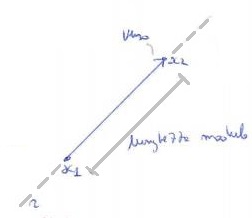
**Appunti RO**

**Vettori**

Ogni vettore è caratterizzato da 3 parametri:

* Modulo: rappresenta la sua lunghezza;
* Direzione: è la retta su cui giace il vettore;
* Verso: la punta della freccia

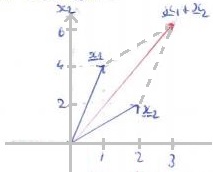
**Esempio:**

**Moltiplicazione di un vettore per uno scalare:**

**Esempio:**

**Addizione tra vettori: regola del parallelogramma**

La **regola del parallelogramma** consiste nel costruire un parallelogramma a partire dalle punte di 2 vettori:

* Dalla punta di si traccia la parallela di
* Dalla punta di si traccia la parallela di

La **diagonale del parallelogramma** rappresenta il risultato della somma:

**Prodotto interno (cioè prodotto scalare tra vettori)**

Per poter effettuare il prodotto interno, i vettori devono **essere della stessa dimensione** dato che dobbiamo moltiplicare le componenti.

**Nota:** Prima il vettore riga e poi un vettore colonna

**🡪**

**Esempio:**

**Combinazione lineare tra vettori**

Un vettore è combinazione lineare dei vettori se numeri reali tali che:

**Nota:** Dati due vettori, per ottenere un terzo vettore possiamo applicare la regola del parallelogramma (somma di vettori).

**Combinazione Conica tra vettori**

Un vettore è combinazione conica dei vettori se numeri reali tali che:

1)

2)

**Combinazione Convessa tra vettori**

Un vettore è combinazione convessa dei vettori se numeri reali tali che:

1)

2)

3)

La combinazione convessa è più restrittiva della conica, se una combinazione è conica 🡪 non è convessa.

**Vettori linearmente indipendenti**

I vettori si dicono **linearmente indipendenti** se

implica che

Cioè dobbiamo dimostrare che l’unico modo per ottenere e quello di settare tutti i , se esistono altri modi di ottenere il vettore nullo 🡪 i vettori sono linearmente dipendenti.

**Vettori linearmente dipendenti**

I vettori si dicono **linearmente dipendenti** se esistono dei **non tutti nulli**, tali che

I vettori si dicono **linearmente dipendenti** se uno di essi può essere espresso come combinazione lineare degli altri. Esempio:

**Come dimostrare che i vettori sono linearmente dipendenti / indipendenti?**

Applichiamo questa espressione: sostituendo otteniamo

trasformiamo la seguente espressione in un sistema di equazioni

applicando il metodo della sostituzione si ottiene:

Scegliamo un valore per i che rispettano le tre equazioni nel sistema:

Infatti sostituendo i

Per ottenere il vettore sono stati utilizzati dei e quindi i 3 vettori sono linearmente dipendenti.

**Spazio generato**

Un insieme di vettori di dimensione *n* **genera** l’insieme dei vettori (spazio n-dimensionale), se ogni vettore di può essere rappresentato come combinazione lineare dei vettori

**Base di uno spazio**

Un insieme di vettori in è una **BASE** di se valgono le seguenti condizioni:

1) generano

2) Se uno solo dei vettori è rimosso 🡪 i rimanenti vettori non generano

**Proprietà 1:** Un insieme di vettori in è una **BASE** di se e solo se:

1)

2) sono **linearmente indipendenti.**

**Def.** Il numero di vettori che formano una base per è detto **dimensione** dello spazio .

**Matrici**

**Def.** Una matrice di ordine una tabella di elementi disposti su **m righe** e **n colonne.**

Possiamo denotare una matrice A in questo modo:

Il **generico elemento** della matrice si indica con che indica che l’elemento è posizionato nella riga **i** e colonna **j.**

**Moltiplicazione per uno scalare:** sia A una matrice e *k* uno scalare è una matrice tale che ogni suo elemento è **.** [cioè si moltiplica ogni elemento nella matrice A per *k*]

**Addizione tra matrici:** le matrici devono avere la stessa dimensione e la matrice risultante è un’altra matrice della stessa dimensione. L’addizione viene fatta sommando gli elementi presenti nella stessa posizione delle due matrici, ad esempio:

**Moltiplicazione tra matrici**

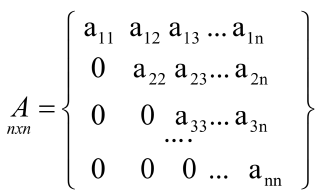
tale che

**N.B.:** il numero di colonne di A deve essere uguale al numero di righe di B

Non necessariamente vale la proprietà commutativa:

**Matrice identità**

Una matrice quadrata è chiamata **matrice identità** denotata con se ha gli elementi uguali a 1 sulla diagonale e 0 da qualsiasi altra parte.



**Matrice triangolare superiore**

Una matrice quadrata si dice **triangolare superiore** se tutti gli elementi al di sotto della diagonale valgono 0.

**Matrice trasposta**

Data una matrice , la sua **matrice trasposta** è una matrice ottenuta invertendo le righe con le colonne.

**Inversa di una matrice**

Sia una matrice quadrata, se esiste una matrice quadrata tale che

e **,** B è detta **matrice inversa di A** (denotata con

**Ricordare:**

* L’inversa di una matrice A (se esiste) è **UNICA**
* Se una matrice ammette l’inversa allora è detta matrice **non singolare**, altrimenti è detta singolare
* Una matrice è non singolare (se è invertibile) se e solo se le righe o le colonne sono **linearmente indipendenti**

**Calcolo della matrice inverse (usando il determinante)**

**Passo 1:** calcolo del determinante della matrice A

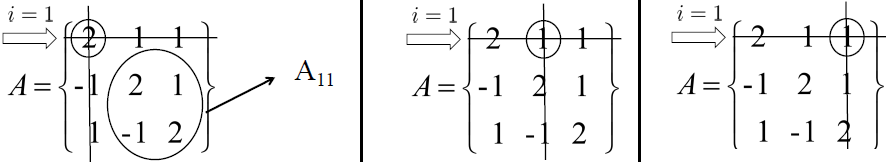
Il **determinante** è uno scalare e si calcola in questo modo: [sviluppo rispetto a una **riga i fissata]**

è il determinante della sottomatrice **quadrata** . Tale matrice si ottiene eleminando una riga *i* fissata e di volta in volta una colonna *j*.

**N.B:** Per poter calcolare il determinante, la matrice deve essere **quadrata**.

Per calcolare il determinante di una matrice :

**Esempio:**

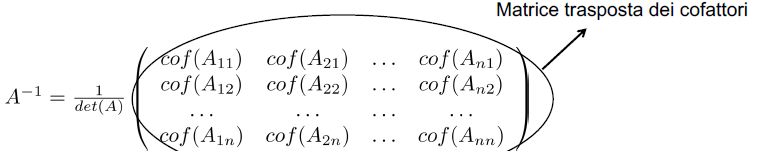




**Nota:** Se il la matrice A è **invertibile** (cioè esiste la matrice inversa

**Passo 2:** calcolo del cofattore

es. cancella seconda riga e prima colonna e ottieni questa sottomatrice quadrata.



