



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Métodos Numéricos

## Trabajo Práctico 1

No creo que a él le gustará eso

### *Resumen*

*En este trabajo estudiaremos algoritmos para resolver sistemas de ecuaciones para problemas reales mediante una discretización. Se expondrán técnicas para obtener la temperatura en un punto crítico de un parabrisa usando eliminación Gaussiana y Factorización LU, aprovechando las matrices Banda, y la formula Sherman-Morrison Al final del trabajo, se llegarán a conclusiones sobre lo descubierto.*

Integrante	LU	Correo electrónico
Armagno, Julián	377/12	julian.armagno@gmail.com
Balbachan, Alexis		
More, Ángel		
Pinzón, Germán		

Palabras claves:

Eliminación Gaussiana. Factorización LU. Punto Crítico. Matrices Banda. Sistemas de ecuaciones. Sherman-Morrison.

## Índice

<b>1. Introducción Teórica</b>	<b>3</b>
1.1. Temperatura del Parabrisas . . . . .	3
1.2. Problemas . . . . .	3
1.3. Planteo del Problema . . . . .	4
<b>2. Desarrollo</b>	<b>4</b>
2.1. Eliminación Gaussiana vs Factorización LU . . . . .	4
2.2. Experimento: calidad/tiempo de cómputo . . . . .	5
<b>3. Resultados</b>	<b>6</b>
3.1. Experimento relación tiempo-calidad de cómputo . . . . .	6
<b>4. Discusión</b>	<b>9</b>
4.1. Hipótesis planteadas sobre calidad/tiempo de cómputo . . . . .	9
<b>5. Conclusiones</b>	<b>10</b>
<b>6. Apéndices</b>	<b>10</b>

## 1. Introducción Teórica

El parabrisas la nave del capitán Guybrush Threepwood está siendo atacado por sanguijuelas mutantes. Dicho ataque consiste en aplicar altas temperaturas constantes sobre la superficie del mismo, con el objetivo de lograr romperlo, para poder lograr un ataque más mortífero. La superficie del parabrisas donde se aplica el calor es circular (la sopapa de ataque es circular).

Para defenderse de estos ataques Guybrush cuenta solamente con un sistema de refrigeración que aplica temperaturas de  $-100^{\circ}\text{C}$  a los bordes del parabrisas. El parabrisas se romperá si alcanza una temperatura mayor o igual a los  $235^{\circ}\text{C}$  en el punto central (llamaremos a este punto, *punto crítico*).

Si el sistema de refrigeración no es suficiente para salvar el parabrisas, se puede utilizar un arma para destruir algunas sanguijuelas, pero se desea que sea la menor cantidad posible, siempre y cuando el parabrisas siga en pie, pues dicha arma consume energía que es de vital importancia.

### 1.1. Temperatura del Parabrisas

Para calcular las temperaturas en el parabrisas se aplicará el siguiente criterio:

En los bordes, como se explicó anteriormente, la temperatura será de  $-100^{\circ}\text{C}$ , es decir sean  $x$  e  $y$  las coordenadas del parabrisas, y  $T(x, y)$  la función que devuelve la temperatura en un determinado punto, sea  $b$  el ancho y  $a$  el alto:

$$T(x, y) = -100^{\circ}\text{C} \quad \text{si} \quad x = 0 \quad \vee \quad x = b \quad \vee \quad y = 0 \quad \vee \quad y = a \quad (1)$$

La temperatura de los puntos que se encuentren dentro del perímetro de la sopapa circular de una sanguijuela será igual a la temperatura aplicada por dicha sanguijuela ( $T_s$ ).

$$T(x, y) = T_s \quad \text{si} \quad (x, y) \in \text{PuntosSanguijuela} \quad (2)$$

La temperatura en el resto de los puntos en el estado estacionario satisface la siguiente ecuación.

$$\frac{\delta^2 T(x, y)}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T(x, y)}{\delta y^2} = 0 \quad (3)$$

### 1.2. Problemas

En el siguiente trabajo veremos como la aritmética finita de las computadoras puede generar distintos problemas.

