AO 101

Rapport TP6

Antoine GERMAIN

22 mars 2023

Table des matières

Introduction

L'objet du présent rapport est de déterminer la quantité minimale d'eau sortant d'un réservoir afin de produire de l'éléctricité. Les conditions initiales et finales sont fournies. En termes mathématiques, il nous faut résoudre :

$$\min_q \quad \frac{1}{2}\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{N} q_j^2 + \frac{\sigma}{2}\sum_{j=1}^{N+1}\left(\frac{q_j - q_{j-1}}{\Delta t}\right)^2 \tag{1}$$

1 Reformulation - Méthode du Gradient Conjugué

1.1 Reformulation

Le problème 2 peut se ramener à un problème standard :

$$\min_q \quad \frac{1}{2}\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{N} q_j^2 + \frac{\sigma}{2}\sum_{j=1}^{N+1}\left(\frac{q_j}{\Delta t}\right)^2 + \frac{\sigma}{2}\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{q_j}{\Delta t}\right)^2 - \sigma\sum_{j=1}^{N+1}\frac{q_j q_{j-1}}{(\Delta t)^2} \tag{2}$$

Donc

$$\min_q \quad \left(\frac{1}{2}\frac{1}{T} + \frac{\sigma}{(\Delta t)^2}\right)\sum_{j=1}^{N} q_j^2 + \frac{\sigma}{2}\left(\frac{q_{N+1}}{\Delta t}\right)^2 + \frac{\sigma}{2}\left(\frac{q_0}{\Delta t}\right)^2 - \sigma\sum_{j=2}^{N}\frac{q_j q_{j-1}}{(\Delta t)^2} - \sigma\frac{q_{N+1}q_N}{(\Delta t)^2} - \sigma\frac{q_1 q_0}{(\Delta t)^2} \tag{3}$$

On peut finalement réécrire matriciellement ce problème :

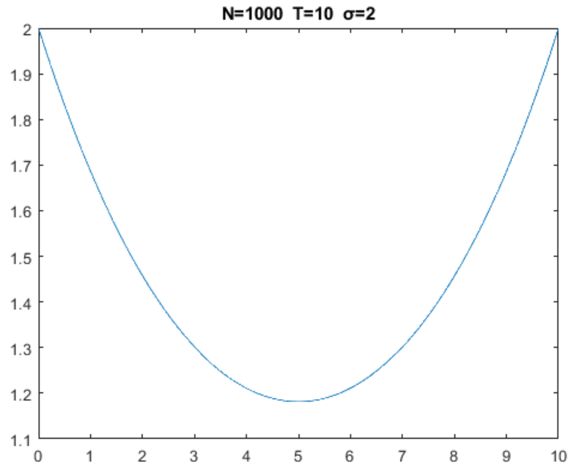
$$\min_q \quad \frac{1}{2}\langle x, Qx\rangle + \langle b, x\rangle + c \tag{4}$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{T} + \frac{\sigma}{(\Delta t)^2}\right) & -\frac{\sigma}{2(\Delta t)^2} & & & \\ -\frac{\sigma}{2(\Delta t)^2} & \left(\frac{1}{2}\frac{1}{T} + \frac{\sigma}{(\Delta t)^2}\right) & -\frac{\sigma}{2(\Delta t)^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{\sigma}{2(\Delta t)^2} & \left(\frac{1}{2}\frac{1}{T} + \frac{\sigma}{(\Delta t)^2}\right) & -\frac{\sigma}{2(\Delta t)^2} \\ & & & -\frac{\sigma}{2(\Delta t)^2} & \left(\frac{1}{2}\frac{1}{T} + \frac{\sigma}{(\Delta t)^2}\right) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad b = \begin{bmatrix} \sigma\frac{q_0}{(\Delta t)^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma\frac{q_{N+1}}{(\Delta t)^2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad c = 0 \ .$$

1.2 Méthode du Gradient Conjugué

En utilisant le modèle d'algorithme de gradient conjugué fournit en énoncé et en faisant varier les différentes valeurs de N on obtient ces figures :



(a) N=10

En modifiant les valeurs de σ et T on observe une translation ou un affaissement de la courbe.

1.3 Commentaires

Tout d'abord, comme on peut s'y attendre, plus N augmente plus la courbe obtenue est lisse (on compense le caractère discret de la méthode du GC).

Ensuite, pour T qui augmente on observe bien un applatissement de la courbe. La production d'énergie est faite sur un temps plus long et on cherche à minimiser la quantité d'eau utilisée.

Enfin, plus la turbine est lisse plus la courbe s'affaisse.

2 Algorithme du Gradient Projeté

2.1 Initialisation

Pour des raisons touristiques, le niveau de turbiné doit rester suffisant pendant des plages horaires spécifiques (débit minimal, contrainte rajoutée). Nous supposerons alors que T est en jours et que ce débit minimal d0 doit couvrir la période 12h-16h de chaque journée.

L'ensemble des indices que nous allons parcourir dans l'algorithme, noté I, est determiné de cette manière :

12 et inférieur à 16.

2.2 Test

En utilisant le modèle d'algorithme de gradient conjugué fournit en énoncé et en faisant varier les différentes valeurs de N on obtient ces figures :

2.3 Commentaires

On remarque que pour N=10 il n'est pas possible de visualiser correctement le seuil de débit. Pour N=1000 La courbe est beaucoup plus fluide et les différents pics (dont l'un est aussi visible pour N=10) atteignent le seuil fixé à intervalles réguliers (tous les jours). On peut aussi noter que la courbe de la quantité d'eau atteint la courbe noir (débit seuil) uniquement au niveau des pics lorsque le débit est plus petit que le débit minimal (je n'ai pas pu représenter uniquement la courbe noir pour les indices de I car elle n'était pas bien visible sur le graphe, je l'ai donc allongé). Aux extrémités, le débit est séjà supérieur au minimum imposé et la courbe bleue ne rejoint donc pas la courbe noir.

2.4 $||X_{k+1} - X_k||$ et $||\nabla f(X_k)||$

On a pu tracer les courbes du $||\nabla f(X_k)||$ et de $||X_{k+1} - X_k||$ pour N=1000. Les voici :

2.5 Commentaires

On peut remarquer que 2 comportements différents peuvent être observés :
- Autour des indices 59000 il y a un comportement quasi discontinue de X_k et de sa norme.

2.6 Gamma

2.7 Analyses

On observe simplement que γ tend vers 1 lorsque N augmente.

2.8 Affichage toutes les 10 itérations

3 Méthode d'Uzawa

3.1 Initialisation

On consid'ere cette fois-ci que l'ensemble des contraintes K est données sous la forme suivante :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N : Cx \leq f\} \tag{5}$$

avec C une matrice p × N et f un vecteur de dimension p.
On applique ensuite l'algorithme d'Uzawa à notre fonction sur K.

3.2 Test

En utilisant le modèle d'algorithme de Uzawa et en faisant varier les différentes valeurs de N on obtient ces figures :

3.3 Commentaires

Les courbes obtenues avec la méthode d'Uzawa sont bien identiques à celles que l'on avait obtenu avec la méthode du gradient conjugué.

3.4 Analyse

$$C = \begin{bmatrix} \Delta t & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \Delta t & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \Delta t & \cdots & & \Delta t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N},$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'équation se réécrit :

$$C * x \leq (V_0 - V_{min}) * I \tag{6}$$

Ainsi Pour N=10

3.5 Conclusion