**Esempio:**

**Rango di una matrice**

Rango di riga: numero massimo di righe linearmente indipendenti

Rango di colonna: numero massimo di colonne indipendenti.

**Teorema:** Rango di riga = rango di colonna 🡪

Se la matrice A è a **rango pieno.**

Cercare una soluzione ad un sistema di equazioni lineari significa cercare quei valori tali che il vettore può essere espresso come combinazione lineare della colonne della matrice.

**Soluzione del sistema:** trovare quei valori della che risolvono il sistema.

Per la soluzione di un sistema di equazioni lineari valgono le seguenti proprietà:

1. Se sistema **non** ha soluzione perché che possono rappresentare
2. Se il sistema ha soluzione

Supponiamo di sapere il rango della matrice A, il **numero delle soluzioni** è dato da

[detto grado di libertà]

**Problema di ottimizzazione (P. O.)**

Data una funzione e un problema di ottimizzazione può essere formulato come:

[*f* prende in input un vettore di dimensione *n* e restituisce uno scalare]

tale che

* è la funzione obiettivo [fornisce uno scalare che indica quanto è buona quella soluzione]
* è il vettore delle variabili decisionali [sono dei punti nel caso di vettori con due componenti --]
* è l’insieme delle soluzioni ammissibili (detta **regione ammissibile)** e rappresenta tutte le soluzioni che si possono accettare (si trova sempre nel primo quadrante).

**Nota:** soluzione del problema (vettore ) valore della soluzione (dato dalla funz. obiettivo)

Quindi, un problema P. O. consiste nel determinare, se esiste, **un punto di minimo di *f*** tra i punti dell’insieme X. Il punto non esiste quando la regione ammissibile X è vuota (cioè )

**Problemi di programmazione matematica (P. M.)**

Quando X viene espresso attraverso un sistema di equazioni e disequazioni, tale problema prende il nome di problema di programmazione matematica:

tale cheper

* i-esimo vincolo del sistema
* i-esima componente del vettore dei termini noti

**Nota: *m* vincoli, *n* variabili.**

**Problema di programmazione lineare (P. L.)**

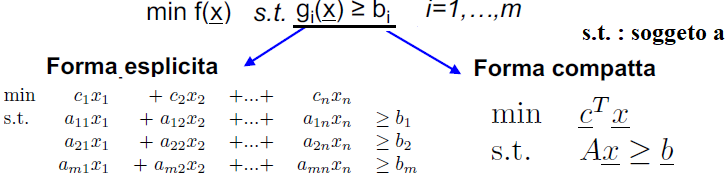
Un problema di P. M. è lineare quando:

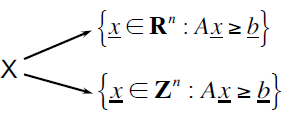
* La funzione obiettivo è lineare: [spesso la si denota con: )
* L’insieme X è espresso in termini di relazioni (uguaglianze e disuguaglianze) lineari

I coefficienti sono i **coefficienti di costo** e le sono le **variabili decisionali**.

Una funzione *f* si dice lineare quando soddisfa: [ sono due vettori]

Per dimostrare che soddisfa le due condizioni (basta fare una sostituzione)



 Variabili **continue**. Si parla di **programmazione lineare continua (PL)**

perché le variabili del problema sono numeri reali che assumono valori in

Variabili **intere. Programmazione Lineare Intera (PLI).**

PL perché abbiamo infinite soluzioni, mentre con PLI le soluzioni potrebbero essere finite.

PL sono problemi facili (cioè esiste un algoritmo efficiente); PLI sono problemi difficili (cioè non esiste un algoritmo di soluzione in tempo polinomiale).

Dato il seguente problema di programmazione lineare:

per

Un vettore di

* **Soddisfa** il vincolo se [sostituendo alla il valore soddisfa il vincolo]
* **Viola** il vincolo se
* **Satura** (o rende attivo) il vincolo se [vincolo soddisfatto all’uguaglianza]

Se il vincolo è saturo significa che quella risorsa è **scarsa all’ottimo** (quindi se aumenta la risorsa 🡪 aumenta la funzione obiettivo)

**Nota:** Un vettore di è **soluzione ammissibile** per il problema di PL se e solo se soddisfa tutti i vincoli del problema.

**Soluzioni di un problema di PL**

Dato il seguente problema di programmazione lineare:

per

Un problema di programmazione lineare risulta:

* **Inammissibile** se la regione ammissibile è vuota, cioè
* **Illimitato** (inferiormente) [cioè soluzione illimitata] se scritto un qualsiasi scalare **k** esiste sempre un punto tale che [il valore della soluzione sarà Non ho il punto di ottimo, ma il valore della funzione obiettivo è se il problema è di minimo]
* **Ammette soluzione ottima finita** se esiste un punto tale che [cioè esiste un punto in cui la funzione obiettivo assume valore minimo]

Dato un problema di PL dobbiamo **sempre ottenere** una di queste possibili risposte.

**Problema di PL: Forma canonica di minimo**

Consideriamo un problema di programmazione lineare (PL) con *m* vincoli e *n* variabili in **forma canonica di minimo:** se tutte le variabili e i vincoli del problema sono

1) [problema di minimo]

2) [tutti i vincoli del sistema sono

3) [tutte le variabili sono ]

: vettore delle variabili decisionali; vettore dei coefficienti di costo della funzione obiettivo

vettore dei termini noti dei vincoli; A è la matrice dei coefficienti dei vincoli

per .

**Problemi di PL: Forma standard di minimo**

Il problema deve avere questa forma perché lo richiede l’algoritmo del simplesso e altre applicazioni.

1) [problema di minimo]

2) (1) [tutti i vincoli del sistema sono soddisfatti all’uguaglianza]

3) (2) [tutte le variabili sono ]

4) [i termini noti dei vincoli sono ]

I valori di che soddisfano i vincoli (1) sono detti **soluzioni** del problema di PL.

Inoltre, i valori di che soddisfano anche i vincoli (2) sono detti **soluzioni ammissibile** del problema di PL.

Si assumo soddisfatte le seguenti ipotesi:

* (più variabili che vincoli)
* - la matrice A è a rango pieno

È noto che il sistema di equazioni lineare può:

* Ammettere una **soluzione unica** se
* Ammettere  **soluzioni** se [ci interessa questo caso per i problemi di ottimizzazione]

**Problemi equivalenti**

Qualunque sia la forma del problema che è stato modellato attraverso un modello matematico, è sempre possibile **trasformare** quel problema in un **problema equivalente** per poter usare la forma standard di minimo che viene richiesta per poter usare l’algoritmo del simplesso.

trasformazioni che permettono di trasformare un problema di partenza in uno equivalente (es. da problema di massimo a problema di minimo) e risolvere il problema di partenza o quello equivalente **è la stessa cosa.**

**Def.** Due problemi di programmazione lineare di minimo (o massimo) sono **equivalenti** se soluzione ammissibile di possiamo costruire una soluzione ammissibile di con lo stesso valore e, soluzione ammissibile di possiamo costruire una soluzione ammissibile di con lo stesso valore.

**Oss. 1)** Se due problemi di programmazione lineare sono **equivalenti** allora i valori delle rispettive soluzioni ottime coincidono.

