TP1 Robótica Móvil

Sacha Varela
Gerónimo González Marino

17 de septiembre de 2025

Introducción

A continuación se presenta la resolución de cada ejercicio con los resultados finales obtenidos en forma de matrices e imágenes. Para el detalle se redirige al código ubicado en el repositorio Git del siguiente link Repositorio Robótica Móvil Gerónimo González.

Ejercicios 1 a 3 resueltos en Matlab.
Ejercicio 5 resuelto en python.

Ejercicio 1

Para el sistema de coordenadas canónico de un robot móvil (x: hacia adelante, y: hacia la izquierda, z: hacia arriba) dibujar y resolver matemáticamente el sistema de coordenadas resultante luego de aplicar las rotaciones dadas.

1. $R_y(90°)$
2. $R_x(-90°)R_y(90°)$
3. $R_z(180°)R_x(-90°)R_y(90°)$

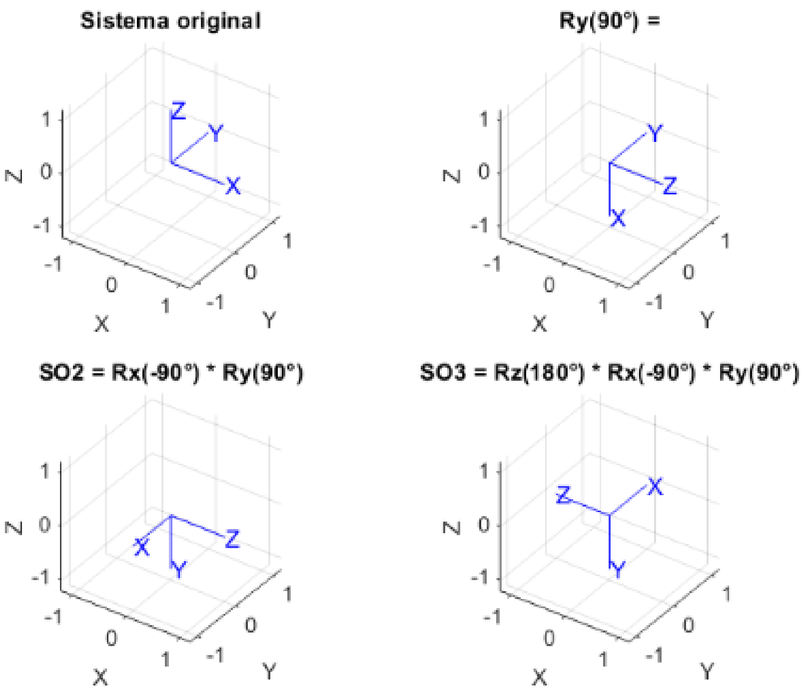
Se definen las matrices de rotación respecto de cada eje coordenado ortogonal.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{R_x} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}}_{R_y} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_z}$$

Se resuelven las multiplicaciones de los casos presentados y:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R_y(90°)} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{R_x(-90°)R_y(90°)} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{R_z(180°)R_x(-90°)R_y(90°)}$$

Se grafican el sistema original y los resultados de las rotaciones:



Ejercicio 2

Dada los siguientes ángulos de Euler ($\alpha = 4\pi/7$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = -\pi/3$), con orden xyz (primero rotación en x, luego en y y finalmente en z) utilizando Rotación Intrínseca. Se pide:

a) Calcular la matriz de Rotación resultante $R = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$.

b) Utilizando la matriz de rotación calculada R, extraer matemáticamente los Ángulos de Euler. Explicar.

La matriz simbólica de la rotación intrínseca realizada es:

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta)\cos(\gamma) & -\cos(\beta)\sin(\gamma) & \sin(\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(\gamma)+\cos(\gamma)\sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\gamma)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) & -\cos(\beta)\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)\sin(\gamma)-\cos(\alpha)\cos(\gamma)\sin(\beta) & \cos(\gamma)\sin(\alpha)+\cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

La matriz numérica correspondiente es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\left(\frac{11\pi}{42}\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{21}\right) & 0 \\ -\cos\left(\frac{5\pi}{21}\right) & \cos\left(\frac{11\pi}{42}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Aunque no conociese los ángulos de antemano, sabiendo la matriz simbólica, puedo extraer el ángulo β sin problemas.

