Modelos de Programación Lineal Entera

Programación Lineal

Limitaciones:

- ¿Qué sucede si sólo tiene sentido que las variables tomen valores enteros? Por ejemplo si lo que fabricamos son autos, o si representan personas.
- Limitada para modelar toma de decisiones.

Programación Lineal Entera Mixta
¿Qué es un Programa Lineal Entero Mixto?

Maximizar $\sum_{j \in C} c_j x_j + \sum_{j \in I} c_j x_j$

Sujeto a

$$\sum_{j \in C} a_{ij} x_j + \sum_{j \in I} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j \qquad j \in C \cup I$$

$$x_j \text{ entero} \qquad j \in I$$

Aplicaciones de Programación Lineal Entera Mixta

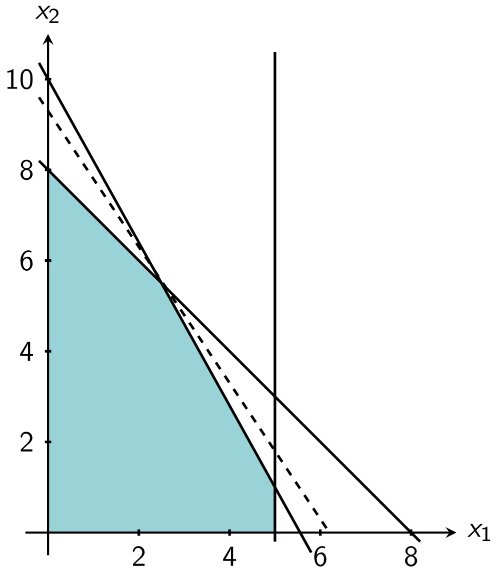
Usado en contextos donde:

- Ciertas cantidades sólo tiene sentido que tomen valores enteros, por ejemplo:
  - hombres (planificación de recursos humanos)
  - centrales eléctricas (ubicación de instalaciones)
- Toma de decisiones binarias:
  - Producir cierto producto (planificación de la producción)
  - Asignación de una tarea a un trabajador o máquina (problema de asignación)
  - Asignación de un bloque horario y aula a un curso (planificación horaria)
- Linearización, disyunciones, función lineal a trozos, etc.

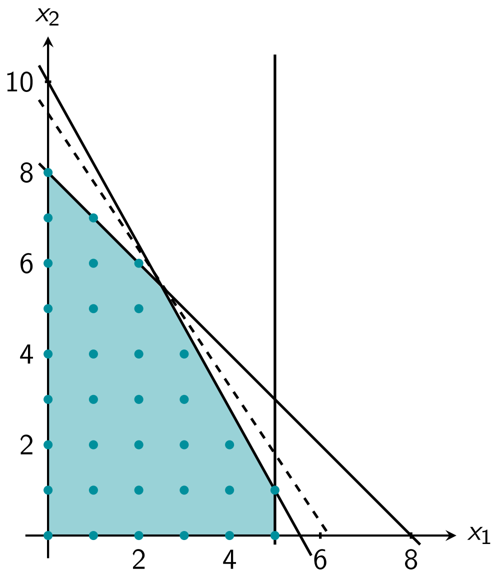
Programación Lineal Entera Mixta

- La inclusión de variables enteras, especialmente binarias ($\in \{0, 1\}$), incrementa enormemente el poder de expresión de los modelos.
- Aumenta la complejidad computacional.
- PLEM es NP-Difícil en general, por lo tanto:
  - no se conocen algoritmos polinomiales para resolverlo
  - instancias de tamaño pequeño pueden requerir mucho tiempo de cómputo para resolverlas.

Programación Lineal Entera Mixta - Región factible



Programación Lineal Entera Mixta - Región factible



Programación Lineal Entera Mixta - Relajación lineal

- Olvidar las restricción de integralidad de las variables.

- Resolver el PL resultante, lo cual es fácil computacionalmente.

Programación Lineal Entera Mixta - Relajación lineal

- Olvidar las restricción de integralidad de las variables.
- Resolver el PL resultante, lo cual es fácil computacionalmente.

¿Y si ahora rendondeamos la solución óptima a los enteros más cercanos?

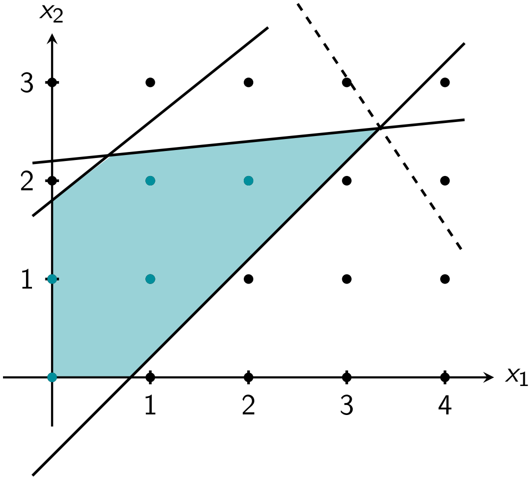
Programación Lineal Entera Mixta - Relajación lineal

- Olvidar las restricción de integralidad de las variables.
- Resolver el PL resultante, lo cual es fácil computacionalmente.

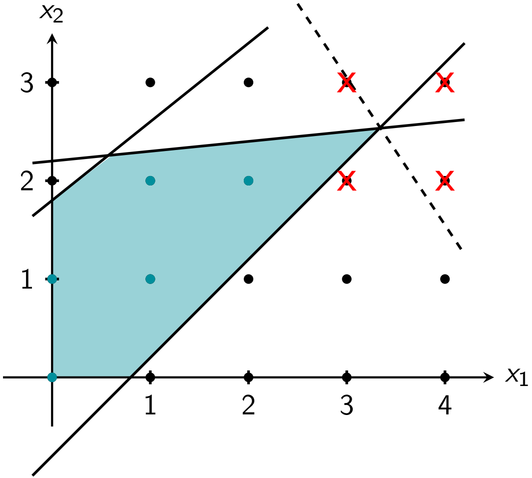
¿Y si ahora rendondeamos la solución óptima a los enteros más cercanos?

- En algunos casos esto es posible, especialmente cuando la solución óptima son enteros grandes y entonces no sensibles al redondeo.
- Hay casos donde redondear a enteros resulta en un punto no factible.
- Muchos PLEM redondear el valor de la solución, especialmente para variables 0-1, puede dar un resultado muy lejano al óptimo.

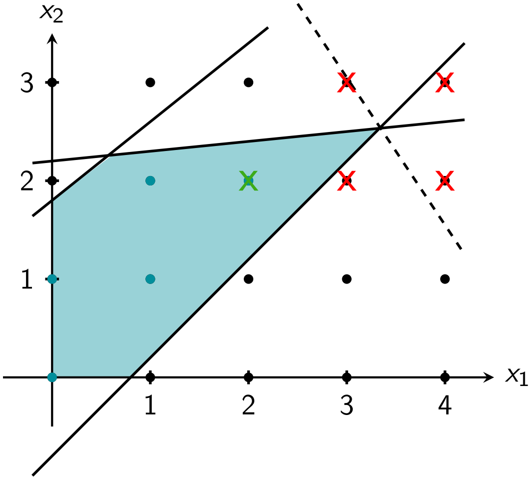
Programación Lineal Entera Mixta - Relajación lineal



Programación Lineal Entera Mixta - Relajación lineal



Programación Lineal Entera Mixta - Relajación lineal



Programación Lineal Entera Mixta - Relajación lineal

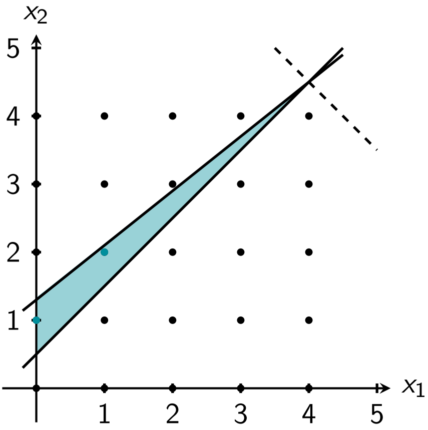
$$
\begin{array}{llrcl}
\text{Max} & z = x_1 + x_2 & & & \\
\text{s.a.} & & -2x_1 + 2x_2 & \geq & 1 \\
 & & -8x_1 + 10x_2 & \leq & 13 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
 & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

$$x^* = (1, 2)$$

$$z^* = 3$$

$$x^*_{LP} = (4, 4.5)$$

$$z^*_{LP} = 9.5$$



Problema de la mochila

- Decidí limpiar mi casa de objetos viejos.
- Tengo una mochila que soporta un máximo de 40 kg. y una lista de objetos que quiero llevar a vender a un mercado de pulgas.
- Cada objeto tiene un peso determinado y para cada objeto tengo un valor estimado de reventa en el mercado.

¿Cómo hago para llenar la mochila con los objetos que me dan más ganancia?

Problema de la mochila

Formalmente:

- Dado n objetos $v_1, \ldots, v_n$ con ganancia g_i y peso a_i para $i = 1, \ldots, n$ y una mochila con capacidad b.
- Objetivo: Encontrar la forma de llenar la mochila sin superar su capacidad obteniendo la mayor ganancia posible.

Problema de la mochila

Formalmente:

- Dado n objetos $v_1, \ldots, v_n$ con ganancia g_i y peso a_i para $i = 1, \ldots, n$ y una mochila con capacidad b.
- Objetivo: Encontrar la forma de llenar la mochila sin superar su capacidad obteniendo la mayor ganancia posible.

Variables: Para $i = 1, \ldots, n$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si colocamos al objeto } v_i \text{ en la mochila} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Problema de la mochila

Formalmente:

- Dado n objetos $v_1, \ldots, v_n$ con ganancia g_i y peso a_i para $i = 1, \ldots, n$ y una mochila con capacidad b.
- Objetivo: Encontrar la forma de llenar la mochila sin superar su capacidad obteniendo la mayor ganancia posible.

Variables: Para $i = 1, \ldots, n$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si colocamos al objeto } v_i \text{ en la mochila} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Max $\quad \sum_{i=1}^{n} g_i x_i \qquad$ ganancia

Problema de la mochila

Formalmente:

- Dado n objetos $v_1, \ldots, v_n$ con ganancia g_i y peso a_i para $i = 1, \ldots, n$ y una mochila con capacidad b.
- Objetivo: Encontrar la forma de llenar la mochila sin superar su capacidad obteniendo la mayor ganancia posible.

Variables: Para $i = 1, \ldots, n$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si colocamos al objeto } v_i \text{ en la mochila} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Max	$\sum_{i=1}^{n} g_i x_i$	ganancia
s.a.	$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$	no se debe superar la capacidad de la mochila

Problema de la mochila

Formalmente:

- Dado n objetos $v_1, \ldots, v_n$ con ganancia g_i y peso a_i para $i = 1, \ldots, n$ y una mochila con capacidad b.
- Objetivo: Encontrar la forma de llenar la mochila sin superar su capacidad obteniendo la mayor ganancia posible.

Variables: Para $i = 1, \ldots, n$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si colocamos al objeto } v_i \text{ en la mochila} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Max} & \sum_{i=1}^{n} g_i x_i & \text{ganancia} \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b & \text{no se debe superar la capacidad de la mochila} \\ & x_i \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Problema de asignación

Necesitamos asignar m tareas a n personas, con $n \geq m$. La asignación de la tarea j a la persona i da una ganacia representada por g_{ij}. Toda tarea debe ser asignada y a cada persona a lo sumo se le puede asignar una tarea.