**Oss. 2)** Qualunque problema di PL può essere trasformato in un problema equivalente in forma canonica o standard.

**Formulazioni equivalenti**

**Funzione obiettivo:**

Es.

**Vincoli:**

**Nota:** usando posso ottenere la forma canonica partenza da

**Vincoli** per trasformare in un vincolo di uguaglianza

La nuova variabile introdotta prende il nome di **variabile di slack (scarto)**. Si usa per aggiungere una quantità per ottenere l’uguaglianza. Due caratteristiche:

**Vincoli :** per trasformare in un vincolo di = (richiesto dalla forma standard) occorre

La nuova variabile introdotta prende il nome di **variabile di surplus (eccedenza)**. Si usa per sottrarre una quantità per ottenere l’uguaglianza. Due caratteristiche:

**Variabili**

🡪

Sostituiamo con ovunque compare nel modello (vincoli e funzione obiettivo)

Es.

Consideriamo il seguente assegnamento di valori che soddisfa il vincolo:

, con ,

Quindi l’assegnamento diventa:

**Variabili non vincolate (n. v.):** variabili che possono avere qualsiasi valore > 0, = 0, < 0

Per trasformare **sostituiamo**  con ovunque compare nel modello.

Es.

Consideriamo il seguente assegnamento di valori che soddisfa il vincolo:

Poiché dobbiamo trovare due interi positivi tali che (ad es. se

si ha:

( con

Sostituendo: (

Su appunti vedi esempio con variabili di slack e surplus.

**Ottimi globali e locali**

Dato un problema di ottimizzazione: tale che , (X è la regione ammissibile)

**Def. Ottimo globale:** Un punto è un **ottimo globale** per la funzione se e solo se:

**Nota:**  è un qualsiasi punto della regione ammissibile X

**Def. Ottimo locale:** Un punto è un **ottimo locale** per la funzione se e solo se:

Minimo locale: significa che la soluzione si trova solo in una parte della regione ammissibile X.

**Nota:** Il punto appartiene a un intorno di X []

**N.B:** Ogni ottimo globale **è anche** ottimo locale, in generale non è vero il viceversa. Ci sono alcuni casi particolari in cui tutti gli ottimi locali sono anche ottimi globali.

Abbiamo detto che un problema di PL può essere:

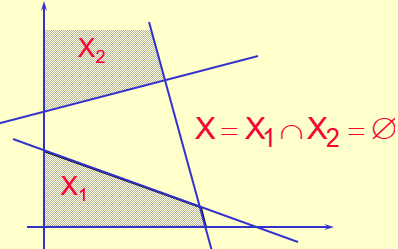
1. Non ammissibile (senza soluzioni ammissibili, cioè X )
2. Ammissibile con valore ottimo illimitato (non esiste un punto di ottimo e quindi )
3. Ammissibile con valore ottimo finito. In questo caso abbiamo due possibilità:

* Unico punto di ottimo
* Infiniti punti di ottimo: ho infiniti punti in cui la funzione obiettivo assume valore ottimo, es.

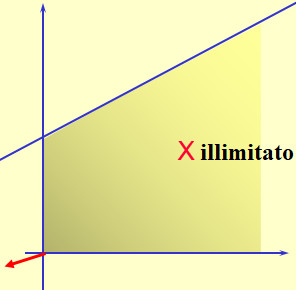
**Nota:** Infiniti punti di ottimo ottimo illimitato

**NB:** Infiniti punti di ottimo si ha quando una retta passa attraverso due punti

1. **Problema inammissibile**

**Def.** Un problema di ottimizzazione si dice **inammissibile** se , cioè soluzioni ammissibili.

1. **Ottimo illimitato**

**Def.** Un problema di ottimizzazione si dice **illimitato** (inferiormente) se scelto un qualsiasi valore esiste sempre un punto tale che .

L’ottimo illimitato si ha sempre quando la regione ammissibile X è aperta, ma dipende dal gradiente.

**N.B:** Una soluzione con valore ottimo illimitato implica un insieme di ammissibilità X illimitato, ma **non è vero il viceversa**.

Si nota che il punto di ottimo è (0, 0) nel caso in cui cresce. Se sto minimizzando 🡪 ( punto di ottimo)

**Rappresentazione grafica di un problema di PL**

Dato il seguente problema di PL:

1) Disegnare i vincoli del problema sul diagramma [considerare il vincolo come equazione di una retta

* Quando disegnano le rette associate ai vincoli stiamo disegnando l’equazione del vincolo soddisfatto all’uguaglianza. Indicare sulle rette con (1), (2), .. a quale vincolo del modello matematico fa parte
* Segnare sulle rette relative ai vincoli anche le **variabili di slack** associate a ogni vincolo (es. nel caso degli assi cartesiani abbiamo che: sull’asse mettiamo sull’asse mettiamo

2) Se il vincolo è una **disequazione**, definire i **semispazi** (superiore / inferiore).

Per definirlo bisogna prendere un altro punto che non si trova sulla retta tracciata e sostituire i valori a e verificare se si soddisfa il vincolo: se soddisfa allora la freccia che delimita il semispazio va messa in direzione del punto scelto, altrimenti la freccia va messa in direzione opposta [punto semplice (0,0)].

3) Evidenziare la regione ammissibile (essa si trova sempre sul **I quadrante)**

4) Definire i **punti** che fanno parte della regione ammissibile che possono essere dei possibili punti di ottimo

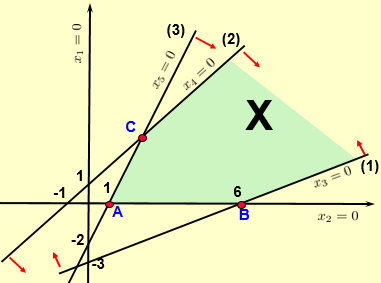
5) Per trovare il punto di ottimo occorre definire il **gradiente della funzione obiettivo**, ovvero il vettore dei costi ***c***T. [in questo caso il gradiente è (3, 1)] e **disegnarlo come vettore** sul grafico.

6) Il gradiente è **perpendicolare** alla funzione obiettivo, quindi disegnare un **fascio di rette** perpendicolari al gradiente. Il **verso del gradiente** indica la direzione di crescita della funzione obiettivo:

* Se il problema è di **minimo** si deve tracciare un fascio di rette in **direzione opposta al gradiente**, cioè a partire da + fino a - .
* Se il problema è di **massimo** si deve tracciare un fascio di rette in **direzione del gradiente**, cioè da - fino a + .

7) L’**ultimo punto della regione** che il fascio di rette va a toccare è il **punto di ottimo**

8) Per definire il **valore ottimo** si deve sostituire a della funzione obiettivo (min z) i valori del punto di ottimo. [Es. se il punto di ottimo è (1, 0) 🡪 z = 3 \* 1 + 1 \* 0 = 3, quindi **z = 3]**.

Attraverso la rappresentazione grafica abbiamo determinato:

* **Punto di ottimo (1, 0)**
* **Valore ottimo della f. o.**

Per un **punto** passano infinite rette

Per **due punti** passa una sola retta.

