Temas Tratados en el Trabajo Práctico 5

- Comportamiento y operaciones bajo incertidumbre.
- Teorema de Bayes.
- Representación de la información incierta en Redes Bayesianas.
- Inferencia por enumeración.
- Redes de Markov y matrices de transición.
- Tiempo esperado y probabilidad de absorción.

Ejercicios Teóricos

1. ¿Cuáles son los tres axiomas de Kolmogorov?

Axiomas de Kolmogorov

Los axiomas de Kolmogorov son un conjunto de tres principios fundamentales formulados por el matematico ruso Andrei Kolmogorov en 1933 que definen matematicamente (utilizando la teoria de conjuntos y la teoria de la medida) el concepto de probabilidad y establecen las reglas que todas las probabilidades deben seguir, sin excepcion.

Los 3 axiomas son:

```
1. No Negatividad
```

La probabilidad de cualquier suceso A es un numero real no negativo.

P(A) ≥ 0, para cualquier suceso A.

```
2. Suceso seguro
```

La probabilidad del suceso seguro (llamado espacio muestral Ω) es igual a 1.

P(Ω) = 1, donde Ω representa el espacio muestral

```
3. Aditividad
```

Para cualquier secuencia de eventos mutuamente excluyentes (que no pueden ocurrir simultaneamente) $A_1, A_2, A_3...$, la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos es igual a la suma de sus probabilidad individuales

P(A1 ∪ A2 ∪ A3 ∪ ...) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + ...

Estas tres reglas simples son el punto de partida obligatorio para cualquier razonamiento probabilistico solido.

---

2. Una fábrica de clavos dispone de 2 máquinas que elaboran el 30% y 70% de los clavos que producen respectivamente. El porcentaje de clavos defectuosos de cada máquina es del 2% y 3%, respectivamente. Si se selecciona al azar un clavo de la producción y este fue defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina?

Regla de Bayes: **P(M1/D)** y **P(M2/D)**

El objetivo de este problema es averiguar cual es la probabilidad de que un clavo, dado que es defectuoso, provenga de la máquina número 1 o la máquina número 2.

1. Para resolver este problema, primero vamos a definir los eventos:

-M1: El clavo fue fabricado por la máquina 1.

-M2: El clavo fue fabricado por la máquina 2.

-D: El clavo es defectuoso.

2. Ahora, veamos los datos que poseemos:

-**P(M1)** = 0.3 (30% de los clavos fabricados)

-**P(M2)** = 0.7 (70% de los clavos fabricados)

-**P(D/M1)** = 0.02

-**P(D/M2)** = 0.03

3. Para avergiguar **P(M1/D)** y **P(M2/D)**, aplicamos la Regla de Bayes:

P(Mi/D) = [P(D/Mi) . P(Mi)]/[P(D)]

Siendo **P(D)**:

P(D)=P(D/M1)·P(M1)+P(D/M2)·P(M2)

P(D) = (0.02 * 0.3) + (0.03 * 0.7)

P(D) = 0.027

Con esto, calculamos **P(M1/D)** y **P(M2/D)**:

P(M1/D) = (0.02 * 0.3)/(0.027) ≈ 0.222

P(M2/D) = (0.03 * 0.7)/(0.027) ≈ 0.778

4. Respuesta final:

La probabilidad que un clavo defectuoso provenga de la máquina 1 es de 0.22 (22% de los casos), mientras que la probabilidad de que provenga de la máquina 2 es de 0.78 (78% de los casos).

---

3. La probabilidad de que un motor que sale de una fábrica con una *avería eléctrica* es de 10^{-3}, y la probabilidad de que salga con una *avería mecánica* es de 10^{-5}. Si existe un tipo de avería no se producen averías del otro tipo.

   Si el motor presenta *temperatura elevada* se enciende un *piloto luminoso* el 95% de las veces, cuando la *temperatura es reducida* el *piloto luminoso* se enciende el 99% de las veces, y a veces cuando la *temperatura se encuentra en un rango normal* el *piloto luminoso* se enciende erróneamente en un caso por millón.