Problema de asignación

Necesitamos asignar m tareas a n personas, con $n \geq m$. La asignación de la tarea j a la persona i da una ganacia representada por g_{ij}. Toda tarea debe ser asignada y a cada persona a lo sumo se le puede asignar una tarea.

Variables: Para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la tarea } j \text{ es asignada a la persona } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Problema de asignación

Necesitamos asignar m tareas a n personas, con $n \geq m$. La asignación de la tarea j a la persona i da una ganacia representada por g_{ij}. Toda tarea debe ser asignada y a cada persona a lo sumo se le puede asignar una tarea.

Variables: Para $i = 1, \ldots, n,\ \ j = 1, \ldots, m$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la tarea } j \text{ es asignada a la persona } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Max} \quad \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} g_{ij} x_{ij} \qquad\qquad \text{ganancia total}$$

Problema de asignación

Necesitamos asignar m tareas a n personas, con $n \geq m$. La asignación de la tarea j a la persona i da una ganacia representada por g_{ij}. Toda tarea debe ser asignada y a cada persona a lo sumo se le puede asignar una tarea.

Variables: Para $i = 1, \ldots, n, \;\; j = 1, \ldots, m$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la tarea } j \text{ es asignada a la persona } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Max	$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} g_{ij} x_{ij}$		ganancia total
s.a.	$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$	$j = 1, \ldots, m$	toda tarea debe ser asignada

Problema de asignación

Necesitamos asignar m tareas a n personas, con $n \geq m$. La asignación de la tarea j a la persona i da una ganacia representada por g_{ij}. Toda tarea debe ser asignada y a cada persona a lo sumo se le puede asignar una tarea.

Variables: Para $i = 1, \ldots, n, \;\; j = 1, \ldots, m$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la tarea } j \text{ es asignada a la persona } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Max} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} g_{ij} x_{ij} & & \text{ganancia total} \\ \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1, \ldots, m & \text{toda tarea debe ser asignada} \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 & i = 1, \ldots, n & \text{a lo sumo una tarea por persona} \end{array}$$

Problema de asignación

Necesitamos asignar m tareas a n personas, con $n \geq m$. La asignación de la tarea j a la persona i da una ganacia representada por g_{ij}. Toda tarea debe ser asignada y a cada persona a lo sumo se le puede asignar una tarea.

Variables: Para $i = 1, \ldots, n, \;\; j = 1, \ldots, m$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la tarea } j \text{ es asignada a la persona } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Max} & \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} g_{ij} x_{ij} & & \text{ganancia total} \\
\text{s.a.} & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1, \ldots, m & \text{toda tarea debe ser asignada} \\
 & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 & i = 1, \ldots, n & \text{a lo sumo una tarea por persona} \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, \;\; j = 1, \ldots, m &
\end{array}$$

Problema de correspondencia

Dado un grafo $G = (V, X)$, un correspondencia de G, es un conjunto $M \subseteq X$ de aristas de G tal que para todo $v \in V$, v es incidente a lo sumo a una arista $e \in M$.

Problema de correspondencia

Dado un grafo $G = (V, X)$, un correspondencia de G, es un conjunto $M \subseteq X$ de aristas de G tal que para todo $v \in V$, v es incidente a lo sumo a una arista $e \in M$.

Se deben distribuir $2n$ estudiantes a n habitaciones dobles. Cada par de estudiantes, i, j, tienen cierta afinidad respresentada por g_{ij}. ¿Cómo realizamos la distribución maximizando la afinidad total?

Problema de correspondencia

Dado un grafo $G = (V, X)$, un correspondencia de G, es un conjunto $M \subseteq X$ de aristas de G tal que para todo $v \in V$, v es incidente a lo sumo a una arista $e \in M$.

Se deben distribuir $2n$ estudiantes a n habitaciones dobles. Cada par de estudiantes, i, j, tienen cierta afinidad respresentada por g_{ij}. ¿Cómo realizamos la distribución maximizando la afinidad total?

Variables: Para $i, j = 1, \ldots, 2n$, con $i < j$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si los estudiantes } i \text{ y } j \text{ comparten habitación} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Problema de correspondencia

Dado un grafo $G = (V, X)$, un correspondencia de G, es un conjunto $M \subseteq X$ de aristas de G tal que para todo $v \in V$, v es incidente a lo sumo a una arista $e \in M$.

Se deben distribuir $2n$ estudiantes a n habitaciones dobles. Cada par de estudiantes, i, j, tienen cierta afinidad respresentada por g_{ij}. ¿Cómo realizamos la distribución maximizando la afinidad total?

Variables: Para $i, j = 1, \ldots, 2n$, con $i < j$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si los estudiantes } i \text{ y } j \text{ comparten habitación} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{j=i+1}^{2n} g_{ij} x_{ij} \qquad \text{afinidad total}$$

Problema de correspondencia

Dado un grafo $G = (V, X)$, un correspondencia de G, es un conjunto $M \subseteq X$ de aristas de G tal que para todo $v \in V$, v es incidente a lo sumo a una arista $e \in M$.

Se deben distribuir $2n$ estudiantes a n habitaciones dobles. Cada par de estudiantes, i, j, tienen cierta afinidad respresentada por g_{ij}. ¿Cómo realizamos la distribución maximizando la afinidad total?

Variables: Para $i, j = 1, \ldots, 2n$, con $i < j$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si los estudiantes } i \text{ y } j \text{ comparten habitación} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{j=i+1}^{2n} g_{ij} x_{ij} \qquad \text{afinidad total}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{i-1} x_{ji} + \sum_{j=i+1}^{2n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, 2n \qquad \text{todo estudiante tiene una pareja}$$

Problema de correspondencia

Dado un grafo $G = (V, X)$, un correspondencia de G, es un conjunto $M \subseteq X$ de aristas de G tal que para todo $v \in V$, v es incidente a lo sumo a una arista $e \in M$.

Se deben distribuir $2n$ estudiantes a n habitaciones dobles. Cada par de estudiantes, i, j, tienen cierta afinidad respresentada por g_{ij}. ¿Cómo realizamos la distribución maximizando la afinidad total?

Variables: Para $i, j = 1, \dots, 2n$, con $i < j$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si los estudiantes } i \text{ y } j \text{ comparten habitación} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{j=i+1}^{2n} g_{ij} x_{ij} \qquad \text{afinidad total}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{i-1} x_{ji} + \sum_{j=i+1}^{2n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, 2n \qquad \text{todo estudiante tiene una pareja}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i, j = 1, \dots, 2n, \; i < j$$

Disyunción

Queremos modelar la disyunción de dos restricciones:

$$A_1 x \leq b_1 \text{ o } A_2 x \leq b_2$$

donde A_1 y $A_2 \in \mathbb{R}^n$, b_1 y $b_2 \in \mathbb{R}$ constantes, $x \in \mathbb{R}^n$ variables.

Disyunción

Queremos modelar la disyunción de dos restricciones:

$$A_1 x \leq b_1 \text{ o } A_2 x \leq b_2$$

donde A_1 y $A_2 \in \mathbb{R}^n$, b_1 y $b_2 \in \mathbb{R}$ constantes, $x \in \mathbb{R}^n$ variables.

- Definimos una variable binaria δ que tome valor

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{asegura que } A_1 x \leq b_1 \\ 0 & \text{asegura que } A_2 x \leq b_2 \end{cases}$$

Disyunción

Queremos modelar la disyunción de dos restricciones:

$$A_1x \leq b_1 \text{ o } A_2x \leq b_2$$

donde A_1 y $A_2 \in \mathbb{R}^n$, b_1 y $b_2 \in \mathbb{R}$ constantes, $x \in \mathbb{R}^n$ variables.

- Definimos una variable binaria δ que tome valor

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{asegura que } A_1x \leq b_1 \\ 0 & \text{asegura que } A_2x \leq b_2 \end{cases}$$

- Agregamos las restricciones:

$$A_1x \leq b_1 + (1 - \delta)M_1$$

y

$$A_2x \leq b_2 + \delta M_2$$

Disyunción

Ahora queremos que por lo menos r restricciones se cumplan de entre las k restricciones:

$$A_1 x \leq b_1, \qquad \dots, \qquad A_k x \leq b_k$$

donde $A_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$ constantes $i = 1, \dots, k$, $x \in \mathbb{R}^n$ variables.

Disyunción

Ahora queremos que por lo menos r restricciones se cumplan de entre las k restricciones:

$$A_1 x \leq b_1, \qquad \ldots, \qquad A_k x \leq b_k$$

donde $A_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$ constantes $i = 1, \ldots, k$, $x \in \mathbb{R}^n$ variables.

- Definimos k variables binarias δ_i, $i = 1, \ldots, k$:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{asegura que } A_i x \leq b_i \\ 0 & \text{caso contrario (puede pasar o no)} \end{cases}$$

Disyunción

Ahora queremos que por lo menos r restricciones se cumplan de entre las k restricciones:

$$A_1 x \leq b_1, \qquad \ldots, \qquad A_k x \leq b_k$$

donde $A_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$ constantes $i = 1, \ldots, k$, $x \in \mathbb{R}^n$ variables.

- Definimos k variables binarias δ_i, $i = 1, \ldots, k$:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{asegura que } A_i x \leq b_i \\ 0 & \text{caso contrario (puede pasar o no)} \end{cases}$$

- Agregamos las restricciones:

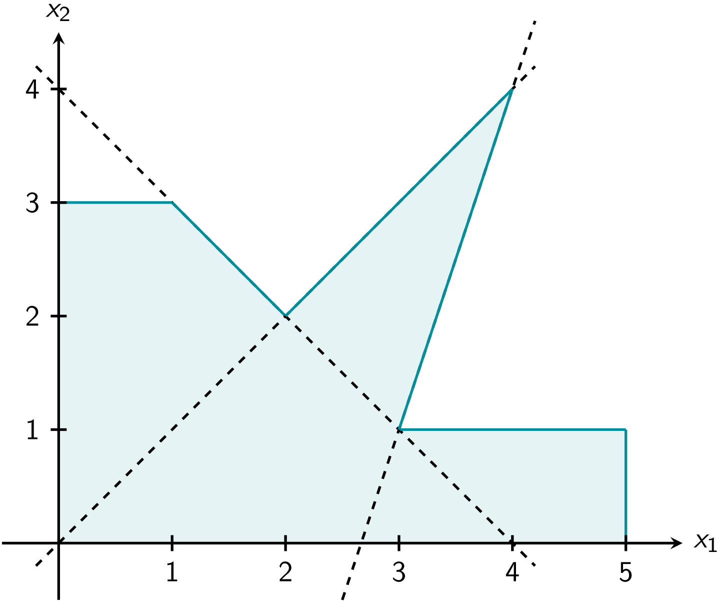
$$A_i x \leq b_i + (1 - \delta_i) M_i$$

y

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_i \geq r$$

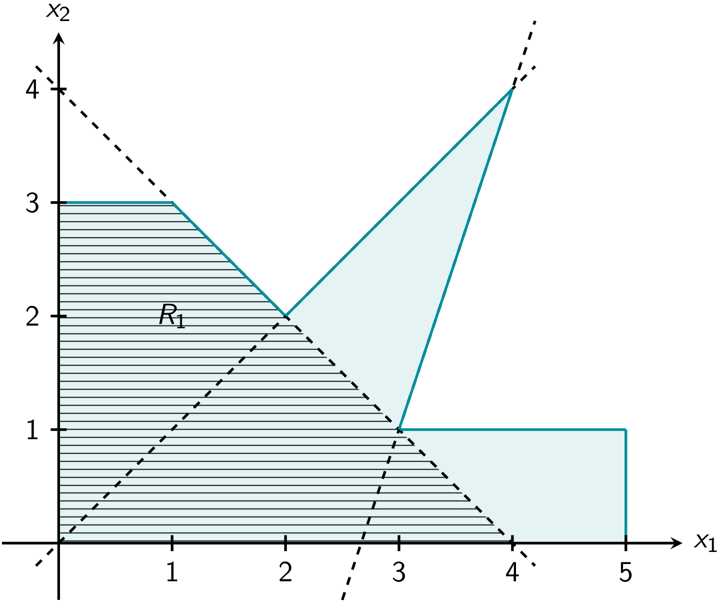
Disyunción - Región no convexa

Queremos modelar esta región factible no convexa:



