**ANN201**

# Rapport de TP n°1

Pierre Gardair, Antoine Germain

9 octobre 2023

# Table des matières


**1 Discrétisation** **3**

1.1 Formulation variationelle . . . 3

1.2 Formulation variationelle discrète . . . 3

**2 Visualisation du Maillage** **3**

**3 Matrices élémentaires** **4**

3.1 Matrices K et M . . . 4

3.1.1 Mel . . . 4

3.1.2 Kel . . . 4

3.2 Assemblage de M et K . . . 4

**4 Second membre : f=1** **5**

**5 Erreur des normes** **6**

**6 Résolution numérique avec le même f que précédemment** **7**

# 1 Discrétisation

## 1.1 Formulation variationelle

Soit $v \in H^1(\Omega)$. On a $\Delta u = u - f \in H^1(\Omega)$, donc on supposera $u \in H^2(\Omega)$. On en déduit alors :

$$\int_\Omega (uv - \Delta uv) d\Omega = \int_\Omega fv d\Omega.$$

Par la formule de Green, on obtient donc :

$$\int_\Omega uv d\Omega + \int_\Omega \Delta u \Delta v d\Omega = \int_\Omega fv d\Omega.$$

D'où la formulation variationelle (FV) :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega), \forall v \in^1 (\Omega), a(u,v) = l(v).$$

Avec :

$$a(u,v) = \int_\Omega uv d\Omega + \int_\Omega \Delta u \Delta v d\Omega \text{ et } l(v) = \int_\Omega fv d\Omega.$$

L'application du théorème de Lax-Milgram nous permet de justifier du caractère bien posé de cette formulation.

## 1.2 Formulation variationelle discrète

Soit $N$ le nombre de sommets du domaine. Soit $(w_i)_{i=1,...,N}$ la base de $V_h$. Alors en utilisant (FV) discrétisé et la bilinéarité de de a, on a :

$$\forall i \in 1,...,N, \sum_{j=1}^{N} u_j a(v_j, w_i) = l(w_i).$$

On peut réécrire ce système de manière équivalente sous forme matricielle :

$$AU = L, A \in M^N(\mathbf{R}, L \in \mathbf{R}^N, A_{i,j} = a(w_j, w_i), L_i = l(w_i).$$

En décomposant sur chaque domaine $\Omega_k$, on a :

$$A_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} (\int_{\Omega_k} w_j w_i \mathrm{d}\Omega_k + \int_{\Omega_k} \nabla w_j \nabla w_i \Omega_\mathrm{k}) \text{ et } L_i = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega_k} f w_i \mathrm{d}\Omega_k.$$