   Cuando *no hay averías*, la *temperatura se eleva* en el 17% de los casos y es *reducida* el 5% de las veces. Si hay una *avería eléctrica*, la *temperatura se eleva* en el 90% de los casos y es *reducida* en el 1% de los casos. Finalmente cuando la *avería es mecánica*, la *temperatura está elevada* el 10% de los casos y *reducida* el 40% de las veces.

   Construya una Red Bayesiana y utilice inferencia por enumeración para calcular:

   ```
    3.1 La probabilidad de que el motor tenga una avería mecánica si
   se enciende el piloto.
   ```

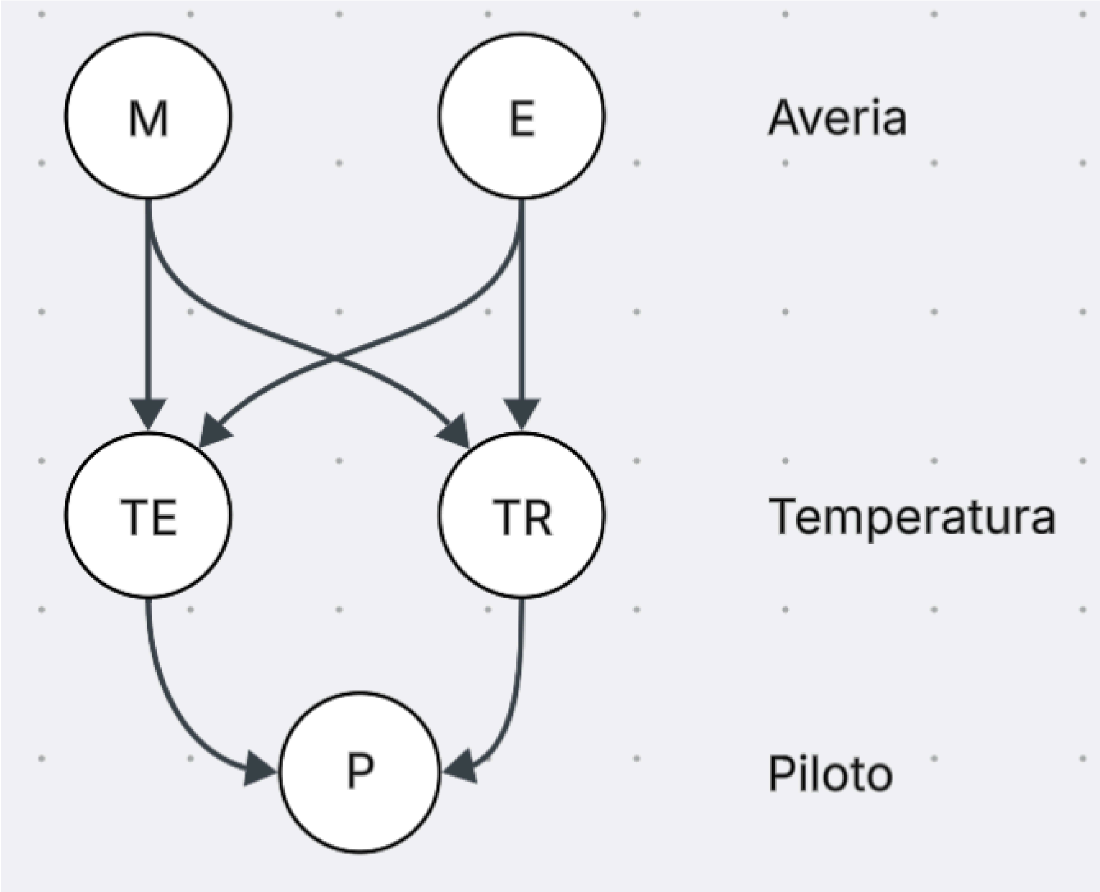
   ```
    3.2 La probabilidad de que el motor tenga una avería mecánica si
   se enciende el piloto y la temperatura es elevada.
   ```

