

ANN201

Rapport de TP n°2 - STOKES

Pierre GARDAIR, Antoine GERMAIN

2 novembre 2023

Table des matières

1	Contexte	3
2	Exercice 1 : Éléments finis P^2 pour le problème de Poisson avec condition de Neumann	3
2.1	Introduction	3
2.2	Formulation variationnelle	3
2.2.1	Formulation variationnelle simple	3
2.2.2	Formulation variationnelle discrète	4
2.3	Affichage du maillage	5
2.4	Transformation	5
2.5	coordonnées	6
2.6	Simplification des intégrales	7
2.7	Visualisation graphique	8
2.8	Application à la fonction $u(x,y) = \cos(\pi x) * \cos(2\pi y)$	9
2.9	Estimation de l'erreur et représentation	10
3	Exercice 2 : Éléments finis P^2 pour le problème de Poisson avec condition de Dirichlet	12
3.1	Introduction	12
3.2	Discrétisation de la formulation variationnelle	12
3.3	Pseudo-élimination	13
3.4	Visualisation	14
3.5	Validation	14
3.6	Conditions de Dirichlet non homogènes	16
3.7	Visualisation graphique	17
4	Exercice 3 : Équations de Stokes	18
4.1	Formulation variationnelle	18
4.2	Visualisation	20
4.3	Analyse de la matrice du système d'équations	20
4.4	Validation	21
4.5	Visualisation graphique	22
4.6	Visualisation du modèle	23

1 Contexte

On s'intéresse dans ce TP à l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible et stationnaire dans un canal bidimensionnel, en régime à faible nombre de Reynolds.

Ce problème est modélisé par les équations de Stokes suivantes :

Équation de l'équilibre des fluides :

$$(1) \quad -\nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \text{dans } \Omega.$$

Car à faible nombre de Reynolds le phénomène de convection peut être négligé.

Équation de conservation de la masse (incompressibilité) :

$$(2) \quad \operatorname{div} u = 0, \quad \text{dans } \Omega.$$

2 Exercice 1 : Éléments finis P^2 pour le problème de Poisson avec condition de Neumann

2.1 Introduction

Dans la suite de l'exercice nous noterons Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 à frontière polygonale et nous prendrons $f \in L^2(\Omega)$. Le problème que nous étudierons est identique à celui du TP1 :

$$(3) \quad \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \begin{cases} u - \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2.2 Formulation variationnelle

2.2.1 Formulation variationnelle simple

Soit $v \in H^1(\Omega)$. On a d'après (3) $\Delta u = u - f \in H^1(\Omega)$, donc on supposera $u \in H^2(\Omega)$.

On en déduit alors :

$$\int_{\Omega} (uv - \Delta u v) d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega.$$

Par la formule de Green (applicable car $v \in H^1(\Omega)$ et $u \in H^2(\Omega)$), on obtient donc :

$$\int_{\Omega} u v d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega.$$

D'où la formulation variationnelle (FV) :

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), a(u, v) = l(v).$$

Avec :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} u v d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega \text{ et } l(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega.$$

On peut montrer, comme dans le TP1, que :

- $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
- $a(u, v)$ est une forme bilinéaire, continue et coercive sur $H^1(\Omega)$.
- $l(v)$ est une forme linéaire, continue sur $H^1(\Omega)$.

L'application du théorème de Lax-Milgram nous permet alors, sous ces conditions démontrées en TP1, de justifier du caractère bien posé de cette formulation.

La réciproque a aussi été faite dans le TP1. Il s'agit de la même formulation variationnelle.

2.2.2 Formulation variationnelle discrète

Afin de passer à la formulation variationnelle discrète il est nécessaire de discrétiser l'espace. Nous posons alors T_h une triangulation du domaine Ω et $(T_l)_{l \in \llbracket 1, L \rrbracket}$ une collection de triangles de T_h . Nous considérons V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^2 (ensemble des polynômes de degré au plus 2) associés à la triangulation T_h :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\Omega), v_h|_{T_l} \in P^2 \forall l = 1, \dots, L\},$$

Par ailleurs, Les fonctions de base sont associées aux sommets des triangles T_l et aux milieux des arêtes. On note donc $(M_I)_{I \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ les nœuds du maillage (qui incluent les sommets et les milieux des arêtes) et $(w_I)_{I \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ la base de V_h définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$.

On peut écrire en premier lieu la formulation suivante :

$$(4) \quad \text{Trouver } u_h \in V_h, \forall v \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h).$$

Avec :

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} u_h v_h d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h d\Omega. \\ l(v_h) = \int_{\Omega} f v_h d\Omega. \end{cases}$$

U_h peut se décomposer dans la base des $(w_I)_{I \in \llbracket 1, N \rrbracket}$. On peut donc poser $u_h = \sum_{i=1}^N u_h^i w_i$. En remplaçant u_h par leurs expressions dans la formulation variationnelle (4) on peut isoler une équation matricielle.

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\},$$

$$\begin{aligned} a(u_h, w_i) = l(w_i) &\Rightarrow a\left(\sum_{j=1}^N u_h^j w_j, w_i\right) = l(w_i), \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^N u_h^j a(w_j, w_i) = l(w_i), \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^N u_h^j \left(\int_{\Omega} w_i w_j d\Omega + \int_{\Omega} \nabla w_i \nabla w_j d\Omega \right) = l(w_i). \end{aligned}$$

En Posant

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

$$\mathbb{M}_{i,j} = \int_{\Omega} w_i w_j d\Omega,$$

et

$$\mathbb{K}_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla w_i \nabla w_j d\Omega,$$

et

$$\mathbb{L}_i = \int_{\Omega} f w_i d\Omega,$$

et

$$U_i = u_h^i.$$

On peut écrire le système :

$$(5) \quad (\mathbb{M} + \mathbb{K})U = \mathbb{L}$$

2.3 Affichage du maillage

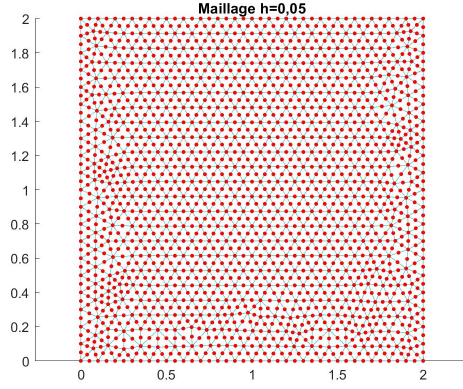


FIGURE 1 – Maillage pour h=0.1

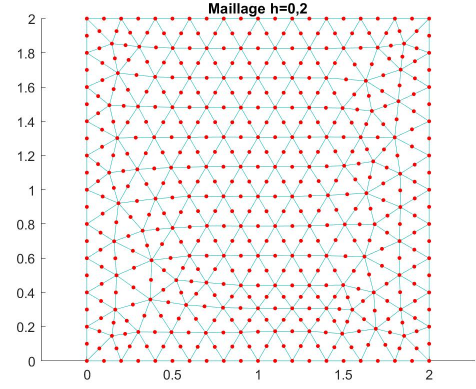


FIGURE 2 – Maillage pour h=0.2

Les points rouges représentent les sommets considérés pour le choix de nos bases locales. On voit bien qu'il y a 1 à chaque intersections d'arêtes et 1 au milieu de chaque arête.

2.4 Transformation

$$\forall \widehat{M} \in \mathbb{R}^2, \quad B_l \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}), \quad S_l \in \mathbb{R}^2,$$

$F_l(\widehat{M}) = B_l \widehat{M} + \widehat{S}_l$ est la fonction permettant de passer du triangle de référence \widehat{T} au triangle T_l initial Cette équation doit vérifier les contraintes :

- $F_l(\widehat{M}_1) = M_1$ soit $(0, 0)$ devient (x_1, y_1) ,
- $F_l(\widehat{M}_2) = M_2$ soit $(1, 0)$ devient (x_2, y_2) ,
- $F_l(\widehat{M}_3) = M_3$ soit $(0, 1)$ devient (x_3, y_3) .

