0.1 Resolución

Para la resolución se cuenta inicialmente con una cantidad de vértices n, aristas m, particiones k, y los pesos entre los pares de vértices. Para determinar la k-partición de peso mínimo se empezara utilizando un solo conjunto, *conjunto_1*. Se realizaran todas las combinaciones que existen para esa cantidad de conjuntos, la cual es solamente una (todos los vértices juntos). Y nos guardaremos el peso de esta combinación en una variable, *suma_solucion*. Si esta suma es cero, dado que los pesos son mayores o iguales a cero, entonces es la mínima que se puede obtener. Esta combinación es una solución óptima.
Sino creamos un nuevo conjunto y procedemos a buscar si existe una combinación, con esta cantidad, cuyo peso sea menor a *suma_solucion*. Si existe, se actualiza esta variable y esta combinación reemplazara a la que se tenia como posible solución. En caso de no existir, se agrega un nuevo conjunto y se proceden a formar nuevas combinaciones. Esto se realizara hasta que exista alguna combinación donde la suma de todos los conjuntos sea cero. O cuando se terminaron de realizar las combinaciones para k conjuntos. Ya que entonces, habremos visto todas las combinaciones posibles para el máximo de conjuntos que disponemos. Obteniendo una de las posibles soluciones óptimas.
Para lograr las combinaciones con mas de un conjunto. Se ubicará al vértice 1 en el último conjunto que haya. Luego, se procede a ubicar al siguiente vértice en el primero, si es que no exceda a *suma_solucion*. Una vez ubicado continuamos con el siguiente vértice, siguiendo la misma lógica. Si no es posible ubicar a alguno en un conjunto, se prueba metiéndolo en el siguiente. En el caso de que un vértice t, $1 < t <= n$, no pueda ser ubicado en ninguno de los conjuntos disponibles hasta el momento. Significa que la combinación que se tiene con los vértices 1 a t-1 no es útil para avanzar. Por lo que se procede a remover a t-1 al próximo conjunto posible (desde la posición que ocupa t-1 actualmente). Si se lo ubicó, procedemos a tratar de ubicar nuevamente a t (empezando desde el primer conjunto) y sino, volvemos a retroceder. Pudiendo caer en dos casos:
Se ubicaron a los n vértices, entonces encontré una combinación mejor que la que tenia representada en *solucion*, nos guardamos este nuevo peso y la combinación. Removemos el ultimo vértice para úbicarlo en el siguiente conjunto posible. Para asi continuar realizando nuevas combinaciones.
Caso contrario, retrocedí hasta llegar al vértice 1. Esto significa que termine de observar todas las combinaciones posibles para los conjuntos disponibles actualmente. Por lo que voy a agregar un nuevo conjunto, ubicar al vértice 1 en este ultimo, y proceder con las combinaciones.

```
1:  procedure UBICAR_VERTICE
2:      conjunto_1 ← agregar todos los vértices
3:      suma_solucion ← sumar el peso del conjunto_1
4:      solucion ← conjunto_1
5:      Nuevo_conjunto ← crear un nuevo conjunto
6:      k_particion ← agregar el Nuevo_conjunto
7:      vertice_actual ← 1
8:      for  i= 1,...,total de particiones do
9:          if (suma_solucion == 0) then
10:             Return solucion
11:         end if
12:         Nuevo_conjunto ← crear un nuevo conjunto y agregar el vertice_actual
13:         k_particion ← agregar el Nuevo_conjunto
14:         ubicar_siguientes_vertices (....i, vertice_actual++, solucion, k_particion....)
15:         Sacar vertice_actual del Nuevo_conjunto
16:     end for
17:     Return solucion
18: end procedure
```

```
1: procedure UBICAR_SIGUIENTES_VERTICES(.., conjuntos_disponibles, vertice_actual, solucion, k_particion..)
2:     for i = 1...total_conjuntos do
3:         if (suma_solucion == 0) then
4:             return solucion
5:         end if
6:         if (agregar vertice_actual al conjunto_i no excede suma_solucion) then
7:             agrego el vertice_actual al conjunto_i
8:             if (agregue el último vértice) then
9:                 suma_solucion ← suma de los pesos de cada conjunto en k_particion
10:                solucion ← k_particion
11:            else
12:                ubicar_siguientes_vertices (....conjuntos_disponibles, vertice_actual++, solucion, k_particion....)
13:            end if
14:            sacar vertice_actual del conjunto_i
15:        end if
16:    end for
17: end procedure
```

