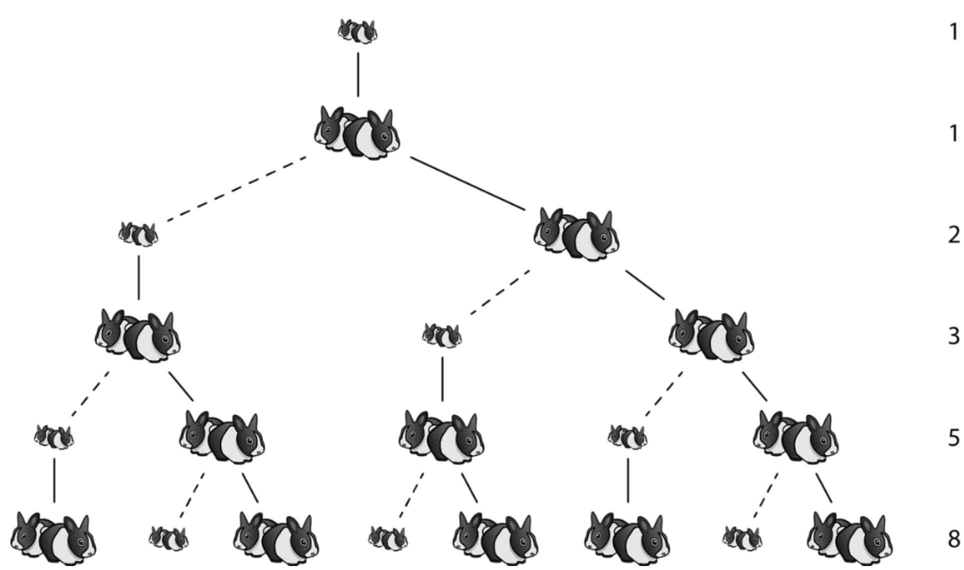
(1) Explique brevemente con qué problema de crecimiento poblacional se relaciona la sucesión de Fibbonacci

La Sucesión de Fibonacci puede explicarse con el problema de crecimiento poblacional de los conejos, ya que se reproducen al ritmo que indica la sucesión.

El proceso de reproducción y la sucesión se cuenta con el total de parejas durante cada periodo de tiempo y se da por los siguientes pasos:

(1) En un primer periodo, se tiene una pareja de conejos de corta edad, los cuales aún no pueden reproducirse. El total de parejas es 1
(2) En un segundo periodo, la pareja llega a edad fértil. El total de parejas es 1
(3) En un tercer periodo la pareja procrea a otra pareja de conejos, los cuales por su corta edad son fértiles. El total de parejas es 2
(4) En un cuarto periodo la pareja inicial procrea una pareja de conejos infértiles, mientras que la segunda pareja ha llegado a la edad fértil. El total de parejas es 3
(5) En un quinto periodo las dos parejas fértiles procrean una pareja de conejos cada una, mientras que la tercera llega a la edad fértil. El total de parejas es 5
(6) El proceso se repite, las tres parejas fértiles procrean una pareja cada una, mientras que las dos parejas restantes llegan a la edad fértil. El total de parejas es 8



En la Figura X se observa el ritmo de crecimiento de la población de los conejos. En este ámbito se distinguen los tres elementos de la ecuación de recurrencia (I)

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \qquad \text{(I)}$$

K : El tiempo o iteración del proceso de reproducción

F_k : Número de parejas fértiles en cada tiempo

F_{k+1} : Número de nuevas parejas

F_{k+2} : Total de parejas de conejos en cada tiempo

(1) Pruebe que el polinomio característico de A es $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ y que, por consiguiente, los valores propios son $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Tal como lo menciona el Teorema 1, tomamos en cuenta que:

A es una matriz cuadrada que representa la constante de crecimiento en la sucesión de Fibonacci, que es $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{\lambda}$ es un valor propio que integra la matriz

La comprobación inicia con la evaluación de λ como valor propio de la matriz A. Entonces si Si λ es un valor propio de la matriz A, λ deberá satisfacer det | $\lambda\mathrm{I}$ – A | = 0

Para calcular el determinante es necesario seguir el siguiente procedimiento:

- Se obtiene el producto de $\lambda\mathrm{I}$

$$\lambda\mathrm{I} = \lambda * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\mathrm{I} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