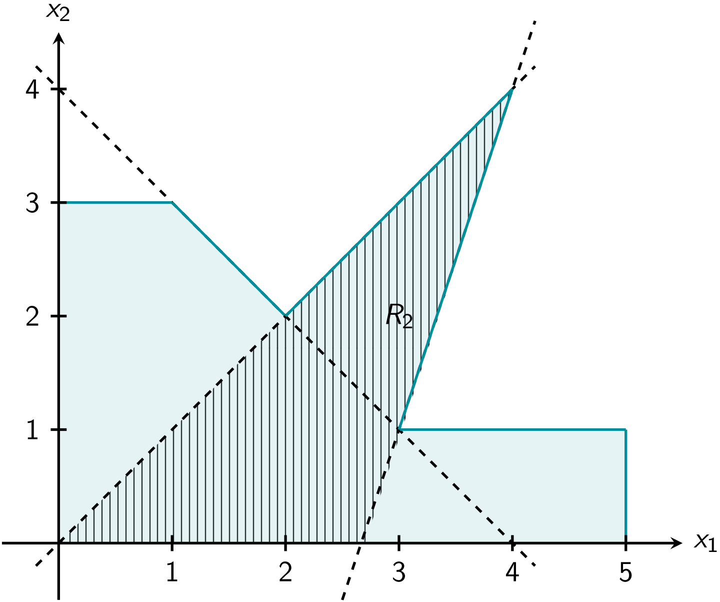
Disyunción - Región no convexa

Queremos modelar esta región factible no convexa:



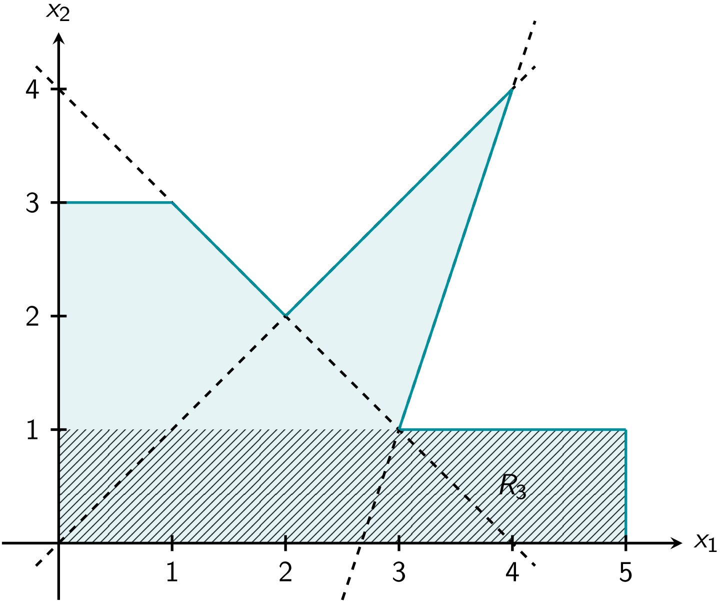
Disyunción - Región no convexa

Queremos modelar esta región factible no convexa:



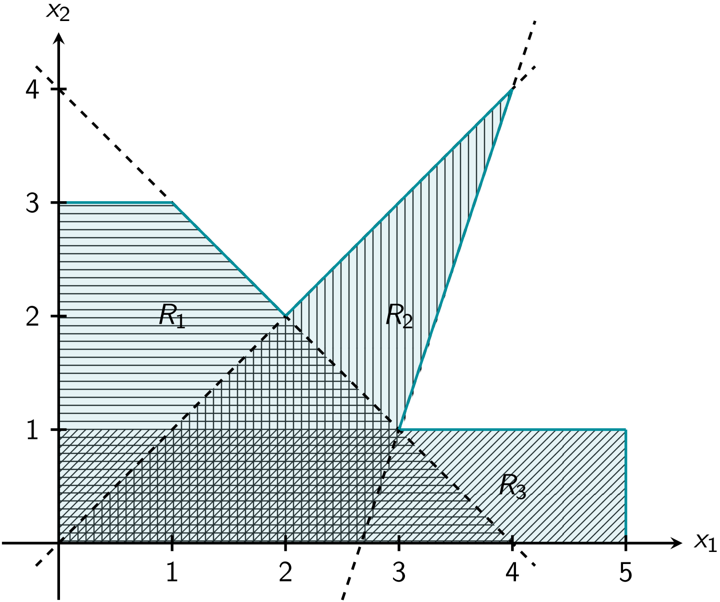
Disyunción - Región no convexa

Queremos modelar esta región factible no convexa:



Disyunción - Región no convexa

Queremos modelar esta región factible no convexa:



Disyunción - Región no convexa

- $R1$:

$$\begin{array}{rcl} x_2 & \leq & 3 \\ x_1 + x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

Disyunción - Región no convexa

- $R1$:
$$\begin{aligned} x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

- $R2$:
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 8 \end{aligned}$$

Disyunción - Región no convexa

- $R1$:
$$\begin{array}{rcl} x_2 & \leq & 3 \\ x_1 + x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

- $R2$:
$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & \leq & 0 \\ 3x_1 - x_2 & \leq & 8 \end{array}$$

- $R3$:
$$\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & 5 \\ x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

Disyunción - Región no convexa

- $R1$:
$$\begin{array}{rcl} x_2 & \leq & 3 \\ x_1 + x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

- $R2$:
$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & \leq & 0 \\ 3x_1 - x_2 & \leq & 8 \end{array}$$

- $R3$:
$$\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & 5 \\ x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

Definimos 3 variables binarias, δ_i para $i = 1, 2, 3$:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{asegura que } x \in R_i \\ 0 & \text{caso contrario (puede pasar o no)} \end{cases}$$

Disyunción - Región no convexa

$(x_1, x_2) \in R_1$:

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 3 + (1-\delta_1)1 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 + (1-\delta_1)5 \end{aligned}$$

Disyunción - Región no convexa

$(x_1, x_2) \in R_1$:

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 3 + (1 - \delta_1)1 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 + (1 - \delta_1)5 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) \in R_2$:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 0 + (1 - \delta_2)4 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 8 + (1 - \delta_2)7 \end{aligned}$$

Disyunción - Región no convexa

$(x_1, x_2) \in R_1$:

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 3 + (1 - \delta_1)1 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 + (1 - \delta_1)5 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) \in R_2$:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 0 + (1 - \delta_2)4 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 8 + (1 - \delta_2)7 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) \in R_3$:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 5 + (1 - \delta_3)5 \\ x_2 &\leq 1 + (1 - \delta_3)4 \end{aligned}$$

Disyunción - Región no convexa

$(x_1, x_2) \in R_1$:

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 3 + (1 - \delta_1)1 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 + (1 - \delta_1)5 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) \in R_2$:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 0 + (1 - \delta_2)4 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 8 + (1 - \delta_2)7 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) \in R_3$:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 5 + (1 - \delta_3)5 \\ x_2 &\leq 1 + (1 - \delta_3)4 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 &\geq 1 \end{aligned}$$

Variables no negativas:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Variables binarias:

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0, 1\}$$

Implicación

Queremos modelar la implicación: Si $x > 0$ entonces debe cumplirse $y \geq a$, donde a es una constante.

Implicación

Queremos modelar la implicación: Si $x > 0$ entonces debe cumplirse $y \geq a$, donde a es una constante.

- Definimos una variable binaria δ que tome valor 1 cuando $x > 0$ (si $x = 0$,δ puede valer 0 ó 1).

Implicación

Queremos modelar la implicación: Si $x > 0$ entonces debe cumplirse $y \geq a$, donde a es una constante.

- Definimos una variable binaria δ que tome valor 1 cuando $x > 0$ (si $x = 0, \delta$ puede valer 0 ó 1).
- Agregamos las restricciones:

$$x \leq M\delta$$

y

$$y \geq a\delta$$

donde M es una cota superior del valor de x.

Implicación

Mezcla

En el problema de mezcla de petróleo y aceite, supongamos que por restricciones de mercado podemos vender combustible sin procesar sólo si por lo menos vendemos 3000 barriles de combustible procesado.

Variables:

X: barriles de petróleo comprados por día x 1000

x_c: barriles de combustible sin proc. catalítico vendidos por día x 1000

x_a: barriles de aceite sin proc. catalítico vendidos por día x 1000

x_{cp}: barriles de combustible con proc. catalítico vendidos por día x 1000

x_{ap}: barriles de aceite con proc. catalítico vendidos por día x 1000

$$z: \begin{cases} 1 & \text{si } x_c \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Implicación

Mezcla

$$\text{Max} \quad -40X + 60x_c + 40x_a + 130x_{cp} + 90x_{ap}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a.} \qquad 3/4x_{ap} + x_{cp} &\leq 8 \\
x_c + x_a + x_{cp} + x_{ap} &= X \\
x_c + x_{cp} &= x_a + x_{ap} \\
X &\leq 20
\end{aligned}$$

$x_c > 0 \Rightarrow x_{cp} \geq 3$:

Implicación

Mezcla

$$\text{Max} \quad -40X + 60x_c + 40x_a + 130x_{cp} + 90x_{ap}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a.} \qquad 3/4x_{ap} + x_{cp} &\leq 8 \\
x_c + x_a + x_{cp} + x_{ap} &= X \\
x_c + x_{cp} &= x_a + x_{ap} \\
X &\leq 20
\end{aligned}$$

$x_c > 0 \Rightarrow x_{cp} \geq 3$:

$$\begin{aligned}
x_c &\leq 20z \\
x_{cp} &\geq 3z \\
x_c, x_a, x_{cp}, x_{ap} &\geq 0 \\
z \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Implicación

Mezcla

Ahora supongamos que sólo pueden ser vendidos 3 de los productos.

Variables discretas

Queremos modelar una restricción de la forma:

$$Ax \in \{s_1, \ldots, s_k\}$$

donde $A \in \mathbb{R}^n$, $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{R}$ son valores arbitrarios.