En utilisant le fait que B_l et S_l sont constantes (donc $B_l = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $S_l = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$),

On déduit le système d'équations :

$$F_l(\widehat{M}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * M + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Pour le résoudre, on utilise les 3 cas connus (correspondants aux sommets) Ainsi, en utilisant le fait que la base du triangle de référence est formée par les sommets

$$\widehat{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \widehat{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \widehat{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ce qui nous permet d'obtenir le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_l(\widehat{M}_1) = M_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \\ F_l(\widehat{M}_2) = M_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \\ F_l(\widehat{M}_3) = M_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}. \end{array} \right.$$

On isole simplement les variables inconnues et on trouve finalement que la fonction F_l est décrite par :

$$F_l(\widehat{M}) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} * M + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

2.5 coordonnées

De façon générale, le TP1 proposait une expression des coordonnées barycentriques en fonction de la surface du triangle ($\frac{|D|}{2}$). Nous obtenions les expressions de λ suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\lambda}_1(x, y) = \frac{1}{D} * ((y_2 - y_3)(x - x_3) - (x_2 - x_3)(y - y_3)), \\ \widehat{\lambda}_2(x, y) = \frac{1}{D} * ((y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)), \\ \widehat{\lambda}_3(x, y) = \frac{1}{D} * ((y_1 - y_2)(x - x_2) - (x_1 - x_2)(y - y_2)). \end{array} \right.$$

Or ici,

$$y_1 = x_1 = y_2 = x_3 = 0 \text{ et } x_2 = y_3 = 1.$$

Ainsi,

$$D = (x_2 - x_3)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_3) = 1 * 1 - 0 * (-1) = 1.$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\lambda}_1(x, y) = 1 - x - y, \\ \widehat{\lambda}_2(x, y) = x, \\ \widehat{\lambda}_3(x, y) = y. \end{array} \right.$$

2.6 Simplification des intégrales

les matrices \mathbb{M}_l et \mathbb{K}_l sont de taille 6x6 car chaque triangle (base locale) est composée de 3 sommets et 3 mi-sommets (donc 6 "sommets").

Afin de compléter l'algorithme de la routine **matM elem p2.m**, il faut connaître les valeurs de \widehat{w}_i pour i allant de 1 à 6.

Les expressions des w_i sont données connues :

- $\widehat{w}_1 = \widehat{\lambda}_1(2\widehat{\lambda}_1 - 1)$,
- $\widehat{w}_2 = \widehat{\lambda}_2(2\widehat{\lambda}_2 - 1)$,
- $\widehat{w}_3 = \widehat{\lambda}_3(2\widehat{\lambda}_3 - 1)$,
- $\widehat{w}_4 = 4\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2$,
- $\widehat{w}_5 = 4\widehat{\lambda}_2\widehat{\lambda}_3$,
- $\widehat{w}_6 = 4\widehat{\lambda}_3\widehat{\lambda}_1$.

Or nous connaissons l'expression des $\widehat{\lambda}_i$. Nous pouvons les remplacer par leur valeur connue.

- $\widehat{w}_1 = (-x - y + 1)(-2x - 2y + 1)$,
- $\widehat{w}_2 = x(2x - 1)$,
- $\widehat{w}_3 = y(2y - 1)$,
- $\widehat{w}_4 = 4(1 - x - y)x$,
- $\widehat{w}_5 = 4xy$,
- $\widehat{w}_6 = 4y(-x - y + 1)$.

La formule de quadrature à 6 points donnée dans l'énoncé nous permet d'effectuer l'approximation suivante :

$$(6) \quad \int_{\widehat{T}} \widehat{w}_i(\widehat{M}) \widehat{w}_j(\widehat{M}) |\det B_l| d\Omega \approx \sum_{q=1}^6 \widehat{c}_q \widehat{w}_i(\widehat{S}_q) \widehat{w}_j(\widehat{S}_q) |\det B_l|.$$

Une méthode identique nous permettra de compléter la routine **matK elem p2.m** à partir des gradients des \widehat{w}_i :

- $\nabla \widehat{w}_1 = (4x + 4y - 3, 4x + 4y - 3)$,
- $\nabla \widehat{w}_2 = (4x - 1, 0)$,
- $\nabla \widehat{w}_3 = (0, 4y - 1)$,
- $\nabla \widehat{w}_4 = (-8x - 4y + 4, -4x)$,
- $\nabla \widehat{w}_5 = (4y, 4x)$,
- $\nabla \widehat{w}_6 = (-4y, -4x - 8y + 4)$.

2.7 Visualisation graphique

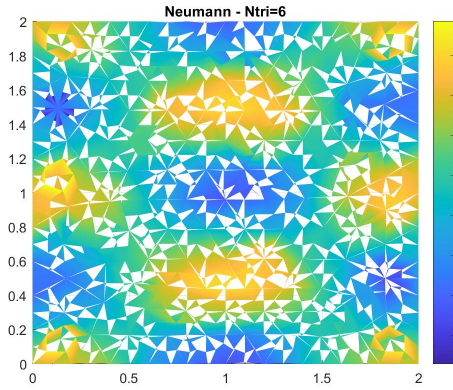


FIGURE 3 – Solution approchée, $h = 0.2$

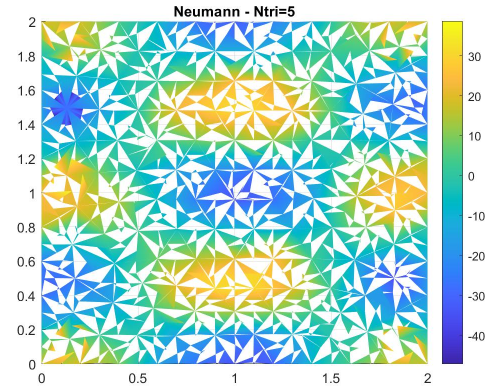


FIGURE 4 – Solution approchée, $h = 0.2$

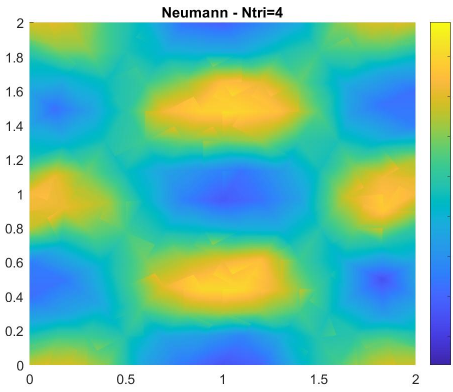


FIGURE 5 – Solution approchée, $h = 0.2$

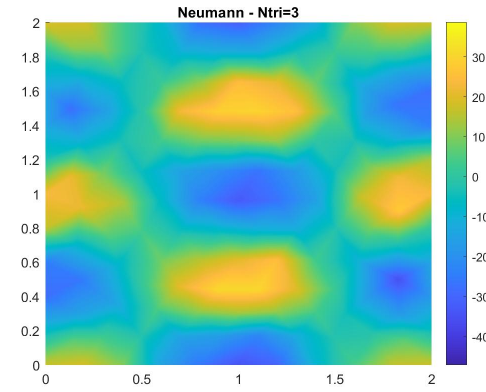


FIGURE 6 – Solution approchée, $h = 0.2$

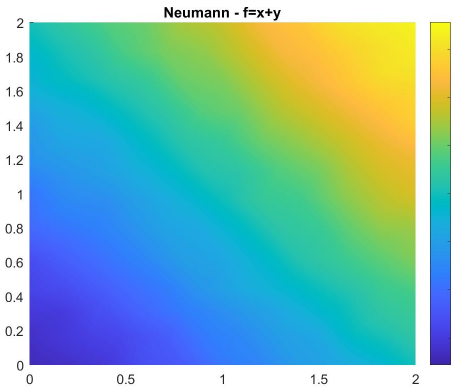


FIGURE 7 – Solution approchée, $h = 0.2$

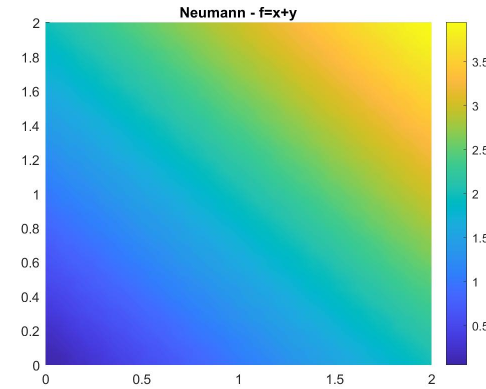


FIGURE 8 – Solution approchée, $h = 0.05$

Dans les 4 premières figure nous avons décidé de faire varier le nombre de triangle pris en compte dans l'affichage (la modification a été effectuée dans la routine **affichemaillageordre2.m**).

Par ailleurs, les fonctions utilisées sont :

$f(x,y)=(1+5\pi^2)*\cos(\pi*x)*\cos(2*\pi*y)$ pour les 4 premières images.

$f(x,y)=x+y$ pour les 2 suivantes.

2.8 Application à la fonction $u(x,y) = \cos(\pi x) \cdot \cos(2\pi y)$

On se place dans le cas où $(x, y) \in \overline{\Omega} = [0, 2] \times [0, 2]$.

On calcule aisément :

$$\nabla u(x, y) = (-\pi \sin(\pi x) \cos(2\pi y), -2\pi \cos(\pi x) \sin(2\pi y)).$$

Nous souhaitons vérifier que u vérifie bien les conditions au bord du problème afin de pouvoir l'étudier à partir de la méthode précédente.