Per ottenere:

* **Ottimo illimitato:** il valore ottimo deve essere [vedi figura pagina precedente]
* **Infiniti punti di ottimo:** si ha quando una retta passa attraverso due punti, quindi **dobbiamo definire una funzione obiettivo** che permette di tracciare un fascio di rette parallele al segmento che dobbiamo considerare e che **siano perpendicolari** al gradiente. Nell’esempio in figura, il segmento AB

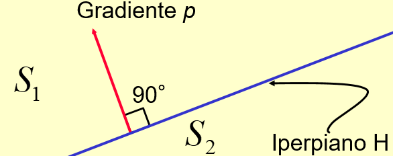
**Iperpiano: generalizzazione della retta**

**Def.** Un insieme geometrico H è un iperpiano se e solo se:

(luogo geometrico dei punti che soddisfa l’equazione)

O equivalente [ è un vettore e *k* è uno scalare]

è detto gradiente dell’iperpiano. Il gradiente è perpendicolare all’iperpiano ed è la direzione di crescita dell’iperpiano.

Consideriamo un punto di H ed il gradiente . L’iperpiano H è l’insieme dei vettori tali che il vettore è **perpendicolare** a . . [vedi esempio su appunti]

Ipotesi:

**Nota:** Se due vettori hanno prodotto interno nullo 🡪 i due vettori sono perpendicolari

Un iperpiano H divide lo spazio a cui appartiene in due **semispazi:** si divide in:

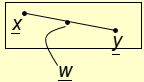


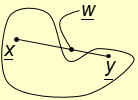
**Nota:** Per decider il semispazio ( o si tiene conto di , ma si prende in considerazione un punto e si verifica se tale punto soddisfa (sostituire a con le coordinate del punto scelto)

**Insieme convesso**

**Def.** Un insieme X è convesso se e solo se dati due punti , ogni punto generato come combinazione convessa ( ) è tale che **.**

**Nota:**  per nell’intervallo [0, 1] rappresenta un punto sul segmento che unisce e . Qualsiasi punto dove è chiamato combinazione convessa di

**X** per essere un insieme convesso occorre che un qualsiasi punto , cioè un qualsiasi punto che si prende sul segmento  si trova **all’interno di X**



**Insieme non convesso:** si ha quando presi due punti , tracciando il segmento che li unisce, ∃ almeno un punto che si trova **al di fuori** dell’insieme X.

Vedi su appunti alcuni esempi di insiemi convessi.

**Altri insiemi convessi**

Un **iperpiano** è un insieme convesso. [H è un iperpiano che può essere rappresentato come una collezione di punti che soddisfano dove è un qualsiasi punto presente in H.

Un **semispazio** è un insieme convesso.

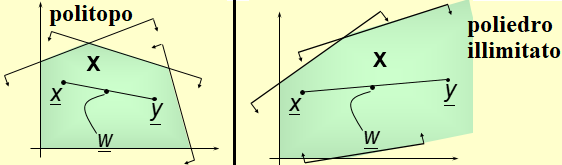
**L’intersezione** di iperpiani / semispazi produce un insieme convesso [produce un poliedro chiuso]

**Poliedro:** è l’intersezione di un numero **finito di semispazi**. [sarebbe il sistema di vincoli del problema]

Un poliedro X è la regione ammissibile ed è un insieme convesso. Un poliedro può essere:

* **Chiuso e limitato (politopo):** l’intersezione di semi spazi genera un poliedro chiuso
* **Illimitato:** si ha quando la regione ammissibile è aperta.

Un poliedro è convesso perché se scelgo due punti qualsiasi e traccio un segmento che li unisce, un qualsiasi altro punto che appartiene a X si trova su tale segmento [vale anche per il poliedro illimitato].



**Funzione convessa**

**Def.** Una funzione si dive **convessa su insieme X,** se presi due punti risulta che:

**Teorema 1** (funzione convessa): Una funzione lineare del tipo è una funzione convessa

**Dim.** Dalla def. sostituisci la con e ottieni l’uguaglianza tra primo e secondo membro.

**Teorema 2:** Se *f* è una funzione convessa e X è un insieme convesso 🡪 ottimo locale di *f*  su X (se ne esistono) è **anche un ottimo globale.**

Tramite questo th. 2 il simplesso una volta trovato ottimo locale si fermerà e ci dirà che è un ottimo globale

**Vertici di un poliedro**

**Def.** Un punto di un poliedro X è un **punto estremo** se e solo se **non può** essere espresso come combinazione convessa **stretta** di altri punti di X.

**Teorema** (proprietà dei punti estremi di un poliedro limitato)

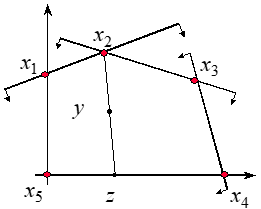
Dato un poliedro X non vuoto e limitato con punti estremi , ogni punto può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X, cioè:

**Es.** Si vuole esprime il vettore come combinazione convessa dei vertici del politopo

Prendiamo un punto sul segmento che unisce e

[ come comb. convessa dei punti e perché si trova sul segmento

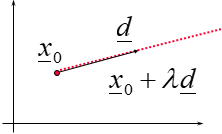
[ come comb. convessa di e perché si trova sul segmento

Sostituendo:

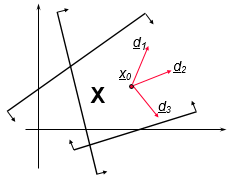
Abbiamo i 3 punti del poliedro: Dobbiamo mostrare che

**Nota che:** ( per ipotesi)

**Raggi e direzioni estreme di un poliedro**

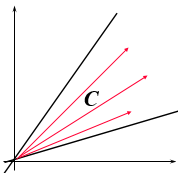
**Def.** Un raggio **R** di vertice e direzione è un insieme di punti della forma:

Il raggio rappresenta gli infiniti punti che giacciano sulla semiretta che parte da e ha una direzione

**Def.** Dato un poliedro X, il vettore è una direzione di X se e solo se per ogni punto il raggio appartiene a X

In altre parole, **la direzione di un poliedro:** spostandosi lungo quella direzione all’infinito senza mai uscire dalla regione ammissibile X partendo da un qualsiasi punto che si trova all’interno della regione X

Le direzioni esistono solo se la regione ammissibile X è aperta (cioè è un poliedro illimitato. Se il poliedro X è chiuso 🡪 ∄ direzioni.

Dalla figura: non è una direzione; è una direzione; non è una direzione.

**Cono convesso**

**Def.** un cono convesso C è un insieme convesso tale che se

Siccome lo scegliamo noi, possiamo porre e partire da origine degli assi

Un cono convesso è un insieme convesso che contiene raggi che partono dall’origine.

**Nota:** alcuni raggi possono essere espressi come combinazione conica di altri.

I raggi estremi come combinazione conica **non** posso esprimerli.

**Direzioni estreme di un poliedro**

**Def.** Una direzione di un poliedro X è una **direzione estrema di X** se e solo se la direzione non è esprimibile come combinazione conica di altre direzioni di X.

**Risoluzione mediante il teorema della rappresentazione (poliedri)**

1) Calcolare i **punti estremi** del poliedro X

**Def.** Un punto *x* di un poliedro X è un punto di estremo se e solo se **non può** essere espresso come combinazione convessa STRETTA di altri punti di X. [Vedi proprietà dei punti estremi]

2) Calcolare le **direzioni estreme** del poliedro X. Bisogna definire un **sistema omogeneo**.