0.2 Resolución agregando poda:

En la resolución anterior se comienza con el valor de *suma_solucion* igual al peso obtenido de ubicar a todos los vértices en un mismo conjunto. Ya que esta es la cota máxima y luego se realizan distintas combinaciones para ir optimizándola. La poda se encargara de comenzar con otro valor. Lo que haremos es obtener el peso que resulta de empezar distribuyendo al vértice número 1 en el primer conjunto, al segundo en el siguiente y así hasta que lleguemos al conjunto k o ya no nos queden nodos. Si se llego al k y aún quedan vértices, volvemos al primer conjunto. Hasta que distribuyamos a todos. A diferencia de la resolución anterior para este caso es necesario que el vector que representa a la combinación tenga tamao k en vez de uno. De esta forma, en el mejor de los casos si la cantidad de vértices es menor que k (cantidad total de conjuntos) obtendremos una de las combinaciones óptimas (peso total igual a cero). Y si no, al no tener a todos los vértices juntos estaremos eliminando adyacencias y ubicando a posibles vértices adyacentes en distintos conjuntos. Por lo que *suma_solucion* tiene un valor menor que el planteado en la anterior resolución. Y evitamos realizar las combinaciones que antes hacíamos para llegar al mismo. Luego se continua a partir de la linea 8 de $UBICAR\_VERTICE$.

0.3 Complejidad

k_particion es un conjunto de conjuntos de vértices (en él se van realizando las combinaciones). El mismo se representa con un vector de vectores de enteros. Pero, para un rápido acceso a la suma total de los pesos de los conjuntos. Se tendrá una tupla, la primer componente es la suma y la segunda el vector. Para calcular la complejidad total vamos a analizar por partes nuestro algoritmo.
A) Complejidad de la función *ubicar_vertice*:
1) Calcular el valor inicial de *suma_solucion* (que va a ser el peso de tener a todas los vértices en un solo conjunto). Es decir, sumar m aristas. O(m)
2) Ubicar a todos los vértices en un único posición conjunto que va a ser *solucion*. Se realizan n *push_back* en *solucion*[0]. O(n).
3) Se crea un primer vector *conjunto* y se lo agrega atrás en la segunda componente de *k_particion* O(1).
4) Se proceden a realizar las combinaciones, para esto se ejecuta un for que va desde 1 hasta k. En él, se van a realizar todas las combinaciones para los i-esimos camiones, 1 <= i <= k. Y se van a ir agregando los nuevos conjuntos. En cada iteración se crea uno, se agrega al vértice 1 en el mismo y se ubica al conjunto atrás, en el vector de *k_particion*, costo total O(1)(por iteración). Luego, se procede a llamar a la función *ubicar_siguientes_vertices* (mas adelante se analiza la complejidad de esta función). Y por último se retira al vértice, pop_back.

B) Complejidad de *ubicar_siguientes_vertices*:
Se trata de una función recursiva, primero vamos a comenzar por analizar que se hace en cada llamada y luego cuantas se hacen en total.

En cada llamada se trata ubicar a un vértice, entre los conjuntos disponibles actualmente. Para esto se realiza un for que va desde 1 hasta el valor de *conjuntos_disponibles*.
1)En cada iteración, al comenzar se evalúa si el valor de *suma_solucion* es cero, O(1). Si no, se procede a verificar, y de ser posible, a agregar el *vertice_actual* al i-esimo conjunto, 1 <= i <= *conjuntos_disponibles*. Para esto, se le suma a la primer componente de *k_particion* el peso que se adiciona el agregar el *vertice_actual* a dicho conjunto. Todos los vértices van a estar distribuidos entre los actuales *conjuntos_disponibles*. Si estoy tratando de ubicar al vértice t, 1 < t <= n, entonces voy a tener t-1 vértices distribuidos. Pero por cada iteración solo realizo tantas sumas como vértices haya en el i-esimo conjunto. Es decir que al realizar las *conjuntos_disponibles* iteraciones estoy realizando la suma de aristas para t-1 vértices. En el caso de que estos t-1 vértices formen un subgrafo completo tengo (t-1)*(t-2)/2 aristas, que fueron sumadas.
2) Si no se pudo agregar el vértice, se procede a realizar una nueva iteración. En caso contrario agrego al *vertice_actual* atrás, en el conjunto correspondiente, push_back. Si agregue el vértice n, el último, se actualiza el valor de *solucion_suma* a la de la primer componente de *k_particion*, O(1). Pero, además se copia el vector de la segunda componente a *solucion*. Este vector consta de tantas posiciones como *conjuntos_disponibles* haya hasta entonces. Con n vértices distribuidos en total. Costo de la copia O(n).
En caso de no serlo se realiza una nueva llamada recursiva de la función pero ahora para ubicar al $vertice\_actual_{++}$.
Finalizada la llamada se retira al *vertice_actual* del i-esimo conjunto, pop_back, y se realiza otra iteración.
Como se detalló a lo sumo en cada llamada los costos son O((t-1)*(t-2)/2 + n), como t esta entre 1 <= t <= n acotamos por n, obteniendo O($n^2 + n$) = O(n^2).
3) Por último calculamos cuantas veces realizamos esta tarea. Cada llamada recursiva va a ubicar a un único vértice. Cada vez que se agrega un nuevo conjunto. Se evalúa ubicar nuevamente a los n vértices. Y se vuelven a ejecutar los for's de las funciones recursivas pero, ahora hasta una iteración más que la llamada anterior. Como se comienza ubicando al primer vértice en el último conjunto creado, y al siguiente desde el primero de los disponibles. Cada vez que un vértice es ubicado en un nuevo conjunto posibilita a lo sumo k conjuntos para el siguiente. Pero lo mismo ocurre con el siguiente a este, así hasta tener los n vértices. En conclusión tenemos las siguientes combinaciones:

$$\sum_{V_n=1}^{k} \sum_{V_{n-1}=1}^{k} ..... \sum_{V_1=1}^{k} 1 = k^n$$

Donde V_s, 1<= s <= n, representa al vértice número s.
Y cada una asociada a los costos mencionados en los ítem 1-2 de la sección B.
El costo total, de ambas secciones seria: O(m) + O(n^2)*O(k^n) = O(m) + O($n^2 * k^n$)
acotando m por $n*(n-1)/2$, que es el número máximo de aristas que puede haber para n vértices, tenemos:
O(n^2) + O($n^2 * k^n$) = O($n^2 * k^n$)

0.4 Complejidad con la poda:

Como se explicó en la parte de *resolucion con poda*, con la misma se cambia la forma de obtener el valor inicial de *peso_solucion* y a la k-partición que la respresenta. Mientras que el resto del algoritmo se mantiene, por lo que el análisis anterior solo cambia para los items A.1 y A.2. Los cuales van a ser reemplazados por la complejidad de la función que representa el funcionamiento de la poda. La misma va a distribuir a todos los nodos O(n) en un vector de tamaño k, O(k), e ir calculando el valor de *peso_solucion* O(m) (a lo sumo es la suma de todas las aristas) . En total O(m) + O(n) + O(k). Mientras que los siguientes pasos siguen conservando la misma complejidad. Por lo que ahora la complejidad total sería O($n^2 * k^n$) + O(k)

0.5 Experimentaciones:

Para observar los tiempos de ejecución del algoritmo se decidió trabajar sobre dos tipos de grafos los completos y los bipartitos. Esta elección se basa en que en los completos cada vértice es adyacente a todos los restantes. Como el problema a resolver es minimizar el peso de la k-particion. Ubicar en un mismo conjunto a nodos no adyacentes seria una buena idea. Ya que no adiciona ningún peso. En cambio al ser un completo si o si vamos a tener que ver con cuales de todos los adyacentes conviene ubicarlo realizando mas combinaciones que para cualquier otro tipo de grafo. Por lo que para representar el peor caso se utilizo a estos grafos. Mientras que los bipartitos representan un caso favorable ya que hay muchos nodos que no son adyacentes por lo que la cantidad de aristas son menores que para el caso anterior y como fue diseado

el algoritmo debería terminar al ver todas las combinaciones con a lo sumo dos conjuntos. De esta manera estaremos representado los tiempos de ejecuciones para casos que no deberían demorar mucho tiempo en encontrar la solución y para otros que teóricamente si.
Como la complejidad de nuestro algoritmo es $O(n^2 * k^n)$ dependiendo de dos variables. Ejecutamos distintos casos, tomando como variable a n y a k fijo. Y viceversa.

