Красильников Иван

1 марта 2010 г.

## Нотация

Символы строк будем нумеровать от нуля, обозначать $i$-й символ строки $s$ как $s_i$, а конкатенацию строк $s$ и $t$ как $st$. Будем писать $s >> k$ для обозначения *циклического* сдвига строки $s$ вправо на $k$ символов.

## Задача 3

Пусть дана строка $s$ длины $n$. Сделаем несколько наблюдений:

1. Если $s$ является $k$-кратным повторением некоторой строки $t$, то $n$ должно делиться на $k$, сама строка $t$ при этом равна $s_0 s_1 \dots s_{m-1}$, где $m = n/k$. Кроме того, $s = s >> m$.

2. Если $s >> m = s$, то и $s >> g = s$, где $g = \gcd(n, m)$. В самом деле, если $s_{(i+tm) \mod n} = s_i$ для всех целых $t$, то выбрав $t$, такое, что $tm = g \pmod{n}$, получим $s_{(i+g) \mod n} = s_i$, как и требуется. Из теории чисел известно, что такое $t$ всегда существует, в частности, $t = (m/g)^{-1} \pmod{n/g}$.

3. Если $s >> m = s$, где $m$ – делитель $n$ (длины строки $s$), то строка $s$ равна своему префиксу $s_0 \dots s_{m-1}$, повторённому $n/m$ раз.

4. Пусть $m$ – наименьшее натуральное число ($\geqslant 1$), такое что $s >> m = s$. Тогда $m$ является делителем $n$ (иначе из пункта 2 следовало бы существование еще меньшего $m$). Тогда из пункта 3 следует, что $s$ равна своему префиксу $s_0 s_1 \dots s_{m-1}$, повторённому $n/m$ раз.

5. Из 1) и 4) следует, что наибольшее число $k$, такое, что $s$ равна $k$-кратному повторению некоторой строки $t$, и наименьшее натуральное $m$, такое что $s >> m = s$, связаны соотношением $k = n/m$.

6. Таким образом задача сводится к нахождению наименьшего $m$, такого, что $s >> m = s$, после чего ответом будет $k = n/m$.

7. Это $m$ в точности равно позиции второго[1] вхождения строки $s$ в $ss$, т.е. удвоенной строке $s$. Эту позицию найдём при помощи КМП. Задача решена.

8. (Примечание: на самом деле полный КМП не нужен, а достаточно всего лишь посчитать префикс-функцию от $s$ и проверить её последнее значение. Но для задачи №3 КМП уже и так достаточно быстр, а «я уже в пижаме». Поэтому этого доказательства не будет.)

[1] Позиция первого вхождения всегда 0.