CEFET-MG

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

MESTRADO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

RANDOM WALK:
SIMULAÇÃO DO CAMINHANTE ALEATÓRIO EM 1 + 1 DIMENSÕES (POSIÇÃO X TEMPO)

GERMANO TEIXEIRA DE MIRANDA

BELO HORIZONTE

JULHO DE 2021

Resumo

Simulação do ramdom walk ou caminhante aleatório em português, em uma dimensão. A simulação foi realizada para 10 caminhantes realizando 10000 passos. Para garantir a aleatoriedade do experimento foi utilizado um gerador de números aleatórios congruencial. Os dados obtidos com as simulações foram utilizados para desenhar gráficos log-log nos quais podemos observa a natureza da aleatoriedade do experimento. Aproximamos os dados obtidos com uma lei de potência para confirmar que se trata de um verdadeiro random walk. Também desenhamos um histograma com os resultados da simulação para mostrar que o random walk respeita o teorema central do limite.

Palavras-chave: Random Walk. Caminhante Aleatório. Gerador de Números Aleatórios Congruencial. Lei de potência. Teorema Central do limite.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

O Random walk, ou passeio aleatório em português, consiste em realizar sucessivos passos em direções aleatórias. O random walk pode ser realizado para qualquer número de dimensões e possui diversas aplicações práticas, como por exemplo o movimento browniano que descreve a movimentação de partículas suspensas em um fluido.

Neste trabalho criamos uma simulação de um random walk em uma dimensão, ou seja, a cada passo a entidade pode se mover para a direita ou para a esquerda e o módulo do passo é 1. Com a simulação podemos realizar análises sobre os dados e observar propriedades importantes do random walk.

2 Metodologia

Para realizar a simulação utilizamos python 3. Utilizamos as bibliotecas numpy para realizar operações com vetores, matplotlib para desenhar os gráficos, scipy para ajuste de curvas e criação do histograma. Para melhorar a legibilidade e organizar o código utilizamos o jupyterlab.

O desenvolvimento deste trabalho foi executado em 6 etapas.

2.1 Gerador de números aleatórios e simulação do random walk.

Implementamos um algoritmo de random walk com 1+1 dimensão (posição x tempo) (MIRANDA, 2021). Para garantir a aleatoriedade do movimento, implementamos um gerador de números aleatórios congruencial e utilizamos o seu resultado para decidir qual direção se mover em cada passo. Um gerador de números aleatórios congruencial funciona através da relação de recorrência definida por $x_{n+1} = (aX_n + c) \mod m$.

2.2 Executar 10 caminhadas com 10000 passos cada.

Executamos o caminho aleatório 10 vezes com 10000 passos a cada iteração e desenhamos um gráfico mostrando o caminho percorrido.

2.3 Calcular o desvio quadrático médio em escala log-log.

Com os caminhos simulados calculamos o desvio médio quadrático R^2 (Mean Square Displacement) e mostramos graficamente em uma escala log-log (R^2 x t).

2.4 Ajustar a curva de lei de potência (alométrica).

Utilizamos o desvio médio quadrático calculado para ajustar uma função de lei de potência ($y = ax^b$) e desenhamos um novo gráfico com os dados R^2 e a função ajusta para visualizar a qualidade do ajuste.

2.5 Verificar o expoente da lei de potência obtida.

Observando o expoente da função da lei de potência ajustada podemos verificar se a entidade em movimento está confinada (quando expoente é menor que um), em movimento de difusão (quando o expoente é igual a 1), ou sujeita algum fluxo ou força externa (quando expoente é maior do que 1).

