Задание 5

Красильников Иван

15 апреля 2010 г.

Задача 1

Я реализовал метод конформных предикторов с использованием Python:

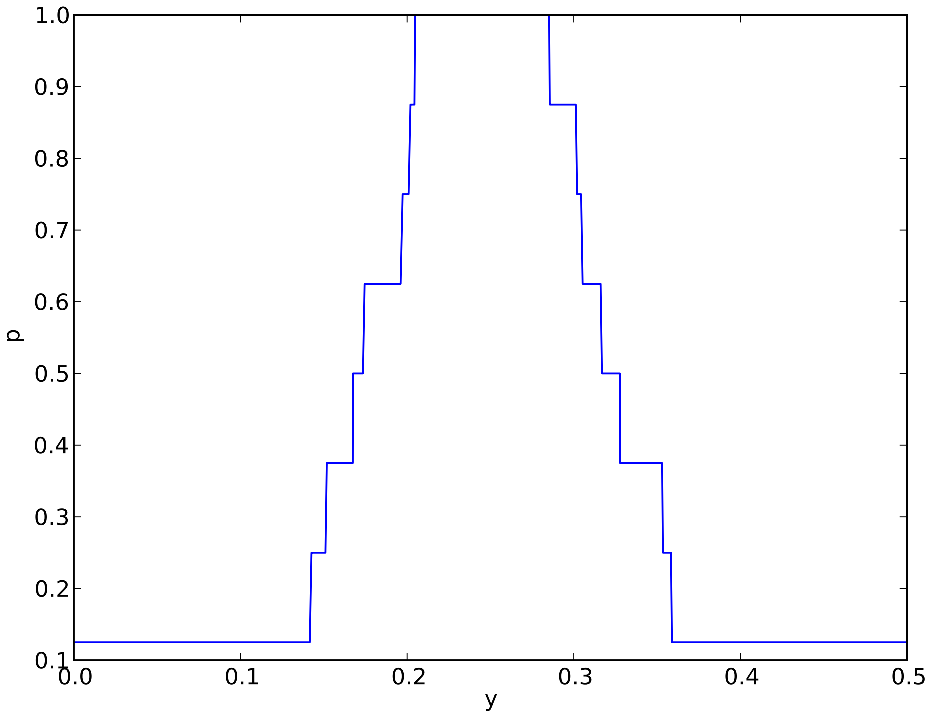
```
import numpy

def conformal_algorithm(train_points, test_point):
    # построение многочлена f(x)=a+bx+cx^2 по обучающей выборке включая
    # проверяемую точку
    xs = [x for (x, y) in train_points] + [test_point[0]]
    ys = [y for (x, y) in train_points] + [test_point[1]]
    N = len(xs)
    c, b, a = numpy.polyfit(xs, ys, 2)

    # вычисление меры странности - отклонения y от f(x)=a+bx+cx^2
    alpha = []
    for i in range(N):
        x, y = xs[i], ys[i]
        alpha.append(abs(a + b*x + c*x*x - y))

    return sum([1.0 for a in alpha if a >= alpha[N-1]]) / float(N)

sample_x = [-1.0, -0.75, -0.5, -0.25, 0.25, 0.75, 1.0]
sample_y = [1.0, 0.75, 0.5, 0.25, 0.25, 0.75, 1.0]
sample = zip(sample_x, sample_y)

c, b, a = numpy.polyfit(sample_x, sample_y, 2)
print a, b, c  # многочлен построенный по обучающей выборке

for i in range(5000):
    y = i / 10000.0
    p = conformal_algorithm(sample, (0.0, y))
    print y, p  # значение y и степень уверенности в нем
```

Метод наименьших квадратов подгоняет под обучающую выборку следующий квадратный многочлен:

$$f(x) = 0.2483 - 0.0078x + 0.7879x^2,$$

Таким образом, точечное предсказание в $x = 0$ равно 0.2483.

Значения уверенности в каждом значении y, построенные методом конформных предикторов по сетке с шагом 0.0001 приведены на следующем рисунке:



Доверительный интервал для уровня толерантности $p = 0.95$ образуют значения y в интервале $[0.2048, 0.2855]$.

