Revisión 6 de Octubre de 2023

Introducción a la Estadística Computacional

Licenciatura en Estadística

Ejercicio 1: Estructuras de control y funciones en R

Considere la suceción de Fibonacci:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_n = x_{n-2} + x_{n-1} \quad n > 2 \end{cases}$$

Suponga que estamos interesados en encontrar los primeros n términos menores a un valor determinado de una sucesión, pudiendo ser de interés saber cuantos números de fibonacci existen antes de 500.

Ejemplo: Antes del 500 existen 15 numéros de Fibonacci siendo el último el 377.

Se plantean dos alternativas para resolver este problema en R (opción A y B), responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué elementos básicos tiene una función?.
2. Explique que ventajas tiene utilizar una función, ¿en este caso es útil?
3. Complete los comentarios en la implementación A y B.
4. ¿Existe una alternativa mejor que la otra?.
5. El problema a resolver, ¿se encuentra implementado de forma óptima?

Test unitarios

```r
# Implementación A, da el numéro correcto.

all.equal(
  15,
  length(fibonacci_a(100,500))
)
```

```
## [1] TRUE
```

```r
# Implementación B, también da el numéro correcto.

all.equal(
  15,
  length(fibonacci_b(100,500))
)
```

```
## [1] TRUE
```

Opción A

```
fibonacci_a <- function(n,fib_max = 500) {

  #
  #
  #

  fib <- c(0,1)

  #
  #
  #

  i <- length(fib) + 1

  #
  #
  #

  while (i <= n && fib[i - 1] + fib[i - 2] < fib_max) {

    fib[i] <- fib[i - 1] + fib[i - 2]

    i <- i + 1

  }

  #
  #
  #

  n <- min(i-1,n)

  #
  #
  #

  return(
    fib[1:n]
  )

}
```

Opción B

```
fibonacci_b <- function(n,fib_max = 500) {

  #
  #
  #

  fib <- c(0,1)

  #
  #
  #

  if (n > 2) {

    for (i in 3:n) {
      fib[i] <- fib[i - 1] + fib[i - 2]
    }

  }

  #
  #
  #

  return(fib[fib < fib_max])

}
```

Ejercicio 2: Interpolación y ajuste de curvas

Parte 1

Considere los siguientes puntos $(1, 2)$; $(2, 3)$; $(3, 1)$; $(9, 3)$

1. Describa brevemente las formas de encontrar el polinomio interpolante que vimos en el curso.
2. Cálcule el polinomio interpolante.
3. ¿Aumentar el grado del polinomio siempre mejora el grado de precisión?

Parte 2

Considerando:

$$S(x) = S_k = s_{k,0} + s_{k,1}(x - x_k) + s_{k,2}(x - x_k)^2 + s_{k,3}(x - x_k)^3 \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

1. Interprete y describa cada una de las propiedades para la construcción de un **Spline cúbico**:

- $S_k(x) = y_k \quad k = 0, 1, \ldots, \_\_\_$
- $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_k) \quad k = 0, 1, \ldots, \_\_\_$
- $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_k) \quad k = 0, 1, \ldots, \_\_\_$
- $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_k) \quad k = 0, 1, \ldots, \_\_\_$
- $S''_{x_0} = S''_{x_{\_\_}} = 0$