De ahí que $\beta = \frac{\pi}{2}$ y puedo simplificar la matriz simbólica como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha + \gamma) & \cos(\alpha + \gamma) & 0 \\ -\cos(\alpha + \gamma) & \sin(\alpha + \gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

Lo que se observa en la matriz de arriba se conoce como Gimbal Lock, el argumento del coseno y del seno se compone de la misma relación lineal de las variables $\alpha \;\; y \;\; \gamma$, por lo que se puede determinar su suma, pero no sus valores individuales. En otras palabras, no podemos distinguir una rotación en el ángulo Roll de una en el ángulo Yaw.

Ejercicio 3

Dado el siguiente escenario,

- un robot A que encuentra en la posición (2, 3) con orientación 45°en coordenadas del mundo
- un robot B que se encuentra en la posición (1, 1) con orientación -45°en el sistema de coordenadas del robot A.
- un punto ${}^{W}p_1 = (1, 5)$ en coordenadas del mundo.
- un punto ${}^{A}p_2 = (1, 2)$ en coordenadas del robot A.

Resuelva:

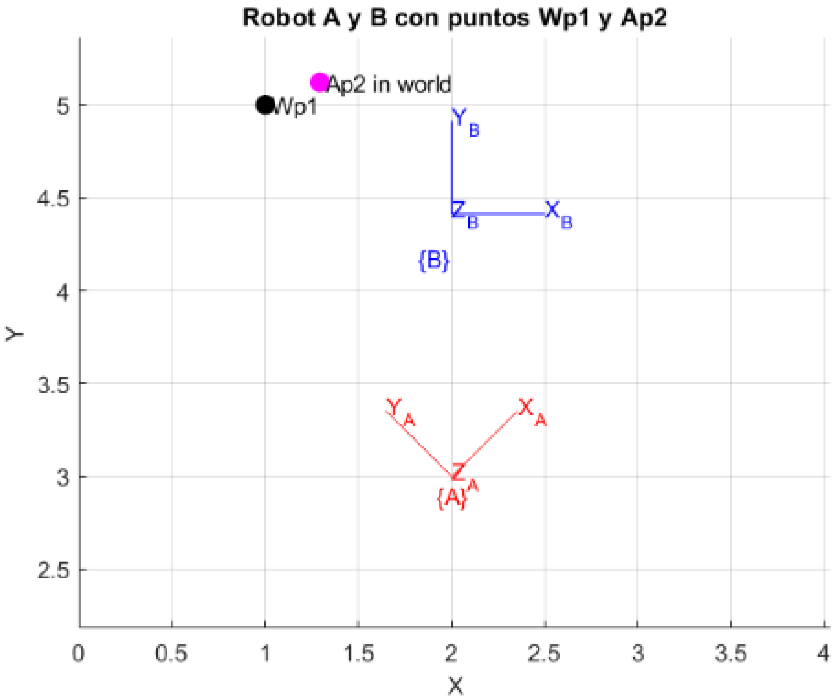
a Dibuje los robots y las poses y todos los sistemas de coordenadas presentes

b ¿Cuáles son los coordenadas del punto p1 en el sistema de coordenadas del robot A?

c ¿Cuáles son los coordenadas del punto p2 en el sistema de coordenadas del robot B?

d ¿Cuál es la pose (posición y orientación) del robot B en coordenadas del Mundo?

a)



b) Para obtener las coordenadas del punto P1 en el sistema del robot A utilizamos la transformación homogénea inversa de la pose del robot A

$$^{W}\xi_A^{-1} = \begin{bmatrix} ^{W}O_A & ^{W}P_{oA} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad ^{W}\xi_A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^{W}\xi_A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para obtener $^{A}P_1$ realizamos la premultuiplicaión

$$^{A}P_1 = ^{W}\xi_A^{-1} * {}^{W}P_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_W = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, $^{A}P_1 = [0{,}7071\ ;\ 2{,}1213\ ;\ 0]$

c) Aplicando el mismo procedimiento que antes:

$$^{B}P_2 = ^{A}\xi_B^{-1} * {}^{A}P_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B$$

