Ejercicio 3

a) Explicación de la heuristica

Antes de explicar la idea vamos a dar algunas definiciones y hacer una aclaración sobre la notación para aportar claridad:
Sea $G = (V, E)$
Def: Una *partición parcial* de G va a ser una partición de G a la cual le faltan algunos vértices.
Notación: Dada una partición parcial P de G, si falta agregar al vértice u, entonces $u \notin P$, de lo contrario $u \in P$.
Def: Dada una partición parcial P de G y un nodo $u \in V(G)$, decimos que un nodo $v \in V(G)$ es un *par* de u si $(u, v) \in E(G)$ y el peso de la arista (u, v) es máximo sobre los pesos de las aristas (u, z), para los $z \notin P$. u podría no tener ningún par, esto sucede cuando todos sus adyacentes pertenecen a P o directamente no tiene adyacentes.
Def: Dada una partición parcial P de G y un nodo $u \in V(G), u \notin P$, la *mejor manera* de agregar a u en P va a ser la que minimice la suma total de los pesos intrapartición de P con los nodos actuales y u. Esto también vale para cuando queremos agregar a u y a su par.

La idea va a ser ir tomando ciertos nodos del grafo según el valor de una variable *nodoActual* (que camiará de iteración en interación) e ir ubicándolos de cierta manera en la partición parcial P que vayamos generando. Con respecto al valor de *nodoActual* vamos a tener dos casos: si efectivamente representa un nodo de G, entonces seguro ese nodo va a pertenecer a la partición parcial (de ahora en más P) que estamos construyendo; de lo contrario, *nodoActual* tendrá un valor indicador (-1) de que no es ningún nodo.
Si nos encontramos en el primer caso, entonces vamos a tomar (si es posible) un nodo $u \notin P$ adyacente a *nodoActual* y un nodo v adyacente a u, v debe ser un par de u. Una vez hecho esto, ubicamos a u y a v en P de la mejor manera. Finalmente, *nodoActual* pasará a valer v y repetimos lo explicado para este nuevo valor. Si pudimos tomar al nodo u pero no u no tiene par, entonces solo ubicamos a u de la mejor manera y asignamos el valor -1 a *nodoActual*. Más abajo diremos que sucede cuando nos encontramos en el caso en que ni siquiera fue posible encontrar a u (porque *nodoActual* no tiene adyacentes, todos sus adyacentes ya pertenecen a P o $nodoActual == -1$).
Inicialmente ($P = \{\emptyset_1, \emptyset_2, ..., \emptyset_k\}$) el algoritmo va a tomar (si esto es posible) el par de nodos adyacentes donde el peso de la arista que los une es máximo sobre el peso de cada una de las demás aristas del grafo. En principio, no hay un criterio de elección para cuando existen varios pares de nodos que cumplen esto. Si no existe ningún par de nodos que cumpla esto, entonces no existe ningún par de nodos adyacentes, por lo cual cualquier partición que elijamos va a ser solución. Particularmente el algoritmo generará una partición donde ubique a todos los nodos en un mismo conjunto. En el caso de que sí exista este par de nodos, se procederá a ubicarlos dentro de P de la mejor manera. Una vez hecho esto, si el par de nodos agregados fue u y v, el paso siguiente será guardar todos los nodos adyacentes a v en alguna estructura de datos C y elegir como *nodoActual* a u, comenzando así el proceso descripto en el párrafo anterior. Podemos decir ahora, que cuando nos encontramos en el caso en el que *nodoActual* no tiene adyacentes o directamente no es un nodo, recurriremos a tomar un nodo de C.
Si en C no hay ningún nodo que no haya sido agregado P y todavía quedan nodos por agregar a P, entonces el algoritmo va a tomar un nodo u de los que faltan (en particular, el de número menor). Si u tiene un par v, entonces se procederá a ubicar a u y a v de la mejor manera en P y comenzará el proceso descripto anteriormente con $nodoActual = v$. Si u no tiene par, entonces se ubicará a u de la mejor manera en P y comenzará nuevamente el proceso con $nodoActual = -1$ (porque u no tiene adyacentes no agregados a P).
Si C sí tenía algún nodo u que no agregamos P, el procedimiento es equivalente: tomar a u, si tiene un par v entonces ubicar a u y a v de la mejor manera en P y comenzar de nuevo con $nodoActual = v$, si no tiene par entonces ubicar a u de la mejor manera en P y comenzar de nuevo con $nodoActual = -1$.
Para reforzar la idea, dejamos a continuación un pseudocódigo de alto nivel.

1: **procedure** HGolosa($G(V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}_+$)
2: Si $E == \emptyset$ devolver $P = \{V, \emptyset_1, ..., \emptyset_k\}$
3: Si $k == 1$ devolver $P = \{V\}$

4: $C = \emptyset, P = \emptyset$

5: Tomar $u_m, v_m \in V$ tales que $(u_m, v_m) \in E \land w((u_m, v_m)) \geq w((u, v))\ \forall u, v \in V, (u, v) \in E$
6: Insertar a u_m y v_m en conjuntos distintos pertenecientes a P
7: $nodoActual = u_m$
8: Agregar en C todos los adyacentes a v_m

9: **while** existe algún nodo en V que no esté en P **do**
10: $ady \leftarrow -1$
11: **if** $nodoActual \neq -1 \land tieneAdyacenteNoAgregado(nodoActual, P, G)$ **then**
12: $ady \leftarrow dameAdyacenteNoAgregado(nodoActual, P, G)$
13: Agregar en C todos los adyacentes a $nodoActual$ no agregados a P
14: **else**
15: **while** $C \neq \emptyset \land (ady == -1 \lor ady \in P)$ **do**
16: Sacar un nodo u de C y asignarselo a ady
17: **end while**
18: **if** $ady == -1 \lor ady \in P$ **then**
19: $ady \leftarrow dameNoAgregado(G, P)$
20: **end if**
21: **end if**

22: **if** $tieneAdyacenteNoAgregado(ady, P, G)$ **then**
23: $par \leftarrow dameParNoAgregado(ady, G, P)$
24: Agregar par y ady a P de la mejor manera posible
25: $nodoActual \leftarrow par$
26: Agregar a C, todos los adyacentes de ady que no pertenezcan a P
27: **else**
28: Agregar ady a P de la mejor manera posible
29: $nodoActual \leftarrow -1$
30: **end if**
31: **end while**
32: **end procedure**

Ya explicado el funcionamiento del algoritmo, es importante destacar que es un algoritmo goloso en *más de un aspecto*. Veamos los distintos tipos de candidatos que considera el algoritmo:

- Inicialmente, se fija entre todos los pares de nodos adyacentes que hay (estos son sus candidatos), cual es el que tiene un peso máximo en su arista, sobre todas las otras.
- Cuando toma un nodo u adyacente a $nodoActual$, se fija si puede tomar un nodo v que sea un par de u. Los candidatos son todos los adyacentes a u no pertenecientes a P.
- Una vez que tiene a u y a v (o solo a u) para agregar a P, se va a fijar todas las maneras posibles de agregar ambos (estos son los candidatos) y se va a quedar con la que menos peso haya sumado al peso de P sin estos nodos.