En principio deberemos representar al parabrisas, el cual está compuesto por infinitos puntos. Sabemos que no es posible representar en una computadora los infinitos puntos del mismo, por lo que se utilizará cierta discretización, la cual haremos variar con el motivo de estudiar el comportamiento de nuestro sistema.

Otro problema que deberemos afrontar es que al trabajar en la búsqueda de soluciones de problemas que conllevan a la utilización de gran cantidad de operaciones matemáticas de punto flotante, en cada operación se puede perder cierta precisión, y la acumulación de estos errores puede escalar hasta llegar a una solución no satisfactoria. Esta pérdida de precisión se debe nuevamente a la limitación de las computadoras para representar números infinitos.

### 1.3. Planteo del Problema

Como dijimos anteriormente en nuestro problema teníamos un parabrisas con infinitos puntos, por ser una superficie continua, una forma de pensar el problema es discretizar estos puntos, y trabajar sobre ello. Una vez hecha esta operación, podemos modelar los puntos resultantes con una matriz, donde cada posición de esta matriz represente un punto en el parabrisas.

Al discretizar los puntos, la ecuación (3) para obtener temperaturas en cada punto del parabrisas continuo, se transforma en la siguiente ecuación por diferencias finitas.

$$t_{ij} = \frac{t_{i-1,j} + t_{i+1,j} + t_{i,j-1} + t_{i,j+1}}{4} \quad (4)$$

Es decir que en el parabrisas discretizado, la temperatura en cada punto se calcula como el promedio de la temperatura de los puntos vecinos (los puntos que están arriba, abajo, izquierda y derecha).

En nuestro problema nos interesa conocer el punto crítico (el centro del parabrisas), esto además significa conocer la temperatura de sus vecinos, y a su vez los vecinos necesitarán conocer la temperatura de sus otros vecinos. Es decir que en un principio es necesario calcular la temperatura de todos los puntos del parabrisas discretizado. Este problema es modelado mediante un sistema de ecuaciones, en el cual cada ecuación se corresponde con un solo punto del parabrisas. Dicho sistema de ecuaciones lo representamos en una matriz cuyo tamaño es  $\#puntos \times \#puntos$ . Finalmente podemos calcular la temperatura en cada punto aplicando *eliminación gaussiana* sobre la matriz.

Una vez que sabemos qué temperatura hay en el punto crítico, podremos decidir qué criterio utilizar para matar sanguijuelas, mediante distintas experimentaciones.

## 2. Desarrollo

### 2.1. Eliminación Gaussiana vs Factorización LU

La idea en esta sección es analizar ambos métodos y realizar una suerte de comparación para ver cuando es que conviene utilizar uno y cuando el otro. Si bien los dos nos ayudan a resolver un sistema de ecuaciones lineales y están estrechamente vinculados, existen ocasiones donde utilizar LU en lugar de Eliminación Gaussiana, puede ahorrarnos mucho tiempo de cómputo. Para empezar, es importante recordar que *no siempre* vamos a poder factorizar una matriz y por ende, cuando esto suceda no va a quedar otra opción que utilizar Eliminación Gaussiana. Para poder hacer la comparación entonces, vamos a asumir que en los casos que nombremos se va a poder utilizar el método de factorización.

A priori, la complejidad teórica de ambos algoritmos es  $O(n^3)$  así que eso no nos dice cuál es mejor en la práctica, por lo tanto habrá que probar ambos para el caso particular con el cual estemos trabajando y de ahí decidir cuál se comporta mejor. Llamemos  $A|b$  al sistema de ecuaciones lineales asociado al problema que queremos resolver. Si nuestro objetivo es simplemente resolver ese sistema y de ahí en más trabajar únicamente con esa solución, entonces sí la mejor idea es probar ambos algoritmos y ver cuál se comporta mejor en la práctica. Ahora, podría suceder que el problema no sea solo eso, si no que necesitemos resolver  $A|b_1, A|b_2, \dots, A|b_t$  donde lo único que

