Universidad de Murcia

Facultad de Matemáticas

Axiomas de separación en espacios topológicos

Trabajo de Topología

Autores:
Eduardo Giménez Domínguez, Javier Melgarejo Teruel, Germán Gil Planes, Pedro Jiménez Gómez

Índice

1. Introducción

Este trabajo habla de los axiomas de separación en espacios topológicos. Para ello, hemos definido cada tipo de espacio que generan dichos axiomas. Además, para cada espacio, mencionaremos las propiedades que lo caracterizan, lo relacionaremos con otros espacios generados por otros axiomas y además daremos algunos ejemplos de espacios (o ejemplos de espacios que no lo son con su respectiva explicación).

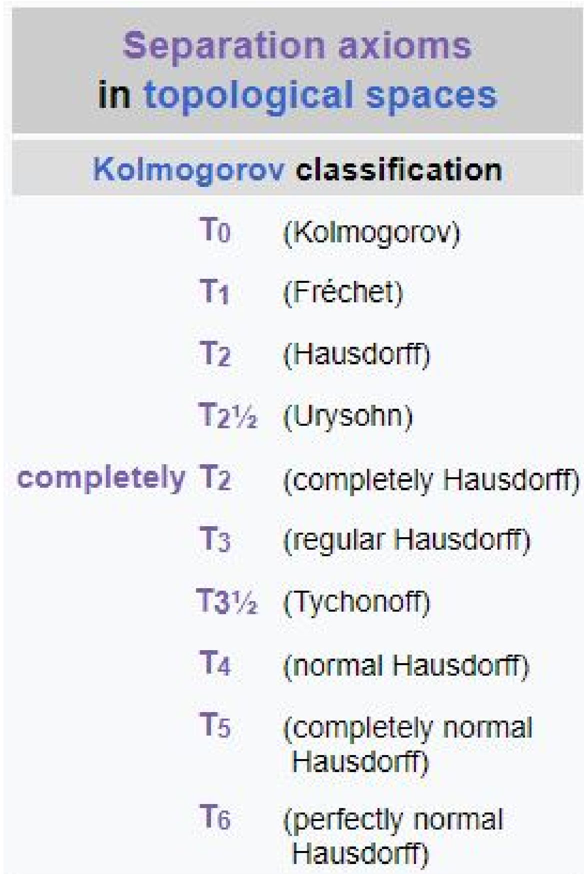

Figura 1: Axiomas de separación en los espacios topológicos

Antes de la definición general actual de espacio topológico, hubo numerosas definiciones previas que asumían algunos axiomas de separación (tal como los entendemos actualmente). Por ejemplo, la definición propuesta por Felix Hausdorff en 1914 es equivalente a la definición moderna junto con el axioma de separación de Hausdorff.

Los axiomas de separación, considerados en conjunto, adquirieron relevancia en el estudio de la metrizabilidad, es decir, la cuestión de qué espacios topológicos pueden ser dotados de la estructura de un espacio métrico. Los espacios métricos cumplen todos los axiomas de separación. Sin embargo, el estudio de espacios que cumplen solo algunos axiomas ayuda a desarrollar la noción de metrizabilidad completa.

Los axiomas de separación que se estudiaron en conjunto fueron los axiomas para espacios accesibles, espacios de Hausdorff, espacios regulares y espacios normales. Los topólogos asignaron a estas clases de espacios los nombres T1, T2, T3 y T4. Posteriormente, este sistema de numeración se extendió para incluir $T0, T2, T3^{\frac{1}{2}}$ (o $T\pi$), $T5$ y $T6$.

Sin embargo, esta secuencia presentó problemas. La idea era que cada espacio Ti es un tipo especial de espacio Tj si i ¿j. Pero esto no siempre es cierto, ya que las definiciones varían. Por ejemplo, un espacio regular (denominado T3) no necesariamente tiene que ser un espacio de Hausdorff (denominado T2), al menos según la definición más simple de espacios regulares.

2. Espacios de Kolmogórov o T_0

2.1. Introducción

Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) fue un matemático y físico ruso con numerosas e importantes aportaciones en dichas ciencias. En 1920, ingresó en la Universidad Estatal de Moscú y en el Instituto Tecnológico de Química Mendeleev de Rusia. En este período demostró varios resultado de la teoría de conjuntos y de las series de Fourier. En 1939 fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias de Rusia. También fue académico de la Royal Society, de la Real Academia de Artes y Ciencias de los Países Bajos y de la Academia de Ciencias de Francia.