Podemos ver que el algoritmo toma una decisión golosa en los tres items anteriores. Es por eso que decimos que es goloso en más de un aspecto.

b) Cálculo del orden de complejidad

Como queremos analizar el peor caso del algoritmo, vamos a descartar los casos de las líneas 2 y 3, que representan el mejor caso del mismo.
Podemos ver que, en cada iteración el algoritmo agrega a la partición parcial P, a lo sumo dos vértices, con lo cual la cantidad total de iteraciones es lineal a la cantidad de nodos, o sea n. Para analizar el costo de una iteración, podemos comenzar por ver que, como mínimo, siempre vamos a hacer también una cantidad lineal a n de operaciones. Esto es debido a que el if de la linea 22 siempre se va a ejecutar y, como lo que hace es fijarse si existe algún nodo adyacente a ady no agregado a P, no le queda otra que fijarse nodo por nodo

a ver si alguno cumple esto. Para entender lo anterior es importante agregar que, en la implementación, trabajamos con matrices de adyacencia y tenemos un arreglo de booleanos, que nos permite saber si un nodo fue agregado a P o no. Por ahora vimos que una iteración es $\Omega(n)$, por lo cual nuestro algoritmo es $\Omega(n^2)$. Entre las tantas cosas que faltan considerar, está el costo de agregar el o los nodos a P (líneas 24 y 28). Es fácil ver que el peor caso es cuando hay que agregar dos nodos a P de la mejor manera, y, el hecho de asumir que en un peor caso siempre se agregan dos nodos, no contradice el cáculo que venimos haciendo hasta ahora ya que la cantidad de iteraciones seguiría siendo lineal y el if de la linea 22 es independiente de este hecho.

Analicemos entonces, el costo de agregar dos nodos u y v en P de la mejor manera: como lo que queremos hacer es minimizar la suma total de los pesos intrapartición, no queda otra que probar todas las combinaciones, es decir:

1. Calculamos la suma de los pesos de las aristas que unen a u con los vértices de cada conjunto $p_j \in P, j \in [1..k]$ y guardamos esta información en un vector. Cada elemento del vector representa un conjunto de P, de manera tal que el vector en una posición contiene el peso que se le agregaría a P si agregáramos a u en ese conjunto.

2. Recorriendo el vector creado en 1. y calculando lo mismo pero para el nodo v (sin necesidad de generar otro vector), nos fijamos cuales son los dos conjuntos de P (podrían ser el mismo) tales que, agregando a u y a v en ellos se minimiza el peso que se le va a sumar al peso anterior de P.

Para realizar 1. debemos recorrer los k conjuntos de P y, por cada conjunto sumar el peso determinado por la arista que une a u con cada vértice de ese conjunto. Como no podemos saber cuantos vértices hay en cada conjunto y no hay una manera de acotar esto finamente, vamos a sumar el costo de recorrer los k conjuntos con el costo de calcular las sumas de los pesos de las aristas. Manteniendo el peor caso de agregar 2 elementos en cada iteración, al finalizar el algoritmo el costo total de haber realizado este proceso en cada iteración va a ser:

$$O(\sum_{i=1}^{n/2} k + 2i) = O(k(n/2)) + O(2\sum_{i=1}^{n/2} i) = O(kn) + O(n^2)$$

En 2., hacemos algo similar a lo que hacemos en 1. (solo que sin crear un arreglo) pero para el nodo v y, paralelamente vamos recorriendo el arreglo creado en 1. Es decir, por cada vez que calculemos la suma de los pesos de las aristas que unen a v con los nodos de un conjunto particular j (llamémoslo $sumaPesosV_j$), vamos a recorrer (*) el arreglo creado en 1. (que en cada posición tiene un $sumaPesosU_i$) y quedarnos con la suma $sumaPesosV_j + sumaPesosU_i$ más chica.
Siguiendo el mismo razonamiento que antes, el costo de haber realizado este procedimiento en cada iteración del algoritmo, al final estará definido por:

$$O(\sum_{i=1}^{n/2} k + 2i + k^2) \quad (agregamos\ un\ k^2\ por\ (*))$$

$$= O(k(n/2)) + O(2\sum_{i=1}^{n/2} i) + O(k^2(n/2))$$

$$= O(kn) + O(n^2) + O(nk^2) = O(n^2) + O(nk^2)$$

Podemos ver que, como esto tiene una complejidad mayor que la de 1., la complejidad de hacer ambas cosas es $O(n^2) + O(nk^2)$.

Presentamos a continuación una lista de las operaciones que faltan considerar, con sus respectivas complejidades:

- La línea 5 es $O(n^2)$ porque requiere recorrer para cada nodo, sus adyacentes y dijimos que utilizamos matrices de adyacencia, con lo cual esto implica recorrer la matriz.

- La línea 6 es $O(1)$ ya que son dos push_back en un vectores vacíos dentro de un vector de vectores. Acceder a los vectores vacíos es $O(1)$ ($http://www.cplusplus.com/reference/vector/vector/operator[]/$) y hacer push_back en vectores vacíos también lo es ya que la complejidad es $O(1)$ amortizada, con lo cual en el peor caso es lineal a la cantidad de elementos y aca esa cantidad es 0 ($http://www.cplusplus.com/reference/vector/vector/push\_back/$).

- Agregar a C todos los nodos adyacentes a algún nodo (líneas 13, 26). En la implementación, C es una lista de enteros (list$< int >$), donde la complejidad de agregar un elemento al final (que es lo que hacemos) es constante ($http://www.cplusplus.com/reference/list/list/push\_back/$). En el peor caso, vamos a tener que agregar n nodos siempre (un peor caso inalcanzable) y aún así la complejidad final estaría dada por $O(n^2)$ (cantidad lineal de iteraciones por costo de agregar los elementos).