Ejercicio 3

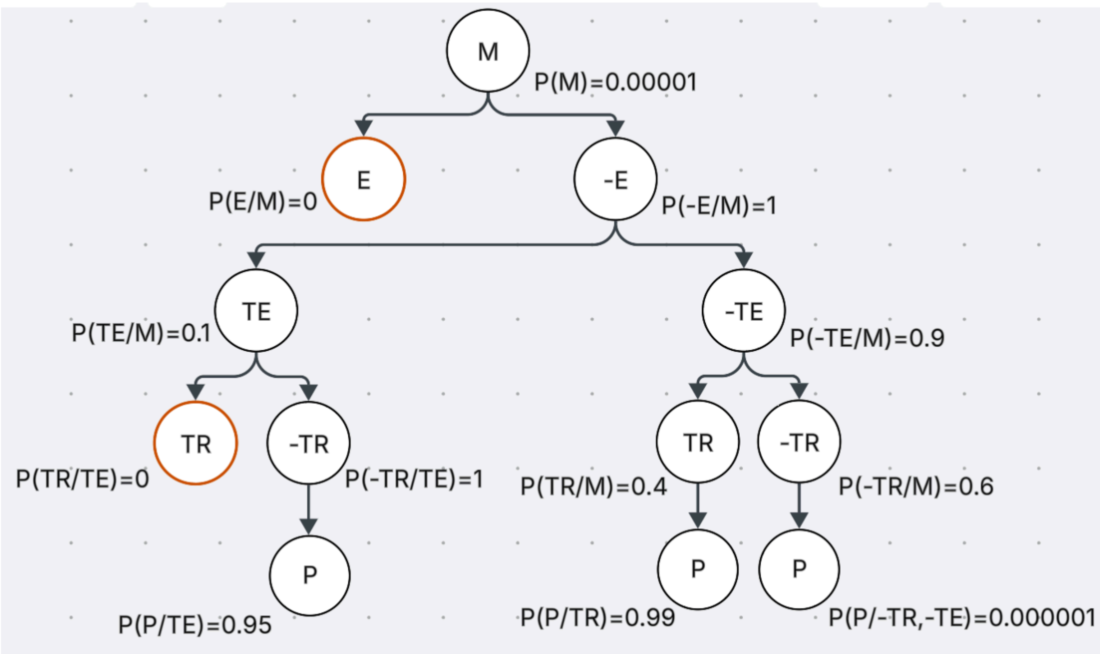
Definimos los estados:

- Avería Electrica (E)
- Avería Mecánica (M)
- Temp. Elevada (TE)
- Temp. Reducida (TR)
- Piloto (P)

Enumerar todas las combinaciones posibles de valores de las variables que no son hipotesis ni evidencia.



Obtenemos del enunciado del problema las probabilidades condicionales de interes



Ejercicio 3.1

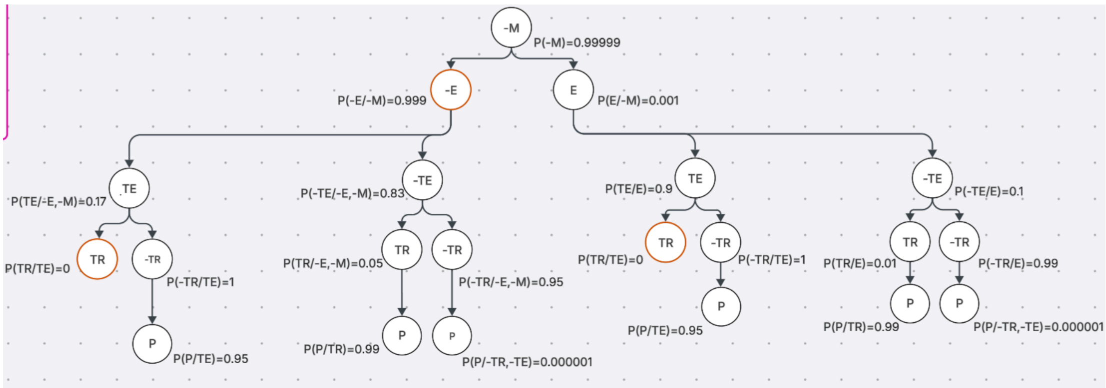
Calcular la probabilidad conjunta de cada combinacion usando la factorizacion de la red