**Nota:** se il poliedro è chiuso (cioè è un politipo) 🡪 **NON** esistono direzioni

3) Per comodità ridurre il problema in **forma standard.**

Per applicare il **th. Della rappresentazione** bisogna sapere i punti estremi e le direzioni estreme. Dal teorema sappiamo che ogni punto ***x*** X può essere espresso come:

* combinazione convessa dei punti estremi di X; combinazione conica delle sue direzioni estreme

4) Applicando il teorema della rappresentazione, possiamo **trasformare** il problema di PL originario in un **nuovo problema** con le incognite e e che rispettano determinati vincoli.

Sapendo che la funzione obiettivo *f*(*x*) = ***c***T ***x*** 🡪 min z = ***c***T ***x***

Sostituisci alla ***x*** il valore della formula del th. Della rappresentazione [vedi appunti]

5) Scritta la funzione obiettivo applicando il teorema, dobbiamo ora risolvere questo nuovo problema

6) Dobbiamo capire se il problema ammette **ottimo illimitato**. [vedi su appunti i 2 casi]

**Teorema della rappresentazione:**

Dato un poliedro X non vuoto con **punti estremi** con e **direzioni estreme** con , ogni punto può essere espresso come:

* Combinazione convessa dei punti estremi di X;
* Combinazione conica delle sue direzioni estreme

Sappiamo che la funzione obiettivo è: 🡪 sostituiamo a con il valore scritto in precedenza:

Le cui condizioni da rispettare solo quelle relativa alla combinazione convessa e conica:

Dobbiamo capire se il problema ammette **ottimo illimitato**, consideriamo la quantità

1. Se esiste una direzione tale che ottimo del problema è illimitato (perché basta almeno un coefficiente negativo per ottenere , poiché stiamo **minimizzando**)
2. Se ottimo **NON** è illimitato, cioè se allora:

* Le corrispondenti variabili le poniamo **uguale a 0.** [perché per calcolare il minimo non ho bisogno di sommare una quantità positiva con un'altra quantità positiva]
* Per minimizzare il resto della sommatoria ( basta calcolare tutti i valori , **scegliere il con il coefficiente** **minimo:** es. , e fissare e tutti gli altri

Es. .

Una volta definito il sarà il **punto di ottimo che stavamo cercando,** mentre il coefficiente associato a (cioè il numero che sta davanti a ) sarà il **valore ottimo** della funzione obiettivo (cioè .

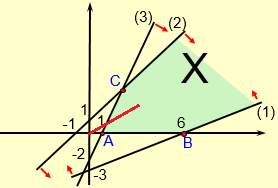
**Nota:** Se al posto di *min z* ci sta si effettua lo stesso ragionamento fatto per *min,* **ma al contrario.**

**Come si calcolano le direzioni estreme?** Sia (poliedro)

Dato un qualsiasi punto , il vettore è una direzione del poliedro X se:

1. [si sostituiscono i termini noti con 0 e si conserva il segno del sistema ]
2. [vincoli di non negatività]
3. [per soddisfare questo vincolo aggiungiamo nel sistema ]

**Nota:** Per poter calcolare le direzioni estreme di un poliedro è necessario che la regione ammissibile X **sia aperta** (quindi che non è politopo); Se il poliedro è chiuso direzioni estreme

6) Riscrivere il problema applicando il teorema della rappresentazione e risolverlo.

Attraverso la rappresentazione grafica abbiamo determinato:

* **Punto di ottimo (1, 0)**
* **Valore ottimo della f. o.**

La figura mostra la rappresentazione della regione ammissibile X.

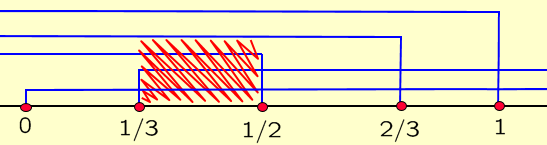
**Nota:** Quando dobbiamo applicare il th. della rappresentazione, dobbiamo risolvere nuovamente il problema usando il teorema (risoluzione algebrica) e poi confrontare le soluzioni ottenuto con l’applicazione del teorema con le soluzioni ottenute con la rappresentazione grafica (**se coincidono** 🡪 OK; altrimenti non bisogna forzare a far combaciare tali soluzioni).

**Calcolo dei punti del poliedro**

A = (1, 0); B = (6, 0); C = ?

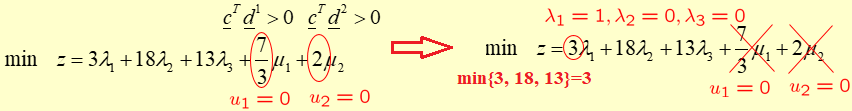
Per calcolare il punto C dobbiamo impostare un sistema di equazioni che coinvolge le due rette (2) e (3) che con la loro intersezione danno luogo al punto C.

**Calcolo delle direzioni estreme:**

Bisogna riscrivere il sistema di vincoli con un **sistema omogeneo** dove i termini noti sono sempre e tale sistema deve essere scritto in funzione delle direzioni estreme .

Si procede applicando il teorema della rappresentazione.

Dove:



Poiché

Poiché è stato ottenuto tramite il punto A 🡪 **punto A = (1, 0) è il punto di ottimo.**

**Nota:** Se il problema era di *max*, si otteneva ottimo illimitato

**Soluzione algebrica dei problemi di PL**

Consideriamo un problema di PL in **forma standard di minimo:**

(1)

(2) [*n* numero variabili decisionali]

Poiché ed , si può **partizionare** la matrice A in: dove:

* è la **matrice di base** ed è una matrice **non singolare** (cioè invertibile- )
* è la matrice delle variabili fuori base.

La matrice è composta da *m* colonne **linearmente indipendenti** di A. Tali colonne (viste come vettori) sono quindi una **base** nello spazio vettoriale (ad *m* dimensioni) delle colonne di A

Possiamo **partizionare** anche il vettore delle in:

: vettore delle variabili in **base**; vettore delle variabile **fuori base**

Poniamo in modo tale che se è una **soluzione di base ammissibile.**

**Teorema 3:**

Dato insieme convesso, dove **A** è una matrice di con è un **punto estremo di X** se e solo se è una soluzione di base ammissibile.

Il max numero di possibili basi corrisponde al numero di possibili estrazioni di *m* colonne su *n* colonne di A

In generale, non tutte le possibili sottomatrici sono non singolari (cioè invertibile).

Inoltre, non tutte le matrici di base danno luogo a soluzioni ammissibili (ossia con tutte le componenti positive). Per questo motivo, il numero delle possibili combinazioni corrisponde a un limite superiore.

**Teorema fondamentale della PL**

Dato un problema di PL in **forma standard**:

[problema di minimo]

(1) [tutti i vincoli del sistema sono soddisfatti all’uguaglianza]

(2) [tutte le variabili sono ]

[i termini noti dei vincoli sono ]

dove A è una matrice con ed , allora:

1. Esiste una soluzione ammissibile esiste una soluzione ammissibile di base
2. Esiste una soluzione ottima finita esiste una soluzione ottima finita **che è anche di base**

**Nota:** Questo teorema deriva dalla corrispondenza delle soluzioni di base ammissibili con i punti estremi del poliedro X.

7) Dato un problema di PL, si determinino le **basi associate ad ogni vertice** della regione ammissibile.