Variables discretas

Queremos modelar una restricción de la forma:

$$Ax \in \{s_1, \ldots, s_k\}$$

donde $A \in \mathbb{R}^n$, $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{R}$ son valores arbitrarios.

- Definimos k variables binarias δ_r que tomen valor

$$\delta_r = \begin{cases} 1 & \text{si } Ax = s_r \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

  para $r = 1, \ldots, k$.

Variables discretas

Queremos modelar una restricción de la forma:

$$Ax \in \{s_1, \ldots, s_k\}$$

donde $A \in \mathbb{R}^n$, $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{R}$ son valores arbitrarios.

- Definimos k variables binarias δ_r que tomen valor

  $$\delta_r = \begin{cases} 1 & \text{si } Ax = s_r \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

  para $r = 1, \ldots, k$.
- Agregamos las restricciones:

  $$Ax = \sum_{r=1}^{k} \delta_r s_r$$

  y

  $$\sum_{r=1}^{k} \delta_r = 1$$

Carga fija

Queremos modelar la función de costo:

$$c_x = \begin{cases} ax + b & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Carga fija

Queremos modelar la función de costo:

$$c_x = \begin{cases} ax + b & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Definimos una variable binaria δ que tome valor

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Carga fija

Queremos modelar la función de costo:

$$c_x = \begin{cases} ax + b & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Definimos una variable binaria δ que tome valor

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Agregamos las restricciones:

$$\delta \leq x \leq M\delta$$

donde M es una cota superior del valor de x.

Carga fija

Queremos modelar la función de costo:

$$c_x = \begin{cases} ax + b & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Definimos una variable binaria δ que tome valor

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

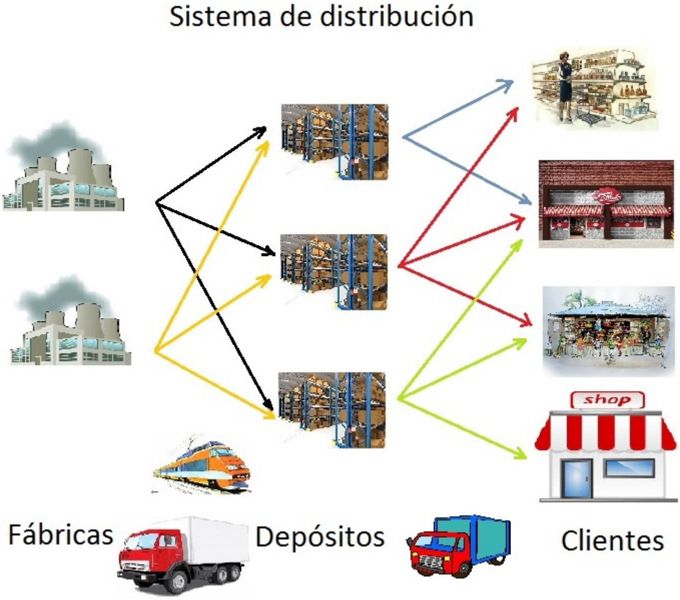
- Agregamos las restricciones:

$$\delta \leq x \leq M\delta$$

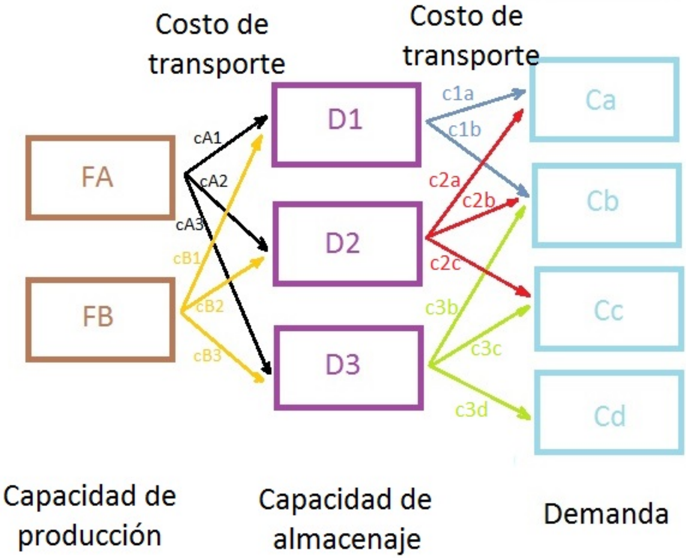
  donde M es una cota superior del valor de x.
- Podemos escribir la función de costo de forma lineal:

$$c(x, \delta) = ax + b\delta$$

Carga fija - Distribución de mercadería



Carga fija - Distribución de mercadería



Carga fija - Distribución de mercadería

Formalmente:

- Dado un digrafo $G = (V, X)$ con:
  - $V = F \cup D \cup C$, donde F el conjunto de fábricas, D el de depósitos y C el de clientes
  - $X \subseteq \{(i,j) : i \in F, j \in D\} \cup \{(i,j) : i \in D, j \in C\}$ conjunto de arcos
  - c_{ij} costo de transporte de una unidad de mercadería asociado con el arco $(i,j) \in X$, $c : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$
  - f_i capacidad de producción de la fábrica $i \in F$, $f : F \to \mathbb{R}^{\geq 0}$
  - d_i capacidad de almacenaje del depósito $i \in D$, $d : D \to \mathbb{R}^{\geq 0}$
  - r_i demanda del cliente $i \in C$, $r : C \to \mathbb{R}^{\geq 0}$
- Objetivo: Minimizar el costo de transporte total para satisfacer la demanda de los clientes sin superar las capacidades de producción y almacenaje.

Carga fija - Distribución de mercadería

Ahora consideremos también un costo de alquiler de los depósitos, a_j para $j \in D$. Este costo sólo es pagado si el depósito correspondiente es utilizado.

Variables:

Carga fija - Distribución de mercadería

Ahora consideremos también un costo de alquiler de los depósitos, a_j para $j \in D$. Este costo sólo es pagado si el depósito correspondiente es utilizado.

Variables:

x_{ij}: flujo de mercadería desde fábrica i al depósito j

Carga fija - Distribución de mercadería

Ahora consideremos también un costo de alquiler de los depósitos, a_j para $j \in D$. Este costo sólo es pagado si el depósito correspondiente es utilizado.

Variables:

x_{ij}: flujo de mercadería desde fábrica i al depósito j

y_{jk}: flujo de mercadería desde el depósito j al cliente k

Carga fija - Distribución de mercadería

Ahora consideremos también un costo de alquiler de los depósitos, a_j para $j \in D$. Este costo sólo es pagado si el depósito correspondiente es utilizado.

Variables:

x_{ij}: flujo de mercadería desde fábrica i al depósito j

y_{jk}: flujo de mercadería desde el depósito j al cliente k

$$z_j: \begin{cases} 1 & \text{si el depósito } j \text{ es utilizado} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Carga fija - Distribución de mercadería

Ahora consideremos también un costo de alquiler de los depósitos, a_j para $j \in D$. Este costo sólo es pagado si el depósito correspondiente es utilizado.

Variables:

x_{ij}: flujo de mercadería desde fábrica i al depósito j

y_{jk}: flujo de mercadería desde el depósito j al cliente k

$$z_j: \begin{cases} 1 & \text{si el depósito } j \text{ es utilizado } (\sum_{i \in F} x_{ij} > 0) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Carga fija

Distribución de mercadería

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in F, j \in D} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in D, k \in C} c_{jk} y_{jk} + \qquad \text{costo de transporte}$$

Carga fija

Distribución de mercadería

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in F, j \in D} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in D, k \in C} c_{jk} y_{jk} + \qquad \text{costo de transporte}$$

$$\sum_{j \in D} a_j z_j \qquad \text{costo de alquiler de los depósitos}$$

Carga fija

Distribución de mercadería

Min $\sum_{i \in F, j \in D} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in D, k \in C} c_{jk} y_{jk} +$ costo de transporte

$\sum_{j \in D} a_j z_j$ costo de alquiler de los depósitos

s.a.

Capacidad fábrica: $\sum_{j \in D} x_{ij} \leq f_i \quad \forall i \in F$

Capacidad depósito: $\sum_{i \in F} x_{ij} \leq d_j \quad \forall j \in D$

Preservación de mercadería: $\sum_{i \in F} x_{ij} = \sum_{k \in C} y_{jk} \quad \forall j \in D$

Demanda de clientes: $\sum_{j \in D} y_{jk} = r_k \quad \forall k \in C$

$$x_{ij}, y_{jk} \geq 0 \qquad \forall i \in F, j \in D, k \in C$$

Carga fija

Distribución de mercadería

$$\text{Min} \quad \sum_{i\in F, j\in D} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in D, k\in C} c_{jk}y_{jk} + \qquad \text{costo de transporte}$$

$$\sum_{j\in D} a_j z_j \qquad \text{costo de alquiler de los depósitos}$$

s.a.

Capacidad fábrica: $\sum_{j\in D} x_{ij} \leq f_i \quad \forall i \in F$

Capacidad depósito: $\sum_{i\in F} x_{ij} \leq d_j \quad \forall j \in D$

Preservación de mercadería: $\sum_{i\in F} x_{ij} = \sum_{k\in C} y_{jk} \quad \forall j \in D$

Demanda de clientes: $\sum_{j\in D} y_{jk} = r_k \quad \forall k \in C$

Definición de z_j: $\sum_{i\in F} x_{ij} \leq d_j z_j \quad \forall k \in C$

$x_{ij}, y_{jk} \geq 0 \quad \forall i \in F, j \in D, k \in C$

$z_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in D$

Problema de empaquetamiento en recipientes (1-dimensional)

Tenemos que guardar un conjunto de n objetos en recipientes de capacidad b. Cada objeto pesa a_i, $i = 1, \ldots, n$. ¿Cómo lo debemos hacer si queremos utlizar la mínima cantidad posible de recipientes?

Problema de empaquetamiento en recipientes (1-dimensional)

Tenemos que guardar un conjunto de n objetos en recipientes de capacidad b. Cada objeto pesa a_i, $i = 1, \ldots, n$. ¿Cómo lo debemos hacer si queremos utlizar la mínima cantidad posible de recipientes?

Variables:

- Para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el objeto } i \text{ es guardado en el recipiente } j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Para $j = 1, \ldots, n$,

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{el recipiente } j \text{ es utlizado} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Problema de empaquetamiento en recipientes (1-dimensional)

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j \qquad \text{cantidad de recipientes utilizados}$$

Problema de empaquetamiento en recipientes (1-dimensional)

Min $\sum_{j=1}^{n} y_j$ cantidad de recipientes utilizados

s.a. No se supera la capacidad de un recipiente:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} \leq b \quad j = 1, \ldots, n$$

Problema de empaquetamiento en recipientes (1-dimensional)

Min $\sum_{j=1}^{n} y_j$ cantidad de recipientes utilizados

s.a. No se supera la capacidad de un recipiente:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} \leq b \quad j = 1, \ldots, n$$

El recipiente es usado:

$$x_{ij} \leq y_j \qquad i = 1, \ldots, n \; j = 1, \ldots, n$$

Problema de empaquetamiento en recipientes (1-dimensional)

Min $\sum_{j=1}^{n} y_j$ cantidad de recipientes utilizados

s.a. No se supera la capacidad de un recipiente:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} \leq b \quad j = 1, \ldots, n$$

El recipiente es usado:

$$x_{ij} \leq y_j \quad i = 1, \ldots, n \; j = 1, \ldots, n$$

Cotas e integralidad de las variables:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, n \; j = 1, \ldots, n$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \ldots, n$$

Problema de ordenamiento lineal

Debemos ordenar un conjunto de n ítems. Cada par de ítems tiene una ganancia asociada a_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ que se obtiene si el ítem i está antes que el ítem j en el orden. ¿Cómo debemos ordenar los ítems para conseguir la máxima ganancia?