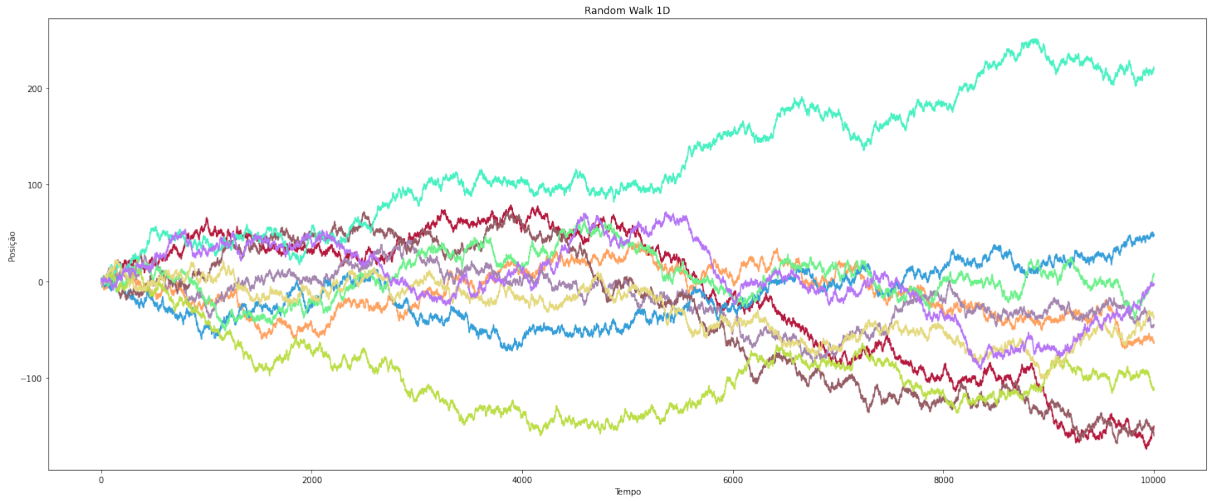
2.6 Verificar o teorema Central do Limite para a simulação.

Por fim geramos um histograma com o valor da posição final de cada caminhante aleatório e aproximamos o histograma com uma gaussiana para confirmar que a random walk respeita o teorema central do limite.

3 Resultados

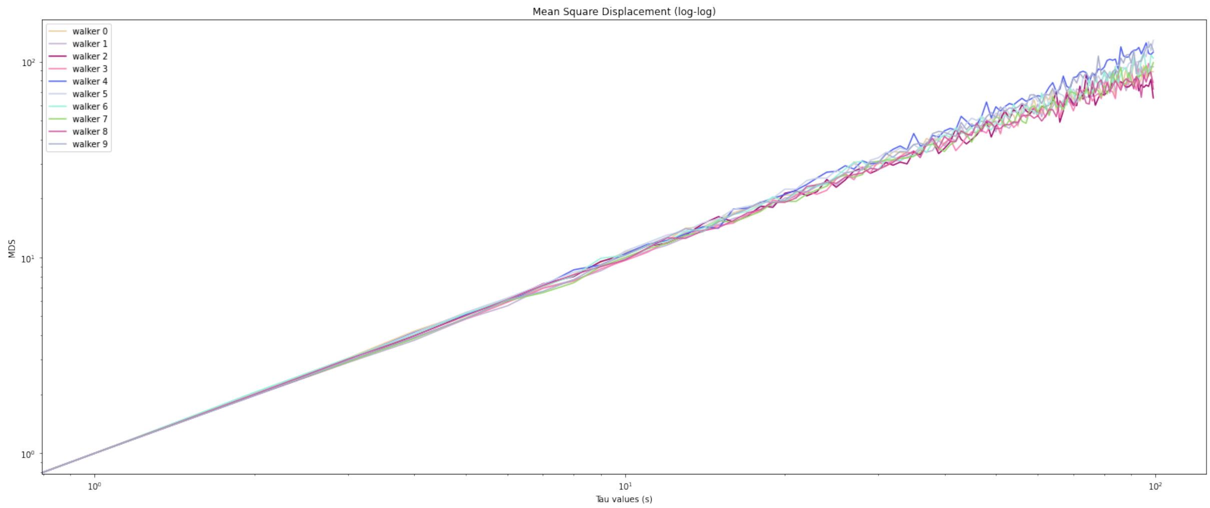
A simulação dos 10 caminhantes após realizar 10000 passos pode ser visualizada no gráfico abaixo. O gráfico mostra a posição do caminhante a cada passo realizado. Todos os caminhantes parte da origem na esquerda e a a ultima marcação mais à direita mostra a posição final.

