

Problema a resolver:

El problema esta dado por la siguiente situación: tenemos en un "lista" con una cantidad $3*n$ de números(n un número fijo).

Para i desde 0 a $n-1$, vamos a decir que la posición i en la lista va a ser *Izq* del edificio i -ésimo, $i+1$ va a ser *Alt* del edificio i -ésimo e $i+2$ va a ser *Der* del edificio i -ésimo.

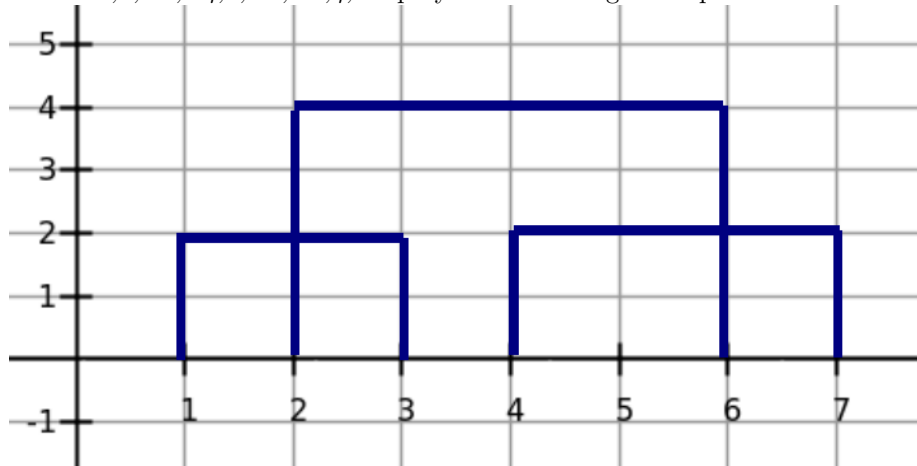
A grandes rasgos vamos a tener una lista de n edificios (interpretamos a un edificio como una tupla $\langle Izq, Alt, Der \rangle$) con una base en común implícita que es 0 .

Vamos a utilizar esta notación para referirnos a los edificios.

Por ejemplo para un entrada de la forma:

$lista = 1, 2, 3, 4, 2, 7, 2, 4, 6$ y $n=3$ tendríamos:

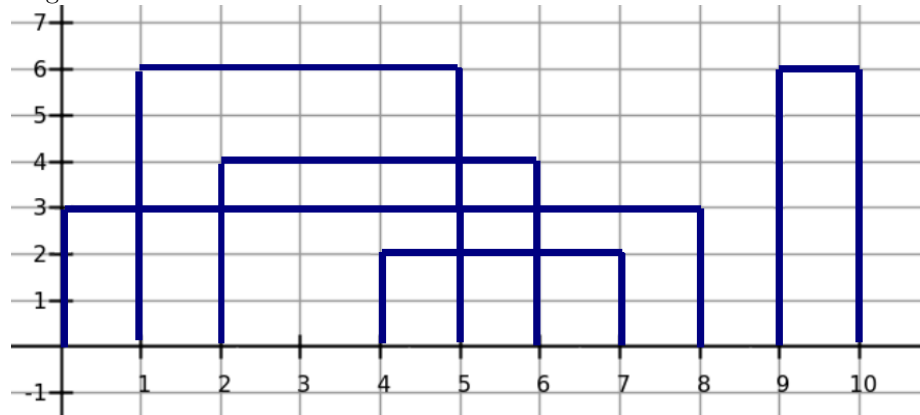
$lista = \langle 1, 2, 3 \rangle, \langle 4, 2, 7 \rangle, \langle 2, 4, 6 \rangle$ proyectada en un gráfico quedaría:



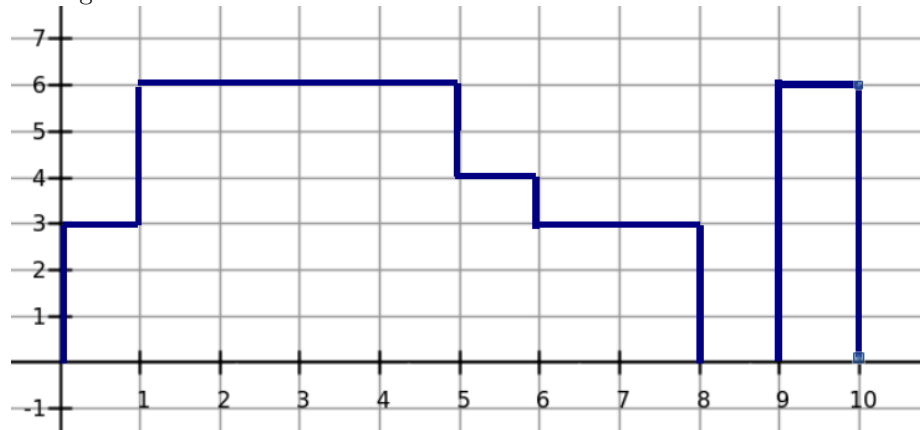
Lo que queremos hacer es "eliminar todas las líneas interiores del gráfico", quedarnos con su contorno (se obtiene el mismo resultado "siguiendo con el dedo el gráfico") para luego poder dar la solución final que explicaremos más adelante.

Veamos un ejemplo de eliminación de líneas interiores y el "procedimiento" de seguir con el dedo el gráfico

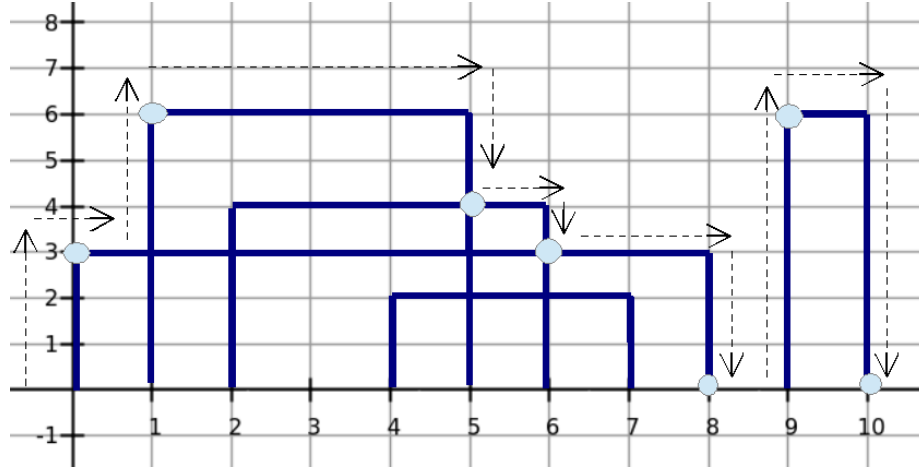
Para una $lista = \langle 0, 3, 8 \rangle, \langle 1, 6, 5 \rangle, \langle 2, 4, 6 \rangle, \langle 4, 2, 7 \rangle, \langle 9, 6, 10 \rangle$ con $n=5$, su gráfico es:



el gráfico de eliminar las líneas interiores es:



Mientras que el gráfico de "seguir con el dedo" es:



La salida para este ejemplo $0,3,1,6,5,4,6,3,8,0,9,6,0$

Lo que hago cuando "sigo con el dedo" es:

Empezar con el primer edificio y seguimos el trazo, si me interseco con otro edificio seguir el trazo del edificio con el que me intersequé desde ese punto.

Si no me interseco con nadie pero hay más edificios adelante "seguir con el dedo" los otros. Si no hay más edificios terminé.

Luego de ese contorno voy a obtener la solución final que son los puntos donde hay cambios de altura ($\uparrow \rightarrow$ y $\downarrow \rightarrow$).

Resolución:

Un panorama de la resolución es:

ordenar los edificios de menor a mayor por su Izq (en caso que tengan la misma izquierda es menor el que tiene mayor altura).

Retornar el primer punto del primer edificio de la lista de edificios ordenada.