Problema de ordenamiento lineal

Debemos ordenar un conjunto de n ítems. Cada par de ítems tiene una ganancia asociada a_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ que se obtiene si el ítem i está antes que el ítem j en el orden. ¿Cómo debemos ordenar los ítems para conseguir la máxima ganancia?

Variables:

Para $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, $i \neq j$,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el ítem } i \text{ está antes que } j \text{ en el orden} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Problema de ordenamiento lineal

$$\text{Max} \quad \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n} a_{ij} x_{ij} \qquad \text{ganancia total}$$

Problema de ordenamiento lineal

$$\text{Max} \quad \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} a_{ij}x_{ij} \qquad \text{ganancia total}$$

s.a. Todo par de ítems debe estar ordenados:

Problema de ordenamiento lineal

$$\text{Max} \quad \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} a_{ij}x_{ij} \qquad \text{ganancia total}$$

s.a. Todo par de ítems debe estar ordenados:

$$x_{ij} + x_{ji} = 1 \qquad i,j = 1,\ldots,n,\ i \neq j$$

Problema de ordenamiento lineal

$$\text{Max} \quad \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} a_{ij} x_{ij} \qquad \text{ganancia total}$$

s.a. Todo par de ítems debe estar ordenados:

$$x_{ij} + x_{ji} = 1 \qquad i, j = 1, \ldots, n, \;\; i \neq j$$

No se pueden formar ciclos:

Problema de ordenamiento lineal

Max $\sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} a_{ij}x_{ij}$ ganancia total

s.a. Todo par de ítems debe estar ordenados:

$x_{ij} + x_{ji} = 1 \qquad i,j = 1,\ldots,n,\ i \neq j$

No se pueden formar ciclos:

$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \leq 2 \quad i,j,k = 1,\ldots,n\ i < j < k$

$x_{ik} + x_{kj} + x_{ji} \leq 2 \quad i,j,k = 1,\ldots,n\ i < j < k$

Problema de ordenamiento lineal

$$\text{Max} \quad \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} a_{ij} x_{ij} \qquad \text{ganancia total}$$

s.a. Todo par de ítems debe estar ordenados:

$$x_{ij} + x_{ji} = 1 \qquad i, j = 1, \ldots, n, \; i \neq j$$

No se pueden formar ciclos:

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \leq 2 \quad i, j, k = 1, \ldots, n \; i < j < k$$

$$x_{ik} + x_{kj} + x_{ji} \leq 2 \quad i, j, k = 1, \ldots, n \; i < j < k$$

Cotas e integralidad de las variables:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i, j = 1, \ldots, n, \; i \neq j$$

Problema de satisfacibilidad

¿Es satisfacible la fórmula

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)?$$

Problema de satisfacibilidad

¿Es satisfacible la fórmula

$$(x_1 \vee \bar{x_2} \vee x_3) \wedge (\bar{x_1} \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x_4})?$$

Min $\quad x_1$ $\qquad\qquad$ es irrelevante

sa $\quad x_1 + (1 - x_2) + x_3 \geq 1$

$(1 - x_1) + x_4 \geq 1$

$x_2 + x_3 + (1 - x_4) \geq 1$

$x_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, 4$

Problema de satisfacibilidad

Dadas m cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ involucrando las variables booleanas $x_1, \ldots, x_n$ queremos saber si es satisfacible la fórmula

$$C_1 \wedge \ldots \wedge C_m.$$

Problema de satisfacibilidad

Dadas m cláusulas $C_1, \ldots, C_m$ involucrando las variables booleanas $x_1, \ldots, x_n$ queremos saber si es satisfacible la fórmula

$$C_1 \wedge \ldots \wedge C_m.$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & x_1 & \text{es irrelevante} \\
\text{sa} & \sum_{i=1:x_i \in C_j}^{n} x_i + \sum_{i=1:\bar{x}_i \in C_j}^{n} (1 - x_i) \geq 1 & j = 1, \ldots, m \\
 & x_i \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Funcional lineal a trozos

Queremos modelar la función de costo:

$$c(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ \alpha a + \beta(x-a) & \text{si } a < x \leq b \\ \alpha a + \beta(b-a) + \gamma(x-b) & \text{si } b \leq x \leq c \end{cases}$$

Funcional lineal a trozos

Queremos modelar la función de costo:

$$c(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ \alpha a + \beta(x - a) & \text{si } a < x \leq b \\ \alpha a + \beta(b - a) + \gamma(x - b) & \text{si } b \leq x \leq c \end{cases}$$

Definimos las variables

$$x_1 = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ a & \text{si } x > a \end{cases} \qquad w_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ x - a & \text{si } a < x \leq b \\ b - a & \text{si } b < x \end{cases} \qquad w_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq b \\ x - b & \text{si } b < x \leq c \end{cases}$$

Funcional lineal a trozos

Agregamos las restricciones:

Funcional lineal a trozos

Agregamos las restricciones:

$$\begin{array}{rcccl}
x & = & x_1 & + & x_2 + x_3 \\
aw_1 & \leq & x_1 & \leq & a \\
(b-a)w_2 & \leq & x_2 & \leq & (b-a)w_1 \\
0 & \leq & x_3 & \leq & (c-b)w_2 \\
w_1, w_2 & \in & \{0,1\} & &
\end{array}$$

Funcional lineal a trozos

Agregamos las restricciones:

$$
\begin{array}{rcccl}
x & = & x_1 & + & x_2 + x_3 \\
a w_1 & \leq & x_1 & \leq & a \\
(b-a) w_2 & \leq & x_2 & \leq & (b-a) w_1 \\
0 & \leq & x_3 & \leq & (c-b) w_2 \\
w_1, w_2 & \in & \{0, 1\} & &
\end{array}
$$

Podemos escribir la función de costo de forma lineal:

$$c(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$$

Funcional lineal a trozos

Carco automotores cuenta con un presupuesto de \$150000 para publicidad. Para aumentar la venta de automóviles, la firma está considerando incorporar publicidad en la televisión. Cuanto más publicita Carco en un medio, menos efectiva es cada publicidad adicional y menor es el costo por aviso adicional. La tabla muestra la cantidad de nuevos clientes que proporciona cada nuevo aviso publicitario y su costo. A lo sumo se pueden contratar 20 avisos en la televisión. ¿Cómo puede Carco maximizar el número de clientes nuevos obtenidos por medio de la publicidad?

Número de Avisos	Nuevos clientes x aviso	Costo x aviso
1 a 5	8000	\$10000
6 a 10	5000	\$8000
11 a 20	2000	\$3000

Funcional lineal a trozos

$$
\begin{array}{rl}
\text{Max} & 8000x_1 + 5000x_2 + 2000x_3 \\
\text{sa} & 10000x_1 + 8000x_2 + 3000x_3 \quad \leq 150000 \\
& x = x_1 + x_2 + x_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
5w_1 & \leq & x_1 & \leq & 5 \\
(10-5)w_2 & \leq & x_2 & \leq & (10-5)w_1 \\
0 & \leq & x_3 & \leq & (20-10)w_2 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 & & \\
x_1, x_2, x_3 & \in & \mathbb{Z} & & \\
w_1, w_2 & \in & \{0, 1\} & &
\end{array}
$$

Problema de cubrimiento/empaquetamiento/partición

Dado un conjunto de m elementos, $M = \{v_1, \ldots, v_m\}$, y n subconjuntos $M_j \subset M$ para $j = 1, \ldots, n$.

$F \subseteq N = \{1, \ldots, n\}$

- es un cubrimiento de M si

$$\bigcup_{j \in F} M_j = M.$$

- es un empaquetamiento de M si

$$M_j \cap M_k = \emptyset \qquad \forall j, k \in F.$$

- es un partición de M si es un cubrimiento y un empaquetamiento.

Problema de cubrimiento/empaquetamiento/partición

Si hay un costo asociado a cada subconjunto, c_j, nuestro objetivo es encontrar el cubrimiento/empaquetamiento/partición de costo mínimo.

Variables: Para $j = 1, \ldots, n$ definimos las variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el subconjunto } j \text{ es incluido en el cubrimiento/} \\ & \qquad\qquad\qquad \text{empaquetamiento/partición} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Problema de cubrimiento/empaquetamiento/partición

Si hay un costo asociado a cada subconjunto, c_j, nuestro objetivo es encontrar el cubrimiento/empaquetamiento/partición de costo mínimo.

Variables: Para $j = 1, \ldots, n$ definimos las variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el subconjunto } j \text{ es incluido en el cubrimiento/} \\ & \qquad\qquad\qquad \text{empaquetamiento/partición} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \text{costo total}$$

Problema de cubrimiento/empaquetamiento/partición

Si hay un costo asociado a cada subconjunto, c_j, nuestro objetivo es encontrar el cubrimiento/empaquetamiento/partición de costo mínimo.

Variables: Para $j = 1, \ldots, n$ definimos las variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el subconjunto } j \text{ es incluido en el cubrimiento/} \\ & \qquad\qquad\qquad \text{empaquetamiento/partición} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \text{costo total} \\ \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{j:v_i \in M_j}^{n} x_j = 1 & i = 1, \ldots, m & \text{partición} \end{array}$$

Problema de cubrimiento/empaquetamiento/partición

Si hay un costo asociado a cada subconjunto, c_j, nuestro objetivo es encontrar el cubrimiento/empaquetamiento/partición de costo mínimo.

Variables: Para $j = 1, \ldots, n$ definimos las variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el subconjunto } j \text{ es incluido en el cubrimiento/} \\ & \qquad\qquad\qquad \text{empaquetamiento/partición} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \text{costo total} \\ \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{j:v_i \in M_j}^{n} x_j = 1 & i = 1, \ldots, m & \text{partición} \\ & x_j \in \{0, 1\} & j = 1, \ldots, n & \end{array}$$

Problema de cubrimiento/empaquetamiento/partición

Si hay un costo asociado a cada subconjunto, c_j, nuestro objetivo es encontrar el cubrimiento/empaquetamiento/partición de costo mínimo.

Variables: Para $j = 1, \ldots, n$ definimos las variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el subconjunto } j \text{ es incluido en el cubrimiento/} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{empaquetamiento/partición} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Problema de cubrimiento/empaquetamiento/partición

Si hay un costo asociado a cada subconjunto, c_j, nuestro objetivo es encontrar el cubrimiento/empaquetamiento/partición de costo mínimo.

Variables: Para $j = 1, \ldots, n$ definimos las variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el subconjunto } j \text{ es incluido en el cubrimiento/} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{empaquetamiento/partición} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \text{costo total}$$

Problema de cubrimiento/empaquetamiento/partición

Si hay un costo asociado a cada subconjunto, c_j, nuestro objetivo es encontrar el cubrimiento/empaquetamiento/partición de costo mínimo.