Probabilidad de que el motor este averiado dado que el piloto esta encendido y la temperatura elevada. **P(M/P, TE) = 9.5e^-6**

Probabilidad de que el motor este averiado dado que el piloto esta encendido y la temperatura reducida. **P(M/P, TR) = 3.564e^-6**

Probabilidad de que el motor este averiado dado que el piloto esta encendido y la temperatura esta normal. **P(M/P, -TE, -TR) = 5.4e^-12**

Ahora buscamos las probabilidades considerando que no hay falla mecanica:



P(-M/TE,-E) = 0.1613

P(-M/TR,-E) = 0.041

P(-M/-TR,-TE,-E) = 7.88e^-7

P(-M/TE,E) = 8.55e^-4

P(-M/TR,E) = 9.9e^-7

P(-M/-TR,-TE,E) = 9.9e^-11

Sumados: P(-M/P) = 0.2031

La probabilidad de que el motor este averiado dado que el piloto esté encendido:
P(M/P) = 1.3064e^-5

P(-M/P) = 0.2031

Alpha = 1/[P(M/P)+P(-M/P)] = 4.923

La probabilidad de que el motor este averiado dado que el piloto esta encendido es igual a: P(M/P)*Alpha = 6.431

Ejercicio 3.2

Para obtener la probabilidad de que el motor tenga una avería mecánica si se enciende el piloto y la temperatura es elevada multiplicamos las probabilidades condicionales:

P(M/P, TE) = 9.5e^-6 * Alpha = 4.68e^-5

---

4. Cada día se procesa un producto en secuencia en dos máquinas, M1 y M2. Una inspección se realiza después de que una unidad del producto se completa en

cualquiera de las máquinas.

Hay un 5% de probabilidades de que una unidad sea desechada antes de inspeccionarla. Después de la inspección, hay un 3% de probabilidades de que la unidad sea desechada y un 7% de probabilidades de ser devuelta a la misma máquina para trabajarla de nuevo. Si una unidad pasa la inspección en ambas máquinas es buena.

```
 4.1 Dibuje la cadena de Markov que representa este problema y
describa para cada estado si es transitorio, recurrente, o
absorbente.

 4.2 Arme la matriz de transición

 4.3 Calcule la probabilidad de que una pieza que inicia el proceso
en la máquina M1 sea desechada.

 4.4 Calcule la probabilidad de que una pieza de la máquina M2 sea
terminada.

 4.5 Si los tiempos de procesamiento en las máquinas M1 y M2 son
respectivamente de 20 y 30 minutos y los tiempos de inspección son
respectivamente de 5 y 7 minutos, ¿cuánto tiempo tarda en ser
procesada una pieza que inicia en la máquina M1?
```

Cadena de Markov

4.1 Cadena de Markov y descripción de los estados

Hemos definido 6 estados, siendo :