Frontière de gauche :

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = \nabla u \cdot (-1, 0) = \pi \sin(\pi x) \cos(2\pi y) = 0 \text{ car } x = 0.$$

Frontière du dessus :

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = \nabla u \cdot (0, 1) = -2\pi \cos(\pi x) \sin(2\pi y) = 0 \text{ car } y = 2.$$

Frontière de droite :

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = \nabla u \cdot (1, 0) = -\pi \sin(\pi x) \cos(2\pi y) = 0 \text{ car } x = 2.$$

Frontière du dessous :

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = \nabla u \cdot (0, -1) = 2\pi \cos(\pi x) \sin(2\pi y) = 0 \text{ car } y = 0.$$

Les conditions au bord sont bien respectées.

D'après la première formulation, f se calcule en fonction de u et de son laplacien.

$$f = u - \Delta u \text{ avec } \Delta u = -5\pi^2 \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$$

On déduit immédiatement f :

$$f = (1 + 5\pi^2) \cos(\pi x) \cos(2\pi y).$$

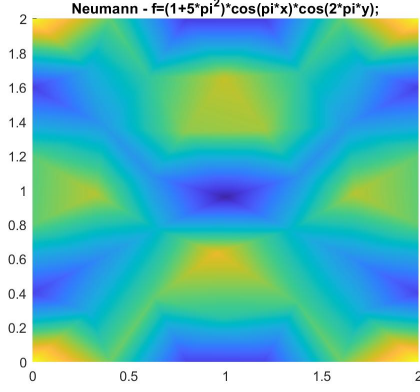


FIGURE 9 – Solution approchée, $h = 0.2$

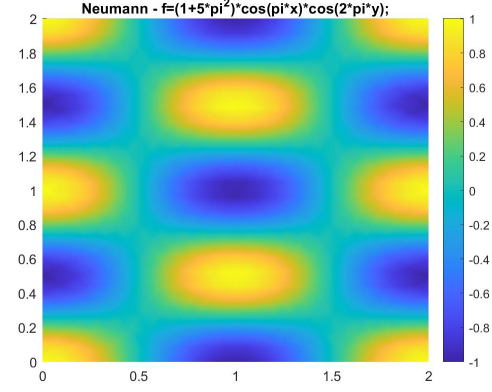


FIGURE 11 – Solution approchée, $h = 0.1$

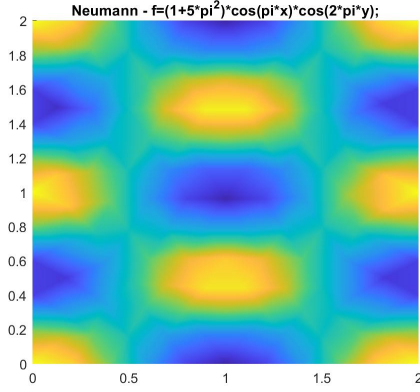


FIGURE 10 – Solution approchée, $h = 0.05$

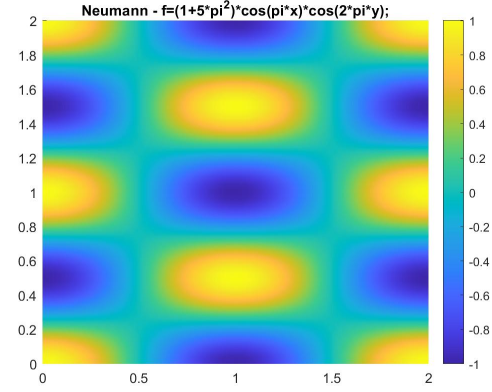


FIGURE 12 – Solution approchée, $h = 0.05$

On observe bien que la précision de l'approximation augmente avec l'inverse du pas du maillage ce qui est cohérent. Par ailleurs, en vérifiant sur certains cas limites nous pouvons valider les résultats :

- Les résultats sont bien compris entre -1 et 1.
- en (1, 1) on atteint un minimum (-1).
- en (0,0) on atteint un maximum (1).

2.9 Estimation de l'erreur et représentation

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\approx \|\pi_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}, \\
 &= \int_{\Omega} |\pi_h u - u_h|^2 d\Omega, \\
 &= \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^N (u(S_i) - u_h(S_i)) w_i \right|^2 d\Omega, \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (u(S_i) - u_h(S_i)) (u(S_j) - u_h(S_j)) \int_{\Omega} w_i w_j d\Omega, \\
 &= \sqrt{(U_{\text{ex}} - U)^T \mathbb{M} (U_{\text{ex}} - U)}.
 \end{aligned}$$

De façon similaire, on peut calculer la norme 1 de $u - u_h$:

$$|u - u_h|_1^2 = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = (U - U_h)^T \mathbb{K} (U - U_h).$$

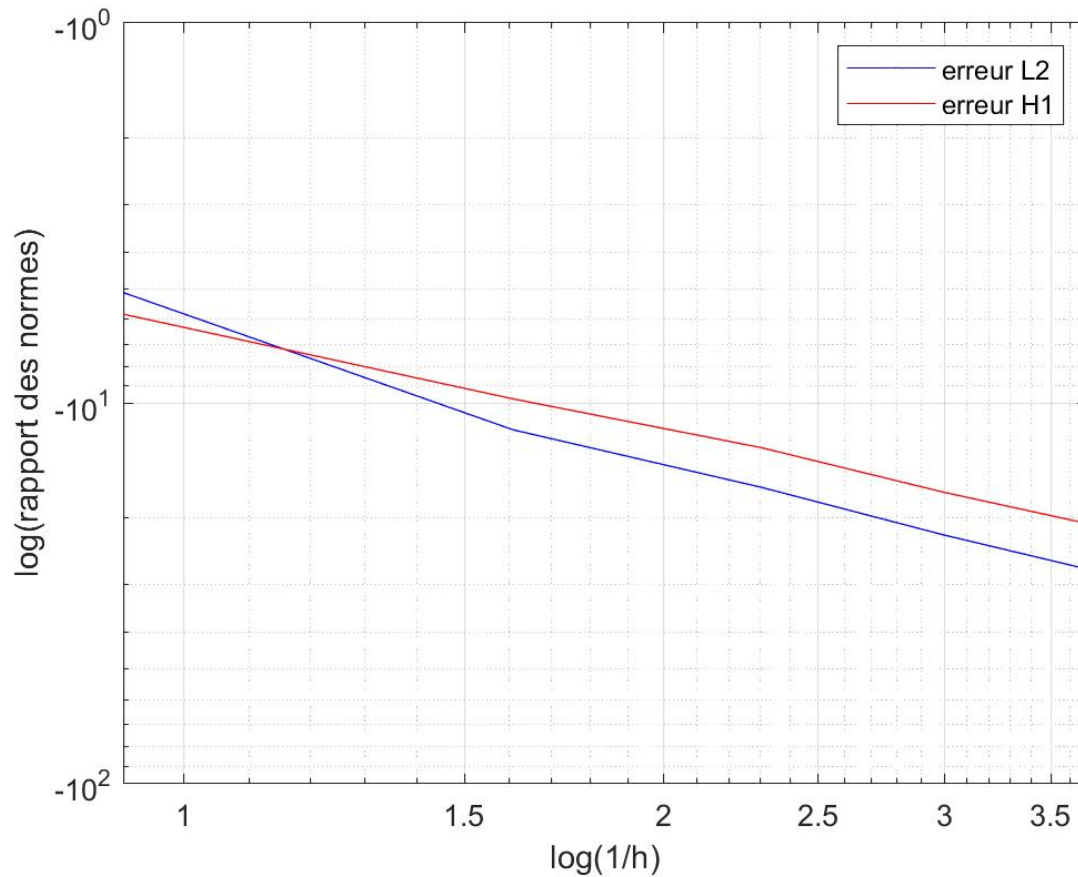


FIGURE 13 – Affichage de l'erreur

Nous ne nous attendions pas à cette courbe lorsque nous l'avons tracé. Nous espérions une séparation concrète des erreurs H1 et L2 ce qui n'est pas le cas (par exemple en 1.15). Cependant, les courbes ont bien une expression linéaire en log.

Les ordres obtenues sont $O(h^4)$ pour l'erreur L2 et $O(h^3)$ pour l'erreur H1. Dans le TP1 nous avions une erreur L2 en $O(h)$ et une erreur H1 en $O(h^2)$. L'amélioration du modèle est donc significative.

3 Exercice 2 : Éléments finis P^2 pour le problème de Poisson avec condition de Dirichlet

3.1 Introduction

Nous considérons maintenant un problème de Poisson avec une condition au bord de Dirichlet homogène :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$(7) \quad \begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega. \\ u=0 & \text{dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous avons vu dans le cours que la formulation variationnelle du problème (7) s'écrit :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\int_{\Omega} u v d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

et qu'elle est bien posée.