Можно заметить, что интервал получился почти симметричным относительно точечного предсказания $y = 0.2483$.

Задача 3

Я буду использовать обозначение $[P]$ для индикаторных функций: $[P] = 1$, если предикат (условие) P выполняется, и $[P] = 0$ иначе.

3.1. Необходимо сделать дополнительные предположения в этой задаче. Если $u(x)$ – произвольный многочлен $n-1$ степени, то искомое решение $f(x) = u^{(n)}(x) = 0$, подставляя его в интегральное уравнение получим, что $u(x)$ должен быть равен нулю. Чтобы разрешить это противоречие, я буду предполагать, что нам дана функция $u(x)$, у которой $u(0) = 0$, $u'(0) = 0, \ldots, u^{(n-1)} = 0$.

Из матанализа известно следующее свойство производных: $u(x) - u(0) = \int_0^x u'(t)dt$. Воспользуемся им несколько раз:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int_0^x u'(t)dt = \boxed{\int_0^1 [t \leqslant x]u'(t)\,dt} = \int_0^1 [t \leqslant x] \int_0^t u''(s)\,ds\,dt \\
&= \int_0^1 [t \leqslant x] \int_0^1 [s \leqslant t]u''(s)\,ds\,dt = \int_0^1 \int_0^1 [s \leqslant t \leqslant x]u''(s)\,ds\,dt \\
&= \int_0^1 [s \leqslant x] \left(\int_0^1 [s \leqslant t \leqslant x]\,dt \right) u''(s)\,ds = \boxed{\int_0^1 [s \leqslant x](x-s)u''(s)\,ds} \\
&= \int_0^1 [s \leqslant x](x-s) \left(\int_0^1 [t \leqslant s]u'''(t)\,dt \right) ds = \int_0^1 \int_0^1 [t \leqslant s \leqslant x](x-s)u'''(t)\,dt\,ds \\
&= \int_0^1 [t \leqslant x] \left(\int_t^x (x-s)ds \right) u'''(t)\,dt = \boxed{\int_0^1 [t \leqslant x]\frac{1}{2}(t^2 - 2tx + x^2)u'''(t)\,dt} = \ldots
\end{aligned}
$$

Таким образом, уже наблюдается закономерность, и получаются следующие ядра $K_n(x,t)$ для n-х производных:

$$
\begin{aligned}
K_1(x,t) &= [t \leqslant x], \\
K_2(x,t) &= [t \leqslant x](x-t), \\
K_3(x,t) &= [t \leqslant x]\frac{1}{2}(t^2 - 2tx + x^2), \\
&\ldots \\
K_n(x,t) &= [t \leqslant x] \int_t^x K_{n-1}(x,s)\,ds.
\end{aligned}
$$

3.2. Рассмотрим случай, когда $n = 1$. Возьмем $u_k(x) = \frac{1}{k}\sin(kx)$. Заметим, что для неё выполняется потребованное выше условие о том, что $u(0) = 0$. Очевидно, что $\lim_{k\to\infty} \sup_x |u_k(x)| = 0$, но $\lim_{k\to\infty} \sup_x |u_k'(x)| = \lim_{k\to\infty} \sup_x |\cos(kx)| = 1$. Поэтому решение интегрального уравнения из пункта 1 будет неустойчиво.

3.3. Модифицируем интегральное уравнение следующим образом. Будем искать решение $f^*(x)$ в некотором классе функций (непрерывных, например), которое доставляет минимум функционалу:

$$H(f) = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 K(x,t) f(t)\, dt - u(x) \right| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Если $\sup_x |u(x)| \leqslant \varepsilon$, то для $f(x) = 0$, $H(f) \leqslant \varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. А для любого решения $f(x)$, такого что $\sup_x |f(x)| = s > 0$, $H(f) \geqslant s$ и не стремится к нулю. А значит при $\varepsilon < s$ все такие решения будут отброшены в пользу решений, более близких к нулевому. То есть будет выполняться $\sup_x |f^*(x)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.