varía es el  $b_i$ . En estos casos el método de Factorización LU es claramente superior al método de Eliminación Gaussiana en términos de tiempo de cómputo. Esto se debe a que, si bien encontrar a  $L$  (triangular inferior) y a  $U$  (triangular superior) tales que  $A = LU$  es  $O(n^3)$  al igual que el algoritmo de Eliminación Gaussiana, una vez que ya hicimos este paso, resolver cada uno de los  $A|b_i$  tiene complejidad  $O(n^2)$ . Si utilizáramos Eliminación Gaussiana, estaríamos pagando un costo de  $O(n^3)$  por cada sistema  $A|b_i$  que resolvamos. Esto quiere decir que en este caso, resolver el problema completo con el método de factorización es  $O(n^3 + t.n^2)$  mientras que por Eliminación Gaussiana  $O(t.n^3)$ . Es fácil ver que si  $t$  es grande, entonces la brecha entre el tiempo de cómputo consumido por resolver el problema utilizando Eliminación Gaussiana y utilizando Factorización LU va a ser grande también. Incluso si  $t$  no es grande puede haber una diferencia notable en la práctica, ya que cuando hablamos de complejidad teórica estamos hablando en términos asintóticos.

En el contexto del trabajo práctico, el método de Factorización LU juega un papel importante a la hora de utilizar la fórmula de Sherman-Morrison. Esto se debe a que hay que computar  $A^{-1}b$  y  $A^{-1}u$ , lo que equivale a resolver los sistemas  $Ax_1 = b$  y  $Ax_2 = u$  y ahí es donde podemos reusar la  $L$  y la  $U$ . En el caso de tener una cantidad considerable de sanguijuelas unitarias, el tiempo de cómputo ahorrado es grande, ya que por cada sanguijuela unitaria que haya se va a estar pagando un costo de  $O(n^2)$  utilizando LU contra uno de  $O(n^3)$  utilizando Eliminación Gaussiana.

## 2.2. Experimento: calidad/tiempo de cómputo

La idea del siguiente experimento, es tratar de ver como se relaciona el tiempo de cómputo necesario para resolver el sistema de ecuaciones planteado, con la calidad de la solución encontrada. Es importante para esto, decir a qué nos referimos cuando hablamos de calidad. Es necesario para responder esta pregunta, recordar que nuestro objetivo es calcular la temperatura en cierto punto del parabrisas. Para lograr esto, lo que hacemos es discretizar la superficie (porque estamos trabajando con aritmética finita) y pasar de una superficie que tiene infinitos puntos a una representación de dicha superficie con una cantidad finita de puntos. Ahora bien, cuando realizamos la discretización y pasamos de un problema en el espacio continuo a uno en el espacio discreto estamos perdiendo información. Entonces cuando hablamos de calidad, nos referimos justamente a cuanta información estamos perdiendo, como costo de modelar en problema de manera discreta.

El experimento se planteó para trabajar con instancias de 20x20 y 40x40, a los fines del mismo, la temperatura y posición de las sanguijuelas no tienen mucha relevancia como sí la tienen la granularidad y los radios de dichas sanguijuelas. Básicamente, se tomó una instancia de 20x20 generada de manera manual y se fueron modificando los valores de los radios y granularidad. En la elección de la instancia de 40x40 lo que importa pasa a ser la cantidad de sanguijuelas, por eso es que se generó de manera distinta (ver epígrafe del resultado del experimento).

Una vez que fijamos la instancia que vamos a utilizar y a ir modificando para realizar las mediciones, lo que se va a medir es como varía la temperatura en el punto crítico y tiempo de cómputo en función de la granularidad, la cantidad de sanguijuelas y el tamaño de los radios. Utilizaremos el algoritmo de Eliminación Gaussiana (modo 0). Los tiempos fueron tomados en segundos.

Ahora que sabemos qué es lo que se intenta determinar en el experimento, vamos a tratar de pensar qué es lo que debería pasar (y luego contrastarlo con los resultados para ver si efectivamente es lo que sucede) a grandes rasgos, planteando así una serie de hipótesis.