Variables: Para $j = 1, \ldots, n$ definimos las variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el subconjunto } j \text{ es incluido en el cubrimiento/} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{empaquetamiento/partición} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \text{costo total} \\ \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{j:v_i \in M_j}^{n} x_j \geq 1 & i = 1, \ldots, m & \text{cubrimiento} \end{array}$$

Problema de cubrimiento/empaquetamiento/partición

Si hay un costo asociado a cada subconjunto, c_j, nuestro objetivo es encontrar el cubrimiento/empaquetamiento/partición de costo mínimo.

Variables: Para $j = 1, \ldots, n$ definimos las variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el subconjunto } j \text{ es incluido en el cubrimiento/} \\ & \qquad\qquad\text{empaquetamiento/partición} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \text{costo total} \\ \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{j: v_i \in M_j}^{n} x_j \geq 1 & i = 1, \ldots, m & \text{cubrimiento} \\ & x_j \in \{0, 1\} & j = 1, \ldots, n & \end{array}$$

Problema de cubrimiento/empaquetamiento/partición

Si hay un costo asociado a cada subconjunto, c_j, nuestro objetivo es encontrar el cubrimiento/empaquetamiento/partición de costo mínimo.

Variables: Para $j = 1, \ldots, n$ definimos las variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el subconjunto } j \text{ es incluido en el cubrimiento/} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{empaquetamiento/partición} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Problema de cubrimiento/empaquetamiento/partición

Si hay un costo asociado a cada subconjunto, c_j, nuestro objetivo es encontrar el cubrimiento/empaquetamiento/partición de costo mínimo.

Variables: Para $j = 1, \ldots, n$ definimos las variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el subconjunto } j \text{ es incluido en el cubrimiento/} \\ & \qquad\qquad\qquad \text{empaquetamiento/partición} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \text{costo total}$$

Problema de cubrimiento/empaquetamiento/partición

Si hay un costo asociado a cada subconjunto, c_j, nuestro objetivo es encontrar el cubrimiento/empaquetamiento/partición de costo mínimo.

Variables: Para $j = 1, \dots, n$ definimos las variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el subconjunto } j \text{ es incluido en el cubrimiento/} \\ & \qquad\qquad\qquad \text{empaquetamiento/partición} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \text{costo total} \\ \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{j:v_i \in M_j}^{n} x_j \leq 1 & i = 1, \dots, m & \text{empaquetamiento} \end{array}$$

Problema de cubrimiento/empaquetamiento/partición

Si hay un costo asociado a cada subconjunto, c_j, nuestro objetivo es encontrar el cubrimiento/empaquetamiento/partición de costo mínimo.

Variables: Para $j = 1, \ldots, n$ definimos las variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si el subconjunto } j \text{ es incluido en el cubrimiento/} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{empaquetamiento/partición} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

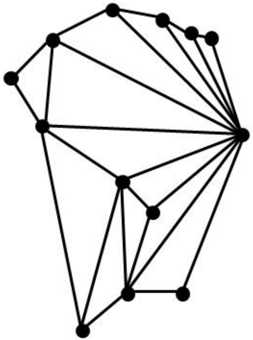
$$\begin{array}{llll}
\text{Min} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \text{costo total} \\
\text{s.a.} & \displaystyle\sum_{j:v_i \in M_j}^{n} x_j \leq 1 & i = 1, \ldots, m & \text{empaquetamiento} \\
& x_j \in \{0, 1\} & j = 1, \ldots, n &
\end{array}$$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

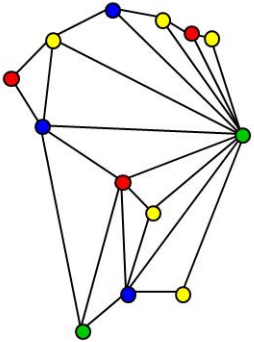
Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

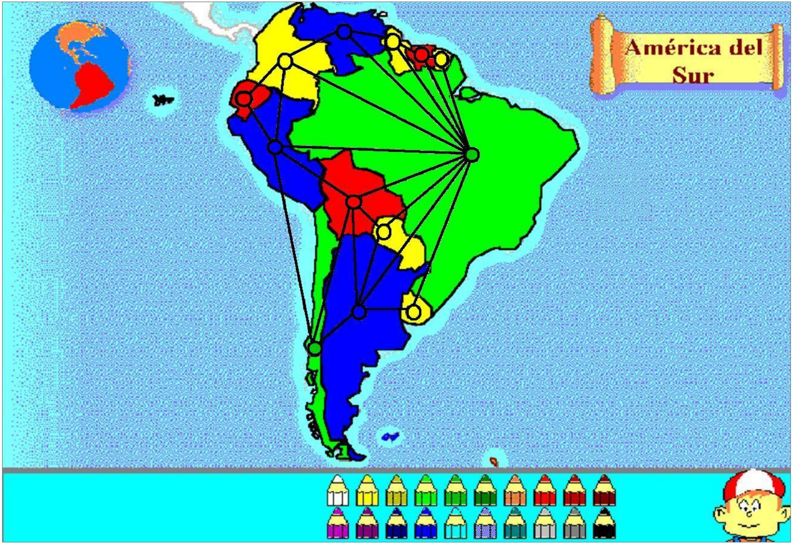
Problema de coloreo de los nodos de un grafo



Problema de coloreo de los nodos de un grafo



Problema de coloreo de los nodos de un grafo



Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Definiciones:

- Un **coloreo (válido) de los nodos** de un grafo $G = (V, X)$ es una asignación $f : V \to C$, tal que $f(v) \neq f(u)\ \forall (u, v) \in E$.
- Los elementos de C son llamados **colores**. Muchas veces los colores son enteros positivos.
- El **número cromático** de G, $\chi(G)$, es el menor número de colores necesarios para colorear los nodos de G.
- El problema de coloreo de grafos consiste en dado un grafo G encontrar su número cromático, $\chi(G)$.

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Ejemplos:

- $\chi(K_n) =$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Ejemplos:

- $\chi(K_n) = n$.
- Si G es un grafo bipartito con $m > 0$, entonces $\chi(G) =$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Ejemplos:

- $\chi(K_n) = n$.
- Si G es un grafo bipartito con $m > 0$, entonces $\chi(G) = 2$.
- Si H_{2k} es un circuito simple par, entonces $\chi(H_{2k}) =$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Ejemplos:

- $\chi(K_n) = n$.
- Si G es un grafo bipartito con $m > 0$, entonces $\chi(G) = 2$.
- Si H_{2k} es un circuito simple par, entonces $\chi(H_{2k}) = 2$.
- Si H_{2k+1} es un circuito simple impar, entonces $\chi(H_{2k+1}) =$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Ejemplos:

- $\chi(K_n) = n$.
- Si G es un grafo bipartito con $m > 0$, entonces $\chi(G) = 2$.
- Si H_{2k} es un circuito simple par, entonces $\chi(H_{2k}) = 2$.
- Si H_{2k+1} es un circuito simple impar, entonces $\chi(H_{2k+1}) = 3$.

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Aplicaciones:

- Asignación de Frecuencias
- Programación de Tareas
- Asignación de Aulas
- Asignación de Registros

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Dado $G = (V, X)$ definimos las variables:

- Para $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \text{ es pintado con el color } j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Para $j = 1, \dots, n$

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{si algún nodo es pintado con el color } j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j \qquad \text{colores utilizados}$$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j \qquad \text{colores utilizados}$$

s.a. Cada nodo debe ser coloreado con un color:

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j \qquad \text{colores utilizados}$$

s.a. Cada nodo debe ser coloreado con un color:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Min $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j$ colores utilizados

s.a. Cada nodo debe ser coloreado con un color:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Nodos adyacentes no comparten color:

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j \qquad \text{colores utilizados}$$

s.a. Cada nodo debe ser coloreado con un color:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Nodos adyacentes no comparten color:

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad (i, k) \in X, \quad j = 1, \ldots, n$$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Min $\sum_{j=1}^{n} w_j$ colores utilizados

s.a. Cada nodo debe ser coloreado con un color:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Nodos adyacentes no comparten color:

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad (i,k) \in X, \quad j = 1, \ldots, n$$

Si un nodo usa color j, $w_j = 1$:

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j \qquad \text{colores utilizados}$$

s.a. Cada nodo debe ser coloreado con un color:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Nodos adyacentes no comparten color:

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad (i, k) \in X, \quad j = 1, \ldots, n$$

Si un nodo usa color j, $w_j = 1$:

$$x_{ij} \leq w_j \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n$$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Min $\sum_{j=1}^{n} w_j$ colores utilizados

s.a. Cada nodo debe ser coloreado con un color:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Nodos adyacentes no comparten color:

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad (i, k) \in X, \quad j = 1, \ldots, n$$

Si un nodo usa color j, $w_j = 1$:

$$x_{ij} \leq w_j \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n$$

Integralidad y positividad de las variables:

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Min $\sum_{j=1}^{n} w_j$ colores utilizados

s.a. Cada nodo debe ser coloreado con un color:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Nodos adyacentes no comparten color:

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad (i, k) \in X, \quad j = 1, \ldots, n$$

Si un nodo usa color j, $w_j = 1$:

$$x_{ij} \leq w_j \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n$$

Integralidad y positividad de las variables:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$w_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \ldots, n$$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Propiedades de este modelo:

- Número polinomial de variables y restricciones.
- Simetría debida a equivalencia de colores.
- Hay un número exponencial de soluciones factibles equivalentes.
- Buenos resultados en la práctica con técnicas de eliminación de simetría.

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Formulación por conjuntos independientes (partición)

Dado un grafo $G = (V, X)$, un conjunto independiente de G, es un conjunto $I \subseteq V$ de nodos de G tal que no hay un par de nodos adyacentes en I.

Dada una k-partición en conjuntos independientes, define un coloreo válido del grafo utilizando k colores.

