MÁSTER UNIVERSITARIO EN LÓGICA, COMPUTACIÓN E INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Aprendizaje Automático
Apellidos: Lorenz Vieta
Nombre: Germán

Cuestión 1

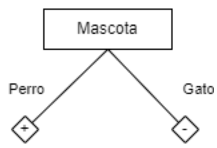
¿Cuantas posibles hipótesis podemos representar mediante árboles de decisión si tenemos n atributos binarios?.

Supongamos que tenemos n atributos booleanos, tendremos entonces 2^n posibles combinaciones. Por otro lado como las hipótesis son funciones del tipo $h :\Rightarrow \{0, 1\}$. Entonces, habrá 2^{2n} posibles hipótesis para un árbol binario de n atributos.

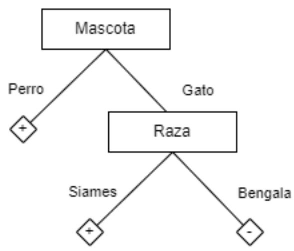
Cuestión 2

Definimos el tamaño de un árbol como el número de sus nodos, incluida las hojas. Dar dos árboles de tamaño distinto que representen la misma hipótesis.

Por ejemplo, si consideramos un árbol con nodo Mascota y hojas Perro y Gato, este árbol seria de tamaño 1 y representaría a siguiente hipótesis: $(perro, 1, Pos)$.



Luego si consideramos otro árbol donde la hoja Gato lleva a un Nodo Raza con hojas Bengala y Siamés este árbol tendría tamaño 2 y también representaría la hipótesis $(perro, 1, Pos)$.



Cuestión 3

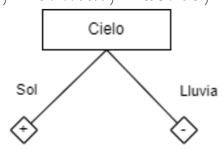
Dado el conjunto de entrenamiento y como conjunto de hipótesis H el conjunto de todos los árboles de decisión, dar dos elementos del espacio de versiones VS. Uno de ellos debe clasificar de manera positiva y otro de manera negativa el ejemplo

$$\langle Lluvia, Templada, Normal, Fuerte, Templada, Cambio\rangle$$

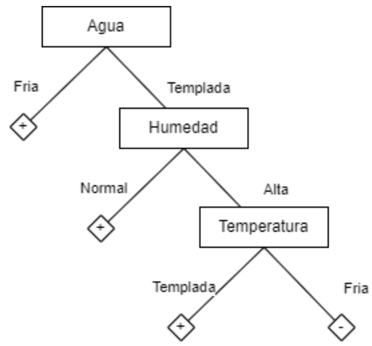
Cielo	Temperatura	Humedad	Viento	Agua	Previsión	Deporte
Soleado	Templada	Normal	Fuerte	Templada	Igual	Sí
Soleado	Templada	Alta	Fuerte	Templada	Igual	Sí
Lluvia	Fría	Alta	Fuerte	Templada	Cambio	No
Soleado	Templada	Alta	Fuerte	Fría	Cambio	Sí

Podemos considerar el siguiente árbol de decisión. Este árbol clasifica de manera negativa al ejemplo:

$$\langle Lluvia, Templada, Normal, Fuerte, Templada, Cambio\rangle$$



Por otro lado esté árbol clasifica correctamente y de manera positiva el ejemplo



Cuestión 4

En un problema de aprendizaje sobre el que vamos a aplicar el algoritmo ID3 se considera un conjunto de entrenamiento D con N ejemplos. Supongamos que hay un atributo Atr_1 que puede tomar N valores y que cada uno de los ejemplos de D toma en Atr_1 un valor distinto. Calcular $Ganancia(D,\, Atr_1)$.

$$Ganancia(D, Atr_1) = Ent(D) - \sum_{v \in valoresAtr_1} = \frac{|D_v|}{|D|} Ent(D_v)$$

Sea $v \in Valores(Atr_1)$, entonces $|D_v| = 1, |D| = N$.

Además, $Ent(D_v) = \begin{cases} Ent([1^+, 0^-]) = 0 & \text{si } D_v Pos \\ Ent([0^-, 1^+]) = 0 & \text{si } D_v Neg \end{cases}$

Luego el segundo miembro de la $Ganancia(D, Atr_1)$ es la suma de tantos ceros como valores tenga el atributo Atr_1. Por tanto:

$$Ganancia(D; Atr1) = Ent(D)$$

Cuestión 5

Demostrar que si D es un conjunto de entrenamiento para un concepto C entonces el algoritmo ID3 devuelve una hipótesis consistente con D cualquiera que sea el criterio para elegir el *mejor* atributo

Por reducción al absurdo, tenemos un nuevo algoritmo ID3 que devuelve en el Paso 4 un atributo A y este da lugar a una hipótesis h no consistente con D, osea, existe un ejemplo $E \in D$ para el que h toma valor positivo cuando mi árbol predice el valor negativo, o viceversa. Por tanto, tenemos un atributo X en el que se difiere.