1. En cuanto al tiempo de cómputo, sabemos que como vamos a estar utilizando el algoritmo de Eliminación Gaussiana, la cota teórica va a ser  $O(n^3)$ . El sistema de ecuaciones con el que trabajaremos va a ser de  $n' \times n'$  donde  $n' = (b/h - 1) \times (a/h - 1)$  siendo  $a$  (ancho del parabrisas),  $b$  (alto del parabrisas),  $h$  (granularidad) parámetros del problema. Podemos ver como el tamaño del sistema (y por lo tanto el tiempo de cómputo ya que es una función del tamaño) depende directamente de  $h$ , de manera tal que si  $h$  es chico, entonces el tamaño es

grande. Esto nos dice entonces que, dado una instancia del parabrisas (con sus dimensiones y sanguijuelas), cuanto más chico sea  $h$ , más tiempo se va a tardar en resolver el problema.

2. Dado que para poder computar la temperatura de los puntos de nuestra discretización es necesario saber cuáles de ellos son afectados por alguna sanguijuela, una cantidad grande de sanguijuelas impacta negativamente en el tiempo de cómputo.
3. Debido a que perdemos información al discretizar el problema porque estamos trabajando con un espacio discreto, cuando en realidad el problema es de naturaleza continua, parece razonable pensar que cuanto más chico sea  $h$ , la solución obtenida va a estar más cerca de la real.
4. Nuestra última hipótesis se desprende de alguna manera de la que enunciamos en el punto anterior. Si al aumentar el tamaño de nuestra discretización estamos acercándonos más a la verdadera solución del problema y las temperaturas de los puntos dependen de las sanguijuelas, parece razonable pensar que haciendo esto tenemos menos chances de descartar sanguijuelas, ya que nuestra discretización es "más adecuada".

### 3. Resultados

#### 3.1. Experimento relación tiempo-calidad de cómputo

Las siguientes tres tablas representan los datos tomados de tres instancias del problema. Lo único que vamos a variar en dichas instancias son los radios de las sanguijuelas. Para las tres instancias  $a = 20$ ,  $b = 20$ , la cantidad de sanguijuelas es 8 y las ubicaciones y temperaturas (variando en un rango de 50 a 730) de cada sanguijuela son las mismas (pueden encontrarse en los archivos de Experimentos/Experimento2/instancias20x20).

Granularidad	Tiempo	Temp. pto crítico
5	3.60E-005	166.425
4	0.000105	177.267
2	0.002355	248.066
1	0.012867	230.499
0.8	0.035207	218.562
0.5	0.224236	227.963
0.4	0.542077	227.558
0.2	8.84272	224.521
0.1	145.142	223.948

Figura 1: En este conjunto de instancias los radios de las sanguijuelas están en el conjunto  $\{2, 3, 4\}$ . Podemos observar como efectivamente el tiempo crece cuando el parámetro  $h$  de granularidad disminuye. En cuanto a la temperatura del punto crítico, se puede ver como a medida que aumentamos el tamaño de nuestras discretizaciones, se va acercando a un valor cercano a 224 grados.

Granularidad	Tiempo	Temp. pto crítico
5	0.000107	-100
4	0.000246	-100
2	0.004086	-100
1	0.027411	89.5291
0.8	0.066003	53.1171
0.5	0.445484	83.7256
0.4	1.08866	68.3881
0.2	17.9335	96.5599
0.1	289.115	94.5064

Figura 2: En este otro experimento, hemos decidido achicar considerablemente los radios de las sanguijuelas de manera que estén en el rango  $[0.03, 1]$ . Por un lado, podemos ver que el tiempo sigue aumentando a medida que  $h$  disminuye al igual que en el experimento anterior. Sin embargo, se puede ver también que el algoritmo toma más tiempo que antes en resolver cada instancia. De todas formas, lo más llamativo parece encontrarse en las primeras tres entradas de la tabla, en los valores de temperatura del punto crítico. Pareciera como si las primeras tres discretizaciones de nuestro modelo del problema, aproximan tan mal al caso real que quedan descartadas todas las sanguijuelas. Sin embargo, al igual que en el experimento anterior, se cumple que a medida que aumenta el tamaño de la discretización, la temperatura en el punto crítico se acerca a un valor.

