}$$

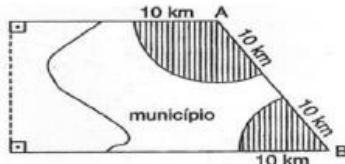
$$P = \frac{\text{Volume de } B}{\text{Volume de } A}$$

Fonte: material autorizado Prof. Mestrado Vanni Katsuka

Probabilidade Geométrica

Um município de 628 km^2 é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura abaixo. Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.

Essa probabilidade é de, aproximadamente:



Probabilidade Geométrica

Duas pessoas decidiram se encontrar em um determinado local entre 11 e 12 horas. Combinou-se previamente que a primeira a chegar ao local esperaria a outra em no máximo 15 minutos. Qual a probabilidade que este encontro aconteça, admitindo que os instantes de chegada de cada uma das pessoas é totalmente aleatório?

APENDICE G

TERCEIRO ENCONTRO

PROJETO

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO PARA UMA AULA INVESTIGATIVA NO ENSINO DE PROBABILIDADES

DOUTORANDO: PROF.ME. ALBANO DIAS PEREIRA FILHO




E-mail: albano.filho@ifta.edu.br






OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Universidade Anhanguera de São Paulo

Grupo de Estudos sobre Probabilidade

Pauta do 3º Encontro

- Refletir sobre os raciocínios aplicados na resolução do questionário 2 para desenvolver e consolidar raciocínios probabilísticos e estudar conceitos básicos da probabilidade.
- Elaboração da Atividade Investigativa sobre Probabilidade Geométrica usando os CDs, bola de gude.
- Analise do encontro e orientação para o próximo encontro.
- Diário de Bordo

Analise das Questões do Questionário 2

1. Dê exemplos de definições de probabilidade.

Definição Clássica de Probabilidade (Laplace)

Probabilidade: Representa a proporção do número de resultados favoráveis ao evento em relação ao número total de resultados possíveis do fenômeno, quando todos estes são considerados equiprováveis. O termo equiprovável (ou igualmente provável) significa não preferir alguns resultados em detrimento de outros. Isto é fácil observar quando ocorre algum tipo de simetria no fenômeno estudado.

$$P(A) = \frac{P_A}{N}$$

Definição frequencista de probabilidade

Considere-se que, no decurso de **N** realizações de uma experiência, um acontecimento **A** ocorre **NA** vezes (**0 ≤ NA ≤ N**). A probabilidade do acontecimento define-se como o limite, quando **N** tende ao infinito, da frequência relativa de ocorrência do acontecimento **A**.

Probabilidade de um evento **E** é expressa por:

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{número de ocorrências de } E \text{ em } n \text{ repetições independentes}}{\text{número } n \text{ de repetições do experimento}} \right)$$

Definição geométrica de probabilidade

Seja **med** uma medida da dimensão (comprimento, área, volume) de uma região qualquer incluída em um espaço amostral contínuo **S** de uma experiência aleatória. De acordo com a definição geométrica, a probabilidade de que um ponto selecionado ao acaso a partir de **S** se localiza na região **A** é dada pela razão:

$$P(A) = \frac{\text{med } A}{\text{med } S}$$

DEFINIÇÃO SUBJETIVA DE PROBABILIDADE

É a atribuição de probabilidades baseadas em experiências passadas, opiniões, enfim, no poder de análise pessoal de uma situação específica.

Por exemplo, suponhamos que um químico manipule um novo perfume para mulheres e atribua uma probabilidade de aceitação deste perfume junto às mulheres bastante diferente daquela atribuída pelo dono do estabelecimento.

- Qual a probabilidade de você fechar sua nota na próxima avaliação presencial?
- Qual a probabilidade de chover no final de semana?

Há 30% de chance de chuva nas próximas 24 horas

DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA

Uma medida de Probabilidade P é uma função de conjunto, isto é, definida em A , que a cada elemento A pertencente a A associa um número real que se chama Probabilidade de A e se representa por $P(A)$, satisfazendo as seguintes condições ou axiomas:

1º Axioma - A probabilidade de qualquer acontecimento é maior ou igual a zero $P(A) \geq 0$.

2º Axioma - A probabilidade do acontecimento certo S , é 1: $P(S)=1$.