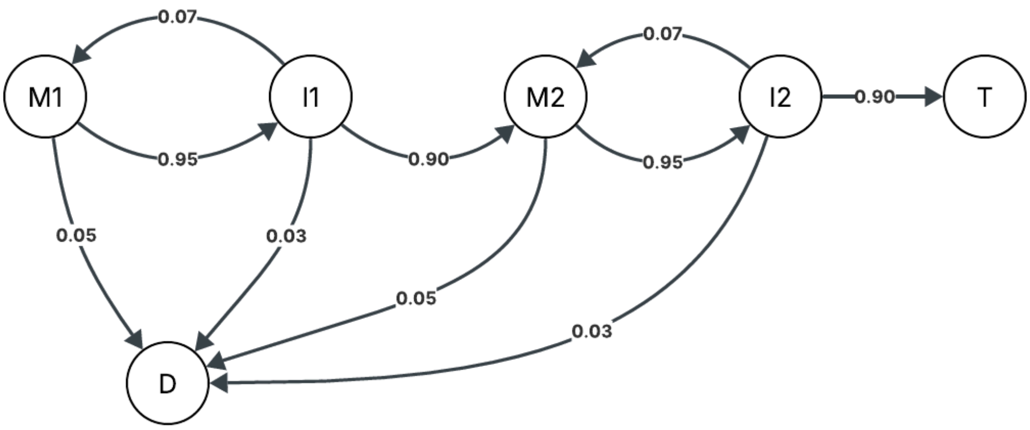
-M1 y M2 los procesos de la pieza en las máquinas 1 y 2 correspondientemente.

-I1 siendo el proceso de inspección de la pieza déspues de que sea completada en la máquina 1.

-I2 siendo el proceso de inspección de la pieza déspues de que sea completada en la máquina 2.

-D es el caso de que la pieza sea desechada.

-T es el caso donde la pieza pasa la inspección en ambas máquinas.



Descripción de los estados:

M1: Recurrente.

I1: Recurrente.

D: Absorbente.

M2: Recurrente.

I2: Recurrente.

T: Absorbente

4.2 Matriz de transición

Para armar la matriz de trancisión, colocamos en cada fila de una tabla los 6 posibles estados, y en cada columna indicamos la probabilidad de pasar de ese estado a cada uno de los demás.

- Matriz N de estados no absorbentes: en color verde
- Matriz A de estados absorbentes: color naranja
- Matriz I identidad: color azul

	M1	I1	M2	I2	D	T
M1	0	0,95	0	0	0,05	0
I1	0,07	0	0,9	0	0,03	0
M2	0	0	0	0,95	0,05	0
I2	0	0	0,07	0	0,03	0,9
D	0	0	0	0	1	0
T	0	0	0	0	0	1

4.3 Probabilidad de pieza de M1 de ser desechada

En este inciso, tenemos que calcular la probabilidad de absorción, referida al caso de que la pieza de M1 sea desechada(estado absorbente). La probabilidad de que una pieza que inicia el proceso en M1 sea desechada será de **0.1611**.

	D	T
M1	0.1611	0.8389
I1	0.1170	0.8830
M2	0.0841	0.9159
I2	0.0359	0.9641

4.4 Probabilidad de pieza de M2 de ser terminada

Al igual que en el inciso anterior, calculamos la probabilidad de absorción, referida al caso de que la pieza de M2 sea terminada (estado absorbente). La probabilidad de que una pieza de la máquina M2 sea terminada será de **0.9159**.

4.5 Tiempo esperado para que la pieza que inicia en M1 sea procesada

En este ejercicio calculamos el tiempo esperado para la absorción, que en este caso particular se refiere al tiempo que tarda una pieza que inicia en la máquina M1 en ser procesada. El resultado obtenido es que la pieza que inicia en M1 tarda **62 minutos y medio**, aproximadamente.

	Tiempos hasta T
M1	62,4724
I1	44,7078
M2	39,2608
I2	9,7483

Bibliografía

Russell, S. & Norvig, P. (2004) *Inteligencia Artificial: Un Enfoque Moderno*. Pearson Educación S.A. (2a Ed.) Madrid, España

Poole, D. & Mackworth, A. (2023) *Artificial Intelligence: Foundations of Computational Agents*. Cambridge University Press (3a Ed.) Vancouver, Canada