Scrivere la **forma standard di minimo:**

Dal teorema 3 precedente sappiamo che ad ogni vertice della regione ammissibile sono associate una o più basi ammissibili.

Il numero di componenti di queste basi è dato dal numero **m** di righe della matrice dei vincoli A.

Per individuare la base associata ad un vertice è sufficiente trovare le variabili che **assumono il valore 0** sui vincoli la cui intersezione individua sul piano (indicare vincolo ad ogni vincolo quando ).

Nell’esempio in figura:

* Il punto A = (1, 0) è individuato dal vincolo (3), su cui e l’asse delle ascisse dove .

Quindi, la base B associata al vertice A è e le variabili fuori base sono

* Il punto B = (6, 0) è individuato dal vincolo (1), su cui e l’asse delle ascisse dove .

Quindi, la base B associata al vertice B è e le variabili fuori base sono

* Il punto C = (3, 4) è individuato dal vincolo (2), su cui ed il vincolo (3) su cui .

Quindi, la base B associata al vertice C è e le variabili fuori base sono

8) Si individui (geometricamente) una **soluzione ammissibile non basica**

Prendere un qualsiasi punto della regione ammissibile X ad eccezione dei **punti estremi A, B, C.**

Nell’esempio in figura prendiamo i punti: (2, 0), (5, 0), (2, 2), (6, 3) ….

9) Si individui (geometricamente) una **soluzione ammissibile basica**

Prendere uno qualsiasi dei punti estremi A, B, C (vertici del poliedro) della regione ammissibile

Nell’esempio in figura sono i punti: A = (1, 0); B = (6, 0); C = (3, 4).

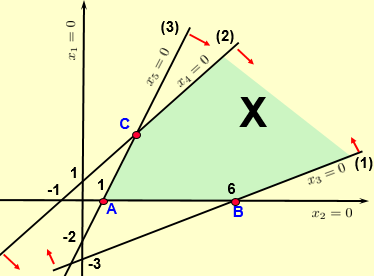
10) Si individui (geometricamente) una **soluzione non ammissibile** **e non basica.**

Prendere un qualsiasi punto **al di fuori** della regione ammissibile X che sia diverso da quelli ottenuti dall’intersezione di 2 o più vincoli del problema.

Nell’esempio in figura, si considerano i punti: (0,3), (1, 5), (-3, 0), …..

11) Si individui (geometricamente) una **soluzione non ammissibile**, ma **basica.**

Prendere un qualsiasi punto al di fuori della regione ottenuto dall’intersezione di due o più vincoli del problema. Nell’esempio in figura sono: (0, 0); (-1, 0); (0, 1); (0, -2); (0, -3); (-2/3, -10/3).

Dato il problema PL in forma standard di minimo:

-> modificare termine noto con **0.**

- Individuare una **soluzione di base ammissibile degenere,** se esiste.

Un punto estremo su cui passano almeno vincoli. Questa condizione garantisce che almeno una variabile in base sia nulla.

Una **soluzione di base degenere:** si ha quando almeno una componente in base vale 0.

Nell’esempio in figura **non ci sono** soluzioni di base degeneri

- Modificare il vincolo 3 al fine di generare una **soluzione di base ammissibile degenere.**

Dobbiamo fare in modo che un vertice passa attraverso tre variabili che valgono 0, quindi facciamo **traslare** verso sinistra il vincolo (3) in modo tale che il punto A = (0, 0) ed tale punto si ottiene tramite l’intersezione di 3 rette dove ; .

Le **basi associate** al punto A = (0, 0) sono tre basi diverse:

- Verificare algebricamente che è una soluzione di base ammissibile degenere.

* Determinare la matrice e poi determinare la matrice
* Calcolare e verificare se compare almeno una componente a 0.

**Nota:** le coordinate che troviamo in o corrispondono alle coordinate del punto A.

Dato il seguente problema in forma standard di minimo di sopra con

- I seguenti vettori sono **soluzioni di base ammissibili** per il problema dato?

: non è soluzione di base perché la dimensione della base è 3 (3 vincoli) e quindi ci devono essere almeno due variabili fuori base con 0. Notiamo che in questo caso non ha due componenti a 0 (var. fuori base)

: **No,** perché ha una componente < 0 che non rispetta i vincoli di non negatività.

1. Controllare la dimensione della base *m* (le restanti *n-m* variabili sono **fuori base** e valgono 0)

2. Controllare che le colonne della matrice A associate a sono una base di . Prendere le *m* colonne di A, costruisci calcolare il determinante [Se colonne sono **linearmente indipendenti.]**

**Metodo delle 2 fasi**

Dato un problema in **forma standard di minimo**.

Si vuole risolvere il seguente problema applicando l’algoritmo del simplesso:

1. Verificare se il poliedro è vuoto (se , significa che il sistema di vincoli non permette di trovare una soluzione ammissibile.
2. Ci occorre una **base di partenza**: o ci viene data nel compito, oppure la dobbiamo calcolare con 2 metodi

**Metodo 1:** se nella matrice A troviamo delle sottomatrici che rappresentano la **matrice identità di** allora ho trovato le *m* variabili che formano una base B

**Metodo 2:** se tra le colonne delle matrice A non è presenta la matrice identità I, la possiamo **creare.**

Modifichiamo il sistema di vincoli del problema originale aggiungendo delle **variabili artificiali** che permettono di costruire la matrice identità I:

Si aggiunge una **variabili artificiale** ad ogni vincolo del sistema.

Il sistema di vincoli viene alterato ed è equivalente all’aggiunta di variabili di surplus.

Es. [se , l’uguaglianza non è più rispettata

Quindi, dobbiamo cercare di **mantenere le a 0** se possibile per trovare una soluzione di base ammissibile e quindi le sono **fuori base per definizione.**

Per ottenere una soluzione di base (se esiste) dobbiamo risolvere il seguente probl. di PL nella **prima fase**:



[funzione obiettivo della prima fase]

Inizialmente tutte le variabili sono in base mentre tutte le variabili sono fuori base.

**Nota:** Se nella matrice A abbiamo qualche colonna della matrice identità I, allora non

occorre aggiungere una variabili per quella colonna.

Per risolvere questo problema possiamo usare il simplesso usando come **base iniziale** le colonne della matrice associate alle variabili artificiali

In base alla soluzione ottenuta, il simplesso determina se è una soluzione inammissibile oppure che è una **base di partenza**.

Alla **fine della prima fase**, possono verificarsi due casi, l’ottino della funzione obiettivo :

* il sistema **non ammette soluzioni** e quindi **non si passa** alla seconda fase.

Significa che almeno una è in base 🡪 non abbiamo la base che ci serve

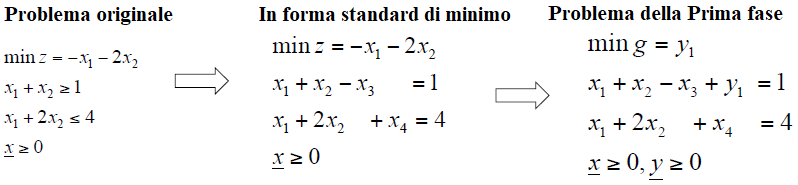
Il problema originale è inammissibile e quindi ci fermiamo (cioè non si può applicare il simplesso).