3º Axioma - Dados dois acontecimentos disjuntos, a probabilidade da sua união é igual à soma das probabilidades de cada um

Se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

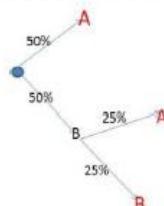
Os axiomas anteriores são conhecidos como a axiomática de Kolmogorov.

A probabilidade freqüencista, laplaciana e subjetiva, verificam a axiomática de Kolmogorov.

Questão 2

Em uma partida de tênis programada para 5 sets, o vencedor ganharia 40 pontos no ranking da confederação. Para isso, um dos jogadores precisaria vencer primeiro 3 sets e ganhar o jogo. Entretanto, a partida foi interrompida pela chuva no momento em que terminava o 4º set, com o placar apontando 2 sets para o jogador **A** e 1 set para o jogador **B**. Para piorar a situação, o tal jogo estava sendo disputado no último dia possível daquele ano, por volta de 30 de dezembro, não havendo mais possibilidade de continuá-lo em outro dia do ano. O que fazer se um ou outro jogador pudesse vir a se consagrar o número 1 do mundo dependendo do número de pontos que conseguisse naquele último jogo do ano?

RESOLUÇÃO - Questão 2



Questão 3

Considere que numa cidade 40% da população adulta é fumante, 40% dos adultos fumantes são mulheres e 60% dos adultos não-fumantes são mulheres. Qual a probabilidade de uma pessoa adulta da cidade escolhida ao acaso ser mulher?

Resolução - Questão 3

Supondo 1000 pessoas na cidade

	MULHER	HOMEM	TOTAL
NÃO FUMANTE (600)	360	240	600
FUMANTE (400)	160	240	400
TOTAL	520	480	100

$$P = \frac{520}{100} = 52\%$$

Questão 4

Carlos sabe que Ana e Beatriz estão viajando pela Europa. Com as informações que dispõe, ele estima corretamente que a probabilidade de Ana estar hoje em Paris é $3/7$, que a probabilidade de Beatriz estar hoje em Paris é $2/7$, e que a probabilidade de ambas, Ana e Beatriz, estarem hoje em Paris é $1/7$. Carlos, então, recebe um telefonema de Ana informando que ela está hoje em Paris. Com a informação recebida pelo telefonema de Ana, Carlos pode estimar corretamente que a probabilidade de Beatriz também estar hoje em Paris. Determine essa probabilidade.

$$U = \{\text{segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado, domingo}\}$$

$$\text{Ana} = \{\text{segunda, quarta, sábado}\}$$

$$\text{Beatriz} = \{\text{quarta, domingo}\}$$

Como Ana está em Paris, somente pode ser: $\{\text{segunda, quarta, sábado}\}$, logo:

$$P = \frac{1}{3}$$

Questão 5

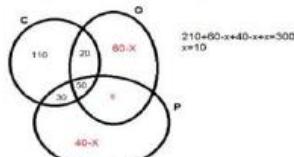
Em um grupo de 40 homens e 60 mulheres, a probabilidade de um homem ser miope é 0,05 e a probabilidade de uma mulher ser miope é 0,1. Selecione uma pessoa ao acaso, qual é a probabilidade de ela ser miope? Selecionado um miope ao acaso qual é a probabilidade de ele ser homem?

	MULHER	HOMEM	TOTAL
NÃO MIOPE (600)	54	38	92
MIOPE (400)	6	2	8
TOTAL	60	40	100

$$P = \frac{2}{8} = 0,25 = 25\%$$

Questão 6

Em um posto de combustíveis entram, por hora, cerca de 300 clientes. Desses, 210 vão colocar combustível, 130 vão completar o óleo lubrificante e 120 vão calibrar os pneus. Sabe-se, ainda, que 70 colocam combustível e completam o óleo; 80 colocam combustível e calibram os pneus e 50 colocam combustível, completam o óleo e calibram os pneus. Considerando que os 300 clientes entram no posto de combustíveis para executar uma ou mais das atividades acima mencionadas, determine a probabilidade de um cliente entrar no posto para completar o óleo e calibrar os pneus.