Figura 1 – Simulação caminhantes



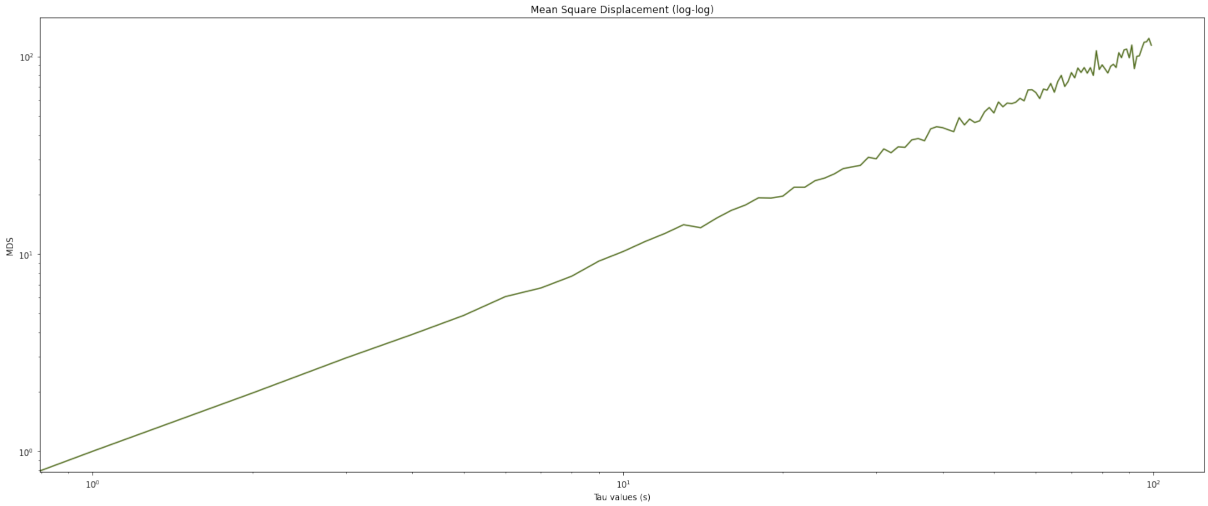
Calculamos o desvio médio quadrático R^2 para todos os 10 caminhantes e desenhamos um gráfico com a escala log-log.

Figura 2 – Desvio médio quadrático log-log



Para ter uma série de dados única para ajustar uma função de lei de potência, fizemos a média dos resultados obtidos do R^2 de todos os caminhantes. A curva das médias pode ser vista no gráfico abaixo.

Figura 3 – Média do desvio médio quadrático log-log

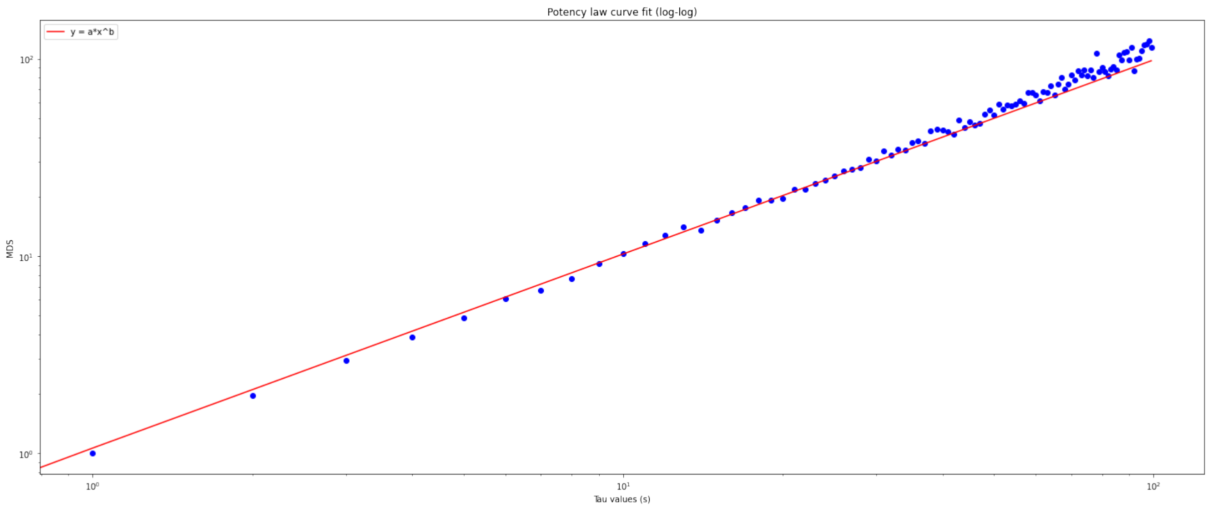


Ajustamos a uma função de lei de potência para a série de dados e obtemos uma função com parâmetros: a : 1.0632266820499991 e b : 0.9836350285341431.