- Las funciones dameAdyacenteNoAgregado, dameParNoAgregado y tieneAdyacenteNoAgregado, tienen un comportamiento similar. En el peor caso, las tres van a ser $O(n)$ porque van a fijarse todos los adyacentes del nodo (que podrían ser $n-1$) y, como saber si un nodo fue agregado a P o no es $O(1)$, el costo final es $O(n)$. Como estas funciones son llamadas una cantidad constante de veces dentro del ciclo principal del algoritmo, al finalizar el costo es en el peor caso $O(n^2)$.

- Tomar un nodo no agregado es $O(n)$ ya que tenemos un arreglo en el que cada posición representa un nodo y el arreglo en esa posición tiene un bool que nos dice si fue o no agregado. Como también se ejecuta una cantidad de veces constante dentro del ciclo principal del algoritmo, el costo total es en el peor caso $O(n^2)$.

- La guarda del ciclo principal es $O(1)$ ya que en la implementación contamos con un contador que nos dice cuantos nodos fueron agregados a P y, como nunca sacamos un nodo de P, basta con evaluar ese contador (que es $O(1)$) para saber si hay que hacer una iteración más o no.

- El código de las líneas 15, 16 y 17 es $O(n)$ dentro de una iteración. Esto es así porque C no tiene elementos repetidos ya que en la implementación contamos con un arreglo (similar al que nos dice los nodos agregados a P) donde cada posición representa un nodo y en esa posición hay un bool que indica si el nodo fue agregado a C o no. Una observación importante para agregar es que, si un nodo u sale de C, si no estaba en P seguro se va a agregar inmediatamente, si ya estaba en C entonces simplemente se va a descartar. En ambos casos, u **no vuelve a entrar a** C. Dicho lo anterior, podemos ver que en un peor caso inalcanzable, es costo total de haber ejecutado esta operación en cada iteración es $O(n^2)$.

- La línea 8 es $O(n)$ ya que en el peor caso, v_m tiene $n-1$ adyacentes y dijimos que agregar un elemento a C es $O(1)$.

Como vemos que las complejidades listadas no superan la complejidad de agregar dos nodos por iteración calculada antes y ya analizamos todas las operaciones que realiza el algoritmo, concluimos que su complejidad es $O(n^2) + O(nk^2)$.

c) Instancias para las cuales la heurística no es buena

Consideremos un grafo G_4 (n = 4, nodos A, B, C y D) donde hay una arista (A, B) de peso máximo y todas las demás aristas tiene peso estrictamente menor. Pensemos al grafo como un K_4 sin una arista, de manera tal que los nodos A y B estén conectados a los nodos C y D pero estos dos últimos no sean adyacentes entre sí.
Observemos la figura que está a continuación y muestra exactamente como sería este grafo con algunos pesos elegidos de manera no arbitraria.

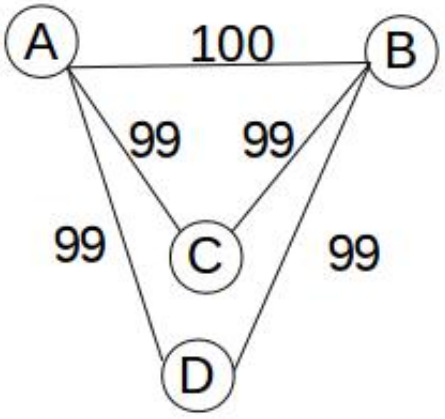
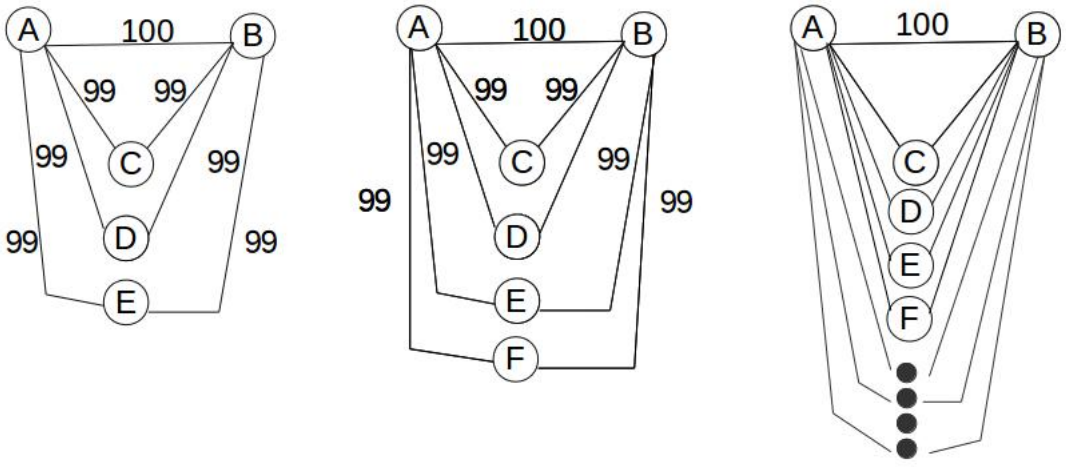


Figure 1: G_4

Pensemos como trabajaría el algoritmo con G_4 y con $k = 2$: inicialmente tomaría la arista (A, B) por ser la (única) que tiene peso máximo, ubicando así a A y B en conjuntos distintos de P. Luego, trabajaría con A o con B. Sin pérdida de generalidad, supongamos que trabaja con B y encola los adyacentes de A que no están en P (o sea C y D). Ahora va a elegir un adyacente a B para meter en la partición, supongamos que elige a C (nuevamente, no perdemos generalidad porque si eligiera a D sucedería lo mismo al final). Ubicar a C de la mejor manera posible en P significa probar de todas las maneras y quedarse con la mejor, pero solo hay dos maneras (porque $K = 2$) y ambas suman lo mismo: 99. Dado que resta ubicar a D, es fácil ver que, como C y D no son adyacentes pero C sí es adyacente a B y A, va a suceder lo mismo. Es decir, de cualquier manera que ubiquemos a D, el peso que se le va a agregar a P va a ser 99. Esto concluye que cualquier orden que elija el algoritmo para tomar los nodos, la suma va a ser siempre (en este caso) 198.
Claramente no es la forma óptima de ubicar los nodos en P, ya que si hubieramos ubicado a A y B en un mismo conjunto de P y a C y D en el otro conjunto, la suma sería 100.