3.2 Discrétisation de la formulation variationnelle

Nous reprenons les notations de la section précédente. Pour définir une approximation interne P^2 de $H_0^1(\Omega)$, on procède de la façon suivante : si on suppose que les noeuds (sommets et milieux) de la frontière $\partial\Omega$ sont numérotés de $N_0 + 1$ à N et que les noeuds à l'intérieur sont numérotés de 1 à N_0 , on définit :

$$V_0^h = \text{Vect}(\omega_1, \dots, \omega_{N_0}).$$

Par construction, $V_0^h \subset H_0^1(\Omega)$.

Nous pouvons alors discrétiser la formulation variationnelle obtenue précédemment, avec

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_0} u_h^i \omega_i :$$

Trouver $u_h \in V_h^0$, tel que pour tout $v_h \in V_h^0$:

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\Omega + \int_{\Omega} u_h v_h d\Omega = \int_{\Omega} f v_h d\Omega.$$

En évaluant cette expression pour $v = \omega_i$, avec $(\omega_i)_{i \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket}$ la base de V_h telle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket$ $\omega_j(M_i) = \delta_{i,j}$, on a alors, pour tout $j \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket$:

$$(8) \quad \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \omega_j d\Omega + \int_{\Omega} u_h \omega_j d\Omega = \int_{\Omega} f \omega_j d\Omega.$$

La solution approchée u_h s'écrit sous la forme :

$$\forall (x, y) \in \overline{\Omega}^2, u_h(x, y) = \sum_{i=1}^{N_0} u_h(M_i) \omega_i(x, y).$$

Ainsi, en utilisant (8), pour tout $j \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket$:

$$\int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{i=1}^{N_0} u_h(M_i) \omega_i(x, y) \right) \cdot \nabla \omega_j d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N_0} u_h(M_i) \omega_j(x, y) \omega_i d\Omega = \int_{\Omega} f \omega_j d\Omega.$$

Donc, par linéarité de l'intégrale, pour tout $j \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket$:

$$\sum_{i=1}^{N_0} u_h(M_i) \left(\int_{\Omega} \nabla \omega_i(x, y) \cdot \nabla \omega_j d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{N_0} \omega_i(x, y) \omega_j d\Omega \right) = \int_{\Omega} f \omega_j d\Omega.$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbb{A}^0 U^0 = L^0.$$

avec $\forall i \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket$:

- $U_i^0 = u_h(M_i)$,
- $L_i^0 = \int_{\Omega} f \omega_i d\Omega$,
- $\mathbb{A}^0 = \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0$.

On a alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket^2$:

- $\mathbb{M}_{i,j}^0 = \int_{\Omega} \omega_i(x, y) \omega_j d\Omega$ la matrice de masse,
- $\mathbb{K}_{i,j}^0 = \int_{\Omega} \nabla \omega_i(x, y) \cdot \nabla \omega_j d\Omega$ la matrice de rigidité.

La matrice \mathbb{A}^0 est alors symétrique - par définition des termes i, j de \mathbb{M}^0 et \mathbb{K}^0 , qui sont des matrices symétriques - et définie positive : soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N_0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_0} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} x^T \mathbb{A}^0 x &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j a(w_i, w_j), \\ &= a \left(\sum_{i=1}^N x_i w_i, \sum_{j=1}^N x_j w_j \right), \\ &= a(x, x), \\ &\geq \alpha \|x\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \text{ par coercivité de l'application bilinéaire } a \text{ démontrée dans le cours,} \\ &> 0 \text{ donc } \mathbb{A}^0 \text{ définie positive.} \end{aligned}$$

Donc \mathbb{A}^0 est symétrique définie positive, donc inversible.

3.3 Pseudo-élimination

En regroupant les N_0 points à l'intérieur de Ω , puis ceux sur la frontière $\partial\Omega$, on obtient par le même raisonnement que précédemment une matrice $\tilde{\mathbb{A}}$, un vecteur U et un vecteur \tilde{L} , où :

$$\tilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^0 & 0 \\ 0 & I_{N-N_0} \end{pmatrix} \text{ avec } N \text{ le nombre de points totaux et } N_0 \text{ le nombre de points à l'intérieur de } \Omega,$$

$$U_i = u_h(M_i) \text{ pour } i \in \llbracket 1, N_0 \rrbracket,$$

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} L^0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vecteur de taille } N, \text{ avec } N - N_0 \text{ zéros à la fin.}$$

$$\text{Alors } \tilde{\mathbb{A}} U = \tilde{L}.$$

3.4 Visualisation

On peut alors modifier le programme du premier exercice afin de mettre en place via une routine la méthode de pseudo-élimination. En voici le résultat avec une fonction exemple égale à $f = (x-1)^2 + (y-1)^2$:

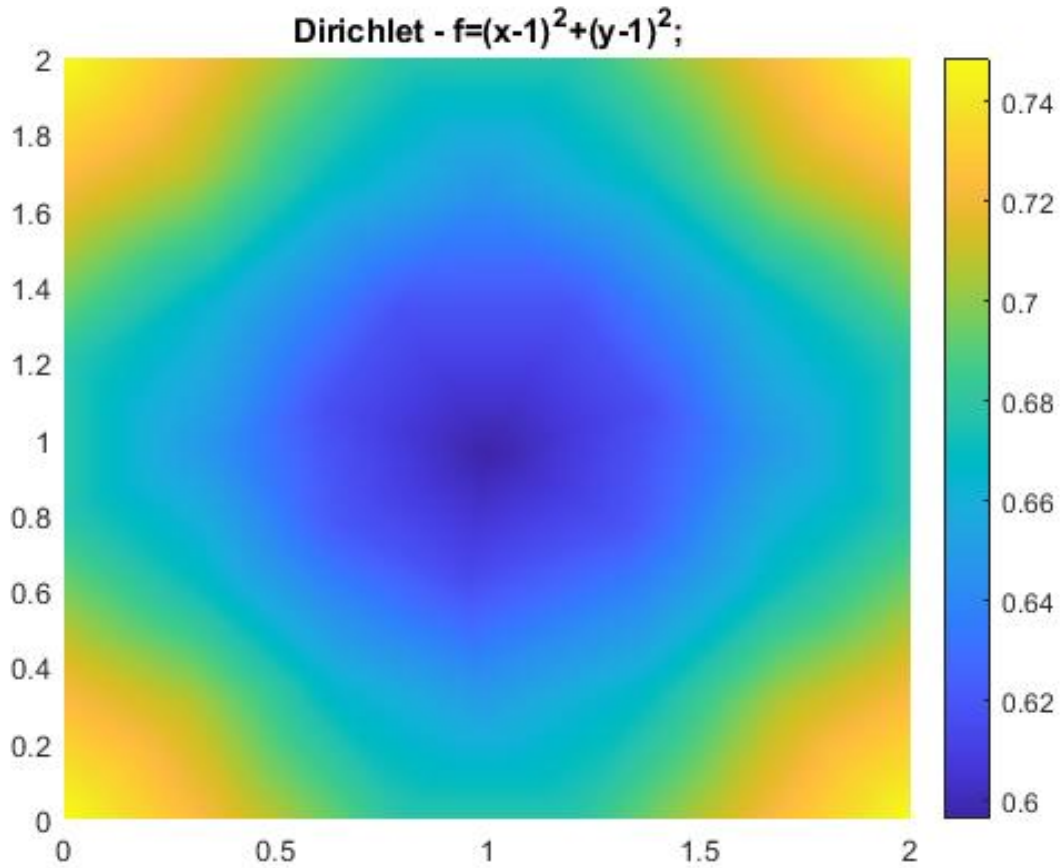


FIGURE 14 – Exemple de solution approchée

3.5 Validation

Soit $\Omega =]0, 2[^2$ et $\forall (x, y) \in \overline{\Omega}, u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. On a bien $u \in H_1(\Omega)$. Vérifions que u vérifie les conditions au bord de Ω :

Frontière de gauche et droite :

($y = 0$ et $y = 2$), on a bien $\sin(\pi y) = 0$, donc $u = 0$.

Frontière du dessous et dessus :

($x = 0$ et $x = 2$), on a bien $\sin(\pi x) = 0$ donc $u = 0$.

La condition sur le bord est donc vérifiée. On a :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = -\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) - \pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Donc $f = u - \Delta u = \sin(\pi x) \sin(\pi y) - (-2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)) = (1 + 2\pi^2) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ sur Ω .