2.2. Definición

Un espacio topológico se dice que es T_0 o espacio de Kolmogórov si para todo par de puntos distintos x, y $\in$ X, o bien existe un entorno U de x tal que y $\notin$ U, o bien existe un entorno V de y tal que x $\notin$ V.

2.3. Propiedades

Asumiremos que X es un espacio de Kolmogórov.

1. Dado cualquier punto x $\in$ X, la acumulación de {x} es unión de conjuntos cerrados.
2. La propiedad de separación que define a los espacios de Kolmogórov es hereditaria, es decir, todo subespacio topológico de X es de Kolmogórov.
3. Dados dos puntos cualesquiera x, y, con x $\neq$ y, la clausura de {x} es distinta de la clausura de {y}.
4. Todo espacio métrico es un espacio de Kolmogórov.
5. Todo espacio topológico discreto es un espacio de Kolmogórov.

2.4. Relación entre los axiomas de separación

Como veremos más adelante, cualquier espacio topológico Hausdorff y Fréchet son espacios de Kolmogórov. Sin embargo, las implicaciones contrarias no se cumplen. Hablaremos de ello en sus respectivos apartados, cuando definamos dichos espacios.

2.5. Ejemplos de espacios de Kolmogórov y espacios no de Kolmogórov

1. El espacio topológico trivial con más de un punto $(X, \mathcal{T}_T)$ no es un espacio de Kolmogórov. Para cualquier punto x del espacio, el único abierto al que pertenece es al propio espacio, luego el espacio es el único entorno de x. Así, para cualesquiera dos puntos distintos x, y $\in$ X, X es el único entorno de x y de y, por lo que no se cumple la condición de separación.
2. El espacio topológico producto del espacio de los reales con la topología usual y el espacio de los reales con la topología trivial, es decir, $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_T)$, no es un espacio de Kolmogórov. Sean x, y, z $\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Entonces los puntos a = (x, y), b = (x, z) no son iguales. Pero, no podemos encontrar ningún entorno de a que no contenga a b, ni tampoco podemos encontrar ningún entorno de b que no contenga a a. Esto ocurre porque los abiertos no triviales de esta topología son bandas con altura infinita, y los puntos a y b se encuentran en la misma banda vertical.
3. El espacio topológico discreto $(X, \mathcal{T}_D)$ es un espacio de Kolmogórov. Cualquier punto del espacio es un abierto, luego es un entorno. Por tanto, dados dos puntos cualesquiera x, y $\in$ X, x $\neq$ y, y$\notin U_x =$ {x} de x.

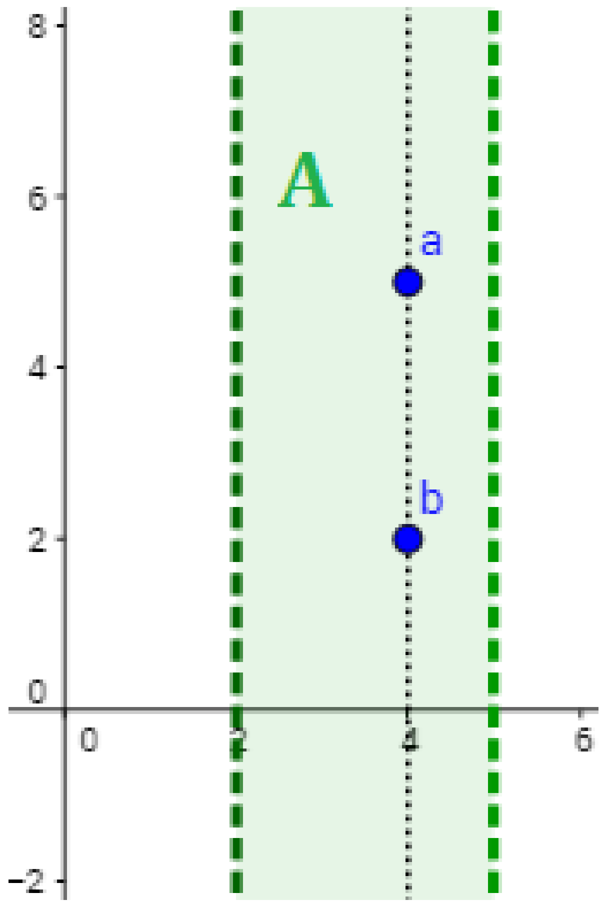

Figura 2: Abierto $A = (2,5) \times \mathbb{R} \in \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_T$