# 2 Visualisation du Maillage

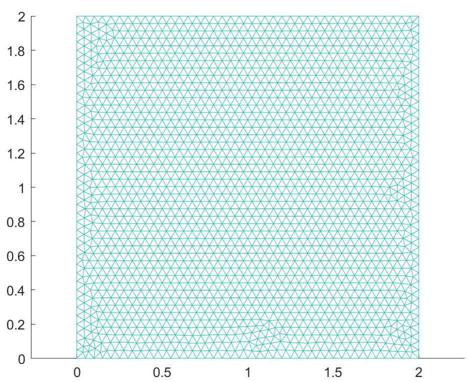


FIGURE 1 – Maillage pour h=0.05

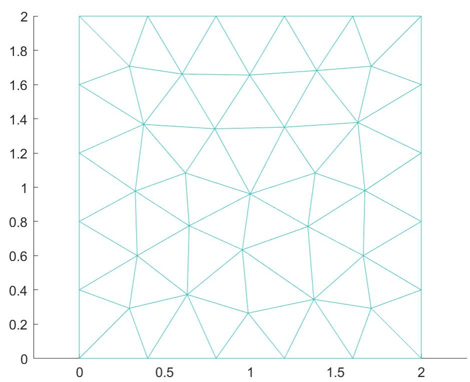


FIGURE 2 – Maillage pour h=0.4

| Indexe | Définition | Format |
|---|---|---|
| Nbpt | Nombre de points dans le maillage (espace discrétisé) | 1*1 |
| Nbtri | Nombre de triangles dans l'espace discrétisé | 1*1 |
| Coorneu | Coordonnées des noeuds (sommets des triangles que contient le maillage) | N*2 |
| Refneu | Présence du noeud au bord ou non (0 ou 1) | N*1 |
| Numtri | Tableau de composition des triangles (la ligne i indique le numéro du triangle et les 3 colonnes le nom des sommets) | Nbtri*3 |
| Nbaretes | Nombre d'arêtes que contient le maillage | 1*1 |
| Numaretes | Numéro des arêtes de l'espace discrétisé | Nbaretes*2 |
| Refaretes | présence de l'arête sur un bord ou non (0 ou 1) | Nbaretes*1 |

# 3 Matrices élémentaires

## 3.1 Matrices K et M

### 3.1.1 Mel

Nous utilisons la formule de l'énoncé :

$$\int_{T'} \frac{\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\lambda_3^{k_3}}{k_1!k_2!k_3!}\,d\Omega = 2\frac{k_1!k_2!k_3!}{(k_1+k_2+k_3+2)!}\text{aire}(T').$$

On observe que $(k_1+k_2+k_3+2)! = 4! = 24$ dans notre contexte.

Par ailleurs, $k_1!k_2!k_3! = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 2 & \text{si } i = j. \end{cases}$

On déduit donc :

$$M_{i,j} = \begin{cases} |D|/24 & \text{si } i \neq j \\ |D|/12 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

### 3.1.2 Kel

On calcule tout d'abord le gradient des $\lambda$ :

$$\begin{cases} \nabla\lambda_1 = \dfrac{1}{D}(y_{23}x - x_{23}y) \\ \nabla\lambda_2 = \dfrac{1}{D}(y_{31}x - x_{31}y) \\ \nabla\lambda_3 = \dfrac{1}{D}(y_{12}x - x_{12}y). \end{cases}$$

En utilisant les constantes "norm" proposées dans l'énoncé on obtient :

$$Kel(i,j) = (norm(i,1)*norm(j,1)+norm(i,2)*norm(j,2))/(0.5*abs(D)). \quad (1)$$

## 3.2 Assemblage de M et K

L'algorithme d'assemblage est proposé en énoncé.

On va additionner les poids de chaque sommets en itérant sur les triangles qui composent l'espace discrétisé.

## 4 Second membre : f=1

$$f = \sum_{i=1}^{N} f_i w_i$$

On déduit l'expression des $L_i$ :

$$\begin{aligned} L_i &= \int_\Omega f w_i d\Omega \\ &= \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} f_j w_j w_i d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^{N} f_j \int_\Omega w_j w_i d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^{N} f_j M_{i,j}. \end{aligned}$$

On déduit donc $L = Mf$.
Le calcul est identique pour $f \in C^0(\Omega)$ en utilisant son interpolation.

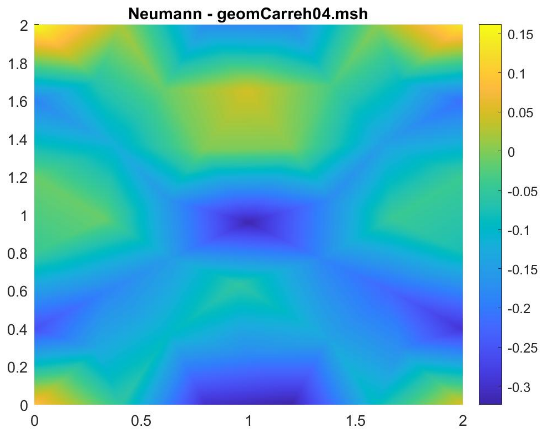


FIGURE 3 – Visualisation graphique (h= 0,4)