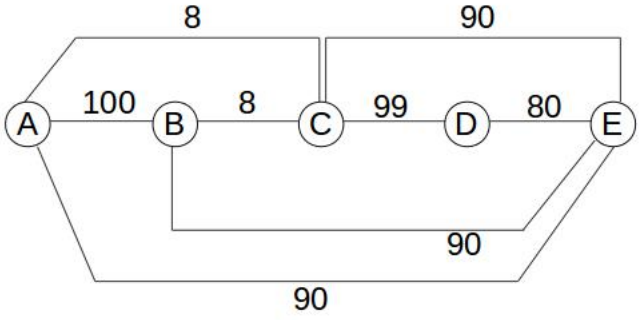
Podríamos generalizar este caso para que el algoritmo sea arbitrariamente malo cuando $k = 2$. Para lograr esto, simplemente agregamos más nodos y los conectamos únicamente con A y B.



Los primeros dos grafos son G_4 con uno (E) y dos nodos más (E y F), respetando siempre la manera de conectar vértices (por cada vértice agregado, éste debe ser adyacente necesaria y únicamente a A y B). El tercer ejemplo describe que podríamos seguir agregando vértices hacia abajo que respeten las adyacencias necesarias (no pusimos los pesos de las demás aristas por una cuestión de espacio), agrandando más y más la brecha entre la suma de la partición óptima y la que devuelve la heurística. Entonces, para toda esta clase de grafos (y no solo para el ejemplo particular de G_4) el algortimo es malo, ya que siempre va a elegir la arista de peso máximo, separando así sus extremos en conjuntos distintos. En estos grafos, hacer eso constituye una mala decisión, porque luego por cada nodo que se agregue, *siempre* se va a estar sumando 99, cuando en realidad, la suma óptima siempre es 100.
Es importante ver también que, los pesos 100 y 99 fueron elegidos con la intención de hacer evidente el problema, pero podrían ser otros y podrían no ser valores tan cercanos. Incluso, no es necesario que, para los nodos T distintos de A y B, se cumpla que el peso de (A, T) sea igual al peso de (B, T). La restricción en cuanto a los pesos que se debe cumplir para que el algoritmo no de la solución óptima, es que dados dos nodos distintos de A y B, llamemoslos C y D, sea cierto que $w((A, C)) + w((B, D)) > w((A, B)) \land w((A, D)) + w((B, C)) > w((A, B))$. Si eso sucede, y el grafo es uno de la clase que describimos antes, entonces seguro la heurística no da la solución óptima.

La clase de grafos presentada anteriormente muestra que el criterio goloso inicial de tomar la arista de peso máximo y separar sus nodos en conjuntos de P distintos, puede traer problemas cuando $k = 2$. A continuación, vamos a mostrar que también puede traer problemas la decisión golosa de ubicar los nodos de la mejor manera posible en un determinado momento. Veremos que ese criterio, combinado con la idea de ir tomando los nodos de a pares, siempre que sea posible, puede alejarnos de la solución óptima.
Dado que lo que nos interesa es ver los problemas que pueden traer las decisiones que toma nuestro algoritmo, para simplificar los ejemplos y que se entienda la idea, vamos a trabajar con $k = 3$.

Consideremos el siguiente grafo:



Tratemos de seguir paso a paso lo que haría el algoritmo.

1. Busca la arista de peso máximo, que en este caso es (A, B) y ubica a A y B en conjuntos de P distintos. En este caso, $P = \{\{A\}, \{B\}, \emptyset\}$. Hasta ahora, el peso de P es 0.

2. Decide con cual va a trabajar. Sin pérdida de generalidad (y de hecho, el algoritmo funciona exactamente así si en la entrada ponemos A = 1, B = 2, C = 3, D = 4 y E = 4), digamos que el algoritmo elige a B y encola a los adyacentes de A distintos a B.

3. Toma a C junto con su par D y los ubica de la mejor forma posible. En este caso, como C es adyacente a todos los demás nodos y D es adyacente a C y E pero no a A y B, la mejor manera es ubicar a C en un conjunto solo y a D junto con A o B. Como el algoritmo debe quedarse con una manera, elige ubicar los nodos de manera tal que $P = \{\{A, D\}, \{B\}, \{C\}\}$. Vemos que, gracias a esta manera de ubicar los nodos, el peso de P sigue siendo 0. Esto es lo que nos va a perjudicar más adelante.

4. Finalmente, queda un solo nodo por agregar, E. Vemos que la mejor manera de agregar a E, es agregarlo junto con B o con C y ambas suman 90 al peso de la partición. El algoritmo elige ubicarlo junto con B, de manera tal que la solución que devuelve es $P = \{\{A, D\}, \{B, E\}, \{C\}\}$, de peso 90.

El problema surge en el paso 3, cuando el algoritmo ubica a C y su par D. En ese momento, decide que el conjunto libre sea ocupado únicamente por C, porque de cualquier de esta manera estaría sumando 0 al peso de P. Pero vemos que esta decisión termina siendo perjudicial para el futuro, ya que no se había tenido en cuenta que el nodo que faltaba ubicar iba a ser adyacente a todos los demás ya ubicados. Claramente la solución que devuelve el algoritmo no es la óptima, ya que $P* = \{\{A, D\}, \{B, C\}, \{E\}\}$ tiene peso 8.

d) Experimentación

Hemos realizado una experimentación sobre grafos aleatorios y grafos completos para medir los tiempos de ejecución. Los grafos aleatorios tienen *todos sus valores aleatorizados*, es decir, desde la forma del grafo hasta los pesos de las aristas. Los grafos completos en cambio, tienen solo los pesos de sus aristas aleatorizados de manera tal que cada peso está en el rango [0, 50] (en los grafos aleatorios este rango es el mismo). Además, dado que la complejidad del algoritmo está en función de k y de n, realizamos experimentos dejando fijo el k y variando el n y al revés.
En cada experimento, se puso a correr 5 veces el algoritmo sobre las mismas instancias y se tomó el tiempo mínimo, máximo y promedio (para evitar que las mediciones se vean afectadas por factores externos). Además, se dividieron los tiempos (en algunos casos hasta dos veces) para ver si empíricamente la complejidad calculada anteriormente es coherente con las mediciones.

Presentamos los gráficos del primer experimento a continuación.