2. Considere la siguiente grilla:

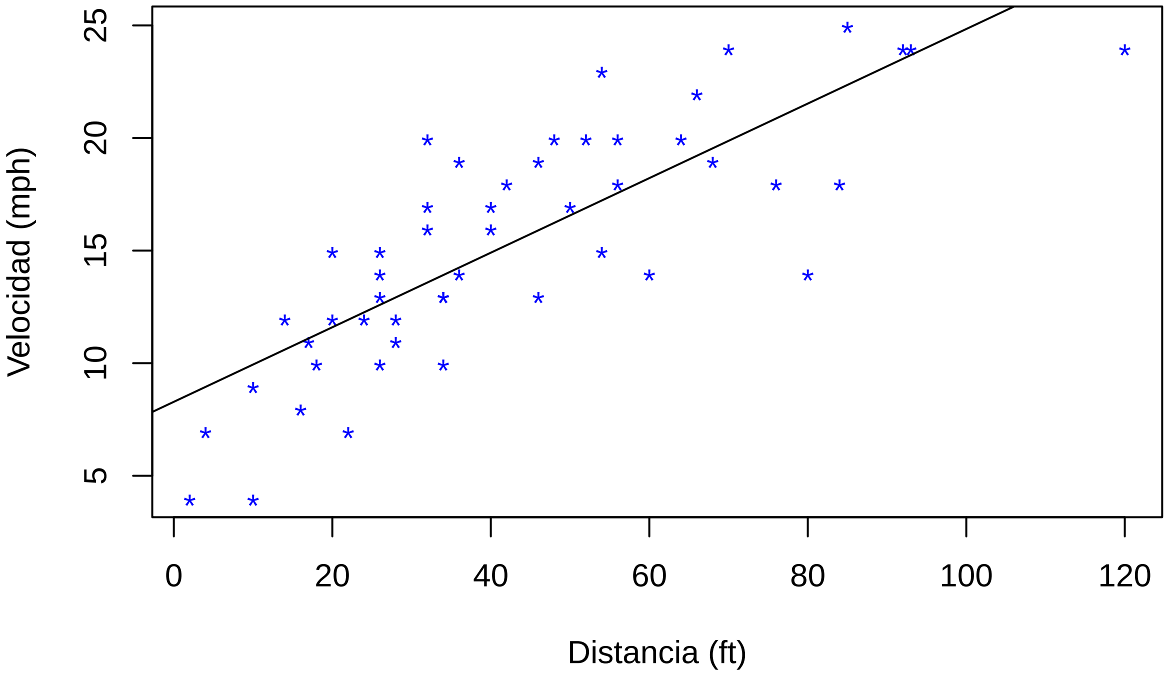
```r
set.seed(1)
grilla <- matrix(c(rnorm(1000, mean = 10, sd = 1)),ncol = 2)
head(grilla)
```

```
##           [,1]      [,2]
## [1,]  9.373546 10.077303
## [2,] 10.183643  9.703131
## [3,]  9.164371  8.816758
## [4,] 11.595281 10.011293
## [5,] 10.329508 10.991601
## [6,]  9.179532 11.593967
```

1. ¿Cuantos puntos tenemos en la grilla?. Para este caso particular, cuente la cantidad de ecuaciones de la parte anterior y complete los indices (rellene los __)
2. El sistema a resolver, ¿es compatible determinado?

Parte 3

Suponga que estamos interesados en ajustar por **mínimos cuadrados** una recta con los datos de `cars` modelando la velocidad (y) en base a la distancia (x):



Es decir, encontrar a y b tal que:

$$y_k = f(x_k) = ax_k + b$$

1. Plantee el problema de mínimos cuadrados. No olvide mencionar el ECM.
2. Desarolle y muestre qué

$$Cov(x, y) = \frac{\sum_{k=0}^{N} (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{N} = \frac{\sum_{k=0}^{N} x_k y_k - n\bar{x}\bar{y}}{N}$$

3. Desarolle y muestre qué

$$S_x^2 = \frac{\sum_{k=0}^{N} (x_k - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{k=0}^{N} x_k^2 - n\bar{x}^2}{N}$$

4. Verifique los valores de a y b teniendo la siguiente información:

- $\bar{dist} = 42.98$
- $\bar{speed} = 15.4$
- $Cov(x, y) = 109.9496$
- $S_{dist}^2 = 664.0608$

Despeje de forma conveniente para obtener los estadísticos presentados anteriormente en las ecuaciones normales:

$$a = \frac{\sum_{k=0}^{k=N} x_k y_k - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{k=0}^{k=N} x_k^2 - n\bar{x}^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

```r
reg_lineal <- lm(
  speed ~ dist,
  data = cars
)

coef(reg_lineal)
```

```
## (Intercept)        dist
##   8.2839056   0.1655676
```

Ejercicio 3: Raíces de funciones y errores

Para la función $f(x) = cos(x)$:

1. Calcular en x_0, $P_3(x)$, $P_5(x)$, $P_7(x)$, $P_9(x)$
2. En el intervalo $[-1, 1]$ usando la aproximación de $P_9(x)$ ¿cúanto vale la cota del error?

Sugerencia: Utilice la forma de Lagrange para escribir el resto:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

3. Usar $x_0 = \frac{\pi}{4}$ y calcular $P_5(x)$, ¿cúanto es el error?.
4. Usando la iteración de punto fijo encontrar el punto fijo de $cos(x)$. Comenzar con x_0 como valor incial.
5. Plantear como quedaría la raíz de $cos(x) - x$, usando el método de Newton Raphson.

Ejercicio 4

Complete en el siguiente cuadro la estimación de la nota de su parcial (puntual):

$$\boxed{}$$

Nota: Se considera una tolerancia de $(101)_2$. En el caso que su estimación se encuentre dentro del intervalo tiene puntos adicionales.