Vamos recorriendo los edificios(mirando el edificio por el que voy ,anterior, y uno mas adelante,siguiente).

Si anterior interseca a siguiente, encolo anterior y retorno el cambio de altura si siguiente es mayor en altura que anterior.

Si es igual en altura o mayor, ahora anterior es siguiente. Si es menor en altura no hago nada. **no vale la pena ponerlo**

Encolo anterior en la cola y sigo iterando. Si anterior no interseca a siguiente(quiere decir que están "separados",pero puede que antes de anterior haya un edificio que termine después que anterior, empiece antes que anterior y sea menor en altura) voy a buscar este edificio en la cola (ordenada por altura) desencolando y mirando el tope:

si lo encuentro, ese edificio ahora es anterior, retorno la intersección.

si la cola es vacía(quiere decir que no había ningún edificio que terminara después que anterior) retorno anterior.Der,0,siguiente.Izq,siguiente.Alt y ahora anterior es siguiente.

Terminé de recorrer los edificios,pero puede que hayan quedado cosas dentro del heap, y son puntos que debería tener la solución Mientras el heap tenga edificios, voy a comparar el tope con anterior:

si tope termina antes que el anterior desencolo, en caso contrario retorno la intersección. Ahora anterior es el toper de la cola y desencolo.

Ya no hay más nada en el heap, **mirar**

Hay cosas que en esta descripción no tuve en cuenta, porque son muy específicas, para explicarlo profundamente lo hago con este pseudocódigo:

Sea lista: lista(<Izq,Alt,Der>) y n la cantidad de tuplas en la lista.

```
1: procedure RESOLVEREDIFICIOS(lista,n)
2:   ordenar los edificios por Izq
3:   comparo  $\leftarrow$  lista[0]
4:   cola  $\leftarrow$  vacio
5:   imprimo el primer punto(comparo.Izq y comparo.Alt)
6:   for ( $i \leftarrow 1, n - 2$ ) do //voy recorriendo los edificios hasta el anteúltimo,
   si hay 0 edificios que hago?
7:     siguiente  $\leftarrow$  lista[i]
8:     if (se intersecan comparo y siguiente*0) then
9:       if (siguiente > comparo en altura *1) then
10:        imprimir cambio de altura
11:        if (la cola está vacia) then
12:          cola.encolar(comparo)
```

```

13:         else
14:             if (comparo no está en el tope de la cola) then
15:                 cola.encolar(comparo)
16:             end if
17:         end if
18:         comparo ← siguiente
19:     end if
20:     if (siguiente == comparo en altura *2) then
21:         if (la cola está vacia) then
22:             cola.encolar(comparo)
23:         else
24:             if (comparo no está en el tope de al cola) then
25:                 cola.encolar(comparo)
26:             end if
27:         end if
28:     end if
29:     if (siguiente < comparo en altura *3) then
30:         cola.encolar(siguiente)
31:     end if
32:     end if (no se intersecan comparo y siguiente *4)
33:     if (la cola no está vacia) then
34:         while (cola no vacia) do
35:             if (primero.colas termina antes que comparo *5) then
36:                 desencolar.colas
37:             else (primero.colas termina despues que comparo *6)
38:                 imprimir interseccion entre comparo y primero.colas
39:                 comparo ← primero.colas
40:                 desencolar.colas
41:             end if
42:         end while
43:     else //no pasé a nadie que cortaría a comparo, como no se intersecan
44:         imprimir comparo.Der y 0
45:         imprimir siguiente.Izq y siguiente.Alt
46:         comparo ← siguiente
47:     end if
48:     end for (no hay siguiente, puede que hayan quedado cosas en el cola *7)
49:     //uso a comparo que es el último edificio visto con el que haya en el tope de
50:     la cola
51:     for (la cola no es vacia, desencolar) do
52:         if (comparo termina antes que primero.colas *8) then
53:             imprimir intersección comparo y primero.colas
54:             comparo ← cola.primero
55:         end if
56:     end for (al último punto no lo imprimo nunca *9)
57:     //lo imprimo acá