Entonces, $^{B}P_2 = [-0{,}7071\ ;\ 0{,}7071\ ;\ 0]$

d) Dado que el robot B está dado en coordenadas de A, rotamos la pose de B (posición y orientación) en forma de matriz homogénea con la premultiplicación de la rototraslación de A respecto del mundo en forma homogénea.

$$^{W}\xi_B =^{W} \xi_A *^{A} \xi_B \qquad / \qquad ^{A}\xi_B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4{,}4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recordando como se construye la pose en coordenadas homogéneas, podemos extraer la posición de las primeras 3 filas de la última columna y la orientación de la sub-matriz 3x3 (viendo que es la identidad concluimos que B no se encuentra rotado respecto al mundo).

$$^{W}P_B = \begin{bmatrix} 2 & 4,4142 & 0 \end{bmatrix} \qquad \theta = 0^\circ$$

Ejercicio 4

Data la pose del robot (Body) en el mundo: WξB0 . Si se tiene el camino (conjunto de poses $^{c0}\xi_{ci}$ con i = 1 . . . n) realizado por la cámara C (montada sobre el robot) en el marco de coordenadas de la cámara inicial C0. Sabiendo la transformación $^{B}\xi_c$,

a ¿Qué procedimiento hay que realizar para obtener el camino realizado por la cámara en el sistema de coordenadas del mundo?.

b ¿Qué procedimiento hay que realizar para obtener el camino realizado por el robot (Body) en el sistema de coordenadas del mundo?

c Realizar un gráfico ilustrativo donde se visualicen los sistemas de coordenadas, las transformaciones y los caminos realizados por el robot y la cámara.

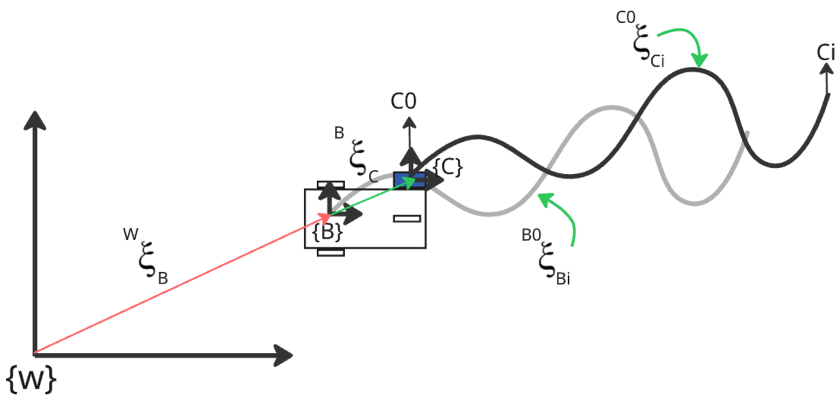
a) Para obtener el camino realizado por la cámara, primero se debe obtener la transformación de la pose original de la cámara al mundo. Luego, utilizando esa transformación, se convierten todas las poses del conjunto respecto a la pose inicial de la cámara, al marco del mundo:

$$^{W}\xi_{c0} =^{W} \xi_B *^{B} \xi_{c0}$$
$$^{W}\xi_{ci} =^{W} \xi_{c0} *^{c0} \xi_{ci}$$

b) Dado que ya tenemos el conjunto de poses de la cámara respecto del mundo, utilizamos la inversa de la transformada de la cámara al robot (es decir, donde está B respecto de C) para obtener el conjunto de poses del robot respecto del mundo.

$$^{W}\xi_{Bi} = ^{W}\xi_{ci} * (^{B}\xi_{c})^{-1}$$

c) Un posible diagrama representando esta situación es el siguiente:



Ejercicio 5

Para este ejercicio utilizaremos el dataset EuRoc.
Descargue el archivo ground-truth (trayectoria real realizada por el robot) localizado `http://robotics.ethz.ch/~asl-datasets/ijrr_euroc_mav_dataset/machine_hall/MH_01_easy/MH_01_easy.zip`.
a) El ground-truth se encuentra en coordenadas de la IMU (Body). Se pide crear un script en Python que, dada la trayectoria ground-truth (timestamp, x, y, z, qw, qx, qy, qz) (primeras 8 columnas del archivo `mav0/state_groundtruth_estimate0/data.csv`), genere el camino ground-truth de la cámara izquierda. Este debe estar dado en el sistema de coordenadas de la cámara izquierda inicial. Para esto, deberá utilizar las transformaciones provistas en el dataset.
b) Modifique el script para que el timestamp del nuevo ground-truth este en segundos con precisión de nanosegundos. Agregar las primeras 5 filas del ground-truth resultante y las del original del dataset al informe.
c) Modifique el script para que genere una imagen con ambos ground-truth (el camino de la IMU y el camino de la cámara). Aplique las transformaciones necesaria para que ambos caminos estén en el sistema de coordenadas del ground-truth original. Agregar la imagen al informe.

El dataset descargado contiene la trayectoria del robot en el marco de la IMU, disponible en el archivo `mav0/state_groundtruth_estimate0/data.csv`, así como la posición de los sensores en los archivos `.yaml` correspondientes a cada uno. En el inciso

a) se solicita transformar la trayectoria desde el marco de la IMU (o marco del ground truth) al marco de la cámara izquierda.
Los datos disponibles son:

- Poses del robot, con las rotaciones expresadas en cuaterniones (${}^{R_0}\xi_{R_i}$, donde ^{R_0} representa la pose inicial y ^{R_i} las i-ésimas poses de la trayectoria).
- Matriz de transformación homogénea del marco de la cámara al marco de la IMU (${}^{C}\xi_R$).

Para la ejecución del código es necesario contar con el dataset descargado y modificar la ruta correspondiente a su carga. El código fue desarrollado en Jupyter Notebook, por lo que se requiere un entorno compatible con archivos `.ipynb`. El dataset ground-truth consta de una tabla con 17 columnas, de las cuales solo se utilizarán las primeras 8, que contienen la marca de tiempo, la posición del robot y la orientación expresada en cuaterniones (ver Tabla 1).
Como primer paso, se graficó la trayectoria contenida en el dataset, la cual se muestra en la Figura 1.

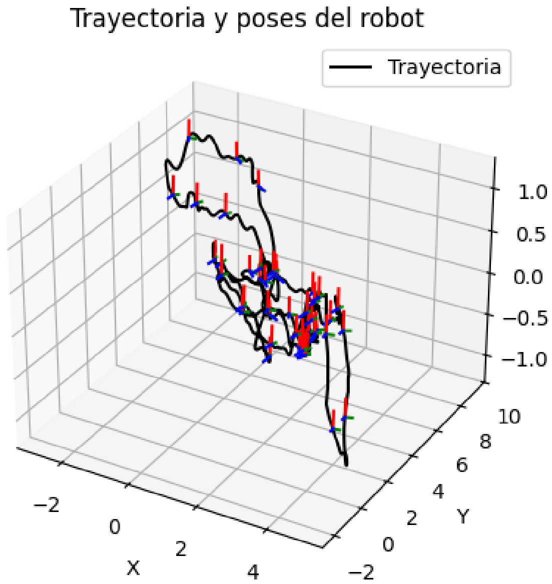


Figura 1: Trayectoria de ground-truth

Para transformar la trayectoria al marco de la cámara izquierda, es necesario aplicar la transformación que lleva del marco de la IMU al de la cámara, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} {}^{C_0}\xi_{C_i} &= {}^{R_0}\xi_{R_i} * {}^{R}\xi_C \\ &= {}^{R_0}\xi_{R_i} * ({}^{C}\xi_R)^{-1} \end{aligned} \tag{1}$$

La transformación ${}^{C}\xi_R$ se encuentra en el archivo `.../cam0/sensor.yaml`.
Una vez obtenida la trayectoria del robot en el marco de la cámara izquierda, se generó un nuevo dataset que incluye la marca de tiempo en segundos, con precisión de

nanosegundos, así como las posiciones y orientaciones expresadas en cuaterniones en dicho marco (ver Tabla 2).

Ambos datasets se graficaron, transformando el dataset en el marco de la cámara al marco de la IMU y verificando que las transformaciones se aplicaran correctamente. De este modo, se obtuvo la misma trayectoria en ambos casos. Esta comparación se muestra en la Figura 2.