3. Espacios de Fréchet o T_1

3.1. Definición

Un espacio topológico (X, τ) se dice que es T_1 (o un espacio de Fréchet) si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$, existe un abierto que contiene a x y no contiene a y. Esto implica que existe un abierto que contiene a y y no contiene a x. Cabe destacar que no es necesario que los abiertos sean disjuntos, puesto que si esto ocurriera para todo x e y, sería un espacio Hausdorff.

3.2. Propiedades

Supongamos que X es un espacio de Fréchet.

1. Para cada punto x de X, {x} es cerrado.
2. Todo subconjunto de X es la intersección de sus entornos.
3. Todo subconjunto finito de X es cerrado.
4. Todo subconjunto cofinito de X es abierto.

3.3. Relación entre los axiomas de separación

Veamos que si un espacio es de Fréchet, entonces es de Kolmogórov. La demostración es sencilla, puesto que dada la definición del espacio de Fréchet, dados dos puntos distintos x e y, existen dos entornos (abiertos) $U_x \in \mathbb{E}(x), U_y \in \mathbb{E}(y)$ tales que $x \notin U_y$ y $y \notin U_x$. Por tanto, existe un entorno de uno de los dos puntos (por ejemplo el de x) que no contiene al otro (al punto y), que es la definición de un espacio de Kolmogórov.

3.4. Espacios de Fréchet y no de Fréchet

1. El espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es de Fréchet. Veámoslo. Sean dos puntos distintos x e y. Supongamos $x < y$. Entonces, existen otros tres puntos a,b y c tales que $a < x < b < c$. Los siguientes conjuntos disjuntos $U_x = (a, b)$ y $U_y(b, c)$ son abiertos, luego son entornos de x y de y respectivamente.
2. El espacio de Sierpinski $(\{0, 1\}, \tau_{S_i})$ cuya topología es $\tau_{S_i} = \{, \{0\}, \{0, 1\}\}$ es de Kolmogórov, pero no de Fréchet, puesto que los cerrados en este espacio son $\{, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Entonces los únicos entornos de 0 son $\{0\}$ y $\{0, 1\}$, y el único entorno de 1 es $\{0, 1\}$. Por tanto, existe un entorno de 0 que no contiene a 1, luego es de Kolmogórov, pero no es Fréchet porque el único entorno de 1 también contiene a 0.

4. Espacios de Hausdorff o T_2

4.1. Definición

Un espacio topológico (X, τ) se dice que es T_2 (o un espacio de Hausdorff) si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$, existen entornos U y V de x e y, respectivamente, tales que $U \cap V = \varnothing$.

Los espacios de Hausdorff llevan el nombre de Felix Hausdorff, uno de los fundadores de la topología. La definición original de Hausdorff de un espacio topológico (en 1914) incluía la condición de Hausdorff como un axioma.

4.2. Propiedades

1. Un subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff (es hereditario) y un producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff.
2. En un espacio topológico (X,τ) de Hausdorff, las sucesiones convergentes convergen a un único punto.
3. Todo espacio métrico (X,d) es un espacio topológico de Hausdorff.
4. Todo subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.
5. Es un invariante topológico, es decir, es una propiedad que se conserva por homeomorfismos.

4.3. Relación entre los axiomas de separación

Un espacio topológico (X, τ) de Hausdorff es también de Fréchet, es decir, $T_2 \Longrightarrow T_1$. La prueba de esta implicación es trivial, basta tomar los propios abiertos U y V como los entornos que no contienen al otro punto.