* il sistema **ammette soluzione**. Quindi, siamo riusciti a trovare una soluzione di base ammissibile del problema originale senza le 🡪 abbiamo una base di partenza

Se si passa alla **seconda fase**: si risolve il problema originale usando la **base ottima della prima fase** come base iniziale.

**Nota:** Se abbiamo 3 variabili artificiali, il simplesso deve fare almeno 3 iterazioni, perché deve spostare le

fuori base e quindi deve fare il **cambio base** ad ogni iterazione.



Per risolvere un problema di PL usando il metodo 2 fasi per trovare la base iniziale, si deve applicare 2 volte il simplesso: prima volta sul problema prima fase per trovare base B di partenza e poi sul prob. seconda fase.

Per uniformità poniamo (continua su appunti cartacei alla lez. 12)

**Metodo del Big M** (alternativa al 2 fasi)

Si modifica artificialmente il sistema dei vincoli per costruire la matrice identità I all’interno della matrice A

Simile al metodo delle 2 fasi, ma cambia la funzione obiettivo, però dobbiamo sempre cercare di mantenere le  **a 0.** Si aggiunge un variabile artificiale ad ogni vincolo del sistema.

Per evitare di fare 2 simplessi, si lascia la funzione obiettivo del problema originale e si modifica (somman-do nel caso di un problema di minimo) le variabili artificiali moltiplicate per un coefficiente **M** molto grande

Se il problema è di massimo 🡪

**Nota:** Trovare M abbastanza grande per garantire che qualunque soluzione del problema sia la peggiore.

**Teoria delle dualità**

**Risorse scarse:** sono quelle risorse completamente usate nel processo produttivo

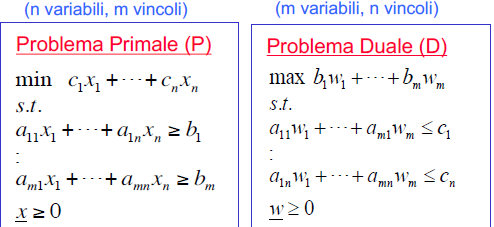
**Risorse abbondanti:** sono le risorse che alla fine del processo produttivo sono avanzate.

Per stabilire quali sono le risorse scarse e abbondanti si usano le variabili di slack e surplus.

La teoria della dualità permette di stabilire per ogni unità di risorsa in più che viene aggiunta al processo produttivo, quale sarà l’incremento produttivo.

Ad ogni problema di PL **(primale – P**) è associato un problema **Duale (D).**

Il problema primale P e duale D devono essere in **forma canonica**.

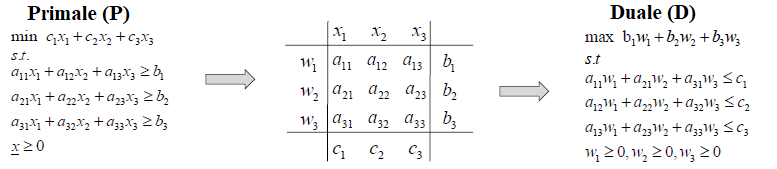


Il problema D ha tante variabili quanti sono i vincoli di P e tanti vincoli quante sono le variabili di P

Per il problema Duale D:

* La matrice A nel duale è la **matrice trasposta** (inverti righe e colonne)
* I termini noti ( del primale diventano i coefficienti di costo nel Duale e viceversa
* Ad ogni vincolo dei primale associamo una variabile del duale (cioè una variabile vincolo).

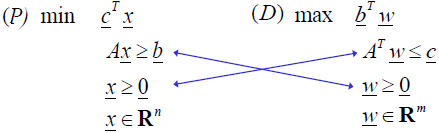
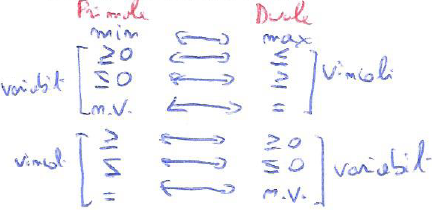
Se il problema P è di max 🡪 Duale D sarà di minimo; Se problema P è di minimo 🡪 duale D sarà di max



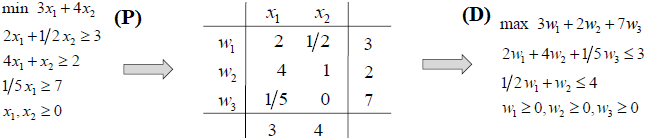
I vincoli del Primale indicano come sono fatti i segni delle variabili del duale

I vincoli del Duale indicano come sono fatti i segni delle variabili del primale.

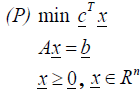
Uso della **regola di riferimento** per impostare i segni delle variabili e dei vincoli del Duale:

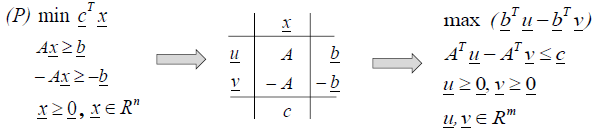
Dato il seguente problema primale P in forma canonica, scrivere il Duale D:

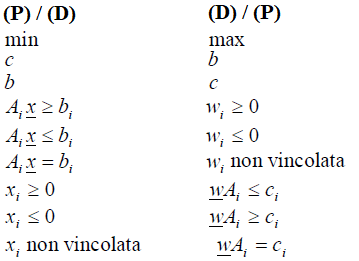


Duale di un primale con vincoli di uguaglianza (cioè vincoli di = di P )

 Trasformiamo i vincoli di uguaglianza in vincolo di ≥ come segue:

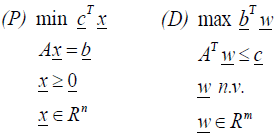
Abbiamo raddoppiato i vincoli quindi si introducono **variabili duali:**



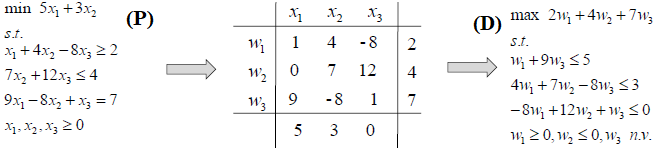


**Nota:**  con [differenza tra due numeri positivi – vista in precedenza]

Sostituendo si ottiene il duale D.



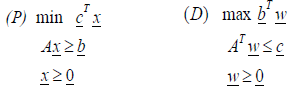
**Esempio:** Una volta scritto il Duale, si devono stabilire i segni dei vincoli 🡪 usa regola di riferimento.



Perché è importante la teoria della dualità:

* Le soluzioni del Primale (P) e Duale (D) sono legate tra loro;
* La soluzione ottima del Duale è un **bound** sulla soluzione ottima del primale
* Le soluzioni duali hanno un’interpretazione economica utile per l’analisi di sensitività (post ottimalità)

**Risultati fondamentali sulla teoria della dualità**



**Teorema (debole) della dualità**

Siano e soluzioni ammissibile rispettivamente per (P) e per (D), allora

**Nota:** La funzione obiettivo del primale () è ≤ della funzione obiettivo del Duale () perché il **Duale** è un problema di **massimo.**

**Nota:** Se P è di max, vale l’opposto, cioè

**Corollario 1** (del teorema debole della dualità)

Se è una soluzione ammissibile per (P) e è una soluzione ammissibile per (D) tali che allora e sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi

**Dim.** per assurdo (**Ipotesi:** )

Supponiamo per assurdo che non sia ottimo per (P). Quindi ∃ un’altra soluzione ammissibile per (P) tale che . Ma poiché per ipotesi

**Assurdo** perché va contro la tesi del teorema debole della dualità.

**Corollario 2** (del teorema debole della dualità)

Se il problema primale (P) è illimitato inferiormente allora il Duale (D) è inammissibile. Viceversa, se il Duale (D) è illimitato superiormente allora il primale (P) è inammissibile.