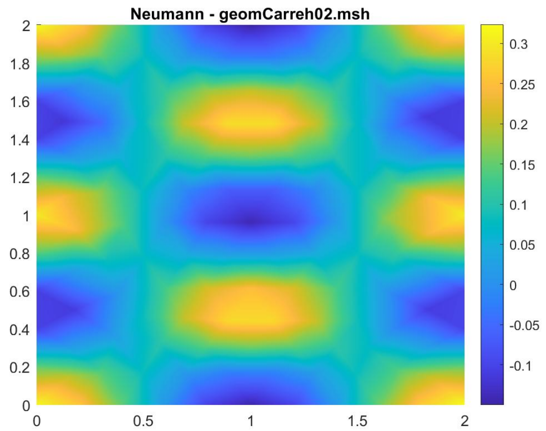


FIGURE 4 – Visualisation graphique (h= 0,2)

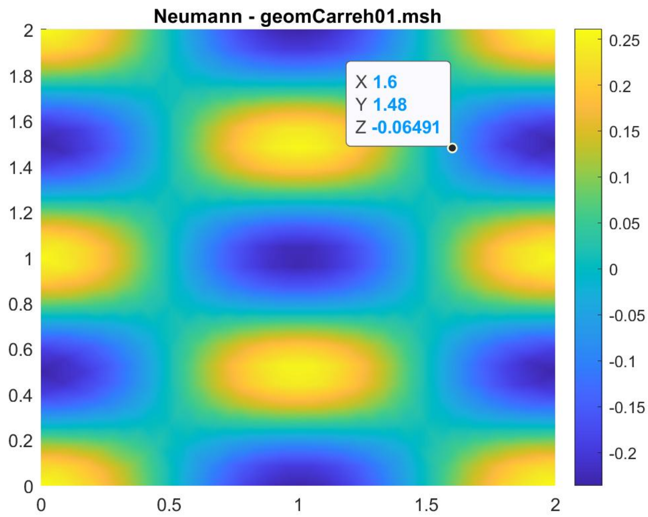


FIGURE 5 – Visualisation graphique (h= 0,1)

# 5 Erreur des normes

$$f = u - \Delta u$$
$$f = \cos(\pi x)\cos(2\pi y)(1+5\pi^2)$$

Comme nous le propose l'énoncé, on peut assimiler u à son interpolation $\pi u_h$

$$\begin{aligned}
||u-u_h||^2_{L^2(\Omega)} &= ||\pi u_h - u_h||^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega (u-u_h)^2 d\Omega \\
&= \int_\Omega (\sum_{i=1}^N u(S_i)w_i - \sum_{i=1}^N u_i w_i)^2 d\Omega \\
&= \int_\Omega (\sum_{i=1}^N ((u(S_i)-u_i)w_i))^2 d\Omega \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^N (u(S_i)-u_i)w_i \sum_{j=1}^N (u(S_j)-u_j)w_j d\Omega \\
&= \sum_{i,j=1}^N (u(S_i)-u_i)(u(S_j)-u_j)\int_\Omega w_i w_j d\Omega
\end{aligned}$$

$$||u-u_h||^2_{L^2(\Omega)} = (U-U_h)^T M(U-U_h).$$

On calcule de même $||\nabla u - \nabla u_h||^2_{L^2(\Omega)}$ :

$$||\nabla u - \nabla u_h||^2_{L^2(\Omega)} = (U-U_h)^T K(U-U_h).$$

On calcule les valeurs de $\log\left(\frac{1}{h}\right)$, de $\log\left(\frac{||u-u_h||_{L^2(\Omega)}}{||u||_{L^2(\Omega)}}\right)$, et de $\log\left(\frac{|u-u_h|_{H^1(\Omega)}}{|u|_{H^1(\Omega)}}\right)$ pour 4 valeurs de $h$ et on obtient le graphe qui suit :

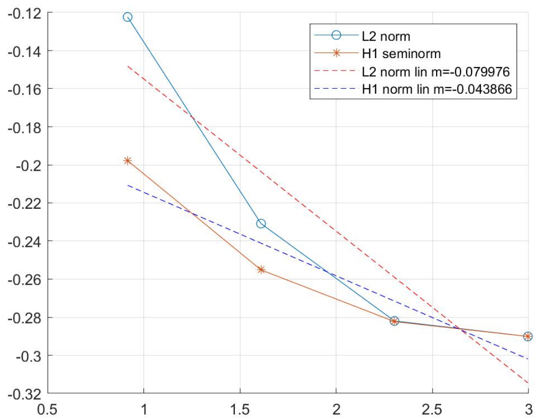


FIGURE 6 – Visualisation graphique des erreurs (h= 0,4 ; 0,2 ; 0,1 ; 0.05)