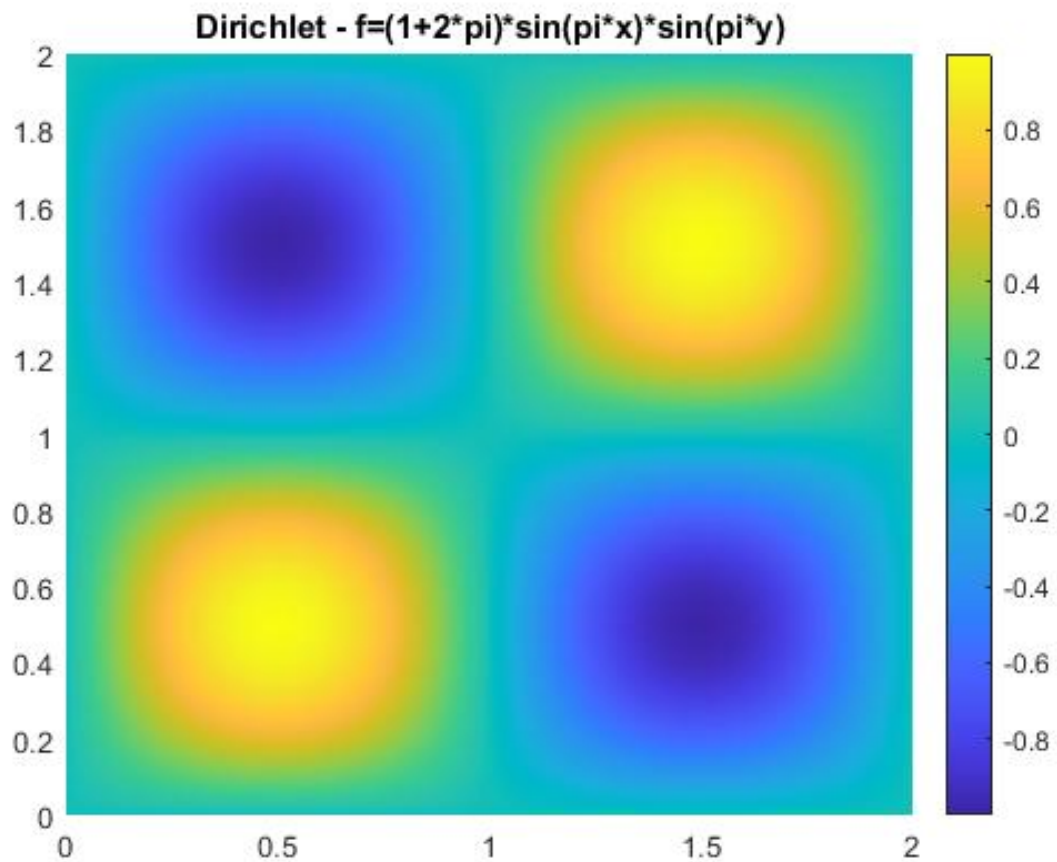


FIGURE 15 – Solution approchée pour $h = 0.2$

Ce qui est cohérent car sur différents cas limites nous observons :

- au bord la fonction est nulle (le sin s'annule en 2π).
- en $(1/2, 1/2)$ la fonction est maximale et vaut 1 (le produit des sinus vaut bien 1 en $\pi/2$).
- en $(3/2, 3/2)$ la fonction est maximale et vaut 1 (le produit des sinus vaut bien 1 en $3\pi/2$).

On peut alors tracer l'erreur commise en norme $L^2(\Omega)$ et en norme 1 définie précédemment :

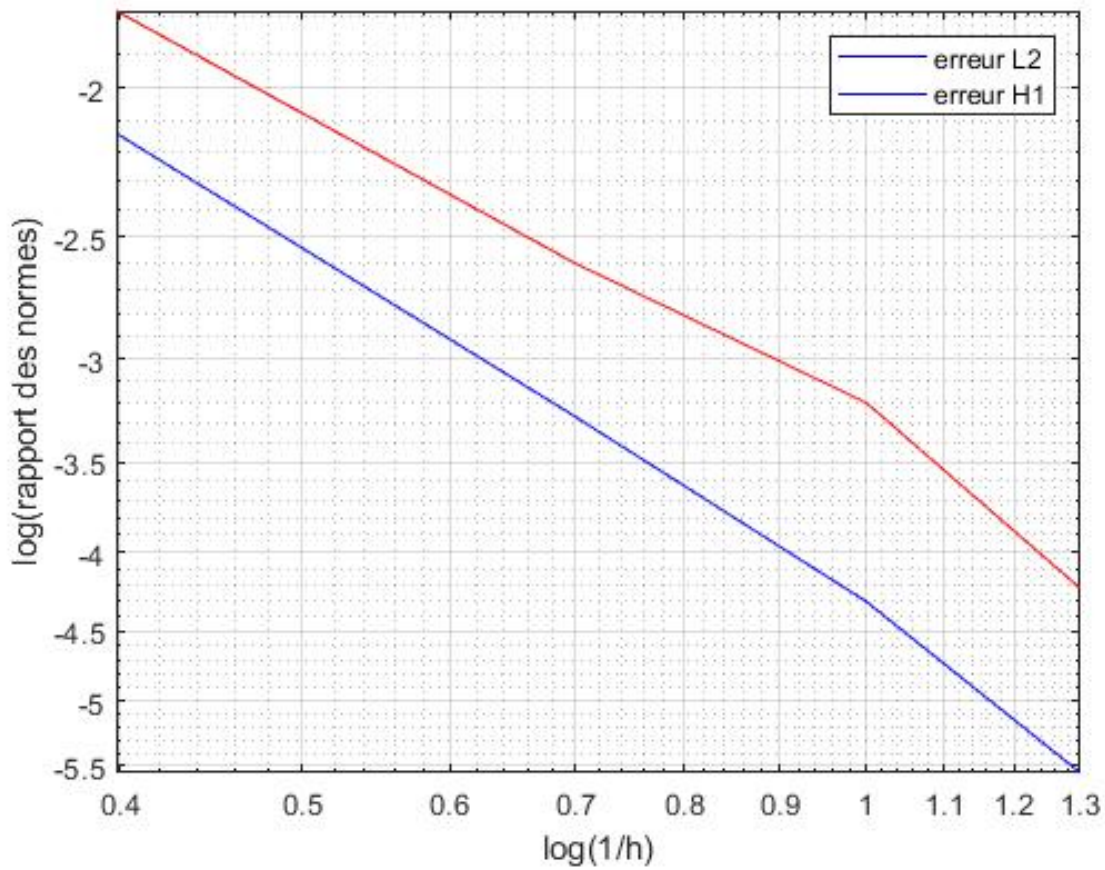


FIGURE 16 – Évolution des erreurs

On remarque que les 2 erreurs tendent vers 0 en $O(h)$.

3.6 Conditions de Dirichlet non homogènes

Nous considérons maintenant un problème de Poisson avec une condition de Dirichlet non homogène : pour $g \in C^0(\Omega)$, trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$(9) \quad \begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega. \\ u = g & \text{dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous avons vu dans le cours que la formulation variationnelle du problème (9) peut s'écrire comme :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ avec $u|_{\partial\Omega} = g$ tel que

$$(10) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} r u \cdot r v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx; \quad \forall v \in H_0^1(\Omega);$$

et qu'il est possible d'étendre la technique de pseudo-élimination à des conditions de Dirichlet non homogènes. Pour ce faire, en supposant que les noeuds de la frontière sont numérotés en dernier, il suffit de modifier la matrice et le second membre issus de (10) assemblés avec toutes les fonctions de base :

$$\begin{pmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ A_{BI} & A_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_I \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_I \\ L_B \end{pmatrix},$$

en imposant $A_{BI} = 0$, $A_{BB} = I$, et $L_B = \tilde{g}$, où \tilde{g} est le vecteur colonne composé des valeurs prises par g aux noeuds M_j du bord.

Soit $\Omega =]0, 2[^2$ et $\forall (x, y) \in \overline{\Omega}$, $u(x, y) = \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$.

On a bien $u \in H_1(\Omega)$. Déterminons g avec les conditions au bord de Ω :

Frontière de gauche et droite :

$$(y = 0 \text{ et } y = 2), \text{ on a } \cos(2\pi y) = 1, \text{ donc } u = \cos(\pi x).$$

Frontière du dessous et dessus :

$$(x = 0 \text{ et } x = 2), \text{ on a } \cos(\pi x) = 1 \text{ donc } u = \cos(2\pi y).$$

$$\text{Donc } g = \begin{cases} \cos(\pi x) \text{ sur } [0, 2] \times \{0\} \text{ et } [0, 2] \times \{2\}, \\ \cos(2\pi y) \text{ sur } \{0\} \times [0, 2] \text{ et } \{2\} \times [0, 2]. \end{cases}$$

De plus :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = -\pi^2 \cos(\pi x) \cos(2\pi y) - 4\pi^2 \cos(\pi x) \cos(2\pi y).$$

Donc $f = u - \Delta u = \cos(\pi x) \cos(2\pi y) - (-5\pi^2 \cos(\pi x) \cos(2\pi y)) = (1 + 5\pi^2) \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$ sur Ω .