**Dim. (Ipotesi:** (P) è un problema di minimo; (D) è un problema di max

Supp. per assurdo che il valore ottimo del Primale (P) sia e che il Duale ammette una soluzione

Dal teorema della dualità debole si ha che per una qualsiasi soluzione ammissibile di (P). Ma questo implica che (**Assurdo).**

**Teorema (forte) della dualità**

Data una coppia di problemi Primale (P) e Duale (D), se uno dei due problemi ammette una soluzione ottima finita 🡪 anche l’altro problema ammette una soluzione ottima finita ed i valori ottimi delle rispettive funzioni obiettivo coincidono, cioè [, sono le soluzioni ottime dei rispettivi problemi]

[questa è una conseguenza del teorema]

In altre parole: se risolvi il problema Primale e trovi una soluzione ottima finita 🡪 ti garantisco che anche il Duale ammette una soluzione ottima finita e i due valori all’ottimo coincidono.

**Dim.** Sia la soluzione ottima del Primale e sia B la base ad esso associata.

Sia vogliamo mostrare che questo vettore è una soluzione ammissibile e ottima per (D), cioè che soddisfa il sistema di vincoli

**Ammissibilità** (continua su quaderno appunti.

**Ottimalità**: dimostriamo che la soluzione ottima del Duale è quella ottima

Il valore della funzione obiettivo del Duale in è:

= [ 🡪

Dal corollario 1 del th. debole della dualità sappiamo che, essendo , anche è ottima.

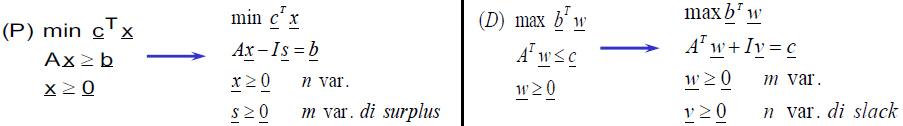
Dal teorema della dualità forte ricaviamo che, data la **base ottima B del primale**, è possibile calcolare velocemente la soluzione ottima del Duale (D) tramite l’equazione:

**Nota:** Se (P) ha ottimo illimitato 🡪 (D) è inammissibile

(P) ha soluzione finita ottima (D) ha soluzione ottima finita (ed i valori delle loro f.o. coincidono – th.forte)

Se P è inammissibile 🡪 (D) può essere illimitato o inammissibile

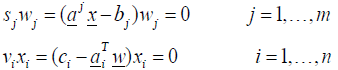
Consideriamo la coppia dei problemi (P) e (D) in forma canonica e trasformiamoli in forma standard:



Ad ogni variabili di (P) è associato un vincolo di (D) e quindi la corrispondente variabile di slack e viceversa

**Teorema dello scarto complementare:**

Data la coppia di soluzioni e rispettivamente ammissibili per (P) e (D), e sono **ottime** per (P) e (D) se e solo se:



Dove è la j-esima riga di A; e la i-esima colonna di A.

**Interpretazione economica del duale (sintesi)**

Le variabili duali rappresentano i **prezzi ombra:**

* prezzi minimi a cui bisogna vendere le risorse per mantenere invariato il valore ottimo della f. obiettivo.
* Indicano il tasso di crescita della funzione obiettivo al crescere dei termini noti

**Nota:** I prezzi ombra (le variabili duali ***w***) sono validi fino a quando non viene cambiata base ottima (quando ciò avviene, essi devono essere ricalcolati)

Per sapere quando la base ottima cambia dobbiamo studiare l’**analisi della sensitività** (post-ottimalità

Quando un vincolo è attivo, la risorsa ad esso associata è **scarsa**: la variabile corrispondente sarà .

Se la **risorsa è abbondante** sicuramente la variabile duale ad essa associata **è nulla.**

**Analisi della post-ottimalità** (Analisi della sensitività della soluzione)

Dato un problema di programmazione lineare in **forma standard di minimo** e data la soluzione ottima e la base ottima **B** associata, determinare come sia possibile variare certe caratteristiche del problema lasciando invariata la base ottima.

Data la base **B non devono cambiare le condizioni:**

1. Condizione di **ammissibilità:**  dove
2. Condizione di **ottimalità:**  [N indice variabili fuori base];

Ci sono 5 caratteristiche del problema che possono variare:

1. Variazione nel vettore dei costi
2. Variazione nel vettore dei termini noti
3. Variazione nella matrice dei vincoli A
4. Aggiunta di una nuova variabile
5. Aggiunta di un nuovo vincolo

**Caso 1: Variazione nel vettore dei costi**

Data una soluzione di base ottima (sia B la base associata a tale soluzione), supponiamo che il coefficiente di una delle variabili sia cambiato da

Dobbiamo considerare i seguenti 2 casi:

Caso 1.1: variazione di una coefficiente di costo relativo ad una **variabile non in base**

Caso 1.2: variazione di una coefficiente di costo relativo ad una **variabile in base**

**Nota:** variando il vettore dei costi varia la pendenza del gradiente. Cambia la condizione di ottimalità.

**Caso 1.1: non è in base** [: coefficiente di costo della variabile fuori base]

Sia , il coefficiente che viene modificato in questo modo:

[: range entro cui la variabile può cambiare]

In questo caso non subisce variazioni e quindi rimane inalterato

Solo il coefficienti di costo ridotto ( cambia come segue: [**Nota**:

Affinché la base ottima non cambia dobbiamo imporre questa condizione:

Quindi, per ogni valore di nell’intervallo , la base continua a essere ottima

* Se è ancora soluzione ottima
* Se **non** è più soluzione ottima e quindi occorre effettuare un’iterazione del simplesso per far entrare in base la variabile

**Caso 1.2: è in base** [si modifica una delle componenti di ] [B contiene indici delle variabili in base]

Sia il coefficiente di costo che viene modificato in

Poiché ; la modifica di implica la variazione di tutti i coefficienti di costo ridotto associati alle variabili fuori base. In particolare si ha che:

-esimo elemento a 1). **Nota**:  -esimo elemento a 1)

Facendo la somma componente per componente varia solo la componente i-esima, mentre tutte le altre restano inalterate.

**Nota:**  è la riga i-esima di

Le condizioni su si ottengono imponendo che: [ per la condizione di ottimalità]

**Caso 2: variazione del termine noto di un vincolo**

Sia il termine noto del i-esimo vincolo che viene variato in:

(rischia di essere annullata l’ammissibilità, cioè la condizione 1 della base B)

🡪 (uso il vettore per aggiungere al vettore la componente )

A causa di tale variazione si modificano i valori delle variabili in base:

**Nota:**  è la colonna i-esima di

Le condizioni su si ottengono imponendo che: [ per la condizione di ammissibilità di B]

Vedi esempio su analisi della sensitività su appunti cartacei.