Entonces, en algún momento en la construcción del árbol se debe haber elegido X como el atributo que mejor clasifica, es decir, X sigue el algoritmo nuevo ID3 y es acorde a todos los ejemplos de D, incluido E.

Si esto es posible, entonces esto es una contradicción, luego h es consistente y por tanto la elección de A da lugar a una hipótesis consistente sea cual sea el criterio que se ha usado para elegir el mejor atributo.

Cuestión 6

Sea U un universo finito y sea C un concepto sobre U donde las instancias se representan como n-uplas de pares atributo-valor. Entonces C puede representarse como un árbol de decisión.

De forma genérica si un conjunto de entrenamiento D esta formado por un conjunto de instancias de forma:

$$x^i = (\langle Atr_1, Valor_1^i\rangle, \langle Atr_2, Valor_2^i\rangle, ..., \langle Atr_{n-1}, Valor_{n-1}^i\rangle, \langle Atr_n, Valor_n^i\rangle)$$

para las que se conoce el valor del concepto C,$c(x^i)$. Entonces se puede representar en una tabla con la forma:

	Atr_1	Atr_2	...	Atr_{n-1}	Atr_n	Concepto
x^1	$Valor_1^1$	$Valor_2^1$	...	$Valor_{n-1}^1$	$Valor_n^1$	$c(x^1)$
x^2	$Valor_1^2$	$Valor_2^2$	...	$Valor_{n-1}^2$	$Valor_n^2$	$c(x^2)$
...	...	...	...	...	...	...
x^{i-1}	$Valor_1^{i-1}$	$Valor_2^{i-1}$	...	$Valor_{n-1}^{i-1}$	$Valor_n^{i-1}$	$c(x^{i-1})$
x^i	$Valor_1^i$	$Valor_2^i$	...	$Valor_{n-1}^i$	$Valor_n^i$	$c(x^i)$

Podemos aplicar el algoritmo ID3 (Ejemplos, Atributo-Objetivo, Atributos) a la tabla anterior usando:

1. Ejemplos: x^i
2. Atributo-Objetivo: $c(x^i)$
3. Atributo: $Atr_1, ..., Atr_n$

De esa forma se representara como un árbol de decisión

Cuestión 7

Responder razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si la respuesta **Verdadera** debes dar razones que apoyen tu decisión. Si la respuesta es **Falsa** debes dar un ejemplo en el que no se verifique la afirmación.

1. Sea $D_1 = \{e_1, ..., e_n\}$ un conjunto de entrenamiento y sea D_2 el conjunto de entrenamiento formado a partir de D_1 donde cada ejemplo se considera dos veces, esto es, $D_2 = \{e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{2n}\}$ donde $\forall i \in \{1, ..., n\} e_i = e_{i+n}$. Afirmación: *El árbol de decisión obtenido mediante el algoritmo ID3 a partir de D_1 y D_2 son el mismo.*

   Verdadero: Según Algoritmo ID3:

   Paso 1: Si todos los Ejemplos son positivos, devolver un nodo etiquetado con $+$. Entonces si todos son positivos en D_1 lo van a ser en D_2.
   Paso 2: Si todos los Ejemplos son negativos, devolver un nodo etiquetado con $-$. Entonces si todos son negativos en D_1 lo van a ser en D_2.
   Paso 3: Si Atributos está vacío, devolver un nodo etiquetado con el valor más frecuente de Atributo-objetivo en Ejemplos. Entonces Si el valor más frecuente en Ejemplos de D_1 es el mismo que para D_2 y dará el mismo ejemplo.
   Paso 4: En otro caso:
   Paso 4.1: Sea A el atributo de Atributos que mejor clasifica hacer:

   $$Ganancia(D, Atr_1) = Ent(D) - \sum_{v \in valores Atr_1} = \frac{|D_v|}{|D|} Ent(D_v)$$

   Sean P_1, N_1 los positivos y negativos de D_1 entonces:

$Ent(D_1) = -\frac{|P_1|}{|D_1|} log_2 \frac{|P_1|}{|D_1|} - \frac{|N_1|}{|D_1|} log_2 \frac{|P_1|}{|D_1|}$

$Ent(D_2) = -\frac{|2P_1|}{|2D_1|} log_2 \frac{|2P_1|}{|2D_1|} - \frac{|2N_1|}{|2D_1|} log_2 \frac{|2P_1|}{|2D_1|} = Ent(D_1)$

Igualmente, $Ent(D1v) = Ent(D2v)$, por lo tanto el atributo sera el mismo.