```

```
55:   imprimir comparo.Der y 0  
56: end procedure
```

Complejidad:

Vamos a ver que la cantidad de veces que encolo es una funcion de n , y así poder ver que la cantidad de veces que desencolo es tambien una funcion de n porque no puedo desencolar más cosas de las que encolo. Vemos en el algoritmo que en *1 y *2, encola si está vacia y si el elemento está en el tope, no lo encolo. (falta demostrar que si quiero encolar un elemento 2 veces el que quiero encolar de nuevo está en el tope, la idea la había sacado angel) Luego en *3 encolo. Despues a lo largo de todo el algoritmo no hago *nunca* un encolar Como todos estos casos son disjuntos (o son $<$, $>$ o $=$ las alturas de comparo y siguiente) entonces hago 1 encolar en cada edificio en peor caso, con lo cual hago n encolar.

Veamos ahora la complejidad del while dentro del for (de recorrer los edificios), en peor caso por cada edificio desencolo todos los edificios eso da una complejidad $n \cdot (n \cdot \log(n))$, pero si analizamos más finamente, nunca podría para cada paso desencolar todos los edificios.

Si voy por el edificio i (i entre 0 y $n-1$), tengo en el heap en peor caso i edificios (por lo explicado arriba de la cantidad de encolar), entro en el while (suponiendo que los edificios i e $i+1$ no se tocan) y desencolo i edificios (en peor caso desencolo todos los que encolé), sigo avanzando y llego a un edificio j (j entre 0 y $n-1$ y es mayor que i) ahora en el heap en peor caso tengo $j-i$ edificios (pues los edificios anteriores a i ya no están en la cola y encolé todos desde i hasta j), entro en el while (suponiendo que los edificios j y $j+1$ no se tocan) y desencolo en peor caso $j-i$ edificios. llego al último edificio $n-1$ y en peor caso tengo $n-1-j$ edificios en el heap (generalizando lo anterior), entro al while y desencolo $n-1-j$ veces. Si sumo la cantidad de veces que hice desencolar en el recorrido lineal es n (suma de los intervalos). Entonces hago n veces desencolar

Relacionando la parte de encolar y desencolar en el primer for por cada edificio hago un encolar y una cantidad x de desencolar + c (constante) operaciones que tienen costo 1 (asignaciones y guardas) Por lo visto anteriormente la suma de esos x es n , entonces el costo es $n \cdot (\text{costo de encolar}) + n \cdot (\text{costo de desencolar}) + c(\text{constante})$

Solo nos falta analizar el segundo for (cuando salgo del primero), en peor caso tengo todos los edificios que es n , y desencolo hasta que se vacia, entonces hace $n \cdot (\text{costo de desencolar}) + c1(\text{constante de guardas y asignaciones})$ En la implementación usamos una priority-queue como cola, el costo de encolar (push) es $\log(n)$, desencolar (pop) es $\log(n)$ y tope (top) es 1.

Al princio del algoritmo ordeno los edificios por Izq, el costo de ordenarlos es $n \cdot \log(n)$ (porque uso sort de la stl [según este link](#)).

Finalmente la complejidad es
 $O(n \cdot \log(n))$ de ordenarlos
+ $c[\text{constante}] + n[\text{encolar}] + n \cdot (\log(n))[\text{desencolar}]$ del primer for
+ $c1[\text{constante}] + n \cdot \log(n)[\text{desencolar}]$ del segundo for) $\in O(n(\log(n)))$

Correctitud:

El algoritmo pone como primer "punto" la esquina izquierda(esquina izquierda gráfico) del primer edificio.

En la solución("real", no de mi algoritmo) el primer "punto" es la esquina del edificio que tiene menor izquierda y mayor altura que todos.

demo

¿El primer punto que pone mi algoritmo cumple con dichas propiedades? Veamos, ordeno los edificios por Izq de menor a mayor y en caso de tener el mismo Izq es menor el que tiene mayor altura(linea 2), entonces el primer edificio va a ser el de menor izq y el de mayor altura.

Con lo cual si, el primer punto cumple con las propiedades.