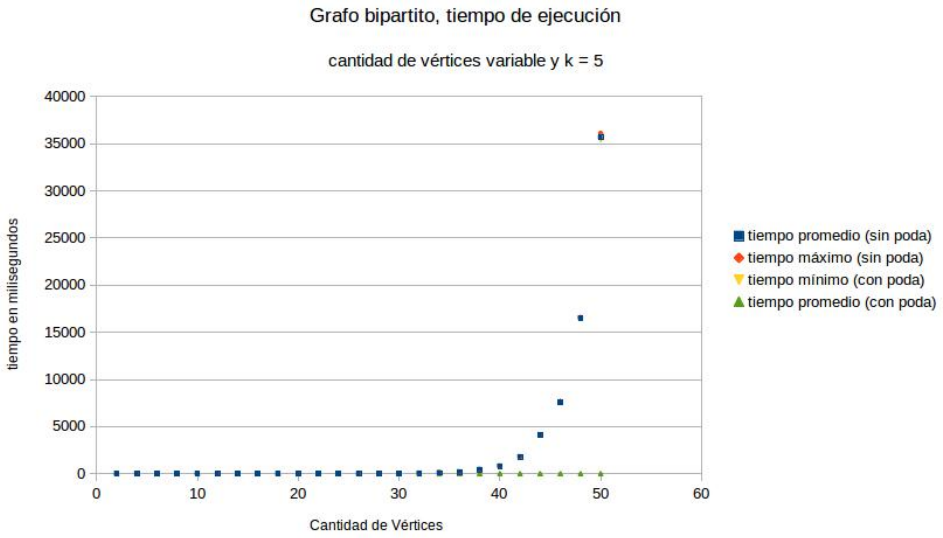


figura 1.a

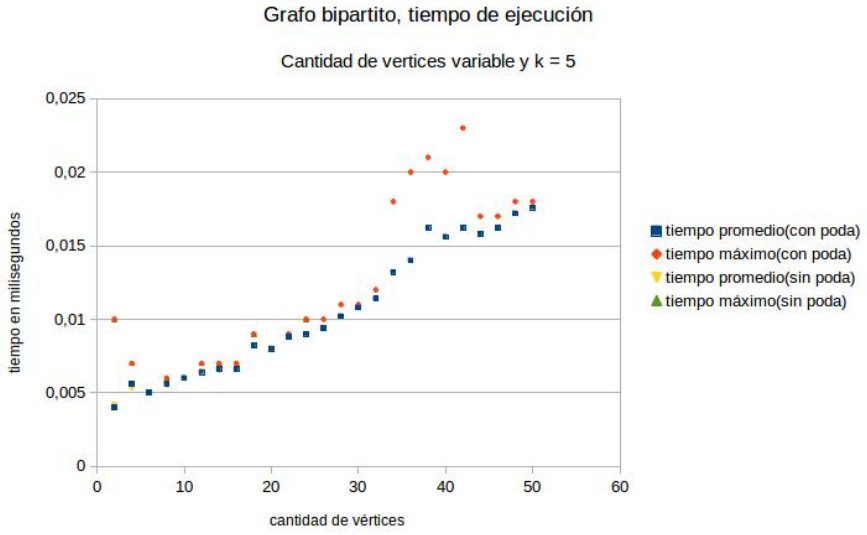
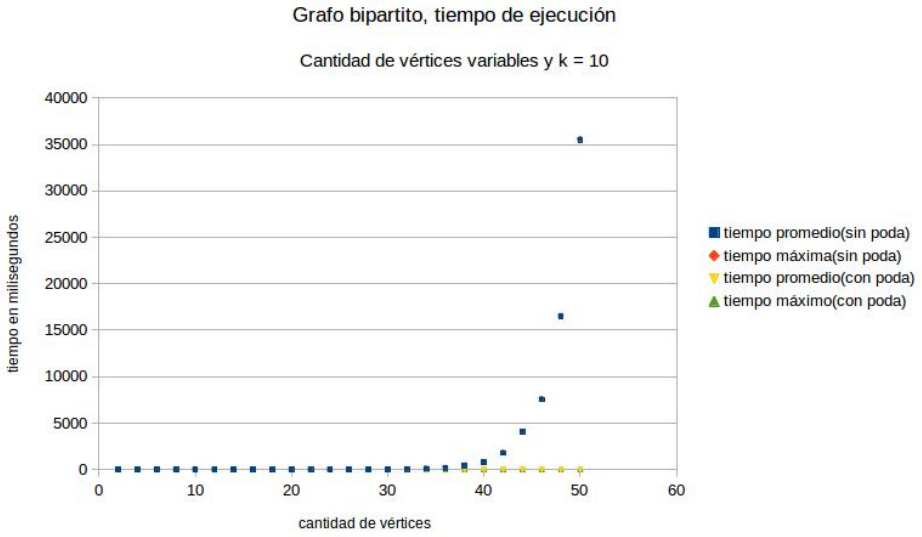


figura 1.b: Comportamiento de los valores mas chicos de la figura 1.a (ya que la escala establecida en la anterior figura no nos permite apreciar esto)

Se representa el tiempo de ejecución estableciendo como variable a la cantidad de vértices y fijando un k, el mismo de valor 5. Al hacer esto la complejidad que habíamos dado seria $O(n^2 * 5^n)$. Como podemos observar es un parámetro exponencial por uno polinómico. Su representación debería asemejarse a una curva. Como es de factor n, mientras crezca el valor de este parámetro, mas pronunciado sera el crecimiento de la curva. Lo cual puede observarse en la figura 1.a a partir de aproximadamente el valor 40 la función empieza a tomar valores cada vez mas altos. Además comparamos el tiempo de ejecución para las mismas instancias cuando se utiliza o no la mencionada poda. Como vemos, en aquellos casos en los que se la uso el tiempo de ejecución es menor. Llegando en algunos casos a haber una notable diferencia, esto se debe a que la cota va a empezar distribuyendo a los vértices entre los conjuntos que se posee. Como estamos en el caso de los bipartitos puede que la distribución haya sido la óptima. Y si no lo fue al menos el valor de suma_solucion