3.7 Visualisation graphique

On peut alors modifier le code Matlab afin de prendre en compte une fonction g non nécessairement nulle. Avec l'exemple précédent, on trouve ce graphe pour u_h la solution approchée :

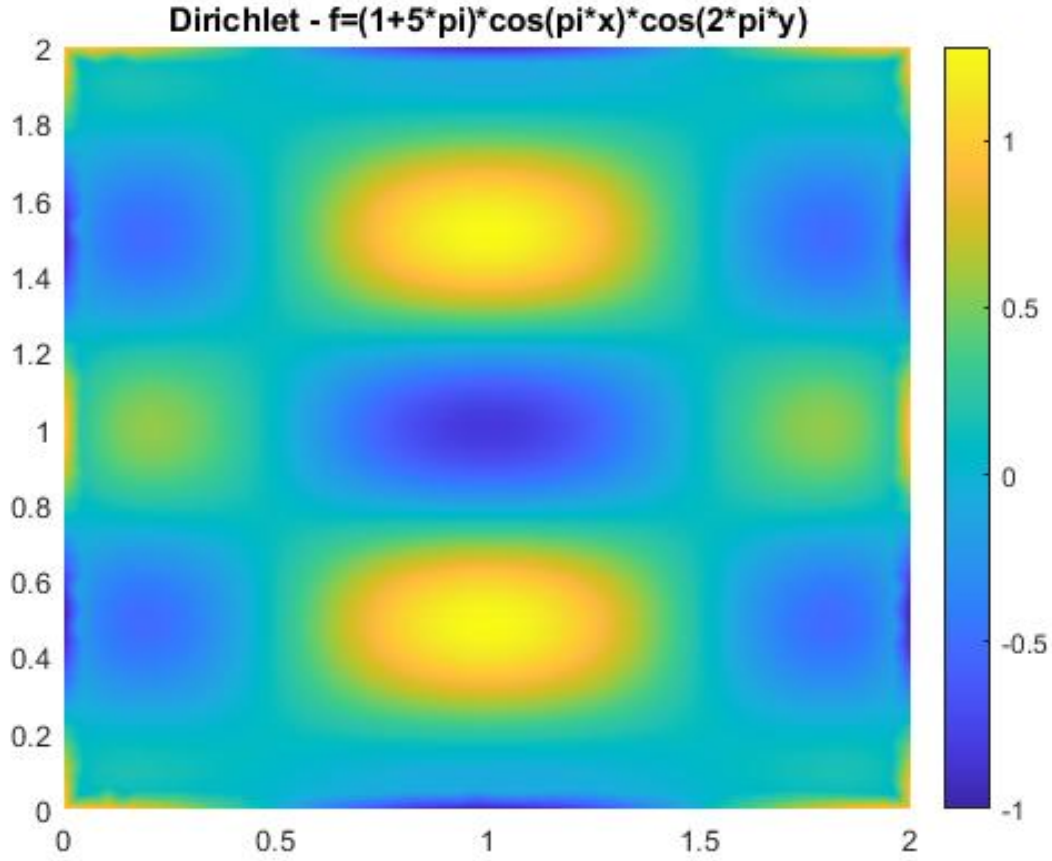


FIGURE 17 – Solution approchée pour $h = 0.2$

On remarque bien sur ce graphe que la fonction u respecte les conditions sur le bord en étant égale à la fonction g précédemment déterminée.

4 Exercice 3 : Équations de Stokes

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 à frontière polygonale, et $\Gamma = \partial\Omega$. La frontière Γ est partitionnée en $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, avec $\Gamma_N \neq \emptyset$. On impose une condition de Dirichlet sur Γ_D et une condition de Neumann sur Γ_N . On s'intéresse au calcul de la vitesse $u \equiv u(x, y) \equiv (u_1(x, y), u_2(x, y))$ et de la pression $p \equiv p(x, y)$ solutions des équations de Stokes : trouver $u = (u_1, u_2) \in [H^1(\Omega)]^2$ et $p \in H^1(\Omega)$ tels que

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta u + \nabla p = 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = g \text{ sur } \Gamma_D, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} - pn = 0 \text{ sur } \Gamma_N. \end{array} \right.$$

4.1 Formulation variationnelle

Afin de trouver la formulation variationnelle de ce problème (proposée dans l'énoncé) nous pouvons appliquer ces itérations :

1. Multiplier la première équation du système par v_1 et intégrer par parties.
2. Répéter le processus pour la deuxième équation avec v_2 (méthode identique à l'étape 1).
3. Sommer les équations précédentes.

Démonstration :

Étape 1 : Multiplication par v_1 et intégration par parties

Soit $v_1 \in H_{0,D}^1(\Omega)$, En

$$-\int_{\Omega} v \Delta u_1 v_1 d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} v_1 d\Omega = 0.$$

Or $p \in H^1(\Omega)$ donc $\nabla p \in L^2(\Omega)$ et par la première équation du système (9) on obtient que $\Delta U \in L^2(\Omega)$. Comme $u_1 \in H^1(\Omega)$, $u_1 \in H^1(\Omega, \Delta)$, on peut donc prendre $u \in H^2(\Omega)$. On applique alors la formule de Green aux 2 termes de l'équation ce qui nous permet d'obtenir :

$$\int_{\Omega} v \nabla u_1 \nabla v_1 d\Omega - \int_{\partial\Omega} v \nabla u_1 \cdot n v_1 d\Omega + \int_{\partial\Omega} p \cdot n v_1 d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial x} p d\Omega = 0.$$

Donc,

$$\int_{\Omega} v \nabla u_1 \nabla v_1 d\Omega - \int_{\Gamma_D} v \nabla u_1 \cdot n v_1 d\Omega - \int_{\Gamma_N} v \nabla u_1 \cdot n v_1 d\Omega + \int_{\Gamma_N} p \cdot n v_1 d\Omega + \int_{\Gamma_D} p \cdot n v_1 d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial x} p d\Omega = 0.$$

Or $V_1 = 0$ sur Γ_D et nous pouvons appliquer la 4ème équation du système (9) afin de réécrire le troisième membre de cette équation :

$$\int_{\Omega} v \nabla u_1 \nabla v_1 d\Omega - \int_{\Gamma_N} p \cdot n v_1 d\Omega + \int_{\Gamma_N} p \cdot n v_1 d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial x} p d\Omega = 0.$$

Finalement, en simplifiant le second terme avec le troisième, on obtient l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} v \nabla u_1 \nabla v_1 d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial x} p d\Omega = 0.$$

Étape 2 : Multiplication par v_2 et intégration par parties

En appliquant la même méthode que dans l'étape 1 mais pour le second terme de u , l'équation suivante est obtenue :

$$\int_{\Omega} v \nabla u_2 \nabla v_2 d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial v_2}{\partial x} p d\Omega = 0.$$

Étape 3 : Somme des 2 équations finales des étapes précédentes

Par somme des deux équations finales des étapes précédentes, on retrouve la première équation du résultat demandé :

Soit $u = (u_1, u_2) \in [H^1(\Omega)]^2$ avec $u|_{\Gamma_D} = g$ et $p \in L^2(\Omega)$,

$$(12) \quad \int_{\Omega} v \nabla u : \nabla v d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v d\Omega = 0, \quad \forall v = (v_1, v_2) \in [H_{0,D}^1(\Omega)]^2,$$

Par ailleurs, l'équation 2 du système (9) nous permet d'écrire immédiatement que :

$$(13) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} u q d\Omega = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega),$$

Car $\operatorname{div} u = 0$ sur Ω .

On a donc obtenu la formulation variationnelle :

Trouver $u = (u_1, u_2) \in [H^1(\Omega)]^2$ avec $u|_{\Gamma_D} = g$ et $p \in L^2(\Omega)$ tels que

$$(14) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} v \nabla u : \nabla v d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v d\Omega &= 0, \quad \forall v = (v_1, v_2) \in [H_{0,D}^1(\Omega)]^2, \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} u q d\Omega &= 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

4.2 Visualisation

Sur le fichier .geo, les "Points" représentent les sommets. Les "Line" sont les lignes qui relient 2 points. Les "Physical line" représentent les conditions aux différents sommets. C'est donc sur elles que nous allons agir pour imposer les contraintes sur le bord du système.