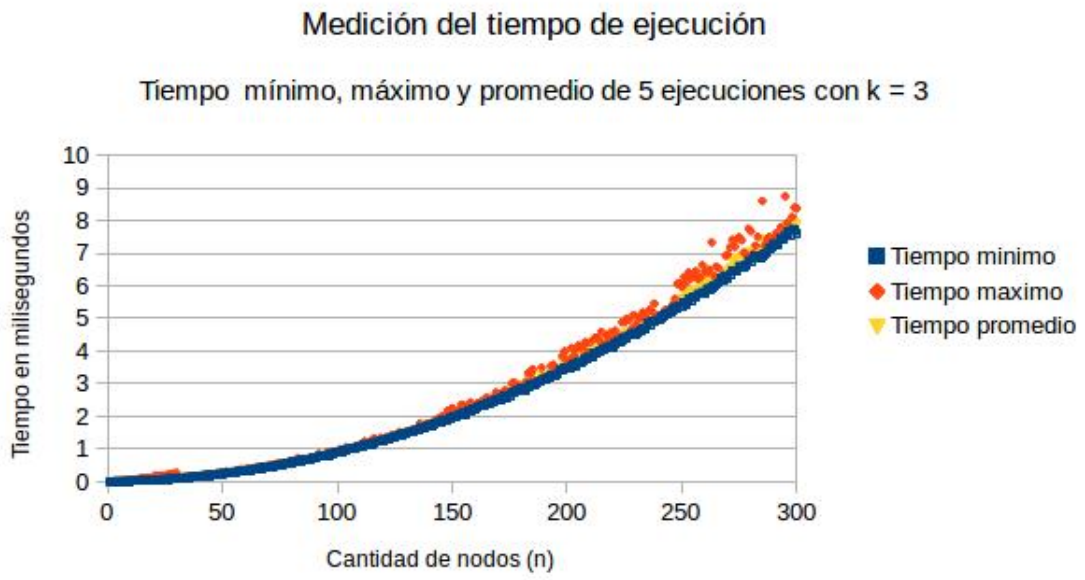


Figure 2: En este experimento, hemos elegido instancias compuestas por grafos aleatorios. Decidimos mantener el valor de k fijo en 3 e ir variando el n, para ver si efectivamente los tiempos nos dan en función de él. Podemos observar que los tres tiempos son una curva que, en principio, no sabemos si se trata de n^2. Tampoco se sabe si el tiempo está variando en función únicamente de n, como debería ser si nuestro análisis de complejidad fue correcto.

Vimos que el gráfico anterior nos dice como varía el tiempo sobre el conjunto de instancias elegido, pero no nos da la información suficiente como para ver si el análisis de complejidad fue correcto, por lo cual vamos a trabajar sobre los valores del gráfico anterior para obtener más datos.

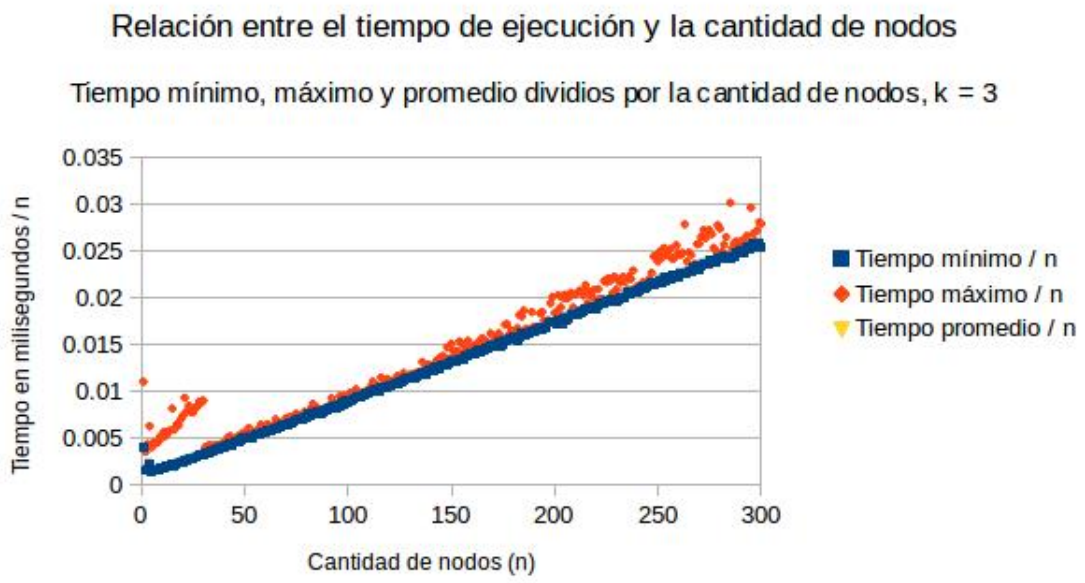
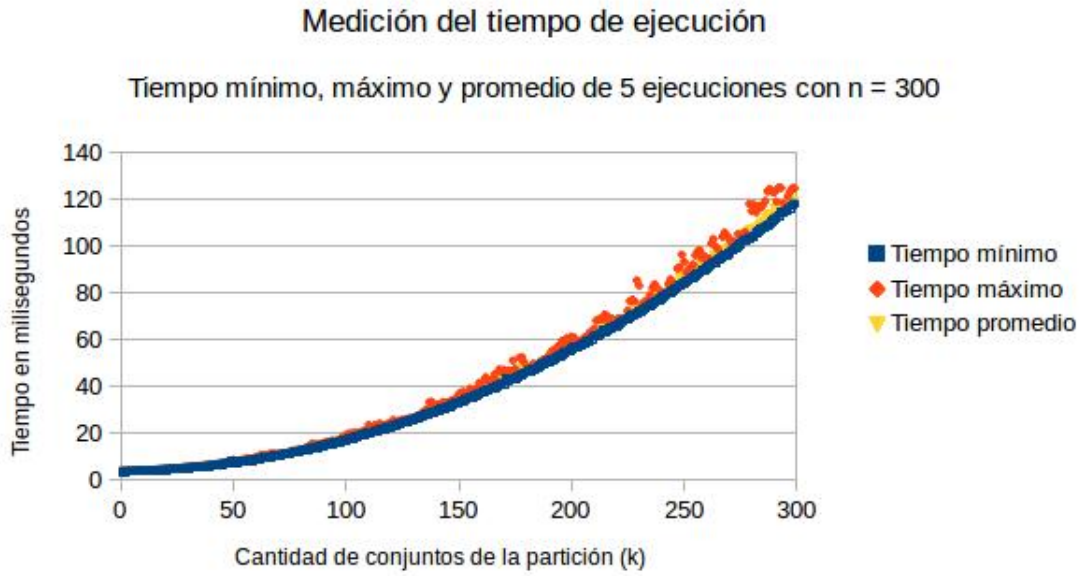