es menor que para el caso en el que todos los vértices están dentro del conjunto. Y el total de combinaciones



a realizar es menor.
figura 2.a

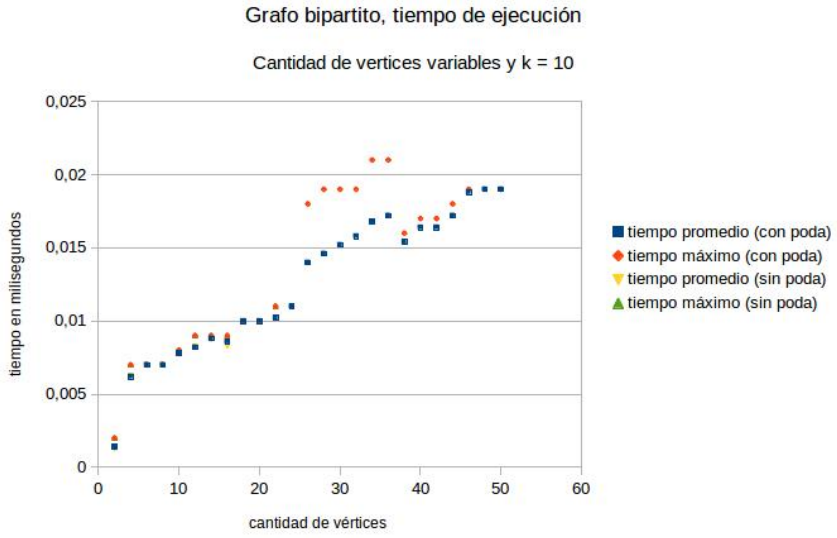


figura 2.b: Comportamiento de los valores mas chicos de la figura 2.a
A diferencia de la figura anterior para este caso aumentamos el tamaño de k. Como nuestro algoritmo empieza con un solo conjunto y ve todas las combinaciones posibles para el mismo y luego incrementa la cantidad hasta que haya k conjuntos o *suma_solucion* sea igual a cero. Debería bastar que sin importar la cantidad de conjuntos, sin son mas que dos, el algoritmo finalice luego de agregar al segundo conjunto. Y para mismas instancias de cantidad de vértice el tiempo de ejecución debería ser similar. Esto es lo que se observa entre la figura 1 y figura 2. El rango de tiempo de ejecución en ambos casos es el mismo.

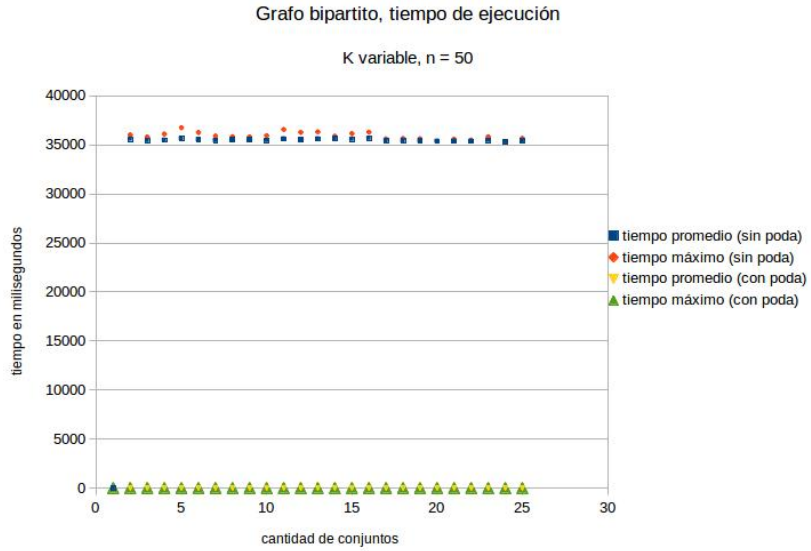


figura 3

Para el caso de la *figura* 3 se fijo un valor para la cantidad de vértices mientras que el valor de k se modifico en cada instancia. La misma se incremento en uno hasta la cantidad de conjuntos. Como se comento anteriormente, por el funcionamiento del algoritmo, y el tipo de grafo, este termina cuando se ven las combinaciones para un total de dos conjuntos. Entonces sin importar el valor de k (y ahora que n ,cantidad de vértices, esta fijo). Todas las instancias deberían terminar aproximadamente en el mismo tiempo. Y es lo que se observa en este gráfico el tiempo de ejecución se mantiene constante para todos los valores de k. Además cuando se utiliza la poda, los tiempos de ejecuciones siguen siendo menores.