Paso 4.2: Crear Árbol, con un nodo etiquetado con A, entonces sera igual en ambos casos
Paso 4.3: Para cada posible valor v de A, hacer:

- Añadir un arco al Árbol, etiquetado con v.
- Sea Ejemplos(v) el subconjunto de Ejemplos con valor del atributo A igual a v.
- Si Ejemplos(v) es vacío:
  - Entonces colocar debajo del arco anterior un nodo etiquetado con el valor más frecuente de Atributo-objetivo en Ejemplos.
  - Si no, colocar debajo del arco anterior el subárbol ID3 ($Ejemplos(v), Atributo{-}objetivo, Atributos{-}A$)

  De esta forma, si Ejemplos (v) es vacío en D_1 lo va a ser también en D_2. De la misma forma, el valor más frecuente será el mismo en ambos árboles. Si no, repetimos el proceso para ID3 ($Ejemplos(v), Atributo - objetivo, Atributos - A$) en los dos conjuntos de entrenamiento.

  Por lo tanto para los dos conjuntos de entrenamiento obtendremos el mismo árbol

2. Tenemos un conjunto con $4n$ ejemplos y lo dividimos en dos partes: un conjunto de entrenamiento con $3n$ ejemplos y un conjunto de prueba con n ejemplos. En el conjunto de entrenamiento $2n$ ejemplos son positivos y n ejemplos son negativos. En el conjunto de prueba, los n ejemplos que hay son todos positivos. Construimos el árbol de decisión A a partir del conjunto de entrenamiento mediante el algoritmo ID3. Afirmación: *El árbol A contiene al menos un nodo tal que si podamos en ese nodo mejoramos el rendimiento respecto al conjunto de prueba.*

   Falso: Si el árbol obtenido ya es óptimo en rendimiento en los casos de prueba al aplicar el algoritmo ID3 puede que obtengamos un árbol nuevo pero para los casos de prueba sera el mismo recorrido. Por lo tanto, existe la posibilidad de que la medida de casos correctamente clasificados positivamente sea 1 y el rendimiento de mi árbol mejorado con ID3 sea 1 demostrando que no hubo una mejora significativa al podarlo.
   Por ultimo, esta situación es poco probable en casos reales donde n es un valor muy elevado.

3. Sean D_1 y D_2 dos conjuntos de entrenamiento para el mismo concepto. Entonces

$$\frac{Ent(D_1) + Ent(D_2)}{2} \leq Ent(D_1 \cup D_2) \tag{1}$$

   - Si consideramos por ejemplo $D_1 = [4^+, 4^-]$, $D_2 = [1^+, 1^-]$ y $D_1 \cup D_2 = [5^+, 5^-]$ entonces:

     $Ent(D_1) = 1$, $Ent(D_2) = 1$ y $Ent(D_1 \cup D_2) = 1$

     $\frac{Ent(D_1)+Ent(D_2)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \leq 1 = Ent(D_1 \cup D_2)$
   - Si consideramos por ejemplo $D_1 = [0^+, 34^-]$, $D_2 = [1^+, 1^-]$ y $D_1 \cup D_2 = [1^+, 35^-]$ entonces:

     $Ent(D_1) = 0$, $Ent(D_2) = 1$ y $Ent(D_1 \cup D_2) = -\frac{1}{35} log_2 \frac{1}{35} - \frac{34}{35} log_2 \frac{34}{35} \simeq 0{,}18717$

     $\frac{Ent(D_1)+Ent(D_2)}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \nleq 0{,}18717 \simeq Ent(D_1 \cup D_2)$

   Falso: Al encontrar un contraejemplo no es valida la propiedad

4. Sean D_1 y D_2 dos conjuntos de entrenamiento para el mismo concepto tales que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Entonces $Ent(D_1 \cup D_2) < Ent(D_1) + Ent(D_2)$.