Granularidad	Tiempo	Temp. pto crítico
5	0.000111	-100
4	0.000239	-100
2	0.003144	-100
1	0.028953	89.5291
0.8	0.073902	-100
0.5	0.455657	67.3394
0.4	1.13656	-100
0.2	18.4805	45.0856
0.1	297.293	31.8193

Figura 3: Una vez más, volvemos a achicar los radios de las sanguijuelas. Vemos que el tiempo se sigue comportando de manera similar y con las primeras tres instancias del problema ocurre lo mismo que con el experimento anterior. Sin embargo, ahora sí está sucediendo algo que contradice una de las hipótesis (la tercera) planteada en el desarrollo ya que vemos que ahora, no pareciera que nos estemos acercando a un valor (el valor de la solución real). Esto se ve en las entradas 6 y 7 de la tabla, cuyas granularidades son 0.8 y 0.4, donde a pesar de que son más chicas que 1 (y por lo tanto las discretizaciones poseen tamaños más grandes), se está obteniendo -100 como temperatura del punto crítico, lo cual no parece estar bien.

Granularidad	Instancia con 100 sanguijuelas		Instancia con 1 sanguijuela	
	Tiempo	Temp. pto crítico	Tiempo	Temp. pto crítico
5	0.000156	443.358	0.000526	-56.6723
4	0.004226	443.358	0.00394	-100
2	0.013969	443.358	0.030393	-100
1	0.083721	443.358	0.4493	-74.7124
0.8	0.18614	443.358	1.11816	-100
0.5	1.02154	443.358	7.38949	-78.5975
0.4	2.51406	443.358	18.2381	-100
0.2	38.3409	443.358	299.151	-82.2174
0.1	577.083	443.358	4810.44	-84.2356

Figura 4: En este experimento se trabajó con dos instancias, esta vez ambas de 40x40 y con distintas sanguijuelas asociadas a una y a otra. Más específicamente y como indica la tabla, en una instancia hay 100 sanguijuelas y en la otra solo 1. Los radios de las 100 sanguijuelas se generaron con distribución uniforme en el rango  $[25, 35]$  mientras que radio de la única sanguijuela de la segunda instancia es de 0.002. Vemos como estos resultados entran en conflicto con la hipótesis 2 ya que los tiempos medidos de la instancia con 1 sanguijuela son mucho más largos que con la instancia de 100 sanguijuelas. También podemos observar algo interesante acerca de la instancia con 100 sanguijuelas y esto es que, la temperatura en el punto crítico siempre fue la misma.



Granularidad	Instancia con 100 sanguijuelas		Instancia con 1 sanguijuela	
	Tiempo	Temp. pto crítico	Tiempo	Temp. pto crítico
5	0.000156	443.358	0.000369	350
4	0.004226	443.358	0.000782	350
2	0.013969	443.358	0.0107	350
1	0.083721	443.358	0.064883	350
0.8	0.18614	443.358	0.144703	350
0.5	1.02154	443.358	0.954458	350
0.4	2.51406	443.358	2.31257	350
0.2	38.3409	443.358	37.2852	350
0.1	577.083	443.358	596.912	350

Figura 5: Para hacer esta última medición, decidimos dejar intacta la instancia con 100 sanguijuelas y modificar la instancia que tiene solo una sanguijuela. La modificación que efectuamos fue aumentar considerablemente el radio de la sanguijuela a un valor de 40, siendo antes 0.002. Podemos observar que los tiempos son significativamente menores, parecidos a los que tomamos al trabajar con la instancia de 100 sanguijuelas e incluso en algunos casos menores. Es importante observar también, que la temperatura en el punto crítico ahora es siempre la misma (350) y antes (cuando el radio era 0.002) variaba y a veces la sanguijuela era descartada (para las granularidades 4, 2, 0.8 y 0.4 de la tabla anterior).

## 4. Discusión

### 4.1. Hipótesis planteadas sobre calidad/tiempo de cómputo

En los experimentos realizados, vimos como efectivamente el tiempo de cómputo aumenta a medida que el  $h$  se achica, ya que el tamaño de la discretización es más grande y, como cada punto de la discretización representa una incógnita en nuestro sistema de ecuaciones, vamos a tener que resolver un sistema más grande. Por lo tanto, nuestra hipótesis 1. planteada en el Desarrollo de que el valor de  $h$  impacta de manera directa en el tiempo de cómputo es correcta y bien reflejada en nuestros experimentos.