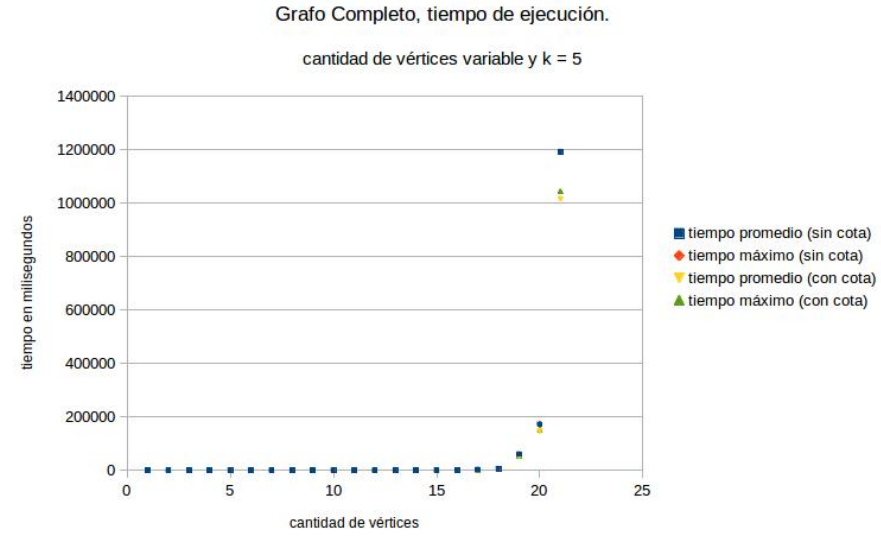


figura 4.a

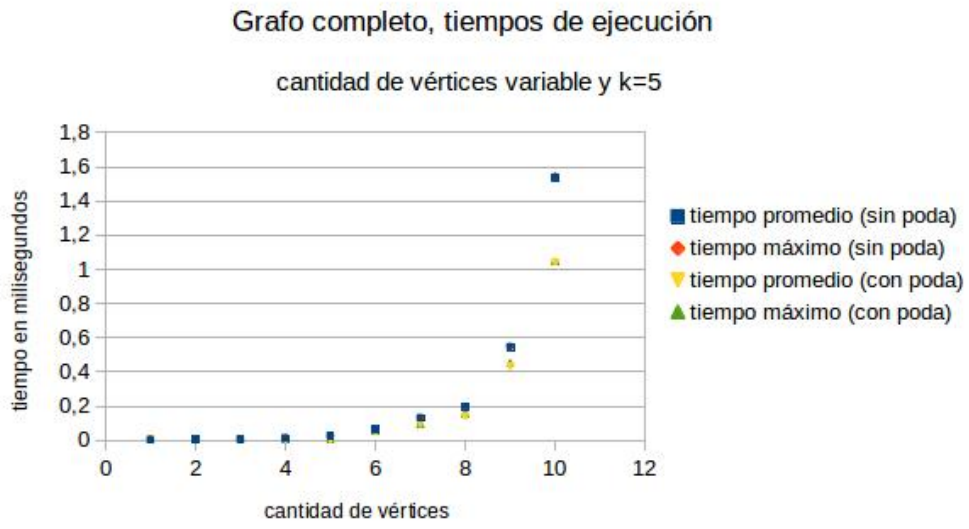


figura 4.b: Comportamiento de los valores mas chicos de la figura 4.a

En las figuras 4.a y 4.b se observan los tiempos de ejecución tomando como parámetro de entrada un grafo completo. A diferencia de los grafos bipartitos estos terminan para alguna combinacion con los k conjuntos. Ya que al usar mas vamos a tener a menos vértices juntos. Lo cual es favorable ya que ahora todo vértice tiene algún peso con los restantes. En ambas figuras se observa el crecimiento exponencial que tienen los tiempos de ejecución. Donde a diferencia de los anteriores gráficos el rango de tiempo es mucho mayor. Al usar la poda vemos que no hay una gran mejora. Esto se puede deber a que como ahora estamos trabajando con un completo la distribución que realiza al comienzo la poda no sirve de mucho, ya que si bien utiliza los k conjuntos. Como ahora todos son adyacentes la distribución inicial quizás se hizo juntando nodos que suman mucho peso entre ellos.