4.4. Ejemplos de espacios Hausdorff y espacios no Hausdorff

1. El espacio topológico de los reales con la topología usual, ($\mathbb{R}$, τ), es de Hausdorff: Sean x e y dos puntos distintos de $\mathbb{R}$. Podemos suponer que x ¡y. Entonces existen tres reales a, b y c tales que

   $$a < x < b < y < c$$

   Los conjuntos A = (a,b) y B = (b,c) son abiertos por ser intervalos abiertos y además son disjuntos cumpliendo $x \in A$ e $y \in B$.
2. El espacio de Sierpinski ({0,1},τ_{Si}) cuya topología es:

   $$\tau_{Si} = \{\varnothing, \{1\}, \{0,1\}\}$$

   no es de Hausdorff. Los únicos abiertos a los que pertenece 1 son {1},{0,1} y el único abierto al que pertenece 0 es {0,1}. Por tanto, no existen abiertos disjuntos y por tanto no puede ser T_2
3. Un ejemplo de topología que es T_1 pero no es T_2 es la topología cofinita definida en un conjunto infinito. Sea X cualquier conjunto infinito en la topología cofinita y sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Supongamos que existen U,V abiertos en X tal que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$. Tenemos entonces que $X \setminus U \cap V = X \Longrightarrow (X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X$. Por otra parte como U y V son abiertos en X $\Longrightarrow X \setminus U$ y $X \setminus V$ son finitos $\Longrightarrow (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ es finito $\Longrightarrow$ X es finito. LLegamos a una contradicción, por tanto, concluimos que dicha topología no puede ser T_2.

5. Espacios completamente de Hausdorff y espacios de Urysohn

5.1. Definición

Un espacio completamente Hausdorff es un espacio en el que todo par de puntos distintos $x, y \in X$ pueden ser separados por una función. Decimos que dos puntos x e y pueden ser separados por una función si existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ con f(x) = 0 y f(y) = 1.

Un espacio topológico (X, τ) se dice que es $T_{1/2}$ (o un espacio de Urysohn) si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$, existen entornos cerrados U y V de x e y, respectivamente, tales que $U \cap V = \varnothing$.

5.2. Relación entre los axiomas de separación

Cualquiera dos puntos que pueden ser separados por una función también pueden ser separados por entornos cerrados y es obvio que si pueden ser separados por entornos cerrados también podrán ser separados por entornos abiertos. Tenemos entonces las siguientes implicaciones:

$$CompletamentedeHausdorff \Longrightarrow Urysohn(T_{1/2}) \Longrightarrow Hausdorff(T_2)$$

5.3. Ejemplos de espacios completamente de Hausdorff y espacios no completamente de Hausdorff

Veamos un ejemplo de espacio topológico completamente de Hausdorff pero no Hausdorff: En el conjunto de los enteros estrictamente positivos ($\mathbb{Z}^+$) y siendo a y b dos enteros diferentes con $b \neq 0$ consideramos el conjunto

$$S(a, b) = \{a + kb \in \mathbb{Z}^+ : k \in \mathbb{Z}\}$$

Dicho conjunto es la infinita progresión aritmética de enteros positivos con diferencia b y conteniendo a. Para la demostración necesitaremos los siguientes pasos:

1. $\mathbb{B} = \{S(a, b) : mcd(a, b) = 1\}$ es base para la topología $\mathbb{Z}^+$

   Consideremos $x \in S(a, b) \cap S(c, d)$. Por el algoritmo de Euclides tenemos que $S(a, b) = S(x, b)$, $S(c, d) = S(x, d)$ y $x \in S(x, bd) \subset S(x, d) \cap S(c, d)$. Además, como $mcd(x, b) = 1$ y $mcd(x, d) = 1$ entonces $mcd(x, bd) = 1$ por lo que x y bd son coprimos y $S(x, bd) \in \mathbb{B}$. Esto concluye con la prueba de que efectivamente $\mathbb{B}$ es base para una topología en $\mathbb{Z}^+$.

2. La topología en $\mathbb{Z}^+$ inducida por $\mathbb{B}$ es Hausdorff.

   Tenemos que ver que existen entornos abiertos disjuntos U_m y U_n tal que $m \in U_m$ y $n \in U_n$. Tomando $d = |m - n|$ podemos encontrar un entero t tal que $t > d$ y tal que $mcd(m, t) = mcd(n, t) = 1$ (por ejemplo cogiendo $t = m * n + 1$).

   Los abiertos $S(m, t)$ y $S(n, t)$ son disjuntos porque tendrían elementos en comun si y sólo si la ecuación diofántica $m + tx = n + ty$ tiene soluciones. Pero esta no tiene puesto que esto implicaría que $t(x - y) = n - m$ implica que t divide a $n - m$ pero $t > |m - n|$.