   Consideremos la siguiente tabla de ejemplos:

Color	Clasificación de semáforo peatonal
Verde	Positivo
Rojo	Negativo

Consideremos D_1 como la primer fila y D_2 la segunda, tenemos entonces que $Ent(D_1) = Ent(D_2) = 0$.
Además, $D_1 \cup D_2$ será la tabla completa y como $Ent(D_1 \cup D_2) = Ent([1^+, 1^-]) = 1$
Entonces, encontramos que $Ent(D_1 \cup D_2) = 1 \not< 0 = Ent(D_1) + Ent(D_2)$

Falso: Al encontrar un contraejemplo no es valida la propiedad

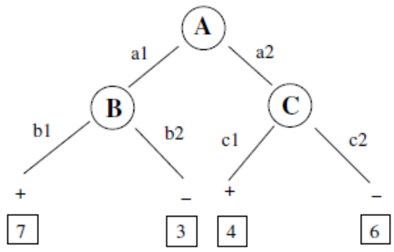
Cuestión 8

La ganancia de información en el algoritmo ID3 sólo sirve para hacer árboles más pequeños. Si aplicamos el algoritmo de árboles de decisión sobre un mismo conjunto de entrenamiento dos veces, la primera utilizando la ganancia de información para elegir el mejor atributo y la segunda vez utilizando otro criterio, entonces los dos árboles obtenidos pueden tener distinto tamaño, pero representan la misma hipótesis. **¿Verdadero o falso?**

Falso: Es verdadero que la ganancia de información en el algoritmo ID3 sirve para encontrar atributos más representativos y que ayudan a clasificar mejor los ejemplos y con esto puede existir la posibilidad de reducción del tamaño del árbol, pero esto no implica que la aplicación de ID3 vaya a devolvernos un árbol de igual tamaño que con otros métodos o criterios.
También es cierto que aplicando distintos métodos se pueden obtener arboles de distinto tamaño que representan la misma hipótesis, pero nada nos asegura que otros algoritmos distintos a ID3 generen arboles del mismo tamaño y a la vez representen la misma hipótesis.

Ejercicio 1

Supongamos que hemos dividido un conjunto de 25 ejemplos en dos conjuntos. El primero D con 20 ejemplos lo hemos usado para crear un árbol de decisión y el segundo *Prueba*, con 5 ejemplos, los vamos a usar para aplicar el ALGORITMO DE PODA PARA REDUCIR EL ERROR. El árbol obtenido y el conjunto de prueba son los siguientes:



	A	B	C	Cl.
e_1	a1	b1	c1	+
e_2	a2	b1	c2	+
e_3	a1	b2	c1	+
e_4	a1	b2	c2	+
e_5	a2	b2	c1	+

Junto a la clasificación de cada hoja aparece el número de elementos del conjunto D que verifica la condición, esto es, hay 7 ejemplos con A=a1 y B=b1 que tienen clasificación +, hay 3 ejemplos con A=a1 y B=b2 que tienen clasificación $-$, etc. Se pide usar el ALGORITMO DE PODA PARA REDUCIR EL ERROR sobre el árbol usando el conjunto *Prueba*. **Especificar claramente cuál es el árbol obtenido**.

Primero: Calculamos la medida del arbol M con los ejemplos:

- e_1: Clasificación: +, Valor real +
- e_2: Clasificación: $-$, Valor real +
- e_3: Clasificación: $-$, Valor real +
- e_4: Clasificación: $-$, Valor real +
- e_5: Clasificación: +, Valor real +

Por tanto, $M = 2/5 = 0,4$

Ahora aplicamos el ALGORITMO DE PODA por cada nodo y calculamos su medida correspondiente:

- Podamos B, como hay 7 ejemplos + y 3 $-$, se le asigna el valor + a la rama libre al podar B y de esta forma se obtiene:
  - e_1: Clasificación: +, Valor real +
  - e_2: Clasificación: $-$, Valor real +

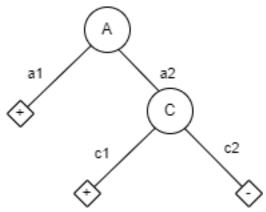
- e_3: Clasificación: +, Valor real +
- e_4: Clasificación: +, Valor real +
- e_5: Clasificación: +, Valor real +

Por tanto, $M_B = 4/5 = 0,8$

- Podamos C, como hay 4 ejemplos + y 6 $-$, se le asigna el valor $-$ a la rama libre al podar C y de esta forma se obtiene:
  - e_1: Clasificación: +, Valor real +
  - e_2: Clasificación: $-$, Valor real +
  - e_3: Clasificación: $-$, Valor real +
  - e_4: Clasificación: $-$, Valor real +
  - e_5: Clasificación: $-$, Valor real +

  Por tanto, $M_C = 1/5 = 0,2$

  Termino los Nodo Hoja, comparo K medias donde: $M_B > M_C$ y además $M_B > M$, entonces podo y devuelvo árbol resultante:



Ejercicio opcional

Demostrar que la ganancia de información es siempre mayor o igual a cero.