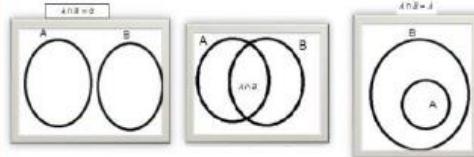
$$P = \frac{60}{300} = \frac{1}{5} = 20\%$$

Questão 7

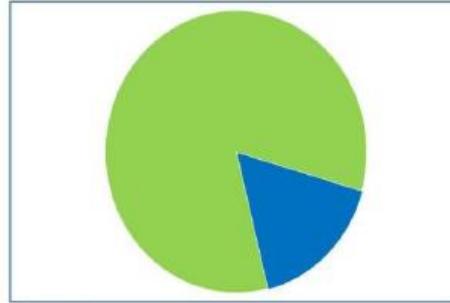
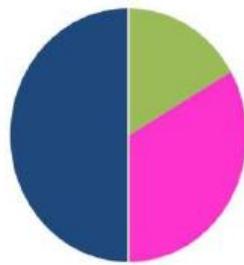
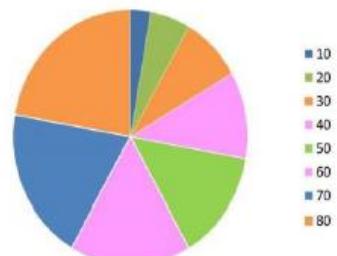
Um professor de Matemática, ao assumir uma classe da segunda série do Ensino Médio, fez um teste para diagnosticar as dificuldades de seus alunos em relação ao conteúdo de probabilidade. Propôs a eles que resolvessem individualmente a questão.

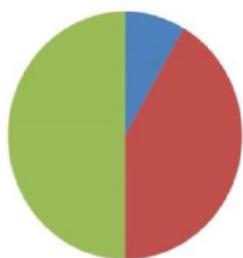
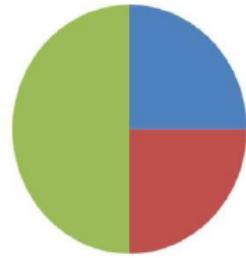
Os eventos A e B são tais que $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,9$. Assinale a única alternativa que apresenta um possível valor para $P(A \cap B)$.

0,13 b) 0,22 c) 0,31 d) 0,49 e) 0,54.

**Questão 8**

Você acredita ser possível ensinar Análise Combinatória e Probabilidade paralelamente? Justifique sua resposta. Quais são os princípios pedagógicos favoráveis ou desfavoráveis pertinentes a essa estratégia de ensino?

ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA**ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA****ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA**

ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA**ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA****ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA**

Duas pessoas decidiram se encontrar em um determinado local entre 11 e 12 horas. Combinou-se previamente que a primeira a chegar ao local esperaria a outra em no máximo 15 minutos. Qual a probabilidade que este encontro aconteça, admitindo que os instantes de chegada de cada uma das pessoas é totalmente aleatório?

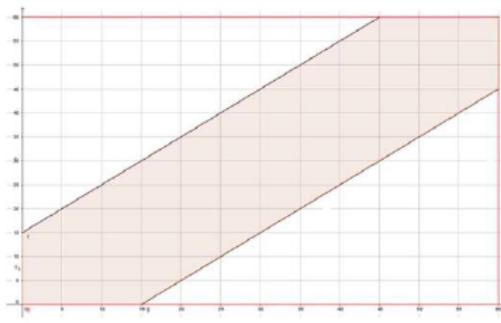
1. Considerando a unidade de medida minutos, quantas possibilidades existem de chegada para a pessoa A e quantas para a pessoa B.

Considerando a resposta anterior e também, que aquele que chegar primeiro esperará o outro por 15 minutos, como você faria para determinar o número total de possibilidades? Descreva as suas tentativas até o resultado final. Se não encontrou o resultado quais foram as suas dificuldades?

ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA

Duas pessoas decidiram se encontrar em um determinado local entre 11 e 12 horas. Combinou-se previamente que a primeira a chegar ao local esperaria a outra em no máximo 15 minutos. Qual a probabilidade que este encontro aconteça, admitindo que os instantes de chegada de cada uma das pessoas é totalmente aleatório?

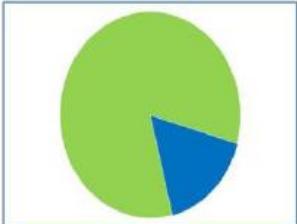
2. Investigue todas as possibilidades de que o encontro aconteça, admitindo que os instantes de chegada de cada uma das pessoas é totalmente aleatório.

ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA

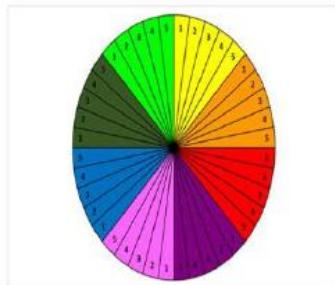
Deixar suas impressões sobre este encontro no seu **Diário de Bordo**

APENDICE H

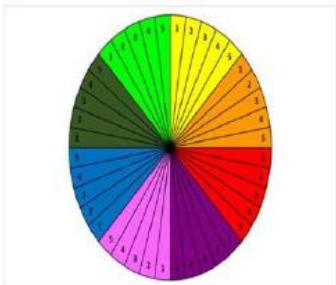
QUARTO ENCONTRO

<p>PROJETO</p> <p>FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO PARA UMA AULA INVESTIGATIVA NO ENSINO DE PROBABILIDADES</p> <p>DOUTORANDO: PROF. ME. ALBANO DIAS PEREIRA FILHO</p>   <p>E-mail: albano.filho@ifta.edu.br</p>	    <p>OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática Universidade Anhanguera de São Paulo</p> <p>Grupo de Estudos sobre Probabilidade</p> <p>Pauta do 5º Encontro</p> <ul style="list-style-type: none"> • Refletir sobre os encontros anteriores • Elaboração da Atividade Investigativa sobre Probabilidade Geométrica usando os CDs, bola de gude, • Elaboração da Atividade Investigativa sobre Probabilidade usando Tecnologias • Análise do encontro e orientação para o próximo encontro.
<p>FASES DE UMA ATIVIDADE INVESTIGATIVA (UMA AULA, CONJUNTO DE AULAS)</p> <p>FASE 1 Introdução da tarefa, professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito</p> <p>FASE 2 Realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com a turma.</p> <p>FASE 3 Discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.</p>	<p>Atividade Investigativa</p> <p>Processos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Exploração e Formulação de Questões • Formulação de Conjecturas • Teste e a Reformulação de Conjecturas • Justificação e Avaliação de conjecturas
<p>Exploração e Formulação de Questões</p> <p>Para as atividades propostas, vamos supor que estejam sentados numa mesa de roleta. Desta forma, discuta com seus colegas: Probabilidade da seta parar na cor azul. Escrevam o raciocínio utilizado.</p> 	<p>ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA</p> <p>Se na cor verde, temos uma abertura de 60°. Qual a probabilidade da seta parar na cor rosa? Podemos supor que se trata de uma circunferência de raio 1. Escrevam o raciocínio utilizado.</p> 

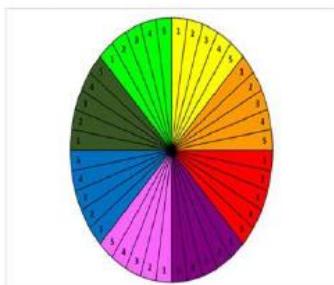
Qual a probabilidade da seta parar no número 1?



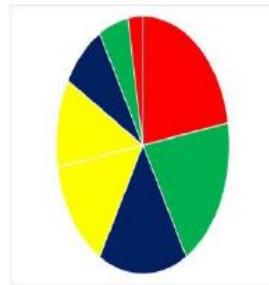
Qual a probabilidade da seta parar no número 3 ou 5?



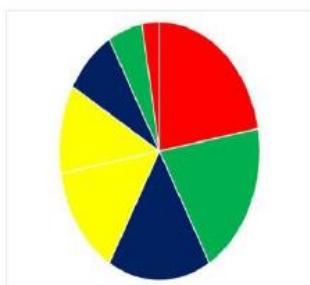
Qual a probabilidade da seta parar no número 1 e na cor vermelha?



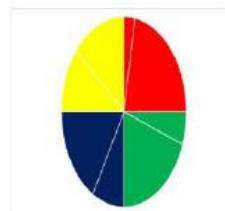
Sabendo que cada cor correspondem a 90° . Qual a probabilidade da seta parar cor azul?



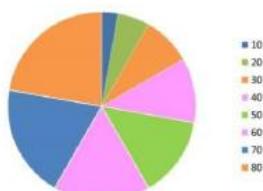
Sabendo que cada cor correspondem a 90° . Qual a probabilidade da seta não parar na cor azul?



Qual a probabilidade da seta não parar na cor azul? Em Ambas as roletas?



ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA



APÊNDICE I

CÉDULAS FICTÍCIAS