# 6 Résolution numérique avec le même f que précédemment

Après avoir modifié le code de façon à intégrer la fonction $f$ dans l'application numérique, on obtient :

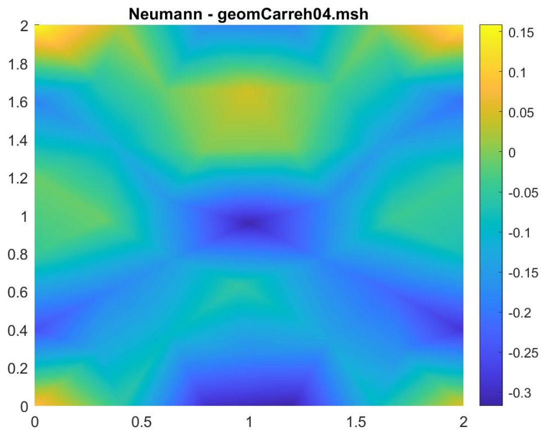


FIGURE 7 – Visualisation graphique (h= 0,4)

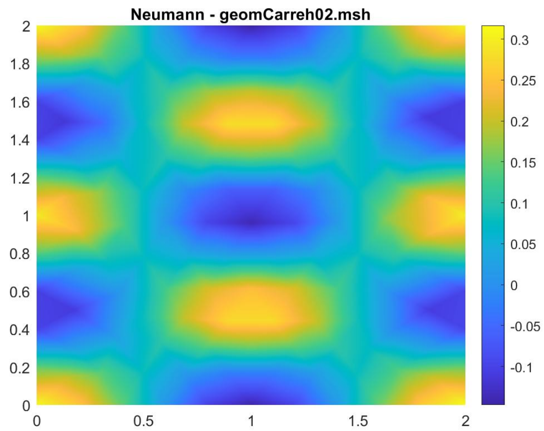


FIGURE 8 – Visualisation graphique (h= 0,2)

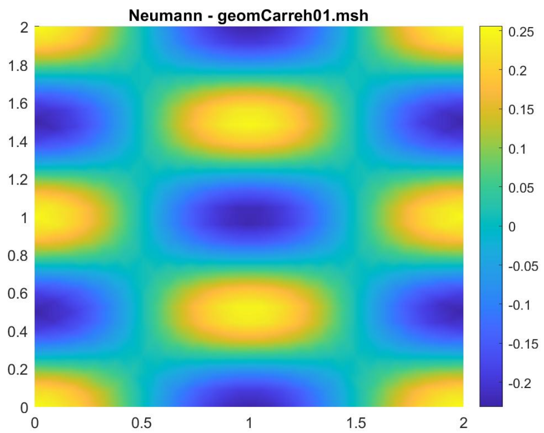


FIGURE 9 – Visualisation graphique (h= 0,1)

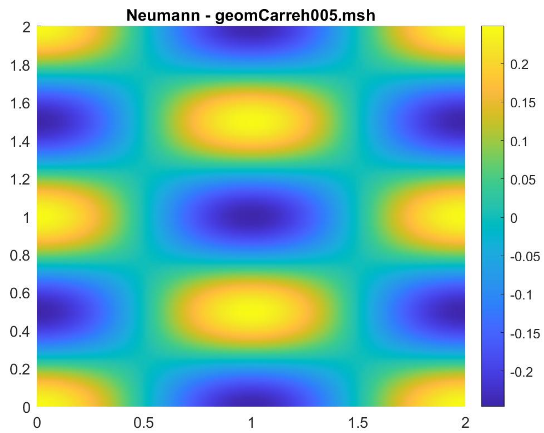


FIGURE 10 – Visualisation graphique (h= 0,05)

On constate bien que la précision augmente avec la diminution du pas $h$. Un autre moyen d'améliorer cette précision serait de travailler dans $P^k$ avec $k \geq 2$.