$$y = 1.063226682049999x^{0.9836350285341431}$$

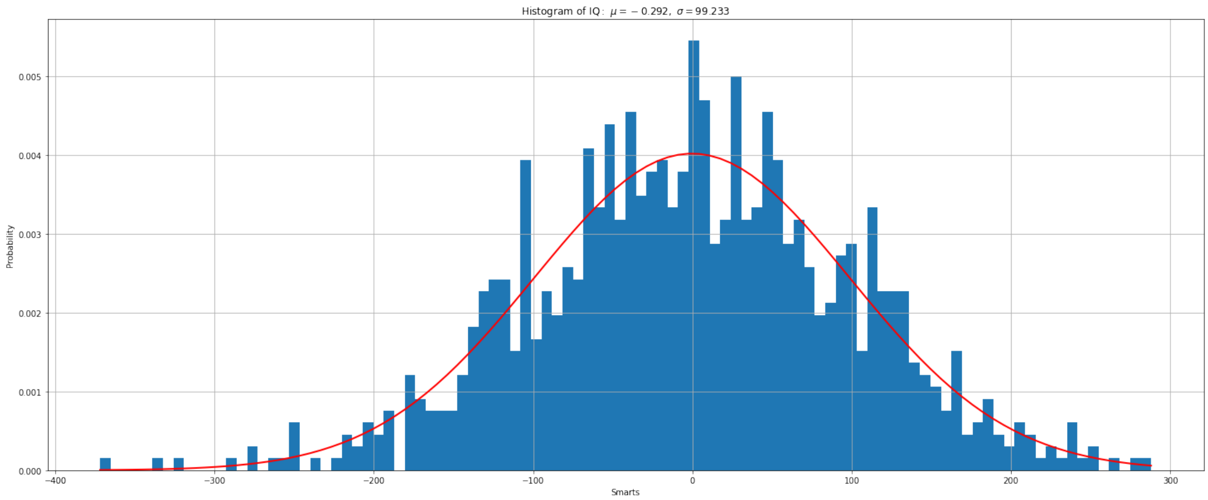
Desenhamos um novo gráfico com a serie de dados e com a função da lei de potência para visualizar a qualidade do ajuste.

Figura 4 – Lei de potência



Para verificar que a simulação respeita o teorema central do limite, desenhamos um histograma com a posição final de 1000 caminhantes e utilizamos o histograma para ajustar uma função gaussiana. O gráfico abaixo mostra o resultado obtido.

Figura 5 – Histograma



3.1 Discussão

O gráfico de posição x tempo é uma ótima forma de visualizar comparativamente as diversas interações da simulação do random walk. Com ele podemos visualizar lado a lado a posição de cada simulação desde a origem até a posição final. O formato final das curvas nos permite adquirir a intuição sobre o comportamento de uma entidade se movendo de maneira aleatória.

Ao calcular o desvio médio quadrático e desenhar o gráfico na escala log-log. Vemos que as curvas são aproximadamente lineares. os gráfico log-log mostram linhas retas para funções exponenciais, variando a inclinação da reta de acordo com o expoente.

Para identificar o expoente da função fazemos o ajuste de uma função de lei de potência. A função ajustada tem expoente 1, o que indica que o random walk implementado é realmente um caminhante aleatório.

O gráfico da função ajustada e da série de dados mostra que o ajuste feito realmente aproxima os valores da série.

O gráfico do histograma mostra o resultado da posição final de 1000 simulação. A posição final foi agrupada em blocos de 100 para cada coluna do histograma. Sobre o histograma desenhamos uma gaussiana (curva em formato de sino). Foi necessário normalizar o histograma antes de ajustar a gaussiana ajustada.

4 Conclusão

O experimento mostrou que o algoritmo random walk utilizando um gerador de números aleatórios congruencial realmente gerou um caminhante aleatório. Conseguimos confirmar isso ao observar que o expoente da função da lei de potência ajustada tem expoente 1, indicando que a partícula em movimento não está confinada nem se movendo dentro de um fluxo de força externo.

O histograma desenhado com a posição final do caminhante mostra claramente que a distribuição de dados tem o formato de uma gaussiana. Ou seja, a distribuição de frequência da posição final do random walk respeita o teorema central do limite.

4.1 Trabalhos futuros

Nesse trabalho exploramos o random walk apenas uma dimensão. Fazer simulações em mais dimensões e avaliar se as propriedades observadas serão as mesmas é uma maneira de dar continuidade a esse trabalho.

Referências

MIRANDA, G. T. de. **Código fonte random walk 1D**. 2021. Disponível em: <https://github-.com/germanotm/random-walk>. Acesso em: 19 de julho de 2021. Citado na página 5.