Voy iterando los edificios mirando el edificio por el que voy(comparo) y el siguiente. Comparo no necesariamente es uno menos que siguiente.

Si comparo y siguiente se intersecan(graficos intersecciones):

si comparo es menor a siguiente (grafico A)

tengo que poner el punto de intersección en la solución

Supongamos que ese punto (intersección) no es solución:

caso existe un edificio que empieza entre la Izq de comparo y la Izq de siguiente, termina después que Izq de siguiente y tiene altura mayor a comparo (ejemplo gráfico B):

si existiera este edificio tendría que ser haberlo puesto como siguiente cuando recorría los edificios , ABS!!!

Entonces el punto es solución.

caso existe un edificio que empieza antes que Izq de comparo, tiene Alt mayor que comparo y termina después que Izq de siguiente (ejemplo grafico C):

Si existiera tendría que haberlo puesto como anterior cuando recorría los edificios, ABS!!!

Entonces el punto es solución.

Si no se intersecan comparo y siguiente(grafico no se intersecan):

voy a tener en el heap los edificios que terminan después que Izq de comparo porque los fui encontrando (grafico D) si el heap está vacío quiere decir que no hay nadie que corte a anterior(heapVacio grafico), entonces el edificio anterior sigue hasta su base y tengo que seguir con los demás edificios(en caso de tener más) desde siguiente, entonces voy a poner en la solución, el final de comparo y el principio de siguiente.

Si el heap no está vacío quiere decir que puede que tenga un edificio que corte a anterior (grafico corte anterior) voy a sacar del heap hasta que encuentre uno que interseque a anterior, por como es el heap (es un max heap en la altura) este que me interseca es el que tiene mayor altura, entonces este punto de intersección es solución.

Supongamos que este punto de intersección no es solución.

caso (grafico E) existe un edificio que empieza antes que Izq de comparo , termina

despues que Der de comparo estricto y tiene altura entre altura de comparo y altura del tope del heap, entonces este si exitiera, lo tendría que haber encolado cuando recorría los edificios y tendría que ser el edificio que me daría el heap ABS!!!

Entonces es solución.

Siempre recorro los edificios mirando comparo y siguiente, en algún momento me voy a quedar sin edificios, comparo va a quedar en algún edificio y el heap va a tener algún estado (vacío o con edificios dentro) Ahora voy a trabajar con comparo y el heap (ahora en el heap están mis "siguientes nuevos") Si hay edificios en el heap:

Pueden pasar 2 cosas que el siguiente del heap interseque en derecha a comparo (grafico interseque en derecha) o no:

Primer caso, el punto de intersección es solución.

Supongamos que no lo es, entonces exites un edificio que empieza antes que Izq del tope del heap, tiene mayor altura que el tope del heap y termina después que comparo, ABS!!!, porque si existiera lo tendría que haber encolado cuando recorría los edificios y tendría que ser ese edificio el que me daría el heap. Entonces es solución, ahora el tope del heap es comparo y desencolo. Segundo caso, no me importa porque no hay posible solución, sigo desencolando.

En algún momento voy a terminar de vaciar este heap pero como nunca pongo puntos "por derecha" (gráfico de puntos por derecha), el último edificio (el que termina último) va a estar en comparo. ¿Por qué? Pueden pasar 2 cosas: primero que comparo sea el último y tenga todas cosas en el heap que no corten por derecha a comparo, entonces las voy a desencolar todas y terminar, pero el punto "por derecha" de comparo nunca se retornó segundo comparo no sea el último, entonces el último va a ser uno del heap, cuando los voy desencolando y no tenga más cosas en el heap, comparo va a ser el que termina último y tiene mayor altura(porque pongo a siguiente en comparo cuando tengo que bajar REFINAR ESTO) Entonces en ambos casos el edificio comparo es el que termina último. Luego de desencolar todas los del heap en el segundo for, mi algoritmo retorna el "punto por derecha " de comparo y un 0.

NO ME GUSTA NADA ESTA DEMO! igual no es la final