   Por tanto, concluimos que $S(m, t) \cap S(n, t) = \varnothing$ por lo que $\mathbb{Z}^+$ es un espacio de Hausdorff con dicha topología.

3. La topología en $\mathbb{Z}^+$ inducida por $\mathbb{B}$ no es completamente de Hausdorff.

   Sean m, n enteros positivos distintos. Como $\mathbb{B}$ es base, para cualquier dos entornos disjuntos U_m, U_n, podemos encontrar $S(m, a)$ y $S(n, b)$ tal que $m \in S(m, a) \subseteq U_m$ y $n \in S(n, b) \subseteq U_n$ y entonces $S(m, a) \cap S(n, b) = \varnothing$. Pero $g = a * b$ es múltiplo de a y de b por lo que debe estar en $\bar{S}(m, a)$ y $\bar{S}(n, b)$, es decir, $\bar{S}(m, a) \cap \bar{S}(n, b) \neq \varnothing$ y por tanto, $\bar{U}_m \cap \bar{U}_n \neq \varnothing$.

Esto prueba que esta topología es Hausdorff pero no completamente Hausdorff.

Algunos ejemplos de espacios completamente de Hausdorff (y por tanto de Urysohn) sería por ejemplo el de la topología generada por la unión de la topología euclídea usual y la topología cocontable. Los abiertos en esta topología son aquellos de la forma $U \setminus A$ donde U es abierto en la topología euclídea y A es contable.

Otro ejemplo sería el de la extensión racional en el plano. Si (X, τ) es el plano euclídeo, definimos una topología τ^* para X declarando abierto cada punto del conjunto $D = \{(x, y)|x \in Q, y \in Q\}$ y cada conjunto de la forma $\{x\} \cup (D \cap U)$ con $x \in U \in \tau$.

6. Espacios regulares y espacios de Tychonoff

6.1. Espacios regulares

Definición 6.1.1 *Un espacio topológico (X, τ) es un espacio regular si para cada conjunto cerrado $F \subset X$ y cada punto $x \notin F$, existen sendos entornos abiertos, U de x y V de F, tales que $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 6.1.2 *Diremos que un espacio es T_3 cuando sea Hausdorff y regular.*

Es necesario hacer esta aclaración y tener esto en cuenta porque hay mucha controversia entre los distintos autores. Algunos hacen la distinción de manera opuesta: toman los espacios T_3 como aquellos en los que puntos y cerrados pueden separarse por entornos abiertos; y los espacios regulares como aquellos que son T_3 y Hausdorff.

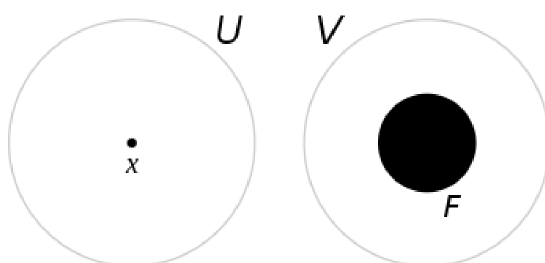

Figura 3: Espacio regular.

En la Figura 3 se ve como x y el cerrado F (representado por el disco sólido de la derecha) están separados por sus respectivos entornos abiertos U y V, que no se solapan. Los entornos abiertos son los espacios interiores a cada circunferencia.

Proposición 6.1.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es un espacio regular.*
2. *Si U es un abierto de X y $x \in U$, entonces existe un abierto $V \subset X$ tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subset U$.*
3. *$\forall x \in X$ existe una base de entornos cerrados de x.*

Proposición 6.1.2 *Sea (X, τ) un espacio topológico. X es regular $\iff$ $\forall x \in X$ y $U \in \varepsilon(x)$, $\exists V \in \varepsilon(x)$ tal que $\overline{V} \subseteq U$.*

Ejemplo 6.1.1 ($\mathbb{R}$,τ_u) *es un espacio regular y también es T_3.*

Ejemplo 6.1.2 ($\mathbb{R}$,τ_u), *siendo τ=$\{\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, es un espacio regular, pero no es Hausdorff. Es regular porque todos los elementos son abiertos y cerrados. Por lo que, si cogemos un cerrado F de τ y $x \notin F$, en particular $x \in \mathbb{R}\backslash F$, que es ya un abierto y claramente $\mathbb{R}\backslash F \cap F = \emptyset$.*

Para ver que no puede ser Hausdorff, basta con coger $x, y \in \mathbb{Q}$ tal que $x \neq y$ y ver que el abierto más pequeño que contiene a cada uno de ellos es $\mathbb{Q}$. Por lo que no van a existir dos entornos, uno de cada punto, disjuntos.