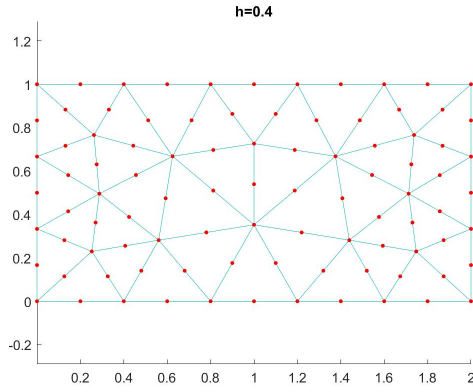


FIGURE 18 – Maillage pour $h=0.4$

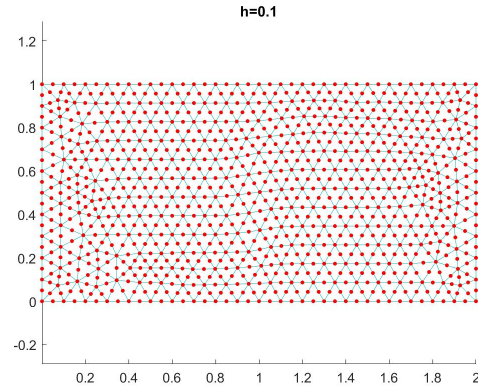


FIGURE 20 – Maillage pour $h=0.1$

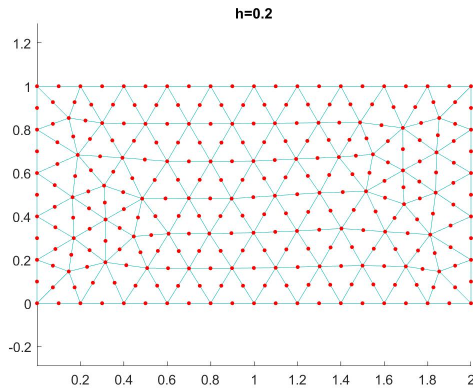


FIGURE 19 – Maillage pour $h=0.2$

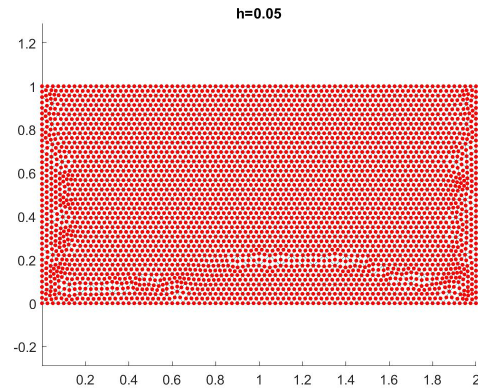


FIGURE 21 – Maillage pour $h=0.05$

4.3 Analyse de la matrice du système d'équations

Nous discrétisons chaque composante de la vitesse par des éléments finis P^2 et la pression par des éléments finis P^1 . Cette paire d'éléments finis est notée $P^2 - P^1$ et s'appelle élément

fini de Taylor-Hood. Si on suppose que les sommets des triangles sont numérotés de 1 à N_s et les milieux des arêtes de $N_s + 1$ à N , le vecteur \mathbf{U} des inconnues du système linéaire issu de la discrétisation de (14) est un vecteur de \mathbb{R}^{2N+N_s} :

$$\mathbf{U} = (u1h(M1); \dots u1h(MN); u2h(M1); \dots u2h(MN); ph(M1); \dots ph(MNs))^T;$$

constitué des inconnues relatives à la première composante de la vitesse, puis à la seconde composante de la vitesse, puis à la pression. La matrice du système linéaire peut alors s'écrire par blocs sous la forme

$$A = \begin{bmatrix} v\mathbb{K} & 0 & \mathbb{E} \\ 0 & v\mathbb{K} & \mathbb{F} \\ \mathbb{G} & \mathbb{H} & 0 \end{bmatrix}$$

où

- Les deux blocs $v\mathbb{K}$ contiennent les contributions des termes $v \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\Omega$ et $v \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 d\Omega$.
- Le bloc \mathbb{E} contient les contributions du terme $-\int_{\Omega} p \frac{\partial v_1}{\partial x} d\Omega$.
- Le bloc \mathbb{F} contient les contributions du terme $-\int_{\Omega} p \frac{\partial v_2}{\partial y} d\Omega$.
- Les blocs \mathbb{G} et \mathbb{H} représentent respectivement le gradient de la pression dans la direction de x et y .

En posant le système linéaire (11) (en séparant les variables en 2 : u_1 et u_2), on trouve que le bloc \mathbb{G} correspond au terme $-\frac{\partial u_1}{\partial x}$ et que le bloc \mathbb{H} correspond au terme $-\frac{\partial u_2}{\partial y}$. Ces deux blocs correspondent respectivement à la discrétisation de $\int_{\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial x} d\Omega$ et de $\int_{\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial y} d\Omega$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{i,j} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial w_i}{\partial x} \tilde{w}_j d\Omega = \mathbb{E}_{i,j}^T, \\ \mathbb{H}_{i,j} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial w_i}{\partial y} \tilde{w}_j d\Omega = \mathbb{F}_{i,j}^T. \end{aligned}$$

4.4 Validation

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée $(u1h; u2h; ph)$ correcte. Pour cela, on résout le problème (11) avec le domaine rectangulaire $\Omega = [0; 2] \times [0; 1]$, une viscosité $\nu = 1$ et :

- des conditions de Dirichlet homogènes (c'est-à-dire $(g1; g2) = (0; 0)$) sur les deux côtés horizontaux du rectangle;
- des conditions de Dirichlet non homogènes avec $(g1; g2) = (-4(1-y)y; 0)$ sur le côté gauche du rectangle, pour imposer un profil d'écoulement entrant parabolique;
- des conditions de Neumann homogènes comme dans (11) en sortie, sur le côté vertical à droite du rectangle.

La solution exacte est alors $(u1, u2) = (-4(1-y)y, 0)$ et $p = -8(x-2)$. En effet :

- $\Delta u_1 = 8$ et $\frac{\partial p}{\partial x} = -8$ donc $-\nu \Delta u + \frac{\partial p}{\partial x} = 1 \times 8 - 8 = 0$,
- $\Delta u_2 = 0$ et $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ donc $-\nu \Delta u + \frac{\partial p}{\partial x} = 1 \times 0 - 0 = 0$,
- $\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u_2}{\partial y}$ donc $-\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$,
- $(u1; u2) = (g1; g2) = (-4(1-y)y; 0)$ sur la frontière gauche,
- $\nu \times \frac{\partial u}{\partial n} = (-8(x-2), 0) = pn$ donc $\nu \frac{\partial u}{\partial n} - pn = 0$ sur le reste du bord.