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Formulación por conjuntos independientes (partición)

Dado $G = (V, X)$, llamamos S al conjunto de sus conjuntos independientes. Para cada $s \in S$ definimos la variable:

$$x_s = \begin{cases} 1 & \text{si todos los nodos de} s \text{ son pintados con el mismo color} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Min} \quad \sum_{s \in S} x_s \qquad \text{conjuntos independientes usados}$$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Formulación por conjuntos independientes (partición)

Dado $G = (V, X)$, llamamos S al conjunto de sus conjuntos independientes. Para cada $s \in S$ definimos la variable:

$$x_s = \begin{cases} 1 & \text{si todos los nodos de} s \text{ son pintados con el mismo color} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Min} \quad \sum_{s \in S} x_s \qquad \text{conjuntos independientes usados}$$

s.a. Cada nodo debe pertenecer a un conjunto independiente:

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Formulación por conjuntos independientes (partición)

Dado $G = (V, X)$, llamamos S al conjunto de sus conjuntos independientes. Para cada $s \in S$ definimos la variable:

$$x_s = \begin{cases} 1 & \text{si todos los nodos de} s \text{ son pintados con el mismo color} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Min $\sum_{s \in S} x_s$ conjuntos independientes usados

s.a. Cada nodo debe pertenecer a un conjunto independiente:

$$\sum_{s : v \in S} x_s = 1 \quad \forall v \in V$$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Formulación por conjuntos independientes (partición)

Dado $G = (V, X)$, llamamos S al conjunto de sus conjuntos independientes. Para cada $s \in S$ definimos la variable:

$$x_s = \begin{cases} 1 & \text{si todos los nodos de} s \text{ son pintados con el mismo color} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Min $\sum_{s \in S} x_s$ conjuntos independientes usados

s.a. Cada nodo debe pertenecer a un conjunto independiente:

$$\sum_{s: v \in S} x_s = 1 \quad \forall v \in V$$

Integralidad y positividad de las variables:

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Formulación por conjuntos independientes (partición)

Dado $G = (V, X)$, llamamos S al conjunto de sus conjuntos independientes. Para cada $s \in S$ definimos la variable:

$$x_s = \begin{cases} 1 & \text{si todos los nodos de} s \text{ son pintados con el mismo color} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Min $\quad \sum_{s \in S} x_s \qquad$ conjuntos independientes usados

s.a. $\quad$ Cada nodo debe pertenecer a un conjunto independiente:

$$\sum_{s : v \in S} x_s = 1 \quad \forall v \in V$$

Integralidad y positividad de las variables:

$$x_s \in \{0, 1\} \qquad s \in S$$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Formulación por conjuntos independientes (cubrimiento)

Dado $G = (V, X)$, llamamos S al conjunto de sus conjuntos independientes maximales. Para cada $s \in S$ definimos la variable:

$$x_s = \begin{cases} 1 & \text{si todos los nodos de} s \text{ pueden ser pintados con el mismo color} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Min} \quad \sum_{s \in S} x_s \qquad \text{conjuntos independientes usados}$$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Formulación por conjuntos independientes (cubrimiento)

Dado $G = (V, X)$, llamamos S al conjunto de sus conjuntos independientes maximales. Para cada $s \in S$ definimos la variable:

$$x_s = \begin{cases} 1 & \text{si todos los nodos de} s \text{ pueden ser pintados con el mismo color} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\text{Min} \quad \sum_{s \in S} x_s \qquad \text{conjuntos independientes usados}$$

s.a. Cada nodo debe pertenecer a un conjunto independiente:

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Formulación por conjuntos independientes (cubrimiento)

Dado $G = (V, X)$, llamamos S al conjunto de sus conjuntos independientes maximales. Para cada $s \in S$ definimos la variable:

$$x_s = \begin{cases} 1 & \text{si todos los nodos de} s \text{ pueden ser pintados con el mismo color} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Min $\sum_{s \in S} x_s$ conjuntos independientes usados

s.a. Cada nodo debe pertenecer a un conjunto independiente:

$$\sum_{s : v \in S} x_s \geq 1 \quad \forall v \in V$$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Formulación por conjuntos independientes (cubrimiento)

Dado $G = (V, X)$, llamamos S al conjunto de sus conjuntos independientes maximales. Para cada $s \in S$ definimos la variable:

$$x_s = \begin{cases} 1 & \text{si todos los nodos de} s \text{ pueden ser pintados con el mismo color} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Min $\sum_{s \in S} x_s$ conjuntos independientes usados

s.a. Cada nodo debe pertenecer a un conjunto independiente:

$$\sum_{s: v \in S} x_s \geq 1 \quad \forall v \in V$$

Integralidad y positividad de las variables:

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Formulación por conjuntos independientes (cubrimiento)

Dado $G = (V, X)$, llamamos S al conjunto de sus conjuntos independientes maximales. Para cada $s \in S$ definimos la variable:

$$x_s = \begin{cases} 1 & \text{si todos los nodos de} s \text{ pueden ser pintados con el mismo color} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Min $\sum_{s \in S} x_s$ conjuntos independientes usados

s.a. Cada nodo debe pertenecer a un conjunto independiente:

$$\sum_{s : v \in S} x_s \geq 1 \quad \forall v \in V$$

Integralidad y positividad de las variables:

$$x_s \in \{0, 1\} \qquad s \in S$$

Problema de coloreo de los nodos de un grafo

Formulación por conjuntos independientes (cubrimiento)

Propiedades de este modelo:

- No es simétrica respecto a los colores.
- Número polinomial de restricciones.
- Número exponencial de variables.
- Buenos resultados en la práctica con técnicas de generación de columnas (*Branch-and-Price*).

Problema del viajante de comercio

Un viajante debe recorrer un conjunto determinado de ciudades. El viajante:

- cuenta con un vehículo,
- debe visitar exactamente una vez a cada ciudad,
- debe retornar al origen,
- quiere seguir el mejor recorrido.

¿Pero cuál es el mejor recorrido?

- El más corto: minimiza la distancia recorrida,
- el más rápido: minimiza el tiempo total de viaje.

Problema del viajante de comercio

Formalmente:

- Dado un grafo completo $G = (V, X)$ con:
  - $V = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de ciudades
  - $X = \{(i, j) : i \in V, j \in V, i \neq j\}$ conjunto de aristas
  - c_{ij} costo o longitud asociado con la arista $(i, j) \in X$, $c : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$
- Objetivo: Encontrar un circuito Hamiltoniano de costo o longitud total mínima.

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)

$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ conjunto de n ciudades que deben ser visitadas.

Variables:

Para cada par de ciudades definimos:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si desde la ciudad } v_i \text{ el viajante se mueve a la ciudad } v_j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)

$$\text{Min} \sum_{i,j \in V, j \neq i} c_{ij} x_{ij}$$ costo de los arcos utilizados

s.a.

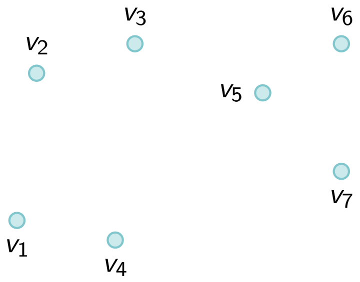
$$\sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} = 1 \quad \forall v_i \in V$$ de toda ciudad se debe salir

$$\sum_{j \in V, j \neq i} x_{ji} = 1 \quad \forall v_i \in V$$ a toda ciudad se debe llegar

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall v_i, v_j \in V, j \neq i$$

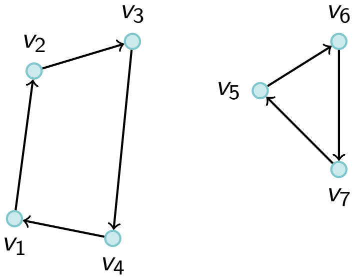
Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)



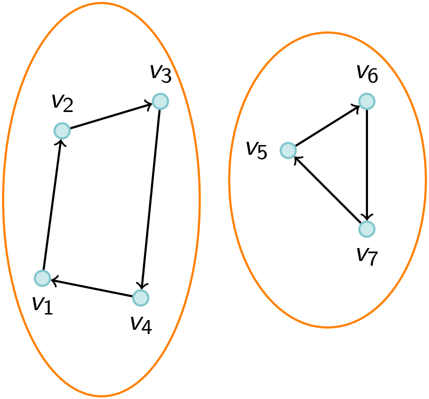
Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)



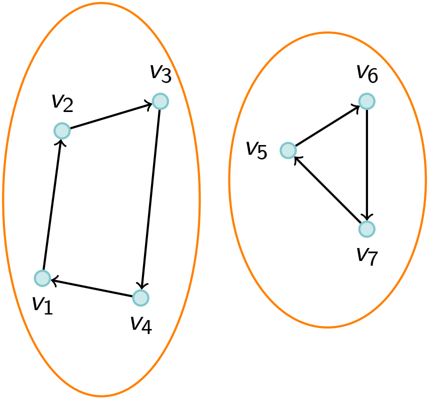
Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)



Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)



Es una solución factible del PLE pero no es un circuito hamiltoniano!

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)

$$\text{Min} \sum_{i,j \in V, j \neq i} c_{ij} x_{ij}$$ costo de los arcos utilizados

s.a.

$$\sum_{v_j \in V, j \neq i} x_{ij} = 1 \quad \forall v_i \in V$$ de toda ciudad se debe salir

$$\sum_{v_j \in V, j \neq i} x_{ji} = 1 \quad \forall v_i \in V$$ a toda ciudad se debe llegar

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall v_i, v_j \in V, j \neq i$$

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)

$$\text{Min} \sum_{i,j \in V, j \neq i} c_{ij} x_{ij}$$ costo de los arcos utilizados

s.a.

$$\sum_{v_j \in V, j \neq i} x_{ij} = 1 \quad \forall v_i \in V$$ de toda ciudad se debe salir

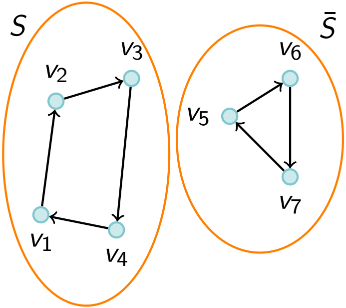
$$\sum_{v_j \in V, j \neq i} x_{ji} = 1 \quad \forall v_i \in V$$ a toda ciudad se debe llegar

$$\sum_{v_i \in S, v_j \notin S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$ rompimiento de subtour

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall v_i, v_j \in V, j \neq i$$

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)

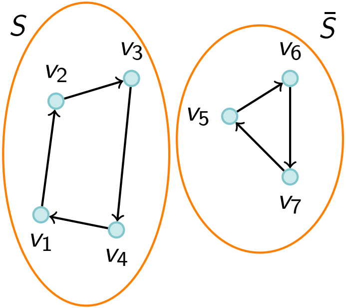


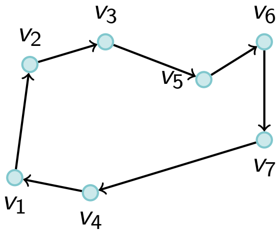
$$\sum_{v_i \in S, v_j \notin S} x_{ij} = 0$$

para $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)





$$\sum_{v_i \in S, v_j \notin S} x_{ij} = 0$$

para $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$x_{35} = 1$$

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)

Son equivalentes:

- $$\sum_{v_i \in S, v_j \notin S} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$
- $$\sum_{v_i \in S, v_j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)

Son equivalentes:

- $$\sum_{v_i \in S, v_j \notin S} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$

- $$\sum_{v_i \in S, v_j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$

Esta formulación tiene:

- Variables:

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)

Son equivalentes:

- $$\sum_{v_i \in S, v_j \notin S} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$
- $$\sum_{v_i \in S, v_j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$

Esta formulación tiene:

- Variables:

$$n(n-1)$$

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)

Son equivalentes:

- $$\sum_{v_i \in S, v_j \notin S} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$

- $$\sum_{v_i \in S, v_j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$

Esta formulación tiene:

- Variables:

$$n(n-1)$$

- Restricciones:

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Dantzig, Fulkerson and Johnson (1954)

Son equivalentes:

- $$\sum_{v_i \in S, v_j \notin S} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$
- $$\sum_{v_i \in S, v_j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$

Esta formulación tiene:

- Variables:
$$n(n-1)$$
- Restricciones:
$$2n + 2^n - 2$$

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación de Miller, Tucker and Zemlin (1960)

$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ conjunto de n ciudades que deben ser visitadas.