Este es un ejemplo de un espacio regular que no es T_3.

Ejemplo 6.1.3 *Sea* τ=$\{V\backslash C$: V *abierto de la topología usual y* C *es numerable*$\}$. *Consideramos entonces* ($\mathbb{R}$,τ).

Cogemos $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, *que es un abierto de la topología porque* $\mathbb{R}$ *es abierto en la topología usual y* $\mathbb{Q}$ *es numerable. Como* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *es abierto, entonces* $\mathbb{Q}$ *es cerrado. Si ahora nos cogemos* $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, *cualquier abierto* U *que contiene a* x *cumple que* $U \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

Este es un ejemplo de un espacio que, directamente, no es regular.

6.2. Espacios de Tychonoff

En topología, los espacios de Tychonoff y los espacios completamente regulares son tipos de espacios topológicos. Estas condiciones son ejemplos de axiomas de separación.

Los espacios de Tíjonov llevan el nombre de Andréi Nikoláievich Tíjonov, cuyo nombre en ruso se translitera en ocasiones como "Tychonoff", "Tychonov", "Tikhonov", "Tihonov", "Tichonov.$^{\text{et}}$c.

Definición 6.2.1 X *es un espacio completamente regular si dado cualquier conjunto cerrado* F *y cualquier punto* $x \notin F$, *entonces existe una función continua* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x)$=0 *y para todo* $y \in F$, $f(y)$=1. *En otras palabras, esta condición afirma que* x *y* F *se pueden separar por una función continua.*

Definición 6.2.2 X *es un espacio de Tychonoff, espacio* $T_{3\frac{1}{2}}$, *espacio* T_π, *o espacio completamente* T_3 *si es completamente regular y, además, es Hausdorff.*

Casi cualquier espacio topológico estudiado en análisis matemático es Tychonoff, o al menos completamente regular. A continuación, se muestran algunos ejemplos de espacios completamente regulares y Tychonoff.

Ejemplo 6.2.1 ($\mathbb{R}$,τ_u) *es un espacio completamente regular y también es Tychonoff.*

Ejemplo 6.2.2 *Todo espacio regular localmente compacto es completamente regular y, por tanto, todo espacio de Hausdorff localmente compacto es Tychonoff.*

Ejemplo 6.2.3 *En particular toda variedad topológica es Tychonoff.*

Ejemplo 6.2.4 *Todo conjunto totalmente ordenado con la topología del orden es Tychonoff.*

6.2.1. Propiedades

1. Preservación.
   - Sea X completamente regular (resp. Tychonoff). Cualquier subconjunto $Y \subset X$ es también completamente regular (resp. Tychonoff).
   - Un espacio de la topología producto no vacío es completamente regular (resp. Tychonoff) si y solo si cada espacio del producto es completamente regular (resp. Tychonoff).
2. Inmersiones.

   Los espacios de Tychonoff son precisamente aquellos espacios que pueden encajarse en espacios de Hausdorff compactos. De forma más precisa, para todo espacio de Tychonoff X, existe un espacio de Hausdorff compacto K tal que X es homeomorfo a un subespacio de K.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "i_X"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, dashed, "\beta f"] \\
& K
\end{tikzcd}
$$

Figura 4: Compactificación de Stone-Čech

3. Compactificaciones.

   Son de particular interés aquellas inmersiones en las que la imagen de X es densa en K; estas se denominan compactificaciones de Hausdorff de X. Dado cualquier inmersión de un espacio de Tychonoff X en un espacio de Hausdorff compacto K la clausura de la imagen de X en K es una compactificación de X.

   Entre estas compactificaciones de Hausdorff, existe una única «más general», la compactificación de Stone-Čech βX. Dado un espacio topológico X, la compactificación de Stone-Čech es un espacio compacto de Hausdorff βX junto con una función continua i_x:$X \longrightarrow \beta X$.