- Se resta $\lambda\mathrm{I}$-A

$$\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

- Se obtiene el determinante de $\lambda\mathrm{I}$-A

$$\det|\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A}| = \det\left|\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\det|\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A}| = (\lambda - 1)(\lambda) - (-1)(-1) = 0$$

$$\det|\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A}| = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Con base en lo anterior se comprueba que el polinomio característico de A es $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. El siguiente paso consiste en obtener los valores propios. Para ello se recurre al siguiente procedimiento:

- Las soluciones del polinomio se obtienen al aplicar la fórmula general

λ^2	-	λ	-	1	=	0
▼		▼		▼		

F.G. = $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

a		b		c		
1		-1		-1		

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{-1^2-4\,(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

- Según lo que se obtuvo de la fórmula general se tienen dos soluciones del polinomio

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Con base en esto se demuestra la veracidad de polinomio característico y sus soluciones

(2) Muestre ahora que los vectores propios correspondientes a λ_1 y λ_2 son respectivamente: $v_1 = \begin{bmatrix}\lambda_1\\1\end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix}\lambda_2\\1\end{bmatrix}$

<table>
<tr><td colspan="2">Para encontrar algún vector propio correspondiente a λ_1 debe igualarse Av con $\lambda_1 v$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>• Se</td><td>x + y = $\lambda_1 v$
x = $\lambda_1 y$
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = y\begin{bmatrix}\lambda_1\\1\end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>• Se</td><td>$Av = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\1\end{bmatrix}$ y $\lambda_1 v = \lambda_1\begin{bmatrix}\lambda_1\\1\end{bmatrix}$
$Av = \lambda_1 v$
$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\1\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}\lambda_1\\1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}\lambda_1+1\\\lambda_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}{\lambda_1}^2\\\lambda_1\end{bmatrix}$
$\lambda_1 + 1 = {\lambda_1}^2$
$\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$
$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>

- Se

</td><td>

P = $|v_1 , v_2 , \dots , v_n|$

$$v_1 = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix}\lambda_2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>

- Se obtiene P^{-1} por Gauss - Jordan

</td><td>

$$P^{-1} = \left|\begin{array}{cc|cc}\lambda_1 & \lambda_2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right| -\frac{1}{\lambda_1}$$

$$P^{-1} = \left|\begin{array}{cc|cc}\lambda_1 & \lambda_2 & 1 & 0\\ 0 & 1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_1} & 1\end{array}\right|\left(\frac{-\lambda_2\,\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)$$

$$P^{-1} = \left|\begin{array}{cc|cc}\lambda_1 & 0 & \frac{-\lambda_2\,\lambda_1}{{\lambda_1}^2+\lambda_1\lambda_2}+1 & \frac{-\lambda_2\,\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\\ 0 & 1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_1} & 1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\end{array}\right|\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)$$

$$P^{-1} = \left|\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{-\lambda_2\,\lambda_1}{{\lambda_1}^3+\lambda_1\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_1} & \frac{-\lambda_2\,\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\\ 0 & 1 & -\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\end{array}\right|$$

$$P^{-1} = \begin{vmatrix}\frac{\lambda_1}{{\lambda_1}^2-\lambda_1\lambda_2} & \frac{-\lambda_2\,\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\end{vmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{vmatrix}\frac{\lambda_1}{\lambda_1\,(\lambda_1-\lambda_2)} & \frac{-\lambda_2\,\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\end{vmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{vmatrix}\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{-\lambda_2\,\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\end{vmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{vmatrix}1 & -\lambda_2\\ -1 & \lambda_1\end{vmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>

$$P^{-1} = \frac{-\lambda_2\,\lambda_1}{{\lambda_1}^3+\lambda_1\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_1}$$

</td><td></td></tr>
</table>

$P^{-1} = \frac{-\lambda_2 \lambda_1{}^2 - \lambda_1{}^3 \lambda_1{}^2 \lambda_2}{-\lambda_1{}^4 + \lambda_1{}^3 \lambda_2}$ $P^{-1} = \frac{-\lambda_1}{-\lambda_1{}^2 + \lambda_1 \lambda_2}$ $P^{-1} = \frac{-\lambda_1}{-\lambda_1{}^2 + \lambda_1 \lambda_2}$ •	