4.5 Visualisation graphique

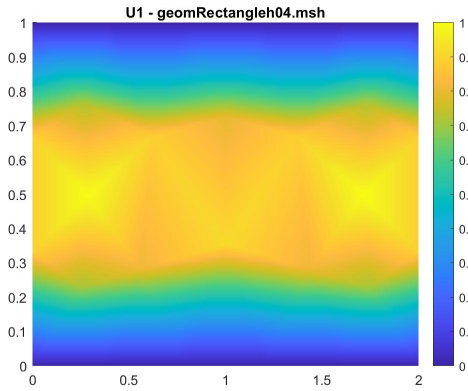


FIGURE 22 – U1 pour $h=0.4$

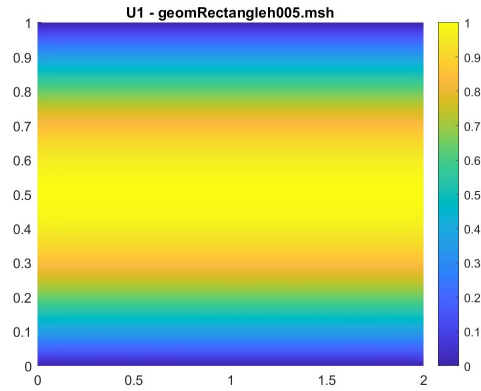


FIGURE 23 – U1 pour $h=0.05$

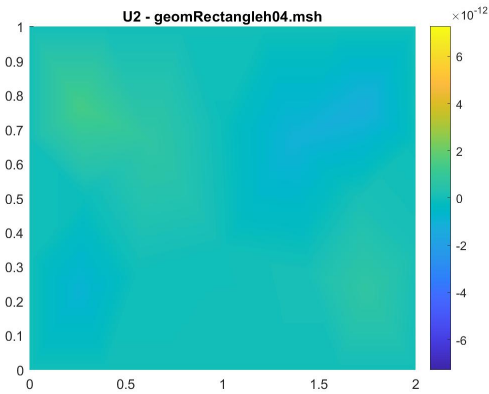


FIGURE 24 – U2 pour $h=0.4$

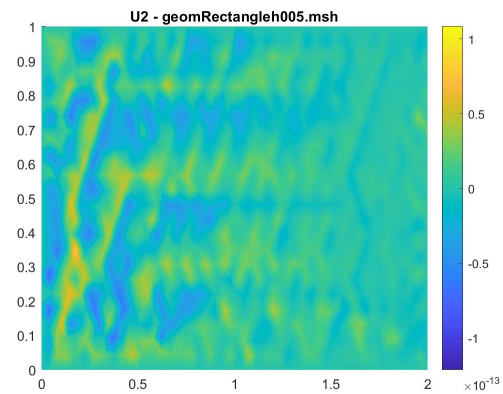


FIGURE 25 – U2 pour $h=0.05$

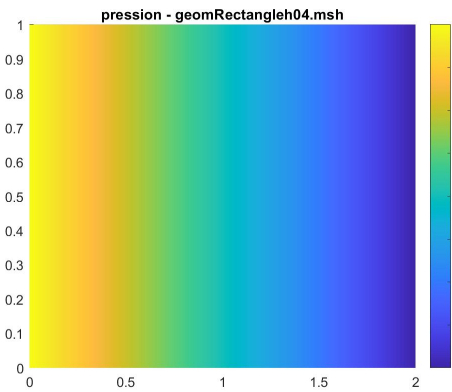


FIGURE 26 – Pression pour $h=0.4$

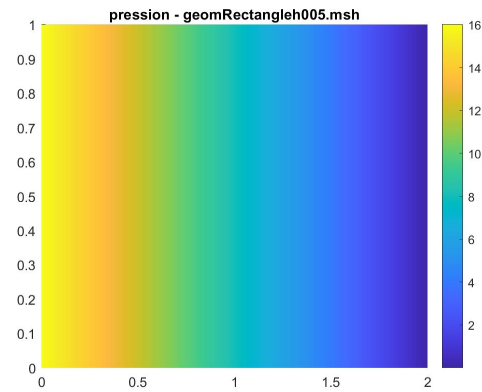


FIGURE 27 – Pression pour $h=0.05$

Les graphiques ressemblent à un écoulement de Poiseuil. En effet, la vitesse sur x est d'autant plus grande que y est proche de 0.5 qui est le centre du cylindre (ce qui est attendu d'une vitesse quadratique).

Aussi, on observe une vitesse nulle sur y (ce qui était attendu). (Attention; le graphique de $U2$ pour le pas $h=0.05$ est plus précis que le graphique pour le pas $h=0.4$, l'échelle de couleur est simplement différente à un facteur 10 près).

Enfin, la pression semble linéaire dans la cuve. Ceci vient du fait qu'on génère un déplacement en $x=0$. La mise en mouvement initiale du fluide génère une pression qui est visible pour

$x=0$ sur les 2 derniers graphiques.

4.6 Visualisation du modèle

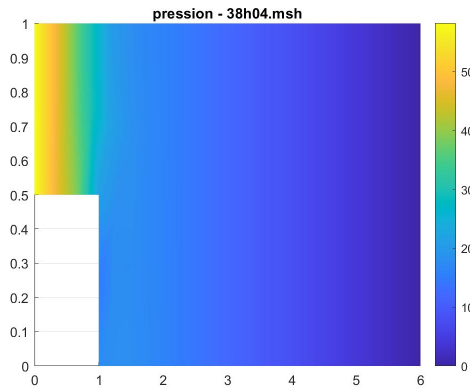


FIGURE 28 – Pression pour $h=0.4$

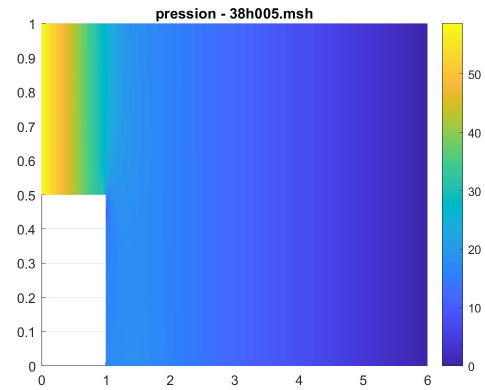


FIGURE 29 – Pression pour $h=0.05$

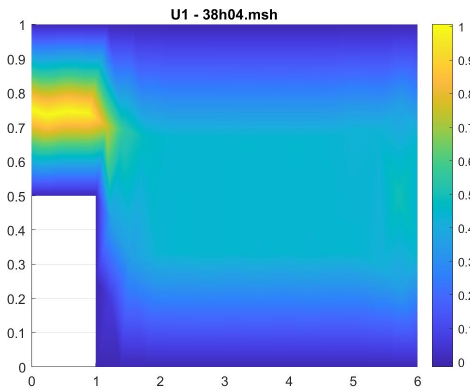


FIGURE 30 – U1 pour $h=0.4$

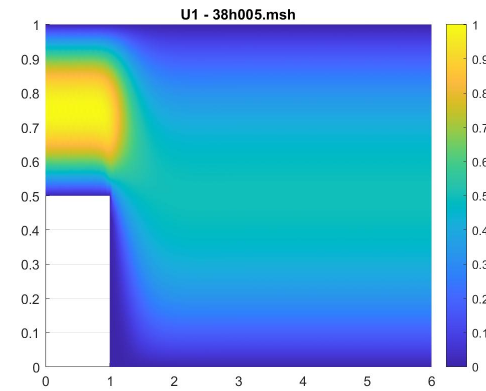


FIGURE 31 – U1 pour $h=0.05$

Sur ces quatre premiers graphiques, nous pouvons faire différentes observations.

Tout d'abord, on remarque que la pression est relativement linéaire de x . Ce n'est pas étonnant car le mouvement est induit à l'entrée du système (en $x=0$).

Ensuite, on observe bien que la vitesse est nulle sur les bords (en bas à gauche) de notre système. Les conditions limites sont bien vérifiées. Par ailleurs, la diminution de h induit un élargissement de la zone à vitesse élevée pour $x<1$. On retrouve d'ailleurs sur la partie $x<1$ l'écoulement que nous avons dans le cylindre à la question précédente ce qui est cohérent. Il n'y a pas de différence entre les deux systèmes avant $x=1$.

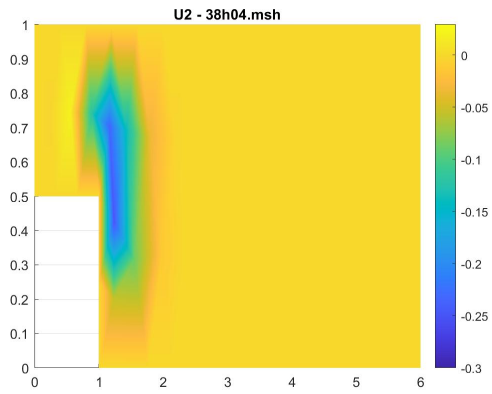


FIGURE 32 – U2 pour $h=0.4$

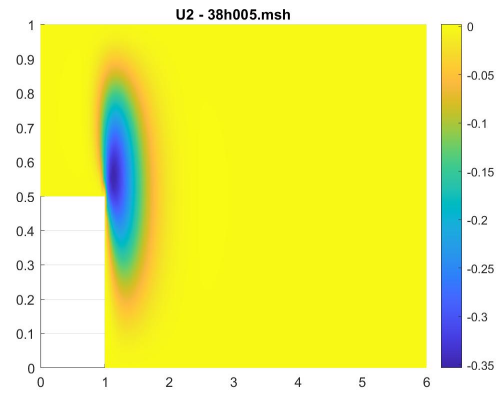


FIGURE 33 – U2 pour $h=0.05$

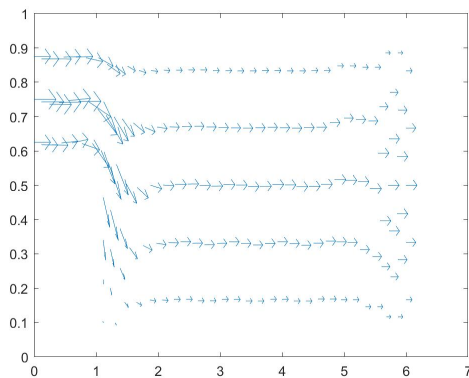


FIGURE 34 – Gradient pour $h=0.4$

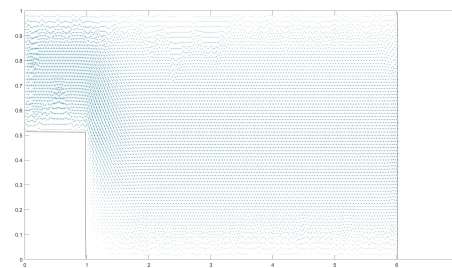


FIGURE 35 – Gradient pour $h=0.05$

Les remarques que nous pouvons faire sur ces 4 graphiques diffèrent peu de celles que nous avons déjà pu faire.

Cependant, Sur les graphiques du gradient, on remarque que l'écoulement prend une forme cohérente. La mise en mouvement du fluide ferait expérimentalement quelque chose de similaire. Comme nous avons pu le voir en cours l'année dernière.

La vitesse selon y est bien négative lorsqu'on dépasse la fracture ($x=1$) et est quasiment nulle loin de cette fracture ($x \ll 1$ ou $x \gg 1$).