Figure 3: Dado que la complejidad del algoritmo es $O(n^2) + O(nk^2)$ y aca estamos trabajando con un k constante, nos interesa ver si los tiempos que estamos obteniendo dibujan una curva del estilo n^2. Para ver si se trata de este tipo de curva, dividimos los tiempos obtenidos anteriormente por n y obtuvimos el siguiente gráfico. Claramente podemos ver que los tiempos en el gráfico se asemejan a una recta. Más aún, el tiempo mínimo que es el más significativo (porque se acerca más a lo que tardaría el algoritmo si corriera de manera aislada a los demás procesos) es claramente una recta. Si la curva anterior no fuera algo del estilo n^2 (si tuviera un grado mayor o estuviera en función de otra cosa), entonces no estaríamos obteniendo este gráfico.

En el experimento anterior, decidimos variar el n y mantener el k con un valor fijo. Ahora vamos a hacer exactamente lo contrario y tratar de corroborar lo mismo que antes.



Decidimos trabajar con un n relativamente grande para que los tiempos sean significativos. De esta manera, fuimos variando el k desde 0 hasta 300 (valores fuera de este rango no tendrían mucho sentido) y

obtuvimos estos tiempos. Al igual que antes, este gráfico no nos da mucha información. Esperaríamos que lo que dibujan los tiempos fuera una curva del estilo k^2, de esta manera sería coherente a nuestro análisis. Para ver si esto se cumple, al igual que antes, dividimos los tiempos obtenidos por k.

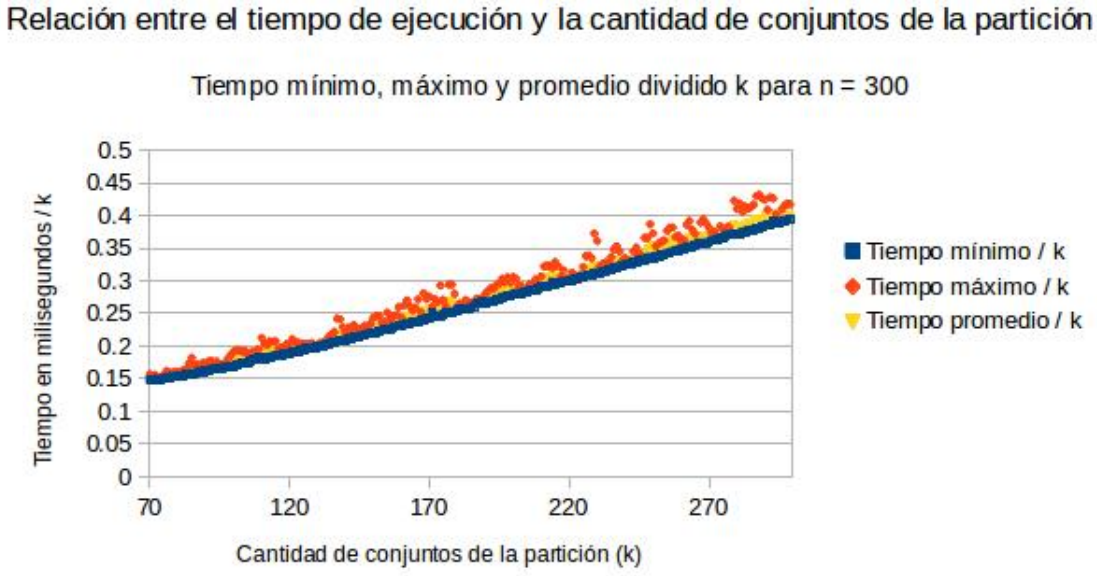


Figure 4: Al igual que con el experimento anterior, dividimos por la variable que sospechamos nuestros tiempos están en función únicamente de ella y obtenemos una recta (se puede observar de manera clara con el tiempo mínimo, al igual que antes), lo cual es coherente a nuestro análisis. Es importante recalcar que los tiempos están graficados a partir de $k = 70$. Esto se debe a que los tiempos con n chico generaban cierta distorsión en el gráfico y, como estamos interesados en el comportamiento asintótico del tiempo, podemos recortar esos valores sin perder información.

Los experimentos anteriores fueron sobre conjuntos de instancias de grafos aleatorios. Los que vienen a continuación están hechos sobre conjuntos de grafos completos que tienen aleatorizado únicamente el peso de sus aristas.
Hicimos un procedimiento similar al anterior pero agregando un gráfico más para ver como se comportan los valores obtenidos al dividir una vez más los tiempos.
Hemos elegido esta familia particular de grafos porque representan un caso en el que el algoritmo debe trabajar mucho más que con otra familia, como por ejemplo los grafos bipartitos.

Al igual que antes, primero vamos a ver que pasa al variar el n y dejar fijo el k y luego al revés. Llegaremos a la conclusión de que asintoticamente no hay cambios respecto a los experimentos anteriores (es decir, los gráficos son similares). Esto es debido a que al trabajar con grafos aleatorios, como estamos trabajando con muchos tipos de grafos, es probable haber generado instancias de peor caso (o cercanas a un peor caso).
No entraremos en detalle sobre lo que hicimos con los tiempos ya calculados debido a que es lo mismo que describimos antes (dividir por n, dividir por k y ahora se agrega una división más).