   Está caracterizada por la propiedad universal de que, dada una aplicación continua $f : X \longrightarrow K$ con K compacto y Hausdorff, existe una única aplicación continua βX:$\beta X \longrightarrow K$. En la Figura 4 se muestra el mapa de aplicaciones.

7. Espacios normales

7.1. Definición

Antes de definir los axiomas T_4, T_5 y T_6, tenemos que dar una serie de definiciones sobre espacios topológicos.

Definición 7.1.1 *Un espacio topológico (X, τ) es un espacio normal si para cualquier par de subconjuntos cerrados disjuntos existen entornos que también son disjuntos. Es decir, $\forall A, B \subset X$, con A, B cerrados en τ, $A \cap B = \emptyset$, $\exists\ U \in \varepsilon(A), V \in \varepsilon(B)$, con $A \cap B = \emptyset$.*

Definición 7.1.2 *Diremos que un espacio topológico (X, τ) es T_4, o normal Hausdorff, si es T_1 y normal, que es equivalente a que sea normal y T_2 (Hausdorff).*

Definición 7.1.3 *Un espacio topológico (X, τ) se dice que es un espacio completamente normal, o normal hereditario, si para cualquier subespacio topológico (Y, τ_Y) (con $Y \subset X$, siendo τ_Y la topología inducida en Y) se tiene que (Y, τ_Y) es un espacio normal.*

Es fácil ver que (X, τ) es completamente normal si y solo si para todo par de subconjuntos disjuntos de pueden separar por entornos. Además, también se tiene que (X, τ) es completamente normal si y solo si cada $U \in \tau$ cumple que (U, τ_U) es normal.

Definición 7.1.4 *Un espacio T_5, o completamente T_4 (completamente normal Hausdorff), es un espacio topológico (X, τ) completamente normal que satisface T_1,*

La propia definición implica que X es Hausdorff. Esto es equivalente a decir que cualquier subespacio debe ser T_4.

Definición 7.1.5 *Un espacio perfectamente normal es un espacio topológico (X, τ) en el que cualesquiera cerrados $E, F \subset X$ se pueden separar precisamente por una función, es decir, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$, con $f^{-1}(0) = E$ y $f^{-1}(1) = F$.*

Equivalentemente, diremos que (X, τ) es completamente normal si y solo si es normal y cada conjunto cerrado se puede expresar como intersección numerable de conjuntos abiertos. También es equivalente a que todo conjunto cerrado sea preimagen del 0 por f.

Definición 7.1.6 *Se dice que (X, τ) verifica T_6, o perfectamente T_4 (perfectamente normal Hausdorff) si es un espacio perfectamente normal y Hausdorff.*

Aunque no lo utilizaremos en este trabajo, cabe destacar la existencia de espacios localmente normales, en los cuales cada punto tiene un entorno que es normal.

7.2. Propiedades

A continuación comentaremos algunas de las propiedades de estos espacios que acabamos de definir.

1. Cualquier subconjunto cerrado de un espacio normal es normal. La imagen continua y cerrada de un espacio normal es normal.

2. Lema de Urysohn. *Un espacio topológico (X, τ) es normal si $\forall A, B \subset X$ disjuntos y cerrados se pueden separar por una función continua.*

3. De forma más general, comentamos el Teorema de Extensión de Tietze: *Si $A \subset X$ es cerrado y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $\exists F : X \to \mathbb{R}$ que extiende f en el sentido de que $F(x) = f(x) \forall x \in A$.*

4. Por otro lado, si U es un recubrimiento abierto de un espacio normal X, entonces $\exists$ una partición de unidad precisamente subordinada a U. En realidad, cualquier espacio topológico que satisfaga alguna de estas propiedades debe ser normal. Sin embargo, hay algunas propiedades curiosas. Por ejemplo:

   - Sorgenfrey descubrió que el producto de espacios normales no tiene por qué ser normal, como el plano de Sorgenfrey, que consiste en el producto de 2 rectas reales bajo la topología de los intervalos semiabiertos.

   - Tampoco los subconjuntos de espacios normales dben ser normales, es decir, no todo espacio normal Hausdorff es completamente normal Hausdorff.