Lo que no se ve reflejado en los experimentos, es lo que dicen las hipótesis 3 y 4. Como ambas están relacionadas, vamos a tratarlas de forma conjunta. En la sección de Resultados, podemos ver que las mediciones efectuadas en el primer conjunto de instancias (primera tabla) no entran en conflicto con lo que dicen estas hipótesis, pero sí las que se encuentran en la segunda y tercer tabla. Esto no es casualidad. La diferencia entre el primer conjunto de instancias y los otros dos, radica esencialmente en los radios de las sanguijuelas ya que como explicamos en los resultados, los radios se van reduciendo considerablemente. Sea  $S_i$  una sanguijuela cuyo radio es  $r_i$ , cuanto

más chico sea  $r_i$  más chances existen de que  $S_i$  sea una sanguijuela unitaria o, en el peor caso, que sea descartada. Esto se debe a que si  $S_i$  cae justo en un punto de nuestra discretización, a menos que  $r_i = 0$ , van a haber más chances de que abarque solo ese punto. Pero si  $S_i$  **no cae** en un punto de nuestra discretización, como  $r_i$  es chico podría suceder que entonces  $r_i$  no alcance a **ningún** punto de nuestra discretización, descartando así a  $S_i$ . Y, como es de esperarse, el hecho de que  $S_i$  caiga o no en un punto de nuestra discretización, no depende de que tan chico o grande es  $h$ , si no de que las coordenadas de la posición de  $S_i$  sean múltiplos o no de  $h$ .

Con lo dicho anteriormente podemos afirmar entonces que, por un lado es cierto que cuanto más grande es nuestra discretización más nos acercamos a poder modelar el problema con mayor precisión en cuanto a la propagación del calor (una forma de convencerse de esto matemáticamente, es observar que en la ecuación del calor,  $h \rightarrow 0$ ). Pero por otro lado, dado que nuestro problema tiene sanguijuelas con un radio variable que puede ser arbitrariamente chico (dentro de los límites de la computadora) y coordenadas reales, para llegar a una solución razonable es necesario tener en cuenta todas las sanguijuelas y esto no necesariamente depende del tamaño de  $h$ .

Faltaría hablar sobre lo que dice la hipótesis 2. Por los experimentos realizados con instancias de 40x40 (cuyos resultados se encuentran en las últimas dos tablas del experimento relación tiempo-calidad de cómputo), viendo la primera tabla del experimento podemos ver claramente que la hipótesis no se cumple. Esto es así porque los tiempos tomados de la instancia con 100 sanguijuelas son significativamente menores a los tiempos tomados de la instancia con una sanguijuela. Pero esto tampoco significa que valga lo contrario, es decir que tampoco podemos afirmar que "si hay una menor cantidad de sanguijuelas entonces el tiempo de cómputo es mayor". De hecho, en la segunda tabla del experimento con instancias de 40x40, podemos observar que esto tampoco se cumple ya que ahora, los tiempos son muy similares para la instancia de 100 sanguijuelas y la de una sanguijuela. A este punto, es fácil ver que lo que está sucediendo es que, el tiempo de cómputo en realidad está variando en función de el radio de las sanguijuelas. Cuanto mayor es el radio de la sanguijuela, menor es el tiempo de cómputo. Es por esto que también, cuando el radio de una sanguijuela es grande y toca al punto crítico, como es poco probable que la sanguijuela sea descartada al variar la granularidad (debido al tamaño del radio), la temperatura en el punto crítico va a ser igual al valor de la temperatura de la sanguijuela y difícilmente va a variar. En cuanto al tiempo de cómputo, básicamente lo que sucede es que al tener sanguijuelas con radio grande, van a haber muchos puntos de nuestra discretización con una temperatura constante (proveniente de alguna sanguijuela actuando sobre ellos) y por lo tanto, los puntos cuya temperatura sea desconocida y tengamos que calcular van a ser unos pocos.

## 5. Conclusiones

## 6. Apéndices

Mayúsculas