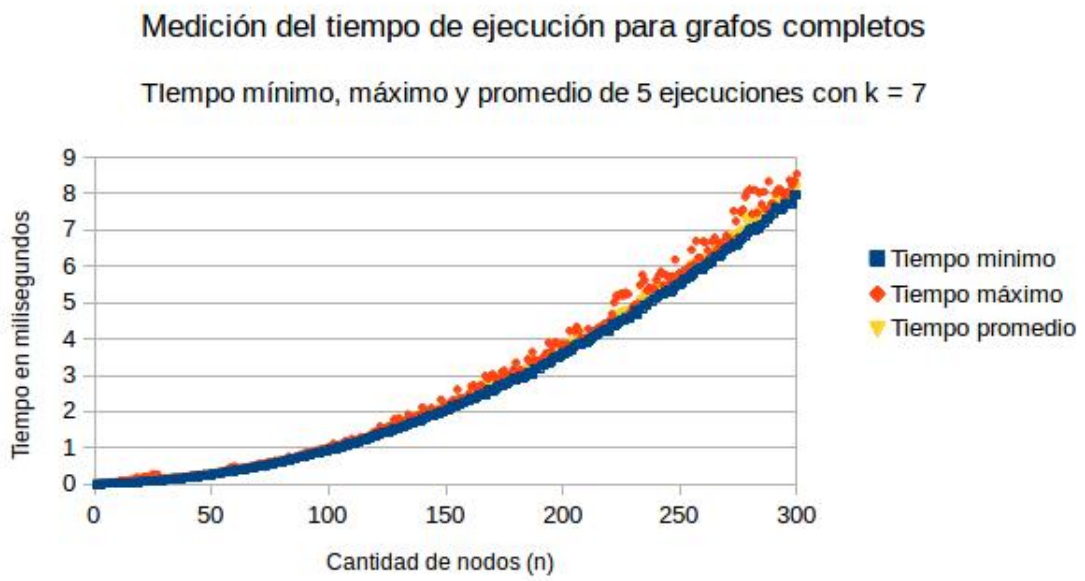


Figure 5: El $k = 7$ fue arbitrario igual que antes y no tiene mucha importancia ya que queremos ver que pasa con el n.

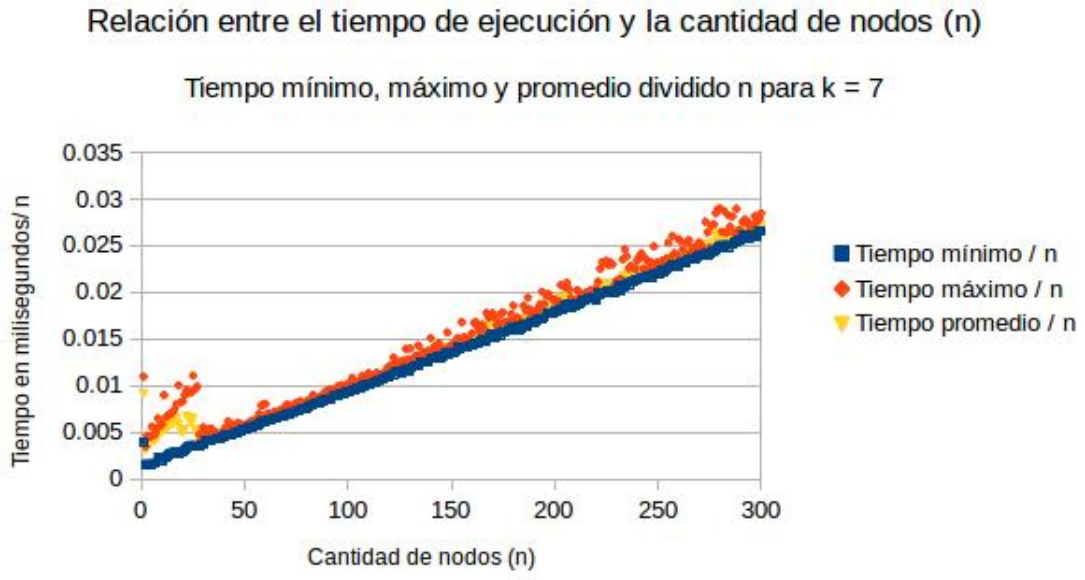


Figure 6: Al dividir por n observamos que obtenemos una recta en los tiempos (sobre todo el tiempo mínimo), que es lo esperado.

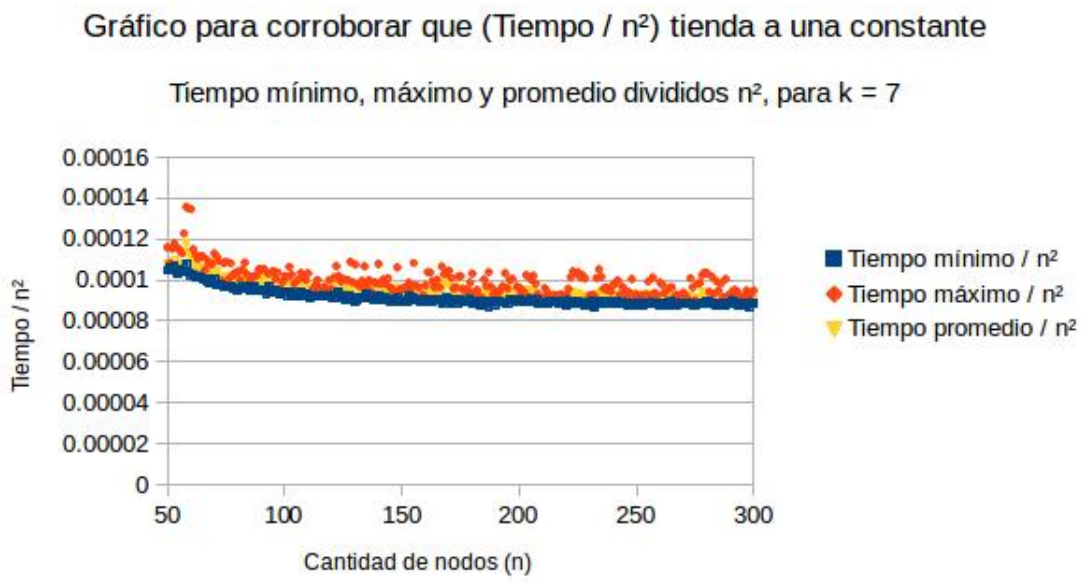


Figure 7: Para asegurarnos aún más de que estamos en lo correcto, dividimos una vez más por n los valores del gráfico anterior (que formaban una recta o por lo menos algo que se asemeja mucho a una). Vemos que los valores se acumulan alrededor de una constante a medida que aumenta el n. Al igual que antes, recortamos los valores iniciales que no era muy representativos.