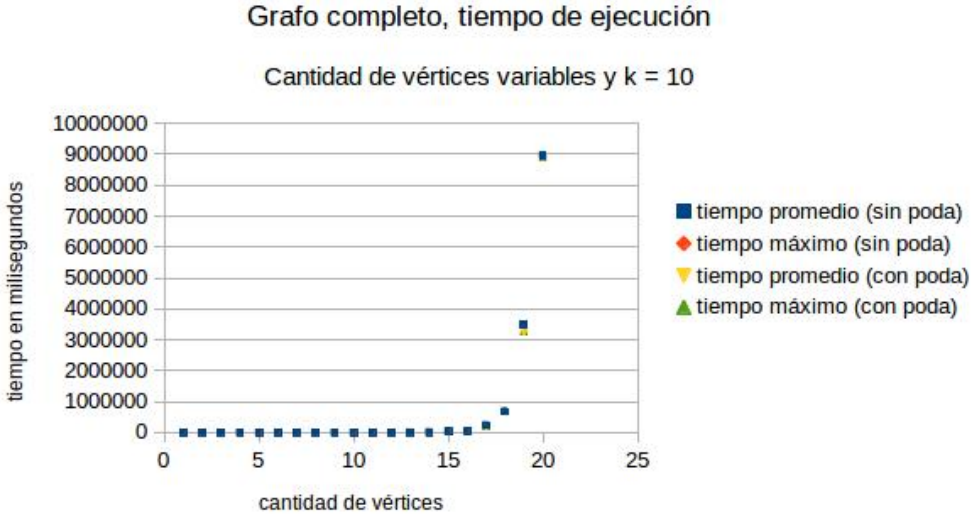


figura 5.a:

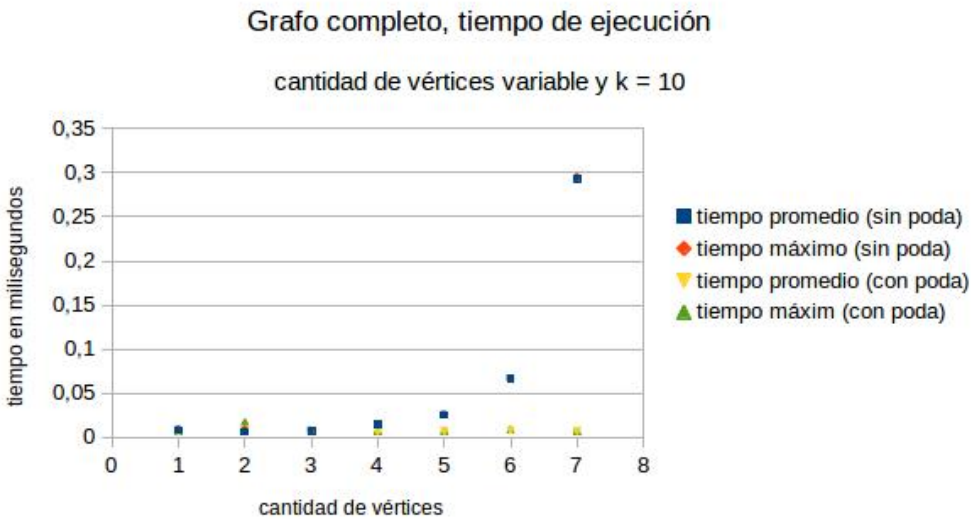


figura 5.b:Comportamiento de los valores mas chicos de la figura 5.a

Para el caso representado en la figura 5.a y 5.b se aumento la cantidad de conjuntos que para el caso de la figuras 4. Por la complejidad que establecimos, si aumentamos el valor de k la complejidad debería aumentar. Y como pueden observarse en las ultimas figuras esto ocurre. Si bien se utilizan la misma cantidad de vértices que para las figuras 4. El rango de tiempo es mucho mas alto. Y La poda funciona con efectividad para los primeros valores. Sobre todo para los menores a 11 vértice. Ya que la misma habrá distribuido a todos los vértices en un conjunto distinto y el peso de eso es cero, finalizando el algoritmo. Sin embargo, para los otros casos solo representa una leve mejora. Ya que establece una cota menor que la de empezar con todos los vértices. Pero aun así se siguen realizando aproximadamente 10^n combinaciones.