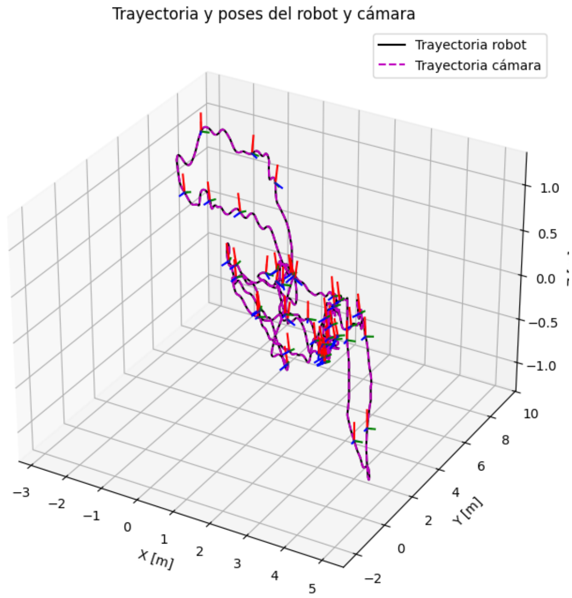


Figura 2: Gráfica comparación ambas trayectorias transformadas al marco IMU

1. Anexo

1.1. Dataset ground-truth

#timestamp	p_RS_R_x [m]	p_RS_R_y [m]	p_RS_R_z [m]	q_RS_w []	q_RS_x []	q_RS_y []	q_RS_z []	v_RS_R_x [m s^-1]	v_RS_R_y [m s^-1]	v_RS_R_z [m s^-1]	b_w_RS_S_x [rad s^-1]	b_w_RS_S_y [rad s^-1]	b_w_RS_S_z [rad s^-1]	b_a_RS_S_x [m s^-2]	b_a_RS_S_y [m s^-2]	b_a_RS_S_z [m s^-2]
1403636580838555648	4.688319	-1.786938	0.783338	0.534108	-0.153029	-0.827383	-0.082152	-0.027876	0.033207	0.800006	-0.003172	0.021267	0.078502	-0.025266	0.136696	0.075593
1403636580843555328	4.688177	-1.786770	0.787350	0.534640	-0.152990	-0.826976	-0.082863	-0.029272	0.033992	0.804771	-0.003172	0.021267	0.078502	-0.025266	0.136696	0.075593
1403636580848555520	4.688028	-1.786598	0.791382	0.535178	-0.152945	-0.826562	-0.083605	-0.030043	0.034999	0.808240	-0.003172	0.021267	0.078502	-0.025266	0.136696	0.075593
1403636580853555456	4.687878	-1.786421	0.795429	0.535715	-0.152884	-0.826146	-0.084391	-0.030230	0.035853	0.810462	-0.003172	0.021267	0.078502	-0.025266	0.136696	0.075593
1403636580858555648	4.687727	-1.786240	0.799484	0.536244	-0.152821	-0.825731	-0.085213	-0.029905	0.036316	0.811406	-0.003172	0.021267	0.078502	-0.025266	0.136696	0.075593

Tabla 1: Primeras 5 filas del dataset "ground-truth".

1.2. Dataset cámara

timestamp_s	posicion_cam_X	posicion_cam_Y	posicion_cam_x	orientacion_w	orientacion_z	orientacion_y
1403636580.838555574	-1.671419610	-4.732270263	0.748476607	0.315287845	-0.441312086	-0.486932005
1403636580.843555212	-1.671357202	-4.732110696	0.752490978	0.315171715	-0.442188176	-0.486669417
1403636580.848555565	-1.671291416	-4.731943994	0.756525416	0.315038115	-0.443090417	-0.486405851
1403636580.853555441	-1.671221033	-4.731776161	0.760574974	0.314872794	-0.444023073	-0.486151694
1403636580.858555555	-1.671146873	-4.731607239	0.764632627	0.314676366	-0.444975574	-0.485899108

Tabla 2: Primeras 5 filas del dataset generado en el marco de la camra izquierda