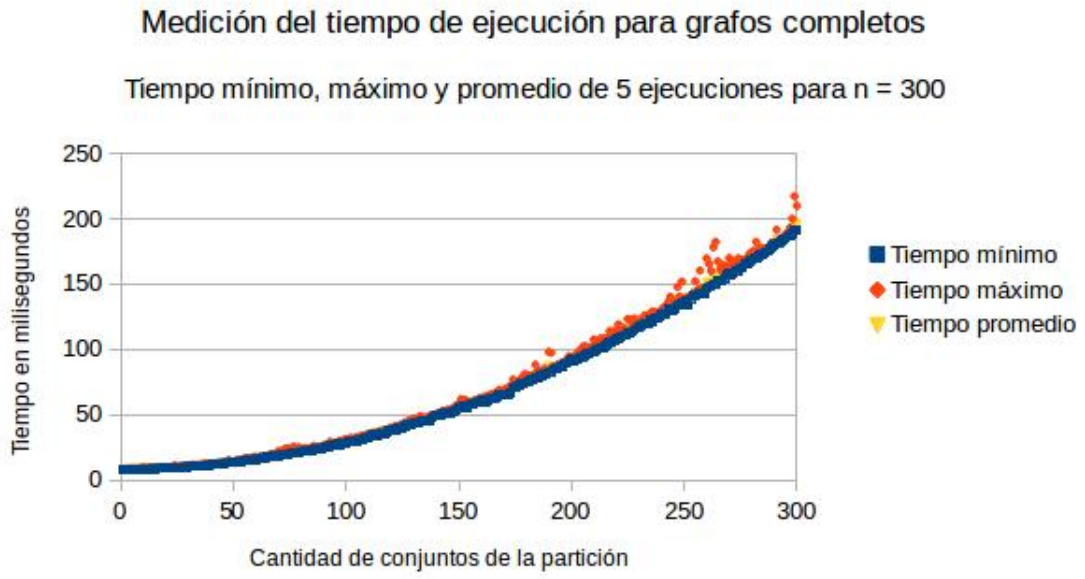


Figure 8: Vemos como son los tiempos obtenidos con grafos completos relativamentes grandes variando el k.

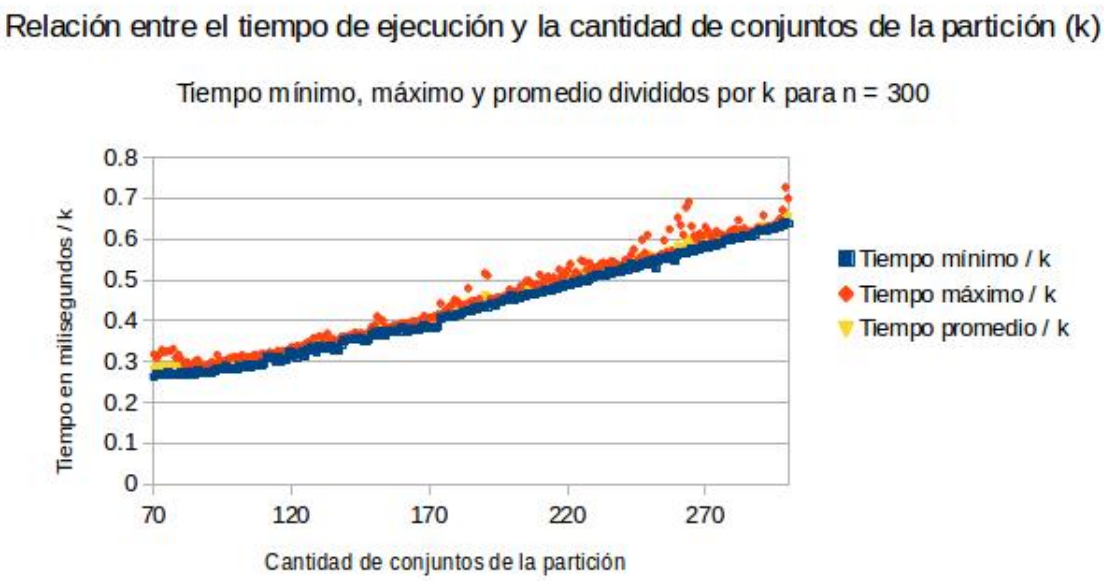


Figure 9: Nuevamente, realizamos la división y vemos que obtenemos una recta. También recortamos algunos valores iniciales para poder observar el comportamiento asintótico más fácilmente.

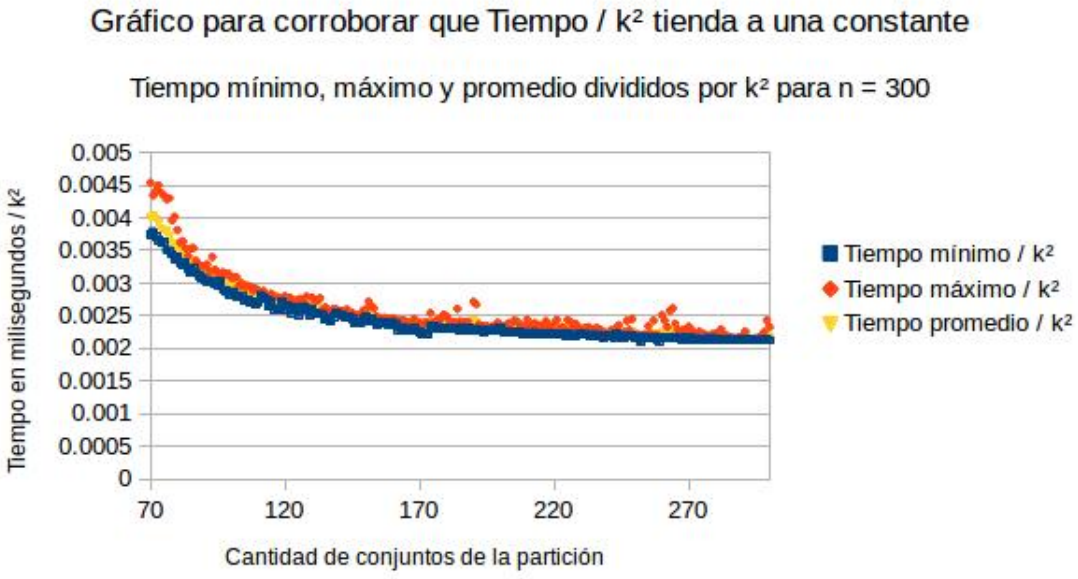


Figure 10: En este gráfico es un poco más dificil quizás, convencerse de que los valores tienden a una constante. Hemos recortado, como se puede observar, algunos valores iniciales y sin embargo pareciera que los valores van decreciendo. De todas formas, podemos ver que a partir de cierto valor de k, la curva empieza a decrecer de manera mucho menos pronunciada. Es decir, bastaría con recortar más valores y el comportamiento asintótico sería el mismo, porque el decrecimiento pronunciado se produce entre los valores para $k \in [70..170]$.