

Memorando: Normal, densidad, σ y varianza

Resumen de lo hablado: qué es la distribución normal, diferencia entre densidad y probabilidad, papel de μ , σ y varianza, regla 68–95, y TCL.

1) Notación y parámetros

- μ (mu): media (centro).
- σ (sigma): desviación típica (anchura).
- σ^2 : varianza.
- X (mayúscula): variable aleatoria (fenómeno). x (minúscula): valor concreto.

2) Densidad (PDF) y probabilidad como área

La curva que dibujas es una densidad $f(x)$; la probabilidad es el área bajo la curva en un intervalo.

Aproximación útil: $P(x \leq X \leq x+\Delta x) \approx f(x) \cdot \Delta x$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

3) Efecto de μ y σ en la campana

- Cambiar μ desplaza la campana.
- σ pequeño \Rightarrow alta y estrecha (más concentración).
- σ grande \Rightarrow baja y ancha (más dispersión).

El pico en $x=\mu$ vale $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

4) Regla 68–95 (concentración típica)

En una normal:

- $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0.6827$
- $P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0.9545$

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$$

5) Varianza y desviación típica (población total)

Para una población completa $x_1 \dots x_N$:

- μ es el promedio.
- σ^2 es el promedio de $(x_i - \mu)^2$.
- σ es la raíz de σ^2 (misma unidad que x).

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$$

6) TCL (Teorema Central del Límite)

La suma (o media) de muchos efectos pequeños e independientes tiende a parecer normal, aunque cada efecto individual no sea normal (ejemplo: suma de dados).

7) Ejemplos no normales (asimetría)

Ingresos/riqueza, tiempos de espera, tamaños de archivos: suelen ser sesgados (colas largas) y no simétricos; a menudo se modelan mejor con lognormal/gamma, etc.