Variables:

- Para cada par de ciudades definimos:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si desde la ciudad } v_i \text{ el viajante se mueve a la ciudad } v_j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Para cada ciudad definimos:

$$u_i = \text{ posición de la ciudad } v_i \text{ en el circuito}$$

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación Miller, Tucker and Zemlin (1960)

$$\text{Min} \sum_{v_i, v_j \in V, j \neq i} c_{ik} x_{ik}$$ arcos utilizados

s.a.

$$\sum_{v_j \in V, j \neq i} x_{ik} = 1 \qquad \forall v_i \in V$$ de toda ciudad se debe salir

$$\sum_{v_j \in V, j \neq i} x_{ki} = 1 \qquad \forall v_i \in V$$ a toda ciudad se debe llegar

$$1 \leq u_i \leq n \qquad \forall v_i \in V$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall v_i, v_j \in V, j \neq i$$

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación Miller, Tucker and Zemlin (1960)

$$\text{Min} \sum_{v_i, v_j \in V, j \neq i} c_{ik} x_{ik}$$ arcos utilizados

s.a.

$$\sum_{v_j \in V, j \neq i} x_{ik} = 1 \qquad \forall v_i \in V$$ de toda ciudad se debe salir

$$\sum_{v_j \in V, j \neq i} x_{ki} = 1 \qquad \forall v_i \in V$$ a toda ciudad se debe llegar

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \qquad \forall v_i, v_j \in V \setminus \{v_1\} \quad i \neq j$$

$$1 \leq u_i \leq n \qquad \forall v_i \in V$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall v_i, v_j \in V, j \neq i$$

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación Miller, Tucker and Zemlin (1960)

Proposición

El conjunto de soluciones factibles del PLEM anterior es el conjunto de circuitos hamiltonianos del grafo.

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación Miller, Tucker and Zemlin (1960)

Proposición

El conjunto de soluciones factibles del PLEM anterior es el conjunto de circuitos hamiltonianos del grafo.

Esta formulación tiene:

- Variables:

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación Miller, Tucker and Zemlin (1960)

Proposición

El conjunto de soluciones factibles del PLEM anterior es el conjunto de circuitos hamiltonianos del grafo.

Esta formulación tiene:

- Variables:

$$n(n-1)+n$$

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación Miller, Tucker and Zemlin (1960)

Proposición

El conjunto de soluciones factibles del PLEM anterior es el conjunto de circuitos hamiltonianos del grafo.

Esta formulación tiene:

- Variables:

$$n(n-1)+n$$

- Restricciones:

Problema del viajante de comercio (asimétrico)

Formulación Miller, Tucker and Zemlin (1960)

Proposición

El conjunto de soluciones factibles del PLEM anterior es el conjunto de circuitos hamiltonianos del grafo.

Esta formulación tiene:

- Variables:

$$n(n-1)+n$$

- Restricciones:

$$2n+(n-1)(n-2)$$

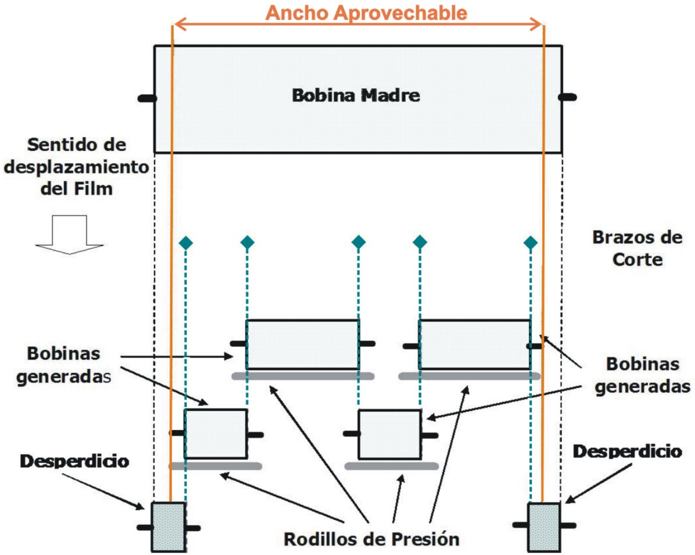
Problema de patrones de corte

Una empresa papelera dispone de bobinas madres de cartón corrugado que deben ser procesada en una máquina cortadora para obtener bobinas de diferentes anchos e igual longitud.

El ancho de las bobinas madres es de 1.7m y se necesitan 10 bobinas de de ancho 75cm, 15 de ancho 40cm. y 8 de 1.30m.

¿Cómo deben realizarse los cortes para utilizar la mínima cantidad de bobinas madres?

Problema de patrones de corte



Problema de patrones de corte

Hay 4 configuraciones posibles de corte:

Conf. 1:	40cm	40cm	40cm	40cm
Conf. 2:	40cm	40cm	75cm	
Conf. 3:	75cm	75cm		
Conf. 4:	40cm	130cm		

Problema de patrones de corte

Hay 4 configuraciones posibles de corte:

Conf. 1:	40cm	40cm	40cm	40cm
Conf. 2:	40cm	40cm	75cm	
Conf. 3:	75cm	75cm		
Conf. 4:	40cm	130cm		

Variables:

x_i: Cantidad de bobinas que se cortan utilizando la configuración i

Problema de patrones de corte

$$\text{Max} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

s.a. Bobinas de ancho 40cm:

$$4x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 15$$

Bobinas de ancho 75cm:

$$x_2 + 2x_3 \geq 10$$

Bobinas de ancho 1.3m:

$$x_4 \geq 8$$

Positividad e integralidad de las variables:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

Puede tener una cantidad exponencial de variables...

Problema de programación de tareas

Se quieren realizar n tareas que deben pasar por m máquinas en cierto orden. Para cada tarea j, $M_j^1, \ldots, M_j^m$ define el orden de las máquinas para esa tarea y p_{ij} su tiempo de ejecución en la máquina i. Cada máquina sólo puede realizar una tarea a la vez.

El objetivo es realizar la programación de las tareas a las máquinas de forma de terminar lo antes posible de realizar todas las tareas.

Variables:

- Para cada par de tareas j, k con $j < k$:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si la tarea } j \text{ se realiza antes que la } k \text{ en la máquina } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Para cada tarea j y cada máquina i:

$$t_{ij} = \text{ comienzo de tarea } j \text{ en máquina } i$$

Problema de programación de tareas

¿Cómo aseguramos que la tarea j no comience a ejecutarse en una máquina antes de que haya terminado de ejecutarse en la máuina anterior?

Problema de programación de tareas

¿Cómo aseguramos que la tarea j no comience a ejecutarse en una máquina antes de que haya terminado de ejecutarse en la máuina anterior?

$$t_{M_j^{r+1}j} \geq t_{M_j^r j} + p_{M_j^r j}$$

para $j = 1, \ldots, n,\ \ r = 1, \ldots, m-1.$

Problema de programación de tareas

¿Cómo aseguramos que una máquina no se ejecuten dos tareas simultáneamente?

Problema de programación de tareas

¿Cómo aseguramos que una máquina no se ejecuten dos tareas simultáneamente?

- Si $x_{ijk} = 1$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i antes que la tarea k):

Problema de programación de tareas

¿Cómo aseguramos que una máquina no se ejecuten dos tareas simultáneamente?

- Si $x_{ijk} = 1$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i antes que la tarea k):
$$t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij}$$
- Si $x_{ijk} = 0$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i después que la tarea k):

Problema de programación de tareas

¿Cómo aseguramos que una máquina no se ejecuten dos tareas simultáneamente?

- Si $x_{ijk} = 1$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i antes que la tarea k):
$$t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij}$$
- Si $x_{ijk} = 0$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i después que la tarea k):
$$t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik}$$

Problema de programación de tareas

¿Cómo aseguramos que una máquina no se ejecuten dos tareas simultáneamente?

- Si $x_{ijk} = 1$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i antes que la tarea k):
$$t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij}$$
- Si $x_{ijk} = 0$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i después que la tarea k):
$$t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik}$$

Podemos escribirlo como:

- Si $x_{ijk} = 1$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i antes que la tarea k):

Problema de programación de tareas

¿Cómo aseguramos que una máquina no se ejecuten dos tareas simultáneamente?

- Si $x_{ijk} = 1$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i antes que la tarea k):
$$t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij}$$
- Si $x_{ijk} = 0$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i después que la tarea k):
$$t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik}$$

Podemos escribirlo como:

- Si $x_{ijk} = 1$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i antes que la tarea k):
$$t_{ik} - t_{ij} \geq p_{ij} - (1 - x_{ijk})M$$
- Si $x_{ijk} = 0$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i después que la tarea k):

Problema de programación de tareas

¿Cómo aseguramos que una máquina no se ejecuten dos tareas simultáneamente?

- Si $x_{ijk} = 1$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i antes que la tarea k):
$$t_{ik} \geq t_{ij} + p_{ij}$$
- Si $x_{ijk} = 0$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i después que la tarea k):
$$t_{ij} \geq t_{ik} + p_{ik}$$

Podemos escribirlo como:

- Si $x_{ijk} = 1$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i antes que la tarea k):
$$t_{ik} - t_{ij} \geq p_{ij} - (1 - x_{ijk})M$$
- Si $x_{ijk} = 0$ (la tarea j se ejecuta en la máquina i después que la tarea k):
$$t_{ij} - t_{ik} \geq p_{ik} - x_{ijk}M$$

Problema de programación de tareas

¿Cómo modelamos el momento en que termina la tarea que termina última?

Problema de programación de tareas

¿Cómo modelamos el momento en que termina la tarea que termina última?

Agregamos una variable T que sea mayor o igual al tiempo de finalización de cada tarea y minimizamos esa variable.

Problema de programación de tareas

¿Cómo modelamos el momento en que termina la tarea que termina última?

Agregamos una variable T que sea mayor o igual al tiempo de finalización de cada tarea y minimizamos esa variable.

$$T \geq t_{M_j^m j} + p_{M_j^m j}$$

para $j = 1, \ldots, n$.

Problema de programación de tareas

Problema de programación de tareas

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & T & \\
\text{s.a.} & t_{ik} - t_{ij} \geq p_{ij} - (1 - x_{ijk})M & j,k = 1,\ldots,n, j < k, i = 1,\ldots,m \\
& t_{ij} - t_{ik} \geq p_{ik} - x_{ijk}M & j,k = 1,\ldots,n, j < k, i = 1,\ldots,m \\
& T \geq t_{M_j^m j} + p_{M_j^m j} & j = 1,\ldots,n \\
& x_{ijk} \in \{0,1\} & j,k = 1,\ldots,n, j < k, i = 1,\ldots,m \\
& t_{ij} \geq 0 & j = 1,\ldots,n, i = 1,\ldots,m \\
& T \geq 0 &
\end{array}
$$

Linearización - Problema de asignación cuadrático

Una compañía centralizada en una gran ciudad está analizando trasladar algunos de sus n departamentos a ciudades pequeñas para disminuir sus costos (alquileres más baratos), por incentivos del gobierno y reclutamiento más fácil, etc.

Para esto están considerando m ciudades y para cada alternativa la compañía estimó el beneficio económico anual del traslado, llamando g_{ij} este beneficio si el departamento i es ubicado en la ciudad j.

También estimó el flujo de comunicación anual entre cada par de departamentos, d_{ik} para los departamnetos i, k, y el costo por unidad de comunicación entre ciudades, c_{jl} entre la ciudad j y la l.

Considerando que en la ciudad j a lo sumo se pueden ubicar u_j departamentos, decidir la nueva ubicación que debería tener cada departamento para maximizar el beneficio de la compañía.