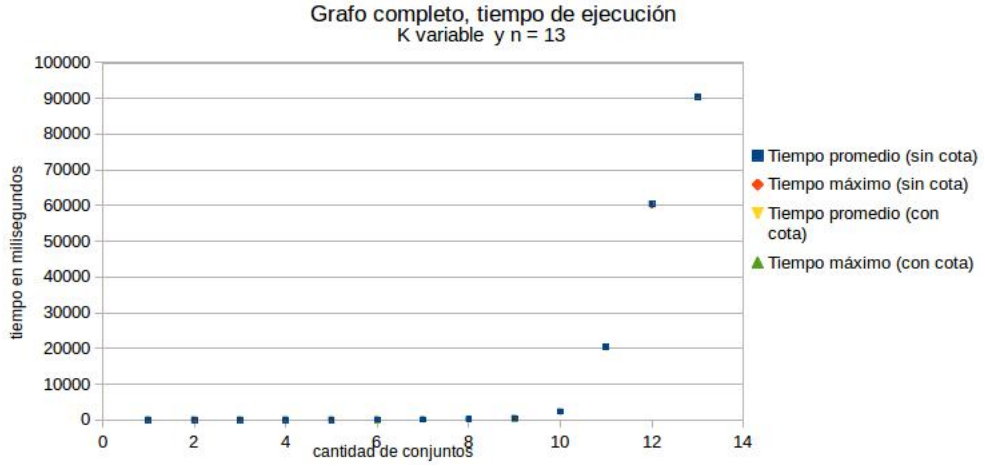


figura 6.a

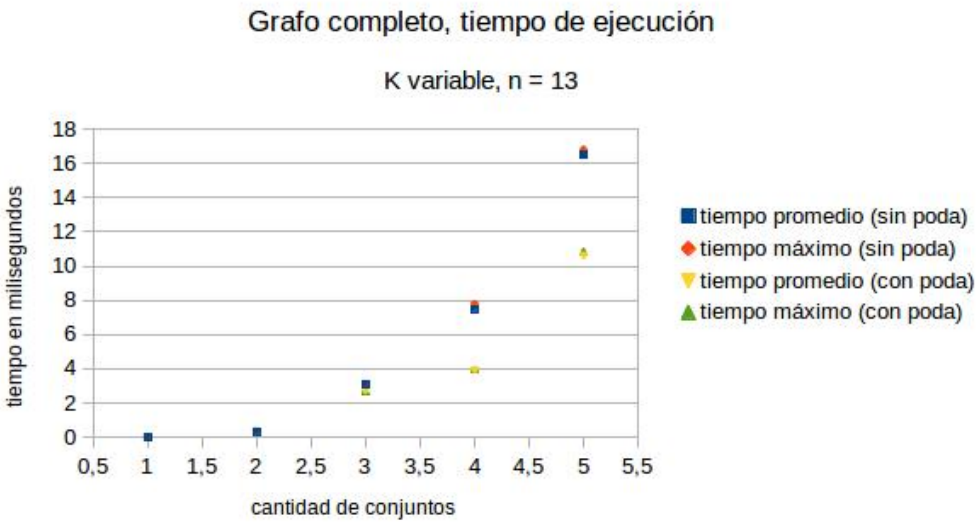


figura 6.b: Comportamiento de los valores mas chicos de la figura 5.a
En las figuras 6. Se observa el tiempo de ejecución al establecer un k variable y un n fijo. Si bien hay un crecimiento notable entre los valores de los tiempos de ejecución, se observa que estos son menos que cuando fijábamos un valor para k y n es variable. Por lo que podemos concluir que para obtener tiempos de ejecuciones cortos. Es preferible contar con un valor de k variable y n fijos. Mas aun si estos n no son valores muy grande ya que la complejidad seria solo un valor exponencial, O(k^c), c constante. A diferencia de cuando n es variable que es exponencial por una función cuadrática, O($n^2 * k^n$).

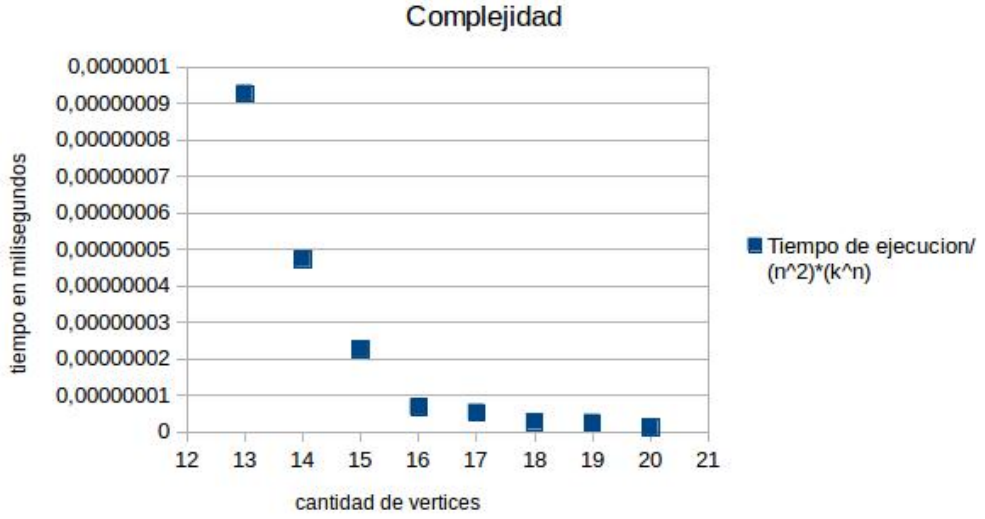


figura 7: finalmente tratamos de corroborar que nuestra complejidad era la planteada por lo que procedimos a dividir a los tiempos de ejecución por O($n^2 * k^n$). Si bien al principio se ve que decrece rapidamente. Luego comienza a tender a un mismo número cuando el valor de n aumenta. Pero debido a que cuando se incrementa el valor de n el tiempo de ejecución tambien solo podemos corroborar esto para un número muy acotado.