   Podemos mencionar también algunos teoremas relacionados:

5. *Si X es un espacio topológico T_1, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*
   1. Todo subespacio de X es normal.
   2. Todo subespacio abierto de X es normal.
   3. Si $A, B \subset X$ cumplen $A \cap B = \emptyset$, entonces existen abiertos disjuntos U y V en X tales que $A \subset U, B \subset V$.

Una vez ya definidos todos los tipos de espacios, podemos ver de una forma más general cómo podemos clasificarlos:

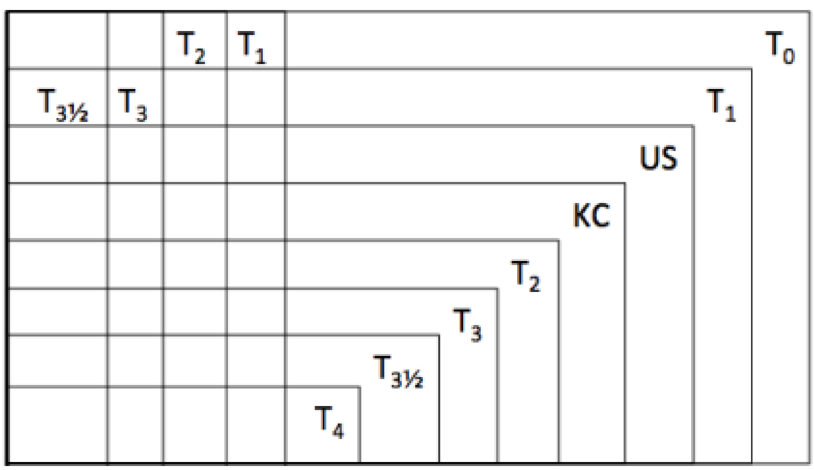

Figura 5: Diagrama de clasificación de espacios topológicos

En el diagrama anterior podemos ver que no están incluidos ni los espacios T_5 ni T_6. Estos están implícitamente dentro de los espacios T4

7.3. Relación entre los axiomas de separación

Algunas de las relaciones entre los axiomas de separación que acabamos de ver y los que hablamos previamente ya se han expuesto, puesto que así mismo se definen T_4, T_5 y T_6. Hablaremos ahora de algunos de los más relevantes.

Si un espacio normal es T_1, entonces es completamente regular.

De este modo, cualquier espacio desde *normal T_1* hasta *normal completamente regular* es lo que usualmente llamamos *regular normal.*

Los espacios normales Hausdorff son todos los espacios normales T_1, que son Tychonoff.

Consideramos importante también añadir alguna definición relacionada una vez ya hemos mencionado algunas propiedades:

Definición 7.3.1 *Se dice que un espacio topológico* (X, τ) *es pseudonormal si dados* $A, B \subset X$ *cerrados, con* $A \cap B = \emptyset$*, siendo* A *contable, entonces hay conjuntos disjuntos abiertos que los contienen.*

Con esta definición es fácil ver que todo espacio normal es pseudonormal, pero el recíproco no siempre es cierto.

7.4. Ejemplos de espacios

Algunos de los ejemplos triviales de espacios perfectamente Hausdorff son los espacios métricos. Los espacios pseudométricos son perfectamente normales regulares, pero no son Hausdorff en general.

Los espacios compactos Hausdorff son normales.

También se tiene que todas las topologías del orden y los conjuntos totalmente ordenados son normales Hausdorff.

En cambio, un ejemplo famoso de una topología que no es normal es la topología de Zariski en variedades algebraicas en el espectro de un anillo, que se usa en geometría algebraica.

8. Bibliografía

Referencias

[1] Conceptos de espacios regulares. **Aquí**

[2] Distinción que hacen algunos autores con espacios regulares y T_3. **Aquí**

[3] Otra definición de espacio regular acorde con otros autores. **Aquí**

[4] Ejemplo de espacio no regular. **Aquí**

[5] Libro de Carlos Ivorra Castillo. **Aquí**

[6] Conceptos de espacios completamente regulares y Tychonoff. **Aquí**

[7] Compactificación de Stone-Čech. **Aquí**

[8] Ejemplo Hausdorff pero no completamente Hausdorff. **Aquí**

[9] Espacios Hausdorff. **Aquí**

[10] Contraejemplos en los axiomas de separación. **Aquí**